Vamos construir intervalos unilaterais de confiança com nível $\gamma = 1 - \alpha$ para um parâmetro θ.

Um intervalo de confiança unilateral inferior é da forma:

$$ICUI(\theta, \gamma\%) = (li, \infty).$$

Um intervalo de confiança unilateral superior é da forma:

$$ICUS(\theta, \gamma\%) = (-\infty, ls).$$

1. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Se $n > 30$ não precisa de normalidade. Pelo teorema do limite central

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

aproximadamente.

i. Intervalo de confiança unilateral inferior para μ com σ^2 conhecida.

$$\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \infty\right),$$

com

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

ii. Intervalo de confiança unilateral superior para μ com σ^2 conhecida.

$$\left(-\infty \ ; \ \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

com

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

iii. Intervalo de confiança unilateral inferior para μ com σ^2 desconhecida.

$$\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \ ; \ \infty\right),$$

com

$$P(T_{n-1} > t_\alpha) = \alpha.$$

iv. Intervalo de confiança unilateral superior para μ com σ^2 desconhecida.

$$\left(-\infty \quad ; \quad \bar{X} + t_\alpha \ \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

com

$$P(T_{n-1} > t_\alpha) = \alpha.$$

v. Intervalo de confiança unilateral inferior para σ^2.

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{q_1} \quad ; \quad \infty\right)$$

com

$$P(\chi^2(n-1) > q_1) = 1 - \alpha.$$

vi. Intervalo de confiança unilateral superior para σ^2.

$$\left(0 \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{q_2}\right)$$

com

$$P(\chi^2(n-1) > q_2) = \alpha.$$

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória

$$X \sim Ber(p).$$

O intervalo inferior aproximado de confiança de 100 $\%\gamma$ para p

$$\left[\hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad , \quad 1\right]$$

O intervalo superior aproximado de confiança de 100 $\%\gamma$ para p

$$\left[0 \quad ; \quad \hat{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

com

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad \hat{p} = \frac{S}{n} \quad e \quad P(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

3. Vamos construir intervalos de confiança unilaterais para a diferença de médias $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ de duas populações normais independentes.

i. $ICUS(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \gamma)$ quando σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos.

$$\left(-\infty\ ;\ \ \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

ii. $ICUI(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \gamma)$ quando σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos.

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\ \ ;\ \ \infty\right)$$

b. $ICUS(\mu_1 - \mu_2\ ,\ 100\gamma)$ quando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ que é desconhecida.

$$\left(-\infty\ ;\ \ \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + t_\alpha\ S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

$ICUI(\mu_1 - \mu_2\ ,\ 100\gamma)$

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - t_\alpha\ S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\ \ ;\ \ \infty\right)$$

com

$$P(T(n+m-2) > t_\alpha) = \alpha.$$

c. $IC(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \gamma)$ quando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, desconhecidas.
A quantidade pivotal é:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \sim t(r),$$

com

$$r = \frac{(A+B)^2}{\frac{A^2}{n-1} + \frac{B^2}{m-1}},$$

$$A = \frac{s_1^2}{n} \qquad B = \frac{s_2^2}{m}.$$

Arredonde r para o inteiro mais próximo.

$$ICUS(\mu_1 - \mu_2\ ,\ 100\gamma)$$

$$\left(-\infty \ ; \ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+t_\alpha\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right)$$

$$ICUI(\mu_1-\mu_2\ ,\ 100\gamma)$$

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-t_\alpha\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\ ;\ \infty\right)$$

com

$$P(T(r)>t_\alpha)=\alpha.$$

d. $IC(\theta\ ,\ \gamma)$, $\theta=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.

Intervalo de confiança unilateral inferior para σ_2^2/σ_1^2.

$$\left(f_1\,\frac{S_2^2}{S_1^2}\ ;\quad \infty\right)$$

com

$$P\left(F(n-1,m-1)>f_1\right)=1-\alpha.$$

Seja

$$P\left(F(m-1,n-1)>a\right)=\alpha.$$

Assim

$$f_1=\frac{1}{a}.$$

Sempre proceda deste jeito. Perceba a inversão dos graus de liberdade.

Intervalo de confiança unilateral superior para σ_2^2/σ_1^2.

$$\left(0\ \ ;\ \ f_2\,\frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

com

$$P\left(F(n-1,m-1)>f_2\right)=\alpha.$$

4. Populações Dependentes:

   Seja

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2.$$

   Considere

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \quad e \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2}{n-1}.$$

   Intervalo de confiança unilateral inferior para μ_D .

$$\left(\bar{D} - z_\alpha \, \frac{s_D}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \infty\right),$$

   com

$$P(T_{n-1} > t_\alpha) = \alpha.$$

iv. Intervalo de confiança unilateral superior para μ_D

$$\left(-\infty \;\; ; \;\; \bar{D} + t_\alpha \;\; \frac{s_D}{\sqrt{n}}\right),$$

   com

$$P(T_{n-1} > t_\alpha) = \alpha.$$

5. Comparação de Proporções em duas populações independentes

$$X \sim Ber(p_1) \;\; , \; Y \sim Ber(p_2),$$

   independentes.

   Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X Fazendo

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$$\hat{p}_1 = \frac{S_1}{n} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right),$$

aproximadamente.

Seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de Y

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} Y_j.$$

$$\hat{p}_2 = \frac{S_2}{m} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right),$$

aproximadamente.

Como $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ são independentes temos

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2\ ,\ \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right),$$

aproximadamente.

A quantidade pivotal é dada por:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente.

Vamos trabalhar com outra quantidade pivotal dada por

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente.

O intervalo de confiança unilateral inferior é dado por $[l_i, 1]$:

com

$$l_i = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}.$$

O intervalo de confiança unilateral superior é dado por $[0, l_s]$:

$$l_s = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}},$$

com

$$P(Z > z_{\alpha}) = \alpha.$$