CC0303- Tópicos Especiais em Probabilidade

Convergência - 10/10/2023

Prof. Maurício Mota

Vamos enunciar os principais resultados sobre convergência estocástica usando o livro do Barry James.

Sejam $Y, Y_1, Y_2, \ldots,$ variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

1. Convergência em Probabilidade.

   Definição: Y_n converge para Y em probabilidade se para todo $\epsilon > 0$,

   $$P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

   Notação: $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

2. Convergência Quase Certa.

   Definição: Y_n converge para Y quase certamente se $P(Y_n \to Y \text{ quando } n \to \infty) = 1$, isto é, se o evento

   $$A_0 = \{w : Y_n(w) \to Y(w)\},$$

   é de probabilidade 1.

   Notação: $Y_n \xrightarrow{qc} Y$.

3. Convergência em Distribuição.

   Sejam $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias com, respectivamente, funções de distribuição $F, F_1, F_2, \ldots$. Dizemos que Y_n converge em distribuição para Y se quando $n \to \infty$

   $$F_n(y) \to F(y),$$

   para todo y ponto de continuidade de F.

   Notação: $Y_n \xrightarrow{D} Y$ ou $Y_n \xrightarrow{D} F$.

   Obs. 1: Também dizemos que Y_n converge em lei para Y e escrevemos $L(Y_n) \to L(Y)$.

   Obs.2: Uma maneira alternativa de se estudar convergência em distribuição é usar o seguinte resultado:

   $$Y_n \xrightarrow{D} Y$$

   se e somente se :

   $$\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t), \text{ para todo } t \in \mathbf{R}.$$

   Podemos usar a função geradora de momentos ou a função geradora de probabilidades.

4. Convergência em Média Quadrática (livro do Roussas).

   Dizemos que Y_n converge em média quadrática para Y quando $n \to \infty$ se:

   $$\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Y)^2] = 0.$$

   Notação: $Y_n \overset{mq}{\to} Y$ *ou* $Y_n \overset{L^2}{\to} Y$.

5. Relação entre os tipos de convergência.

   a. $X_n \overset{qc}{\to} X$ então $X_n \overset{P}{\to} X$.
   b. $X_n \overset{mq}{\to} X$ então $X_n \overset{P}{\to} X$.
   c. $X_n \overset{P}{\to} X$ então $X_n \overset{D}{\to} X$.

6. Teorema do Limite Central

   Sejam $, X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Sejam

   $$G_n(x) = P(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq x), \;\; e \;\; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

   Então $G_n(x) \to \Phi(x)$ quando $n \to \infty$.

7. Sejam $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que

   $$\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \overset{D}{\to} N(0,\ \sigma^2).$$

   Se $g(y)$ é uma função derivável no ponto μ, então:

   $$\sqrt{n}\ \ (g(Y_n) - g(\mu)) \overset{D}{\to} N(0,\ \sigma^2\ [g'(\mu)]^2).$$

8. Teorema de Slutsky:

   Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ e $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ tais que:

   $$X_n \overset{D}{\to} X \text{ e } Y_n \overset{D}{\to} c,$$

   onde c é uma constante.

   a. $X_n + Y_n \overset{D}{\to} X + c$.
   b. $X_n - Y_n \overset{D}{\to} X - c$.
   c. $X_n Y_n \overset{D}{\to} cX$.
   d. Se $c \neq 0$ e $P(Y_n \neq 0) = 1$ então $\dfrac{X_n}{Y_n} \overset{D}{\to} \dfrac{X}{c}$.

9. Fato Importante.

   Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias e g uma função real de variável real contínua. Então:

   a. $X_n \overset{qc}{\to} X$ então $g(X_n) \overset{qc}{\to} g(X)$.
   b. $X_n \overset{P}{\to} X$ então $g(X_n) \overset{P}{\to} g(X)$.
   c. $X_n \overset{D}{\to} X$ então $g(X_n) \overset{D}{\to} g(X)$.

10. Lema de Borel-Cantelli

    Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

    a. Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ então $P(A_n \ infinitas\ vezes) = 0$.
    b. Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes então $P(A_n \ infinitas\ vezes) = 1$.

11. Lei Fraca dos Grandes Números

    Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ e $S_1, S_2, \ldots$ as somas parciais, definidas por $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ que também são variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dizemos $X_1, X_2, \ldots$ satisfazem a lei fraca dos grandes números se

    $$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \overset{P}{\to} 0.$$

    Se as variáveis são identicamente distribuídas com $E(X_n) = \mu$ então:

    $$\bar{X} \overset{P}{\to} \mu.$$

12. Lei Forte dos Grandes Números

    Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ e $S_1, S_2, \ldots$ as somas parciais, definidas por $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ que também são variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dizemos $X_1, X_2, \ldots$ satisfazem a lei forte dos grandes números se

    $$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \overset{qc}{\to} 0.$$

    Se as variáveis são identicamente distribuídas com $E(X_n) = \mu$ então:

    $$\bar{X} \overset{qc}{\to} \mu.$$

    Com esses resultados na cabeça podemos resolver vários exercícios sobre convergência.