CC085 - Probabilidade II

Aulas 06 e 07- 21,24/05/2021.

Prof. Maurício

1. Vamos estudar um pouco mais sobre função geradora de momentos de variáveis aleatórias continuas.

   Seja X uma variável aleatória contínua (v.a.c) com função densidade de probabilidade dada por $f(x)$ e função geradora de momentos $M(t)$.

   Suponha ainda que $E(X^r) < \infty$

   Assim:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

   Fato 1

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\, E(X^i).$$

   Prova A expansão em série de Taylor de e^{tX} é dada por:

$$e^{tX} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\, X^i.$$

   Aplicando o operador esperança temos:

$$E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\, E(X^i).$$

   Propriedades

   P1. $M(0) = 1$.
   Prova:

$$M(0) = E(e^{0\times X}) = E(e^0) = E(1) = 1.$$

   P2. A função geradora de momentos de $Y = aX + b$ é

$$M_Y(t) = e^{bt}\, M_X(at)$$

   .

   Prova:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\left(e^{tY}\right) \\ &= E\left(e^{t(aX+b)}\right) \\ &= E\left(e^{atX+bt}\right) \\ &= E\left(e^{atX}e^{bt}\right) \\ &= e^{bt}\, E\left(e^{(at)X}\right) \\ &= e^{bt}\, M_X(at). \end{aligned}$$

P3.

$$E(X) = M^{'}(0).$$

Prova:

$$M'(t) = \left[E(e^{tX})\right]' = \left[E\left(e^{tX}\right)'\right] = E(X\ e^{tX}).$$

$$M'(0) = E(X\ e^{0X}) = E(X).$$

P4.

$$E(X^2) = M^{''}(0) = M^{(2)}(0).$$

Prova:

$$M^{(2)}(t) = [M'(t)]' = \left[E(Xe^{tX})\right]' = E(X^2\ e^{tX})$$

$$M^{(2)}(0) = E(X^2).$$

P5.

$$E(X^r) = M^{(r)}(0), \quad r = 1, 2, \ldots,$$

em que $M^{(r)}(0)$ é a r-ésima derivada de $M(t)$ no ponto $t = 0$

P6. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções geradoras $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, respectivamente . Seja $S = X + Y$. Então,

$$M_S(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

Prova:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E(e^{tS}) \\ &= E(e^{t(X+Y)}) \\ &= E(e^{tX}\ e^{tY}) \\ &= E(e^{tX})\ E(e^{tY}) \\ &= M_X(t) \times M_Y(t), \end{aligned}$$

já que se X e Y variáveis aleatórias independentes também o serão e^{tX} e e^{tY}.

P7. A função geradora de momentos é a impressão digital das variáveis aleatórias.

Isto é, sejam X e Y duas variáveis aleatórias com f.g.m. funções $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, respectivamente. Se

$$M_X(t) = M_Y(t), \forall t,$$

então X e Y terão a mesma lei de probabilidade.,

Exemplo 1: Ache a função geradora de momentos de

$$f(x) = 2\ e^{-2x}\ I_{(0,\infty)}\ (x).$$

Solução: Vemos que $X \sim Exp(\lambda = 2)$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\ dx = \int_0^{\infty} e^{tx}\ 2\ e^{-2x}\ dx.$$

$$M(t) = 2\ \int_0^{\infty} e^{-(2-t)x}\ dx.$$

$$M(t) = 2IGG(a = 1, b = (2-t) > 0, c = 1).$$

Assim para $t < 2$

$$M(t) = \frac{2}{2-t},\ \ t < 2.$$

Para $a > 0, b > 0, c > 0$

$$IGG(a, b, c) = \int_0^{\infty}\ x^{a-1} e^{-bx^c}\ dx = \frac{\Gamma(a/c)}{cb^{a/c}}.$$

Calcule $E(X^i), i = 1, 2, 3 \ldots$

$$E(X^i) = \int_0^{\infty} 2\ x^i e^{-2x}\ dx = 2\ IGG(a = i+1, b = 2, c = 1).$$

$$E(X^i) = 2\ \frac{\Gamma(i+1)}{2^{i+1}} = \frac{i!}{2^i}.$$

Utilize o resultado obtido e ache $M(t)$.

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\ \frac{t^i}{i!}\ E(X^i) = \sum_{i=0}^{\infty}\ \frac{t^i}{i!}\ \frac{i!}{2^i}$$

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\ \left[\frac{t}{2}\right]^i$$

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\ a^i = \frac{1}{1-a}.$$

Seja $a = \frac{t}{2}$. De $|a| < 1$. A condição de existência é dada por

$$|t| < 2.$$

$$M(t) = \frac{1}{1 - t/2} = \frac{2}{2 - t}$$

Usando a integral a condição de existência é $t < 2$ enquanto usando o somatório a condição de existência é $-2 < t < 2$.

Exemplo 2: Seja X com f.d.p. dada por

$$f(x) = I_{(0,1)}\,(x).$$

a. Mostre que $E(X) = \frac{1}{2}$ e $V(X) = \frac{1}{12}$.

b. Mostre que $M(t) = \frac{e^t - 1}{t}$, $t \neq 0$.

c. Usando a f.g.m. refaça o item **a**.

Solução:

$$E(X^r) = \int_0^1 x^r \; dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{r+1}.$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad E(X^2) = \frac{1}{3}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

A função geradora de momentos é dada por:

$$M(t) = \int_0^1 e^{tx} \; dx = \frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}, \; t \neq 0.$$

A primeira derivada de $M(t)$ é dada por:

$$M'(t) = \frac{te^t - (e^t - 1) \times 1}{t^2} = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

$$M'(0) = \frac{0}{0},$$

uma indeterminação. Vamos levantá-la aplicando a regra de l'Hôpital.

Vamos calcular o seguinte limite:

$$E(X) = \lim_{t \to 0} M'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{te^t + e^t - e^t}{2t}$$

$$E(X) = \lim_{t \to 0} \frac{te^t}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$E(X^2) = M^{''}(0) = \lim_{t\to 0} M^{''}(t) = \lim_{t\to 0} \frac{(te^t + e^t - e^t)t^2 - 2t(te^t - e^t + 1)}{t^4}.$$

Dividindo por t:

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2e^t - 2(te^t - e^t + 1)}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2e^t + 2te^t - 2(te^t + e^t - e^t)}{3t^2}.$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2e^t}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{3} = \frac{1}{3}.$$

Uma maneira mais elegante é usar série de Taylor.

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$$

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots = t\left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \ldots\right]$$

$$M(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \ldots\right]$$

$$M^{'}(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{8} + \ldots\right]$$

$$E(X) = M^{'}(0) = \frac{1}{2}.$$

$$M^{''}(t) = \left[\frac{1}{3} + \frac{0^2}{8} + \ldots\right]$$

$$E(X^2) = M^{'}(0) = \frac{1}{3}.$$

A função geradora de cumulantes é dada por:

$$K(t) = \ln\left[M_X(t)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i!}\ t^i,$$

k_i é o coeficiente de $\frac{t^i}{i!}$ da expansão em uma série de Taylor de $K(t)$

a. $k_1 = E(X) = K'(0)$
b. $k_2 = Var(X) = K''(0) = \mu_2 = \sigma^2$
c. $k_3 = E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E^3(X) = \mu_3$.
d. $k_4 = E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 12E^2(X)E(X^2) - 3E^2(X^2) - 6E^4(X) = \mu_4 - 3(k_2)^2$.

Como

$$K(t) = ln(M(t)).$$

A primeira derivada de $K(t)$ é dada por:

$$K'(t) = \frac{M^{'}(t)}{M(t)}.$$

$$K'(0) = \frac{M^{'}(0)}{M(0)} = M'(0) = E(X).$$

A derivada segunda de $K(t)$ é dada por:

$$K^{''}(t) = \frac{M^{''}(t)M(t) - [M'(t)]^2}{M^2(t)}.$$

$$K^{''}(0) = \frac{M^{''}(0)M(0) - [M'(0)]^2}{M^2(0)} = M^{''}(0) - [M'(0)]^2 = E(X^2) - E^2(X) = Var(X)$$

Exemplo 3: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com f.g.m. dada por:

$$M(t) = e^{2t+4t^2}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Qual a f.g.m. de

$$U = \frac{X+Y}{2}?$$

Seja $S = X + Y$ e $U = \frac{S}{2}$.
Vamos achar inicialmente sua f.g,m.de S

$$M_S(t) = M_X(t) \times M_Y(t) = [M(t)]^2 = \left[e^{2t+4t^2}\right]^2 = e^{4t+8t^2}$$

Assim

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = E(e^{tS/2}) = E^{(t/2)S} = M_S(t/2)$$

$$M_U(t) = e^{4(t/2)+8(t^2/4)} = e^{2t+2t^2}.$$

A distribuição normal de parâmetros μ e σ^2 tem f.g.m. dada por:

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}.$$

Assim,

$$X, Y \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 8), \ \ S \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 16)$$

$$U \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4).$$

Exemplo 4 Seja X uma v.a.c. com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Vamos calcular a geradora de momentos de X.

$$M(t) = E(^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx.$$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x^2-2xt)/2}\, dx$$

Note que:

$$(x^2 - 2xt) = (x^2 - 2xt + t^2 - t^2) = (x-t)^2 - t^2.$$

Assim,

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2}\, dx$$

Seja

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2}\, dx.$$

Fazendo a mudança

$$z = x - t \quad dz = dx.$$

Assim,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz.$$

$$I = 2 \;\; IGG(a = 1, b = 1/2, c = 2) = 2 \;\; \frac{\Gamma(1/2)}{2\; 2^{-1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

$$a = 1, c = 2; \;\; \frac{a}{c} = \frac{1}{2}; \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

$$b = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad b^{a/c} = \left[2^{-1}\right]^{1/2} = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{t^2/2} \;\; \sqrt{2\pi} = e^{t^2/2}.$$

$$X \sim N(0, 1).$$

2. Exercícios

1. (Meyer-Exercício 10.1, pg 260) Suponha que X tenha f.d.p. dada por

$$f(x) = 2x \ I_{(0,1)} \ (x).$$

Mostre que a f.g.m. de X é dada por>

$$M(t) = 2 \left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t - 1}{t^2} \right) = (2/t^2) \ [e^t(t-1) + 1], \ t \neq 0.$$

Use-a para calcular $E(X)$ e $V(X)$.

2. (Meyer-Exercício 10.2, pg 260) Suponha que $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,2)$ sejam independentes. Seja $S = X + Y$.

2.1. Se $U \sim U(a,b)$, isto é,

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \ I_{(a,b)} \ (x).$$

mostre que

$$M_U(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} \ , t \neq 0.$$

2.2. Utilizando o item **a**para calcular as f.g.m.'s de X e Y.

2.3. Qual a f.g.m. de S?

2.4. Utilize o item **c** para calcular o valor esperado de S.

3. (Meyer-Exercício 10.3, pg 260) Suponha que X tenha a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \lambda \ e^{-\lambda(x-a)} \ I_{(a,\infty)} \ (x).$$

(Esta é conhecida com distribuição exponencial a dois parâmetros ou exponencial).

3.1 Mostre que

$$M_X(t) = \frac{\lambda e^{at}}{(\lambda - t)} \ , t < \lambda.$$

3.2 Calcule a função geradora de cumulantes de X e utilize-a para mostrar que:

$$E(X) = a + \frac{1}{\lambda} \quad e \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.3 Mostre que

$$Y = X - a \sim Exp(\lambda).$$

3.4 Através da f.g.m. de Y obtenha a f.g.m. de X

4. (Meyer-Exercício 10.4, pg 261) Seja X o resultado da jogada de um dado equilibrado Mostre que

$$M(t) = \frac{e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}}{6}.$$

Use-a para calcular $E(X)$ e $V(X)$.

5. (Meyer-Exercício 10.5, pg 261) Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte f.d.p.

$$f(x) = (x-1)\ I_{(1,2]}\ (x) + (3-x)\ I_{(2,3)}\ (x).$$

Identifique a lei de X fazendo o gráfico da f.d.p.
Mostre que :

$$M(t) = \frac{e^t - 2e^{2t} + e^{3t}}{t^2} \quad t \neq 0.$$

6. (Meyer-Exercício 10.6, pg 261) Suponha que a variável aleatória contínua X tenha f.d.p.

$$f(x) = \frac{1}{2}\ e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Mostre que :

$$M(t) = \frac{1}{1-t^2}, |t| < 1.$$

Identifique a lei de X . Calcule a média e a variância de X usando a f.g.m.

7. (Meyer-Exercício 10.8, pg 261) Suponha que a f.g.m.a variável aleatória X seja da forma:

$$M(t) = (0,4t + 0,6)^8.$$

Qual a lei de X? Calcule sua média e variância usando a f.g.m..
Qual a fgm de $Y = 3X + 2$?

8. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes seguindo a lei exponencial de parâmetro $\lambda = 2$. Qual a lei de

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i?$$

e de

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S}{n}.$$