# PRIMERA PARTE: Suma, resta y producto de vector por un escalar

En este capítulo consideramos las operaciones básicas de los vectores en el espacio tridimensional: la suma vectorial, la multiplicación por un escalar y los productos punto y cruz. En la sección 1.5 generalizamos algunos de estos conceptos al $n$-espacio y revisamos las propiedades de las matrices que necesitaremos en los capítulos 2 y 3.

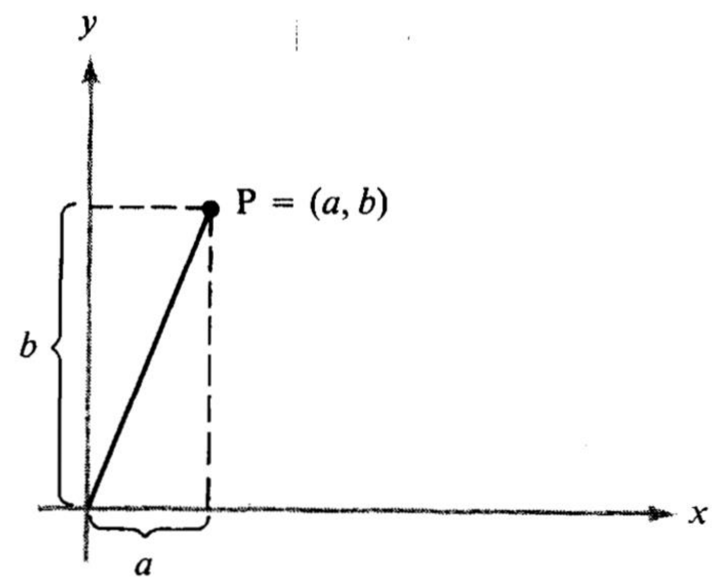


**Figura 1.1.1** Coordenadas cartesianas en el plano.

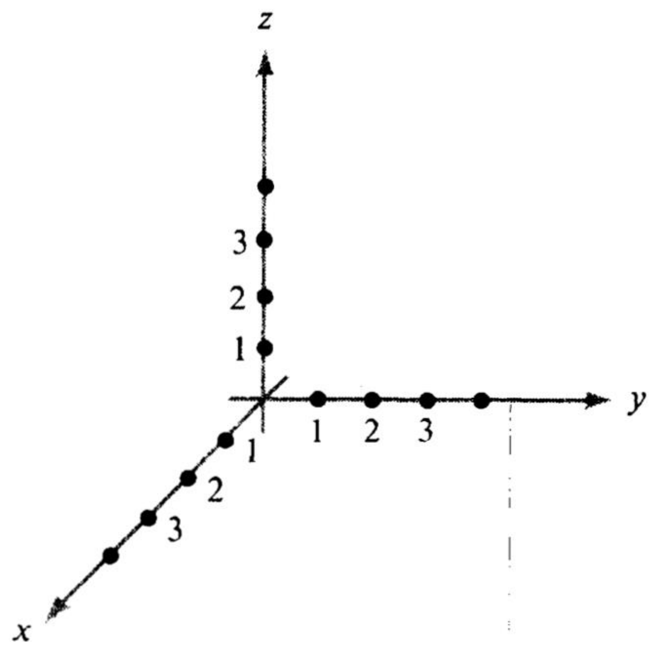


**Figura 1.1.2** Coordenadas cartesianas en el espacio.

Podemos asignar a cada punto P en el espacio una terna (ordenada) única de números reales $(a, b, c)$; y, recíprocamente, a cada terna podemos asignar un punto único en el espacio, tal y como lo hicimos para los puntos en el plano. Al

Debido a la posibilidad de asociar de esta manera los puntos del espacio con las ternas ordenadas, es común usar la expresión "punto $(a, b, c)$" en lugar de la

frase más larga "punto P que corresponde a la terna $(a, b, c)$." Si la terna $(a, b, c)$ corresponde a P, decimos que $a$ es la coordenada $x$ (o la primera coordenada), $b$ es la coordenada $y$ (o segunda coordenada), y $c$ es la coordenada $z$ (o tercera coordenada) de P. Teniendo en mente este método para representar puntos, vemos que el eje $x$ está formado por los puntos de la forma $(a, 0, 0)$, donde $a$ es cualquier número real; el eje $y$ está formado por los puntos $(0, a, 0)$; y el eje $z$ está formado por los puntos $(0, 0, a)$. También se suele denotar a los puntos en el espacio con las letras $x$, $y$ y $z$ en lugar de $a$, $b$ y $c$. Así, la terna $(x, y, z)$ representa un punto cuya primera coordenada es $x$, la segunda coordenada es $y$, y la tercera coordenada es $z$.

Empleamos la notación siguiente para la recta, el plano y el espacio tridimensional.

(i) La recta real se denota por $\mathbf{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbf{R}$ que $\mathbf{R}^1$).
(ii) El conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$ de números reales se denota por $\mathbf{R}^2$.
(iii) El conjunto de todas las ternas ordenadas $(x, y, z)$ de números reales se denota por $\mathbf{R}^3$.

Cuando se habla en conjunto de $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, se escribe $\mathbf{R}^n$, $n = 1$, 2 o 3; o $\mathbf{R}^m$, $m = 1, 2, 3$.

La operación de suma se puede extender de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Para $\mathbf{R}^3$ se procede de la manera siguiente. Dadas dos ternas $(x, y, z)$ y $(x', y', z')$, definimos su *suma* mediante

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$

El elemento $(0, 0, 0)$ se llama *elemento cero* (o sólo *cero*) de $\mathbf{R}^3$. El elemento $(-x, -y, -z)$ se llama *inverso aditivo* (o *negativo*) de $(x, y, z)$, y se escribe $(x, y, z) - (x', y', z')$ en lugar de $(x, y, z) + (-x', -y', -z')$.

**Producto por un escalar** (la palabra "escalar" es sinónimo de "número real"). Este producto combina escalaras (números reales) y elementos de $\boldsymbol{R}^3$ (ternas ordenadas) para producir elementos de $\boldsymbol{R}^3$ de la manera siguiente: dado un escalar $\alpha$ y una terna $(x, y, z)$, definimos el múltiplo escalar o producto por un escalar mediante

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

**EJEMPLO 2**

$$\begin{aligned}
2(4, e, 1) &= (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2) \\
6(1, 1, 1) &= (6, 6, 6) \\
1(x, y, z) &= (x, y, z) \\
0(x, y, z) &= (0, 0, 0) \\
(\alpha + \beta)(x, y, z) &= ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) \\
&= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) \\
&= \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z). \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Como consecuencia de las definiciones, la suma y el producto por un escalar para $\mathbf{R}^3$ satisfacen las siguientes identidades:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(i)} & (\alpha\beta)(x,y,z) = \alpha[\beta(x,y,z)] & \text{(asociatividad)} \\
\text{(ii)} & (\alpha+\beta)(x,y,z) = \alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z) & \multirow{2}{*}{(distributividad)} \\
\text{(iii)} & \alpha[(x,y,z)+(x',y',z')] = \alpha(x,y,z) + \alpha(x',y',z') & \\
\text{(iv)} & \alpha(0,0,0) = (0,0,0) & \text{(propiedades del} \\
\text{(v)} & 0(x,y,z) = (0,0,0) & \text{elemento cero)} \\
\text{(vi)} & 1(x,y,z) = (x,y,z) & \text{(propiedad del elemento identidad)}
\end{array}
$$

Para $\mathbf{R}^2$ se define la suma de la misma manera que para $\mathbf{R}^3$, mediante

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),$$

y el producto por un escalar se define como

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Volvamos a la geometría de nuestro modelo. Una de las herramientas más poderosas de las matemáticas y sus aplicaciones ha sido el concepto de *vector*. Se define (geométricamente) un vector como un segmento de recta dirigido que comienza en el origen, esto es, un segmento de recta con magnitud y dirección especificados, con punto inicial en el origen. ¿Han oído decir a los pilotos "Estamos en el radio vector de la pista de aterrizaje"? Se refieren al vector que da la dirección y la distancia a que se encuentra el aeroplano de la pista de aterrizaje. Es inútil señalar lo importantes que son en este caso la dirección y la distancia. La figura 1.1.4 muestra varios vectores. Así, los vectores se pueden concebir como flechas que comienzan en el origen. Generalmente se imprimen en letras negritas: $\mathbf{v}$.

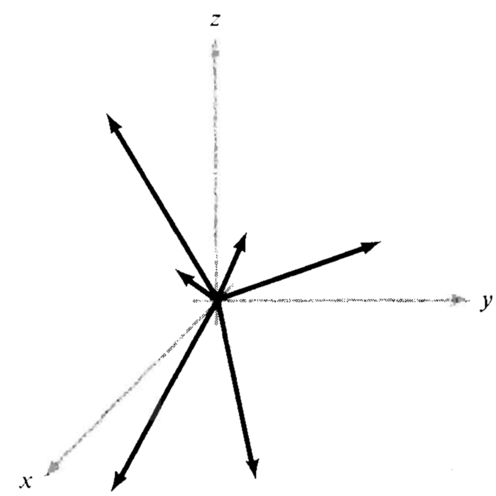


**Figura 1.1.4** Los vectores se pueden concebir, geométricamente, como flechas saliendo del origen.

Usando esta definición de vector, podemos asociar con cada vector $\mathbf{v}$ el punto $(x, y, z)$ en el espacio, donde termina $\mathbf{v}$, y, recíprocamente, a cada punto $(x, y, z)$ en el espacio podemos asociar un vector $\mathbf{v}$. Así, identificaremos $\mathbf{v}$ con $(x, y, z)$ y escribiremos $\mathbf{v} = (x, y, z)$. Por esta razón, los elementos de $\mathbf{R}^3$ no son sólo ternas ordenadas de números reales, sino que también se llaman vectores. La terna $(0, 0, 0)$ se denota por $\mathbf{0}$.

*Decimos que dos vectores son* ***iguales*** *si, y sólo si, tienen la misma dirección y la misma magnitud.* Esta condición se puede expresar de manera algebraica diciendo que si $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y'z')$, entonces

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad x = x',\ y = y',\ z = z'.$$

Geométricamente definimos el vector suma como sigue. En el plano que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (ver la figura 1.1.5), formemos el paralelogramo que

tiene como un lado a $\mathbf{v}_1$, y como lado adyacente a $\mathbf{v}_2$. Entonces la suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ es el segmento de recta dirigido a lo largo de la diagonal del paralelogramo. Esta

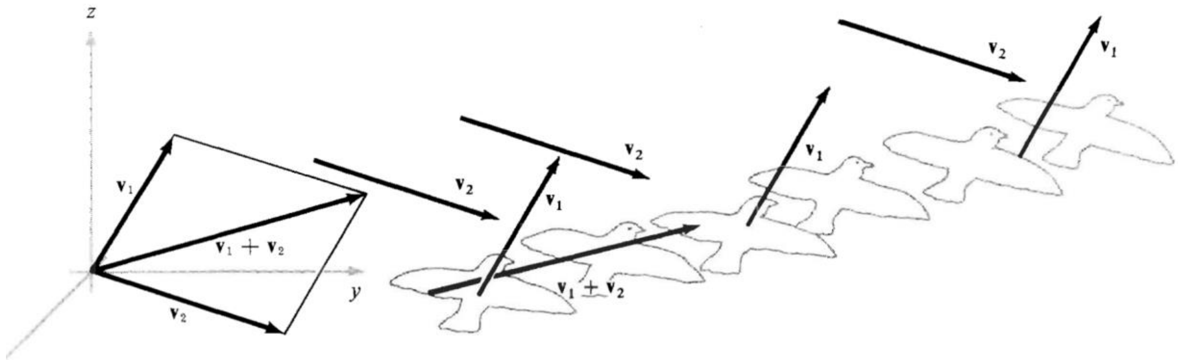


**Figura 1.1.5** Geometría de la suma de vectores.

consideración geométrica de la suma de vectores es útil en muchas situaciones físicas, como veremos más adelante. Para visualizar fácilmente esto mediante un ejemplo, consideren un ave o un aeroplano volando con velocidad $\mathbf{v}_1$, con un viento con velocidad $\mathbf{v}_2$. Lo que se ve es la velocidad resultante $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

En la figura 1.1.7(a) se ilustra otra manera de considerar la suma vectorial: en términos de triángulos, en lugar de paralelogramos. Esto es, trasladamos (sin rotación) el segmento de recta dirigido que representa al vector $\mathbf{v}_2$, de modo que comience al final del vector $\mathbf{v}_1$. El punto final del segmento dirigido resultante es el punto final del vector $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Notamos que cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son colineales, el triángulo se colapsa. Se ilustra esta situación en la figura 1.1.7(b).

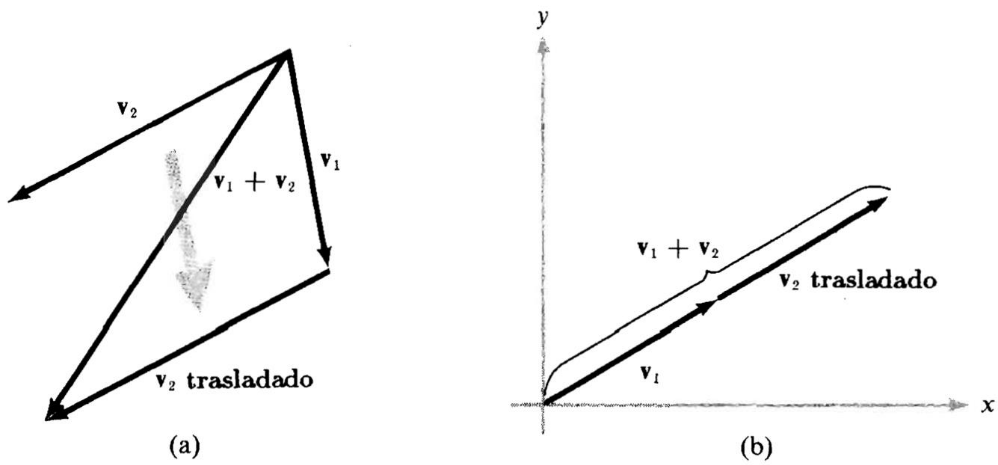


**Figura 1.1.7** (a) Se puede visualizar la suma vectorial en términos de triángulos así como de paralelogramos. Sin embargo, el triángulo se colapsa cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son colineales (b).

Los múltiplos escalares de los vectores tienen interpretaciones geométricas similares. Si $\alpha$ es una escalar y $\mathbf{v}$ es un vector, definimos $\alpha\mathbf{v}$ como el vector que tiene $\alpha$ veces la longitud de $\mathbf{v}$, con la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\alpha > 0$, pero con dirección opuesta si $\alpha < 0$. La figura 1.1.8 ilustra varios ejemplos.

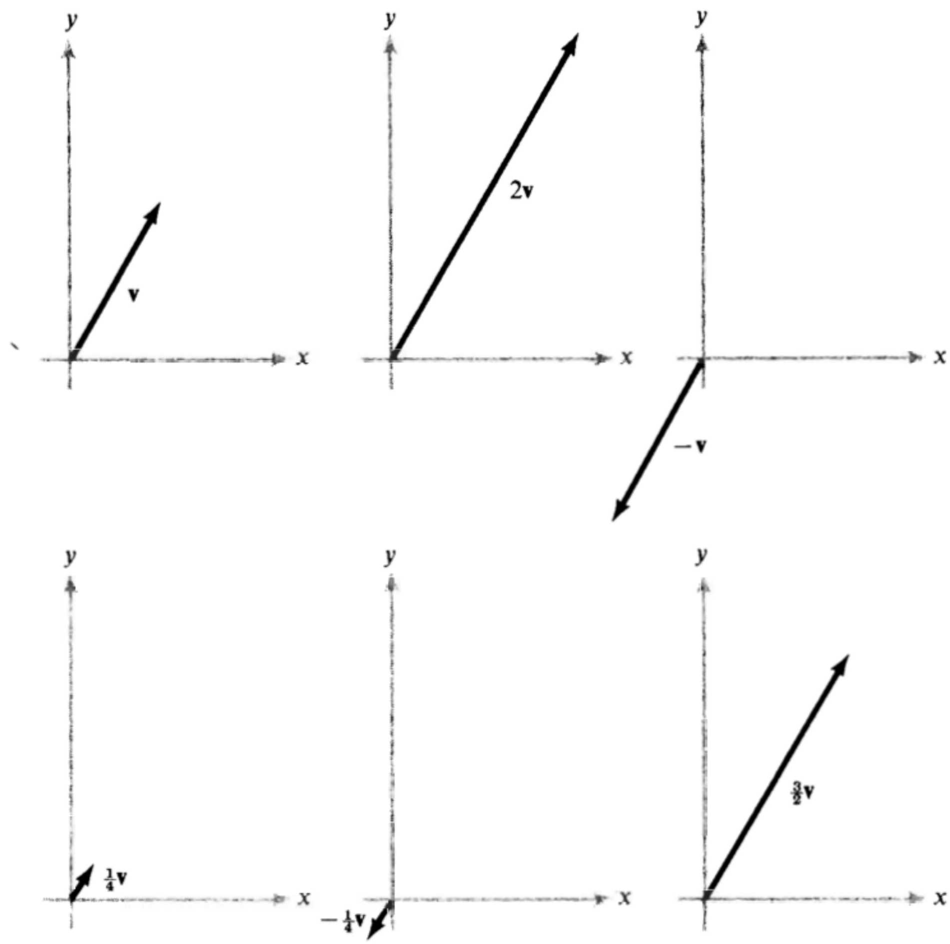


**Figura 1.1.8** Algunos múltiplos escalares de un vector **v**.

## SEGUNDA PARTE: Describiendo planos a partir de vectores

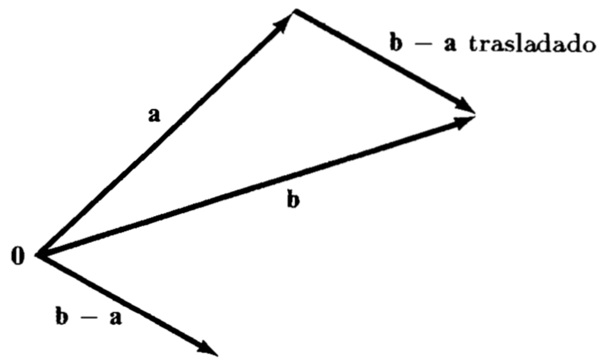


**Figura 1.1.9** Geometría de la resta vectorial.

¿Cómo representamos geométricamente al vector $\mathbf{b}-\mathbf{a}$? Como $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ es el vector que al sumarlo a $\mathbf{a}$ da $\mathbf{b}$. En vista de esto, podemos concluir que $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ es el vector paralelo a, y con la misma magnitud que, el segmento de recta dirigido que comienza en el punto final de $\mathbf{a}$ y termina en el punto final de $\mathbf{b}$ (ver la figura 1.1.9).

Denotemos por $\mathbf{i}$ al vector que termina en $(1,0,0)$, por $\mathbf{j}$ al vector que termina en $(0,1,0)$ y por $\mathbf{k}$ al vector que termina en $(0,0,1)$. Por la definición de suma vectorial y la multiplicación por un escalar, hallamos que si $\mathbf{v} = (x,y,z)$, entonces

$$\mathbf{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, podemos representar cualquier vector en el espacio tridimensional en términos de los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Es por esto que a los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se les llama *vectores de la base canónica* para $\mathbf{R}^3$.

**EJEMPLO 4** *Describir los puntos que están dentro del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$.

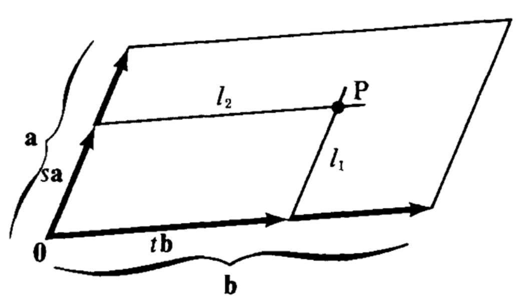


**Figura 1.1.11** Descripción de los puntos dentro del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

**SOLUCIÓN** Considerar la figura 1.1.11. Supongamos que P es cualquier punto dentro del paralelogramo dado y construimos las rectas $l_1$ y $l_2$ que pasan por P y son paralelas a los vectores **a** y **b**, respectivamente; vemos que $l_1$ interseca el lado del paralelogramo determinado por el vector **b** en algún punto $t\mathbf{b}$, donde $0 \leq t \leq 1$. Asimismo, $l_2$ interseca al lado determinado por el vector **a** en algún punto $s\mathbf{a}$, donde $0 \leq s \leq 1$.

Notar que P es el punto final de la diagonal de un paralelogramo con lados adyacentes $s\mathbf{a}$ y $t\mathbf{b}$; por lo tanto, si **v** denota al vector que termina en P, vemos que $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Así, todos los puntos en el paralelogramo dado son puntos finales de vectores de la forma $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$. Regresando sobre nuestros pasos vemos que todos los vectores de esta forma terminan dentro del paralelogramo. ▲

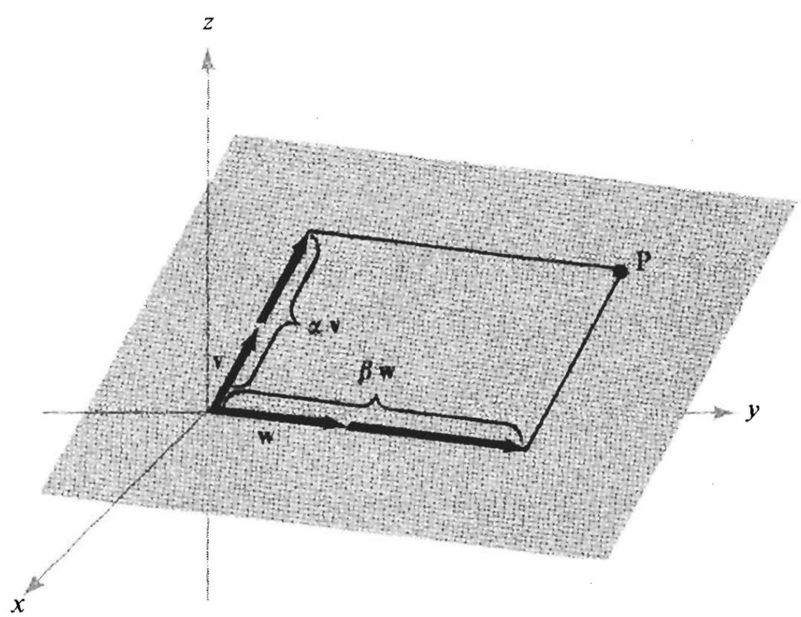


**Figura 1.1.12** Descripción de los puntos P en el plano formado por los vectores **v** y **w**.

Como dos rectas que pasan por el origen determinan un plano que pasa por el origen, lo mismo sucede con dos vectores no paralelos. Si aplicamos el mismo razonamiento del ejemplo 4, vemos que el plano formado por dos vectores no paralelos **v** y **w** consta de todos los puntos de la forma $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, donde $\alpha$ y $\beta$ varían sobre los números reales. Noten que cualquier punto P en el plano formado por los dos vectores será el vértice opuesto del paralelogramo determinado por $\alpha\mathbf{v}$ y $\beta\mathbf{w}$, donde $\alpha$ y $\beta$ son algunos escalares, como en la figura 1.1.12.

El plano determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se llama plano *generado por* $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Cuando $\mathbf{v}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos y el plano degenera en una recta. Cuando $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (esto es, cuando ambos son el vector cero), obtenemos un solo punto.

Hay tres planos particulares que surgen de manera natural en un sistema coordenado y que usaremos más adelante. Al plano generado por los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se le llama plano $xy$, al plano generado por $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, plano $yz$, y al plano generado por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$, plano $xz$. Se ilustran estos planos en la figura 1.1.13.

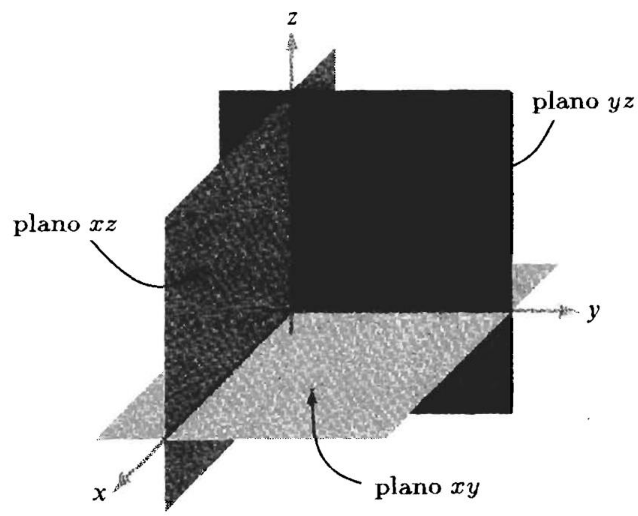


**Figura 1.1.13** Los tres planos coordenados.

## TERCERA PARTE: Describiendo función paramétrica de la recta y famosa interpolación lineal entre vectores

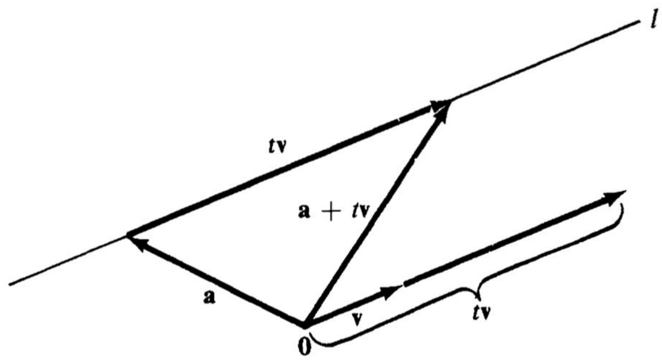


**Figura 1.1.14** La recta $l$, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, está en dirección de $\mathbf{v}$ y pasa por la punta de $\mathbf{a}$.

Los planos y las rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. Pospondremos hasta la sección 1.3 el estudio de las ecuaciones que representan planos. Sin embargo, usando la interpretación geométrica de la suma vectorial y de la multiplicación por un escalar, podemos hallar la *ecuación de una recta $l$ que pase por el punto final o extremo del vector* $\mathbf{a}$, *con la dirección de un vector* $\mathbf{v}$ (ver la figura 1.1.14). Conforme $t$ varía por todos los números reales, los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{v}$, y por lo tanto, agotan los puntos de la recta que pasa por el origen en la dirección de $\mathbf{v}$. Como todo punto sobre $l$ es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados $\mathbf{a}$ y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de $t$, vemos que todos los puntos sobre $l$ son de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Así, la recta $l$ se puede expresar mediante la ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Decimos que $l$ está expresada de manera *paramétrica*, con el parámetro $t$. En $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. Cuando $t$ crece, el punto $\mathbf{l}(t)$ se mueve alejándose de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Conforme $t$ decrece desde $t = 0$ por los valores negativos, $\mathbf{l}(t)$ se mueve alejándose de $\mathbf{a}$ en la dirección de $-\mathbf{v}$.

Puede haber varias *parametrizaciones* de la misma recta. Se pueden obtener escogiendo, en lugar de $\mathbf{a}$, un punto diferente sobre la recta dada, y formando la ecuación paramétrica de la recta comenzando en ese punto y en dirección de $\mathbf{v}$. Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está sobre la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, y así, $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. Incluso se pueden obtener otras parametrizaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ (o la opuesta). Así, $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ es otra parametrización de $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

**EJEMPLO 5** *Determinar la ecuación de la recta que pasa por* $(1,0,0)$ *en dirección de* $\mathbf{j}$.

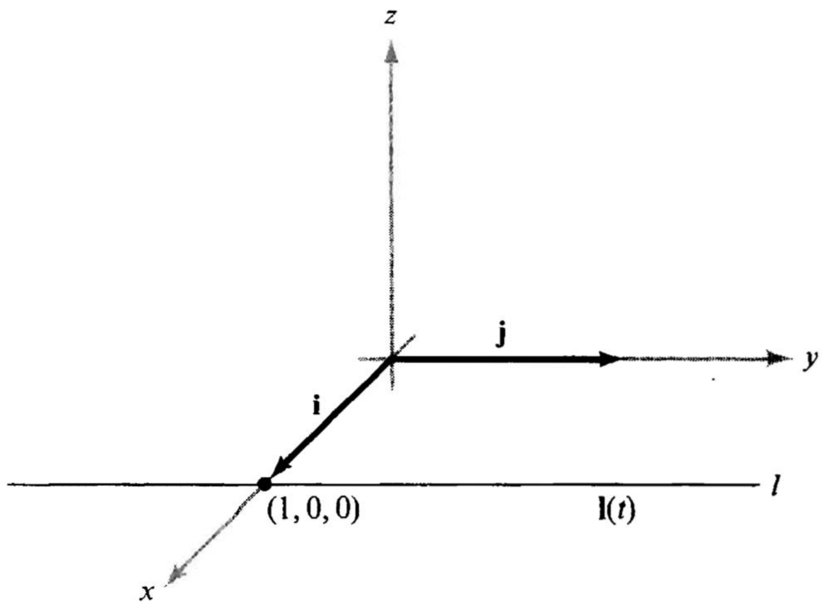


**Figura 1.1.15** La recta $l$ pasa por la punta de $\mathbf{i}$ en la dirección $\mathbf{j}$.

**SOLUCIÓN** La recta deseada se puede expresar en forma paramétrica como $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$ (figura 1.1.15). En términos de coordenadas tenemos

$$\mathbf{l}(t) = (1,0,0) + t(0,1,0) = (1,t,0). \qquad \blacktriangle$$

Vamos a deducir *la ecuación de una recta que pasa por los puntos finales de dos vectores dados* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$. Como el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo al segmento de recta dirigido que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, lo que deseamos es calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ en dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (figura 1.1.16). Así,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbf{l}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Conforme $t$ crece de 0 a 1, sucede que $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ comienza como el vector cero y crece en longitud (manteniéndose en la dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) hasta que en $t = 1$ es el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Así, para $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, conforme $t$ crece de 0 a 1, el vector $\mathbf{l}(t)$ sé mueve de la punta de $\mathbf{a}$ a la punta de $\mathbf{b}$ a lo largo del segmento de recta dirigido de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

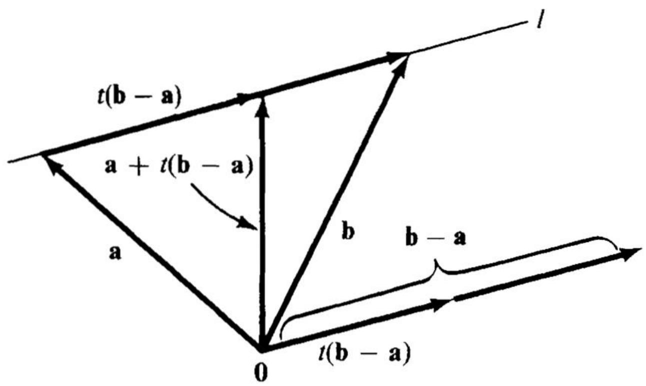


**Figura 1.1.16** La recta $l$, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, pasa por las puntas de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

**EJEMPLO 6** *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(-1, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$ *(ver la figura 1.1.17).*

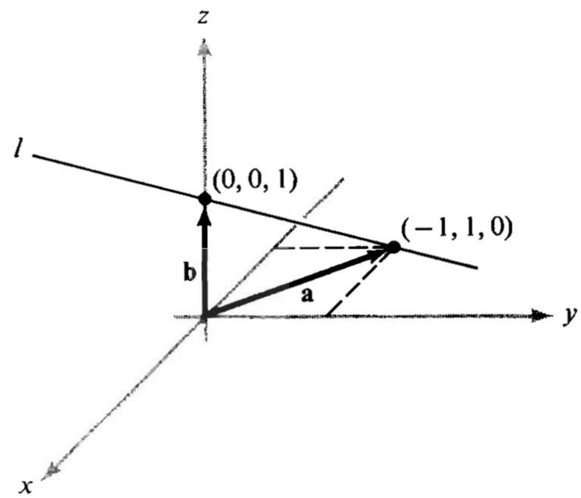


**Figura 1.1.17** Caso especial de la figura anterior, donde $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

**SOLUCIÓN** Representemos los puntos dados por $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{k}$; tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(t) &= (1-t)(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) + t\mathbf{k} \\ &= -(1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La ecuación de esta recta se puede escribir entonces como

$$\mathbf{l}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

o, de manera equivalente, si $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t. \qquad \blacktriangle$$

En términos de componentes, *la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos* $(x_1, y_1, z_1)$ *y* $(x_2, y_2, z_2)$ es

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Eliminando $t$ es posible escribir esto como

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Notamos que cualquier vector de la forma $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, donde $\lambda + \mu = 1$, está sobre la *recta que pasa por los extremos de* **a** *y* **b**. Para verlo, observar que $\mathbf{c} = (1-\mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Nótese que $\boldsymbol{a} + \mu(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ es la ecuación de una línea recta que pasa por el punto donde termina $\boldsymbol{a}$ en dirección al punto donde termina el vector $\boldsymbol{b}$**.**

# CUARTA PARTE: Otras demostraciones y ejemplos.

**EJEMPLO 7** *Usar métodos vectoriales para probar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.*

**SOLUCIÓN** Representemos los lados adyacentes del paralelogramo por los vectores **a** y **b**, como se muestra en la figura 1.1.18. Primero calculamos el vector que va al punto medio del segmento de recta PQ. Como $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo e igual en longitud al segmento dirigido de P a Q, $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ es paralelo e igual en longitud al segmento de recta dirigido de P al punto medio de PQ. Así, el vector $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de PQ.

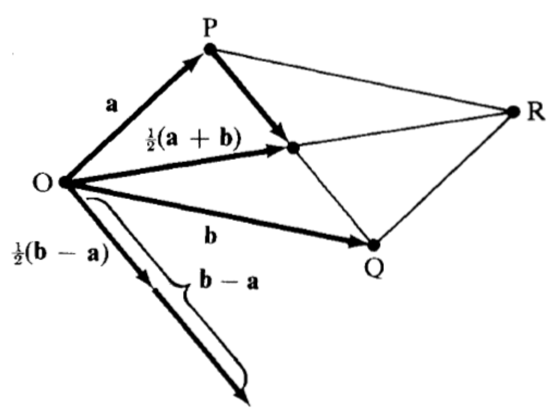


**Figura 1.1.18** Construcciones usadas para demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

A continuación calculamos el vector que va al punto medio de OR. Sabemos que $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ termina en R, de modo que $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de OR. En vista de que ya probamos que el vector $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de OR y en el punto medio de PQ, se sigue que OR y PQ se bisecan entre sí. ▲

Consideremos ahora algunas aplicaciones físicas de los vectores. Un ejemplo sencillo de cantidad física que se representa mediante un vector es un desplazamiento. Suponer que en una parte de la superficie terrestre lo suficientemente pequeña para considerarse plana, introducimos coordenadas de modo que el eje $x$ apunte al este, el eje $y$ apunte al norte, y la unidad de longitud sea el kilómetro. Si estamos en un punto P y queremos ir a un punto Q, el *vector de desplazamiento* $\mathbf{d}$ que une a P con Q nos indica la dirección y la distancia que tenemos que viajar. Si $x$ y $y$ son las componentes de este vector, el desplazamiento de P a Q es "$x$ kilómetros al este, $y$ kilómetros al norte".

**EJEMPLO 8** *Supongan que dos navegantes que no se pueden ver entre sí, pero que se pueden comunicar por radio, quieren determinar la posición relativa de sus barcos. Explicar cómo pueden hacerlo si cada uno tiene la capacidad de determinar su vector de desplazamiento al mismo faro.*

**SOLUCIÓN** Sean $P_1$ y $P_2$ las posiciones de los barcos, y sea Q la posición del faro. El desplazamiento del $i$-ésimo barco al faro es el vector $\mathbf{d}_i$ que une a $P_i$ con Q. El desplazamiento del primer barco al segundo es el vector $\mathbf{d}$ que une a $P_1$ con $P_2$. Tenemos que $\mathbf{d}+\mathbf{d}_2=\mathbf{d}_1$ (figura 1.1.19), de modo que $\mathbf{d}=\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2$. Esto es, el desplazamiento de un barco hasta el otro es la diferencia entre los desplazamientos desde los barcos hasta el faro. ▲

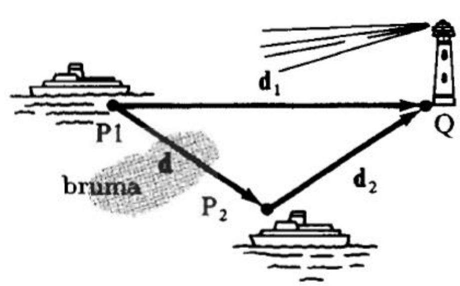


**Figura 1.1.19** Se pueden usar métodos vectoriales para localizar objetos.

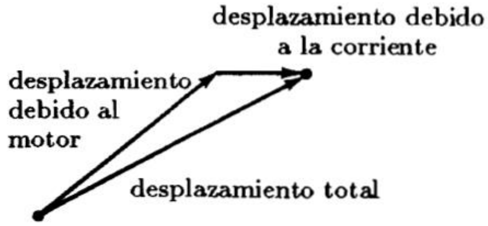


**Figura 1.1.21** El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos debidos al motor y a la corriente.

**EJEMPLO 9** *Un ave va volando en línea recta con vector velocidad* $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *(en kilómetros por hora). Suponer que* $(x, y)$ *son sus coordenadas en tierra y que* $z$ *es su altura.*

(a) *Si en cierto momento el ave está en la posición* $(1, 2, 3)$, *¿dónde estará una hora después? ¿Y un minuto después?*

(b) *¿Cuántos segundos tarda el ave en subir* 10 *metros?*

**SOLUCIÓN** (a) El vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ después de 1 hora es $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, de modo que la nueva posición es $(1, 2, 3) + (10, 6, 1) = (11, 8, 4)$. Después de 1 minuto, el vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ es $\frac{1}{60}(10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{60}\mathbf{k}$, de modo que la nueva posición es $(1, 2, 3) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.

(b) Después de $t$ segundos ($= t/3600\,\mathrm{h}$), el vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ es $(t/3600)(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i} + (t/600)\mathbf{j} + (t/3600)\mathbf{k}$. El incremento en altura es la componente $z$ $t/3600$. Esto es igual a $10\,\mathrm{m}$ ($= \frac{1}{100}\,\mathrm{km}$) cuando $t/3600 = \frac{1}{100}$ —esto es, cuando $t = 36\,\mathrm{s}$. ▲

**EJEMPLO 10** *Las fuerzas físicas tienen magnitud y dirección, de modo que pueden representarse mediante vectores. Si actúan simultáneamente varias fuerzas sobre un objeto, la fuerza resultante está representada por la suma de los vectores de fuerza individuales. Suponer que las fuerzas* $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ *y* $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *actúan sobre un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza debemos imponer para contrarrestar a las dos —esto es, para hacer que la fuerza total sea igual a cero?*

**SOLUCIÓN** La fuerza $\mathbf{F}$ deberá escogerse de manera que $(\mathbf{i}+\mathbf{k})+(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{v} = \mathbf{0}$; esto es, $\mathbf{v} = -(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Recordar que $\mathbf{0}$ es el *vector cero*, el vector cuyas componentes son todas cero.) ▲

## NOTA HISTÓRICA

Aproximadamente hasta el año de 1900 muchos científicos se resistieron a usar vectores, en favor de la teoría más complicada de los cuaterniones. El libro que popularizó los métodos vectoriales fue *Vector Analysis*, de E. B. Wilson (reimpreso por Dover en 1960), basado en los cursos impartidos por J. W. Gibbs en Yale en 1899 y 1900. Wilson se resistía a tomar el curso de Gibbs, pues había llevado en Harvard un curso de un año con J. M. Pierce, campeón en métodos con cuaterniones, pero un jefe de departamento lo obligó a añadir el curso a su programa. (Para más detalles ver *A History of Vector Analysis*, de M. J. Crowe, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1967.)