Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Coordenação do Curso de Estatística
Disciplina: CC0291- Estatística Não Paramétrica -2023.1
Professor: Maurício Mota

. Teste de McNemar

1:Generalidades

O teste de McNemar aparece com grande frequência na análise de dados pareados em que cada elemento é tomado como seu próprio controle caracterizando uma situação do tipo antes e depois.

Ele é usado para comparação de proporções em dados emparelhados ,isto é, temos duas populações dependentes.

Os dados são apresentados em tabelas do tipo:

Tabela 1: Quadro Para Fazer o Teste de McNemar. .

Controle	Tratamento		
	Sucesso	Fracasso	Total
Sucesso	a	b	$a+b=n_1$
Fracasso	c	d	$c+d=n_2$
Total	$m_1=a+c$	$m_2=b+d$	n

Se p_1 e p_2 são as probabilidades de sucesso nos grupos controle e tratamento, respectivamente, a hipótese de interesse é:

$$H_0: p_1=p_2 \;\; vs \;\; H_1: p_1 \neq p_2.$$

As estimativas de p_1 e p_2 são dadas por:

$$\hat{p}_1=\frac{a+b}{n} \quad e \quad \hat{p}_2=\frac{a+c}{n}.$$

De modo que;

$$|\hat{p}_1-\hat{p}_2|=\frac{|b-c|}{n}.$$

Os pares que produziram SS ou FF nos dois elementos do par não contém informação relevante para discriminar p_1 de p_2.

Se H_0 é verdade, ou seja, os dois grupos são equivalentes, as discordâncias observadas são fruto do acaso.

Seja B o número de observações do tipo SF entre os $m=b+c$ pares discordantes.

Assim,

$$B \sim Bin(m = b + c, p = \frac{1}{2}).$$

E vamos esperar

$$E(B) = \frac{b+c}{2}.$$

pares do tipo SF entre os $(b + c)$ pares discordantes.

Seja C o número de observações do tipo FS entre os $m = b + c$ pares discordantes.

Assim,

$$C \sim Bin(m = b + c, p = \frac{1}{2}).$$

E vamos esperar

$$E(C) = \frac{b+c}{2}.$$

pares do tipo FS enter os $(b + c)$ pares discordantes.

A hipótese

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ versus } H_1 : p_1 \neq p_2.$$

é equivalente a testar:

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \text{ versus } H_1 : p \neq \frac{1}{2}\ .$$

Usamos como estatística do teste B ou C com distribuição exata Binomial.

Devemos calcular o nível descritivo e comparar com o nível de significância desejado.

Se a hipótese alternativa for bilateral, $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$, devemos proceder assim:
Calcular

$$aux_1 = P(B \leq b) \quad e \quad aux_2 = P(B \geq b)$$

$$nd = \hat{\alpha} = 2min\,(aux_1, aux_2)\,.$$

Se a hipótese alternativa for unilateral à direita, $H_1 : p > \frac{1}{2}$, temos:

$$nd = \hat{\alpha} = P(B \geq b).$$

Se a hipótese alternativa for unilateral à esquerda, $H_1 : p < \frac{1}{2}$, temos:

$$nd = \hat{\alpha} = P(B \leq b),$$

b é valor observado na tabela.

Se $r + s$ for grande podemos aproximar a distribuição de B para a Normal com

$$\mu = \frac{r+s}{2} \quad \sigma^2 = \frac{r+s}{4}.$$

Assim

$$Z = \frac{b - \frac{b+c}{2}}{\frac{\sqrt{b+c}}{2}} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente.

A proposta de McNemar é comparar as frequências observadas e esperadas usando o teste de qui-quadrado. Podemos formar a tabela:

Classe	SF	FS	Total
Observada	b	c	b+c
Esperada	$\frac{b+c}{2}$	$\frac{b+c}{2}$	b+c

Vamos calcular as discrepâncias:

$$d_1 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} = \frac{(b - \frac{b+c}{2})^2}{\frac{b+c}{2}} = \frac{(b-c)^2}{2(b+c)}$$

$$d_2 = \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} = \frac{(c - \frac{b+c}{2})^2}{\frac{b+c}{2}} = \frac{(c-b)^2}{2(b+c} = \frac{(b-c)^2}{2(b+c)}.$$

Assim,

$$Q = d_1 + d_2 = \frac{(b-c)^2}{(b+c)}.$$

Se H_0 é verdade

$$Q \sim \chi^2(1),$$

aproximadamente.

Seja q_{tab} o quantil de ordem $(1-\alpha)$ de $Q \sim \chi^2(1)$.

Assim devemos rejeitar H_0 se

$$Q_{cal} > q_{tab}.$$

Devemos rejeitar H_0 se a distância entre valores esperados e observados for grande.

Podemos corrigir esta estatística para

$$Q_1 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c} \sim \chi^2(1).$$

Para fazer o teste precisamos que cada frequência esperada seja maior que 5,isto é,

$$\frac{b+c}{2} > 5$$

ou

$$b + c > 10.$$

Vamos fazer dois exemplos e mostrar o uso do R.

Exemplo 1: (Armitage 1971) Cinquenta amostras de saliva sabidamente positivas para o bacilo da tuberculose foram colocadas em duas culturas diferentes A e B. o objetivo do experimento era a comparação destes meios na detecção do bacilo causador da tuberculose. Os resultados foram:

Resultado	SS	SF	FS	FF
Frequência	20	12	2	16

em que S é a detecção do bacilo da tuberculose.

Existe evidência que os métodos sejam diferentes usando um nível de significância de 5%?

Sejam p_1 a probabilidade de detecção do bacilo da tuberculose usando o meio de cultura A e p_2 a probabilidade de detecção do bacilo da tuberculose usando o meio de cultura B.

Queremos testar

$$H_0 : p_1 = p_2 \ \ vs \ \ \ H_1 : p_1 \neq p_2$$

usando um nível de significância $\alpha = 0,05$.
analisando a tabela dada temos

$$a = 20; b = 12; c = 2, d = 16 \quad n = 50.$$

As estimativas de p_1 e p_2 são dadas por:

$$\hat{p}_1 = \frac{a+b}{n} = \frac{32}{50} = 0,64 \quad e \quad \hat{p}_2 = \frac{a+c}{n} = \frac{36}{50} = 0,72.$$

O número de pares discordantes é:

$$b = 12; c = 2; \quad b + c = 14.$$

Vamos calcular o nível descritivo do teste:

$$H_0 : p = 0,5 \quad \text{versus} \quad p \neq 0,5$$

$$aux_1 = P(B \leq 12) = 0,9990845$$

$$aux_2 = P(B \geq 12) = 1 - P(B \leq 11) = 0,006469727$$

$$nd = 2min(aux_1, aux_2) = 0,01294 < 0,05.$$

Não podemos aceitar H_0.

Fazendo no R . Observe o passo a passo:

```
a=20;b=12;c=2;d=16
>
>
> n=a+b+c+d;n
[1] 50
>
> b+c
[1] 14
>
>
> aux_1=pbinom(12,b+c,1/2);aux_1
[1] 0.9990845
>
> aux_2=1-pbinom(11,b+c,1/2);aux_2
[1] 0.006469727
>
> nd=2*min(aux_1,aux_2);nd
[1] 0.01293945
>
> round(nd,5)
[1] 0.01294
>
> alfa=0.05
>
>
> alfa >nd
[1] TRUE
>
>
> binom.test(b,b+c)

Exact binomial test

data:  b and b + c
number of successes = 12, number of trials = 14, p-value = 0.01294
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
0.5718708 0.9822055
```

Veja que o ponto $p = \frac{1}{2}$ não pertence ao intervalo de confiança dado.

Agora vamos fazer o teste de McNemar no R:

```
>
> c1=c(a,c);c2=c(b,d)
>
>
> saliva=cbind(c1,c2);saliva
c1 c2
[1,] 20 12
[2,]  2 16
>
> mod1=mcnemar.test(saliva,correct=F);mod1

McNemar's Chi-squared test

data:  saliva
McNemar's chi-squared = 7.1429, df = 1, p-value = 0.007526

>
>
> alfa=0.05
>
>
> q_tab=qchisq(1-alfa,1);q_tab
[1] 3.841459
>
> q_obs=mod1$statistic;q_obs
McNemar's chi-squared
7.142857
>
> q_cal= (b-c)^2/(b+c);q_cal
[1] 7.142857
>
>
> q_cal > q_tab  ###Rejeitar H_0
[1] TRUE
>
>
>
> nd1= 1-pchisq(q_cal,1);nd1
[1] 0.007526315
>
>
>
>
>
> #####Usar a correção
>
>
>
> mod2=mcnemar.test(saliva);mod2
```

```
McNemar's Chi-squared test with continuity correction

data:  saliva
McNemar's chi-squared = 5.7857, df = 1, p-value = 0.01616

>
> q1_cal=(abs(b-c)-1)^2/(b+c);q1_cal
[1] 5.785714
> round(q1_cal,4)
[1] 5.7857
>
>
> nd2=1-pchisq(q1_cal,1);nd2
[1] 0.01615693
> round(nd2,5)
[1] 0.01616
>
>
```

Analise a saída cuidadosamente.

Exemplo 2 Exemplo 6.7 Quimioterapia e Câncer de Mama

Veja o livro Introdução à Estatística Médica de José Francisco Soares e Arminda Lúcia Siqueira.

Dois tratamentos (A e B) para câncer de mama foram comparados. O grupo A recebeu tratamento quimioterápico durante seis meses começando na primeira semana após a mastectomia enquanto que o grupo B, só na primeira semana. Para que os grupos sejam tão comparáveis quanto possível com relação a fatores prognósticos foram formados pares de pacientes com aproximadamente mesma idade e condições clínicas.

A primeira tabela mostra as proporções de sobrevivência após 5 anos.

Tratamento	Sobrevivência		Total	Percentual
	Sim	Não		
A	526	95	621	$\hat{p}_A = 0,847$
B	515	106	621	$\hat{p}_B = 0,829$
Total	1041	201	1242	$\hat{p}_{A+B} = 0,816$

As proporções estão bem próximas mas esta maneira de apresentar não leva em conta o pareamento.

Usando o pareamento temos:

Sobrevivência do Tratamento A	Sobrevivência do Tratamento B		Total
	Sim	Não	
Sim	510	16	526
Não	5	90	95
Total	515	106	621

Aqui temos:

$$b = 16, c = 5; b + c = 21.$$

Vamos testar:

$$H_0 : p_A = p_B \quad \text{versus} \quad H_1 : p_A \neq p_B.$$

Vamos fazer direto no R:

```
> a=510;b=16;c=5;d=90
```

```
>
> n=a+b+c+d;n
[1] 621
> b+c;b;c
[1] 21
[1] 16
[1] 5
>
> binom.test(b,b+c)

Exact binomial test

data:  b and b + c
number of successes = 16, number of trials = 21, p-value = 0.0266
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
0.5283402 0.9178241
sample estimates:
probability of success
0.7619048

>
> ## Ponto p=0,5 pertence ao IC? Qual o nível descritivo?
>
> aux1=pbinom(b,b+c,1/2);aux1
[1] 0.9964013
> aux2=1-pbinom(b-1,b+c,1/2);aux2
[1] 0.01330185
> nd=2*min(aux1,aux2);nd
[1] 0.0266037
> round(nd,5)
[1] 0.0266
>
> alfa=0.05
>
>
> alfa >nd
[1] TRUE
>
>
> ###Usando C
>
>
>
> binom.test(c,b+c) ####Comente!!!!!!

Exact binomial test

data:  c and b + c
number of successes = 5, number of trials = 21, p-value = 0.0266
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
0.08217588 0.47165983
sample estimates:
probability of success
0.2380952

>
```

```
>
> #####Teste de McNemar
>
> b+c>10
[1] TRUE
>
> C1=c(a,c);C2=c(b,d)
>
>
> sobrevida=cbind(C1,C2);sobrevida
C1 C2
[1,] 510 16
[2,]   5 90
>
> mcnemar.test(sobrevida)

McNemar's Chi-squared test with continuity correction

data:  sobrevida
McNemar's chi-squared = 4.7619, df = 1, p-value = 0.0291

>
> mcnemar.test(sobrevida,correct=F)

McNemar's Chi-squared test

data:  sobrevida
McNemar's chi-squared = 5.7619, df = 1, p-value = 0.01638

>
> q1_cal=mcnemar.test(sobrevida)$statistic;q1_cal
McNemar's chi-squared
4.761905
>
> nda=pchisq(q1_cal,1,lower.tail=F);nda;round(nda,5)
McNemar's chi-squared
0.02909633
McNemar's chi-squared
0.0291
>
>
> q_cal=mcnemar.test(sobrevida,correct=F)$statistic;q_cal
McNemar's chi-squared
5.761905
>
> nda1=pchisq(q_cal,1,lower.tail=F);nda1;round(nda1,5)
McNemar's chi-squared
0.01637731
McNemar's chi-squared
0.01638
>
>
```

Exercícios:

1. Dois supermercados disputam a preferência dos consumidores de uma cidade.

Um deles(A), para aumentar o seu número de fregueses, lança uma campanha publicitária, através de concursos, com vários brindes. O resultado no final do concurso apresentou a seguinte situação, numa amostra aleatória com 100 consumidores.

Antes da Campanha	Depois da Campanha	
	A	B
A	37	3
B	13	47

Foi a campanha eficiente?

Seja $P(A, B)$ a probabilidade de que um consumidor troque o supermercado A pelo B e $P(B, A)$ a probabilidade de que um consumidor troque o supermercado B pelo A.

Queremos testar

$$H_0 : P(A, B) = P(B, A).$$

Agora faça o teste. Use $\alpha = 0,01$.

2. Numa campanha política, um determinado jornal publicou uma série de artigos apoiando um dos partidos A e difamando outro o candidato do outro (B). Numa amostra de 200 eleitores, foram observadas as seguintes mudanças:

Antes dos Artigos	Depois dos Artigos	
	A	B
A	83	47
B	18	52

Os artigos influenciaram os eleitores?

3. No início da campanha pró implantação do divórcio no Brasil, foram entrevistados, num setor industrial, 400 funcionários, chefes de famílias.

   Na véspera da votação do projeto pelo Congresso,aqueles mesmos funcionários, foram novamente entrevistados. Os resultados das entrevistas foram:

Primeira Entrevista	Segunda Entrevista	
	Contra	Favor
Contra	116	24
Favor	48	212

Houve uma conscientização dos funcionários, contra o divórcio?