CC0293 - Análise Multivariada

Material Didático - 20/12/2019—

Prof. Mauricio Mota

1 Raízes Características

1.1 Motivação

Dada uma matriz quadrada de ordem **p** existem escalares $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$ e vetores $\mathbf{x}$ tais que :

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}\,? \tag{1}$$

Para responder tal pergunta vai-se desenvolver o presente tópico.
De (1) tem-se

$$A\,\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{x} = A\,\mathbf{x} - \lambda\,I_p\,\mathbf{x} = \mathbf{0} = (A - \lambda I_p)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

tem-se então um sistema homogêneo que é consistente . Para que (2) tenha uma solução diferente da trivial é preciso que

$$|A - \lambda\,I_p| = det(A - \lambda\,I_p) = 0 \tag{3}$$

Definição 1: A equação polinomial (3) é conhecida como equação característica de A.

Definição 2: O polinômio característico de A é dado por:

$$|A - \lambda\,I_p| = a_p\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{4}$$

1.2 Exemplo 1

Considere A uma matriz uniforme com $a = 3$ e $b = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o determinante de A.
Vamos subtrair a terceira coluna da primeira e da segundas colunas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1 & 1-1 & 1 \\ 1-1 & 3-1 & 1 \\ 1-3 & 1-3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Aplicando propriedades de determinante na primeira e na segunda coluna tem-se:

$$|A| = 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

Aplicando **Chió** tem-se:

$$|A| = 4 \begin{vmatrix} 1-0 & 1-0 \\ -1-0 & 3+1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4(4+1) = 20.$$

Calcule a equação característica de A.

$$|A - \lambda\, I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)\ (\lambda - 2)^2,$$

pois o determinante de uma matriz uniforme de ordem p com valores a e b é dado por:

$$|A| = (a-b)^{p-1}[a + (p-1)\ b]. \tag{5}$$

Fazendo

$$|A - \lambda\, I_3| = 0,$$

temos

$$(\lambda - 5)\ (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Assim

$$\lambda_1 = 5\ ,\ \ \lambda_2 = 2\ \ e\ \ \lambda_3 = 2.$$

Qual o polinômio característico de A ?

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20. \tag{6}$$

Vai-se obter as raízes da equação característica de A usando o R.

```
> aux=polyroot(c(-20,24,-9,1));aux
[1] 2-0i 2+0i 5-0i
> abs(aux)
[1] 2 2 5
>
> lamb_1=abs(aux)[3];lamb_1
[1] 5
> lamb_2=abs(aux)[2];lamb_2
[1] 2
> lamb_3=abs(aux)[1];lamb_3
[1] 2
>
```

Definição 3: As raízes do polinômio característico são chamadas de raízes características ou valores próprios ou auto valores.

Dois resultados envolvendo os valores próprios de uma matriz quadrada de ordem p são:

a. $tr(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.$

b. $det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i.$

Veja :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 3 + 3 = 9.$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 + 2 + 2 = 9.$$

Por outro lado

$$det(A) = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 5 \times 2 \times 2 = 20.$$

Vai-se olhar uma saída do R com estes resultados:

```
> A=matrix(c(3,1,1,1,3,1,1,1,3),ncol=3);A
[,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    1
[2,]    1    3    1
[3,]    1    1    3
>
> trA=sum(diag(A));trA
[1] 9
> detA=det(A);detA
[1] 20
>
> rc=eigen(A)$values;rc
[1] 5 2 2
> lamb1=rc[1];lamb2=rc[2];lamb3=rc[3]
> lamb1
[1] 5
> lamb2
[1] 2
> lamb3
[1] 2
>
> sum(rc);prod(rc)  ###traço e determinante.
[1] 9
[1] 20
>
```

Definição 4: Os vetores $\mathbf{x}$ que satisfazem ao sistema homogêneo

$$(A - \lambda I_p)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

são chamados vetores característicos, vetores próprios ou auto vetores de A.
Vamos voltar ao exemplo 1.
Para $\lambda_1 = 5$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_1,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Note que se $x_{11} = x_{12} = x_{13} = c$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor de dimensão 3 com todas as coordenadas iguais é um vetor característico associado a raiz $\lambda_1 = 5$.

Por exemplo

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A norma deste vetor vale

$$||\mathbf{x}_1|| = \sqrt{3}.$$

Geralmente se apresenta um vetor com norma 1. assim,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_2,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

ou

$$\begin{bmatrix} 3x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{21} + x_{22} + 3x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{21} \\ 2x_{22} \\ 2x_{23} \end{bmatrix}$$

ou equivalente a

$$\begin{bmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor cuja soma de seus elementos seja nula é solução. Vejamos alguns exemplos:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A norma deste vetor vale

$$||\mathbf{x}_2|| = \sqrt{2}.$$

ou

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A norma deste vetor vale

$$||\mathbf{x}_2|| = \sqrt{6}.$$

ou

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A norma deste vetor vale

$$||\mathbf{x}_2|| = \sqrt{6}.$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Considere a matriz formada pelos dois primeiros auto vetores não normalizados de A e na terceira coluna o terceiro auto vetor que é ortogonal aos dois primeiros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & c \end{bmatrix}$$

Assim

$$a + b + c = 0$$

e

$$a + b - 2c = 0.$$

subtraindo estas duas equações tem-se:

$$3c = 0,$$

logo

$$c = 0.$$

E

$$a + b = 0.$$

Qualquer vetor da forma $(a, -a, 0)'$ é solução. Assim:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A norma deste vetor vale

$$||\mathbf{x}_3|| = \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz dos auto vetores C é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{21}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos fazer a decomposição espectral de A usando o R:

```
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    1
[2,]    1    3    1
[3,]    1    1    3
>
> D=diag(rc);D
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    2
>
>
> C=matrix(c(1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(6),1/sqrt(6),-2/sqrt(6), -1/sqrt(2),
+ 1/sqrt(2),0),ncol=3);C
          [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.5773503  0.4082483 -0.7071068
[2,] 0.5773503  0.4082483  0.7071068
[3,] 0.5773503 -0.8164966  0.0000000
>
> t(C)%*%C
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> round(C%*%t(C),4)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
>
> C%*%D%*%t(C)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    1
[2,]    1    3    1
[3,]    1    1    3
```

```
>
```

Vamos olhar a matriz dos auto valores dada diretamente pelo R.

```
> C1=eigen(A)$vectors;C1
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] -0.5773503  0.8164966  0.0000000
[2,] -0.5773503 -0.4082483 -0.7071068
[3,] -0.5773503 -0.4082483  0.7071068
>
```

Compare C com C_1.

Faça a decomposição de Cholesky de A.

Vamos fazer inicialmente pelo R.

```
> chol(A)######triangular superior
         [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.732051 0.5773503 0.5773503
[2,] 0.000000 1.6329932 0.4082483
[3,] 0.000000 0.0000000 1.5811388
>
> S=t(chol(A));S ######triangular inferior
          [,1]      [,2]     [,3]
[1,] 1.7320508 0.0000000 0.000000
[2,] 0.5773503 1.6329932 0.000000
[3,] 0.5773503 0.4082483 1.581139
> det(S) ###não singular!!!!
[1] 4.472136
>
> S%*%t(S)#######Matriz A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    1
[2,]    1    3    1
[3,]    1    1    3
>
>
```

Vamos fazer usando a notação do Daniel Ferreira. Devemos fatorar A na forma:

$$A = S\,S^t,$$

em que S é o fator de Cholesky da matriz A. S é não singular e triangular inferior. Ele apresenta um algoritmo para obter a transposta do fator de Cholesky.

Passo (i): $s_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3}$.
e

$$s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}},\ j = 2, 3.$$

Assim,

$$s_{12} = s_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Passo (ii):

$$s_{22} = \sqrt{a_{22} - s_{12}^2} = \sqrt{3 - 1/3} = \sqrt{8/3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

$$s_{21} = 0, i = 2 > j = 1.$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} \times s_{13}}{s_{22}}.$$

Mas,

$$a_{23} - s_{12} \times s_{13} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Logo

$$s_{23} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Passo (iii):

$$s_{33} = \sqrt{a_{33} - s_{13}^2 - s_{23}^2} = \sqrt{3 - 1/3 - 1/6} = \sqrt{5/2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$s_{31} = 0, i = 3 > j = 1.$$

$$s_{32} = 0, i = 3 > j = 2.$$

O transposto do fator de Cholesky é dado por:

$$F^t = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

Veja a saída do R:

```
> c1=c(sqrt(3),0,0)
> c2=c(1/sqrt(3),(2*sqrt(6))/3,0)
> c3=c(1/sqrt(3),1/sqrt(6),sqrt(10)/2)
>
> Ft=matrix(c(c1,c2,c3),ncol=3);Ft
         [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.732051 0.5773503 0.5773503
[2,] 0.000000 1.6329932 0.4082483
```

```
[3,] 0.000000 0.0000000 1.5811388
> chol(A)
         [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.732051 0.5773503 0.5773503
[2,] 0.000000 1.6329932 0.4082483
[3,] 0.000000 0.0000000 1.5811388
>
```

O teorema 1.6 na página 55 do Daniel conhecido como teorema da fatoração diz que:
Para toda matriz simétrica positiva definida A existe uma matriz não-singular F tal que

$$A = F\,F^t.$$

A matriz

$$F = D^{1/2}C,$$

em que C é a matriz dos auto-vetores de A e $D^{1/2}$ é matriz formada pela raiz quadrada dos auto-valores de A

Veja a saída do R:

```
> C;D
          [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.5773503  0.4082483 -0.7071068
[2,] 0.5773503  0.4082483  0.7071068
[3,] 0.5773503 -0.8164966  0.0000000
[,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    2
> RD=sqrt(D);RD
         [,1]     [,2]     [,3]
[1,] 2.236068 0.000000 0.000000
[2,] 0.000000 1.414214 0.000000
[3,] 0.000000 0.000000 1.414214
> F=RD%*%C;B
         [,1]       [,2]   [,3]
[1,] 1.290994  0.5773503   -1
[2,] 1.290994  0.5773503    1
[3,] 1.290994 -1.1547005    0
> det(F)
[1] 4.472136
> round(t(B)%*%B,4)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    2
> B%*%t(B)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    1
[2,]    1    3    1
[3,]    1    1    3
```

```
>
```

Exemplo 2: Exemplo 1.6 página 63 do Daniel.
Vamos refazer tudo o que foi feito no exemplo 1.
Considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> A=matrix(c(4,0,1,0,4,0,1,0,4),ncol=3);A
[,1] [,2] [,3]
[1,]    4    0    1
[2,]    0    4    0
[3,]    1    0    4
>
> trA=sum(diag(A));trA
[1] 12
> detA=det(A);detA
[1] 60
>
> rc=eigen(A)$values;rc
[1] 5 4 3
> D=diag(rc);D
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    4    0
[3,]    0    0    3
> C=eigen(A)$vectors
> C
         [,1]      [,2]      [,3]
[1,] -0.7071068    0  0.7071068
[2,]  0.0000000   -1  0.0000000
[3,] -0.7071068    0 -0.7071068
> C%*%D%*%t(C)
       [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    0    1
[2,]    0    4    0
[3,]    1    0    4
>
> RD=sqrt(D);RD
       [,1]     [,2]  [,3]
[1,] 2.236068    0 0.000000
[2,] 0.000000    2 0.000000
[3,] 0.000000    0 1.732051
> F=C%*%RD;F
       [,1]      [,2]  [,3]
[1,] -1.581139    0  1.224745
[2,]  0.000000   -2  0.000000
[3,] -1.581139    0 -1.224745
> det(F)
```

```
[1] -7.745967
> F%*%t(F)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    0    1
[2,]    0    4    0
[3,]    1    0    4
>
```

Para $\lambda_1 = 5$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_1,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4x_{11} + x_{13} \\ 4x_{12} \\ x_{11} + 4x_{13} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenada a coordenada tem-se:

$$\begin{bmatrix} -x_{11} + x_{13} \\ -x_{12} \\ x_{11} - x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor com $x_{12} = 0$ e $x_{11} = x_{13}$
Considere o vetor $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, -1)'$ com norma

$$||\mathbf{x}_1|| = \sqrt{2}.$$

normalizando tem-se:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

que é a primeira coluna da matriz C feita pelo R.

Para $\lambda_2 = 4$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_2,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4x_{21} + x_{23} \\ 4x_{22} \\ x_{21} + 4x_{23} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenada a coordenada tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_{23} \\ 0 \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor com $x_{21} = 0$ e $x_{23} = 0$ e x_{22} qualquer. Vai-se normalizar direto e $x_{22} = -1$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -1 \\ \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é a segunda coluna da matriz C feita pelo R.

Para $\lambda_3 = 3$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_3 = \lambda \mathbf{x}_3,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4x_{31} + x_{33} \\ 4x_{32} \\ x_{31} + 4x_{33} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenada a coordenada tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_{31} + x_{33} \\ x_{32} \\ x_{31} + x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor com $x_{32} = 0$ e $x_{33} = -x_{31}$ e .
Considere
Considere o vetor $\mathbf{x}_3 = (1, 0, -1)'$ com norma

$$||\mathbf{x}_3|| = \sqrt{2}.$$

normalizando tem-se:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ 0 \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

que é a terceira coluna da matriz C feita pelo R.

Exemplo 3:

Vamos refazer tudo o que foi feito no exemplo 1.

Considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz tem determinante nulo pois somando a segunda coluna com a terceira coluna obtém-se a primeira coluna. Assim pelo menos um auto valor de A é nulo.

A matriz tem posto 2 pois o determinante da submatriz

$$\left| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right] = 4 \neq 0.$$

O traço da matriz A vale 8.

Veja a saída do R:

```
>
> #### Exemplo 3
>
> A=matrix(c(4,2,2,2,2,0,2,0,2),ncol=3);A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    2    2
[2,]    2    2    0
[3,]    2    0    2
>
>
>
> ###Vamos Calcular o Determinante de  A.
> det(A)
[1] 0
>
>
> ###Vamos Calcular o Posto de A.
> qr(A)$rank
[1] 2
>
>
>
> ###Vamos Calcular o Traço de A.
>
> trA=sum(diag(A));trA
[1] 8
>
```

A matriz A é simétrica.

```
> ####Calcular a transposta de A.
>
> tA=t(A);tA
     [,1] [,2] [,3]
```

```
[1,]    4    2    2
[2,]    2    2    0
[3,]    2    0    2
>
> tA==A
     [,1] [,2] [,3]
[1,] TRUE TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE TRUE
[3,] TRUE TRUE TRUE
>
```

Calcule os auto valores de A.
Vamos usar o R:

```
> rc=eigen(A)$values;round(rc,4)
[1] 6 2 0
>
```

Note que:

$$tr(A) = 6 + 2 + 0 = 8 \;\; e \quad det(A) = 6 \times 2 \times 0 = 0.$$

Agora vai-se calcular manualmente:

$$|A - \lambda\, I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = .$$

Expandindo pela terceira coluna tem-se:

$$|A - \lambda\, I_3| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix},$$

logo tirando o fator 2 da primeira coluna e o fator $2-\lambda$ da segunda coluna do primeiro determinante temos:

$$|A - \lambda\, I_3| = 4\,(2-\lambda) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda) = -4\,(2-\lambda) + (2-\lambda)\,[(4-\lambda)(2-\lambda) - 4)] = 0,$$

logo,

$$-4\,(2-\lambda) + (2-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda) - 4) = 0$$

que pode ser posto na forma:

$$(2-\lambda)\left[-4 + 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\right] = 0$$

ou

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda - 6) = 0.$$

A equação característica é dada por:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda = 0.$$

As raízes são dadas por:

$$\lambda_1 = 6 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad e \quad \lambda_3 = 0.$$

Usando a função polyroot do R tem-se:

```
>
>  aux=polyroot(c(0,12,-8,1))
> aux
[1] 0+0i 2+0i 6+0i
> abs(aux)
[1] 0 2 6
>
>
```

Determine os vetores próprios de A.
Usando o R tem-se:

```
> C=eigen(A)$vectors
> C
          [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.8164966  0.0000000  0.5773503
[2,] 0.4082483 -0.7071068 -0.5773503
[3,] 0.4082483  0.7071068 -0.5773503
>
```

Para $\lambda_1 = 6$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_1,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Que pode ser posto na forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{11} + x_{12} \\ x_{11} + x_{13} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenada a coordenada tem-se:

$$\begin{bmatrix} -x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{11} - 2x_{12} \\ x_{11} - 2x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor com $x_{12} = x_{13}$ e $x_{11} = 2x_{13}$

Considere o vetor $\mathbf{x}_1 = (2, 1, 1)'$ com norma

$$||\mathbf{x}_1|| = \sqrt{6}.$$

normalizando tem-se:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

que é a primeira coluna da matriz C feita pelo R.
Para $\lambda_2 = 2$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_1,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Que pode ser posto na forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{21} + x_{22} \\ x_{21} + x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenada a coordenada tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{21} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim qualquer vetor com $x_{21} = 0$ e $x_{22} + x_{23} = 0$
Considere o vetor $\mathbf{x}_2 = (0, -1, 1)'$ com norma

$$||\mathbf{x}_2|| = \sqrt{2}.$$

normalizando tem-se:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

que é a segunda coluna da matriz C feita pelo R.
Para $\lambda_3 = 0$ tem-se:

$$A\,\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_1,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Que pode ser posto na forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2x_{31} + x_{32} + x_{33} \\ x_{31} + x_{32} \\ x_{31} + x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$x_{31} = -x_{32} \quad e \quad x_{31} = -x_{33},$$

logo

$$x_{32} = x_{33},$$

e

$$x_3 = (1, -1, -1)'$$

com norma

$$||\mathbf{x}_3|| = \sqrt{3}.$$

normalizando tem-se:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

que é a terceira coluna da matriz C feita pelo R.
A matriz dos auto vetores C é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Perceba novamente que a matriz C é a mesma!!!!!

```
>
> A=matrix(c(4,2,2,2,2,0,2,0,2),ncol=3);A
[,1] [,2] [,3]
[1,]    4    2    2
[2,]    2    2    0
```

```
[3,]    2    0    2
>
>
> e_1=c(2,1,1)/sqrt(6)
> e_2=c(0,-1,1)/sqrt(2)
>
> e_3=c(1,-1,-1)/sqrt(3)
>
>
>
> C=matrix(c(e_1,e_2,e_3),ncol=3);C
[,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.8164966  0.0000000  0.5773503
[2,] 0.4082483 -0.7071068 -0.5773503
[3,] 0.4082483  0.7071068 -0.5773503
>
> eigen(A)$vectors #### A mesma do R!!!!!!!.
[,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.8164966  0.0000000  0.5773503
[2,] 0.4082483 -0.7071068 -0.5773503
[3,] 0.4082483  0.7071068 -0.5773503
>
```

Obtenha a fatoração da matriz $A = BB^t$
Veja a saída do R:

```
>
> A=matrix(c(4,2,2,2,2,0,2,0,2),ncol=3);A
[,1] [,2] [,3]
[1,]    4    2    2
[2,]    2    2    0
[3,]    2    0    2
>
> rc=eigen(A)$value;round(rc,4)
[1] 6 2 0
>
> D=diag(rc); round(D,4)
[,1] [,2] [,3]
[1,]    6    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    0
> RD=sqrt(D);round(RD,4)
[,1]   [,2] [,3]
[1,] 2.4495 0.0000    0
[2,] 0.0000 1.4142    0
[3,] 0.0000 0.0000    0
> C=eigen(A)$vectors
>
> B=t(C)%*%RD;round(B,4)
[,1]    [,2] [,3]
[1,] 2.0000  0.5774    0
[2,] 0.0000 -1.0000    0
```

```
[3,] 1.4142 -0.8165    0
>
> round(det(B),4)
[1] 0
>
>
> round(t(B)%*%B,4)
[,1] [,2] [,3]
[1,]    6    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    0
>
```

A fatoração existe mesmo que A seja positiva semi-definida.
Qual a decomposição de Cholesky de A?
A saída do R é dada por:

```
> F=t(chol(A));F
Error in chol.default(A) : a submatriz de ordem 3 não é positiva definida
>
```

Assim não há fatoração de Cholesky.