PRIMERA PARTE: Estudiando el determinante

El producto cruz de dos vectores $a \ x \ b$ produce un vector c perpendicular al plano generado por los vectores a y b, para definir esta operación repasaremos el concepto de determinante y de matriz.

Definimos una *matriz* de 2×2 como un arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son cuatro escalares. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

son matrices de 2×2. El *determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

de dicha matriz es el número real definido por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

EJEMPLO 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2; \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2. \quad \blacktriangle$$

Una matriz de 3×3 es un arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde, de nuevo, cada a_{ij} es un escalar; a_{ij} denota el registro o posición en el arreglo que está en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. Definimos el

determinante de una matriz de 3×3 por la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

EJEMPLO 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0. \qquad \blacktriangle$$

Una importante propiedad de los determinantes es que al intercambiar dos renglones o dos columnas se cambia su signo. Para determinantes de 2×2, esto es una consecuencia de la definición. Para renglones tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y para columnas,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Una segunda propiedad fundamental de los determinantes es que podemos sacar como factor común a escalares de cualquier renglón o columna. Para determinantes de 2×2 esto significa

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}.$$

De manera análoga, para determinantes de 3×3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. Estos resultados se siguen de las definiciones. En particular, si cualquier renglón o columna está formado(a) por ceros, entonces el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: si cambiamos un renglón (o columna) mediante la suma de otro renglón (o, respectivamente, columna), no cambia el valor del determinante. Para el caso de 2×2 esto significa que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para el caso de 3×3, esto significa que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. De nuevo, se puede probar esta propiedad usando la definición de determinante (ver el ejercicio 35).

SOLUCIÓN Probaremos el caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. El caso $\alpha = 0 = \beta$ es trivial, y el caso en que exactamente uno de α, β es cero, es una modificación sencilla del caso que probamos. Usando las propiedades fundamentales de los determinantes, el determinante en cuestión es

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(factorizando $-1/\alpha$ en el segundo renglón)

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$

(factorizando $-1/\beta$ en el tercer renglón)

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sumando el segundo renglón al primero)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sumando el tercer renglón al primero)}$$

$= 0$. ▲

SEGUNDA PARTE: Definiendo el producto cruz

Ahora que hemos enunciado las propiedades necesarias de los determinantes y estudiado su historia, estamos listos para proceder con el producto cruz de vectores. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ vectores en $\mathbf{R}^3$. El *producto cruz* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, está definido como el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

o, simbólicamente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aunque sólo definimos los determinantes para arreglos de números *reales*, esta expresión formal que incluye *vectores* es una ayuda útil para recordar el producto cruz.

Notar que el producto cruz de dos vectores es otro vector; a veces se le llama *producto vectorial.*

EJEMPLO 4 *Hallar* $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

SOLUCIÓN

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}. \qquad \blacktriangle$$

Ciertas propiedades algebraicas del producto cruz se deducen de la definición. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y α, β y γ son escalares, entonces

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(ii) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

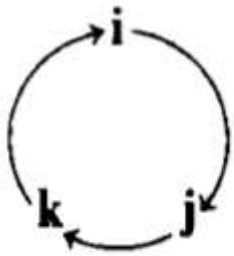
Notar que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, por la propiedad (i). Así, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. En particular,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

Además

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

lo cual se puede recordar al permutar cíclicamente $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ así:



TERCERA PARTE: Estudiando el triple producto

Nuestro siguiente objetivo es proporcionar una interpretación geométrica del producto cruz. Para hacerlo, introducimos primero el triple producto. Dados tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, el número real

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

se llama el *triple producto* de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ (en ese orden). Para obtener una fórmula sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Esto se puede escribir de manera más concisa como

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Supongan ahora que $\mathbf{a}$ es un vector en el plano generado por los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Esto significa que el primer renglón en la expresión como determinante de $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ es de la forma $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, y por lo tanto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$, por el

ejemplo 3. En otras palabras, el vector $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ es ortogonal a cualquier vector en el plano generado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, en particular tanto a $\mathbf{b}$ como a $\mathbf{c}$.

A continuación calculamos la magnitud de $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Noten que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|^2 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2.\end{aligned}$$

Desarrollando esta última expresión, vemos que es igual a

Primero desarrollamos los binomios cuadrados.

$$\begin{array}{r} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_2c_3 - b_3c_2 \quad * \\ \hline -b_2b_3c_2c_3 + b_3^2c_2^2 \\ b_2^2c_3^2 \quad -b_2b_3c_2c_3 \quad + \\ \hline b_2^2c_3^2 - 2b_2b_3c_2c_3 + b_3^2c_2^2 \end{array}$$

Entonces:

$$(b_2c_3 - b_3c_2)^2 = b_2^2c_3^2 - 2b_2b_3c_2c_3 + b_3^2c_2^2$$

$$(b_1c_3 - b_3c_1)^2 = b_1^2c_3^2 - 2b_1b_3c_1c_3 + b_3^2c_1^2$$

$$(b_1c_2 - b_2c_1)^2 = b_1^2c_2^2 - 2b_1b_2c_1c_2 + b_2^2c_1^2$$

Remplazando:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = b_2^2c_3^2 - 2b_2b_3c_2c_3 + b_3^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 - 2b_1b_3c_1c_3 + b_3^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 - 2b_1b_2c_1c_2 + b_2^2c_1^2$$

Si ordenamos:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = b_2^2c_3^2 + b_3^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_3^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - 2b_2b_3c_2c_3 - 2b_1b_3c_1c_3 - 2b_1b_2c_1c_2$$

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = b_2^2c_3^2 + b_3^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_3^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - (2b_2b_3c_2c_3 + 2b_1b_3c_1c_3 + 2b_1b_2c_1c_2)$$

Factorizando:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$$

Por lo tanto se tiene:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 - (\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})^2$$

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 - \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 \cos^2\theta$$

Entonces:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 - (\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})^2 = \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 - \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 \cos^2\theta$$

Si dividimos todo entre $\left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2$:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = 1 - \frac{(\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})^2}{\left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2} = 1 - \cos^2\theta$$

Por identidades trigonometricas se sabe que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, asi pues:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = 1 - \frac{(\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})^2}{\left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2} = \sin^2\theta$$

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right|^2 = 1 - (\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})^2 = \left||\boldsymbol{b}|\right|^2 \left||\boldsymbol{c}|\right|^2 \sin^2\theta$$

Donde θ es el angulo entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Por lo tanto es posible afirmar que la longitud del vector $\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}$ es:

$$\left||\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{c}|\right| = (\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c}) = \left||\boldsymbol{b}|\right| \left||\boldsymbol{c}|\right| |\sin\theta|$$

Combinando nuestros resultados concluimos que $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *es un vector perpendicular al plano generado por* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$, *con longitud* $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$. Sin embargo, hay dos vectores que pueden satisfacer estas condiciones, pues se pueden escoger dos direcciones que sean perpendiculares (o normales) al plano P generado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Esto se ve claro en la figura 1.3.1, que muestra las dos posibilidades $\mathbf{n}_1$ y $-\mathbf{n}_1$ perpendiculares a P, con $\|\mathbf{n}_1\| = \|-\mathbf{n}_1\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$.

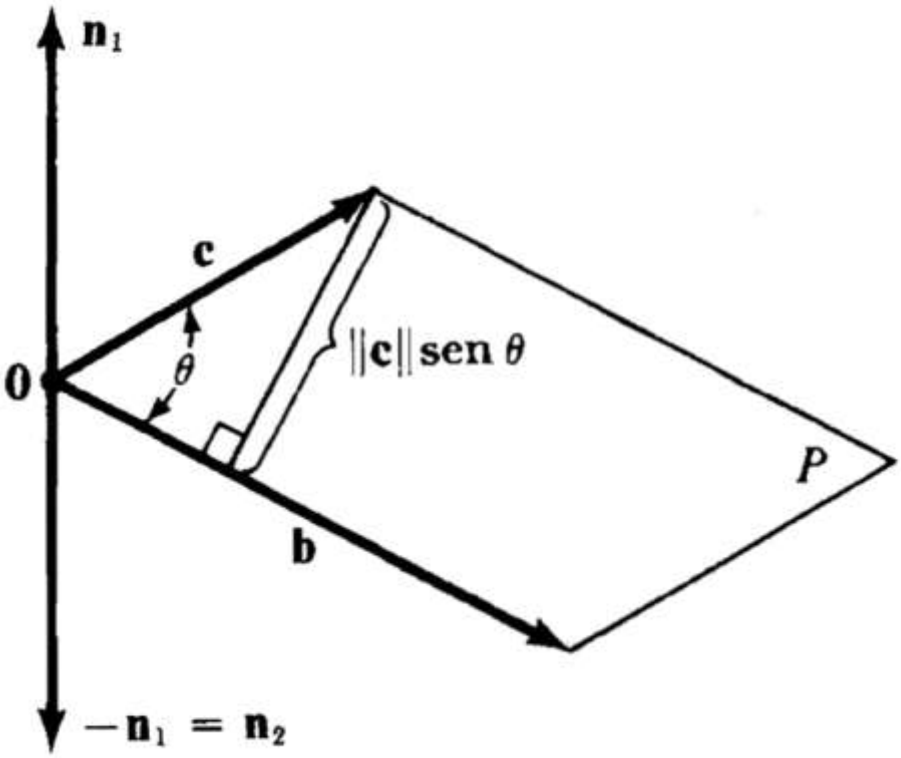


Figura 1.3.1 $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los dos posibles vectores ortogonales a $\mathbf{b}$ y a $\mathbf{c}$, ambos con norma $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$.

¿Cuál es el vector que representa a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$?, ¿$\mathbf{n}_1$ o $-\mathbf{n}_1$? La respuesta es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Resuelvan algunos casos, como $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, para verificarlo. La siguiente "regla de la mano derecha" determina la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$: Si colocan la palma de su mano derecha de manera que sus dedos se curven desde $\mathbf{b}$ en la dirección de $\mathbf{c}$ en un ángulo θ, el dedo pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (figura 1.3.2).

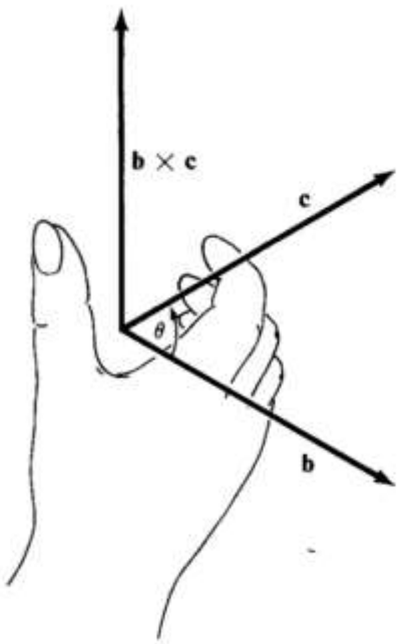


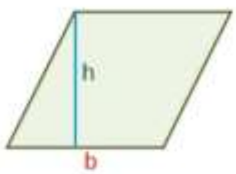
Figura 1.3.2 Regla de la mano derecha para determinar en cuál de las dos direcciones posibles apunta $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

CUARTA PARTE: Interpretando la magnitud del producto cruz

Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son colineales, $\operatorname{sen}\theta = 0$, de modo que $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son colineales, entonces generan un plano y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es un vector perpendicular a este plano. *La longitud de* $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\||\operatorname{sen}\theta|$, *es simplemente el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ (figura 1.3.3).

Para calcular el **área** de un **paralelogramo**, hay que conocer la longitud de la altura relativa a uno de sus lados.

Sea la base el lado b y la altura (h) relativa a la base. El **área** del paralelogramo es el producto de la base y la altura.



$$\acute{A}rea = b \cdot h$$

siendo b la base y h la altura relativa a la base

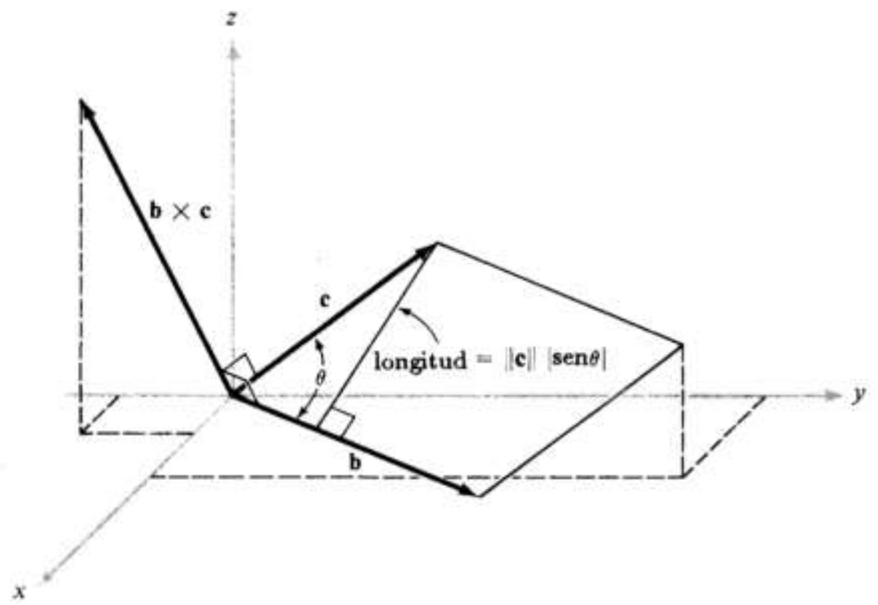


Figura 1.3.3 La longitud de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es igual al área del paralelogramo formado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

Usando el producto cruz podemos obtener la interpretación geométrica básica de los determinantes de 2×2 y, más adelante, de 3×3. Sean $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$ dos vectores en el plano. Si θ denota el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, hemos visto que $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$. Como ya se dijo, $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$ es el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ (ver la figura 1.3.3). Usando la definición del producto cruz,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Así, $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1.$$

De aquí se sigue que *el valor absoluto del determinante anterior es el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$.

QUINTA PARTE: Interpretando geométricamente determinantes de 2x2

EJEMPLO 6 *Hallar el área del triángulo con vértices en los puntos* $(1,1)$, $(0,2)$, *y* $(3,2)$ (figura 1.3.4).

SOLUCIÓN Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Es claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tiene la misma área que el triángulo con vértices en $\mathbf{0}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ (figura 1.3.4). En efecto, este último es sólo una traslación del triángulo anterior. Como el área de este triángulo trasladado es la mitad del área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{b}-\mathbf{a} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, hallamos que el área del triángulo con vértices $(1,1)$,

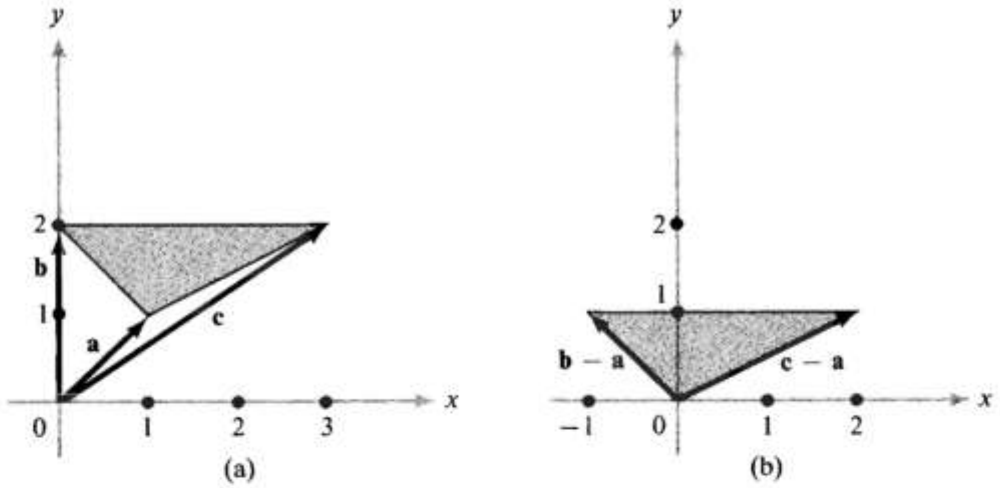


Figura 1.3.4 Problema (a): Hallar el área A del triángulo sombreado. Solución: Expresar los lados como diferencias de vectores (b) para obtener $A = \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\|$.

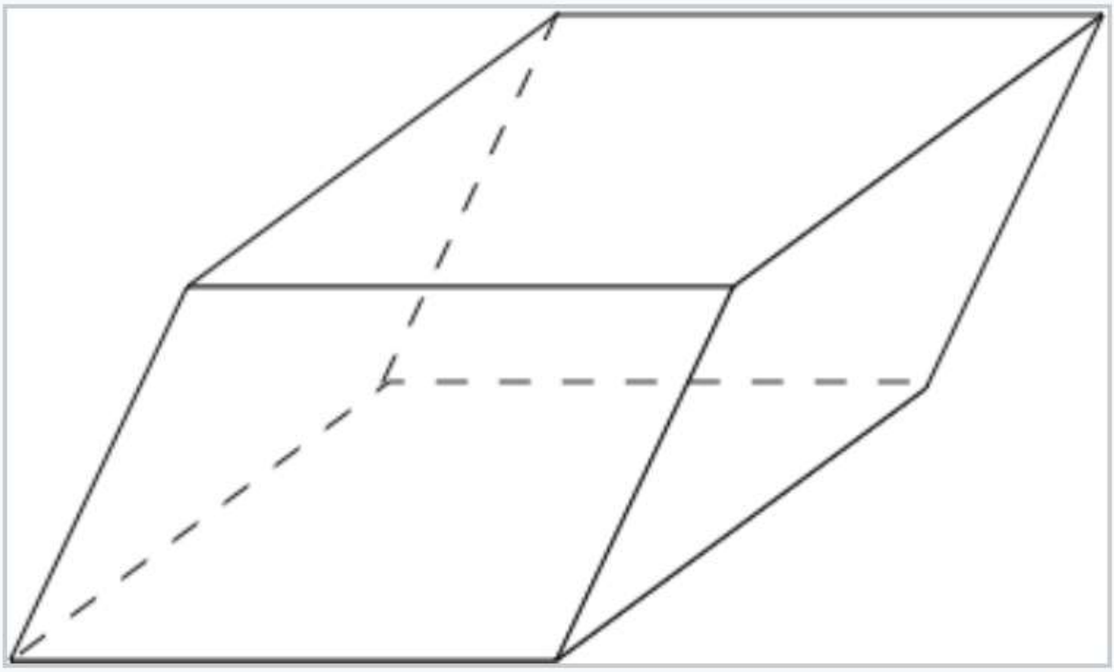
$(0,2)$ y $(3,2)$ es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

esto es, $\frac{3}{2}$. ▲

SEXTA PARTE: Interpretando geométricamente determinantes de 3x3

Un paralelepípedo es un poliedro de seis caras (por tanto, un hexaedro), en el que todas las caras son paralelogramos, paralelas e iguales dos a dos.



Paralelepípedo oblicuo.

Hay una interpretación de los determinantes de matrices de 3×3 como volúmenes, que es análoga a la interpretación de los determinantes de matrices de 2×2 como áreas. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, vectores en $\mathbf{R}^3$. Mostraremos que *el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes* **a**, **b** *y* **c** (figura 1.3.5) *es el valor absoluto del determinante*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

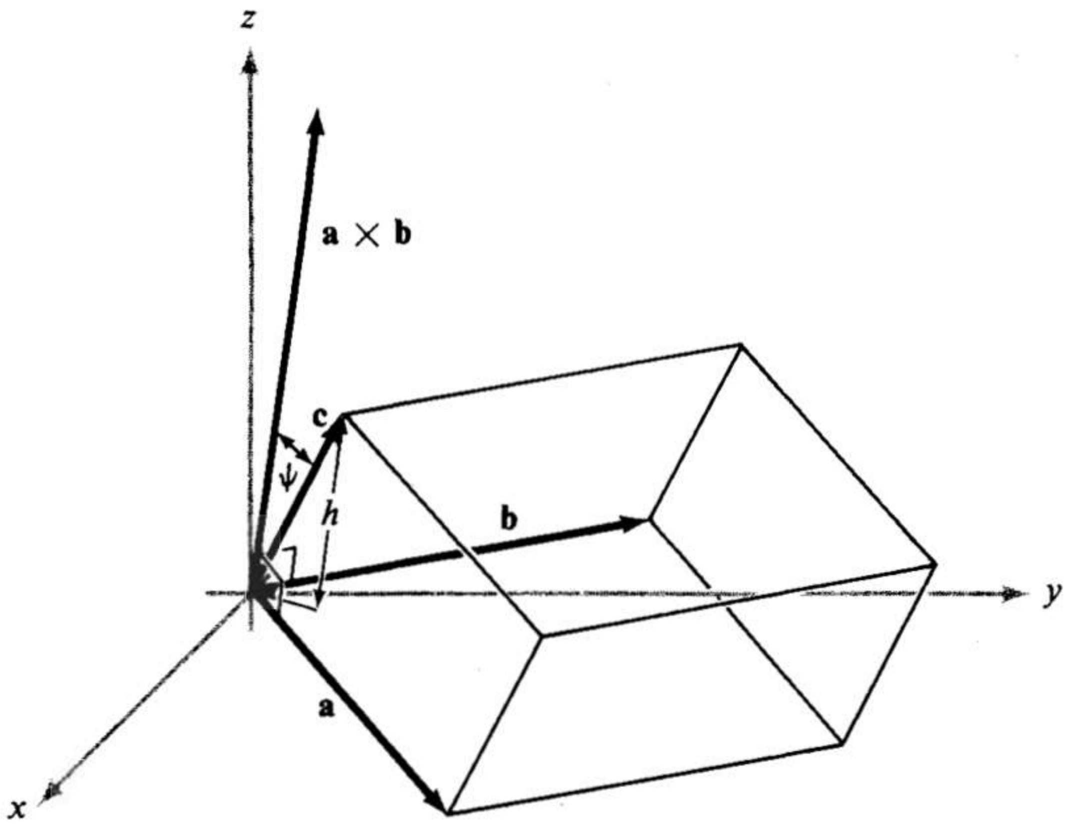


Figura 1.3.5 El volumen del paralelepípedo formado por **a**, **b**, **c** es el valor absoluto del determinante de la matriz de 3 × 3 con renglones **a**, **b** y **c**.

Sabemos que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ es el área del paralelogramo con lados adyacentes **a** y **b**. Más aún, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cos\psi$, donde ψ es el ángulo agudo que forma **c** con la normal al plano generado por **a** y **b**. Como el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes **a**, **b** y **c** es el producto del área de la base $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ por la altura $\|\mathbf{c}\| \cos\psi$, se sigue que el volumen es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Vimos en la pág. 35 que $D = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Al intercambiar renglones vemos que $D = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$; por lo tanto, el valor absoluto de D es el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes **a**, **b** y **c**.

SEPTIMA PARTE: Definiendo la ecuación del plano

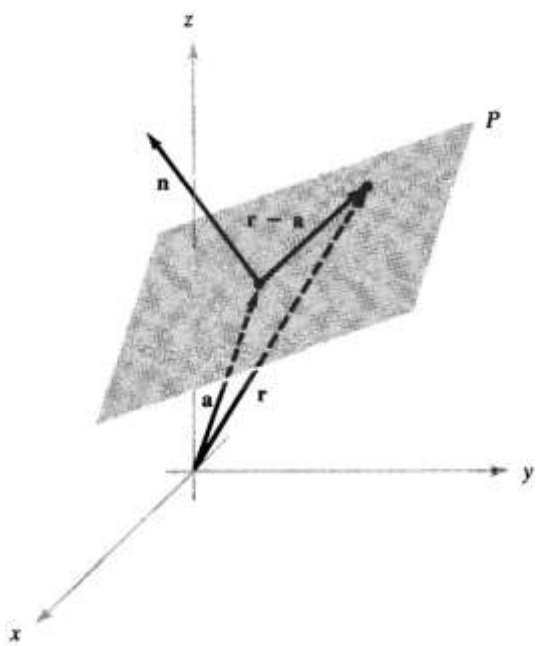


Figura 1.3.6 Los puntos $\mathbf{r}$ del plano que pasa por $\mathbf{a}$ y es perpendicular a $\mathbf{n}$ satisfacen la ecuación $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0$.

Para concluir esta sección, usaremos métodos vectoriales para determinar la ecuación de un plano en el espacio. Sean P un plano en el espacio, $\mathbf{a}$ un vector que termina en el plano, y $\mathbf{n}$ un vector normal al plano (ver la figura 1.3.6).

Si $\mathbf{r}$ es un vector en $\mathbf{R}^3$, entonces el extremo de $\mathbf{r}$ está en el plano P si, y sólo si, $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ es paralelo a P y, por lo tanto, si, y sólo si, $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0$ ($\mathbf{n}$ es perpendicular a cualquier vector paralelo a P —ver la figura 1.3.6—). Como el producto interno es distributivo, esta última condición es equivalente a $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$. Por lo tanto, si hacemos $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, se sigue que el extremo de $\mathbf{r}$ está en P si, y sólo si,

$$Ax+By+Cz=\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=Aa_1+Ba_2+Ca_3. \tag{3}$$

Como $\mathbf{n}$ y $\mathbf{a}$ se tomaron fijos, el lado derecho de la ecuación (3) es una constante, digamos, $-D$. Entonces una ecuación que determina el plano P es

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{4}$$

donde $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ es normal a P; recíprocamente, si A, B y C no son cero simultáneamente, el conjunto de puntos (x,y,z) que satisface la ecuación (4) es un plano con normal $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. La ecuación (4) es lineal en las tres variables x, y, z y así corresponde geométricamente a una superficie lineal, esto es, un plano, en $\mathbf{R}^3$.

Los cuatro números A, B, C, D no están determinados de manera única por P. Para verlo, noten que (x, y, z) satisface la ecuación (4) si, y sólo si, además satisface la relación

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano P, entonces $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para un escalar λ. Decimos que A, B, C, D *están determinadas por P salvo un múltiplo escalar.* Recíprocamente, dados A, B, C, D y A', B', C', D', determinan el mismo plano si $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para algún escalar λ. Este hecho se aclarará en el ejemplo 8.

El plano con normal $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, que pasa por un punto $R = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{5}$$

(notar que $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ satisface la ecuación (5), y entonces, en este caso, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

OCTAVA PARTE: Usando la ecuación del plano

EJEMPLO 7 *Determinar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, que contiene al punto $(1, 0, 0)$.*

SOLUCIÓN De la ecuación (5), el plano es $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$; esto es, $x + y + z = 1$. ▲

EJEMPLO 8 *Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos* $(1,1,1)$, $(2,0,0)$ *y* $(1,1,0)$.

SOLUCIÓN *Método 1.* Cualquier ecuación del plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Como los puntos $(1,1,1)$ y $(2,0,0)$ y $(1,1,0)$ están en el plano, tenemos

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ 2A \qquad\quad + D &= 0 \\ A + B \qquad + D &= 0 \end{aligned}$$

Mediante eliminación, reducimos este sistema de ecuaciones a la forma

$$\begin{aligned} 2A + D &= 0 \qquad \text{(segunda ecuación)} \\ 2B + D &= 0 \qquad (2 \times \text{tercera}-\text{segunda}) \\ C &= 0 \qquad (\text{primera}-\text{tercera}) \end{aligned}$$

Como los números A, B C y D están determinados salvo un múltiplo escalar, podemos fijar el valor de uno y así los otros quedarán determinados de manera única. Si hacemos $D = -2$, entonces $A = +1$, $B = +1$, $C = 0$. Así, la ecuación del plano que contiene a los puntos dados es $x + y - 2 = 0$.

Método 2. Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Cualquier vector normal al plano debe ser ortogonal a los vectores $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{b}$, que son paralelos al plano, ya que sus extremos están en el plano. Así, $\mathbf{n} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ es normal al plano. Al calcular el producto cruz tenemos,

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Así, cualquier ecuación del plano es de la forma $-x - y + D = 0$ (salvo un múltiplo escalar). Como $(2,0,0)$ está en el plano, $D = +2$. Después de sustituir, obtenemos $x + y - 2 = 0$. ▲

EJEMPLO 9 *Determinar la distancia del punto* $\mathrm{E} = (x_1, y_1, z_1)$ *al plano con ecuación* $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D = 0$.

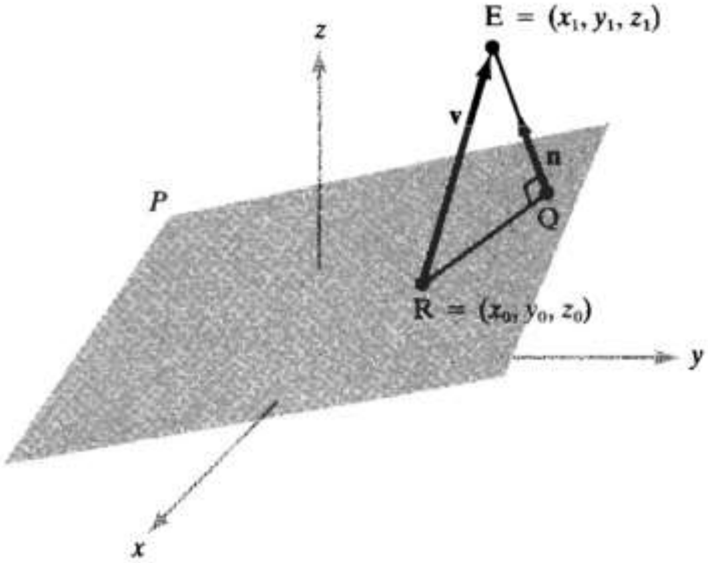


Figura 1.3.7 La geometría para determinar la distancia del punto E al plano P.

SOLUCIÓN Considerar al vector

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

que es un vector unitario normal al plano. Bajar una perpendicular de E al plano y construir el triángulo REQ mostrado en la figura 1.3.7. La distancia $d = |\mathrm{EQ}|$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (el vector de R a E) sobre $\mathbf{n}$; así,

$$\begin{aligned} \text{distancia} = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| &= |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Si el plano está dado en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, escogemos un punto (x_0, y_0, z_0) sobre él y notamos que $D = -(Ax_o + By_0 + Cz_0)$. Al sustituir en la fórmula anterior da

$$\text{distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \blacktriangle$$