1 Distribuição F-Prof. Maurício-2021.2

1.1 Introdução

Uma das mais importantes distribuições usadas na Estatística Aplicada é a distribuição F de Snedecor que a descobriu em 1934 e homenageou Fisher dando o nome de distribuição F.

1.2 Definição

Uma variável aleatória contínua X é dita possuir distribuição F de parâmetros $m,\ m > 0,\quad$ e $n,\ n > 0$ se sua fdp é da forma:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\dfrac{m}{2})\,\Gamma(\dfrac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\frac{x^{\dfrac{m-2}{2}}}{\left[1+\dfrac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}}I_{(0,\infty)}(x) \tag{1}$$

Notação: $X \sim F\,(m, n)\,.$

Observação: Lê-se a notação acima do seguinte modo: *X segue distribuição F de parâmetros m e n.*

A f.d.p. de X também pode ser posta na forma:

$$f(x) = \frac{1}{Beta\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\frac{x^{(m-2)/2}}{\left[1+\dfrac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}}I_{(0,\infty)}(x) \tag{2}$$

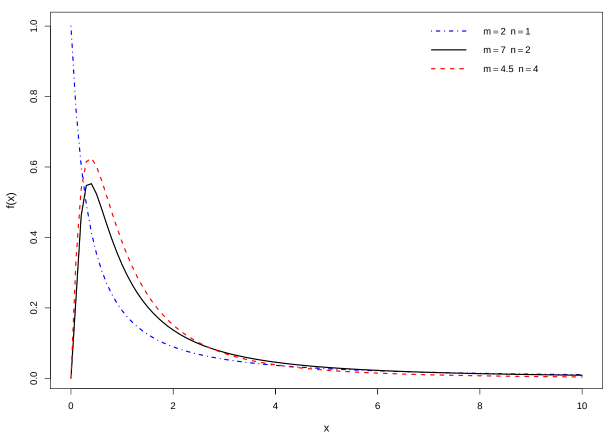

Figura 1: Gráfico da função densidade F

Na Figura 1, apresentamos a função densidade de probabilidade de (1) para certos valores de m e n.

1.3 Definição

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{\left[1+\frac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}} dx = 1$$

fazendo a mudança:

$$u = \frac{\frac{m}{n}x}{1+\frac{m}{n}x} \Rightarrow 1-u = \frac{1}{1+\frac{m}{n}x} \Rightarrow x = \frac{n}{m}\frac{u}{1-u} \Rightarrow dx = \frac{n}{m}\frac{du}{(1-u)^2}$$

Quando $x = 0$ tem-se $u = 0$ e para $x \to \infty$ tem-se $u \to 1$. Assim,

$$I = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^1 (\frac{n}{m})^{m/2-1} \frac{u^{m/2-1}}{(1-u)^{m/2-1}} (1-u)^{(m+n)/2} (n/m) \frac{du}{(1-u)^2},$$

depois de algum malabarismo algébrico tem-se:

$$I = \frac{(\frac{m}{n})^{m/2}(\frac{n}{m})^{m/2}}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{m/2-1}(1-u)^{n/2-1} du = \frac{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} = 1$$

Como $f(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$, então a expressão (2) é realmente uma fdp.

A f.d.p da $X \sim F(m, m)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+x]^m} I_{(0,\infty)}(x) \tag{3}$$

A f.d.p da $X \sim F(1,1)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x}\,(1+x)} I_{(0,\infty)}(x).$$

A f.d.p da $X \sim F(2,2)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} I_{(0,\infty)}(x).$$

A f.d.p da $X \sim F(3,3)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{8\sqrt{x}}{\pi(1+x)^3} I_{(0,\infty)}(x).$$

A f.d.p da $X \sim F(2,n)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{2+n}{2}\right)}{\Gamma(\dfrac{2}{2})\Gamma(\dfrac{n}{2})} (\frac{2}{n})^{2/2} \frac{1}{\left[1+\dfrac{2}{n}x\right]^{(2+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x) = \frac{1}{\left[1+\dfrac{2}{n}x\right]^{(2+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x).$$

A f.d.p da $X \sim F(2,1)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma(\dfrac{1}{2})\Gamma(\dfrac{1}{2})} (\frac{2}{1})^{2/2} \frac{1}{\left[1+\dfrac{2}{1}x\right]^{(2+1)/2}} I_{(0,\infty)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,[1+2x]^{3/2}} I_{(0,\infty)}(x).$$

1.4 Função de Distribuição da F(m,n)

A função de distribuição de $X \sim F(m,n)$ é dada por:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\dfrac{m}{2})\Gamma(\dfrac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{t^{\frac{m-2}{2}}}{\left[1+\dfrac{m}{n}t\right]^{(m+n)/2}} \; dt. \tag{4}$$

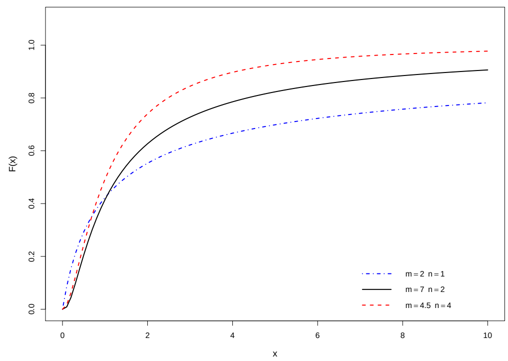

Figura 2: Gráfico da função densidade F

Vai-se utilizar R para se calcular as seguintes probabilidades:

a. $pa = P(F(5,10) \leq 3,48)$

```
> pa=pf(3.48,5,10);pa;round(pa,2)
[1] 0.95582
[1] 0.96
>
```

b. $pb = P(F(5,10) > 3,48)$

```
> pb=pf(3.48,5,10, lower.tail=F);pb;round(pb,2)
[1] 0.04417993
[1] 0.04
>
```

c. $pc = P(6,62 < F(10,5) < 23,48)$

```
> pc=pf(23.48,10,5)- pf(6.62,10,5);pc;round(pc,2)
[1] 0.02360601
[1] 0.02
>
```

Vai-se agora calcular alguns quantis da distribuição F usando o R.

a. $= P(F(10,12) \leq q_{95}) = 0,95$

```
> q_95=qf(0.95,10,12);q_95;round(q_95,2)
[1] 2.753387
[1] 2.75
>
```

b. $= P(F(10,12) \leq q_{75}) = 0,75$

```
> q_75=qf(0.75,10,12);q_75;round(q_75,2)
[1] 1.499621
[1] 1.5
```

1.5 Aparecimento

A distribuição F aparece na teoria estatística como a razão entre duas qui-quadrados independentes ponderadas pelos seus graus de liberdade. Assim se $U \sim \chi^2(m)$ e $V \sim \chi^2(n)$ e U e V independentes, então

$$X = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}} = \frac{n}{m}\,\frac{U}{V} \sim F(m,n).$$

Por isso o parâmetro m é chamado de graus de liberdade do numerador e o parâmetro n é chamado de graus de liberdade do denominador.

Prova:

Sabe-se que no caso em que U e V são contínuas, independentes e positivas a f.d.p. de $Y = U/V$ é dada por:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty z\; f_U(yz)\; f_V(z)\; dz,\;\; z > 0,$$

e a f.d.p. de $X = nY/m$ é dada por:

$$f_X(x) = \frac{m}{n}\int_0^\infty z\; f_V(z)\; f_U(z\frac{m}{n}x)\; dz,\;\; z > 0.$$

A f.d.p. de $W \sim \chi^2(k)$ é dada por

$$f(w) = \frac{1}{\Gamma(k/2)2^k} \; w^{k/2-1} e^{-w/2} I_{(0,\infty)}(w).$$

substituindo tem-se:

$$f_X(x) = \frac{m}{n} \int_0^{\infty} z \; \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} \; z^{n/2-1} \; e^{-z/2} \frac{1}{\Gamma(m/2)2^{m/2}} \; \left[\frac{m}{n}\right]^{m/2-1} \; x^{m/2-1} \; z^{m/2-1} \; e^{-\frac{m}{n} x\, z/2} dz,$$

dessa maneira:

$$f_X(x) = \frac{\left[\frac{m}{n}\right]^{m/2} x^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^{\infty} z^{(m+n)/2-1} \; e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n} x\right) z} dz,$$

finalmente usando o fato

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}, \tag{5}$$

tem-se:

$$f_X(x) = \frac{\left[\frac{m}{n}\right]^{m/2} x^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \frac{\Gamma((m+n)/2)2^{(m+n)/2}}{\left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{(m+n)/2}},$$

e portanto:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}}{Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{x^{(m-2)/2}}{\left[1 + \frac{m}{n} x\right]^{(m+n)/2}} \; I_{(0,\infty)}(x)$$

1.6 Transformações

Alguns casos de transformações da distribuição $X \sim F(m,n)$.

a. $Y = 1/X \sim F(n,m)$.

Prova:

Como $X = \dfrac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$, $U \sim \chi^2(m)$ e $V \sim \chi^2(n)$ e U e V independentes, então :

$Y = 1/X = \dfrac{\frac{V}{n}}{\frac{U}{m}}$; logo $Y = 1/X \sim F(n,m)$.

b. $Y = \dfrac{\frac{m}{n}X}{1+\frac{m}{n}X} \sim Beta(m/2, n/2)$.

Prova: Seja $F_Y(y)$ a função de distribuição de Y, assim,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{\frac{m}{n}X}{1+\frac{m}{n}X} \leq y\right),$$

aplicando-se propriedades de proporção tem-se:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{m}{n}X \leq \frac{y}{1-y}\right) = F_X\left(\frac{n}{m}\frac{y}{1-y}\right).$$

A f.d.p. de Y é dada pela seguinte derivada

$$f_Y(y) = \frac{1}{(1-y)^2} f_X\left(\frac{n}{m}\frac{y}{1-y}\right).$$

como $y = \dfrac{\frac{m}{n}x}{1+\frac{m}{n}x} \Rightarrow 1-y = \dfrac{1}{1+\frac{m}{n}x}$, assim,

$$f_Y(y) = \frac{1}{(1-y)^2}\frac{1}{Beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}(\frac{m}{n})^{m/2}(\frac{n}{m})^{m/2}(\frac{y}{1-y})^{(m-2)/2}(1-y)^{(m+n)/2}I_{(0,1)}(y),$$

simplificando se obtem:

$$f_Y(y) = \frac{1}{Beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}y^{m/2-1}(1-y)^{n/2-1}I_{(0,1)}(y)$$

que é a f.d.p. da $Beta(m/2, n/2)$.

c. Se $X \sim t - Student\ (r)$ então $Y = X^2 \sim F(1, r)$.

Prova: Como $X = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{r}}}$, $Z \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(r)$, Z e V independentes,

então:

$$Y = X^2 = \frac{Z^2}{\dfrac{V}{r}} = \frac{\dfrac{Z^2}{1}}{\dfrac{V}{r}} = F(1, r);$$

pois $Z^2 \sim \chi^2(1)$ e Z^2 e V são independentes.

d.. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ é uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória de $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com X e Y independentes. Então

$$F = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}{(m-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2}{(n-1)\sigma_2^2}} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(m-1, n-1).$$

Prova:

Sabe-se que

$$U = \frac{(m-1)\, S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$

e

$$V = \frac{(n-1)\, S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

com U e V independentes já que S_1^2 e S_2^2 são independentes, então a razão

$$F = \frac{\dfrac{U}{m-1}}{\dfrac{V}{n-1}} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(m-1, n-1).$$

1.7 Momentos

Se $X \sim F(m,n)$, então

$$E(X) = \frac{n}{n-2}, \; n > 2$$

e

$$Var(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \; n > 4.$$

Prova: Seja $Y \sim Gama(\alpha, \beta)$, a esperança de Y^{-r}, $r = 1, 2 \ldots$ é dada por

$$E(Y^{-r}) = \int_0^\infty y^{-r} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-r-1} e^{-\beta y} dy$$

Para $(\alpha - r) > 0$, isto é, $r < \alpha$ tem-se

$$E(Y^{-r}) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\beta^{\alpha-r}} = \frac{\Gamma(\alpha-r)\beta^r}{\Gamma(\alpha)}.$$

Quando $V \sim \chi^2(n) = Y \sim Gama(n/2, 1/2)$, $r < n/2$, isto é, $n > 2r$.
Assim:

$$E(V^{-r}) = \frac{\Gamma(n/2 - r)}{\Gamma(n/2) 2^r}, r = 1, 2, \ldots.$$

A esperança de X existe para $n > 2$ e desta maneira pela independência de U e V tem-se:

$$E(X) = E\left(\frac{n}{m}\frac{U}{V}\right) = \frac{n}{m}E(U)E(1/V),$$

usando que $E(U) = m$ e $E(1/V) = \dfrac{\Gamma(n/2-1)}{2\,\Gamma(n/2)} = \dfrac{1}{2(n/2-1)} = \dfrac{1}{n-2}$ chega-se

$$E(X) = \frac{n}{m}\ m\ \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}, n > 2.$$

É um fato surpreendente que a média da $F(m,n)$ só dependa do graus de liberdade do denominador.

A esperança de X^2 existe para $n > 4$ e como a independência de U e V garante independência de U^2 e V^2 tem-se:

$$E(X^2) = E(\frac{n^2}{m^2}\frac{U^2}{V^2}) = \frac{n^2}{m^2}E(U^2)E(1/V^2),$$

usando que

$$E(U^2) = Var(U) + E^2(U) = 2m + m^2$$

e

$$E\left(1/V^2\right) = \frac{\Gamma(n/2-2)}{2^2\,\Gamma(n/2)} = \frac{1}{4(n/2-1)(n/2-2)} = \frac{1}{(n-2)(n-4)}$$

chega-se

$$E(X^2) = \frac{n^2}{m^2}\ m(m+2)\ \frac{1}{(n-2)(n-4)} = \frac{(m+2)n^2}{m(n-2)(n-4)}, n > 4.$$

A variância de X é dada por:

$$Var(X) = \frac{(m+2)n^2}{m(n-2)(n-4)} - \left(\frac{n}{n-2}\right)^2 = \frac{(m+2)n^2(n-4) - mn^2(n-4)}{m(n-2)^2(n-4)},$$

$$Var(X) = \frac{n^2\,(mn - 2m + 2n - 4 - mn + 4m)}{m(n-2)^2(n-4)},$$

logo,

$$Var(X) = \frac{2n^2\,(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4.$$

O r-ésimo momento em relação à origem de $X \sim F(m,n)$ é dado por:

$$E\left(X^r\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+r)\Gamma(\frac{n}{2}-r)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \quad , \quad r = 1, 2, 3, \ldots, n > 2r.$$

O coeficiente de variação da $F(m,n)$ é dado por:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \left[\frac{2(m+n-2)}{m(n-4)}\right]^{1/2}, n > 4.$$

O coeficiente de assimetria da $F(m,n)$ é dado por:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{(2m+n-2)[8(n-4)]^{1/2}}{m^{1/2}(n-6)(m+n-2)^{1/2}}, \quad m > 6.$$

O coeficiente de curtose da $F(m,n)$ é dado por:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} =$$

1.8 Moda da F(m,n)

A moda da $F(m,n)$ é dada por $M_o = \dfrac{n\ (m-2)}{m\ (n+2)}, m > 2.$

Prova: A maximização da f.d.p de $X \sim F(m,n)$ envolve não apenas descartar os fatores constantes da densidade mas maximizar a função

$$h(x) = \ln \frac{x^{(m-2)/2}}{\left[1 + \frac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}} = \frac{m-2}{2}\ln x - \frac{m+n}{2}\ln(1+\frac{m}{n}x).$$

A derivada de $h(x)$ é dada por:

$$h'(x) = \frac{m-2}{2x} - \frac{(m+n)\frac{m}{n}}{2(1+\frac{m}{n}x)}$$

Igualando a derivada $h'(x) = 0$ tem-se:

$$\frac{m-2}{2x} = \frac{(m+n)\frac{m}{n}}{2(1+\frac{m}{n}x)},$$

após uma pequena munipulação tem-se:

$$\frac{m-2}{m+n} = \frac{\frac{m}{n}x}{(1+\frac{m}{n}x)},$$

aplicando-se propriedades de proporção obtem-se:

$$\frac{m-2}{m+n-m+2} = \frac{m-2}{n+2} = \frac{\frac{m}{n}x}{(1+\frac{m}{n}x)-\frac{m}{n}x} = \frac{m}{n}x,$$

logo a moda de X é

$$Mo = \frac{n\ (m-2)}{m\ (n+2)}, m > 2$$

pois a derivada segunda de $h(x)$

$$h''(x) = -\frac{m-2}{2x^2} + \frac{(m+n)(\frac{m}{n})^2}{2(1+\frac{m}{n}x)^2}$$

no ponto $x = \frac{n\ (m-2)}{m\ (n+2)}$ vale

$$h''(x) = (n+2)^2(\frac{m}{n})^2\ [-\frac{1}{2} + \frac{1}{m+n}] < 0, m > 2.$$

1.9 Exercícios

1. A expressão $f_{\alpha;m,n}$ significa $P(F(m,n) > f_{\alpha;m,n}) = \alpha$, isto é, $f_{\alpha;m,n}$ é o quantil de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição $F(m,n)$. Obtenha ou calcule as seguintes probabilidades:

   a. $f_{0,05;5,8}$
   b. $f_{0,05;8,5}$
   c. $f_{0,95;5,8}$
   d. $f_{0,95;8,5}$
   e. O nonagésimo nono percentil da distribuição F com m=10 e n=12.
   f. O primeiro percentil da distribuição F com m=10 e n=12.
   g. $P(F(6,4) \leq 6,16)$.
   h. $P(0,177 \leq F(10,5) \leq 4,74)$.

2. Forneça um limite para as probabilidades pedidas e compare com o valor real fornecido pelo R:

   a. $P(F(5,10) \geq 4,75)$.
   b. $P(F(5,10) \geq 2)$.
   c. $2 \times \min\left[P(F(5,10) \leq 5,64), P(F(5,10) \geq 5,64)\right]$.
   d. $P(F(5,10) \leq 0,02)$.
   e. $P(F(35,20) \geq 3,24)$.

3. Da população $X \sim N(50,100)$ retirou-se uma amostra casual de $m = 10$. Da população $Y \sim N(60,100)$ retirou-se uma amostra casual de $n = 6$ independente da primeira. Obtemos as variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2, respectivamente. Encontre:

   a. o valor de a tal que $P\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} < a\right) = 0,95$.
   b. o valor de b tal que $P\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} > b\right) = 0,95$.

4. Uma das maneiras de medir o grau de satisfação dos empregados de uma mesma categoria quanto à política salarial é por meio do desvio padrão de seus salários. A fábrica A diz ser mais coerente na política salarial do que a fábrica B. Para verificar essa afirmação, sorteou-se uma amostra de 10 funcionários não especializados de A, e 15 de B, obtendo-se os desvios padrões $s_A = 1000$ reais e $s_B = 1600$ reais. Qual seria a sua conclusão?

5. Deseja-se comparar a qualidade de um produto produzido por duas fábricas. Essa qualidade será definida pela uniformidade com que o produto é produzido em cada fábrica. Tomaram-se duas amostras, uma de cada fábrica, medindo-se o comprimento dos produtos (o resumo dos resultados está no quadro apresentado). A qualidade das duas fábricas é a mesma? Caso sua resposta seja negativa, dê um intervalo de confiança para indicar a intensidade dessa desigualdade.

Estatísticas	Fábrica A	Fábrica B
Amostra	21	17
Média	21,15	21,12
Variância	0,0412	0,1734

6. Seja $X \sim F(n, n)$. Mostre que a mediana de X é 1.

7. Seja $X \sim F(m, n)$. Mostre que a f.d.p. de $Y = mX$ converge para a f.d.p. de uma $\chi^2(m)$ quando $n \longrightarrow \infty$.

8. Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória de tamanho 2 de $X \sim EXP(1/2)$. Usando resultados das distribuições qui-quadrado e F , ache a distribuição de $Y = X_1/X_2$?

9. Seja $X_i \sim N(i, i^2)$, $\quad i = 1, 2, 3$. Suponha que as variáveis sejam independentes. Usando somente as variáveis X_1, X_2 e X_3 dê um exemplo de uma estatística que uma distribuição amostral:

   a. $\chi^2(3)$.
   b. $F(1, 2)$.
   c. $t(2)$.

10. Sejam $X_i \sim N(0, 1)$, $\quad i = 1, 2$. Sem usar a noção de Jacobiano identifique a distribuição de:

    a. $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$.
    b. $(X_2 + X_1)^2/(X_2 - X_1)^2$.
    c. $(X_2 + X_1)/|(X_2 - X_1)|$.
    d. $1/Z$ se $Z = X_1^2/X_2^2$.

11. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0,1)$. Defina:

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} \quad \text{e} \quad \bar{X}_{n-k} = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} X_i}{n-k}.$$

Identifique a distribuição de:

a. $(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})/2)$.

b. $k\ \bar{X}_k^2 + (n-k)\ \bar{X}_{n-k}^2$.

c. X_1^2/X_n^2.

d. X_1/X_n.

e. $X_1/|X_n|$.

12. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Defina:

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} \quad , \quad \bar{X}_{n-k} = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} X_i}{n-k}, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

$$S_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(X_i - \bar{X}_k\right)^2}{k-1} \quad , \quad S_{n-k}^2 = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_{n-k}\right)^2}{n-k-1} \quad , \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}.$$

Identifique a distribuição de:

a. $(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})/2$.

b. $[(k-1)\ S_k^2 + (n-k-1)\ S_{n-k}^2]/\sigma^2$.

c. $\sigma^{-2}(X_i - \mu)^2$.

d. S_k^2/S_{n-k}^2.

e. $\sqrt{n}\ (\bar{X} - \mu)/S$.

13. Sejam Z_1, Z_2 uma amostra aleatória de $X \sim N(0,1)$ e X_1, X_2 uma amostra aleatória de $X \sim N(1,1)$. Suponha independência entre Z_1, Z_2 e X_1, X_2. Qual a distribuição amostral de:

a. $\bar{X} + \bar{Z}$?

b. $\dfrac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{\dfrac{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}{2}}}$?

c. $[(X_1 - X_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]/2$?

d. $(X_2 + X_1 - 2)^2/(X_2 - X_1)^2$?

14. Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 e Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 duas amostras aleatórias independentes da mesma $N(\mu, \sigma^2)$. Para qual valor de k a variável

$$W = \frac{k(\bar{X} - \bar{Y})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2 + \sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

tem uma distribuição F.

15. Sejam X,Y e Z são independentes normalmente distribuidas com $E(X) = 2$, $E(Y) = 1$, $E(Z) = 2$ e variância comum σ^2. Seja

$$W = c\left[\frac{4(X-2)^2}{(Y-1)^2 + (Z-2)^2}\right].$$

Para que valor de c, $W \sim F(1, 2)$.

16. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_9$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, 4)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_8$ uma amostra aleatória de $Y \sim N(0, 9)$. Calcule:

$$p = P\left(\frac{8,2\displaystyle\sum_{i=1}^{9} X_i^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{8} Y_j^2} < 1\right).$$