2.4. Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$, $\theta > 0$.

Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para θ.

Solução: Sabemos que

$$P(X = x) = f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^x}{x!}\ \ I_A(x), \quad A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Vamos supor que T seja suficiente para θ.

Assim

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \mid T = t)$$

independe de θ para qualquer valor de $T = t$.

Para mostrar que não é basta um contra-exemplo.

Suponha que nossa amostra é $x_1 = 1, x_2 = 1$. O valor de t é dado por:

$$t = x_1 + 2x_2 = 1 = 2 = 3.$$

$$P(T = 3) = P(X_1 = 3, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$$

$$P(T = 3) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^3}{3!}\ \frac{e^{-\theta}\ \theta^0}{0!} + \frac{e^{-\theta}\ \theta^1}{1!}\ \frac{e^{-\theta}\ \theta^1}{1!}$$

$$P(T = 3) = \frac{e^{-2\theta}\ \theta^3}{3!} + e^{-2\theta}\ \theta^2 = e^{-2\theta}\ \theta^2 \left[\frac{\theta}{6} + 1\right]$$

$$P(T = 3) = e^{-2\theta}\ \theta^2 \left[\frac{\theta + 6}{6}\right]$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid T = 3) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, T = 3)}{P(T = 3)} = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(T = 3)}$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid T = 3) = \frac{e^{-2\theta}\ \theta^2}{e^{-2\theta}\ \theta^2 \left[\frac{\theta+6}{6}\right]} = \frac{6}{6 + \theta},$$

que obviamente depende de θ. Logo $T = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para θ.