Q02. Considere o exemplo 5.2.1 . Mostre que a distribuição da quantidade pivotal

$$Q(\mathbf{X}, \theta) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i = 2\theta S \sim \chi^2(2n).$$

Solução: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da variável aleatória com densidade

$$f(x|\theta) = \theta\, e^{-\theta x}\, I_A(x), A = (0, \infty) \;\; e\; \theta > 0$$

A função geradora de momentos de X é dada por:

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}, \quad t < \theta.$$

A função geradora de momentos de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por:

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^n, \quad t < \theta,$$

que é a função geradora de momentos de uma gama de parâmetros $r = n$ e θ.
Seja

$$Q = 2\theta S.$$

A função geradora de momentos de Q é dada por:

$$M_Q(t) = E(e^{tQ}) = E(e^{2\theta t S}) = M_S(2\theta t).$$

Como

$$2\theta t < \theta$$

temos

$$t < \frac{1}{2}.$$

Assim

$$M_Q(t) = \left[\frac{\theta}{\theta - 2\theta t}\right]^n = \left[\frac{1}{1 - 2t}\right]^n = (1 - 2t)^{-2n/2},$$

que é a fgm de uma qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.