07. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória com função densidade dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\, x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\, I_A(x), \quad A = (0,1) \ \ \theta > 0.$$

Note que

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\ x^{\frac{1}{\theta}-1}\, I_A(x), \quad A = (0,1) \ \ \theta > 0.$$

$$X \sim beta(a = \frac{1}{\theta}, b = 1).$$

Queremos testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ \ vs \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

(i) Encontre o teste **UMP** de nível α (se existir).

(ii) Sendo $n = 2$, $\theta_0 = 1$ e $\alpha = 0,05$, encontre a região crítica.

Solução: Temos duas hipóteses compostas. Para achar o teste **UMP** vamos precisar do seguinte resultado(página 134):

Teorema 6.4.1 No caso em que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma variável X que pertence à família exponencial. Temos que:

1: O teste **UMP** para testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

é também **UMP** para testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

2: O teste **UMP** para testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

é também **UMP** para testar:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

A definição de família exponencial pode ser encontrada nas páginas 34,35 e 36.

Definição 2.4.1 Dizemos que a distribuição da variável aleatória X pertence à família exponencial unidimensional de distribuições se pudermos escrever sua função de probabilidade ou sua função de densidade de probabilidade como

$$f(x|\theta) = \exp(c(\theta)T(x) + d(\theta) + h(x))\ I_A(x),$$

em que c, d são funções reais de θ T, h são funções reais de x e o suporte A não depende de θ.
Uma maneira mais operacional é: Veja se o suporte depende de θ.
Se depender pare. Caso contrário faça:

$$\log\left(f(x|\theta)\right) = c(\theta)T(x) + d(\theta) + h(x).$$

Vamos aplicar na nossa densidade:
O suporte $A = (0, 1)$ não depende de θ.

$$\log\left(f(x|\theta)\right) = \log\left(\frac{1}{\theta}\, x^{\frac{1}{\theta}-1}\right) = -\log(\theta) + (\frac{1}{\theta} - 1)\log(x)$$

Notemos que para

$$\log\left(f(x|\theta)\right) = \frac{1}{\theta}\ \log(x) - \log(\theta) - \log(x)$$

Fazendo o cotejo temos:

$$c(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad T(x) = \log(x) \quad d(\theta) = -\log(\theta) \quad h(x) = -\log(x).$$

Assim mostramos que X pertence à família exponencial.

De acordo com o teorema 6.4.1 basta achar o teste **UMP** para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

De acordo com a definição 6.4.1 basta achar o teste **UMP** para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_1,\ \ \theta_1 > \theta_0$$

Note que:

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{-1}\ x_i^{1/\theta - 1}.$$

Seja $u = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \theta^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/\theta - 1} = \theta^{-n}\ u^{1/\theta - 1}$$

Se a hipótese nula é verdadeira temos $\theta = \theta_0$:

$$L_0(\mathbf{x}) = \theta_0^{-n}\ u^{1/\theta_0 - 1}.$$

Se a hipótese alternativa é verdadeira temos $\theta = \theta_1 > \theta_0$:

$$L_1(\mathbf{x}) = \theta_1^{-n}\ u^{1/\theta_1 - 1}.$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson, utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{\theta_1^{-n}\ u^{1/\theta_1 - 1}}{\theta_0^{-n}\ u^{1/\theta_0 - 1}} = \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^{-n}\ u^{1/\theta_1 - 1/\theta_0}.$$

De

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k$$

Fazendo

$$b = \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} < 0.$$

$$\left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^{-n}\ u^b \geq k \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^{n}$$

$$u^b \geq k \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^{n}$$

Seja

Como $b < 0$ temos:

$$u \leq \left[k \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^{n}\right]^{1/b} = c$$

A região crítica fica:

Se

$$u = \prod_{i=1}^{n} x_i \leq c$$

rejeitar H_0.

Ela também pode ser posta na forma:

$$\log(\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \log(c)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \leq \log(c)$$

Multiplicando por (-1) temos:

$$\sum_{i=1}^{n} -\log(x_i) \geq -\log(c) = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} -\log(x_i) \geq a.$$

A nossa região crítica é da forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \ -log(x_i) \geq a.$$

Vamos resolver o item **b**:

Devemos achar a distribuição amostral de

$$S = \sum_{i=1}^{n} -\log(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \ Y_i.$$

Vamos achar a lei de $Y = -\log(X)$:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{-t\log(X)}\right)$$

$$M_Y(t) = E\left(e^{\log(X^{-t})}\right) = E(X^{-t}).$$

$$M_Y(t) = \theta^{-1} \int_0^1 x^{-t}\ x^{1/\theta-1}\ dx = \theta^{-1} \int_0^1 x^{(1/\theta-t)-1}\ dx = \frac{\theta^{-1}}{\theta^{-1}-t}\ x^{1/\theta-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-\theta t},\ t < 1/\theta$$

A condição de existência é dada por:

$$1/\theta - t > 0 \qquad t < 1/\theta.$$

Se

Assim

$$Y \sim Exp(1/\theta)$$

e

$$S = \sum_{i=1}^{n} -\log(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \ Y_i. \sim Gama(n, 1/\theta)$$

Temos $n = 2$ e $\theta_0 = 1$

Para $n = 2$ vamos trabalhar com a seguinte variável

$$S = -\log(X_1) - \log(X_2)$$

$$S \sim Gama(2,1).$$

$$\alpha = P_{H_0}(S \geq a) = 0,05.$$

```
a=qgamma(0.95,2,1);a
[1] 4.743865
```

Assim

Assim a região crítica procurada é dada por:

$$RC = \{-log(x_1) - log(x_2) \leq 4,743865\}.$$