REQUISITOS PREVIOS Y NOTACIÓN

También suponemos que los alumnos están familiarizados con funciones del cálculo elemental, como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x y $\log x$ (escribimos $\log x$ para el logaritmo natural, que a veces se denota por $\ln x$ o $\log_e x$). Se espera que los alumnos conozcan, o repasen conforme transcurre el curso, las reglas básicas de diferenciación e integración para funciones de una variable, como la regla de la cadena, la regla del cociente, integración por partes y demás.

El *valor absoluto* de un número $a \in \mathbf{R}$ se escribe $|a|$ y se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$ y $|-6| = 6$. La desigualdad $|a+b| \leq |a|+|b|$ siempre se cumple. La *distancia de a a b* está dada por $|a-b|$. Así, la distancia de 6 a 10 es 4 y de -6 a 3 es 9.

Si escribimos $A \subset \mathbf{R}$, queremos decir que A es un *subconjunto* de $\mathbf{R}$. Por ejemplo, A podría ser igual al conjunto de los enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

El símbolo $A \cup B$ significa la *unión* de A y B, la colección cuyos elementos son elementos de A o B. Así

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

De manera análoga, $A \cap B$ significa la *intersección* de A y B; esto es, este conjunto está formado por aquellos elementos de A y B que están tanto en A como en B. Así, la intersección de los dos conjuntos anteriores es $\{-1, 0\}$.

Escribiremos $A \setminus B$ para denotar los elementos de A que no están en B. Así,

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2\}.$$

También podemos especificar conjuntos como en los ejemplos siguientes:

$$\{a \in \mathbf{R} |\ a \text{ es un entero}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\{a \in \mathbf{R} |\ a \text{ es un entero par}\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$
$$\{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\} = [a, b].$$

Una función $f = A \to B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento especifico $f(a)$ de B.

El hecho de que la función f mande a a $f(a)$ se denota simbólicamente por:

$$a \mapsto f(a)$$

Por ejemplo $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$ asigna el numero $\frac{x^3}{1-x}$ a cada $x \neq 1$ en $\boldsymbol{R}$. Podemos especificar una función f dando la regla para $f(x)$. Así, la función f anterior se puede definir por la regla.

$$x \mapsto x^3/(1-x)$$

Si $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ significa que f asigna un valor en $\mathbf{R}$, $f(x)$, a cada $x \in A$. El conjunto A se llama *dominio* de f, y decimos que f tiene *contradominio* $\mathbf{R}$, pues es ahí donde se toman los valores de f. La *gráfica* de f consiste de los puntos $(x, f(x))$ en el plano (figura 0.3). Generalmente una *asociación* (= función = transformación = asociación) $f: A \to B$, donde A y B son conjuntos, es una regla que asigna a cada $x \in A$ un punto específico $f(x) \in B$.

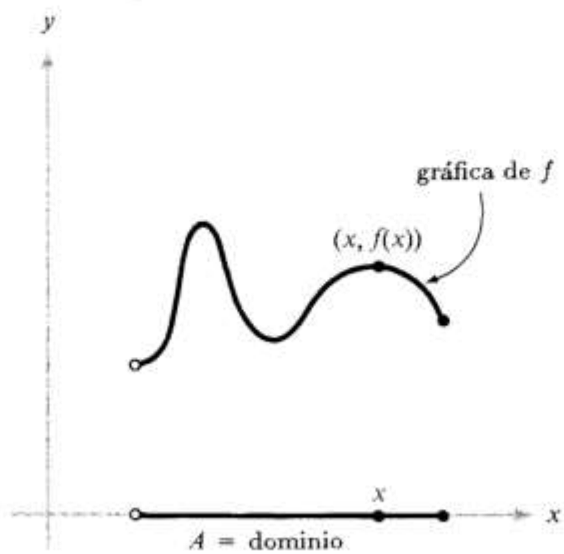

Figura 0.3 Gráfica de una función con el intervalo semiabierto A como dominio.

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 + \cdots + a_n$ donde $a_1, \ldots, a_n$ son números dados. La suma de los primeros n enteros es

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$i=1$

La *derivada* de una función $f(x)$ se denota por $f'(x)$ o

$$\frac{df}{dx},$$

y la *integral indefinida* se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si hacemos $y = f(x)$, la derivada también se denota por

$$\frac{dy}{dx}.$$

Se supone que los lectores conocen la regla de la cadena, la integración por partes y otras reglas que gobiernan al cálculo de funciones de una variable. En particular, deberán saber cómo diferenciar e integrar funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Al final del libro hay una breve tabla de derivadas e integrales, adecuadas para las necesidades de este libro.

Las siguientes notaciones se usan como sinónimos: $e^x = \exp x$, $\ln x = \log x$ y $\operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$.

El final de una demostración se denota por el símbolo ■, mientras que el final de un ejemplo u observación se denota por el símbolo ▲. El material opcional más teórico o los ejercicios más difíciles están precedidos por una estrella: *.