CC0288 - Inferência Estatística I

Lista Especial 2 - 26/04/2023.

Prof. Maurício

Vamos fazer uma lista com as questões de Inferência que caíram na prova de Seleção do Mestrado da UFMG

1. (Mestrado-UFMG-2019-2020-Questão 1.) Suponha uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$, tal que $E(X_1) = \mu$ e $V(X_1) = \sigma^2$. Considere os seguintes estimadores para μ.

$$\hat{\mu_1} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} X_i}{2n}, \quad \hat{\mu_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad \hat{\mu_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-3}, \quad e \ \hat{\mu_4} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} X_i}{(2n)^2},$$

Afirma-se:

I. Os estimadores $\hat{\mu_1}$ e $\hat{\mu_4}$ são não viciados e os estimadores $\hat{\mu_2}$ e $\hat{\mu_3}$ são viciados.

II. Todos os estimadores são assintoticamente não viciados.

III. Todos os estimadores são consistentes.

IV. Apenas os estimadores $\hat{\mu_1}$ e $\hat{\mu_2}$ são não viciados.

V. Apenas os estimadores $\hat{\mu_1}$, $\hat{\mu_2}$ e $\hat{\mu_3}$ são consistentes.

Estão corretas as seguintes afirmações:

a. II e III
b. I e III
c. IV e V
d. III e IV

2. (Mestrado-UFMG-2019-2020-Questão 2.) Seja uma função contínua $f : [0,1] \to \Re$, com $) \le f(x) \le B$, $\forall x \in [0,1]$. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variáveis aleatórias independentes, tais que $\mathbf{X} \sim$ Uniforme $[0,1]$ e $\mathbf{Y} \sim$ Uniforme $[0,B]$. Considere os seguintes estimadores para estimar

$$\int_0^1 f(x)\, dx :$$

$$I = \begin{cases} B & \text{se } Y \le f(X) \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

e

$$J = f(X).$$

Pode-se afirmar que:

a. $Var(I) \leq Var(J)$.
b. $Var(J) \leq Var(I)$.
c. $Var(I) = Var(J)$.
d. Dependendo da funçãof o estimador I pode ter variância maior ou menor do que o estimador J.

3. (Mestrado-UFMG-2019-2020-Questão 4.) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição de probabilidade dada por:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k \, (1-p)^{x-k},$$

para $x = k, k+1, k+2, \ldots, \; 0 < p < 1 \;\; e \;\; k > 1$,
onde

$$\binom{x-1}{k-1} = \frac{(x-1)!}{(k-1)! \, (x-k)!}.$$

Supondo k conhecido, o estimador de máxima verossimilhança de p é:

a. $\dfrac{k}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
b. $\dfrac{nk}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
c. $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
d. $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

4. (Mestrado-UFMG-2019-2020-Questão 10) A duração de um tipo de equipamento é uma variável aleatória com distribuição Normal com média 3,0 anos e desvio-padrão 1,05 anos. Considerando uma amostra aleatória simples de 14 equipamentos, as probabilidades

$$P(\bar{X} < 3,5) \quad e \quad P(S < 1),$$

onde

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{14} X_i}{14} \quad e \;\; S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{13},$$

são dadas, respectivamente, por:

a. $\Phi(1,78)$ e 0,45
b. $\Phi(1,78)$ e 0,50
c. $\Phi(1,82)$ e 0,45
d. $\Phi(1,82)$ e 0,50

5. (Mestrado-UFMG-2019-2020-Questão 7) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_{35}$ uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{, se } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$$

A probabilidade de que a média amostral seja maior que 0,78 é aproximadamente igual a:

a. $\Phi(2,10)$
b. $\Phi(0,79)$
c. $\Phi(-2,10)$
d. $\Phi(-0,79)$

6. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 1.) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal com média 2 e variância 1. O valor de $P(2X > Y)$ é.

a. $0,9772$

b. $0,1867$

c. $0,8749$

d. $0,8133$.

7. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 2.) Um pacote com 10 componentes eletrônicos contém 2 itens defeituosos e 8 itens não defeituosos. Se X é o número de componentes eletrônicos defeituosos em uma amostra escolhida aleatoriamente e sem reposição com 3 itens, a probabilidade de ter pelo menos um item defeituoso na amostra é

a. $\frac{7}{15}$

b. $\frac{4}{60}$

c. $\frac{14}{15}$

d. $\frac{16}{30}$.

8. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 3.) Denote por X o número de vezes em que uma pessoa contrai um resfriado em um dado ano. Assuma que X é uma variável aleatória Poisson com média 5. Suponha que com o uso de uma determinada droga (baseada em grande quantidade de vitamina C), tal número segue distribuição Poisson com média 3 para 75% da população e para os 25% restantes da população, a droga não faz efeito e, portanto, neste caso, o número de resfriados anual tem distribuição Poisson com média 5. Dado que uma pessoa escolhida aleatoriamente teve 1 resfriado em um determinado ano com a utilização da droga, qual é a

probabilidade de que a droga tenha surtido efeito? (Utilize arredondamento de quatro casas decimais).

a. 0,9301

b. 0,8886

c. 0,7500

d. 0,1680

9. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 4.) A função geradora de momentos da variável aleatória X é dada por $M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp(2\ e^t - 2)$ e a da variável aleatória Y é dada por $M_Y(t) = E(e^{tY}) = (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^3$. Se X e Y são independentes, o valor de $E(X+Y)$ é:

a. $\dfrac{17}{4}$.

b. $\dfrac{11}{4}$

c. $\dfrac{5}{16}$

d. $\dfrac{13}{16}$

10. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 5.)

Sejam X e Y variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função de densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ (x+y)\ e^{-(x+y)}\ I_{(0,\infty)}(x)\ \ I_{(0,\infty)}(x).$$

A distribuição de $Z = X + Y$ é

a. $\Gamma(1,1)$.

b. $\Gamma(1,2)$.

c. $\Gamma(1,3)$.

d. $\Gamma(1/2, 1/2)$

Obs: Uma variável aleatória W tem distribuição beta

se sua função densidade de probabilidade é dada

$$g(w) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ w^{\alpha-1}\ e^{-\beta w}\ ;\ I_{(0,\infty)}\ (w),\ \ \alpha > 0, \beta > 0.$$

11. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 6) Assuma que $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de densidade dada por

$$f(x) = 2\ e^{-2x}\quad I_{(0,\infty)}\ (x).$$

Seja N uma variável aleatória discreta e independente de $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$, com função de probabilidade

$$P(N = k) = \binom{20}{k}\ \frac{1}{2^{20}}\ \ I_{\{0,1,\ldots,20\}}\ \ (k).$$

Defina $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (em que $S_0 = 0$). A esperança $E(S_N)$ é igual a

a. 1

b. 5

c. 10

d. 20.

12. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 7) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes tais que $M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp(\frac{t^2}{2} - 0,5t)$

e $M_Y(t) = E(e^{tY}) = \exp(\frac{t^2}{2} + 0,5t)$. O valor de $P(X + Y < 0)$ é

a. 0,8133

b. 0,1867

c. 0,5

d. 0

13. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 8) Um programa de computador, ao somar números, arredonda cada número para o inteiro mais próximo, admita que todos os erros de arredondamento sejam independentes e uniformemente distribuídos em $[-0,5\ 0,5]$. Se 1500 números forem somados, a probabilidade aproximada de que o erro total absoluto ultrapasse 15 é igual a

a. 0,9044

b. 0,1798

c. $3,36 \times 10^{-6}$

d. 0,8202.

14. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 9) Considere as distribuições de probabilidade com função de densidade ou função de probabilidade abaixo.

(i)

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\ \sigma\ \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(logx - \mu)^2}{2\ \sigma^2}\right)\ I_{(0,\infty)}\ (x),\quad \mu \in \mathbb{R}\ e\ \sigma^2 > 0,$$

ambos desconhecidos.

(ii)

$$f(x;\alpha) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}\ e^{-\alpha x}\ \ I_{(0,\infty)}\ (x),\quad \alpha > 0,$$

α desconhecido.

(iii)

$$P(X = x;\theta,r) = \frac{(r + x - 1)!}{x!(r - 1)!};\theta^r\ (1-\theta)^x\ \ I_{\{0,1,2,\ldots\}}\ (x),$$

θ e r desconhecidos tal que $0 < \theta < 1$ e $r = 1,2,\ldots$.

(iv)

$$P(X = x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!}\;; I_{\{0,1,2,\ldots\}}\,(x),$$

com λ desconhecido.

Qual dessas distribuições **NÃO** pertencem a família exponencial?

a. (ii) e (iii)

b. Apenas (iii)

c. (i) e (iv)

d. Apenas (ii).

15. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 10) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de densidade dada por

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \quad I_{(\theta,\infty)}\,(x), \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Defina $X_{(1)} = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Qual das afirmações abaixo é **Falsa**?

a. $X_{(1)} - \frac{1}{n}$ é um estimador não viesado de θ.

b. A função de densidade de $X_{(1)}$ é dada por:

$$f_{X_{(1)}} = n\; e^{-n(x-\theta)} \quad I_{(\theta,\infty)}\,(x).$$

c. $X_{(1)}$ é um estimador consistente de θ.

d. $Var(X_{(1)}) = \frac{1}{n}$.

16. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 11) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de densidade dada por

$$f(x\;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\; e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \quad I_{(\mu,\infty)}\,(x), \;\; \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Marque a opção que apresenta uma estatística suficiente bidimensional para (μ, σ).

a. $\left(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\;,\; \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

b. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\;,\; \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

c. $\left(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\;,\; \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

d. $\left(n\;,\; \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

17. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 12.) Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ com $\theta > 0$. O estimador de máxima verossimilhança para $h(\theta) = E(X_1)$ é

a. $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
b. $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)/2$
c. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
c. $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

18. (Mestrado-UFMG-2018-2019-Questão 14) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \lambda^2 \, x \, e^{-\lambda x} \quad I_{(0,\infty)}\,(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

denote por LI o limite inferior de Cramer-Rao para a variância de estimadores não viciados de λ e denote por $\hat{\lambda}$ o estimador de máxima verossimilhança de λ. Seja

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Assinale a opção correta.

a. $LI = \frac{\lambda^2}{2n}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$.
b. $LI = \frac{\lambda^2}{2}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$.
c. $LI = \frac{\lambda^2}{2n}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}$.
d. $LI = \frac{\lambda^2}{2}$ e $\hat{\lambda} = \bar{X}/2$.

19. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 4) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com função densidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} \text{com } x \ \geq c > 0, \theta > 0$$

O estimador de Máxima verossimilhança de θ é dado por:

a. $\dfrac{n}{(\sum_{i=1}^{n} log(X_i)) - nlog(c)}$ b. $\dfrac{nc}{c(\sum_{i=1}^{n} log(X_i)) - n}$

c. $\dfrac{n}{(log(\sum_{i=1}^{n} X_i) - nlog(c)}$ d. $\dfrac{nc}{c\, log(\sum_{i=1}^{n} X_i) - n}$

20. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 6) Considere que $X|Y \sim$ Binomial (Y, θ) e que Y segue uma distribuição de Poisson com média λ. A variância da distribuição marginal de X é dada por:

    a. $\lambda\theta^2$ b. $\lambda\theta(2-\theta)$ c. $\lambda\theta(1-\theta)$ d. $\lambda\theta$

21. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 8)Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da Poisson com média θ e $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Qual deve ser o valor de k para que $exp\{-kY\}$ seja um estimador não viciado para $exp\{-\theta\}$?

    a. $\dfrac{n}{n-1}$ b. $\dfrac{n-1}{n}$ c. $ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ d. $ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$

22. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 9)
    Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes tal que

$$Y_i \sim Normal(\beta x_i, \sigma^2),$$

    considere x_i, conhecido para $i = 1, 2, \ldots, n$.
    Qual das opções abaixo representa um estatística suficiente para β e σ^2?

    a. $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right)$.

    b. $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$.

    c. $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$.

    d. $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$.

23. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 13) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ amostras aleatórias independentes, ambas com distribuição Normal de média μ e variância σ^2.

    Seja
    $$\bar{W} = \bar{X} + \bar{Y}.$$

    A variância de W e a esperança de $\bar{X}^2$ são, respectivamente:

    a. $\sigma^2 \left(\dfrac{n+m}{nm} \right)$ e $\sigma^2 + n\mu^2$.

    b. $\sigma^2 \left(\dfrac{n+m}{nm} \right)$ e $\sigma^2/n + \mu^2$.

    c.$(n+m)\sigma^2$ e $\sigma^2 + n\mu^2$.

    d.$(n+m)\sigma^2$ e e $\sigma^2/n + \mu^2$.

24. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 14) Um dado com 6 faces igualmente prováveis é continuamente lançado até que a soma total de todas as jogadas exceda 300. A probabilidade de que sejam necessárias 80 jogadas é aproximadamente:

    a. 0,0014 b. 0,336 c. 0,9049 d. 0,0951

25. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 12) Uma amostra aleatória de tamanho $n = 3$ do número de chamadas a uma central do SAMU, em 3 dias seguidos, resultou nas observações: $k_1 = 5$, $k_2 = 7$ e $k_3 = 9$. Suponha que as chamadas em um dia podem ser modeladas por uma variável aleatória Poisson com média λ . Encontre a estimativa de máxima verossimilhança para a probabilidade de que ocorram , no máximo, 2 chamadas em um dia (arredondado na 4^a casa decimal).

    a. 0,223 b. 0,0136 c. 0,0296 d. 0,0520