Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica
ELE0522 - Sistemas de Controle II

Projeto 1 - Controle de Nível

Relatório da Semana

Grupo 3
Rômulo Brito de Farias
Ruan de Andrade Moutta
Thielder de Menezes Gonçalves
Vitor Marques de Carvalho Xavier

Professor: Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz

Natal, RN, 10 de março de 2024

Resumo

Controle de nível é um dos problemas bastante recorrentes vistos dentro da área de automação industrial envolvendo o controle automático de sistemas. Este trabalho busca documentar as etapas de análise e modelagem de um sistema fluídico de controle de nível usando dois tanques cascateados com realimentação da saída do segundo tanque no primeiro.

Sumário

1 Introdução

O controle automático tem desempenhado um papel vital no avanço da engenharia e da ciência, e tornou-se uma parte importante dos modernos processos industriais, sobretudo nas operações automáticas de controle de pressão, temperatura e fluxo [4]. Dentro de nossos próprios corpos existem numerosos sistemas de controle, como o pâncreas, que regula nosso açúcar no sangue. Na hora de "lutar ou fugir", nossa adrenalina aumenta junto com a nossa frequência cardíaca, fazendo com que mais oxigênio seja fornecido às nossas células. Nossos olhos seguem um objeto em movimento para mantê-lo à vista; nossas mãos agarram o objeto e o colocam precisamente em um local pré-determinado [3].

A engenharia de controle é baseada nos fundamentos da teoria de realimentação e na análise de sistemas lineares. Um sistema de controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração tal que gere a resposta desejada para o sistema. A base para análise de um sistema são os fundamentos fornecidos pela teoria de sistemas lineares, que assume uma relação causa-efeito para os componentes do sistema [2].

O problema de controle de nível pertence ao grupo de sistemas reguladores, nos quais o objetivo é manter uma variável física regulada ou controlada a um valor desejado constante mesmo na presença de perturbações ou distúrbios. Este trabalho visa desenvolver a análise e modelagem do controle de nível usando dois tanques cascateados, cujo primeiro tanque é realimentado por bomba da saída do segundo tanque, conforme ilustrado no esquemático da Figura 1.

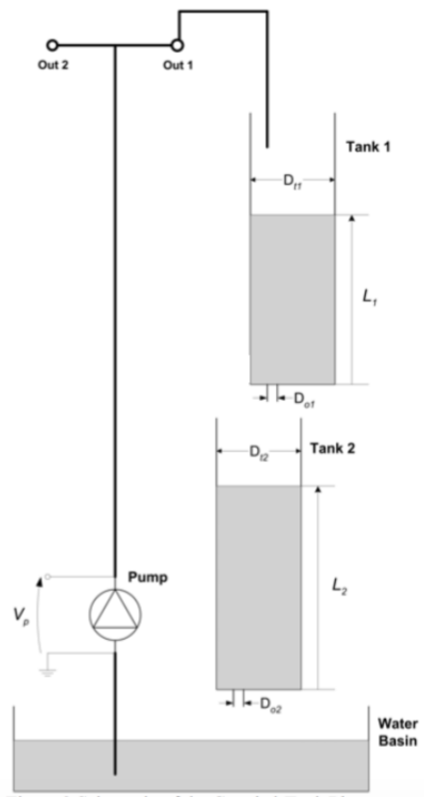

Figura 1: Esquemático do sistema de controle de nível.

Fonte: Roteiro da atividade.

2 Modelagem Matemática

O sistema que buscaremos modelar e controlar está esquematizado na Figura 1. Iniciamos a modelagem matemática da dinâmica do sistema considerando a variação do volume no tanque 1 é dada pela diferença dos fluxos de entrada e saída, ou seja:

$$\frac{dV}{dt} = q_e - q_s \tag{1}$$

Para o tanque ciclíndrico de seção transversal de área constante A_e, temos:

$$\frac{dV}{dt} = A_e \frac{dL_1}{dt} = q_e - q_s$$

A vazão de entrada q_e é proporcional à tensão aplicada na bomba e vale

$$q_e = K_p V_p$$

A vazão de saída q_s é proporcional à altura da coluna líquida e pode ser determinada a partir da equação da continuidade, $q_s = A_s v_s$. Pelo princípio de conservação da energia mecânica ou pela equação de Bernoulli [1], podemos encontrar a expressão da velocidade de saída do fluido na base do tanque, como visto na Eq. 2a e na Eq. 2b, respectivamente:

$$\begin{aligned} E_e &= E_s \\ mgh_e + \frac{mv_e^2}{2} &= mgh_s + \frac{mv_s^2}{2} \\ mgh_e &= \frac{mv_s^2}{2} \\ v_s &= \sqrt{2gh_e} = \sqrt{2gL_1} \end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned} P_0 + \rho g h_e + \frac{\rho v_e^2}{2} &= P_0 + \rho g h_s + \frac{\rho v_s^2}{2} \\ gh_e &= \frac{v_s^2}{2} \\ v_s &= \sqrt{2gh_e} = \sqrt{2gL_1} \end{aligned} \tag{2b}$$

Portanto, o modelo da dinâmica do sistema assumi a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_e \frac{dL_1}{dt} &= q_e - A_s \sqrt{2gL_1} \\ \frac{dL_1}{dt} &= \frac{K_p V_p}{A_e} - \frac{A_s}{A_e}\sqrt{2gL_1} \end{aligned} \tag{3}$$

Analogamente, podemos modelar a dinâmica do tanque 2 como se segue:

$$A_e \frac{dL_2}{dt} = q_e - q_s = q_e - A_s^{T_2}\sqrt{2gL_2} \tag{4}$$

Onde o fluxo de entrada do tanque 2 é a saída do tanque 1, i.e.:

$$q_e^{T_2} = q_s^{T_1} = A_s^{T_1} v_s^{T_1}$$

Assim, ficamos com:

$$
\begin{aligned}
A_e \frac{dL_2}{dt} &= A_s^{T_1} v_s^{T_1} - A_s^{T_2}\sqrt{2gL_2} \\
\frac{dL_2}{dt} &= \frac{A_s^{T_1}}{A_e}\sqrt{2gL_1} - \frac{A_s^{T_2}}{A_e}\sqrt{2gL_2}
\end{aligned}
$$

Assumindo que os tanques são idênticos, i.e: $D_e = 4.445cm$ e $D_s = 0.47625cm$, chegamos ao seguinte **modelo não-linear**:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} + 0.51\sqrt{L_1} &= 0.2127V_p \\
\frac{dL_2}{dt} + 0.51\sqrt{L_2} &= 0.51\sqrt{L_1}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Aplicando expansão em série de Taylor no modelo descrito na Eq. 5 em torno do ponto de operação $L_1 = L_2 = 15cm$ e $V_p = 9.3V$, podemos obter um modelo linear para pequenas variações em torno dessa condição de linearização.

Para o tanque 1:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \frac{dL_1^{op}}{dt} + \frac{\partial L_1^{op}}{\partial t}(L_1 - L_1^{op}) + \frac{\partial V_p^{op}}{\partial t}(V_p - V_p^{op}) \\
\frac{dL_1}{dt} &= 0 - 0.066(L_1 - 15) + 0.2127(V_p - 9.3) \\
\frac{dL_1}{dt} &= -0.066L_1 + 0.2127V_p - 0.98 \\
\frac{dL_1}{dt} &\approx -0.066L_1 + 0.2127V_p
\end{aligned}
$$

O termo independente pode ser desprezado visto que a expressão obtida trata-se de uma aproximação, frente à altura máxima do tanque o termo desprezado representa um erro de 3% e que o modelo obtido deve responder linearmente à pequenas variações das entradas.

Para o tanque 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_2}{dt} &= \frac{dL_2^{op}}{dt}(L_2 - L_2^{op}) + \frac{\partial L_1^{op}}{\partial t}(L_1 - L_1^{op}) \\
\frac{dL_1}{dt} &= 0 - 0.066(L_2 - 15) + 0.066(L_1 - 15) \\
\frac{dL_1}{dt} &= -0.066L_2 + 0.066L_1
\end{aligned}
$$

Assim, ficamos com o seguinte **modelo linear**, usando a notação $\bar{A}$ apenas para representar a forma linearizada:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{L}_1}{dt} &= -0.066\bar{L}_1 + 0.2127\bar{V}_p \\
\frac{d\bar{L}_2}{dt} &= 0.066\bar{L}_1 - 0.066\bar{L}_2
\end{aligned} \tag{6}
$$

Aplicando a Transformada de Laplace, chegamos às seguintes funções de transferência:

$$
\begin{aligned}
\frac{L_1(s)}{V_p(s)} &= \frac{0.2127}{s + 0.066} \\
\frac{L_2(s)}{V_p(s)} &= \frac{0.014}{(s + 0.066)^2}
\end{aligned} \tag{7}
$$

3 Conclusões

Os sistemas de controle são parte integrante da sociedade moderna e há diversas aplicações ao nosso redor, inclusive nosso próprio corpo pode ser visto como um grande e complexo sistema de controle. Neste relatório buscou-se extrair o modelo matemático de um sistema de controle de nível em tanques cascateados com realimentação por bomba elétrica de vazão variável. Tal objetivo foi demonstrado no resultado obtido na Eq. 5.

A partir deste trabalho torna-se possível produzir experimentos e simulações, via ferramentas computacionais como `GNU Octave` e `Scilab`, e avaliar a resposta temporal da dinâmica do objeto modelado.

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of physics extended.* John Wiley & Sons, Nashville, TN, 10 edition, May 2013.

[2] A. L. Maitelli and A. A. D. de Medeiros. *Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos.* 2010.

[3] N. S. Nise. *Engenharia de Sistemas de Controle.* Aug. 2017.

[4] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno.* 2011.