CC0303 - Tópicos Especiais de Probabilidade

Somatórios e Produtórios-Formulário - 10/08/2023

Prof. Mauricio Mota

Durante o período de agosto a dezembro vamos precisar:

1. Progressão Aritmética: a_1, primeiro termo, e razão r.

   a. termo geral :
   $$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

   b. Soma dos n primeiros termos:
   $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

2. Progressão Geométrica: a_1, primeiro termo, e razão $q \neq 1$.

   a. termo geral :
   $$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

   b. Soma dos n primeiros termos:
   $$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

   c. Soma dos elementos em uma PG infinita de primeiro termo a_1 e razão q com $|q| < 1$,
   $$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

3. Função Gama

   Se $a > 0$
   $$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx.$$

   Propriedades:

   a. $\Gamma(n) = (n-1)!$

   b. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

   c. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

   d. Se $0 < a < 1$, $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{sen(\pi a)}$,

   e. Integral da Gama Generalizada. Se $a > 0, b > 0, c > 0$
   $$IGG(a,b,c) = \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-bx^c}\, dx = \frac{\Gamma(a/c)}{c\, b^{a/c}}.$$

4. Função Beta

   Se $a > 0, b > 0$

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx.$$

   Propriedades:

   a. $B(a,b) = B(b,a)$.
   b. $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
   c. $\int_0^{\pi/2}[sen(\theta)]^{2m-1}[cos(\theta)]^{2n-1}d\theta = \dfrac{Beta(m,n)}{2}$.

5. Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i}.$$

   Propriedades:

   a. Se $a = x$ e $b = 1$
$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$
   b. Se $x = 1$ em a
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$
   c. Se $x = -1$ em a
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$
   d. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i} \binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n.}$

6. Somatórios:

   a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
   b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
   d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
   e. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a},\ |a| < 1$.
   e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} ia^{i-1} = \frac{1}{(1-a)^2},\ |a| < 1$.

f. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i} = -ln(1-a), \;\; 0 < a < 1.$

g. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

h. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}.$

7. Expansão em Série de Taylor em torno da origem:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(0)\, \frac{x^i}{i!},$$

em que $f^{(0)}(0) = f(0)$ e $f^{(i)}(0), \; i \geq 1$
é a i-ésima derivada de $f(x)$ calculada no ponto $x = 0$.
Algumas expansões importantes:

a. $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$

b. $(1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1}\, x^i.$

c. Para $-1 < x \leq 1$

$$ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\, \frac{x^i}{i}.$$

8. Número de Permutações Caóticas

   Sejam as permutações dos naturais $1, 2, \ldots, n$. Seja

   D_n, o número de permutações caóticas , isto é, nenhum dígito ocupa seu lugar natural é dado por:

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

9. Aproximação de Stirling para $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n},$$

   onde o sinal $\sim$ é usado para indicar que o quociente de um lado pelo outro converge a um quando $n \to \infty$.

   Vamos usar o pacote R para entender esta aproximação.

```
> n=1:12
>
> fatn=factorial(n)
>
> stirling=sqrt(2*pi)*n^(n+1/2)*exp(-n)
>
> errel=(fatn-stirling)/fatn
>
> tab=cbind(n,fatn,stirling,errel)
>
>
>
>
> round(tab,2)
n      fatn     stirling errel
[1,]  1         1         0.92  0.08
[2,]  2         2         1.92  0.04
[3,]  3         6         5.84  0.03
[4,]  4        24        23.51  0.02
[5,]  5       120       118.02  0.02
[6,]  6       720       710.08  0.01
[7,]  7      5040      4980.40  0.01
[8,]  8     40320     39902.40  0.01
[9,]  9    362880    359536.87  0.01
[10,] 10   3628800   3598695.62  0.01
[11,] 11  39916800  39615625.05  0.01
[12,] 12 479001600 475687486.47  0.01
>
> ####Percebam que o erro relativo diminui!!!!!!!
>
```

10. a. $\prod_{j=1}^{n} j = n!$. (produto dos n primeiros naturais)

  b. $\prod_{j=1}^{n} j^2 = (n!)^2$. (produto dos quadrados dos n primeiros naturais)

  c. $\prod_{j=1}^{n} (2j-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. (produto dos n primeiros naturais ímpares)

  d. $\prod_{j=1}^{n} 2j = 2^n n!$. (produto dos n primeiros naturais pares)

  e. $\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n!}$. (produto dos inversos dos n primeiros naturais)

  f. $\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{(n!)^2}$. (produto dos inversos dos quadrados n primeiros naturais)

11. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $f(x)$. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X, isto é, as variáveis são independentes e identicamente distribuídas. A distribuição conjunta da amostra é definida por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f(x_i).$$

Calcule a distribuição conjunta da amostra no caso:

  a. Poisson de parâmetro θ, isto é,

$$f(x) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^x}{x!}, \quad A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

  b. Geométrica de parâmetro p, isto é,

$$f(x) = p(1-p)^x, \quad A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

  c. Uniforme de parâmetro N, isto é,

$$f(x) = \frac{1}{N}, \quad A = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

12. Suponha que a função de probabilidade da questão anterior dependa de um único parâmetro desconhecido θ. A distribuição conjunta da amostra pensada como função de θ é chamada de função de verossimilhança e é definida por:

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_i).$$

Às vezes precisamos calcular o logaritmo neperiano da função de de verossimilhança. Ele é calculado como:

$$l(\theta) = \log(L(\theta)) = \log\left(\prod_{j=1}^{n} f(x_i\ \theta)\right) = \sum_{j=1}^{n} \log(f(x_i\ \theta)).$$

Calcule estas funções na questão anterior.