CC0288 - Inferê ncia Estatística I

Terceira Verificação de Aprendizagem - 03/05/2023.

Prof. Maurício

1. (Valor 6 pontos) Seja $X \sim Exp(\theta), \quad \theta > 0$. Baseado em $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X responda ao que se pede.

   a. Qual o estimador pelo método dos momentos de θ?

   b. Qual o estimador pelo método dos mínimos quadrados de θ?

   c. Qual o estimador de Máxima Verossimilhança de θ?

   d. Mostre que X pertence à família exponencial de densidades e que a informação de Fisher é dada por $I_F(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$.

   e. Mostre que $P(X > 2) = e^{-2\theta} = g(\theta)$.
   Encontre o estimador de Máxima Verossimilhança de $g(\theta)$ e sua distribuição aproximada em grandes amostras.

   f. Qual a estimativa de MV de θ e de $e^{-2\theta}$ baseado em :

```
> round(X,2)
[1]  0.02  0.38  1.23  0.92  3.20  1.04  0.69  2.48  0.63  1.96  0.45
[12]  1.09  1.52  1.00  1.20  2.74  0.49  0.95  1.58  0.64  0.45  2.54
[23]  1.30  0.61  1.07  0.08  3.15  1.19  0.19  0.14  1.30  3.66  1.08
[34]  4.17  1.24  0.48  7.51 13.82  1.35  0.95  1.18  2.89  0.89  3.87
[45]  4.11  0.15  1.35  1.42  1.43  2.93
>
> sum(X)
[1] 90.72231
>
> mean(X);1/mean(X);2/mean(X)
[1] 1.814446
[1] 0.5511323
[1] 1.102265
> exp(-mean(X))
[1] 0.1629281
>
> exp(-2*mean(X))
[1] 0.02654556
>
> exp(-mean(X))
[1] 0.1629281
>
> exp(-1/mean(X))
[1] 0.5762969
> exp(-2/mean(X))
[1] 0.3321181
>
> exp(-2/mean(x))
[1] 0.01559492
```

2. (Valor 3 pontos) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \;\; I_A(x), \quad A = (\theta, \infty), \theta > 0.$$

   a. Encontre uma estatística suficiente para θ.
   b. Mostre que a estatística obtida no item **a** é completa para θ.
   c. Baseado nesta estatística suficiente e completa , obtenha um estimador não viciado para θ. Mostre que ele é consistente. Este estimador pode ser melhorado?

Formulário: Você pode usar sem provar:

$$\mu = E(X) = \theta + 1 \quad \sigma^2 = 1.$$

$$F(x) = 0 \;\text{ para }\; x \leq \theta \;\; ; \;\; F(x) = 1 - e^{-(x-\theta)} \;\text{ para } \;\; x > \theta.$$

A f.d.p. do Máximo é dada por:

$$g_{Y_n}(y) = n \;\; [F(y)]^{n-1} \;\; f(y).$$

A f.d.p. do Mínimo é dada por:

$$g_{Y_1}(y) = n \;\; [1 - F(y)]^{n-1} \;\; f(y).$$

3. (Valor 1 ponto) Seja $\sim U(0, \theta)$. Uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é retirada.

   Sabemos que $Y_n = Max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente e completa para θ.

   Além disso seja
$$T^* = \frac{n+1}{n} \, Y_n$$

   Provamos em sala de aula que $E(T^*) = \theta$.

   Quem é o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de θ? Diga o nome do resultado que garante suas resposta.

   Agora sabemos
$$T = 2\bar{X}$$
   é um estimador não viciado de θ.

   Seja um novo estimador para θ definido por:

$$T_1 = E\left(2\bar{X} \;|Y_n\right).$$

   Identifique T_1. Diga o nome do resultado que garante sua resposta.