$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{j=1}^{\ell} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle \;\to\; \min\limits_{\lambda}; \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу численно относительно λ_i, получаем линейный классификатор:

$$a(x) = \operatorname{sign}\Bigl(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i \langle x_i, x \rangle - w_0 \Bigr),$$

где $w_0 = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i \langle x_i, x_j \rangle - y_j$ для такого j, что $\lambda_j > 0$, $M_j = 1$

Определение

Объект x_i называется *опорным*, если $\lambda_i \neq 0$.

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{\ell}\lambda_i + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\ell}\sum\limits_{j=1}^{\ell}\lambda_i\lambda_j y_i y_j K(x_i, x_j) \;\to\; \min\limits_{\lambda}; \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \sum\limits_{i=1}^{\ell}\lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу численно относительно λ_i,
получаем линейный классификатор:

$$a(x) = \mathrm{sign}\Bigl(\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i y_i K(x_i, x) - w_0\Bigr),$$

где $w_0 = \sum\limits_{i=1}^{\ell}\lambda_i y_i K(x_i, x_j) - y_j$ для такого j, что $\lambda_j > 0$, $M_j = 1$

Определение

Объект x_i называется *опорным*, если $\lambda_i \neq 0$.

Определение

Функция от пары объектов $K(x,x')$ называется *ядром*, если она представима в виде скалярного произведения

$$K(x,x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle$$

при некотором преобразовании $\psi\colon X \to H$ из пространства признаков X в новое *спрямляющее* пространство H.

Возможная интерпретация:
признак $f_i(x) = K(x_i, x)$ — это оценка близости объекта x к опорному объекту x_i. Выбирая опорные объектов, SVM осуществляет отбор признаков в линейном классификаторе

$$a(x) = \mathrm{sign}\Bigl(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i K(x_i, x) - w_0 \Bigr).$$

Ядра в SVM расширяют линейную модель классификации:

1. $K(x,x') = \bigl(\langle x,x'\rangle + 1\bigr)^d$
— полиномиальная разделяющая поверхность степени $\leqslant d$;

2. $K(x,x') = \sigma\bigl(\langle x,x'\rangle\bigr)$
— нейронная сеть с заданной функцией активации $\sigma(z)$
(K не при всех σ является ядром);

3. $K(x,x') = \mathrm{th}\bigl(k_1\langle x,x'\rangle - k_0\bigr)$, $k_0, k_1 \geqslant 0$
— нейросеть с сигмоидными функциями активации;

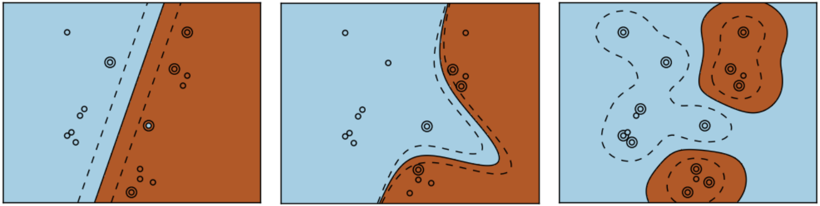
4. $K(x,x') = \exp\bigl(-\gamma\|x-x'\|^2\bigr)$
— сеть радиальных базисных функций (RBF ядро);

Классификация с различными ядрами

Гиперплоскость в спрямляющем пространстве соответствует нелинейной разделяющей поверхности в исходном.

Примеры с различными ядрами $K(x, x')$

линейное	полиномиальное	гауссовское (RBF)
$\langle x, x' \rangle$	$(\langle x, x' \rangle + 1)^d,\quad d{=}3$	$\exp(-\gamma \lVert x - x' \rVert^2)$



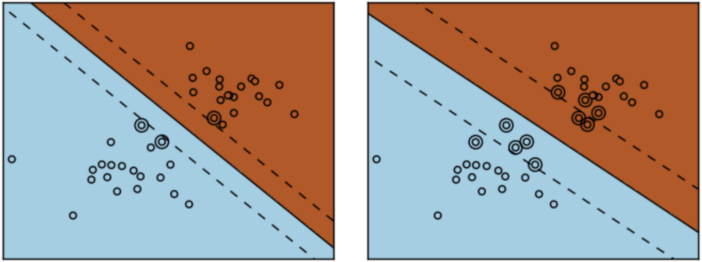
Пример из Python scikits learn: `http://scikit-learn.org/dev`

SVM — аппроксимация и регуляризация эмпирического риска:

$$\sum_{i=1}^{\ell}\bigl(1 - M_i(w, w_0)\bigr)_+ + \frac{1}{2C}\|w\|^2 \;\to\; \min_{w,w_0}.$$

большой C
слабая регуляризация

малый C
сильная регуляризация



Пример из Python scikits learn: `http://scikit-learn.org/dev`

Преимущества:

- Задача выпуклого квадратичного программирования имеет единственное решение.
- Выделяется множество опорных объектов.
- Имеются эффективные численные методы для SVM.
- Изящное обобщение на нелинейные классификаторы.

Недостатки:

- Опорными объектами могут становиться выбросы.
- Нет отбора признаков в исходном пространстве X.
- Приходится подбирать константу C.