1 Distribuição de Weibull-Prof. Maurício-23.1

A distribuição de Weibull foi introduzida pelo físico sueco Waloddi Weibull em 1939. Segundo o Portal Action Weibull estudou o tempo de falhas devido a fadiga de metais e é frequentemente usada para descrever o tempo de vida de produtos industriais. Ela descreve adequadamente a vida de mancais, componentes eletrônicos, cerâmicas, capacitores e dielétricos. A sua popularidade em aplicações práticas deve-se ao fato dela apresentar uma grande variedade de formas devido a sua função de taxa de falhas.

Vamos apresentar o Exemplo 2.1 da apostila de Confiabilidade do Portal Action para que o aluno perceba a necessidade de se estudar este tipo de Modelagem.

Uma válvula de acionamento da ventoinha é avaliada com relação a seu tempo de vida. O fabricante submete várias válvulas a testes onde seu funcionamento é acelerado para obter informações sobre a confiabilidade do produto. Um tipo comum de teste é aquele em que a válvula é colocada em um tanque de água, que é aquecido e resfriado acelerando o funcionamento da válvula. Estima-se que 30.000 ciclos (Um ciclo corresponde ao ato de abrir e fechar a válvula) equivalem a 10 anos de uso em condições normais . Considere a situação em que um lote de 30 mecanismos foi colocado em teste. O teste consiste em deixá-los em funcionamento de até 50.000 ciclos e registrar , para cada mecanismo, o número de ciclos que ele completou até falhar. Após o teste 18 mecanismos haviam falhado antes de completar 50.000 ciclos e o restante continuava funcionando. Os dados obtidos foram:

A notação 50000+ significa que o tempo de vida da válvula é maior do que 50000 ciclos. Dizemos que a observação foi censurada à direita de 50000.

A partir desses dados o fabricante gostaria de responder as seguintes perguntas:

a. Qual o número médio de ciclos completados até a falha deste mecanismo?

b. Os fabricantes conferem dois anos de garantia ao seu produto e sabem que o número médio de ciclos de funcionamento do produto no período é de 6000 ciclos. Qual a fração de defeituosos nos primeiros dois anos?

c. Qual o número de ciclos no qual 10% dos produtos estarão fora de operação?

Agora vamos estudar com detalhes a distribuição de Weibull.

1.1 Função Densidade de Probabilidade

Definição. Uma variável aleatória X é dita possuir distribuição de Weibull com parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ se sua fdp é da forma:

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}I_{(0,\infty)}(x). \tag{1}$$

Notação: $X \sim Weibull(a, b)$.

O suporte da distribuição é $A = (0, \infty)$ e o espaço paramétrico

$$\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty),$$

e vamos mostrar agora que **(1)** é uma legítima função densidade de probabilidade a seguir. Note que

1. $f(x) \geq 0$ (omitiremos a demonstração, mas exercite!); e
2. $\int_0^\infty abx^{b-1}e^{-ax^b}dx = 1$.

Prova. Fazendo a mudança $u = ax^b$ tem-se $du = abx^{b-1}dx$. Logo

$$\int_0^\infty abx^{b-1}e^{-ax^b}dx = \int_0^\infty e^{-u}du = \Gamma(1) = 1 \quad \square$$

Poderíamos ter usado a Gama Generalizada com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$:

$$IGG(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\gamma}dx = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)}{\gamma \ \beta^{\alpha/\gamma}}.$$

Logo,

$$I = ab\, IGG(b, a, b) = ab\, \frac{\Gamma(1)}{b\ a} = 1.$$

Na Figura 1, apresentamos o gráfico da *fdp* da Weibull para certos valores de a e b.

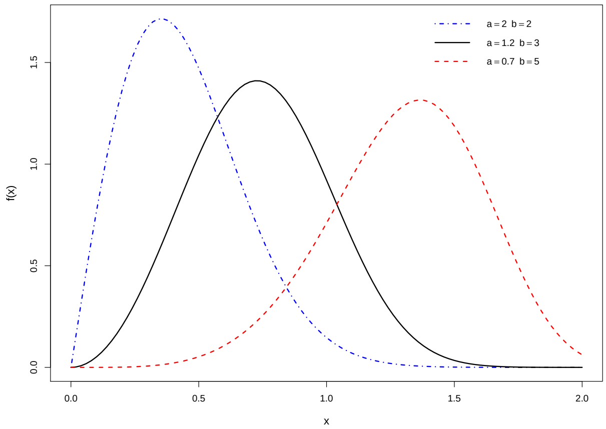

Figura 1: Gráfico da função densidade Weibull

Comentário 1. Em alguns livros a distribuição de Weibull é dada por

$$f_X(x) = \frac{d}{c}\left(\frac{x}{c}\right)^{d-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^d} I_{(0,\infty)}(x).$$

Que comparando com a nossa definição (Mood) tem $c = a^{-1/b}$ e $d = b$. Esta parametrização é a mesma do pacote `stats::dweibull` do software livre `R` do qual utilizamos para criar os gráficos desse trabalho.

1.2 Casos Particulares

Comentário 2. Se $b = 1$ a distribuição de Weibull se reduz a distribuição Exponencial de parâmetro a, pois

$$f(x) = a.1x^{1-1}e^{-ax^1}I_{(0,\infty)}(x) = ae^{-ax}I_{(0,\infty)}(x)$$

Comentário 3. Quando $a = \frac{1}{2\beta^2}$ e $b = 2$, a distribuição de Weibull é conhecida como dstribuição de Rayleigh com parâmtro $\beta > 0$. Portanto, sua fdp é dada por

$$f_X(x) = \frac{x}{\beta^2}e^{\frac{-x^2}{2\beta^2}}I_{(0,\infty)}(x).$$

Notação: $X \sim Rayleigh\,(\beta)$

1.3 Moda "M_o"

A moda de $X \sim W(a,b)$ é dada por

$$M_o = \left[\frac{b-1}{ab}\right]^{\frac{1}{b}} \text{ se } b > 1$$

Prova

$$\begin{aligned}
f(x) &= abx^{b-1}e^{-ax^b} \\
g(x) &= \ln\left[f(x)\right] \\
&= \ln ab + (b-1)\ln x - ax^b \\
g'(x) &= \frac{b-1}{x} - abx^{b-1} \\
g''(x) &= \frac{-(b-1)}{x^2} - ab(b-1)x^{b-2} \\
g''(x) &< 0, \text{ se } \quad b > 1
\end{aligned}$$

Assim, $g'(M_o) = 0$

$$\frac{b-1}{M_o} = ab(M_o)^{b-1} \Rightarrow b-1 = ab(M_o)^b$$

$$(M_o)^b = \frac{b-1}{ab} \Rightarrow M_o = \left[\frac{b-1}{ab}\right]^{\frac{1}{b}}$$

Portanto,

$$M_o = \left[\frac{b-1}{ab}\right]^{\frac{1}{b}}, \text{ se } b > 1$$

1.4 Função de Distribuição e Função de Sobrevivência

Colocar os gráficos de F e S para as densidades.

A função de distribuição (fd) de $X \sim W(a,b)$ é definida por

$$F(x) = [1 - e^{-ax^b}]I_{(0,\infty)}(x)$$

Prova. Fazendo a mesma mudança anterior $u = at^b$

$$F(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \int_0^x abt^{b-1}e^{-at^b}dt = \int_0^{ax^b} e^{-u}du = 1 - e^{-ax^b} \quad \square$$

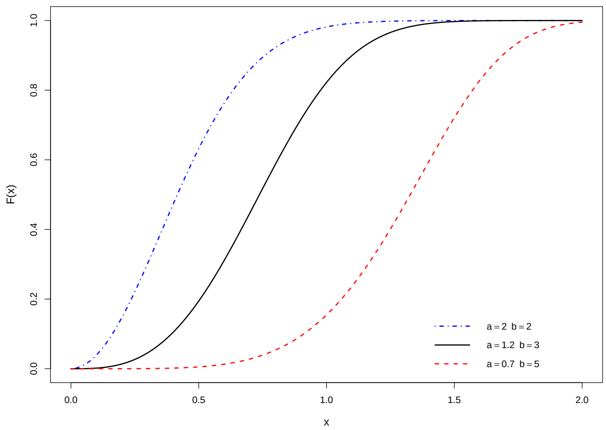

Figura 2: Gráfico da função de distribuição Weibull

A função de Sobrevivência de X é dada por

$$S(x) = I_{(-\infty,0)}(x) + e^{-ax^b}I_{(0,\infty)}(x)$$

já que a sobrevivência é o complementar da função de distribuição.

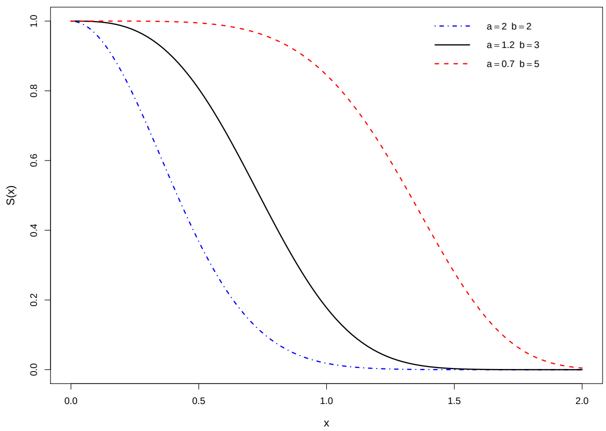

Figura 3: Gráfico da função de sobrevivência Weibull

1.5 Quantil de ordem q.

O q-ésimo quantil, x_q, da distribuição de Weibull é dado por

$$x_q = \left[\frac{-\ln(1-q)}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$$

Prova.

$$F(x_q) = q \;\Rightarrow\; 1 - e^{-ax_q^b} = q \;\Rightarrow\; e^{-ax_q^b} = 1 - p$$

$$\Rightarrow\; -ax_q^b = \ln(1-q) \;\Rightarrow\; x_q^b = \frac{-\ln(1-q)}{a} \; x_q = \left[\frac{-\ln(1-q)}{a}\right]^{\frac{1}{b}} \quad \square$$

Assim, a mediana de X será

$$x_{0,5} = \left[\frac{\ln 2}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$$

O primeiro quartil será

$$x_{0,25} = \left[\frac{-\ln 0,75}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$$

O terceiro quartil será

$$x_{0,75} = \left[\frac{\ln 4}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$$

Comentário 4. A distribuição de Weibull é utilizada geralmente para descrever o tempo de vida de materiais. O ponto $x_0 = a^{-\frac{1}{b}}$ é conhecido como um tempo de vida característico do material analisado pois

$$\mathbb{P}(X \le x_0) = 1 - e^{-a\left[a^{-\frac{1}{b}}\right]^b} = 1 - e^{-aa^{-1}} = 1 - e^{-1} = 0,632 \approx 0,63$$

Assim, $a^{-\frac{1}{b}}$ é o percentil de ordem 63 da distribuição.

1.6 Momento de ordem r em relação à origem.

O r-ésimo momento em relação à origem de $X \sim W(a,b)$ é dado por

$$\mu'_r = E[X^r] = a^{-\frac{r}{b}}\Gamma\left(1 + \frac{r}{b}\right)$$

Prova

$$E\left[X^r\right]=\int_0^\infty x^r abx^{b-1}e^{-ax^b}dx=\int_0^\infty x^r e^{-ax^b}abx^{b-1}dx$$

fazendo a mesma mudança anterior tem-se

$u=ax^b \;\Rightarrow\; x^b=\frac{u}{a} \;\Rightarrow\; x=\frac{u^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{1}{b}}} \;\Rightarrow\; x^r=\frac{u^{\frac{r}{b}}}{a^{\frac{r}{b}}}$

Logo

$$E\left[X^r\right]=\int_0^\infty \frac{u^{\frac{r}{b}}}{a^{\frac{r}{b}}}e^{-u}du=\frac{1}{a^{\frac{r}{b}}}\Gamma\left(1+\frac{r}{b}\right)=a^{-\frac{r}{b}}\Gamma\left(1+\frac{r}{b}\right)$$

Assim

$$E\left(X\right)=a^{-\frac{1}{b}}\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)$$

$$E\left[X^2\right]=a^{-\frac{2}{b}}\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)$$

$$E\left[X^3\right]=a^{-\frac{3}{b}}\Gamma\left(1+\frac{3}{b}\right)$$

$$E\left[X^4\right]=a^{-\frac{4}{b}}\Gamma\left(1+\frac{4}{b}\right)$$

1.7 Momentos Centrais de Ordem $r=2,3,4$.

A variância de $X\sim W\left(a,b\right)$ é dada por

$$V\left(X\right)=a^{-\frac{2}{b}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right].$$

Prova

$$\begin{aligned}
V\left(X\right) &= E\left[X^2\right]-E^2\left(X\right)\\
&= a^{-\frac{2}{b}}\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\left[a^{\frac{1}{b}}\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]^2\\
&= a^{\frac{-2}{b}}\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-a^{\frac{-2}{b}}\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\\
&= a^{\frac{-2}{b}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]
\end{aligned}$$

O terceiro momento central é dado por

$$\mu_3 = a^{-\frac{3}{b}}\left[\Gamma\left(1+\frac{3}{b}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right) - \Gamma^3\left(1+\frac{1}{b}\right)\right].$$

O quarto momento central é dado por

$$\mu_4 = a^{-\frac{4}{b}}\left[\Gamma\left(1+\frac{4}{b}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{3}{b}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right) + 6\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right) - 3\Gamma^4\left(1+\frac{1}{b}\right)\right].$$

O coeficiente de Assimetria é dado por:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

O coeficiente de Curtose é dado por:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

1.8 Transformação da Weibull para Exponencial.

Se $X \sim W(a,b)$ então $Y = aX^b \sim Exp(1)$
Prova

Como $x > 0$ e $a > 0$, $y > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= I\!P(Y \leq y) = I\!P\left(aX^b \leq y\right) \\ &= I\!P\left[X \leq \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] = F_X\left(\frac{y^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{1}{b}}}\right) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \frac{1}{a^{\frac{1}{b}}}\frac{1}{b}y^{\frac{1}{b}-1}ab\left[\frac{y^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{1}{b}}}\right]^{b-1} e^{-y} \\ &= \frac{ab}{a^{\frac{1}{b}}ba^{\frac{b-1}{b}}}y^{\frac{1}{b}-1}y^{\frac{b-1}{b}} = \frac{ab}{ab}y^0e^{-y} = e^{-y} \end{aligned}$$

Desse modo

$$f_Y(y) = e^{-y}I_{(0,\infty)}(y)$$

Portanto $Y \sim Exp(1)$

1.9 Transformação da Weibull para Gumbel.

Se $X \sim W(a, b)$ então $Y = -\ln X$ tem distribuição Gumbel de parâmetros $\alpha = \frac{\ln a}{b}$ e $\beta = \frac{1}{b}$

Prova

Se $Y \sim Gumbel\,(\alpha, \beta)$, pelo Mood temos:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{-(y-\alpha)}{\beta}} e^{-e^{-\frac{(y-\alpha)}{\beta}}}\ ,\ \forall y \in I\!R$$

Assim

$$\frac{y-\alpha}{\beta} = \frac{y - \frac{\ln a}{b}}{\frac{1}{b}} = b\left(y - \frac{\ln a}{b}\right) = by - \ln a$$

Desse modo

$$e^{\frac{-(y-\alpha)}{\beta}} = e^{-(by-\ln a)} = e^{-by} e^{\ln a} = a e^{-by}$$

Logo

$$f_Y(y) = bae^{-by} e^{-ae^{-by}} = abe^{-by} e^{-ae^{-by}}\ ,\ \forall y \in I\!R$$

Fazendo agora a transformação de varariáveis pela fd teremos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= I\!P(Y \leq y) = I\!P(-\ln X \leq y) = I\!P(\ln X \geq -y) \\ &= I\!P\left(X \geq e^{-y}\right) = 1 - F_X(e^{-y}) \end{aligned}$$

Desse modo, ao derivarmos para encontrar a fdp de X teremos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= e^{-y} f_X(e^{-y}) = e^{-y} ab \left[e^{-y}\right]^{b-1} e^{-a\left[e^{-y}\right]^b} \\ &= abe^{-by} e^{-a\left[e^{-by}\right]} \end{aligned}$$

Que é a densidade de $Y \sim Gumbel\left(\alpha = \frac{\ln a}{b}, \beta = \frac{1}{b}\right)$

1.10 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos de $X \sim W(a, b)$ é definida por

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} a^{\frac{-r}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{r}{b}\right)$$

Prova

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = E\left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tX)^r}{r!}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} E\left[\frac{(tX)^r}{r!}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} E\left[X^r\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} a^{\frac{-t}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{t}{b}\right) \end{aligned}$$

A função geradora de momentos de $Y = \ln X$ é definida por

$$M_Y(t) = a^{\frac{-t}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{t}{b}\right)$$

Prova

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t\ln X}\right] = E\left[e^{\ln X^t}\right] \\ &= E\left[X^t\right] = a^{\frac{-t}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{t}{b}\right) \end{aligned}$$

1.11 Exemplo 1

Um componente eletrônico tem duração de vida, em horas, que segue uma distribuição de Weibull com parâmetros $a = 10^{-12}$ e $b = 4$. Responda ao que se pede:

a. Qual a vida média, a moda, o desvio padrão e a mediana de X

b. Qual a confiabilidade desse componente para um período de 500 horas? E para 1500 horas?

c. Se quisermos repor 10% das peças para efeito de garantia até onde deve ser a mesma?

d. Qual é o lucro esperado se a variável assume os valores $-L_1$ se $X \leq 500$, L_2 se $500 < X \leq 1500$ e L_3 se $X > 1500$?

Solução: Vamos fazer utilizando o R.
item a:

```
> ###Notação nossa:f(x)=abx^{b-1} exp[-ax^b]I_A(x), A=(0,\infty)
>
> ##Notação do R: f(x)=[c/d^c] x^{d-1} exp[-(1/d^c)x^d]\;I_A(x), A=(0,\infty)
>
> ##Assim d=b e    c=a^{-1/b}.
>
> a=10^(-12); b=4
>
> d=b;d
```

```
[1] 4
> c=a^(-1/b);c
[1] 1000
>

> ###Qual a vida média de X?
>
>
> EX=a^(-1/b)*gamma(1+1/b);EX ####E(X)=906,4025 horas.
[1] 906.4025
>
> ###Calcule E(X^2)
>
> EX2=a^(-2/b)*gamma(1+2/b);EX2 ####E(X^2)=886226.9 horas^2.
[1] 886227
>
>
> ###Calcule a Variância e o Desvio Padrão de X.
>
> VX=EX2-EX^2;VX ####V(X)=64661,48 horas^2
[1] 64661.48
> sigma=sqrt(VX);sigma
[1] 254.2862
>
>
>
>
> #####Qual a moda de X?,
>
> b>1
[1] TRUE
>
> M_o=( (b-1)/(a*b))^(1/b);M_o
[1] 930.6049
>
> p=0.5
> Q_2= (-log(1-p)/a)^(1/b);Q_2
[1] 912.4443
>
>
> qweibull(0.50,d,c) ####
```

```
[1] 912.4443
>
```

item b: A função de sobrevivência $S(x) = P(X > x) = e^{-ax^b}$, $x > 0$ também é chamada de função de Confiabilidade $C(x)$. Assim devemos calcular $S(500)$ e $S(1500)$. Usando o R temos:

```
>
> t=500
> C500=exp(-a*t^b);C500
[1] 0.939413
>
> ###Utilizando o R
> 1-pweibull(t,d,c) ####Analise com cuidado!!!!!!!!
[1] 0.939413
>
>
>
> t=1500
> C1500=exp(-a*t^b);C1500
[1] 0.006329715
>
> ###Utilizando o R
>
>
> 1-pweibull(t,d,c) ####Analise com cuidado!!!!!!!!
[1] 0.006329715
>
```

item c. Devemos encontrar o promeiro decil da distribuição pois o fabricante devolverá 10% dos componentes com menores tempos de vida. Assim $P(X > D_1) = 0,10$. Assim devemos achar o quantil de ordem 10 da distribuição.

$$x_{0,1} = D_1 = \left[\frac{-\ln(1-0,1)}{a}\right]^{\frac{1}{b}}.$$

Usando o R temos:

```
>
>
```

```
> ###P(X < G)=0,10,  G é o primeiro decil da distribuição.
>
> #####x_p= [ -ln(1-p)/a]^1/b, 0<p<1 é o  p-ésimo quantil da Weibull(a,b)
>
> p=0.10
>
> D_1= (-log(1-p)/a)^(1/b);D_1  ### em torno de 570 horas.
[1] 569.7305
>
> ##Direto no R
>
> qweibull(p,d,c)
[1] 569.7305
>
>
```

item d. Sejam $p_1 = P(L = -L_1) = P(X \leq 500)$,
$p_2 = P(L = L_2) = P(X \leq 1500) - P(X \leq 500)$ e $p_3 = P(X > 1500)$.
O lucro esperado é dado por:

$$E(L) = -L_1p_1 + L_2p_2 + L_3p_3.$$

Vamos usar o R para calcular $p_i, i = 1, 2, 3$.

```
>
> ###p1=P(X<=500)
>
> t1=500
> p1=1-exp(-a*t1^b);p1;round(p1,4)
[1] 0.06058694
[1] 0.0606
>
> ###Utilizando o R
> pweibull(t1,d,c) ####Analise com cuidado!!!!!!!!
[1] 0.06058694
>
>
> t2=1500
>
> ##p2=F(1500) -F(500)=F(t2)-F(t1)
```

```
>
> p2=(1-exp(-a*t2^b))-(1-exp(-a*t1^b));p2;round(p2,4)
[1] 0.9330833
[1] 0.9331
>
>
> ###p3=P( X>1500)
>
> p3= exp(-a*t2^b);p3;round(p3,4)
[1] 0.006329715
[1] 0.0063
>
> p1+p2+p3  ########ufa!!!!!!
[1] 1
>
```

1.12 Lista de Exercícios.

1. Uma variável aleatória X tem a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\; x\; \exp(-\frac{x^4}{2})\; I_A(x),\; A = (0, \infty).$$

   Identifique a lei de X. Calcule sua média e variância. Determine $P(X < 4)$.

2. No artigo em Inglês "Parameter Estimation with Only One Complete Failure Observation"(Estimativa de parâmetro com Apenas uma Obervação de falha Completa) . (W. Pang, P.Leung, et al ., International Journal of Reliability, Quality, and Safety Engineering, 2001: 109:122), o tempo de vida , em horas, de um determinado tipo de rolamento é modelado com o uso da distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha = 2,25$ e $\beta = 4,474 \times 10^{-4}$. Uma forma alternativa de sua densidade é dada por:

$$f(x) = \alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}\; e^{-(\beta\, x)^{\alpha}} I_{\,(0,\,\infty)}\; (x).$$

   Compare com a distribuição dada em sala de aula. Que relação existe entre a e α? Que relação existe entre b e β?

a. Determine a probabilidade de um rolamento durar mais do que 1000 horas.

b. Determine a probabilidade de um rolamento durar menos do que 2000 horas.

c. Determine o tempo de vida médio de um rolamento.

d. Qual é a função de risco de X? Qual é o risco em $t = 2000\ horas$?

3. O tempo de vida de uma determinada bateria é modelado por distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 0,1$.

   a. Qual é a proporção de baterias que durarão mais do que 10 horas?

   b. Qual é a proporção de baterias que durarão menos do que 5 horas?

   c. Qual é a proporção de baterias que durarão mais do que 20 horas?

   d. Qual é a função de risco de X? Qual é o risco em $t = 10$ horas?

4. Os tempos de vida, em horas, de um resfriador por ventilação (cooler) usado em um sistema de computador tem uma distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha = 1,5$ e $\beta = 0,0001$.

   a. Qual é a probabilidade de um resfriador durar mais do que 10000 horas?

   b. Qual é a probabilidade de um resfriador durar menos do que 5000 horas?

   c. Qual é a a probabilidade de um resfriador durar entre 3000 e 9000 horas?

5. Alguém sugere que o tempo de vida T , em dias, de um determinado componente modelado com o uso da distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

   a. Se esse modelo estiver correto, qual é o valor de $P(T \leq 1)$?

   b. Baseado na resposta em (a), se o modelo estiver correto, um tempo de 1 dia seria um tempo de vida excepcionalmente curto? Explique.

   c. Se você observou um componente que durou 1 dia, você acha que que esse modelo é plausível? Explique.

   d. Se esse modelo estiver correto, qual é o valor de $P(T \leq 90)$?

e. Baseado na resposta em (d), se o modelo estiver correto, um tempo de 90 dias seria um tempo de vida excepcionalmente curto? Seria um tempo de vida excepcionalmente longo. Explique.

f. Se você observou um componente que durou 90 dias, você acha que que esse modelo é plausível? Explique.

6. Se T for uma variável aleatória contínua sempre positiva (assim como um tempo de espera), com função densidade de probabilidade $f(t)$ e a função de distribuição cumulativa $F(t)$, então a **função de risco** é definida como sendo a função

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

A função de risco é a taxa de falha por unidade de tempo, expressa como uma proporção dos itens que não apresentaram falha.

a. Se $T \sim Weibull(\alpha, \beta)$, determine $h(t)$.

b. Para que valores de α a taxa de risco aumenta com o tempo? Para que valores de α ela diminui?

7. Seja $T \sim Weibull(0,5; 2)$. Determine:

a. μ_T.

b. σ_T^2.

c. $P(T \leq 2)$.

d. $P(T > 3)$.

e. $P(1 < T \leq 2)$.

f. $P(2 < T \leq 5 | T < 4)$.