Mínimos Quadrados Ponderados e Mínimos Quadrados Generalizados

Prof. Juvêncio Santos Nobre

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada

Universidade Federal do Ceará-Brasil

http://www.dema.ufc.br/∼juvencio

DEMA-UFC

Capital do **Ceará**, novembro de 2022

Conteúdo

Presuposições

- Para se ajustar e fazer inferência na classe de modelos de regressão lineares é necessário, como bem sabemos, que algumas presuposições sejam válidas.
- Uma delas versa sobre condições a respeito da distribuição da fonte de variação $\boldsymbol{e}$, em especial, é considerado que

$$\boldsymbol{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n).$$

- O que ocorre caso a fonte de variação não seja homoscedástica e continuemos a usar o método de mínimos quadrados usual, de agora em diante, denominado de método de Mínimos Quadrados Ordinário (MQO)? 😇
- Em breve, responderemos esta pergunta.

Presuposições

- Para se ajustar e fazer inferência na classe de modelos de regressão lineares é necessário, como bem sabemos, que algumas presuposições sejam válidas.
- Uma delas versa sobre condições a respeito da distribuição da fonte de variação $\boldsymbol{e}$, em especial, é considerado que

$$\boldsymbol{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n).$$

- O que ocorre caso a fonte de variação não seja homoscedástica e continuemos a usar o método de mínimos quadrados usual, de agora em diante, denominado de método de Mínimos Quadrados Ordinário (MQO)? 😇
- Em breve, responderemos esta pergunta.

Presuposições

- Para se ajustar e fazer inferência na classe de modelos de regressão lineares é necessário, como bem sabemos, que algumas presuposições sejam válidas.
- Uma delas versa sobre condições a respeito da distribuição da fonte de variação $\boldsymbol{e}$, em especial, é considerado que

$$\boldsymbol{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n).$$

- O que ocorre caso a fonte de variação não seja homoscedástica e continuemos a usar o método de mínimos quadrados usual, de agora em diante, denominado de método de Mínimos Quadrados Ordinário (MQO)? 😇
- Em breve, responderemos esta pergunta.

Presuposições

- Para se ajustar e fazer inferência na classe de modelos de regressão lineares é necessário, como bem sabemos, que algumas presuposições sejam válidas.
- Uma delas versa sobre condições a respeito da distribuição da fonte de variação $\boldsymbol{e}$, em especial, é considerado que

$$\boldsymbol{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n).$$

- O que ocorre caso a fonte de variação não seja homoscedástica e continuemos a usar o método de mínimos quadrados usual, de agora em diante, denominado de método de Mínimos Quadrados Ordinário (MQO)?
- Em breve, responderemos esta pergunta.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Consideremos um MRLM com a seguinte forma funcional

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e},$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n))$ com todas as demais pressuposições válidas, i.e., a única pressuposição que não se verifica é a de homoscedasticidade.

- Assume-se que w_i é conhecido, $\forall i = 1, \ldots, n$, ou seja, tem-se um modelo heteroscedástico, com heteroscedasticidade conhecida.

- O respectivo MRLS associado é

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, e_i \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2 w_i), w_i \text{ conhecido}, i = 1, \ldots, n.$$

- Como w_i é conhecido, podemos considerar

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\sqrt{w_i}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{w_i}} + \beta_1 \frac{x_i}{\sqrt{w_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{w_i}} \\ y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1 x_i^* + e_i^*, e_i^* \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2). \end{aligned}$$

e este último modelo pode ser ajustado via metodologia de MRLS usual.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Consideremos um MRLM com a seguinte forma funcional

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e},$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n))$ com todas as demais pressuposições válidas, i.e., a única pressuposição que não se verifica é a de homoscedasticidade.

- Assume-se que w_i é conhecido, $\forall i = 1, \ldots, n$, ou seja, tem-se um modelo heteroscedástico, com heteroscedasticidade conhecida.

- O respectivo MRLS associado é

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, e_i \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2 w_i), w_i \text{ conhecido}, i = 1, \ldots, n.$$

- Como w_i é conhecido, podemos considerar

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\sqrt{w_i}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{w_i}} + \beta_1 \frac{x_i}{\sqrt{w_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{w_i}} \\ y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1 x_i^* + e_i^*, e_i^* \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2). \end{aligned}$$

e este último modelo pode ser ajustado via metodologia de MRLS usual.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Consideremos um MRLM com a seguinte forma funcional

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e},$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n))$ com todas as demais pressuposições válidas, i.e., a única pressuposição que não se verifica é a de homoscedasticidade.

- Assume-se que w_i é conhecido, $\forall i = 1, \ldots, n$, ou seja, tem-se um modelo heteroscedástico, com heteroscedasticidade conhecida.

- O respectivo MRLS associado é

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, e_i \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2 w_i), w_i \text{ conhecido}, i = 1, \ldots, n.$$

- Como w_i é conhecido, podemos considerar

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\sqrt{w_i}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{w_i}} + \beta_1 \frac{x_i}{\sqrt{w_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{w_i}} \\ y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1 x_i^* + e_i^*, e_i^* \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2). \end{aligned}$$

e este último modelo pode ser ajustado via metodologia de MRLS usual.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Consideremos um MRLM com a seguinte forma funcional

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e},$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n))$ com todas as demais pressuposições válidas, i.e., a única pressuposição que não se verifica é a de homoscedasticidade.

- Assume-se que w_i é conhecido, $\forall i = 1, \ldots, n$, ou seja, tem-se um modelo heteroscedástico, com heteroscedasticidade conhecida.

- O respectivo MRLS associado é

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, e_i \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2 w_i), w_i \text{ conhecido}, i = 1, \ldots, n.$$

- Como w_i é conhecido, podemos considerar

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\sqrt{w_i}} &= \frac{\beta_0}{\sqrt{w_i}} + \beta_1 \frac{x_i}{\sqrt{w_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{w_i}} \\ y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1 x_i^* + e_i^*, e_i^* \overset{\text{ind}}{\sim} (0, \sigma^2). \end{aligned}$$

e este último modelo pode ser ajustado via metodologia de MRLS usual.

Mínimos Quadrados Ponderados

- A função objetivo para determinar o EMQ é dada por

$$
\begin{aligned}
S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i^* - \beta_0^* - \beta_1 x_i^*)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2,
\end{aligned}
$$

  ou seja as observações agora não possuem o mesmo peso no processo de estimação, neste caso o peso é inversamente proporcional a variância associada a fonte de variação daquela observação.

- Por esta razão este método é denominado de método de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP).

Mínimos Quadrados Ponderados

- A função objetivo para determinar o EMQ é dada por

$$\begin{aligned} S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i^* - \beta_0^* - \beta_1 x_i^*)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2, \end{aligned}$$

  ou seja as observações agora não possuem o mesmo peso no processo de estimação, neste caso o peso é inversamente proporcional a variância associada a fonte de variação daquela observação.

- Por esta razão este método é denominado de método de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP).

Mínimos Quadrados Ponderados

- Esta ideia pode ser utilizada também para obter um processo de estimação robusto.
- Primeiramente, ajusta-se um MRLS usual e posteriomente se faz uso desta ideia utilizando os pesos como $w_i = \hat{e}_i{}^2$, ou seja, dando um peso menor para observações com resíduos elevados. Essencialmente é o que se acontece quando consideramos uma distribuição t ou Laplace ao invés da Normal.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Esta ideia pode ser utilizada também para obter um processo de estimação robusto.
- Primeiramente, ajusta-se um MRLS usual e posteriomente se faz uso desta ideia utilizando os pesos como $w_i = \hat{e}_i{}^2$, ou seja, dando um peso menor para observações com resíduos elevados. Essencialmente é o que se acontece quando consideramos uma distribuição t ou Laplace ao invés da Normal.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Agora, fazendo uso da notação matricial, tem-se a seguinte forma funcional do MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{W})$, em que $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n) = \oplus_{i=1}^{n} w_i$.

- Como $\boldsymbol{W}$ é uma matriz diagonal, então $\boldsymbol{W}^{-1/2} = \mathrm{diag}(w_1^{-1/2}, \ldots, w_n^{-1/2})$, de forma que $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$, logo pré-multiplicando os elementos de (5) por $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ obtemos

$$\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

que representa um MRLM homoscedástico, com vetor de variável resposta $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ e matriz de especificação $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$.

- A função objetivo correspondente é dada por:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}),$$

e lembrando que $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$ e que $\boldsymbol{W}$ é uma matriz simétrica, implicando que $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ também é, então $S(\boldsymbol{\beta})$ consegue ser reescrita como

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Mínimos Quadrados Ponderados

- Agora, fazendo uso da notação matricial, tem-se a seguinte forma funcional do MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{W})$, em que $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n) = \oplus_{i=1}^{n} w_i$.

- Como $\boldsymbol{W}$ é uma matriz diagonal, então $\boldsymbol{W}^{-1/2} = \mathrm{diag}(w_1^{-1/2}, \ldots, w_n^{-1/2})$, de forma que $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, logo pré-multiplicando os elementos de (5) por $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ obtemos

$$\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

que representa um MRLM homoscedástico, com vetor de variável resposta $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ e matriz de especificação $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$.

- A função objetivo correspondente é dada por:

$$S(\beta) = (\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\beta)^\top (\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\beta),$$

e lembrando que $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top$ e que $\boldsymbol{W}$ é uma matriz simétrica, implicando que $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ também é, então $S(\beta)$ consegue ser reescrita como

$$S(\beta) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta)^\top \boldsymbol{W}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta).$$

Mínimos Quadrados Ponderados

- Agora, fazendo uso da notação matricial, tem-se a seguinte forma funcional do MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{W})$, em que $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n) = \oplus_{i=1}^{n} w_i$.

- Como $\boldsymbol{W}$ é uma matriz diagonal, então $\boldsymbol{W}^{-1/2} = \mathrm{diag}(w_1^{-1/2}, \ldots, w_n^{-1/2})$, de forma que $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, logo pré-multiplicando os elementos de (5) por $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ obtemos

$$\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

que representa um MRLM homoscedástico, com vetor de variável resposta $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ e matriz de especificação $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$.

- A função objetivo correspondente é dada por:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}),$$

e lembrando que $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$ e que $\boldsymbol{W}$ é uma matriz simétrica, implicando que $\boldsymbol{W}^{-1/2}$ também é, então $S(\boldsymbol{\beta})$ consegue ser reescrita como

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Mínimos Quadrados Ponderados

- Como é bem conhecido, o estimador de **MQO** de β é dado por

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}. \tag{3}$$

- Já o estimador de **MQP** é dado por

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= ([\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X})^{-1}[\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Pode-se provar, que mesmo sob a má especificação, i.e. considerar o ajuste de um modelo homoscedástico, sendo ele heteroscedático, o EMQO continua sendo não viesado, basta perceber que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}}\right] &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \mathbb{E}[\boldsymbol{y}] \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\beta = \beta, \forall \beta \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

- Então, se $\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}}$ continua não viesado, por qual razão devemos considerar o EMQP? 🙂

Mínimos Quadrados Ponderados

- Como é bem conhecido, o estimador de **MQO** de $\boldsymbol{\beta}$ é dado por

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MQO}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}. \tag{3}$$

- Já o estimador de **MQP** é dado por

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= ([\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X})^{-1}[\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Pode-se provar, que mesmo sob a má especificação, i.e. considerar o ajuste de um modelo homoscedástico, sendo ele heteroscedático, o EMQO continua sendo não viesado, basta perceber que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MQO}}\right] &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \mathbb{E}[\boldsymbol{y}] \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}, \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

- Então, se $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MQO}}$ continua não viesado, por qual razão devemos considerar o EMQP?

Mínimos Quadrados Ponderados

- Como é bem conhecido, o estimador de **MQO** de $\boldsymbol{\beta}$ é dado por

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}. \tag{3}$$

- Já o estimador de **MQP** é dado por

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= ([\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X})^{-1}[\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Pode-se provar, que mesmo sob a má especificação, i.e. considerar o ajuste de um modelo homoscedástico, sendo ele heteroscedático, o EMQO continua sendo não viesado, basta perceber que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}\right] &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \mathbb{E}[\boldsymbol{y}] \\ &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}, \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

- Então, se $\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}}$ continua não viesado, por qual razão devemos considerar o EMQP?

Mínimos Quadrados Ponderados

- Como é bem conhecido, o estimador de **MQO** de $\boldsymbol{\beta}$ é dado por

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}} = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{y}. \tag{3}$$

- Já o estimador de **MQP** é dado por

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= ([\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X})^{-1}[\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}]^\top\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}\\ &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Pode-se provar, que mesmo sob a má especificação, i.e. considerar o ajuste de um modelo homoscedástico, sendo ele heteroscedático, o EMQO continua sendo não viesado, basta perceber que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}\right] &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\mathbb{E}[\boldsymbol{y}]\\ &= (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}, \forall\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

- Então, se $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}$ continua não viesado, por qual razão devemos considerar o EMQP?

Mínimos Quadrados Ponderados

- A matriz de variância-covariâncias do estimador de MQO é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1},$$

  e pode-se mostrar que sob condições bem suaves que o EMQO continua consistente.

- Já a matriz de variância-covariâncias do estimador de **MQP** é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1},$$

  e pelo teorema de Gauss-Markov, $\widehat{\beta}$ é o **BLUE** de β, implicando que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \geq 0,$$

  ou seja é não-negativa definida, implicando por exemplo, que o estimador de MQP de β é consistente e mais eficiente que o estimador de MQO.

Mínimos Quadrados Ponderados

- A matriz de variância-covariâncias do estimador de MQO é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1},$$

e pode-se mostrar que sob condições bem suaves que o EMQO continua consistente.

- Já a matriz de variância-covariâncias do estimador de **MQP** é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1},$$

e pelo teorema de Gauss-Markov, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é o **BLUE** de $\boldsymbol{\beta}$, implicando que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MQO}}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \geq 0,$$

ou seja é não-negativa definida, implicando por exemplo, que o estimador de MQP de $\boldsymbol{\beta}$ é consistente e mais eficiente que o estimador de MQO.

Comentários

- Podemos utilizar **todos** os resultados da classe de MRLM, basta considerar $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ ao invés de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$ ao invés de $\boldsymbol{X}$. Por exemplo, o MINQUE de σ^2 é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = \mathrm{QMRes} &= \frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}]\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}}{n-p} \\ &= \frac{\boldsymbol{y}^\top[\boldsymbol{W}^{-1} - \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}]\boldsymbol{y}}{n-p}.\end{aligned}$$

- Podemos através das técnicas de diagnóstico já estudadas ter ideia sob a forma da heteroscedasticidade, por exemplo, ter indícios de que $\mathrm{Var}[e_i] \propto \sigma^2 x_i^2$.
- No software `R` podemos usar a função `'weight'` em `lm` para utilizar o método de mínimos quadrados ponderados. Olhar com calma a forma no qual ele considera a função 'peso' pois é diferente do formato utilizado aqui. 😐

Comentários

- Podemos utilizar **todos** os resultados da classe de MRLM, basta considerar $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ ao invés de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$ ao invés de $\boldsymbol{X}$. Por exemplo, o MINQUE de σ^2 é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = \mathrm{QMRes} &= \frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}]\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}}{n-p} \\ &= \frac{\boldsymbol{y}^\top[\boldsymbol{W}^{-1} - \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}]\boldsymbol{y}}{n-p}.\end{aligned}$$

- Podemos através das técnicas de diagnóstico já estudadas ter ideia sob a forma da heteroscedasticidade, por exemplo, ter indícios de que $\mathrm{Var}[e_i] \propto \sigma^2 x_i^2$.

- No software `R` podemos usar a função `'weight'` em `lm` para utilizar o método de mínimos quadrados ponderados. Olhar com calma a forma no qual ele considera a função 'peso' pois é diferente do formato utilizado aqui. 😐

Comentários

- Podemos utilizar **todos** os resultados da classe de MRLM, basta considerar $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}$ ao invés de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}$ ao invés de $\boldsymbol{X}$. Por exemplo, o MINQUE de σ^2 é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = \text{QMRes} &= \frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1/2}]\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{y}}{n-p} \\ &= \frac{\boldsymbol{y}^\top[\boldsymbol{W}^{-1} - \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{-1}]\boldsymbol{y}}{n-p}.\end{aligned}$$

- Podemos através das técnicas de diagnóstico já estudadas ter ideia sob a forma da heteroscedasticidade, por exemplo, ter indícios de que $\mathrm{Var}[e_i] \propto \sigma^2 x_i^2$.

- No software `R` podemos usar a função `'weight'` em `lm` para utilizar o método de mínimos quadrados ponderados. Olhar com calma a forma no qual ele considera a função 'peso' pois é diferente do formato utilizado aqui. 😐

Comentários

- Se o objetivo for somente em inferência de primeira ordem, podemos continuar usando o estimador de MQO sem problemas, dado que ele é não viesado e consistente. Todavia, na prática se tem interesse em se fazer inferência de segunda ordem, construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, etc... e neste caso é preferível utilizar o estimador de MQP e sua respectiva matriz de variância-covariância estimada.
- Quando a matriz $\boldsymbol{W}$ não for conhecida? Como devemos proceder?
- Quando $\boldsymbol{W}$ não for diagonal, i.e., quando tivermos uma estrutura de correlação associada, muito comum em análise de série temporais, análise de dados longitudinais, processos estocásticos, por exemplo, como proceder?
- Agora vamos apresentar algumas propostas associados ao primeiro caso, i.e., quando tivermos um modelo heteroscedástico com heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Comentários

- Se o objetivo for somente em inferência de primeira ordem, podemos continuar usando o estimador de MQO sem problemas, dado que ele é não viesado e consistente. Todavia, na prática se tem interesse em se fazer inferência de segunda ordem, construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, etc... e neste caso é preferível utilizar o estimador de MQP e sua respectiva matriz de variância-covariância estimada.
- Quando a matriz $\boldsymbol{W}$ não for conhecida? Como devemos proceder?
- Quando $\boldsymbol{W}$ não for diagonal, i.e., quando tivermos uma estrutura de correlação associada, muito comum em análise de série temporais, análise de dados longitudinais, processos estocásticos, por exemplo, como proceder?
- Agora vamos apresentar algumas propostas associados ao primeiro caso, i.e., quando tivermos um modelo heteroscedástico com heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Comentários

- Se o objetivo for somente em inferência de primeira ordem, podemos continuar usando o estimador de MQO sem problemas, dado que ele é não viesado e consistente. Todavia, na prática se tem interesse em se fazer inferência de segunda ordem, construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, etc... e neste caso é preferível utilizar o estimador de MQP e sua respectiva matriz de variância-covariância estimada.
- Quando a matriz $\boldsymbol{W}$ não for conhecida? Como devemos proceder?
- Quando $\boldsymbol{W}$ não for diagonal, i.e., quando tivermos uma estrutura de correlação associada, muito comum em análise de série temporais, análise de dados longitudinais, processos estocásticos, por exemplo, como proceder?
- Agora vamos apresentar algumas propostas associados ao primeiro caso, i.e., quando tivermos um modelo heteroscedástico com heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Comentários

- Se o objetivo for somente em inferência de primeira ordem, podemos continuar usando o estimador de MQO sem problemas, dado que ele é não viesado e consistente. Todavia, na prática se tem interesse em se fazer inferência de segunda ordem, construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, etc... e neste caso é preferível utilizar o estimador de MQP e sua respectiva matriz de variância-covariância estimada.
- Quando a matriz $\boldsymbol{W}$ não for conhecida? Como devemos proceder?
- Quando $\boldsymbol{W}$ não for diagonal, i.e., quando tivermos uma estrutura de correlação associada, muito comum em análise de série temporais, análise de dados longitudinais, processos estocásticos, por exemplo, como proceder?
- Agora vamos apresentar algumas propostas associados ao primeiro caso, i.e., quando tivermos um modelo heteroscedástico com heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Até o momento, consideramos o modelo heteroscedástico em que a forma da heteroscedasticidade é conhecida. Entretanto, em problemas práticos, freqüentemente desconhecemos se as fontes de variação são homoscedásticas ou heteroscedásticas, e se forem heteroscedásticas não temos ideia de que forma.
- Em Hoffman (2016) é apresentado um teste para verificar a existência de heteroscedasticidade, todavia, já vimos procedimentos baseados na análise de diagnóstico para avaliar isto. Uma excelente referência nesta linha é o livro:
- Davidson, R. and MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press: New York.
- Hoje em dia, isso não é de se preocupar, tendo em vista que conseguimos modelar heteroscedasticidade de forma extremamente simples através de modelos lineares generalizados, modelos de regressão simétricos, modelos de regressão beta, etc... tendo em vista que uma das poucas variáveis aleatórias em que o parâmetro de escala é funcionamente independente do parâmetro de posição é a Normal.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Até o momento, consideramos o modelo heteroscedástico em que a forma da heteroscedasticidade é conhecida. Entretanto, em problemas práticos, freqüentemente desconhecemos se as fontes de variação são homoscedásticas ou heteroscedásticas, e se forem heteroscedásticas não temos ideia de que forma.
- Em Hoffman (2016) é apresentado um teste para verificar a existência de heteroscedasticidade, todavia, já vimos procedimentos baseados na análise de diagnóstico para avaliar isto. Uma excelente referência nesta linha é o livro:
- Davidson, R. and MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics.* Oxford University Press: New York.
- Hoje em dia, isso não é de se preocupar, tendo em vista que conseguimos modelar heteroscedasticidade de forma extremamente simples através de modelos lineares generalizados, modelos de regressão simétricos, modelos de regressão beta, etc... tendo em vista que uma das poucas variáveis aleatórias em que o parâmetro de escala é funcionamente independente do parâmetro de posição é a Normal.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Até o momento, consideramos o modelo heteroscedástico em que a forma da heteroscedasticidade é conhecida. Entretanto, em problemas práticos, freqüentemente desconhecemos se as fontes de variação são homoscedásticas ou heteroscedásticas, e se forem heteroscedásticas não temos ideia de que forma.
- Em Hoffman (2016) é apresentado um teste para verificar a existência de heteroscedasticidade, todavia, já vimos procedimentos baseados na análise de diagnóstico para avaliar isto. Uma excelente referência nesta linha é o livro:
- Davidson, R. and MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics.* Oxford University Press: New York.
- Hoje em dia, isso não é de se preocupar, tendo em vista que conseguimos modelar heteroscedasticidade de forma extremamente simples através de modelos lineares generalizados, modelos de regressão simétricos, modelos de regressão beta, etc... tendo em vista que uma das poucas variáveis aleatórias em que o parâmetro de escala é funcionamente independente do parâmetro de posição é a Normal.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Até o momento, consideramos o modelo heteroscedástico em que a forma da heteroscedasticidade é conhecida. Entretanto, em problemas práticos, freqüentemente desconhecemos se as fontes de variação são homoscedásticas ou heteroscedásticas, e se forem heteroscedásticas não temos ideia de que forma.
- Em Hoffman (2016) é apresentado um teste para verificar a existência de heteroscedasticidade, todavia, já vimos procedimentos baseados na análise de diagnóstico para avaliar isto. Uma excelente referência nesta linha é o livro:
- Davidson, R. and MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press: New York.
- Hoje em dia, isso não é de se preocupar, tendo em vista que conseguimos modelar heteroscedasticidade de forma extremamente simples através de modelos lineares generalizados, modelos de regressão simétricos, modelos de regressão beta, etc... tendo em vista que uma das poucas variáveis aleatórias em que o parâmetro de escala é funcionamente independente do parâmetro de posição é a Normal.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Considere o MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \qquad (5)$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Omega})$, em que $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ desconhecida.

- O estimador de Mínimos Quadrados Ordinários é tal que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\beta} \\ \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}), \end{aligned}$$

todavia o mesmo não é eficiente.

- White (1980, A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*) propõe utilizar $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{diag}(\hat{e}_1^2, \ldots, \hat{e}_n^2)$ e estimar a matriz de variância-covariâncias por

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \mathrm{QMRes}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}.$$

- Tal procedimento gera estimadores consistentes para os erros-padrão dos estimadores dos coeficientes de regressão. Este estimador é denominado HC0.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Considere o MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}, \tag{5}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Omega})$, em que $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ desconhecida.

- O estimador de Mínimos Quadrados Ordinários é tal que

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\beta}$$
$$\widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}),$$

todavia o mesmo não é eficiente.

- White (1980, A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*) propõe utilizar $\widehat{\Omega} = \mathrm{diag}(\hat{e}_1^2, \ldots, \hat{e}_n^2)$ e estimar a matriz de variância-covariâncias por

$$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\beta}} = \mathrm{QMRes}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}.$$

- Tal procedimento gera estimadores consistentes para os erros-padrão dos estimadores dos coeficientes de regressão. Este estimador é denominado HC0.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Considere o MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}, \tag{5}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Omega})$, em que $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ desconhecida.

- O estimador de Mínimos Quadrados Ordinários é tal que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\beta} \\ \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}), \end{aligned}$$

todavia o mesmo não é eficiente.

- White (1980, A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*) propõe utilizar $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{diag}(\hat{e}_1^2, \ldots, \hat{e}_n^2)$ e estimar a matriz de variância-covariâncias por

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \mathrm{QMRes}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}.$$

- Tal procedimento gera estimadores consistentes para os erros-padrão dos estimadores dos coeficientes de regressão. Este estimador é denominado HC0.

Heteroscedasticidade de forma desconhecida

- Considere o MRLM

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}, \tag{5}$$

em que $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Omega})$, em que $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ desconhecida.

- O estimador de Mínimos Quadrados Ordinários é tal que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\beta} \\ \widehat{\beta}_{\mathrm{MQO}} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}), \end{aligned}$$

todavia o mesmo não é eficiente.

- White (1980, A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*) propõe utilizar $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{diag}(\hat{e}_1^2, \ldots, \hat{e}_n^2)$ e estimar a matriz de variância-covariâncias por

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = \mathrm{QMRes}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}.$$

- Tal procedimento gera estimadores consistentes para os erros-padrão dos estimadores dos coeficientes de regressão. Este estimador é denominado $\mathrm{HC0}$.

Algumas propostas de refinamento

- Mackkinnon and White (1985, Some heteroskedasticity consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties, *Journal of Econometrics*):

$$\begin{aligned} \mathrm{HC1}: w_i &= \frac{n}{n-p}\hat{e}_i^2, \\ \mathrm{HC2}: w_i &= \frac{\hat{e}_i^2}{1-h_{ii}}, \\ \mathrm{HC3}: w_i &= \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^2}, \end{aligned}$$

  em que h_{ii} representa a alavancagem da i-ésima observação. Tais estimadores melhoram a perfomance em pequenas amostras.

- Cribari-Neto (2004, Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form, *Computational Statistics and Data Analysis*):

$$\mathrm{HC4}: w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\delta_i}}, \ \delta_i := \min\left\{4, \frac{h_{ii}}{\bar{h}}\right\},$$

  tal estimador melhora a perfomance em pequenas amostras, especialmente quando se tem observações influentes.

Algumas propostas de refinamento

- Mackkinnon and White (1985, Some heteroskedasticity consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties, *Journal of Econometrics*):

$$\begin{aligned} \mathrm{HC1} : w_i &= \frac{n}{n-p}\hat{e}_i^2, \\ \mathrm{HC2} : w_i &= \frac{\hat{e}_i^2}{1-h_{ii}}, \\ \mathrm{HC3} : w_i &= \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^2}, \end{aligned}$$

em que h_{ii} representa a alavancagem da i-ésima observação. Tais estimadores melhoram a perfomance em pequenas amostras.

- Cribari-Neto (2004, Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form, *Computational Statistics and Data Analysis*):

$$\mathrm{HC4} : w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\delta_i}}, \ \delta_i := \min\left\{4, \frac{h_{ii}}{\bar{h}}\right\},$$

tal estimador melhora a perfomance em pequenas amostras, especialmente quando se tem observações influentes.

Algumas propostas de refinamento

- Outras propostas de refinamento podem ser vistas em:
- HC5 :Cribari-Neto, F., Souza, T. and Vasconcelos, K. (2007). Inference Under Heteroskedasticity and Leveraged Data. *Communications Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 1877–1888. doi:10.1080/03610920601126589.

$$\mathrm{HC5} : w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\alpha_i}},\ \alpha_i := \min\left\{\frac{h_{ii}}{\bar{h}}, \max\left\{\frac{kh_{\max}}{\bar{h}}\right\}\right\},$$

em que $0 < k < 1$ é uma constante pré-definida (os autores sugerem usar $k = 0,7$) e $h_{\max} = \max\{h_{11}, \ldots, h_{nn}\}$.

- HC4m :Cribari-Neto, F. and da Silva, W.B. (2011). A new heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator for the linear regression model. *AStA Advances in Statistical Analysis*, **95**, 129–146.

$$\mathrm{HC4m} : w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\delta_i}},\ \delta_i := \min\left\{\gamma_1, \frac{nh_{ii}}{p}\right\} + \min\left\{\gamma_2, \frac{nh_{ii}}{p}\right\}.$$

em que γ_1, γ_2 são constantes positivas pré-definidas. Os autores sugerem usar $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 1,5$.

Algumas propostas de refinamento

- Outras propostas de refinamento podem ser vistas em:
- HC5 :Cribari-Neto, F., Souza, T. and Vasconcelos, K. (2007). Inference Under Heteroskedasticity and Leveraged Data. *Communications Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 1877–1888. doi:10.1080/03610920601126589.

$$\text{HC5}: w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\alpha_i}},\ \alpha_i := \min\left\{\frac{h_{ii}}{\bar{h}}, \max\left\{\frac{kh_{\max}}{\bar{h}}\right\}\right\},$$

em que $0 < k < 1$ é uma constante pré-definida (os autores sugerem usar $k = 0,7$) e $h_{\max} = \max\{h_{11}, \ldots, h_{nn}\}$.

- HC4m :Cribari-Neto, F. and da Silva, W.B. (2011). A new heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator for the linear regression model. *AStA Advances in Statistical Analysis*, **95**, 129–146.

$$\text{HC4m}: w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\delta_i}},\ \delta_i := \min\left\{\gamma_1, \frac{nh_{ii}}{p}\right\} + \min\left\{\gamma_2, \frac{nh_{ii}}{p}\right\}.$$

em que γ_1, γ_2 são constantes positivas pré-definidas. Os autores sugerem usar $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 1,5$.

Algumas propostas de refinamento

- Outras propostas de refinamento podem ser vistas em:
- $\mathrm{HC5}$:Cribari-Neto, F., Souza, T. and Vasconcelos, K. (2007). Inference Under Heteroskedasticity and Leveraged Data. *Communications Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 1877–1888. doi:10.1080/03610920601126589.

$$\mathrm{HC5}: w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\alpha_i}},\ \alpha_i := \min\left\{\frac{h_{ii}}{\bar{h}}, \max\left\{\frac{kh_{\max}}{\bar{h}}\right\}\right\},$$

em que $0 < k < 1$ é uma constante pré-definida (os autores sugerem usar $k = 0,7$) e $h_{\max} = \max\{h_{11}, \ldots, h_{nn}\}$.

- $\mathrm{HC4m}$:Cribari-Neto, F. and da Silva, W.B. (2011). A new heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator for the linear regression model. *AStA Advances in Statistical Analysis*, **95**, 129–146.

$$\mathrm{HC4m}: w_i = \frac{\hat{e}_i^2}{(1-h_{ii})^{\delta_i}},\ \delta_i := \min\left\{\gamma_1, \frac{nh_{ii}}{p}\right\} + \min\left\{\gamma_2, \frac{nh_{ii}}{p}\right\}.$$

em que γ_1, γ_2 são constantes positivas pré-definidas. Os autores sugerem usar $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 1,5$.

Aspectos computacionais

- No software `R` podemos usar a library `'sandwich'` para obter os estimadores $\mathrm{HC0}, \mathrm{HC1}, \mathrm{HC2}, \mathrm{HC3}$, $\mathrm{HC4}$, $\mathrm{HC5}$ e $\mathrm{HC4m}$.
- Para detalhes consultar `?sandwich`.
- https://cran.r-project.org/web/packages/sandwich/vignettes/sandwich.pdf

Aspectos computacionais

- No software R podemos usar a library 'sandwich' para obter os estimadores $\mathrm{HC0}, \mathrm{HC1}, \mathrm{HC2}, \mathrm{HC3}$, $\mathrm{HC4}$, $\mathrm{HC5}$ e $\mathrm{HC4m}$.
- Para detalhes consultar ?sandwich. 😉
- https://cran.r-project.org/web/packages/sandwich/vignettes/sandwich.pdf

Aspectos computacionais

- No software `R` podemos usar a library `'sandwich'` para obter os estimadores $\mathrm{HC0}, \mathrm{HC1}, \mathrm{HC2}, \mathrm{HC3},\ \mathrm{HC4},\ \mathrm{HC5}$ e $\mathrm{HC4m}$.
- Para detalhes consultar `?sandwich`. 😉
- https://cran.r-project.org/web/packages/sandwich/vignettes/sandwich.pdf

Exercício (entregar próxima segunda-feira)

Exercício 1: Leia o Capítulo 6 de Hoffman (2016).

Exercício 2: Faça **todos** os exercícios do Capítulo 6 de Hoffman (2016).

Exercício 3: Reproduza o exemplo de Cribari-Neto (2004, Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form, *Computational Statistics and Data Analysis*)