Programa de Pós-Graduação em Estatística
Exame de Admissão ao Mestrado
25-01-2023

Orientações:

1. O exame é individual e intransferível, o candidato deve realizar a prova individualmente. Consultas a livros e materiais didáticos são permitidas.
2. Resolver o exame em folhas de fundo branco, colocar nome e assinar em todas as folhas. Digitalizar e enviar o arquivo pdf pelo formulário que será disponibilizado.
3. Todas as questões têm o mesmo valor.

---

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $A, B, D \in \mathcal{F}$ eventos tais que $\mathbb{P}(A|D) \geq \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B|D) \geq \mathbb{P}(B)$. Mostre que

(a) $\mathbb{P}(D|A) \;\geq\; \mathbb{P}(D)$

(b) se $A \cap B = \emptyset$, então $\mathbb{P}(A^c \cap B^c|D) \;\leq\; \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

2. Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo o modelo geométrico de parâmetro p, $p \in (0,1)$ (isto é, a função de probabilidade de X_1 é $\mathbb{P}(X_1 = j) = (1-p)^{j-1}p$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$). Sejam $Y_1 = \min\{X_1, X_3\}$ e $Y_2 = \min\{X_2, X_3\}$.

(a) Calcule $\mathbb{P}(Y_1 > t, Y_2 > t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Determine a função de probabilidade de Y_2. Y_1 e Y_2 são independentes?

3. Um ponto (X, Y) é escolhido uniformemente no quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Seja A a área do retângulo de vértices $(0,0)$, $(X,0)$, (X,Y) e $(0,Y)$.

(a) Determine a probabilidade de A ser menor que $1/2$.

(b) Calcule a esperança e a variância de A.

4. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f dada por

$$f(x) \;=\; c\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) \;+\; \frac{c}{x^4}\,\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)\;,$$

onde $\mathbb{I}_A(x)$ é a função indicadora que vale 1, se $x \in A$, e 0 caso contrário.

(a) Determine o valor de c.

(b) Determine o valor de m tal que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$.