**SECCION 2.5 APLICACIONES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES**

**EJEMPLO 1** **| Ejemplos de matrices estocásticas y no estocásticas**

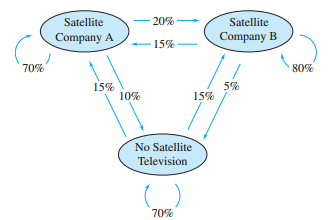
**Problema:** Las matrices en las partes son estocásticos, pero las matrices en las partesno son

**Solución*:***

1. Es una matriz estocástica, pues sus elementos y
2. Es una matriz estocástica, pues sus elementos y
3. No es una matriz estocástica, pues sus elementos pero

**EJEMPLO 2** **| Modelo de preferencia del consumidor.**

**Problema:** Dos empresas de la competencia ofrecen servicio de televisión por satélite a una ciudad con 100.000 hogares. La siguiente figura muestra los cambios en las suscripciones de satélite cada año. La compañía A ahora cuenta con 15.000 abonados y la Compañía B tiene 20.000 suscriptores. ¿Cuántos suscriptores tendrá cada empresa en un año?



**Solución:** La matriz que representa las probabilidades de transición es:

Y la matriz de estado que representa la población actual en los tres estados está dada por:

Para determinar la matriz de estado que representa las poblaciones en los tres estados después de un año, multiplicamos por para obtener

Analizaremos a la empresa , para entender con más facilidad todo el sistema

Supondremos que somos los dueños de la empresa A, y nos ponemos en la labor de probabilísticamente estimar: ¿Cuántos clientes tendremos el siguiente año?

Entonces empezamos calculando la probabilidad de que un cliente vuelva a contratar nuestros servicios el próximo año, y estimamos que hay una probabilidad del 70% (0.70) de que esto ocurra, entonces ¿cuantos clientes de los 15 000 que tenemos actualmente nos renovaran contrato? Esto lo estimamos con una sencilla multiplicación .

Además estimamos que existe una probabilidad del 15% de que un cliente de B nos contrate, si B tiene clientes ¿Cuántos clientes de B nos contrataran el próximo año?, de nuevo con una sencilla multiplicación respondemos esta pregunta

Y también encontramos que hay una probabilidad del de que una persona que aún no ha contratado a la competencia ni a nosotros nos contrate a nosotros, si actualmente en la ciudad hay 65 000 personas sin TV por cable, entonces: ¿Cuántos clientes que no hayan contratado aun ni a la competencia ni a nosotros vendrá a nosotros?, otra vez, esto se responde con una multiplicación

Entonces, con toda esta información, llegamos a la conclusión de que el próximo año probablemente tengamos clientes.

**EJEMPLO 3** **| Modelo de preferencia del consumidor.**

**Problema:** Suponiendo que la matriz de probabilidades de transición del Ejemplo 2 sigue siendo el mismo año tras año, encontrar el número de abonados que cada compañía de televisión va a tener después de . Redondee cada respuesta al número entero más próximo

**Solución:** Del ejemplo dos **se estimaron** que el número de suscriptores después de un año será:

Si se supone que la matriz de probabilidades de cambio se mantiene constante y aplicamos el mismo procedimiento del ejemplo dos a la ***matriz de estados estimada***, estaremos hallando una nueva estimación basada en otra estimación, que nos dirá como se distribuirá la población para el segundo año, si volvemos a hacer esto, estaremos hallando la estimación para el tercer año y así sucesivamente.

En el ejemplo 3, observe que existe una pequeña diferencia entre el número de suscriptores después de 5 años y de 10 años. Si continúa el proceso mostrado en este ejemplo, el número de suscriptores eventualmente alcanzara un estado estable. Esto es, en tanto la matriz no cambie, la matriz producto se aproxima al limite . En este ejemplo en particular el límite es la matriz de estado estable.

Usted puede comprobar que

Si:

Usando una calculadora de matrices se obtuvo:

Pero, ¿Cómo se obtuvo la media de la matriz ?

Cuanto mayor sea n, mejor será la aproximación a la , una mejor aproximación a dicho valor es entonces:

Utilizando la ***media aritmética para datos agrupados***.

**Nota:** Además también sería interesante hallar la probabilidad de que esta matriz de probabilidades cambie con el tiempo.

**EJEMPLO 9** **| Análisis de regresión con mínimos cuadrados.**

**Problema:** Demostrar que la ecuación en forma matricial es la matriz de coeficientes de la línea de regresión.

**Solución:**

La suma del cuadrado del error está dada por:

Luego despejando de:

**EJEMPLO 10** **| Análisis de regresión con mínimos cuadrados.**

**Problema:** Determine la línea de regresión de mínimos cuadrados para los puntos después encuentre la suma del cuadrado del error.

**Solución:** La línea de regresión es de la forma: , además sean las matrices:

Entonces, mediante la ecuación matricial se puede hallar la mejor línea de regresión por mínimos cuadrados.

(NOTA: las matrices A e Y tienen 5 renglones porque tenemos que hallar la mejor regresión de 5 puntos)

Por lo tanto, y , quedando entonces la línea de regresión como:

Además, si calculamos la suma del cuadrado del error:

Si

**SECCION 1.3 AJUSTE POLINOMIAL DE CURVAS**

**EJEMPLO 4** **| Una aplicación del ajuste de curvas**

**Problema (a):** ¿Por qué en este ejemplo usan una función logarítmica para relacionar mejor el periodo de los 3 primeros planetas y su distancia media al sol, y da un mejor ajuste?

**Solución:** El problema planteado en este ejemplo se puede abordar desde un enfoque “más estadístico” para ello el concepto de regresión es útil.

En palabras propias una regresión es una relación entre dos variables (X e Y)

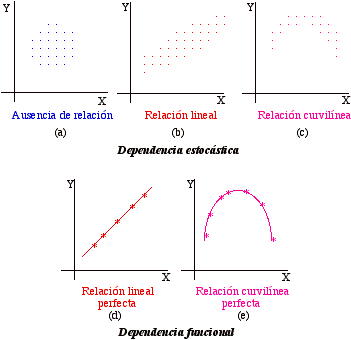
De una forma general lo primero que suele hacerse para saber si dos variables están relacionadas (saber si existe regresión), (de ahora en adelante se denominaran X e Y, siendo Y la variable dependiente y X la variable independiente o regresora).

Consiste en tomar una muestra aleatoria. Sobre cada individuo de la muestra se analizan las dos características en estudio de modo que para cada individuo se tenga un par de valores.

Segundamente, se representan dichos valores en unos ejes cartesianos, dando lugar a un diagrama de dispersión o nube de puntos. Así, cada individuo vendrá representado por un punto en el gráfico de coordenadas De esa forma se podrá obtener una primera idea acerca de la forma y de la dispercion de la nube de puntos.

Sin embargo deberá distinguirse entre dependencia funcional y dependencia estocástica, en el primer caso la relación es perfecta es decir, los puntos del diagrama de dispersión correspondiente aparecen sobre la función

Sin embargo, suele ocurrir que no hay una dependencia funcional perfecta, sino otra dependencia o relación menos rigurosa o dependencia estocástica. Entonces la relación entre X e Y, se escribiría , donde es un error (o residual), debido a por ejemplo, a no incluir variables en el modelo que son importantes a la hora de explicar el comportamiento de Y, y cuyos efectos sean diferentes a los de X; errores aleatorios o de medida o simplemente que se ha especificado mal el modelo.



**Tipos de regresión:** Si las dos variables X e Y se relacionan según un modelo de línea recta se habla de relación lineal simple

Cuando las variables X e Y se relacionan según una línea curva se habla de regresión no lineal o curvilínea. Aquí se puede distinguir entre regresión parabólica, exponencial, potencial, etc.

Cuando hay más de una variable independiente y una sola variable dependiente Y, se habla de regresión múltiple. Las variables se denominan regresoras, predictoras o independientes.

**Causalidad:** Es muy importante resaltar el hecho, de que un modelo sea capaz de explicar de manera adecuada las variaciones de la variable dependiente en función de la variable independiente, no implica que la primera sea causa de la segunda.

Es un error muy común confundir causalidad con casualidad. El hecho de que dos variables estén relacionadas no implica que una sea causa de la otra. Por ejemplo, si se realiza un estudio en el que se analizó el número de canas (X) y la presión arterial (Y) podría encontrarse una relación lineal casi perfecta. Eso no significa que el tener canas aumente la presión arterial, lo que verdaderamente está ocurriendo es que es la edad la causante de que se tengan más canas y una tendencia a tener más alta la presión arterial.

**Linealización:** Algunos problemas de regresión no lineal pueden linealizarse mediante una transformación en la formulación del modelo. Por ejemplo, considere el problema de regresión no lineal (ignorando el término del error)

Aplicando logaritmos a ambos lados de la expresión se obtiene:

1. **Método de linealizar ciertas ecuaciones**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Tipo de ecuación | Eje Y | Eje X | Pendiente | Ordenada en el origen |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Aplicando lo anterior al ejemplo:**

Dados los datos en originales, procedemos sacando logaritmo natural a las variables de las muestras x e y. obteniendo la siguiente tabla.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Distancia media al sol | Periodo |
| Mercurio |  |  |
| Venus |  |  |
| Tierra |  |  |
| Marte |  |  |
| Júpiter |  |  |
| Saturno |  |  |

Al aplicar este método de Linealización efectivamente, podemos observar que obtenemos una línea recta, se sabe que la ecuación de una línea en esta dada por , donde m es la pendiente y b la ordenada en el origen (Punto en el que la línea corta al eje y)

Si:

Tomando los valores x, y de marte y la tierra para hallar la pendiente de la línea.

Luego la ecuación de la línea queda:

Así, se puede decir que el cuadrado del periodo de los planetas es igual al cubo de su distancia media al sol.

**Referencias Bibliográficas:**

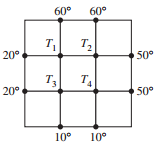
(2016). [online] Available at: <http://goo.gl/sxYxYb> [Accessed 8 Apr. 2016].

#### (2016). *Rua.ua.es*. Retrieved 8 April 2016, from <http://goo.gl/Ahnf60>

**EJERCICIO 35** **|Aplicación de análisis de redes, temperatura**

**Problema:** La figura muestra las temperaturas límite (en grados centígrados) de una placa metálica delgada aislante. La Temperatura de estado estacionario en una unión interior es aproximadamente igual a la media de las temperaturas en las cuatro uniones de los alrededores. Utilice un sistema de ecuaciones lineales para aproximar las Temperaturas interiores y .

**Solución:**

****

**Armando el sistema:**

**Armando la matriz aumentada:**

**Por el método de Gauss-:Jordan se obtiene la matriz:**

**SECCION 2.4 MATRICES ELEMENTALES**

**EJEMPLO 5A** **| Factorización LU**

**Problema (a):** Demuestre la siguiente factorización LU

A =

**Solución:** Para hallar la matriz L y la matriz U debemos seguir los siguientes procedimientos

**Primero:** Aplicando solo operaciones elementales de suma y resta entre renglones debemos intentar expresar la matiz como una matriz equivalente escalonada por renglones.

**Segundo:** Cada operación que realicemos en los renglones de deberá ser almacenada en una matriz elemental de tal forma que , Donde sea el producto de matrices elementales que almacenan las operaciones elementales realizadas en los renglones de , y sea la matriz escalonada por renglones.

|  |  |
| --- | --- |
| OPERACIÓN ELEMENTAL | MATRIZ ELEMENTAL |
|  |  |

Así la situación está de la siguiente manera:

Observemos que en la matriz ya es escalonada por renglones (triangular superior), es decir y , de esta manera podemos decir que

**SECCION 2.5 CRIPTOGRAFIA**

Un criptograma es un mensaje escrito de acuerdo con un código secreto.

En el campo de la criptografía muchas veces se agrupan conjuntos de funcionalidades que tienen una característica común y ese conjunto lo denominan “criptografía de [la característica que comparten]”, Ejemplos:

* Criptografía simétrica
* Criptografía asimétrica o de clave publica
* Criptografía hibrida

**Criptografía simétrica:** o criptografía de una clave (en inglés single-key cryptography), es un método criptográfico en el cual se usa una misma clave para cifrar y descifrar mensajes en el emisor y el receptor. Las dos partes que se comunican han de ponerse de acuerdo de antemano sobre la clave a usar. Una vez que ambas partes tienen acceso a esta clave, el remitente cifra un mensaje usando la clave, lo envía al destinatario, y éste lo descifra con la misma clave.

Un buen sistema de cifrado pone toda la seguridad en la clave y ninguna en el algoritmo. En otras palabras, no debería ser de ninguna ayuda para un atacante conocer el algoritmo que se está usando. Sólo si el atacante obtuviera la clave, le serviría conocer el algoritmo.

Actualmente, los ordenadores pueden descifrar claves con extrema rapidez, y ésta es la razón por la cual el tamaño de la clave es importante en los criptosistemas modernos. El algoritmo de cifrado DES usa una clave de 56 bits, lo que significa que hay claves posibles (72.057.594.037.927.936 claves). Esto representa un número muy alto de claves, pero un ordenador genérico puede comprobar el conjunto posible de claves en cuestión de días. Una máquina especializada puede hacerlo en horas. Algoritmos de cifrado de diseño más reciente como 3DES, Blowfish e IDEA usan claves de 128 bits, lo que significa que existen claves posibles. Esto equivale a muchísimas más claves, y aun en el caso de que todas las máquinas del planeta estuvieran cooperando, tardarían más tiempo en encontrar la clave que la edad del universo.

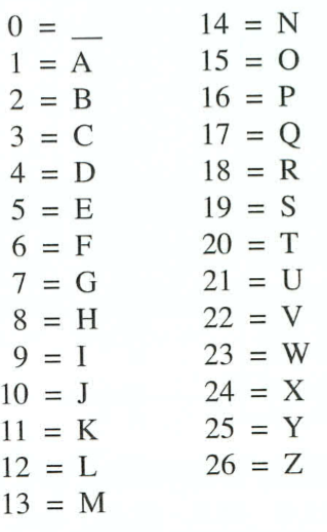
El principal problema con los sistemas de cifrado simétrico no está ligado a su seguridad, sino al intercambio/distribución de claves. Una vez que el remitente y el destinatario hayan intercambiado las claves pueden usarlas para comunicarse con seguridad, pero ¿qué canal de comunicación que sea seguro han usado para transmitirse las claves? Sería mucho más fácil para un atacante intentar interceptar una clave que probar las posibles combinaciones del espacio de claves.

Basado en lo anterior, podemos decir que los ejemplos descritos a continuación usan un método criptográfico simétrico, además estos ejemplos describen uno de muchos posibles algoritmos de encriptación, es decir, este algoritmo no es ni el único, ni el mejor.

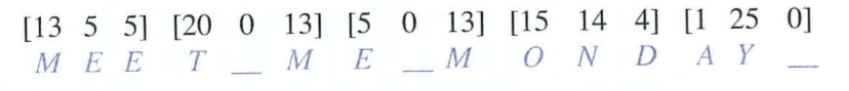
**EJEMPLO 4** **| Formación de matrices sin codificar**

**Problema:** Escribe las matrices fila no codificados de tamaño para el mensaje MEET ME MONDAY

**Solución:** Empecemos por asignar un número a cada letra del alfabeto:



Supongamos que queremos codificar el mensaje MEET ME MONDAY, debemos dividir el mensaje en matrices renglón conveniente. Ejemplo dividámosla en matrices renglón de 1x3

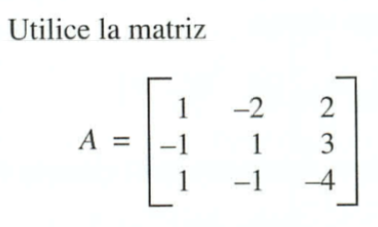


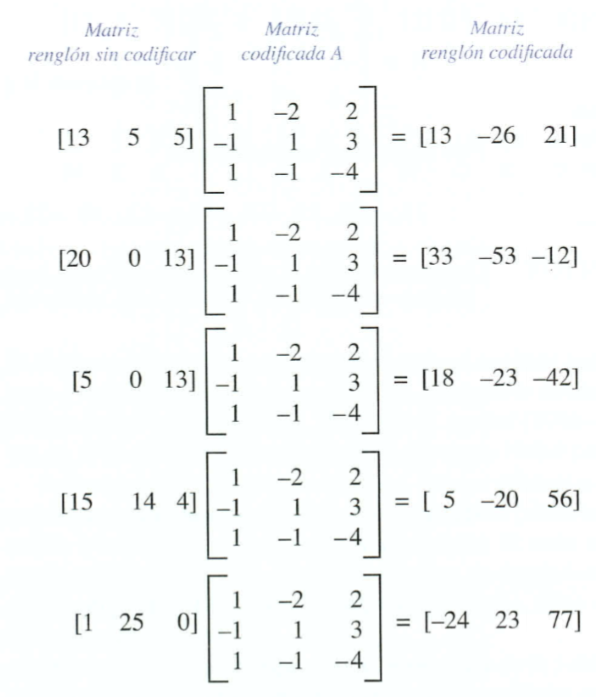
**EJEMPLO 5** **| Codificación de un mensaje**

**Problema:** Utilice la siguiente matriz invertible

 Para codificar el mensaje MEET ME MONDAY

**Solución:** Ahora debemos buscar una matriz invertible de orden y multiplicarla por las matrices renglón sin codificar (por la derecha)





Nota: Si la matriz renglón sin codificar es de orden 1xn, y la matriz codificada es de orden , la matriz codificada se debe multiplicar por la derecha de la matriz renglón sin codificar porque la multiplicación de matrices no está definida, pues el número de columnas de A es diferente al número de renglones de B.

**EJEMPLO 6** **| Decodificación de un mensaje**

**Problema:** Utilice la inversa de la matriz

Para decodificar el criptograma

**Solución:** Si es una matriz de 1xn sin codificar, entonces es la matriz codificada correspondiente donde A es una matriz cuadrada de orden n e invertible.

El receptor de la matriz codificada puede decodificar Y multiplicando el lado derecho por para obtener:

Se sabe que una de las propiedades de la matriz inversa es:

Y también se sabe que para matrices cuadradas:

**SECCION 4.7 COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE**

**EJEMPLO 1** **| Coordenadas y componentes en**

**Problema de coordenadas y componentes en :** Determinar la matriz de coordenadas de en con respecto a la base estándar

**Solución:** Se sabe que la matriz de coordenadas del vector con respecto a la base estándar esta determinada por los coeficientes que resultan de la combinación lineal de que forman el vector , esto es.

Sea entonces

De esta manera sabemos que los valores que descubramos para van a ser las coordenadas del vector con respecto a . Y se denotaran como (véase que el subíndice de la anterior notación indica con respecto a que base esta la coordenada del vector dado), si intentamos solucionar el problema vamos a obtener que

Entonces como , son los coeficientes de la combinación lineal de que forman al vector , podemos afirmar que . Así las componentes del vector son las mismas que sus coordenadas con respecto a la base estándar .

**EJEMPLO 2** **| Matriz de coordenadas con respecto a base estándar**

**Problema de determinación de una matriz de coordenadas con respecto a una base estándar:** La matriz de coordenadas del vector en con respecto a la base no estándar es , determine las coordenadas de con respecto a la base estándar

**Solución:** Dado que son las coordenadas de un vector con respecto a la base no estándar es correcto afirmar que:

Así es la coordenada del vector con respecto a la base no estándar . El problema ahora es determinar las coordenadas del vector

De esta manera la coordenada del vector con respecto a la base estandar es

**EJEMPLO 3** **| Matriz de coordenadas con respecto a base no estándar**

**Problema de determinación de una matriz de coordenadas con respecto a una base no estándar:** Encuentre la matriz de coordenadas del vector en con respecto a la base no estándar

**Solución:** Se sabe que las componentes de la matriz de coordenadas de con respecto a la base no estándar están determinadas por los coeficientes de la combinación lineal de que forman al vector . Así, podemos afirmar que:

Al igualar las componentes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales y la siguiente ecuación matricial.

Procedemos ahora a resolver el sistema aplicando **Gauss** o **Gauss-Jordán** a la matriz aumentada que se obtuvo del sistema anterior.

|  |  |
| --- | --- |
| OPERACIÓN ELEMENTAL | RESULTADO EN MATRIZ |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Entonces , Asi

Por tanto decimos que la coordenada del vector con respecto a la base es el vector

**EJEMPLO 4** **| Matriz de transición**

**Problema de determinación de una matriz de transición:** Halle la matriz de transición de a , para las siguientes bases en .

**Solución:** Sabemos que es la base estándar en y que las componentes de la matriz de coordenadas de cualquier vector en con respecto a la base estándar son iguales a las mismas compoentes del vector en cuestión. Así, podemos encontrar solución al problema de hallar la matriz de transición de la base a si nos planteamos el problema de hallar la matriz de coordenadas de un vector originalmente relativo a la base a un vector relativo a la base . Entonces, sabemos que.

Es decir la coordenadas de con respecto a son las mismas componentes del vector , ahora para encontrar las coordenadas de con respecto a procedemos a escribir la siguiente ecuación matricial.

Véase que la anterior ecuación matricial aparece de la definición de coordenada vista en el ejemplo 1 donde se decía que la coordenada de un vector con respecto a una base cualquiera va a estar definida por los coeficientes de la combinación lineal de la base (o soportes escalares de la combinación lineal) que forman al vector . Así cuando tenemos estamos diciendo que vamos a multiplicar la base por la matriz de coordenadas del vector relativo a la base .

Si ahora analizamos podemos darnos cuenta que las componentes de la matriz no están determinadas en el problema que se nos plantea. Por tanto llegamos a la conclusión que el problema podría ser resuelto usando alguna de las dos maneras siguientes. La primera seria como se hizo en el ejemplo 3 donde la los vectores de la base se multiplicaron por la matriz de coordenadas par así obtener un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres variables igualado componente a componente a la matriz y que luego se resolvió aplicando Gauss-Jordán a la matriz aumentada del sistema obtenido.

La segunda manera de resolver este problema es la que nos interesa ahora, esta consiste esencialmente en multiplicar en ambos lados de la ecuación por para de esta manera obtener .

Ahora es necesario advertir que en:

* a se le conoce como matriz de transición de a y se denota como , es decir P
* a se le conoce como matriz de transición de a y se denota como , es decir

Una vez entendido todo lo anterior podemos decir que nuestro problema de hallar la matriz de transición de a se transforma en el problema de hallar la inversa de la matriz .

A partir de lo anterior podemos concluir que la matriz de transición de B’ es

Pues

**EJEMPLO 5** **| Matriz de transición**

**Problema de determinación de una matriz de transición:** Encuentre la matriz de transición de a para las siguientes bases en .

**Solución:** En el ejemplo pasado era la base estándar de modo que se trataba solo de hallar la inversa de , en este caso no es la base estándar , sin embargo el procedimiento visto antes es aplicable a este problema y generalizable para problemas donde se necesita encontrar matrices de transición de una base a otra.

Comencemos escribiendo:

Usando Gauss-Jordán obtenemos:

Así se tiene que

**EJEMPLO 6** **| Representación de coordenadas en**

**Problema de determinación de coordenadas en :** Determine la matriz de coordenadas de relativa a la base estándar de .

**Solución:** Escribimos como una combinación lineal de la base .

Lo anterior indica que la matriz de coordenadas del vector con respecto a la base estándar es.

**EJEMPLO 7** **| Representación de coordenadas en**

**Problema de determinación de coordenadas en :** Determine la matriz de coordenadas de relativa a la base estándar de

**Solución:** Empezamos escribiendo como combinación lineal de .

De esta manera observando los soportes escalares de la combinación lineal de la base que forma a concluimos que la matriz de coordenadas de con respecto a es:

**EJEMPLO 3** **| Un conjunto ortogonal en**

**Problema:** Explicar la siguiente conclusión.

Un conjunto ortogonal en con el producto interno

Se puede mostrar que el conjunto:

Es ortogonal.

**Solución:** Antes que nada para demostrar la ortogonalidad del conjunto S se halla el producto interno entre los elementos de , se comprueba así que el producto interno entre los elementos del conjunto es igual a cero y por lo tanto es ortogonal.

Además este conjunto se puede normalizar dividiendo cada vector entre su magnitud y debido a que todo conjunto ortogonal es linealmente independiente, si hallamos una base del espacio generado por estamos hallando una forma de representar los elementos del espacio generado por en forma de combinación lineal de dicha base, en otras palabras, podremos representar ciertas funciones en forma de combinación lineal de senos y cosenos.

**EJEMPLO 9** **| Aplicando el proceso de Gram-Schmidt**

**Problema:** Aplicando el proceso de orto-normalización Gram-Schmidt a la base en , usando el producto interno:

**Solución:** Sea luego un vector ortogonalizado se halla así:

Luego

**EJERCICIOS 5.5**

**43.**

**Problema:** Mostrar que y son ortogonales en

**Solución:** Mostrar que

**44.**

**Problema:** Mostrar que y son ortogonales en

**Solución:** Se debe cumplir que

, sea

**45.**

**Problema:** Sea y vectores en

**Solución:**

1. Encontrar
2. Encontrar
3. Encontrar

Sea

1. Otonormalizar

Si , por lo tanto:

**46.**

**Problema:** Sea y vectores en

**Solución:**

1. Encuentre
2. Encuentre
3. Encuentre :

Por tanto:

1. Otonormalize le conjunto

Normalizando:

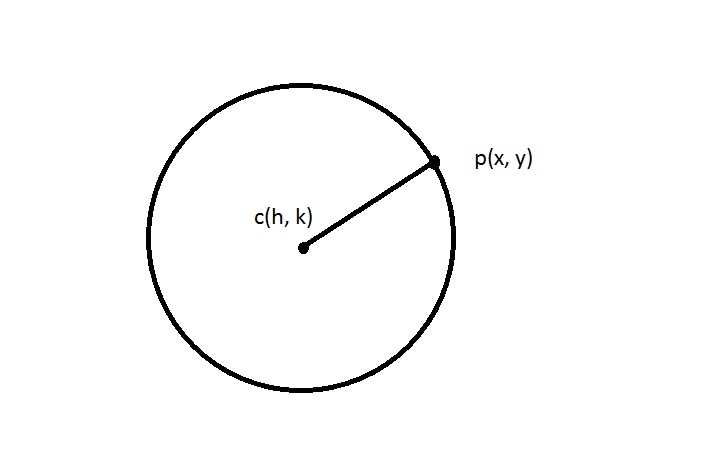
Sea:

Sea

**SECCION 4.8 APLICACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES**

**DEMOSTRACIONES** **| Circunferencia**

Sea la circunferencia que no tiene centro en el origen.



**Problema:** Demostrar

**Solución:** Se sabe que la distancia entre el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de la circunferencia siempre va a ser igual para todo P que cumpla que para demostrar esta ecuación nos valemos de calcular la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y el centro.

Sea: un punto cualquiera de la circunferencia el centro de la circunferencia.

Entonces el radio

**EJEMPLO 7** **| Rotación de una sección cónica**

**Problema:** Realiza una rotación de ejes para eliminar términos en:

**Análisis:** Como los ejes cónicos de la elipse son paralelos a los ejes coordenados de la base estándar entonces debemos rotar los ejes de la base estándar hasta que estas sean paralelas a los ejes cónicos de la elipse.

En otras palabras al conjunto de puntos que definen coordenadas de estos puntos respecto a la base estándar lo que queremos lograr es expresar las coordenadas de estos puntos respecto a la base no estándar el Angulo de rotación que aplicaremos a la base estándar esta dada por:

Entonces ahora sabemos que debemos rotar los ejes coordenados dados por la base estándar radianes en sentido anti horario, sabemos, que los coeficientes de la ecuación

Los siguientes valores:

Si sustituimos e en la función dada en el problema luego de simplificar.

Donde

: Coordenadas de un vector relativas a la base estándar S

: Matriz de transición de a

: Coordenadas de un vector relativos a base no estándar

En el ejemplo la nueva base rotada para es:

Y las coordenadas de los centros de la elipse relativa a son:

Y

Para encontrar las coordenadas de los vértices relativa a la base estándar, resolvemos:

**91. Hallar el Wronskiano de**

**92. Hallar el Wronskiano de**

**93. Hallar el Wronskiano de**

**94. Hallar el Wronskiano de**