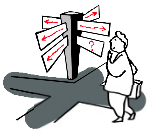


Testes Não Paramétricos
DAI (Duas Amostras Independentes)

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www.mat.ufrgs.br/viali/
viali@mat.ufrgs.br

Testes de duas Amostras Independentes

Os testes

- O teste Qui-Quadrado
- O teste exato de Fisher
- O teste de Kolmogorov-Smirnov
- O teste de U de Mann-Whitney
- O teste de Wilcoxon
- O teste de Siegel-Tukey
- O teste de Moses

O teste Qui-Quadrado

O teste qui-quadrado

O teste χ^2 de duas ou mais amostras independentes pode ser utilizado para verificar a dependência ou independência entre as variáveis sendo consideradas. As variáveis devem estar tabuladas em tabelas de contingência. Para o caso de duas variáveis, tem-se uma tabela de dupla entrada.

Hipóteses e Cálculo

H_0: As variáveis são independentes

H_1: As variáveis são dependentes

A variável teste é:

$$\chi^2_\upsilon = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

Expressão alternativa

A variável teste é:

$$\chi^2_\upsilon = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} O_{ij}^2}{E_{ij}} - n$$

Onde:

r = número de linhas da tabela;

L = número de colunas da tabela;

O_{ij} = frequência observada na interseção da linha i com a coluna j.

E_{ij} = número de casos esperados na interseção da linha i com a coluna j.

Onde:

χ^2_υ é a estatística teste;

$n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} O_{ij}$ = tamanho da amostra;

$E_{ij} = n\,p_{ij}$ são as frequências esperadas de cada célula ij da tabela.

p_{ij} é a probabilidade de ocorrer uma observação na célula ij. Se as variáveis são supostamente independentes (H_0 é Verdadeira), então $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$, onde $p_{i.}$ é a probabilidade marginal correspondente à linha "i" e $p_{.j}$ é a probabilidade marginal correspondente a coluna j.

Como não se conhecem as probabilidades marginais, elas devem ser estimadas através das correspondentes frequências relativas. Então:

$$E_{ij} = n\,p_{ij} = n\,p_{i.}.p_{.j} =$$

$$n.\frac{f_{i.}}{n}.\frac{f_{.j}}{n} = \frac{f_{i.}f_{.j}}{n}$$

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{\ell} f_{ij} \quad e \quad f_{.j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}$$

Exemplo

A tabela mostra os resultados de uma avaliação de satisfação com a compra de um novo modelo de automóvel de luxo. Teste a hipótese de que o novo modelo está agradando mais aos consumidores homens do que os consumidores mulheres.

	Avaliação		
Consumidores	**Muito**	**Pouco**	**Não Satisfeito**
Homens	30	20	15
Mulheres	25	5	5

Hipóteses

H_0: Homens e mulheres estão igualmente satisfeitos.

H_1: Homens e mulheres não estão igualmente satisfeitos.

Totais marginais

Consumidores	M	P	NS	Total
Homens	30	20	15	65
Mulheres	25	5	5	35
Total	55	25	20	100

Frequências Esperadas

Consumidores	M	P	NS	Total
Homens	35,75	16,25	13	65
Mulheres	19,25	8,75	7	35
Total	55	25	20	100

Cálculo do Qui-Quadrado

Consumidores	M	P	NS	Total
Homens	0,925	0,865	0,310	2,100
Mulheres	1,712	1,607	0,570	3,900
Total	2,642	2,473	0,880	5,990

A estatística amostral

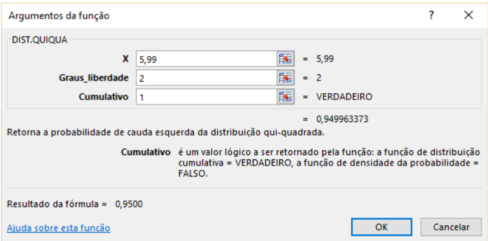
O grau de liberdade é:

$$\nu = (k-1)(l-1) = (2-1).(3-1) = 2$$

Então:

$$\chi^2_2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} = 5,99$$

Qual a significância deste resultado?


Argumentos da função

DIST.QUIQUA

X: 5,99 = 5,99

Graus_liberdade: 2 = 2

Cumulativo: 1 = VERDADEIRO

= 0,949963373

Retorna a probabilidade de cauda esquerda da distribuição qui-quadrada.

Cumulativo é um valor lógico a ser retornado pela função: a função de distribuição cumulativa = VERDADEIRO, a função de densidade da probabilidade = FALSO.

Resultado da fórmula = 0,9500

Ajuda sobre esta função

OK Cancelar

Este resultado deve ser subtraído de 1 para fornecer a cauda à direita. Assim a significância é 5%.

Tipos de Qui-Quadrado

O SPSS fornece ainda os seguintes valores do χ^2:

- Qui-Quadrado de Pearson;
- Corrigido de Yates ou Correção de Continuidade;
- Razão de verossimilhança;
- Teste exato de Fisher;
- Qui-Quadrado de Mantel-Haenszel ou teste de associação linear ou ainda associação linear por linear.

Correção de Continuidade – Yates

Obs.: Só para tabelas 2x2

$$Q_C = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left[max\left(0, \left|O_{ij} - E_{ij}\right| - 0,50\right)\right]^2}{E_{ij}}$$

Sob a hipótese nula de independência a estatística Q_C tem uma distribuição assintótica Qui-Quadrado com $(k-1).(l-1)$ g.l.

Razão de verossimilhança

$$G^2 = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} O_{ij}\ln\left(\frac{O_{ij}}{E_{ij}}\right)$$

Quando as variáveis das linhas e colunas são independentes a estatística G^2 tem uma distribuição assintótica Qui-Quadrado com $(k-1).(l-1)$ g.l.

Qui-Quadrado de Mantel-Haenszel

$$Q_{MH} = (n-1)r^2$$

O Qui-Quadrado de Mantel-Haenszel testa a hipótese de que existe um relacionamento linear entre as duas variáveis. R^2 é a correlação de Pearson (rô) entre as duas variáveis, que é calculado da seguinte forma:

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{S_X S_Y}}$$

Onde:

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} x_i y_j f_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{r} x_i r_i\right)\left(\sum_{j=1}^{c} y_j c_j\right)/n$$

$$S_X = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 r_i - \sum_{j=1}^{r} x_i r_i / n$$

$$S_Y = \sum_{j=1}^{c} y_i^2 c_i - \sum_{j=1}^{c} y_i c_i / n$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Considerando uma tabela r x c

	1	2	...	c	Total
1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1c}	r_1
2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2c}	r_2
...	...	...	...	..	...
r	f_{r1}	f_{r2}	...	f_{rc}	r_r
Total	c_1	c_2	...	c_{rc}	n

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

O teste exato de Fisher

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

O teste exato de Fisher

O teste de Fisher é útil para analisar dados discretos (nominais ou ordinais), quando os tamanhos das duas amostras são pequenos.

A cada indivíduo nos grupos é atribuído um dentre dois escores possíveis. Os escores são frequências em uma tabela 2x2.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

As amostras podem ser quaisquer dois grupos independentes tais como: homens e mulheres, empregados e desempregados, católicos e não-católicos, pais e mães, etc.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Disposição dos dados na prova de Fisher

	-	+	Total
Grupo I	A	B	A + B
Grupo II	C	D	C + D
Total	A + C	B + D	n

Os cabeçalhos são arbitrariamente indicados com sinais de "mais" e "menos", podem indicar duas classificações quaisquer: acima e abaixo da mediana, aprovado e reprovado, graduados em ciências e graduados em artes, a favor ou contra, etc.

A prova determina se os dois grupos diferem na proporção em que se enquadram, nas duas classificações, ou seja, a prova determina se o Grupo I e o Grupo II diferem significativamente na proporção de sinais "mais" e "menos" atribuídos a cada um.

A estatística teste

A probabilidade de se observar determinado conjunto de frequências em uma tabela 2x2, quando se consideram fixos os totais marginais, é dada pela distribuição hipergeométrica, isto é:

$$P(X = x) = \frac{\binom{A+C}{A}\binom{B+D}{B}}{\binom{n}{A+B}} =$$

$$= \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{n!\,A!\,B!\,C!\,D!}$$

E x e m p l o

Suponha que os seguintes valores tenham sido observados: A = 10, B = 0, C = 4 e D = 5. Então a tabela anterior seria:

	-	+	Total
Grupo I	10	0	10
Grupo II	4	5	9
Total	14	5	19

O valor da estatística, nesse caso, seria:

$P = (10!9!14!5!)/(19!10!0!4!5!) = 1,08\%$

Então sob Ho, a probabilidade de dessa configuração ou uma mais extrema é de $p = 1,08\%$.

Esse exemplo foi simples em virtude da existência de uma célula com valor zero. Se nenhuma das frequências for zero, sob Ho, podem ocorrer desvios "mais extremos" que devem ser levados em conta, pois o teste envolve a probabilidade daquela ocorrência ou de uma ocorrência ainda mais extrema?

Suponha, por exemplo, que os resultados de um teste fossem os da tabela:

	-	+	Total
Grupo I	1	6	7
Grupo II	4	1	5
Total	5	7	12

Com os mesmos totais marginais, uma situação mais extrema seria:

	-	+	Total
Grupo I	0	7	7
Grupo II	5	0	5
Total	5	7	12

Se quisermos aplicar o teste a esses devemos somar as probabilidades das duas ocorrências.

Tem-se, então:

$p_1 = (7!5!5!7!)/(12!1!6!4!1!) = 4,40\%$.

$p_2 = (7!5!5!7!)/(12!0!7!5!0!) = 0,13\%$.

Logo:

$p = p_1 + p_2 = 4{,}40\% + 0{,}13\% = 4{,}53\%$.

Isto é 4,53% é o valor-p que se deve utilizar para decidir se esses dados nos permitem rejeitar Ho.

Pelo exemplo, pode-se verificar, que mesmo quando o menor valor não é muito grande, os cálculos do teste de Fisher se tornam longos. Por exemplo, se o menor valor for 2, deve-se determinar 3 probabilidades e somá-las. Se o menor valor de uma na célula é três, tem-se que determinar quatro probabilidades e somá-las e assim por diante.

O teste de Kolmogorov-Smirnov ou K-S

Objetivos

A prova de Kolmogorov-Smirnov de duas amostras verifica se elas foram extraídas da mesma população (ou de populações com a mesma distribuição). A prova bilateral é sensível a qualquer **diferença** nas distribuições das quais se extraíram as amostras (posição central, dispersão ou assimetria).

A prova unilateral é utilizada para determinar se os valores da população da qual se extraiu uma das amostras são, ou não, estocasticamente maiores do que os valores da população que originou a outra amostra.

Metodologia

O teste utiliza as distribuições acumuladas. A prova de uma amostra verifica a concordância entre a distribuição de um conjunto de valores amostrais e uma distribuição teórica. A prova de **duas amostras** visa a concordância entre dois conjuntos de valores amostrais.

Se as duas amostras foram extraídas da mesma população, então se espera que as distribuições acumuladas das amostras estejam próximas. Se as distribuições estão "distantes" isto sugere que as amostras provenham de populações distintas e um desvio grande pode levar a rejeição da hipótese de nulidade.

O teste paramétrico equivalente é o t. Embora menos eficiente o K-S é mais versátil pois trabalha apenas com as ordens das duas variáveis, sem se preocupar com o valor das mesmas. Ele envolve menos cálculos e apresenta menos restrições que o teste t.

Aplicação

Para aplicar a prova constrói-se a distribuição das frequências acumuladas relativas de cada uma das amostras, utilizando os mesmos intervalos (amplitude de classes) para cada uma delas. Em cada intervalo subtrai-se uma função da outra. A prova utiliza como estatística o maior destas diferenças.

Hipóteses

H_0: As amostras são da mesma pop.

H_1: As amostras não são da mesma pop.

Inicialmente ordenam-se as $t = m + n$ observações de forma crescente. Considera-se os estimadores S_1 e S_2 de F_1 e F_2, isto é:

$S_1(x) = k_1/m$ e $S_2(x) = k_2/n$

Onde k_1 = número de valores $X_i \leq x$;

k_2 = número de valores $Y_j \leq x$;

Define-se:

$$D = max|S_1(x) - S_2(x)|$$

Rejeitamos H_0, ao nível α de significância se:

$D = max|S_1(x) - S_2(x)| \geq D_\alpha$, onde

$P(D \geq D_\alpha) = \alpha$

Exemplo:

Os resultados de duas amostras A e B são:

A		B	
7,49	7,37	7,28	7,48
7,35	7,51	7,35	7,31
7,54	7,50	7,52	7,22
7,48	7,52	7,50	7,41
7,48	7,46	7,52	7,45

Verifique se existe uma diferença significativa entre as duas amostras.

Tem-se:

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$

Fazer no Excel e depois no SPSS!

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

A tabela

Se o n > 40 e o teste é bilateral, então o valor crítico é dado por: $d = 1{,}36\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

Se o teste é unilateral, então o valor crítico é dado por: $\chi_2^2 = 4D^2 \dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

E x e m p l o

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Amostras de $n_1 = n_2 = 50$ valores das opiniões de diretores financeiros de grandes e pequenas empresas mostraram os resultados da tabela seguinte, medidos em uma escala Likert de 5 pontos:

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Amostras de $n_1 = n_2 = 50$ valores das opiniões de diretores de empresas Grande e Pequenas.

Escala	Grandes	Pequenas
1	5	15
2	8	13
3	10	10
4	15	8
5	12	4
Total	50	50

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Teste a hipótese de que opiniões dos diretores dos dois tipos de empresa são divergentes.

Determinação das Diferenças

Escala	Grandes	Pequenas	$Fr_1(x)$	$Fr_2(x)$	$\|D\|$
1	5	15	0,10	0,30	0,20
2	8	13	0,26	0,56	0,30
3	10	10	0,46	0,76	0,30
4	15	8	0,76	0,92	0,16
5	12	4	1,00	1,00	0,00
Total	50	50			**0,30**

Como as amostras são grandes n > 40, o qui-quadrado deve ser utilizado. Assim:

$$d = 1{,}36\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 0{,}27$$

Conclusão

A menos de um erro de 5% (significância), posso afirmar que as opiniões dos diretores financeiros de empresas grandes e pequenas são divergentes.

Observação:

O SPSS utiliza a estatística Z (Smirnov, 1948), obtida seguinte forma:

$$Z = Max_j |D_j| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

onde o nível de significância é calculado utilizando a aproximação de Smirnov, fornecida para o teste de uma amostra.

O teste U de Mann-Whitney

Objetivos

Comprovar se dois grupos independentes foram ou não extraídos da mesma população.

Requisitos

Grau de mensuração seja pelo menos ordinal.

Substitui

O teste t para amostras independentes.

H_0: A e B apresentam a mesma distribuição.

H_1: A é maior do que B (teste unilateral).

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Metodologia

Sejam n_1 = número de casos no menor dos dois grupos independentes e n_2 = número de casos no maior grupo. Primeiramente combinam-se as observações ou escores de ambos os grupos, relacionando-os por ordem ascendente.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Nessa ordenação ascendente, consideram-se os valores algébricos do grupo $n = n_1 + n_2$, isto é, os postos mais baixos são atribuídos aos maiores valores (negativos se houver).

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Focaliza-se agora um dos grupos, por exemplo, o grupo que apresenta n_1 casos. O valor de U (a estatística teste) é o número de vezes que um escore no grupo com n_2 casos precede um escore no grupo com n_1 casos no grupo ordenado formado por $n = n_1 + n_2$ casos.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

E x e m p l o

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Suponha um grupo experimental com $n_1 = 3$ casos e um grupo de controle n_2 com 4 casos. Admita-se que os escores sejam os seguintes:

Experimental	9	11	15	
Controle	6	8	10	13

Para determinar U, ordenam-se primeiro os escores de forma crescente, tendo o cuidado de identificar a qual grupo cada um pertence (E ou C):

6	8	9	10	11	13	15
C	C	E	C	E	C	E

Considera-se agora o grupo de controle e conta-se o número de escores E que precedem cada escore do grupo de controle.

Nenhum escore E precede o escore C igual a 6. Isto também é verdade para o escore C = 8. O próximo escore C é 10 e é precedido por um escore E. O último escore C, o 13, é antecedido por dois escores E.

Assim, $U = 0 + 0 + 1 + 2 = 3$. O número de vezes que um escore E vem antes de um escore C é igual a 3, isto é, $U = 3$.

A distribuição amostral de U, sob H_0, é conhecida e pode-se então determinar-se a probabilidade associada à ocorrência, sob H_0, de qualquer valor de U tão extremo quanto o valor observado.

Amostras bem pequenas

Quando nem n_1 e nem n_2 são superiores a 8, pode-se utilizar o conjunto J (Siegel) para determinar a probabilidade exata associada à ocorrência, sob H_0, de qualquer U tão extremo quanto o valor observado.

O conjunto J é formado por seis tabelas separadas, uma para cada valor de n_2, com $3 \leq n_2 \leq 8$. Para determinar a probabilidade, sob H_0, associada aos dados é necessário entrar com os valores de n_1, n_2 e U.

No exemplo dado, tem-se: $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ e $U = 3$. A tabela de $n_2 = 4$ do conjunto J mostra que $U \leq 3$ tem probabilidade de ocorrência, sob H_0, de $p = 0,20 = 20\%$.

Observação 1:

As probabilidades fornecidas são unilaterais. Para um teste bilateral, deve-se duplicar o valor da probabilidade apresentado em cada tabela.

Observação 2:

Caso o valor observado de U seja grande e não conste da tabela, existe a possibilidade de ter-se tomado o grupo “errado” no cálculo de U. Neste caso, pode-se utilizar a transformação:

$U = n_1.n_2 - U'$, onde U' é o valor que não foi encontrado na tabela.

Amostras médias

Se n_2 representar o tamanho da maior das duas amostras e for maior do que 8, o conjunto de tabelas J não poderá mais ser utilizado. Quando $9 \leq n_2 \leq 20$, pode-se utilizar tabela K (Siegel).

Essa tabela fornece valores críticos de U para os níveis de significância de 0,001, 0,01, 0,025 e 0,05 para um teste unilateral. Para um teste bilateral, os níveis de significância são dados por: 0,002, 0,02, 0,05 e 0,10.

Este conjunto de tabelas fornece valores críticos de U e não probabilidades exatas (como as J). Isto é, se um valor observado de U, para $n_1 \leq 20$ e $9 \leq n_2 \leq 20$, não superar o valor da tabela, pode-se rejeitar H_0, a um dos níveis de significância indicados.

Amostras médias – Determinação de U

Para valores grandes de n_1 e n_2, o método para determinar U é trabalhoso. Um processo alternativo com resultados idênticos, consiste em atribuir posto 1 ao valor mais baixo do grupo combinado ($n_1 + n_2$) valores, o posto 2 ao valor seguinte e assim por diante.

Então:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

ou

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

onde R_1 = soma dos postos atribuídos ao grupo n_1 e R_2 = soma dos postos atribuídos ao grupo n_2.

Por exemplo, se $n_1 = 6$ e $n_2 = 13$, um valor de $U = 12$ permite rejeitar H_0 ao nível $\alpha = 0{,}01$ em uma prova unilateral e rejeitar H_0 ao nível $\alpha = 0{,}02$ em uma prova bilateral.

E x e m p l o

Para ilustrar o processo vamos utilizar amostras pequenas. Assim:

Escore E	Posto	Escore C	Posto
78	7	110	9
64	4	70	5
75	6	53	3
46	1	51	2
82	8		
Soma	$R_2 = 26$	Soma	$R_1 = 19$

Aplicando a fórmula anterior segue:

$U = 4.5 + 5.(5 + 1) / 2 - 26 = 9$

O menor dos dois valores de U é aquele cuja distribuição amostral constitui a base da tabela K (Siegel).

Amostras grandes

Nem a tabela J e nem a K podem ser utilizadas quando $n_2 > 20$.

Mann e Whitney mostraram (1947), que à medida que n_1 e n_2 aumentam, a distribuição amostral de U tende rapidamente para a distribuição normal, com:

Média

$$\mu_U = E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$$

e

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

Então:

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

É assintóticamente N(0; 1).

Empates

A prova de Mann-Whitney supõe que os escores representem uma distribuição basicamente contínua. Numa distribuição contínua a probabilidade de um empate é zero. Todavia, como a mensuração tem uma precisão limitada, os empates podem ocorrer.

Admite-se que as observações que estejam empatadas, tenham, na realidade, escores diferentes, e que esta diferença é muita pequena para ser detectada pelo instrumento de medida.

Assim quando ocorrem empates atribui-se a cada um dos valores empatados a média dos postos que lhes seriam atribuídas se não houvesse empate.

Se os empates ocorrem entre dois ou mais valores do mesmo grupo, o valor de U não é afetado. Mas se os empates ocorrem entre duas ou mais observações envolvendo os dois grupos, então o valor de U é afetado.

Embora, os efeitos práticos dos empates sejam desprezíveis existe uma correção para empates que deve ser utilizada com a aproximação normal para grandes amostras.

O efeito dos postos empatados modifica a variabilidade do conjunto de postos. Assim, a correção deve ser aplicada ao desvio padrão da distribuição amostral de U. Com esta correção o desvio padrão é dado por:

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{n(n-1)}\right)\left(\frac{n^3-n}{12} - \sum T\right)}$$

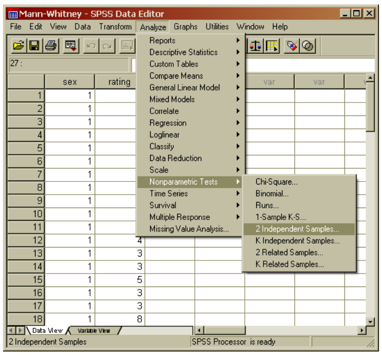
Onde $n = n_1 + n_2$

$T = (t^3 - t)/12$

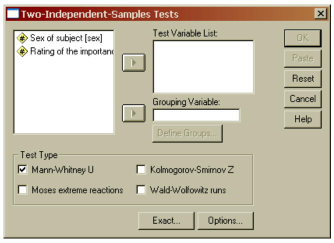
t = número de escores empatados para um determinado posto.

E x e m p l o

Clique conforme figura

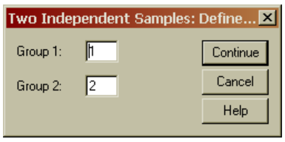


Isso abrirá a seguinte caixa de diálogos:



Coloque Rating ... Como Test Variable List e Sex of subject como Grouping Variable.

Clique em Define Groups



Entre os códigos, conforme planilha.

Test Statistics

	RATING Rating of the importance of body as characteristic in a partner
Mann-Whitney U	147,500
Wilcoxon W	357,500
Z	-1,441
Asymp. Sig. (2-tailed)	,150
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,0157

a Not corrected for ties.

b Grouping Variable: SEX Sex of subject

Conclusão:

Não é possível afirmar que existe diferença entre homens e mulheres quanto a importância que eles atribuem a forma do corpo do companheiro.

$U = 147{,}50$, $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, $p = 15{,}70\%$ bilateral.

O teste de Wilcoxon

Objetivos

O teste de Wilcoxon investiga se existe diferença na posição de duas populações. Introduzido em 1945 com o nome de Teste da Soma das ordens (Rank Sum Test) destacou-se na área não paramétrica pelo seu poder.

Requisitos

As duas amostras são aleatórias e independentes.

Substitui

O teste t para amostras independentes.

H_0: Os grupos A e B são da mesma população.

H_1: Os grupos A e B não são da mesma população.

Metodologia

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_m$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $(m \geq n)$. Forma-se um único grupo de $k = m + n$ observações ordenadas de forma crescente. Define-se: $W = \sum_{j=1}^{n} O_j$

Onde O_j representa a ordem de Y_j na classificação conjunta dos $k = m + n$ valores.

As hipóteses são:

H_0: $\Delta = 0$

H_1: $\Delta > 0$

$\Delta < 0$

$\Delta \neq 0$

Rejeitamos H_0 se $W \geq W_\alpha$ onde $P(W \geq W_\alpha) = \alpha$ nas hipóteses unilaterais e metade desse valor na bilateral.

A hipótese unilateral é mais recomendável pois a ideia é de que uma população é em média maior do que a outra.

Observações:

(*i*) Os valores máximo e mínimo de W ocorrem quando Y_j ocupa respectivamente as n últimas ou as n primeiras observações na classificação conjunta $k = m + n$. Tais valores correspondem as seguintes situações:

$W_{máx} \rightarrow X\ X\ ...\ X\ Y\ Y\ ...\ Y$

$W_{mín} \rightarrow Y\ Y\ ...\ Y\ X\ X\ ...\ X$

E assim, tem-se:

$$W_{mín} = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e}$$

$$W_{máx} = \sum_{j=m+1}^{k} j = \frac{n(2m+n+1)}{2}$$

(**ii**) A média (mediana) dos possíveis valores de W, sob H_0 é: $W_{med} = \frac{n(m+n+1)}{2}$

(**iii**) A amplitude do intervalo de variação de W é: $A_W = W_{máx} - W_{mín} = mn$

(**iv**) W é uma variável discreta.

(**v**) n é o tamanho da menor amostra.

(**vi**) A distribuição de W, sob H_0, é simétrica em relação a sua média. Como conseqüência: $W_\alpha = n(m + n + 1) - W_{1-\alpha}$

Ou seja:

$P(W \leq W_\alpha) = P[W \leq n(m+n+1) - W_{1-\alpha}$

E x e m p l o

Suponha que se tenha dois grupos, um denominado de experimental e outro de controle, conforme valores da tabela.

Valores	Experimental		Controle	
	Escore	Posto	Escore	Posto
1	25	18	12	10
2	5	3	16	15
3	14	13	6	4
4	19	17	13	12
5	0	1	13	11
6	17	16	3	2
7	15	14	10	7
8	8	6	10	8
9	8	5	11	9
Total		93		$W = 78$

Como as duas amostras são iguais e não apresentam empates entre os grupos o valor da estatística de Wilcoxon é a menor das duas somas de postos obtida. Nesse caso, $W = 78$.

Empates

Quando ocorrem empates entre valores dos dois grupos, ou seja, entre X e Y, a média das ordens dos valores empatados é utilizada no cálculo de W e o cálculo é realizado da mesma forma que anteriormente.

Considere os seguintes valores de duas amostras X e Y:

	X	Y
1	2,3	1,8
2	3,2	2,3
3	3,8	2,3
4	4,5	3,2

Esses valores em um única amostra ordenada seriam:

Valores	1,8	2,3	2,3	2,3	3,2	3,2	3,8	4,5
Grupo	Y	X	Y	Y	X	Y	X	X
Postos	1	2	3	4	5	6	7	8
Empates	1	3	3	3	5,5	5,5	7	8

Então:

$W = 1 + 3 + 3 + 5{,}5 = 12{,}5.$

$W = 3 + 5{,}5 + 7 + 8 = 23{,}5.$

Observação

Empates entre os valores de X e entre os valores de Y apenas não afetam o valor da estatística W, mas afetam a sua distribuição sob H_0.

Aproximação pela normal

Quando n e m crescem os valores de W podem ser aproximados por uma distribuição normal de média:

$$\mu_W = E(W) = \frac{n(m+n+1)}{2}$$

e desvio padrão:

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

Aproximação pela normal

Quando n e m crescem os valores de W podem ser aproximados por uma distribuição normal de média:

$$\mu_W = E(W) = \frac{n(m+n+1)}{2}$$

e desvio padrão:

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

Correção de continuidade

Em geral é recomendável aplicar-se uma correção de continuidade na aproximação pela normal. Essa correção consiste em **somar** ou **subtrair** o valor 0,5 ao valor de W conforme se esteja calculando valores na parte **inferior** ou **superior** da curva.

Por exemplo:

Se m = 8, n = 4 e W = 35. O limite superior exato é 7,7%.

Aproximando pela normal, sem correção, temos valor-p = 6,32%

Utilizando a correção o valor passa para valor-p = 7,44%.

Distribuição sob H_0

Para ilustrar a distribuição sob H_0 de W. Considere-se m = 4 e n = 2. Com essa configuração o número de combinações (agrupamentos) possíveis é: $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

Agrupamento	W_0	Agrupamento	W_0
YYXXXX	3	XYXXXY	8
YXYXXX	4	XXYYXX	7
YXXYXX	5	XXYXYX	8
YXXXYX	6	XXYXXY	9
YXXXXY	7	XXXYYX	9
XYYXXX	5	XXXYXY	10
XYXYXX	6	XXXXYY	11
XYXXYX	7		

De onde obtém-se a distribuição:

W_0	$P(W = W_0)$	$P(W \geq W_0)$	$P(W \leq W_0)$
3	0,0667	0,0667	1,0000
4	0,0667	0,1333	0,9333
5	0,1333	0,2667	0,8667
6	0,1333	0,4000	0,7333
7	0,2000	0,6000	0,6000
8	0,1333	0,7333	0,4000
9	0,1333	0,8667	0,2667
10	0,0667	0,9333	0,1333
11	0,0667	1,0000	0,0667

Observações:

Considerando os resultados anteriores, tem-se:

(i) $P(W = W_0) = P[W = n(m + n + 1) – W_0]$

(ii) $P(W \geq W_0) = P[W \leq n(m + n + 1) – W_0]$

(iii) A distribuição é simétrica em torno da média

$E(W) = n(m + n + 1)/2$

Empates:

No caso de observações empatadas a distribuição de W se altera e como consequência os níveis de significância das tabelas que são feitas sem empates se tornam apenas aproximações.

Exemplo:

Para ilustrar considere-se duas amostras de tamanhos m = 3 e n =2, onde os valores dos postos 3 e 4 são iguais. Os possíveis arranjos bem como a distribuição da estatística W, para essa situação, são as seguintes:

Agrupamento	W_0	Agrupamento	W_0
Y Y X X X	3	X Y X Y X	5,5
Y X Y X X	4,5	X Y X X Y	7
Y X X Y X	4,5	X X Y Y X	7
Y X X Y X	6	X X Y X Y	8,5
X Y Y X X	5,5	X X X Y Y	8,5

A distribuição de W_0, para essa situação, será:

Distribuição de W sob H_0

W_0	$P(W = W_0)$	$P(W \geq W_0)$
3	0,10	1,00
4,5	0,20	0,90
5,5	0,20	0,70
6	0,10	0,50
7	0,20	0,40
8,5	0,20	0,20

Assim, por exemplo, se W = 8,5, $P(W \geq 8,5) = 0,20$, mas pela tabela tem-se: 10%.

Exercício

Cinco mulheres e dez homens foram submetidos a um teste de aptidão para exercer determinada função. Eles foram avaliados por meio de uma escala de 0 a 10. Os resultados estão na tabela. Se você fosse o diretor com qual grupo trabalharia? Resolva utilizando o Excel e o SPSS.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

O teste de Siegel-Tukey

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Objetivos

Desenvolvido por Sidney Siegel (1916 1961) e John Wilder Tukey (1915 – 2000) em 1960 o teste é utilizado para verificar se existe uma diferença significativa entre as variâncias de duas populações.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

O teste de Siegel-Tukey é um dos muitos testes de dispersão que são, também conhecidos como testes de escala ou espalhamento, utilizados para verificar se as variâncias de duas populações independentes são homogêneas.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Hipóteses

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Suposições

Este teste tem por base as seguintes suposições:

(i) Cada amostra foi selecionada aleatoriamente;

(ii) As duas amostras são independentes;

(iii) O nível de mensuração é pelo menos ordinal.

(iv) As duas populações tem a mesma mediana.

Metodologia

O procedimento de cálculo do teste de Siegel-Tukey para a equivalência da variabilidade é idêntico ao empregado no teste U de Mann-Whitney, exceto pelo fato de que o teste emprega um protocolo diferente para o cálculo dos postos.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Enquanto o procedimento do teste de Mann-Whitney é utilizado para identificar diferenças na tendência central (especificamente do valor mediano) o teste de Siegel-Tukey é projetado para identificar diferenças na variabilidade.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

A suposição básica do teste toma por base a premissa de que na distribuição global dos $N = n + m$ escores, a distribuição dos escores no grupo com maior variância irá conter valores mais extremos (isto é, escores que serão muito altos ou muito baixos).

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

A suposição básica do teste toma por base a premissa de que na distribuição global dos $N = n + m$ escores, a distribuição dos escores no grupo com maior variância irá conter valores mais extremos (isto é, escores que serão muito altos ou muito baixos).

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

O procedimento para o cálculo dos postos para o teste de Siegel-Tukey é similar ao de Mann-Whitney, mas emprega uma forma diferente de atribuição dos escores.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística – Curso de Estatística

Enquanto no teste de Mann-Whitney os escores são atribuídos de forma crescente ao leque dos valores de mínimo para máximo o de Siegel-Tukey a atribuição é feita de forma alternada.

O posto 1 é atribuído ao menor escore enquanto que o posto 2 ao maior. O posto 3 é atribuído ao segundo maior escore e o 4 ao segundo menor escore. O posto 5 é atribuído ao terceiro menor escore e 6 ao terceiro maior escore e assim sucessivamente.

E x e m p l o

Para testar novas drogas um grupo de 12 pacientes depressivos foram aleatoriamente colocados em um de dois grupos. Seis pacientes ficaram no Grupo 1 onde receberam o antidepressivo Elatrix por um período de seis meses. Os demais pacientes foram colocados no Grupo 2 e receberam o antidepressivo Euphyria durante o mesmo período.

Suponha que o pesquisador testou o nível de depressão nos dois grupos antes de iniciar o tratamento e não verificou diferença. Após os seis meses os dois grupos foram avaliados por um Psiquiatra (que não conhecia quem era de qual grupo) sobre o nível de depressão.

Os escores que foram atribuídos as pacientes dos dois grupos foram.

Grupo 1	10	10	9	1	0	0
Grupo 2	6	6	5	5	4	4

O fato de que a média e a mediana dos dois grupos são equivalentes sugere que não existe diferença na eficácia das duas drogas.

Uma inspeção nos dois grupos, contudo revela que existe uma diferença aparente de variabilidade entre os dois grupos. Especificamente a droga Elatrix diminui a depressão em algumas pessoas enquanto aumenta em outras. O pesquisador quer comparar a variabilidade dos dois grupos.

O número total de sujeitos é N = 12, onde existe n = 6 sujeitos no Grupo 1 e m = 6 sujeitos no Grupo 2. Os dados para os dois grupos estão resumidos na Tabela.

Sujeito	5,1	6,1	4,1	5,2	6,2	3,2	4,2	1,2	2,2	3,1	1,1	2,1
Escores	0	0	1	4	4	5	5	6	6	9	10	10
Postos	1	4	5	8	9	12	11	10	7	6	3	2
Postos	2,5	2,5	5	8,5	8,5	11,5	11,5	8,5	8,5	6	2,5	2,5

Assim as somas dos postos dos grupos 1 e 2 são iguais a:

$R_1 = 21$ e $R_2 = 57$.

Os valores de U_1 e U_2 são dados por:

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_1 = 6.6 + \frac{6.(6+1)}{2} - 21 = 36$$

$$U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_2 = 6.6 + \frac{6.(6+1)}{2} - 57 = 0$$

Observações:

(a) Note que os valores de U_1 e U_2 não podem ser negativos

(b) Se Mann-Whitney for utilizado a seguinte relação pode ser usada para checagem: $n.m = U_1 + U_2$.

(c) Para pequenos valores de n e m a significância de U é obtida das tabelas.

(d) O valor de U pode ser aproximado por uma normal de média (nm)/2 e variância [nm(n + m -1)]/12.

(e) A correção de continuidade é obtida por $z = (|U - (nm)/2| - 0,5)/DP$.

Para o exemplo dado, se a normal fosse adequada, o que não é o caso, o valor de z obtido seria igual a:

$$z = \frac{\left|U - \frac{mn}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}} = \frac{\left|0 - \frac{6.6}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{6.6(6+6+1)}{12}}} = -2,80$$

Se não fosse utilizado a CC o valor de z obtido seria igual a -2,88.

(f) A aproximação normal pode ser corrigida para empates quando eles forem excessivos. Neste caso a variância é dada por:

$$V(U) = \frac{nm(n+m+1)}{12} - \frac{nm\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i)}{12(n+m)(n+m-1)}$$

Onde s = número de conjuntos de empates.

Para o exemplo dado, se a normal fosse adequada, o que não é o caso, e a correção para empates fosse utilizada o valor de z seria igual a:

$$z = \frac{U - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12} - \frac{nm\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i)}{12(n+m)(n+m-1)}}} = $$

$$= \frac{0 - \frac{6.6}{2}}{\sqrt{\frac{6.6(6+6+1)}{12} - \frac{6.6.30}{12(6+6)(6+6-1)}}} = -2,91$$

$$z = \frac{\left|U - \frac{mn}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12} - \frac{nm\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i)}{12(n+m)(n+m-1)}}} = $$

$$= \frac{\left|0 - \frac{6.6}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{6.6(6+6+1)}{12} - \frac{6.6.30}{12(6+6)(6+6-1)}}} = -2,83$$

Onde $\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i) = 5(2^3 - 2) = 30$ uma vez que todos os 5 empates foram entre 2 valores.

(g) O teste de Siegel-Tukey é baseado na hipótese de que as medianas dos dois grupos são iguais. Se isto não acontecer é necessário ajustar os escores. Isto pode ser feito subtraindo a diferença entre as duas medianas do grupo com a mais alta mediana ou somando esta diferença ao grupo com a menor mediana.

O teste de Moses

Objetivos

O teste de Moses serve para comparar as dispersões de duas populações. Ele não exige que as populações tenham a mesma mediana como o teste de Siegel-Tukey, isto é, ele pode ser aplicado quando as duas populações diferem na "posição".

Requisitos

Grau de mensuração seja pelo menos ordinal.

Substitui

Ele é uma aplicação do teste de Wilcoxon às variâncias dos dados originais quando agrupadas de forma conveniente.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Metodologia

Sejam X_1, X_2, ..., X_m e Y_1, Y_2, ..., Y_n. Escolhe-se um valor arbitrário $k \geq 2$ e dividimos os "m" valores X em m_1 grupos aleatórios com "k" elementos em cada um, desprezando sobras se existirem. Repetir o mesmo procedimento para os valores de Y, isto é, obtendo n_1 grupos.

Para cada grupo calcula-se a soma dos quadrados dos desvios, ou seja:

$$C_i = \sum_{r=1}^{k}(X_{ir} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{r=1}^{k} X_{ir}^2 - \frac{\left(\sum_{r=1}^{k} X_{ir}\right)^2}{k}$$

para $i = 1,2,\ldots,m_1$

$$D_j = \sum_{r=1}^{k}(Y_{jr} - \bar{Y}_j)^2 = \sum_{r=1}^{k} Y_{jr}^2 - \frac{\left(\sum_{r=1}^{k} Y_{jr}\right)^2}{k}$$

para $j = 1,2,\ldots,n_1$

Os valores C_i e D_j são as variações dos grupos i e j, ou ainda, as variâncias desses grupos multiplicadas por (k – 1).

Assim para testar as variâncias aplica-se o teste de Man-Whitney aos valores C_i e D_j.

Observações:

(i) Fixando um mesmo nível de significância as conclusões podem variar em função de:

(a) Número de grupos formados (k é qualquer);

(b) A estrutura dos subgrupos. Para um mesmo k, são possíveis $\binom{m}{k}$ e $\binom{n}{k}$ combinações.

(ii) Não é recomendável testar vários valores de k até que se obtenha a conclusão mais adequada.

Procedimento

O número de subamostras derivadas de cada Grupo não precisa ser o mesmo. O número de escores em cada subgrupo deve ser tal que os produtos n_1k e m_1k incluam o maior número possível de escores. A situação ótima seria $n_1k = n$ e $m_1k = m$ o que nem sempre será possível.

Após a determinação das amostras, determina-se a média de cada uma e em seguida a variação. Tendo os valores das variações o procedimento é o de Mann-Witney sobre os escores das variações.

E x e m p l o

Para testar novas drogas um grupo de 12 pacientes depressivos foram aleatoriamente colocados em um de dois grupos. Seis pacientes ficaram no Grupo 1 onde receberam o antidepressivo Elatrix por um período de seis meses. Os demais pacientes foram colocados no Grupo 2 e receberam o antidepressivo Euphyria durante o mesmo período.

Suponha que o pesquisador testou o nível de depressão nos dois grupos antes de iniciar o tratamento e não verificou diferença. Após os seis meses os dois grupos foram avaliados por um Psiquiatra (que não conhecia quem era de qual grupo) sobre o nível de depressão.

Os escores que foram atribuídos as pacientes dos dois grupos foram.

Grupo 1	10	10	9	1	0	0
Grupo 2	6	6	5	5	4	4

O fato de que a média e a mediana dos dois grupos são equivalentes sugere que não existe diferença na eficácia das duas drogas.

Contudo o exame dos dois grupos revela que pode haver uma diferença significativa na variabilidade dos dois grupos, isto é, o Grupo 1 apresenta uma variabilidade maior do que o Grupo 2. Assim, os dados sugerem que a droga Elatrix pode, de fato, diminuir a depressão em alguns sujeitos, mas aumentar em outros.

O número total de sujeitos envolvidos é N = 12 com n = 6 sujeitos no Grupo 1 e m = 6 sujeitos no Grupo 2. Estes conjuntos devem ser divididos em subamostras menores do que o tamanho dos grupos. Assim a melhor opção é escolher k = 2, tendo-se, desta fora, 3 amostras de tamanho 2 em cada grupo e nenhuma sobra.

As amostras devem ser selecionadas aleatoriamente de cada um dos dois grupos. Neste caso, teremos 3 amostras de tamanho 2 de cada um dos grupos. As amostras, as médias e as variações são apresentadas na tabela da próxima lâmina.

Grupo 1	**Média**	**Variação**	**Escores**
1, 10	5,5	40,5	4,5
10, 0	5	50	6
9, 0	4,5	40,5	4,5
		R_1	**15**
Grupo 2	**Média**	**Variação**	**Escores**
4, 4	4,5	0	1
5, 6	6	0,5	2,5
5, 6	4,5	0,5	2,5
		R_2	**6**

Neste caso os escores U_1 e U_2 serão:

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_1 = 3.3 + \frac{3.(3+1)}{2} - 15 = 0$$

$$U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_2 = 3.3 + \frac{3.(3+1)}{2} - 6 = 9$$

O menor valor é a estatística U, que neste caso, é igual a zero. Conforme tabela J, a significância deste resultado é de 0,05.

Assim é possível concluir que existe uma variabilidade maior, nos escores de depressão, no Grupo 1 que recebeu a droga Elatrix, do que no Grupo que recebeu a droga Euphyria (Grupo 2).

Aproximação pela Normal

Embora os grupos sejam pequenos demais para uma aproximação pela normal, isto será feito apenas para ilustração do procedimento. Neste caso a estatística teste será:

$$z = \frac{U - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}} = \frac{0 - \frac{3.3}{2}}{\sqrt{\frac{3.3(3+3+1)}{12}}} = -1,96$$

Este resultado concorda com o anterior e fornece uma significância de 5% bilateral.

Se a correção de continuidade for utilizada o valor de z passará para:

$$z = \frac{\left|U - \frac{mn}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}} = \frac{\left|0 - \frac{3.3}{2}\right| - 0,5}{\sqrt{\frac{3.3(3+3+1)}{12}}} = -1,75$$

Neste caso este resultado não será mais significativo a 5% bilateral, mas apenas a 5% unilateral.

Referências:

MANN, Henry B., WHITNEY, Donald R. On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. Annals of Mathematical Statistics, v. 18, n. 1, p. 50-60, 1947.

MOSES, L. E. A Two-Sample Test. Psychometrika, v. 17, n. 3, 1952, p. 239-47. doi:10.1007/BF02288755.

SHESKIN, David J. Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures. 4th ed. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2007.

Referências:

SIEGEL, Sidney, TUKEY, John W. A Nonparametric Sum of Ranks Procedure for Relative Spread in Unpaired Samples. Journal of the American Statistical Association, v. 55, n. 291, Sep., 1960, p. 429-45.

WILCOXON, Frank. Individual comparisons by ranking methods (PDF). Biometrics Bulletin, v. 1, n. 6, p. 80-83, Dec 1945.

http://www.real-statistics.com/non-parametric-tests/wilcoxon-rank-sum-test/