1 Distribuição de Pascal ou Binomial Negativa

1.1 Introdução

Fato 1. Considere que um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso em cada repetição constante e igual a p, $0 < p < 1$. é ensaiado independentemente até que r sucessos aconteçam. Seja X a variável aleatória correspondente ao número total de repetições até a obtenção do r-ésimo sucesso. A f.p. de X é dada por

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} I_{\{r,r+1,\ldots\}}(x) \tag{1}$$

<u>Prova</u>: O suporte da distribuição é o conjunto $A = \{r, r+1, \ldots\}$ e seja $x \in A$. Vai-se calcular a $f(x) = P(X = x)$, isto é, a probabilidade de que sejam necessárias x repetições. A probabilidade de que as $(x - r - 1)$ primeiras repetições sejam fracassos e as r últimas sucesso é dada por:

$$P(FF \ldots SFSS \ldots S) = p^r q^{x-r},$$

pois as repetições são independentes.

Mas qualquer permutação das $(x-1)$ primeiras repetições dará $(x-r)$ fracassos e $(r-1)$ sucessos. O número de permutações é dado por:

$$\frac{(x-1)!}{(x-r)!(r-1)!} = \binom{x-1}{r-1} = \binom{x-1}{x-r},$$

assim,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} I_{\{r,r+1,\ldots\}}(x).$$

Esta distribuição é chamada na literatura de *distribuição Pascal* quando r for um natural positivo. Ela generaliza a distribuição geométrica com $r = 1$. Ela também é conhecida como *distribuição binomial negativa* quando quando r for um real positivo. Neste caso sua função de probabilidade assume

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} \, I_{\{r,r+1,\ldots\}}(x),$$

sendo uma das distribuições mais importantes da Estatística. Considerando Y como o número de fracassos que precedem o r-ésimo sucesso, temos também uma outra versão (reparametrização) da distribuição de Pascal cuja função de probabilidade é dada por:

$$g(y) = \binom{y+r-1}{r-1} p^r \, q^y \, I_{\{0,1,\ldots\}}(y).$$

O coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ pode ser "generalizado". Vamos estender os coeficientes binomiais $\binom{n}{r}$ com n inteiro positivo. Usaremos o livro do Feller, traduzido por Flávio Wagner Rodrigues e Maria Elisa Fini, como uma **maravilhosa fonte** de estudo e iremos reproduzir alguns **trechos interessantes**.

Seja a quantidade $(x)_r$ definida por:

$$(x)_r = x(x-1)\dots(x-r+1) = \prod_{i=0}^{r-1}(x-i),$$

que existe para qualquer x real e r um inteiro positivo. Para $r=0$ colocamos $(x)_0 = 1$. Então

$$\binom{x}{r} = \frac{(x)_r}{r!} = \frac{x(x-1)\dots(x-r+1)}{r!},$$

define os coeficientes binomiais para todos os valores reais de x e para todo r inteiro positivo. Para $r=0$ colocaremos

$$\binom{x}{0} = 1 \quad e \quad 0! = 1.$$

Para valores inteiros, negativos de r definimos

$$\binom{x}{r} = 0 \quad se \quad r < 0.$$

O símbolo $\binom{x}{r}$ nunca será usado se r não for inteiro. Agora, vamos praticar nossa definição. Mostre que:

a. $\binom{-1}{r} = (-1)^r$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\binom{-1}{r} &= \frac{(-1)_r}{r!} = \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(-1-i) \\
&= \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(-1)(1+i) = (-1)^r\,\frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(1+i) = (-1)^r\,\frac{1\,2\,3\cdots r}{r!} \\
&= (-1)^r\,\frac{r!}{r!} = (-1)^r \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

b. $\binom{-2}{r} = (-1)^r(r+1)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\binom{-2}{r} &= \frac{(-2)_r}{r!} = \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(-2-i) \\
&= \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(-1)(2+i) = (-1)^r\,\frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(2+i) \\
&= (-1)^r\,\frac{1\,2\,3\cdots r\,(r+1)}{r!} = (-1)^r\,\frac{r!(r+1)}{r!} = (-1)^r\,(r+1) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

c. Para todo $a > 0$, $\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\binom{-a}{k} &= \frac{(-a)_k}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-a-i) \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-1)(a+i) = (-1)^k\,\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(a+i) \\
&= (-1)^k\,\frac{(a-k+1)(a-k)\cdots(a+1)a}{k!} \\
&= (-1)^k\binom{a+k-1}{k} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação: A distribuição de Pascal começando no zero tem função de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \binom{x+r-1}{r-1}\,p^r\,q^x \\
&= \frac{(x+r-1)!}{x!(r-1)!}\,p^r\,q^x \\
&= \frac{\Gamma(x+r)}{x!\,\Gamma(r)}\,p^r\,q^x.
\end{aligned}$$

Assim, admitindo que r é uma real positivo, usando a função gama $\Gamma(\cdot)$ à distribuição de Pascal, caímos no caso da binomial negativa. Usando o resultado do item (c), podemos expressar a f.p. por:

$$P(X=x) = (-1)^x\binom{-r}{x}\,p^r\,q^x\;\;I_A\,(x),\;\;A=\{0,1,\ldots\}.$$

Citamos três importantes resultados sobre coeficientes binomiais que facilitarão nossa vida daqui em diante:

$\mathcal{P}_1$: Para qualquer inteiro positivo n, temos $\binom{n}{r} = 0$ se $r > n$ ou se $r < 0$.

$\mathcal{P}_2$: Para qualquer x real e qualquer r inteiro, temos a relação de Stifel

$$\binom{x}{r-1} + \binom{x}{r} = \binom{x+1}{r}.$$

$\mathcal{P}_3$: Para todo número real a e qualquer t real no intervalo $(-1,1)$ vale a fórmula do binômio de Newton abaixo

$$\begin{aligned}
(1+t)^a &= 1 + \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 + \binom{a}{3}t^3 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{a}{i}t^i.
\end{aligned}$$

No caso de a ser um inteiro positivo todos os termos, no lado direito, que contenham potências maiores do que t^a são nulos e a fórmula vale qualquer que seja t. Se a não é inteiro positivo a expressão do lado direito é uma série infinita.

Para $a = -1$ a expressão do binômio de Newton fica

$$\begin{aligned}(1+t)^{-1} &= 1 + \binom{-1}{1} t + \binom{-1}{2} t^2 + \binom{-1}{3} t^3 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, t^i \\ &= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots ,\end{aligned}$$

que é a uma série geométrica de razão t. Se $a = n$ e n inteiro positivo e $t = 1$, então

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\ \therefore \quad 2^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

1.2 Definição

Uma variável aleatória discreta X é dita possuir distribuição de Pascal de parâmetros r e p, onde $q = 1 - p$, $0 \leq p \leq 1$, se sua função de probabilidade ($f.p.$) é da forma:

$$f(x) = f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} \, I_{\{r,r+1,r+2,\ldots\}}(x). \tag{2}$$

Notação: $X \sim Pascal(r,p)$.

Observação: Lê-se a notação acima do seguinte modo: X segue distribuição Pascal de parâmetros r e p.

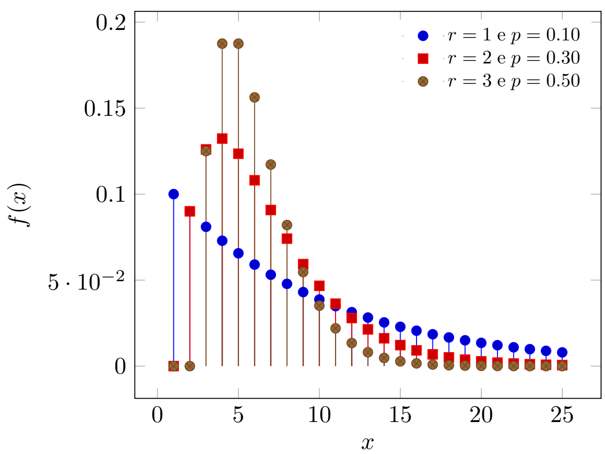

Figura 1: Gráfico da Função de Probabilidade Pascal

A Figura 1 apresenta o gráfico da distribuição Pascal para certos valores dos parâmetros r e p.

1.3 Propriedades da função de probabilidade

Fato 2. A expressão (1) é realmente uma função de probabilidade.

Prova: deve-se verificar que

i. $f(x) > 0, \ x \in A.$; e

ii. $\sum_A f(x) = 1,$

sendo $A = \{x \in R | f(x) > 0\}$ o suporte da distribuição de X. Como $A = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$ e para $0 < p < 1$ tem-se $f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} > 0$ para qualquer ponto do suporte . A segunda propriedade nos diz que a soma dos valores das probabilidades para os pontos do suporte é 1. Assim

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} = p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} = p^r \, \frac{1}{p^r} = 1.$$

Conforme explicação a seguir, sabemos que a expansão em série de Taylor de $f(a) = (1-a)^{-r}, |a| < 1$ é dada por

$$(1-a)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{r-1} a^j.$$

Fazendo a mudança de variável $x = r + j$ temos:

$$(1-a)^{-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} a^{x-r}.$$

Fazendo $a = q$ temos $1 - a = 1 - q = p$ temos:

$$p^{-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r}.$$

Multiplicando por p^r ambos os lados da equação temos:

$$1 = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} \qquad \blacksquare$$

1.4 Função geradora de probabilidades

Fato 3. Se $X \sim Pascal(r, p)$, então

$$\varphi(t) = \left[\frac{pt}{1-qt}\right]^r, \ \ t < \frac{1}{q}.$$

Prova:

$$\varphi(t) = E(t^X) = \sum_{x=r}^{\infty} t^x \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r},$$

Lembrando que $t^x = t^r\ t^{x-r}$ e colocando as constantes para fora do somatório:

$$\varphi(t) = p^r\ t^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (qt)^{x-r},$$

que é a expansão em série de Taylor em torno de $a = qt$. Finalmente,

$$\varphi(t) = (pt)^r \frac{1}{(1-qt)^r},\ = \left[\frac{pt}{(1-qt)}\right]^, \quad t < \frac{1}{q},$$

e a condição existência aparece

$$qt < 1 \Leftrightarrow t < \frac{1}{q} \qquad \blacksquare$$

1.5 Função geradora de momentos

Fato 4. Se $X \sim Pascal(r,p)$, então

$$M(t) = \left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^r, \ \ t < -ln(q).$$

<u>*Prova*</u>:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \varphi(e^t) = \left[\frac{pe^t}{(1-qe^t)}\right]^r, \ \ e^t < \frac{1}{q} \Leftrightarrow e^t < q\, e^t < \frac{1}{q}, \quad t < -\ln q$$

assim,

$$\ln(qe^t) = \ln q + t < \ln 1 = 0,$$

o que acarreta

$$t < -\ln q \qquad \blacksquare$$

1.6 Momentos fatoriais

Fato 5. Se $X \sim Pascal(r,p)$, então os quatro primeiros momentos fatoriais são dados por:

$$E\left(X_{[r]}\right) = \begin{cases} \dfrac{r}{p}, & \text{se } r = 1 \\[2ex] \dfrac{r(r+q-p)}{p^2}, & \text{se } r = 2 \\[2ex] \dfrac{r((r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2)}{p^3}, & \text{se } r = 3 \\[2ex] \dfrac{r}{p^4}\left[24q^3 + 36(r-1)q^2 + 12(r-1)(r-2)q + (r-1)(r-2)(r-3)\right], & \text{se } r = 4 \end{cases}$$

<u>*Prova*</u>: como $E\left(X_{[1]}\right) = E(X)$ tem-se:

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r\ q^{x-r}$$

mas

$$x\binom{x-1}{r-1} = x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{x!}{(\frac{r!}{r})(x-r)!} = r\frac{x!}{r!(x-r)}!r\binom{x}{r}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
E(X) &= r\,p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} q^{x-r} \\
&= r\,p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} q^{x-r} \\
&= r\,p^r \sum_{y=r+1}^{\infty} \binom{y-1}{r+1-1} q^{y-(r+1)} \\
&= r\,p^r \frac{1}{p^{r+1}} \\
&= \frac{r}{p},
\end{aligned}$$

foi feita a mudança de variável $y = x + 1$.

Vai-se calcular agora o segundo momento fatorial .No cálculo dessa esperança aparece um fator $x(x-1)(x-1)!$ que não tem uma fatoração direta. Neste caso vamos calcular $E[(X+1)X]$ e o fator fica $(x+1)x(x-1)! = (x+1)!$. Por outro lado $X(X-1) = X(X+1-2) = X(X+1) - 2X$. Assim

$$E[X(X-1)] = E[X(X+1)] - 2E(X).$$

Portanto,

$$E[(X+1)X] = \sum_{x=r}^{\infty} (x+1)x\binom{x-1}{r-1} p^r\, q^{x-r}$$

mas,

$$\begin{aligned}
(x+1)x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} &= \frac{(x+1)x(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!}, \qquad \text{desde que } (r-1)! = \frac{(r+1)!}{(r+1)r} \\
&= \frac{(x+1)!}{\left[\frac{(r+1)!}{(r+1)r}\right](x-r)!} \\
&= (r+1)r\frac{(x+1)!}{(r+1)!(x-r)!} = (r+1)r\binom{x+1}{r+1},
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$
\begin{aligned}
E[(X+1)X] &= r(r+1)\, p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x+1}{r+1} q^{x-r} \\
&= (r+1)r\, p^r \sum_{y=r+2}^{\infty} \binom{y-2}{r+1} q^{y-r-2}, \qquad \text{fazendo } y = x+2 \\
&= (r+1)r\, p^r \sum_{y=r+1}^{\infty} \binom{y-1}{r+1-1} q^{y-(r+2)} \\
&= (r+1)r\, p^r \frac{1}{p^{r+2}} \\
&= \frac{(r+1)r}{p^2},
\end{aligned}
$$

continuando, vamos calcular o segundo momento fatorial

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= E[X(X+1)] - 2E(X) \\
&= \frac{(r+1)r}{p^2} - \frac{2r}{p} \\
&= \frac{r^2+r-2rp}{p^2} \\
&= \frac{r^2+(1-2p)r}{p^2} \\
&= \frac{r(r+q-p)}{p^2}.
\end{aligned}
$$

O segundo momento em relação à origem é dado por:

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= E[X(X+1)] - E(X) \\
&= \frac{(r+1)r}{p^2} - \frac{r}{p} \\
&= \frac{r^2+r-rp}{p^2} \\
&= \frac{r^2+(1-p)r}{p^2} \\
&= \frac{r^2+qr}{p^2} \\
&= \frac{r(r+q)}{p^2}
\end{aligned}
$$

Vai-se calcular agora o terceiro momento fatorial. Note que:

$$
\begin{aligned}
X(X-1)(X-2) &= X(X+1-2)(X+2-4) = X(X+1)(X+2) - 2X(X+2) - 4X(X+1) + 8X \\
&= X(X+1)(X+2) - 2X^2 - 4X - 4X^2 - 4X + 8X \\
&= X(X+1)(X+2) - 6X^2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X(X+1)(X+2)] - 6E[X^2],$$

daí,

$$\begin{aligned}
E\left[(X+2)(X+1)X\right] &= \sum_{x=r}^{\infty}(x+2)(x+1)x\binom{x-1}{r-1}p^r\, q^{x-r} \\
&= (x+2)(x+1)x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{(x+2)!}{\left[\frac{(r+2)!}{(r+2)(r+1)r}\right](x-r)!} \\
&= (r+2)(r+1)r\frac{(x+2)!}{(r+2)!(x-r)!}!(r+2)(r+1)r\binom{x+2}{r+2},
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
E[(X+2)(X+1)X] &= r(r+1)(r+2)\; p^r \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x+2}{r+2}q^{x-r} \\
&= (r+2)(r+1)r\; p^r \sum_{y=r+3}^{\infty}\binom{y-1}{r+2}q^{y-r-3} \\
&= (r+2)(r+1)r\; p^r \sum_{y=r+3}^{\infty}\binom{y-1}{r+3-1}q^{y-(r+3)} \\
&= (r+2)(r+1)r\; p^r \frac{1}{p^{r+3}} \\
&= \frac{(r+2)(r+1)r}{p^3},
\end{aligned}$$

foi feita a mudança de variável $y = x + 3$

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= E[X(X+1)(X+2)] - 6E[X^2] \\
&= \frac{(r+2)(r+1)r}{p^3} - \frac{6r(r+q)}{p^2} = \frac{(r+2)(r+1)r - 6r(r+q)p}{p^3} \\
&= \frac{(r+2)(r+1)r - 6r(r+q)(1-q)}{p^3} = \frac{r((r+2)(r+1) - 6(r+q)(1-q))}{p^3} \\
&= \frac{r(r^2+3r+2-6(r-rq+q-q^2)}{p^3} = \frac{r(r^2+3r+2-6(r-(r-1)q-q^2)}{p^3} \\
&= \frac{r(r^2+3r+2-6r+6(r-1)q+6q^2)}{p^3} = \frac{r(r^2-3r+2+6(r-1)q+6q^2)}{p^3} \\
&= \frac{r((r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2)}{p^3}
\end{aligned}$$

Vai-se calcular agora o quarto momento fatorial. Note que:

$$\begin{aligned}
E(X+3)(X+2)(X+1)X] &= p^r \sum_{x=r}^{\infty}(x+3)(x+2)(x+1)x\binom{x-1}{r-1}q^{x-r} \\
&= (r+3)(r+2)(r+1)r\; p^r \sum_{y=r+4}^{\infty}\binom{y-1}{r+3}q^{y-r-4} \\
&= (r+3)(r+2)(r+1)r\; p^r \sum_{y=r+4}^{\infty}\binom{y-1}{r+4-1}q^{y-(r+4)} \\
&= (r+3)(r+2)(r+1)r\; p^r \frac{1}{p^{r+4}} \\
&= \frac{(r+3)(r+2)(r+1)r}{p^4},
\end{aligned}$$

foi feita a mudança de variável $y = x + 4$.

Sabemos que

$$X(X+1)(X+2)(X+3) = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X,$$

e que

$$X(X-1)(X-2)(X-3) = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X.$$

Assim,

$$X(X+1)(X+2)(X+3) - X(X-1)(X-2)(X-3) = 12X^3 - 12X = 12(X^3 - X).$$

$$E[X(X-1)(X-2)(X-3)] \quad = \quad E[X(X+1)(X+2)(X+3)] - 12[E(X^3) + E(X)].$$

então,

$$\begin{aligned}
E(X^3) + E(X) &= \frac{r[r^2 + (3r+1)q + q^2]}{p^3} + \frac{r}{p} \\
&= \frac{r}{p^4}\left[(r^2 + (3r+1)q + q^2)p + p^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[(r^2 + (3r+1)q + q^2)(1-q) + (1-q)^3\right]. \\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^2 + (3r+1)q + q^2 - r^2q - (3r+1)q^2 - q^3 + 1 - 3q + 3q^2 - q^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^2 + 1 - (r^2 - 3r + 2)q - 3(r-1)q^2 - 2q^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^2 + 1 - (r-1)(r-2)q - 3(r-1)q^2 - 2q^3\right].
\end{aligned}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)(X-3)] &= E[X(X+1)(X+2)(X+3)] - 12[E(X^3)+E(X)].\\
&= \frac{(r+3)(r+2)(r+1)r}{p^4} - 12\frac{r}{p^4}\left[r^2+1-(r-1)(r-2)q-3(r-1)q^2-2q^3\right]\\
&= \frac{r}{p^4}\left[(r+3)(r+2)(r+1) - 12(r^2+1-(r-1)(r-2)q-3(r-1)q^2-2q^3)\right]\\
&= \frac{r}{p^4}\left[(r+3)(r+2)(r+1) - 12(r^2+1)+12(r-1)(r-2)q36(r-1)q^2-24q^3\right]\\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^3+6r^2+11r+6-12r^2-12+12(r-1)(r-2)q+36(r-1)q^2-24q^3\right]\\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^3-6r^2+11r-6+12(r-1)(r-2)q+36(r-1)q^2-24q^3\right]\\
&= \frac{r}{p^4}\left[24q^3+36(r-1)q^2+12(r-1)(r-2)q+(r-1)(r-2)(r-3)\right]
\end{aligned}
$$

1.7 Momentos em relação à origem

Fato 6. Se $X \sim Pascal(r,p)$, então os quatro primeiros momentos em relação à origem são dados por

$$
E\left(X^r\right) = \begin{cases}
\frac{r}{p}, & \text{se } r=1\\[2ex]
\frac{r(r+q)}{p^2}, & \text{se } r=2\\[2ex]
\frac{r(r^2+(3r+1)q+q^2)}{p^3}, & \text{se } r=3\\[2ex]
\frac{r(r^3+(6r^2+4r+1)q+(7r+4)q^2+q^3)}{p^4}, & \text{se } r=4
\end{cases}
$$

Prova: O primeiro momento em relação à origem é igual ao primeiro momento fatorial e portanto

$$E(X) = \mu = \frac{r}{p}.$$

O segundo momento em relação à origem, $E(X^2)$, é calculado por:

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{r(r+q-p)}{p^2} + \frac{r}{p} = \frac{r^2+rq-rp+rp}{p^2} = \frac{r(r+q)}{p^2}.$$

O terceiro momento em relação à origem, $E(X^3)$, é calculado por:

$$E(X^3) = E\left[X(X-1)(X-2)\right] + 3E(X^2) - 2E(X).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
E(X^3) &= \frac{r((r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2)}{p^3} + 3\,\frac{r(r+q)}{p^2} - \frac{2r}{p} \\
p^3\,E(X^3) &= r\left[(r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2+3(r+q)p-2p^2\right] \\
&= r\left[(r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2+3(r+q)(1-q)-2(1-q)^2\right] \\
&= r\left[(r-1)(r-2)+6(r-1)q+6q^2+3r-3rq+3q-3q^2-2+4q-3q^2\right] \\
&= r\left[r^2-3r+2+3r-2+(6r-6-3r+7)q+q^2\right] \\
&= r\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
E(X^3) = \frac{r\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]}{p^3}.
$$

O quarto momento em relação à origem, $E(X^4)$, é calculado por:

$$
E(X^4) = E\left[X(X+1)(X+2)(X+3)\right] - \left[6E(X^3)+11E(X^2)+6E(X)\right].
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
6E(X^3)+11E(X^2)+6E(X) &= \frac{6r\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]}{p^3} + \frac{11r(r+q)}{p^2} + \frac{6r}{p} \\
&= \frac{r}{p^4}\left[6\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]p + 11(r+q)p^2 + 6p^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[A+B+C\right]
\end{aligned}
$$

mas,

$$
\begin{aligned}
A &= 6\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]p \\
&= 6\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right](1-q) \\
&= 6\left[r^2+(3r+1)q+q^2-qr^2-(3r+1)q^2-q^3\right] \\
&= 6\left[r^2+(3r+1-r^2)q+(1-3r-1)q^2-q^3\right] \\
&= 6\left[r^2+(3r+1-r^2)q-3rq^2-q^3\right] \\
&= \left[6r^2+(18r+6-6r^2)q-18rq^2-6q^3\right].
\end{aligned}
$$

Vamos agora simplificar B:

$$
\begin{aligned}
B &= 11(r+q)p^2 = 11(r+q)(1-q)^2 = 11(r+q)(1-2q+q^2) \\
&= 11\left[r - 2qr + rq^2 + q - 2q^2 + q^3\right] \\
&= 11\left[r + (1-2r)q + (r-2)q^2 + q^3\right] \\
&= \left[11r + (11-22r)q + (11r-22)q^2 + 11q^3\right]
\end{aligned}
$$

Por fim simplificar C:

$$
\begin{aligned}
C &= 6p^3 = 6(1-q)^3 = 6(1-3q+3q^2-q^3) \\
&= 6 - 18q + 18q^2 - 6q^3.
\end{aligned}
$$

O valor de $A+B+C$ é:

$$
\begin{aligned}
A+B+C &= 6r^2 + (18r+6-6r^2)q - 18rq^2 - 6q^3 + 11r + (11-22r)q + (11r-22)q^2 + 11q^3 + \\
&\quad +6 - 18q + 18q^2 - 6q^3 \\
&= (6r^2+11r+6) + (18r+6-6r^2+11-22r-18)q + (-18r+11r-22+18)q^2 - q^3 \\
&= (6r^2+11r+6) - (1+4r+6r^2)q - (7r+4)q^2 - q^3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^4) &= \frac{r}{p^4}\left[(r+1)(r+2)(r+3) + (6r^2+11r+6) + (1+4r+6r^2)q + (7r+4)q^2 - q^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[(r^3+6r^2+11r+6) + (6r^2+11r+6) + (1+4r+6r^2)q + (7r+4)q^2 - q^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^3 + (6r^2+11r+6)q^2 + (1+4r+6r^2)q + (7r+4)q^2 - q^3\right] \\
&= \frac{r\left[r^3 + (6r^2+11r+6)q^2 + (1+4r+6r^2)q + (7r+4)q^2 - q^3\right]}{p^4}.
\end{aligned}
$$

Para a obtenção dos 4 primeiros momentos em relação à origem vamos usar um resultado do livro do ROSS na página 199.

Seja $X \sim Pascal(r,p)$ então

$$
E(X^k) = \frac{r}{p}\, E[(Y+1)^{k-1}],
$$

onde $Y \sim Pascal(r+1,p)$.

Prova:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{x=r}^{\infty} x^k \; P(X=x) \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} x^k \binom{x-1}{r-1} p^r \; q^{x-r} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x^{k-1} x \; p^r \; q^{x-r} \end{aligned}$$

Vamos usar a identidade $x\binom{x-1}{r-1} = r\binom{x}{r}$ pois

$$x\binom{x-1}{r-1} = x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{x(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{(x)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{(x)!}{\frac{r!}{r}(x-r)!} = r\frac{x!}{r!(x-r)!} = r\binom{x}{r}.$$

Vamos voltar a calcular $E(X^k)$:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{x=r}^{\infty} x^{k-1} r\binom{x}{r} p^r q^{x-r} \\ &= \frac{r}{p}\sum_{x=r}^{\infty} x^{k-1} r\binom{x}{r} p^{r+1} q^{x-r} \\ &= \sum_{y=r+1}^{\infty} (y-1)^{k-1} \binom{y-1}{r} p^{r+1} q^{y-(r+1)} \\ &= \frac{r}{p} \;\; E[(Y-1)^{k-1}], \end{aligned}$$

pois $Y \sim Pascal(r+1, p)$ e foi feita a mudança de variável $y = x+1$.

O primeiro momento em relação à origem é obtido fazendo $k = 1$:

$$E(X) = \frac{r}{p}E(1) = \frac{r}{p}.$$

O segundo momento em relação origem é obtido fazendo $k = 2$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{r}{p}\, E(Y-1) \\
&= \frac{r}{p}\, (E(Y)-1) \\
&= \frac{r}{p}\, \left(\frac{r+1}{p}-1\right) \\
&= \frac{r(r+q)}{p^2}.
\end{aligned}
$$

O terceiro momento em relação à origem é dado por:

$$
\begin{aligned}
E(X^3) &= \frac{r}{p}\, E(Y-1)^2 \\
&= \frac{r}{p}\, (1-2E(Y)+E(Y^2)) \\
&= \frac{r}{p}\, \left(1-2\frac{r+1}{p}+\frac{(r+1)(r+1+q)}{p^2}\right) \\
&= \frac{r}{p}\, \frac{(r+1)(r+1+q)-2p(r+1)+p^2}{p^2} \\
&= \frac{r}{p^3}\, \left((r+1)^2+(r+1)q-2p(r+1)+p^2\right) \\
&= \frac{r}{p^3}\, \left((r+1)^2+(r+1)q-2r-2)(1-q)+1-2q+q^2\right) \\
&= \frac{r}{p^3}\, \left(r^2+2r+1+(r+1)q-2(r+1)+2(r+1)(1-q)+(1-q)^2\right) \\
&= \frac{r}{p^3}\, \left(r^2+(3r+1)q+q^2\right) \\
&= \frac{r\left[r^2+(3r+1)q+q^2\right]}{p^3}.
\end{aligned}
$$

O quarto momento em relação à origem é dado por:

$$
\begin{aligned}
E(X^4) &= \frac{r}{p}\, E(Y-1)^3 \\
&= \frac{r}{p}\, \left[E(Y^3)-3E(Y^2)+3E(Y)-1\right] \\
&= \frac{r}{p}\, \left[E(Y^3)-1-3(3E(Y^2)-E(Y))\right] \\
&= \frac{r}{p}\, (A+B)\,,
\end{aligned}
$$

onde $Y \sim Pascal(r+1,p)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E(Y^3) &= \frac{(r+1)\left[(r+1)^2+(3(r+1)+1)q+q^2\right]}{p^3} \\
p^3E(Y^3) &= (r+1)\left[(r+1)^2+(3r+4)q+q^2\right] \\
&= (r+1)^3+(r+1)(3r+4)q+(r+1)q^2 \\
&= (r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2 \\
E(Y^3) &= \frac{(r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2}{p^3}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
A &= E(Y^3)-1 \\
&= \frac{(r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2}{p^3} \\
p^3A &= (r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2-p^3 \\
&= (r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2-(1-q)^3 \\
&= (r+1)^3+(r+1)(3r^2+7r+4)q+(r+1)q^2-1-3q^2+3q+q^3 \\
&= (r+1)^3-1+q^3+(r-2)q^2+(3r^2+7r+1)q \\
A &= \frac{(r+1)^3-1+q^3+(r-2)q^2+(3r^2+7r+7)q}{p^3}.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$E(Y^2) = \frac{(r+1)(r+1+q)}{p^2} \qquad e \qquad E(Y) = \frac{r+1}{p}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
B &= -3\left[E(Y^2) - E(Y)\right] \\
&= -3\left[\frac{(r+1)(r+1+q)}{p^2} - \frac{r+1}{p}\right] \\
&= -3(r+1)\left[\frac{(r+1+q)}{p^2} - \frac{1}{p}\right] \\
p^2B &= -3(r+1)(r+1+q-p) \\
&= -3(r+1)(r+1+q-1+q) \\
&= -3(r+1)(r+2q) \\
p^3B &= -3(r+1)(r+2q)p \\
p^3B &= -3(r+1)(r+2q)(1-q) \\
&= -3(r+1)(r+(2-r)q-2q^2) \\
&= -3(r+1)r - 3(r+1)(2-r)q + 6(r+1)q^2 \\
&= -3(r+1)r + 3(r+1)(r-2)q + 6(r+1)q^2 \\
&= -3(r+1)r + 3(r^2-r-2)q + 6(r+1)q^2.
\end{aligned}
$$

Vamos calcular agora

$$
\begin{aligned}
E(X^4) &= \frac{r}{p}\,(A+B) \\
&= \frac{r}{p}\left[\frac{(r+1)^3 - 1 + q^3 + (r-2)q^2 + (3r^2+7r+7)q}{p^3} + B\right] \\
p^4E(X^4) &= r\left[(r+1)^3 - 1 + q^3 + (r-2)q^2 + (3r^2+7r+7)q + p^3B\right] \\
&= r\left[(r+1)^3 - 1 + q^3 + (r-2)q^2 + (3r^2+7r+7)q - 3(r+1)r + 3(r^2-r-2)q + 6(r+1)q^2\right] \\
&= r\left[r^3 + q^3 + (7r+4)q^2 + (6r^2+4r+1)q\right] \\
E(X^4) &= \frac{r\left[r^3 + q^3 + (7r+4)q^2 + (6r^2+4r+1)q\right]}{p^4}.
\end{aligned}
$$

1.8 Momentos centrais

Fato 7. Se $X \sim Pascal(r,p)$, então $\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = E(X^2) - E^2(X) = \dfrac{rq}{p^2}$.

<u>*Prova*</u>:

$$
var(X) = \frac{r^2 + rq}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2}. \qquad \blacksquare
$$

Assim, a variância de $X \sim Pascal(r,p)$, é dada por

$$
Var(X) = \frac{rq}{p^2}. \tag{3}
$$

O desvio padrão é dado por:

$$\sigma = \frac{\sqrt{rq}}{p}.$$

O terceiro momento central de $X \sim Pascal(r,p)$

$$\mu_3 = \frac{rq(2-p)}{p^3} \tag{4}$$

Como

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X)^3 \\
&= \frac{r(r^2+3(r+1)q)+q^2}{p^3} - 3\,\frac{r(r+q)}{p^2}\,\frac{r}{p} - 2\,\frac{r^3}{p^3} \\
&= \frac{r(r^2+3(r+1)q)+q^2}{p^3} - 3\,\frac{r^2(r+q)}{p^3} - 2\,\frac{r^3}{p^3} \\
&= \frac{r^3+(3r^2+r)q+rq^2-3r^3-3r^2q+2r^3}{p^3} \\
&= \frac{rq+rq^2}{p^3} \\
&= \frac{rq(1+q)}{p^3} \\
&= \frac{rq(2-p)}{p^3}.
\end{aligned}$$

O quarto momento central de $X \sim Pascal(r,p)$

$$\mu_4 = \frac{rq(1+(3r+4)q+q^2)}{p^4}. \tag{5}$$

Como

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= E(X^4) - \ 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4 \\
&= \frac{r(r^3+(6r^2+4r+1)q+(7r+4)q^2+q^3)}{p^4} - 4\frac{r(r^2+(3r+1)q+q^2)}{p^3}\,\frac{r}{p} + \\
&\quad +6\frac{r(r+q)}{p^2}\frac{r^2}{p^2} - 3\frac{r^4}{p^4} \\
&= \frac{r}{p^4}\left[r^3+(6r^2+4r+1)q+(7r+4)q^2+q^3-4r^3-4(3r^2+3r)q-4rq^2\right] + \\
&\quad +\frac{r}{p^4}\left[6r^3+6r^2q-3r^3\right] \\
&= \frac{r}{p^4}\left[q+(3r+4)q^2+q^3\right] \\
&= \frac{rq(1+(3r+4)q+q^2)}{p^4}.
\end{aligned}$$

1.9 Coeficiente de Assimetria

Fato 8. O coeficiente de assimetria de $X \sim Pascal(r,p)$

$$\alpha_3 = \frac{2-p}{\sqrt{rq}}.$$

<u>*Prova*</u>:

$$\alpha_3 = \frac{E\left(X-\mu\right)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\frac{rq(1+q)}{p^3}}{(\frac{rq}{p^2})^{3/2}} = \frac{rq(1+q)}{(rq)^{3/2}} = \frac{1+q}{\sqrt{rq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{rq}} \qquad \blacksquare.$$

Assim pode-se classificar a distribuição Pascal quanto à assimetria como: Se $p < 1/2$ a distribuição é assimétrica positiva e se ,$p > 1/2$ a distribuição é assimétrica negativa. Se $p = 1/2$ a assimetria é nula.

1.10 Coeficiente de Curtose

Fato 9. O coeficiente de curtose de $X \sim Pascal(r,p)$

$$\alpha_4 = \frac{1+(3r+4)q+q^2}{rq}.$$

<u>*Prova*</u>:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\frac{rq(1+(3r+4)q+q^2)}{p^4}}{\frac{r^2\,q^2}{p^4}} = \frac{1+(3r+4)q+q^2}{rq}.$$

Podemos expressar como:

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{r}[4 + \frac{1}{q} + q] > 3$$

A distribuição de Pascal é sempre leptocúrtica.

1.11 Coeficiente de Variação

Fato 11. O coeficiente de variação de $X \sim Pascal(r,p)$

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\frac{\sqrt{rq}}{p}}{\frac{r}{p}}.$$

<u>*Prova*</u>:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\frac{\sqrt{rq}}{p}}{\frac{r}{p}} = \sqrt{\frac{q}{r}} \qquad \blacksquare$$

1.12 Moda

Fato 11. A moda da distribuição de $X \sim Pascal(r,p)$ é (são) os valores inteiros de x que pertencem ao intervalo

$$\left[\frac{r-1}{p}\ ,\ \frac{r-1}{p}+1\right].$$

Prova:

Considere a função $g(x) = \dfrac{P(X=x+1)}{P(X=x)}$. Vamos mostrar que:

$$\begin{cases} g(x) > 1 & \text{se } x < \dfrac{r-1}{p}; \\ g(x) = 1 & \text{se } x = \dfrac{r-1}{p}; \\ g(x) < 1 & \text{se } x > \dfrac{r-1}{p}. \\ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{P(X=x+1)}{P(X=x)} \\ &= \frac{\binom{x}{r-1}p^r\, q^{x+1-r}}{\binom{x-1}{r-1}p^r\, q^{x-r}} \\ &= q\,\frac{\binom{x}{r-1}}{\binom{x-1}{r-1}} \\ &= q\,\frac{x!}{(r-1)!(x-r+1)!}\,\frac{(r-1)!(x-r)!}{(x-1)!} \\ &= \frac{qx}{x-r+1}. \end{aligned}$$

Inicialmente vamos analisar o caso $g(x) = 1$

Assim, $qx = x - r + 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ qx &= x-r+1 \\ qx - x &= -r+1 \\ -(1-q)x &= -(r-1) \\ -px &= -(r-1) \\ px &= (r-1) \\ x &= \frac{r-1}{p}. \end{aligned}$$

De maneira semelhante $g(x) < 1$ implica que $-px < -(r-1)$ e $px > (r-1)$ e $x > \dfrac{r-1}{p}$.

Finalmente $g(x) > 1$ implica que $x < \dfrac{r-1}{p}$.

Vamos supor que $a = \dfrac{r-1}{p}$ é inteiro. Logo $g(x)$ é crescente para $x < a$ e decrescente para $x > a$. Assim $g(a)$ e $g(a+1)$ são os valores máximos de $g(x)$ mas $g(a) = g(a+1)$ e portanto a Pascal é bimodal. As modas são:

$$M_o = \frac{r-1}{p} \qquad M_o = \frac{r-1}{p} + 1.$$

Quando $a = \dfrac{r-1}{p}$ não é inteiro considere $b = \left[\dfrac{r-1}{p}\right]$ o maior inteiro que não ultrapassa $\dfrac{r-1}{p}$. A função $g(x)$ fica:

$$\begin{cases} g(x) > 1 & \text{se } x \leq \left[\dfrac{r-1}{p}\right]; \\ g(x) < 1 & \text{se } x > \left[\dfrac{r-1}{p}\right] \\ . \end{cases}$$

A função $g(x)$ é crescente para $x \leq \left[\dfrac{r-1}{p}\right]$ e decrescente para $x > \left[\dfrac{r-1}{p}\right]$. Logo a moda é dada por:

$$M_o = \left[\frac{r-1}{p};\right] + 1.$$

Juntando os dois casos a(s) moda(s) de X são os valores inteiros no intervalo $\left[\dfrac{r-1}{p} \quad \dfrac{r-1}{p} + 1\right]$.

Vamos usar o R para calcular para calcular a moda da Pascal:

Seja $X \sim Pascal(7, 1/2)$ então $a = \dfrac{r-1}{p} = \dfrac{7-1}{1/2} = 12$, assim as modas são $Mo = 12$ e $Mo = 13$ elas são os inteiros no intervalo $[12, 13]$

Para achar a moda no R lembre que, no R, a Pascal começa no zero. Assim, sabemos que $Y \sim Pascal(r, p)$ começando no zero pode ser transformada na Pascal começando no r através da transformação $Y = X + r$. Assim achadas as modas de Y as modas de X serão obtidas somando-se o valor r as modas obtidas. Suponha que $a = \dfrac{r-1}{p}$ seja inteiro.

Assim As modas de X são a e $a+1$. As modas de Y serão:

$$Mo_Y = a - r = \frac{rq-1}{p} \;\; e \;\; \frac{(r-1)q}{p}.$$

Assim,

$$Mo_Y = \frac{7,5-1}{0,5} = 5 \;\; e \;\; Mo_Y = \frac{6,5}{0,5} = 6.$$

Assim usando o ambiente R temos:

```
>
> #### X~Pascal(7,1/2)  x=7,8,9....
>
> ##No R  Y~Pascal(7,12),  y=0,1,2.....   Y=X-7.
>
> ##### P(Y=y)=P(X-7=y)=P(X=7+y)
>
> ##### M_o(Y)=M_o(X)-7-----------------M_o(X)=M_o(Y)+7.
>
> ###### M_o(Y)=(r-1)/p-r=( r-1 -rp)/p=(r(1-p) -1)/p=(rq -1)/p
>
> r=7;p=1/2
> Mo=(r-1)/p;Mo
[1] 12 ##### As modas são 12 e 13. As modas de Y serão 5 e 6.
>
> MoY=Mo-r;MoY
[1] 5
>
>
> y=0:10
>
> py=dnbinom(y,r,p)
>
> tab=cbind(y,py);tab
       y         py
 [1,]  0 0.00781250
 [2,]  1 0.02734375
 [3,]  2 0.05468750
 [4,]  3 0.08203125
 [5,]  4 0.10253906
 [6,]  5 0.11279297
 [7,]  6 0.11279297
 [8,]  7 0.10473633
 [9,]  8 0.09164429
[10,]  9 0.07637024
[11,] 10 0.06109619
>
> #### X~Pascal(7,1/2)  x=7,8,9....
>
> ## No R  Y~Pascal(7,12),  y=0,1,2.....   Y=X-7.
```

```
>
> #### #P(Y=y)=P(X-7=y)=P(X=7)
>
> ##### M_o(Y)=M_o(X)-7-----------------M_o(X)=M_o(Y)+7.
>
> ###### M_o(Y)=(r-1)/p-r=( r-1 -rp)/p=(r(1-p) -1)/p=(rq -1)/p
>
> r=7;p=1/2
> Mo=(r-1)/p;Mo
[1] 12
>
> MoY=Mo-r;MoY
[1] 5
>
>
> y=0:10
>
> py=dnbinom(y,r,p)
>
> tab=cbind(y,py);tab
       y   py
[1,]   0 0.00781250
[2,]   1 0.02734375
[3,]   2 0.05468750
[4,]   3 0.08203125
[5,]   4 0.10253906
[6,]   5 0.11279297
[7,]   6 0.11279297
[8,]   7 0.10473633
[9,]   8 0.09164429
[10,]   9 0.07637024
[11,] 10 0.06109619
>
```

Note que as modas de Y são 5 e 6 e portanto as modas de $X = Y + 7$ são 12 e 13.

Vamos achar a moda de $X \sim Pascal(6, 3/5)$. Como $a = \dfrac{r-1}{p} = \dfrac{6-1}{3/5} = \dfrac{25}{3}$. Seja $b = [8, 33] = 8$. A moda é o ponto $M_o = 9$. A moda da binomial negativa de mesmos parâmetros começando no zero é $Mo_Y = 9 - r = 9 - 6 = 3$. Veja também para este caso a solução no R.

```
>
> #####X~Pascal (6,3/5)
>
> r=6;p=3/5
>
> a=(r-1)/p;a
[1] 8.333333
> require(MASS)
> fractions(a)
[1] 25/3
>
> b=ceiling(a);b
[1] 9
>
>
> y=0:12
> py=dnbinom(y,r,p)
>
> tab=cbind(y,py);tab
      y          py
[1,]  0 0.046656000
[2,]  1 0.111974400
[3,]  2 0.156764160
[4,]  3 0.167215104
[5,]  4 0.150493594
[6,]  5 0.120394875
[7,]  6 0.088289575
[8,]  7 0.060541423
[9,]  8 0.039351925
[10,]  9 0.024485642
[11,] 10 0.014691385
[12,] 11 0.008547715
[13,] 12 0.004843705
>
```

1.13 Função de distribuição

Fato 12. A função de distribuição de $X \sim Pascal(r, p)$

$$F(x) = \sum_{y=r}^{[x]} \binom{y-1}{r-1} \; p^r \; q^{y-r} I_{[\ r,\ \infty)}(x),$$

em que $[x]$ é o maior inteiro que não ultrapassa x.

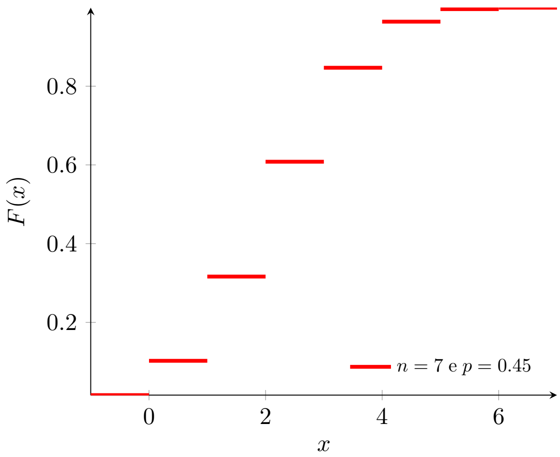

Figura 2: Gráfico da Função de Distribuição da Pascal

A Figura 2 mostra a função de distribuição da Pascal $r = 7$ e $p = 0,5$.

1.14 Função de sobrevivência

Fato 13. A função de distribuição de $X \sim Pascal(r, p)$

$$S(x) = I_{(-\ \infty,\ r)}(x) + \sum_{i=[x]+1}^{\infty} \binom{y-1}{r-1} \; p^r \; q^{y-r} I_{[\ r,\ \infty)}(x).$$

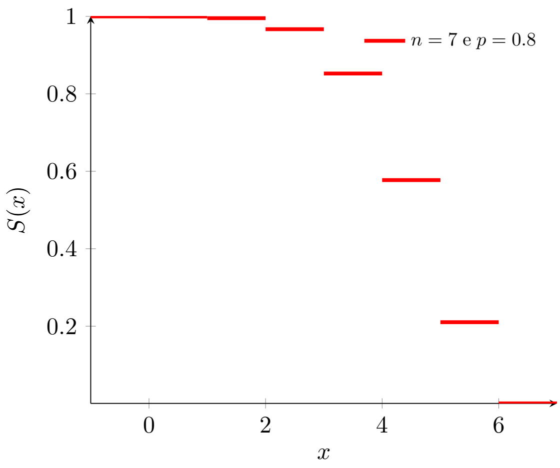

Figura 3: Gráfico da Função de Sobrevivência da Pascal (r,p)

A Figura 3 mostra a função de sobrevivência da Pascal com parâmetros $r = 7$ $p = 0,5$.

1.15 Relação Entre $Y \sim Pascal(r, p)$ e $X \sim Binomial(n, p)$

Fato 10 Se X é o número de sucessos em n provas de Bernoulli com probabilidade de sucesso p e Y número de repetições do experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso p até a obtenção de r sucessos com $r \leq n$. São válidas as relações:

a. $F_Y(n) = P(Y \leq n) = P(X \geq r)$;

b. $S_Y(n) = P(Y > n) = P(X < r)$

Prova: Para provar o item a lembre que se ocorrerem r ou mais sucessos nas n primeiras repetições, então serão necessárias n ou menos tentativas para obter os primeiros r sucessos. Para provar o item b note que se ocorrerem menos de r sucessos nas primeiras n tentativas, será preciso, então, realizar mais do n provas para obter r sucessos.

Seja $Z = Y - r \sim Pascal(r, p)$ o número de fracassos que precedem o r-ésimo sucesso (Pascal começando no zero.). São válidas as relações:

a. $P(Z \leq n - r) = P(X \geq r)$;

b. $P(Z > n - r) = P(X < r)$

Vamos usar o R para verificar estas relações:

```
>
```

```
>
>
> ######## X ~Bin(n=10,p=1/2),   Z~Pascal R=5,p=1/2)
>
> n=10;r=5;p=1/2
>
> r >n ######Condição satisfeita.
[1] FALSE
>
>
>
>
>
> p_Pas=pnbinom(n-r,r,p);p_Pas
[1] 0.6230469
>
>
> p_Bin=1-pbinom(r-1,n,p);p_Bin
[1] 0.6230469
>
>
>
>
> ######## X ~Bin(n=10,p=0,2),   Z~Pascal r=3,p=0,2)
>
> n=10;r=3;p=0.2
>
> r >n ######Condição satisfeita.
[1] FALSE
>
>
> ##### P(Y >10)=P(X<3)------P(Z+r >10)=P(X<3)-------P(Z > 10-r)=P(X<3)
>
>
> p_Pas=pnbinom(n-r,r,p);p_Pas
[1] 0.3222005
>
>
> p_Bin=1-pbinom(r-1,n,p);p_Bin
[1] 0.3222005
```

>

Na realidade vamos generalizar a relação entre a Pascal e a Binomial Seja $Y \sim Pascal(r,p)$, então:

$$P(Y \leq y) = P(X_{y+r} \geq r), \;\; y; = 0,1,2,3,\ldots.$$

1.16 Transformações Importantes

Fato K. Se $X \sim Pascal(r,p)$ e $Y \sim Pascal(m,p)$ são variáveis aleatórias independentes, então $S = X+Y \sim Pascal(r+m,p)$.

Prova: A função geradora de S é dada por

$$\begin{aligned}\varphi_S(t) &= \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \\ &= \left[\frac{pt}{1-qt}\right]^r \left[\frac{pt}{1-qt}\right]^m = \left[\left(\frac{pt}{1-qt}\right)\right]^{r+m}, \;\; t < \frac{1}{q}\end{aligned}$$

que é a f.g.p. de uma Pascal de parâmetros $r+m$ e p e cuja f.p. é dada por

$$f(s) = \binom{s-1}{r+m-1} p^{r+m}\, q^{s-(r+m)} I_{\{r+m,s+m+1,\ldots,\infty\}}(s) \qquad \blacksquare.$$

Fato Q. Se $X \sim Pascal(r,p)$ e $Y \sim Pascal(m,p)$,independentes. A função de probabilidade de $X|S=s$ é dada por:

$$\frac{\binom{x-1}{r-1}\binom{s-x-1}{m-1}}{\binom{s-1}{r+m-1}} I_{\{r,\ldots,s-m\}}\,(x).,$$

Prova:

$$\begin{aligned}P(X=x|S=s) &= \frac{P(X=x, X+Y=s)}{P(S=s)} \\ &= \frac{P(X=x, Y=s-x)}{P(S=s)} \quad \text{(por independência)} \\ &= \frac{P(X=x)\;P(Y=s-x)}{P(S=s)} \\ &= \frac{\binom{x-1}{r-1} p^r\, q^{x-r}\, p^m \binom{s-x-1}{m-1} q^{s-x-m}}{\binom{s-1}{r+m-1} p^{r+m}\, q^{s-(r+m)}} \\ &= \frac{\binom{x-1}{r-1}\binom{s-x-1}{m-1}}{\binom{s-1}{r+m-1}} I_{\{r,\ldots,s-m\}}\,(x).\end{aligned}$$

Fato J. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Pascal(r,p)$, então $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pascal(nr,p)$.

Prova: Sabemos que $\varphi_{X_i}(t) = \left[\dfrac{pt}{1-qt}\right]^r \quad t < \dfrac{1}{q}$ e que $\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \left(\dfrac{pt}{1-qt}\right)^{nr}, \quad t < \dfrac{1}{q}.$

Assim $S \sim Pascal(nr, p) \quad \blacksquare.$

1.17 Exercícios Resolvidos

1. Ensaios do tipo sucesso-fracasso são realizados de forma independente, sendo p a probabilidade de sucesso e $q = 1 - p$, a de fracasso. Qual é a probabilidade de ocorrerem n sucessos antes de m fracassos?

   Solução: Seja X= número de fracassos que precedem o n-ésimo sucesso. Assim, $X \sim Pascal(r = n, p)$, cuja função de probabilidade é dada por:

   $$P(X = x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n \, q^x \;\; I_{\{0,1,\ldots,\infty\}}(x).$$

   Seja A o evento: ocorrem n sucessos antes de m fracassos. O evento A acontece se e só se, no máximo, ocorrem $m-1$ fracassos

   antes do n-ésimo sucesso. Logo,

   $$P(A) = P(X \leq n-1) = \sum_{x=0}^{m-1} \binom{x+n-1}{n-1} p^n \, q^x.$$

2. Vamos reproduzir o exemplo 3.20 do MIRSHAWKA páginas 182 e 183. É um exemplo que servirá de base para vários problemas práticos pois envolve o cálculo do lucro esperado.

   Suponha que uma metalúrgica recebeu uma encomenda par fundir 4 peças complicadas. A probabilidade de se obter um molde adequado é 0,5, sendo o molde destruído quando da retirada da peça. O custo de cada molde é 1000 u.m. e se o molde não for adequado, a peça é refugada perdendo-se 2000 u.m. de material.

   a. Qual a probabilidade de se fundir no máximo 7 peças para atender a encomenda?

   b. Qual o preço a ser cobrado pelo serviço para se ter um lucro esperado de 4 000 u.m. na encomenda?

   Solução Sejam as variáveis aleatórias: C= custo do procedimento completo e X= número de peças fundidas até conseguir as 4 peças da encomenda.

   Assim $X \sim Pascal(r = 4, p = 0,5)$ cuja f.p. é :

   $$P(X = x) = \binom{x-1}{3} 0,5^4 \, 90,5^{x-4} = \binom{x-1}{3} 0,5^x \;\; I_{\{4,5,\ldots\}} \;(x).$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7) \\ &= \binom{3}{3}(0,5)^4 + \binom{4}{3}(0,5)^5 + \binom{5}{3}(0,5)^6 + \binom{6}{3}(0,5)^7 = 0,5. \end{aligned}$$

Sabemos que pagaremos 1000 u.m para fazer cada prova (há no total X) das quais $(X-4)$ são fracassos acrescentando $2000(X-4)$ u.m. no custo total.

Logo,

$$C = 1000X + 2000(X-4) = 3000X - 8000.$$

Mas $X \sim Pascal(r=4, p=0,5)$ e cuja $E(X) = \dfrac{4}{0,5} = 8$ tentativas

Dessa maneira

$$E(C) = E(3000X - 8000 = 3000E(X) - 8000 = (24000 - 8000)\ u.m. = \ 16000\ u.m..$$

Seja $W = C + 4000$ o preço a cobrar pela encomenda.

Assim,

$$E(W) = 4000 + E(C) = 20000\ u.m.$$

3. Gere uma amostra de tamanho 100 de $X \sim Pascal(r=7, p=1/2)$.

```
>
> ###Y=X-7 é Pascal(r=7,p=1/2) começando no zero
> ##Vamos gerar de Y.
> set(32)
Erro: não foi possível encontrar a função "set"
> AY=rnbinom(100,7,1/2);AY
[1] 15  5 10  8  8  5  8  5  9  2  8  2 12  4  7 10  0  4  5  2  7  1  9  8 12  5
[27]  2  4  4  6  6  9 17 11  9 10  9  3 10  1  4  6 13  9  4  4  4  8  3  4  4  5
[53] 10  6  5  6  1  6  7  1  6 11  3  4  7  8  6  5  4  6 17 11  7 12 10  3  5  5
[79] 16  3  3  6  4  4  5  6  6 16  4  7  3  7  9 12 11  8  5  5 10  7
>
> table(AY)
AY
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 15 16 17
1  4  4  7 15 13 12  8  8  7  7  4  4  1  1  2  2
> r=7;p=1/2
>
```

```
> AX=AY+7;AX
[1] 22 12 17 15 15 12 15 12 16  9 15  9 19 11 14 17  7 11 12  9 14  8 16 15 19 12
[27]  9 11 11 13 13 16 24 18 16 17 16 10 17  8 11 13 20 16 11 11 11 15 10 11 11 12
[53] 17 13 12 13  8 13 14  8 13 18 10 11 14 15 13 12 11 13 24 18 14 19 17 10 12 12
[79] 23 10 10 13 11 11 12 13 13 23 11 14 10 14 16 19 18 15 12 12 17 14
>
> EY=r/p;mean(AY)
[1] 6.69
> table(AX)
AX
7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 22 23 24
1  4  4  7 15 13 12  8  8  7  7  4  4  1  1  2  2
>
> EX=r/p; EX;mean(AX)  ##primeiro momento amostral bem próximo do populacional !!!!!
[1] 14
[1] 13.69
>
> VX=r*(1-p)/p^2;VX;var(AX)###segundo momento central amostral bem próximo do populacional !!!
[1] 14
[1] 13.32717
>
..
```

1.18 Exercícios propostos

1. (Luiz Gonzaga Morettin-Exemplo -pg 97)

   A probabilidade de que um sinal de trânsito esteja aberto numa esqu ina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 10 vezes para encontrá-lo aberto pela quarta vez?

2. (Luiz Gonzaga Morettin-Exemplo -pg 119)

   Uma urna tem 10 bolas pretas e 40 pretas. Mostre que a probabilidade:

   a. da sexta bola retirada com reposição seja a primeira branca é 0,065536.
   b. de 16 bolas retiradas sem reposição ocorrer três brancas é 0,293273.
   c. da décima quinta bola extraída com reposição ser a sexta branca é 0,008599.
   d. em 30 bolas retiradas com reposição ocorrer no máximo duas brancas é 0,04419.
   e. Se o número de bolas na urna fosse 50 brancas e 950 pretas, a probabilidade aproximada de que retirando-se 200 bolas, com reposição, ocorrer pelo menos 3 brancas é 0,997231. Mostre que a probabilidade exata é 0,997664.

g. Faça tudo no R.

3. Seja $X \sim Pascal(r = 4, p = 0,2)$. Determine:

   a. $E(X)$ e $Var(X)$.

   b. O valor mais provável de X.

   c. A mediana de X.

   d. $P(X > 10|X > 6)$.

4. (Airton e Teresinha Xavier-pg 151) Um piloto tem probabilidade $p = 0,7$ de acertar um alvo, com foguete ar-terra. Seu avião transporta 6 foguetes e em cada passe sobre o alvo faz um único disparo. O piloto decola tantas vezes quantas forem necessárias (de cada vez transportando a carga máxima de 6 foguetes)e realiza tantos passes quantos forem exigidos, até acetar $r = 3$ foguetes no alvo, sendo Y igual ao número de foguetes , antes do terceiro acerto. comprar até encontrar a figura desejada.

   a. Qual a distribuição de Y?

   b. Calcular a média e a variância do número de foguetes desperdiçados.

   c. $E(X)$ e $Var(X)$ onde X é o número total de foguetes usados até que atinja o terceiro acerto..

   d. Calcule a probabilidade de ser exigida um única sortida (decolagem).

5. Bolas são retiradas sucessivamente de uma urna que contem milhares de bolas, sendo 30% das bolas vermelhas, 65% pretas e 5% das brancas.

   a. Qual a probabilidade de sair a quarta bola branca na sexta retirada?

   b. Qual o número médio de retiradas até sair a quinta primeira bola vermelha?

6. Identifique a variável aleatória que possui a seguinte função geradora de momentos:

$$M_X(t) = \frac{e^t}{4 - 3e^t}, \quad t < ln(4) - ln(3).$$

7. (George Roussas-Introduction to Probability-pg 117) Um dado imparcial é jogado seguidamente e independentemente até que a face 6 apareça pela quinta vez . Ache a probabilidade que:

   a. isto aconteça na décima vez.

   b. pelo menos 8 lançamentos sejam necessários.

8. De um baralho comum de 52 cartas retiramos cartas uma a uma , com reposição, até que quatro ases seja encontrado? Qual a probabilidade de que sejam necessárias, no mínimo, 10 retiradas?

9. A probabilidade é 0,6 de que uma calibração de um transdutor em um instrumento eletrônico obedeça as especificações para o sistema de medição. Suponha que as tentativas de calibração sejam independentes. Qual é a probabilidade de que no máximo três tentativas de calibração sejam requeridas para encontrar as especificações para o sistema de medição?

10. Considere $Y \sim Pascal(r,p)$ começando no zero. vamos reparametrizar esta distribuição em termos de sua média, isto é,

$$\mu = E(Y) = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Mostre que;

$$Var(Y) = \mu + \frac{1}{r}\mu^2,$$

a variância é uma função quadrática da média. Esta relação é bastante útil tanto do ponto vista prático quanto teórico.

11. Juvêncio e Rafael uma série de jogos de tênis até que um deles ganhe 5 games.Suponha que os games são independentes e a probabilidade de que Juvêncio ganhe um game é 0,58. Seja X o número de games jogados até que Juvêncio ganhe 5 games. Seja Y o número de games jogados até que Rafael ganhe 5 games. Identifique a distribuição de X? e a de Y?

    a. Mostre que a probabilidade do jogo terminar em 7 games é aproximadamente 0,24.

    b. Se a série terminou em 7 games, mostre que a probabilidade do Juvêncio ter ganho é aproximadamente 0,71.

12. Uma moeda não viciada é jogada repetidamente. Qual a probabilidade da quinta coroa ocorrer antes da décima cara?

13. A família binomial negativa das distribuições com suporte começando no zero inclui a distribuição de Poisson como um caso limite. Se $r \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 1$ de modo que $r(1-p) \longrightarrow \lambda, \;\; \lambda > 0$. Seja Y uma variável aleatória Binomial negativa de parâmetros r e p com as suposições válidas.

    a. Mostre que: $E(Y) \longrightarrow \lambda \quad \text{e} \quad V(Y) \longrightarrow \lambda.$

    b. Mostre que a função geradora de Y é dada por:

    $$G_Y(t) = \left[\frac{p}{1-qt}\right]^r = p^r(1-qt)^{-r}; \;\; t < \frac{1}{q}.$$

    c. Fazendo $1 - p = \dfrac{\lambda}{r}$ e $p = 1 - \dfrac{\lambda}{r}$
    mostre que a função geradora de probabilidade fica:

    $$G_X(t) = (1 - \frac{\lambda}{r})^r \; (1 - \frac{\lambda}{r}t)^{-r}, \;\; t < \frac{r}{\lambda}.$$

    Note que quando $r \longrightarrow \infty$ temos que $t < \infty$.

    Perceba que:

    $$\lim_{r \to \infty} \; (1 - \frac{\lambda}{r})^r = e^{-\lambda}.$$

e

$$\lim_{r\to\infty} (1-\frac{\lambda}{r}t)^r = \lim_{r\to\infty} (1-\frac{\lambda}{tr})^r = e^{\lambda\, t}.$$

Agora prove que

$$\lim_{r\to\infty} G_X(t) = e^{\lambda(t-1)},\ \ t\ \ real,$$

que é a função geradora de probabilidade da Poisson de parâmetro $\lambda > 0$.