37. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim Gumbel(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \ \exp\left(-e^{-(x-\theta)}\right) \ I_A(x), \ A = (-\infty, \infty).$$

a. Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ.

b. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.

c. Encontre uma estatística suficiente e completa para θ.

d. Encontre o limite inferior de Cramer-Rao para a variância dos estimadores não viciados de θ.

e. Existe alguma função de θ para a qual existe um estimador não viciado cuja variância coincida com o limite inferior de Cramer-Rao?

f. Mostre que

$$T = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \log\left(\sum e^{-X_i}\right)$$

é o UMVUE(ENVVUM) de θ.

Solução:

A média de X é dada por:

$$E_\theta(X) = \alpha + \beta\gamma = \theta + \gamma,$$

em que $\gamma = 0,577216$ é a famosa constante de Euler. Ela pode ser obtida no R através de:

```
 Euler=-digamma(1);Euler
[1] 0.5772157
```

A função digama é a derivada do logaritmo da função gama isto é,

$$\Psi(x) = [\log(\Gamma(x))]' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Para $x = 1$ temos:

$$\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = -\gamma.$$

Vamos achar o estimador pedido:

$$E_\theta(X) = \bar{X}.$$

$$\theta + \gamma = \bar{X}.$$

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{X} - \gamma.$$

Vamos achar o EMV de θ:

Vamos colocar a f.d.p. na forma:

$$f(x|\theta) = e^{-x}\ e^{\theta}\ \exp\left(-e^{-x}\ e^{\theta}\right)\ I_A(x),\ A = (-\infty, \infty).$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i}\ e^{\theta}\ \exp\left(-e^{-x_i}\ e^{\theta}\right)$$

$$L(\theta) = e^{n\theta}\ e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\ \exp\left(-e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}\right)$$

Aplicando logaritmo neperiano temos:

$$l(\theta) = \log\left[L(\theta)\right] = n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i - e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}.$$

Derivando em relação à θ temos:

$$l^{'}(\theta) = n - e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}.$$

A segunda derivada em relação à θ temos:

$$l^{''}(\theta) = -e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} < 0.$$

De

$$l^{'}(\theta) = 0$$

temos:

$$n = e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}.$$

$$e^{\theta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-x_i}}{n}$$

Aplicando logaritmo temos:

$$\theta = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}\right) - \log(n).$$

Assim

$$\hat{\theta}_{MV} = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}\right) - \log(n).$$

Assim

Para responder o item c vamos mostrar que a densidade pertence á família exponencial.

Assim temos que $A = (-\infty, \infty)$ não depende de θ.

$$\log\left(f(x|\theta)\right) = -x + \theta - e^{\theta} e^{-x}$$

Fazendo

$$c(\theta) = -e^{\theta} \;\;, t(x) = e^{-x}; \;\; d(\theta) = \theta, \;\; b(x) = -x.$$

Assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} t(X_i) = \sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$$

é a nossa estatística suficiente e completa procurada.

Vamos agora responder ao item **d**:

Seja T um estimador não viciado de θ.

Sabemos que:

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\, I_F(\theta)} = \frac{1}{n} = LICR.$$

Vamos mostrar o passo a passo:

A função escore é dada por:

$$\log\left(f(X|\theta)\right) = -X + \theta - e^{\theta} e^{-X}$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = 1 - e^{\theta} e^{-X}$$

$$Var(V) = I_F(\theta) = Var\left(1 - e^{\theta} e^{-X}\right) = e^{2\theta}\, Var\left(e^{-X}\right)$$

$$I_F(\theta) = e^{2\theta}\, \frac{1}{e^{2\theta}} = 1$$

Se $X \sim Gumbel(\theta, 1)$ então $Y = e^{-X} \sim Exp(\theta)$.

Vamos provar esse resultado. Seja $G(y)$ a acumulada de $Y = e^{-X} > 0$.

Para $y > 0$ temos:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \log(y)) = P(X \geq -\log(y))$$

$$G(y) = 1 - F(-\log(y)).$$

Derivando temos:

$$G'(y) = \frac{1}{y} f(-\log(y)) = \frac{1}{y}\ e^{\log(y)}\ e^{\theta}\ \exp\left(-e^{\log(y)}\ e^{\theta}\right).$$

$$g(y) = \frac{1}{y}\ y\ e^{\theta}\ \exp\left(-y\ e^{\theta}\right).$$

$$g(y) = e^{\theta}\ \exp\left(-\ e^{\theta}\ y\right)\ \ I_{(0,\infty)}\ (y).$$

Logo

$$Y = e^{-X} \sim Exp(\lambda = e^{\theta}).$$

Vamos responder ao item **e**:

Vamos aplicar o seguinte resultado:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - e^{\theta} e^{-X_i}\right) = n - e^{\theta}\ \sum_{i=1}^{n}\ e^{-X_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta} = -n\ e^{\theta} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ e^{-X_i}}{n} - e^{-\theta}\right)$$

Fazendo

$$K(\theta, n) = -n\ e^{\theta} \quad T = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ e^{-X_i}}{n}\ \ e\ \ g(\theta) = e^{-\theta}.$$

a função procurada é

$$g(\theta) = e^{-\theta}.$$

Note que:

$$Var(T) = \frac{1}{n^2}\ \sum_{i=1}^{n}\ Var(e^{-X_i}) = \frac{1}{n^2}\ \frac{n}{e^{2\theta}} = \frac{1}{n\ e^{2\theta}}.$$

Seja

$$g(\theta) = e^{-\theta}.$$

A derivada de g é dada por:

$$g^{'}(\theta) = -e^{-\theta}.$$

E

$$\left(g^{'}(\theta)\right)^2 = e^{-2\theta}.$$

Seja T um estimador não viciado de $g(\theta)$.
Sabemos que:

$$Var(T) \geq \frac{\left(g^{'}(\theta)\right)^2}{n\, I_F(\theta)} = \frac{e^{-2\theta}}{n} = \frac{1}{ne^{2\theta}} = LICR.$$

Vamos responder ao item **f**:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$$

Sabemos que

$$S \sim Gama(n, e^{\theta}).$$

Devemos encontrar uma função de S, $h(S)$, de sorte que

$$E[h(S)] = \theta.$$

A lei de S é dada por:

$$g(s) = \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)}\, s^{n-1}\, exp(-e^{\theta} s)\, I_{(0,\infty)}\,(s).$$

Vamos calcular

$$E[\log(S)] = \int_0^{\infty} \log(s)\; \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)}\, s^{n-1}\, exp(-e^{\theta}s)\, ds$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = e^{\theta}\, s$$

Assim temos

$$\log(u) = \theta + \log(s).$$

$$s = e^{-\theta}\, u$$

$$s^{n-1} = e^{-(n-1)\theta}\, u^{n-1}$$

Além disso:

$$ds = e^{-\theta}\, du.$$

Voltando a nossa integral temos:

$$E[\log(S)] = \int_0^\infty \log(s) \ \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)} \ s^{n-1} \ exp(-e^\theta s) \ ds$$

$$E[\log(S)] = \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \log(e^\theta u) \quad e^{-(n-1)\theta} u^{n-1} \ exp(-u) \ e^{-\theta} \ du$$

$$E[\log(S)] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \log(e^\theta u) \ \ u^{n-1} \ exp(-u) \ \ du$$

Assim

$$\Gamma(n) \ E[\log(S)] = \int_0^\infty (\log(u) - \theta) \ \ u^{n-1} \ exp(-u) \ \ du$$

$$\Gamma(n) \ E[\log(S)] = \int_0^\infty \log(u) \ \ u^{n-1} \ exp(-u) \ \ du - \theta \ \int_0^\infty u^{n-1} \ exp(-u) \ \ du$$

$$\Gamma(n) \ E[\log(S)] = \Gamma'(n) - \theta\Gamma(n).$$

$$E[\log(S)] = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \theta$$

$$E[-\log(S)] = -\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + \theta$$

$$E\left[\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \log(S)\right] = \theta.$$

Asim

$$T = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \log\left(\sum_{i=1}^n e^{-X_i}\right)$$

é o nosso estimador ótimo procurado.