Integración por partes

El **método de integración por partes** permite calcular la **integral de un producto** de dos funciones aplicando la **fórmula**:

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Las funciones logarítmicas, "arcos" y polinómicas se eligen como ***u***.

Las funciones exponenciales y trígonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como ***v'***.

Caso 1

En este primer caso aplicamos la fórmula directamente, tomando la ***x*** como ***u***.

$$\int x \cos x \, dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Caso 2

Si al **integrar por partes** tenemos un polinomio de grado **n**, lo tomamos como **u** y se repite el proceso **n** veces.

$$\int x^3 e^x dx$$

$$u = x^3 \xrightarrow{derivar} u' = 3x^2$$

$$v' = e^x \xrightarrow{integrar} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{derivar} u' = 2x$$

$$v' = e^x \xrightarrow{integrar} v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

$$u = x \xrightarrow{derivar} u' = 1$$

$$v' = e^x \xrightarrow{integrar} v = e^x$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x \, dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$$

Caso 3

Si tenemos una integral con sólo un **logaritmo** o un "**arco**", integramos por partes tomando: ***v' = 1***.

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$$

$$u = \operatorname{arc\,cotg} x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx = x \operatorname{arc\,cotg} x + \int \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + C$$

Caso 4

Si al integrar por partes aparece en el segundo miembro la integral que hay que calcular, se resuelve como una ecuación.

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \mathrm{sen}\,2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \cos 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2x$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx\right)$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx$$

Pasamos la integral del 2º miembro al 1º.

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx + \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x$$

Sumamos las integrales y multiplicamos en los dos miembros por 4/13.

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\right) + C$$

Sacamos factor común e^{3x}.

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{13}e^{3x}\left(-2\cos 2x + 3\,\mathrm{sen}\,2x\right) + C$$