PRIMERA PARTE: Formulación producto punto

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ (figura 1.2.1) y queremos determinar el ángulo entre ellos, esto es, el menor ángulo subtendido por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano que generan. El producto interno nos permite hacerlo. Primero desarrollamos formalmente el concepto y después probamos que este producto hace lo que aseguramos. Sea $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Definimos el *producto interno* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, que se escribe como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, como el número real

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Noten que el producto interno de dos vectores es una cantidad escalar. A veces se denota al producto interno por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Es frecuente hacerlo por razones tipográficas. *Así, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ significan exactamente lo mismo.*

A partir de la definición se siguen ciertas propiedades del producto interno. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en $\mathbf{R}^3$ y α y β son números reales, entonces

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(ii) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Mostremos ahora que el producto interno en efecto mide el ángulo entre dos vectores.

TEOREMA 1 *Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$ y sea θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, el ángulo entre ellos (figura 1.2.5). Entonces*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta .$$

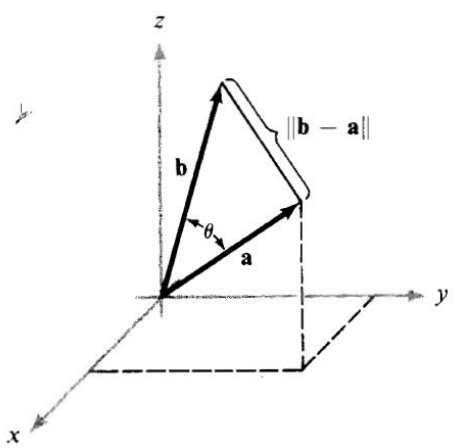


Figura 1.2.5 Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y el ángulo θ entre ellos; geometría del teorema 1 y su demostración.

De modo que podemos expresar el ángulo entre $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *como*

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right)$$

si $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son vectores distintos de cero.*

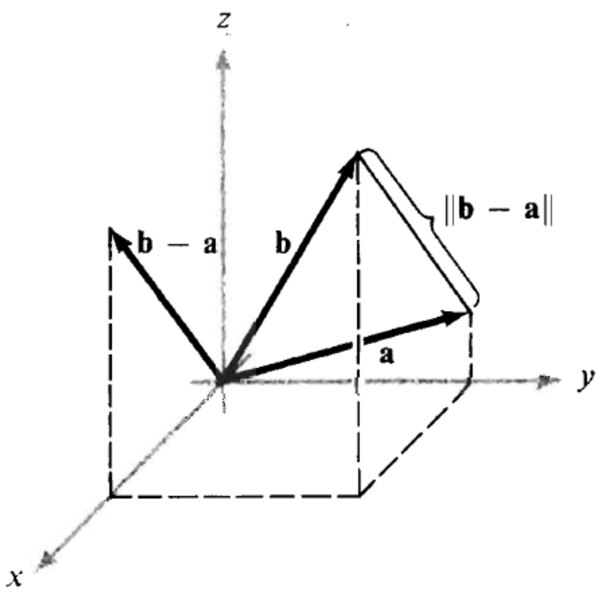


Figura 1.2.4 La distancia entre las puntas de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$.

Se sigue del teorema de Pitágoras que la *longitud* del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ es $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ (ver la figura 1.2.2). La longitud del vector $\mathbf{a}$ se denota por $\|\mathbf{a}\|$. Es frecuente llamar a esta cantidad la *norma* de $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1^2+a_2^2+a_3^2$, se sigue que

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}.$$

Ley de los cosenos

La **ley de los cosenos** es usada para encontrar las partes faltantes de un triángulo oblicuo (no rectángulo) cuando ya sea las medidas de dos lados y la medida del ángulo incluído son conocidas (LAL) o las longitudes de los tres lados (LLL) son conocidas. En cualquiera de estos casos, es imposible usar la ley de los senos porque no podemos establecer una proporción que pueda resolverse.

La ley de los cosenos establece:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Esto se parece al teorema de Pitágoras excepto que para el tercer término y si C es un ángulo recto el tercer término es igual 0 porque el coseno de 90° es 0 y se obtiene el teorema de Pitágoras. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

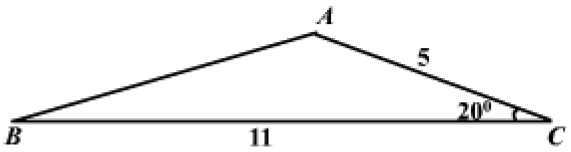
La ley de los cosenos también puede establecerse como

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \text{ or}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Ejemplo 1: Dos lados y el ángulo incluído-LAL

Dado $a = 11$, $b = 5$ y $C = 20°$. Encuentre el lado y ángulos faltantes.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$
$$= \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5)(\cos 20°)} \approx 6.53$$

DEMOSTRACIÓN Si aplicamos la ley de los cosenos, aprendida en trigonometría, al triángulo con un vértice en el origen y lados adyacentes determinados por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, se sigue que

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Como $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, y $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Esto es,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta. \qquad \blacksquare$$

Este resultado muestra que el producto interno de dos vectores es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo entre ellos. Esta relación es útil con frecuencia en problemas de naturaleza geométrica.

COROLARIO (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Para cualesquiera dos vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$, *tenemos*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$

con la igualdad si y sólo si $\mathbf{a}$ *es un múltiplo escalar de* $\mathbf{b}$, *o uno de ellos es* $\mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{a}$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, entonces $|\cos\theta| < 1$ y se cumple la desigualdad. Cuando $\mathbf{a}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, entonces $\theta = 0$ o π y $|\cos\theta| = 1$. $\blacksquare$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores distintos de cero en $\mathbf{R}^3$ y θ es el ángulo entre ellos, vemos que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Así, *el producto interno de dos vectores distintos de cero es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.* Por lo tanto el producto interno nos proporciona un buen método para determinar si dos vectores son perpendiculares. Se suele decir que los vectores perpendiculares son *ortogonales.* Los vectores de la base canónica, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son ortogonales entre sí, y tienen longitud 1; dichos sistemas se llaman *ortonormales.* Adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

EJEMPLO 3 *Los vectores* $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ *y* $j_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ *son ortogonales, pues*

$$\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{j}_\theta = -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

(ver la figura 1.2.7). ▲

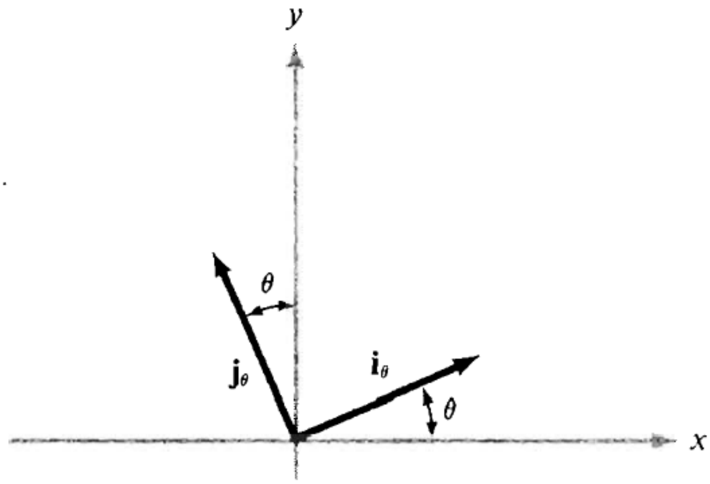
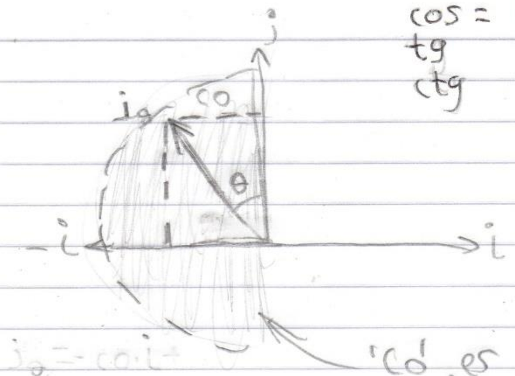


Figura 1.2.7 Los vectores $\mathbf{i}_\theta$ y $\mathbf{j}_\theta$ son ortogonales.

$\sin = co/h$ $h=1$
$\cos = ca/h$
$tg \quad co/ca$
$ctg \quad ca/co$



$\sin(\theta) = co/h$
$\sin(\theta) = co$

'co' es positivo desde 0 a PI

$j_\theta = -co \cdot i + ca \cdot j$

$\cos(\theta) = ca/h$
$\cos(\theta) = ca$

$j_\theta = -\sin\theta \, i + \cos\theta \, j$

~~como es positivo en el~~
$\sin(\theta) = co$ es positivo en el rango 0 a PI pero necesitamos un multiple escalar para i tal q' sea negativo en el rango anteriormente mencionado, por eso multiplicamos por menos 1 la funcion $\sin\theta$

EJEMPLO 4 *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *dos vectores ortogonales distintos de cero. Si* $\mathbf{c}$ *es un vector en el plano generado por* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*, entonces hay escalares* α *y* β *tales que* $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$*. Usar el producto interno para determinar* α *y* β *(ver la figura 1.2.8).*

SOLUCIÓN Tomando el producto interno de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$, tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \beta\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, de modo que,

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

De manera análoga,

$$\beta = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}. \qquad \blacktriangle$$

SEGUNDA PARTE: Otros ejemplos

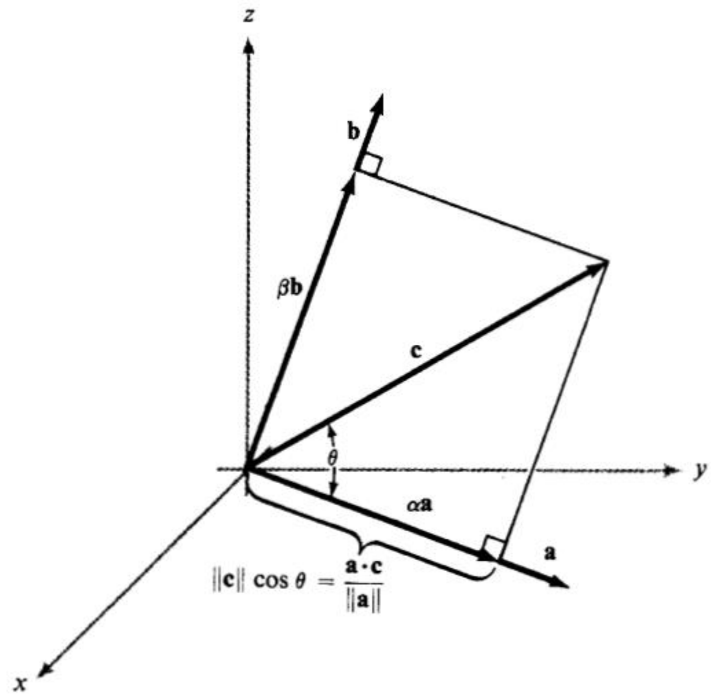


Figura 1.2.8 La geometría para la búsqueda de α y β donde $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, como en el ejemplo 4.

En este ejemplo, el vector $\alpha\mathbf{a}$ se llama la *proyección* de $\mathbf{c}$ a lo largo de $\mathbf{a}$, y $\beta\mathbf{b}$ es su *proyección* a lo largo de $\mathbf{b}$.

El resultado del ejemplo 4 también se puede obtener usando la interpretación geométrica del producto interno. Sea l la distancia medida a lo largo de la recta determinada al extender $\mathbf{a}$, del origen al punto donde la perpendicular desde $\mathbf{c}$ interseca a la extensión de $\mathbf{a}$. Se sigue que

$$l = \|\mathbf{c}\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$. Más aún, $l = \alpha\|\mathbf{a}\|$. Juntando estos resultados tenemos

$$\alpha\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{c}\| \cos\theta, \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\|\mathbf{c}\| \cos\theta}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{a}\|}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|\,\|\mathbf{a}\|}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

Así, *la proyección de* $\mathbf{c}$ *sobre* $\mathbf{a}$ *está dada por*

$$\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$

Notar que la longitud de la proyección de un vector $\mathbf{c}$ sobre un vector $\mathbf{a}$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$, está dada por

$$\|\mathbf{c}\|\,|\cos\theta| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

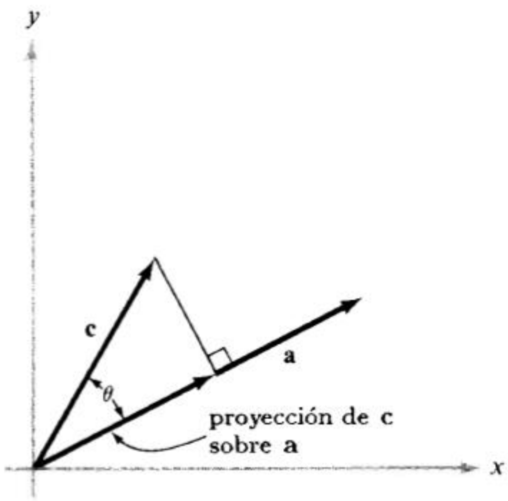


Figura 1.2.9 La proyección de $\mathbf{c}$ sobre $\mathbf{a}$ es $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/\|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{a}$.