

CC0288 - Inferência Estatística I

Primeira Verificação de Aprendizagem - 24/03/2023.

Prof. Maurício

1. (Valor 3 pontos) Seja X uma única variável aleatória com distribuição de Bernoulli com parâmetro θ . Sejam

$$\hat{\theta}_1 = X \quad e \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}.$$

- Escreva a função de probabilidade de X . Identifique seu suporte, espaço paramétrico, sua média e variância.
 - Verifique se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viciados para θ .
 - Compare os erros quadráticos médios dos dois estimadores. Faça um gráfico deles como função de θ .
2. (Valor 2 pontos) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de X com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Sejam

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad e \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

- Mostre que \bar{X} é um estimador não viciado para μ e que sua variância é dada por $\frac{\sigma^2}{n}$.
 - Mostre que S^2 é um estimador não viciado para σ^2 .
3. (Valor 5 pontos) Seja $X \sim Gama(3, \theta)$.

- Mostre que

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^3}{2} x^2 e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Identifique seu suporte e espaço paramétrico.

- Mostre que

$$\log(f(x|\theta)) = [c(\theta)T(x) + d(\theta) + b(x)] I_A(x),$$

e A não depende de θ . Identifique cada componente.

- Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de X . Qual a distribuição conjunta da amostra?
- Qual a função de verossimilhança de θ ?
- Qual a lei de $S = \sum_{i=1}^n X_i$? Baseado em S proponha um estimador não viciado para $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

4. (Valor 1 ponto) Mostre que entre os estimadores lineares não viciados para $E(X) = \mu$ baseado em uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n $T = \bar{X}$ tem a menor variância. ,