1 INTRODUÇÃO

Vamos apresentar a convergência em Distribuição e o teorema do Limite Central. Usaremos o livro: Introduction to Mathematical Statistics-Sixth Edition dos autores Hogg-Mckean-Craig. Também usaremos o livro do Sheldon Ross: Probabilidade - Um curso moderno com aplicações - oitava edição. Além deles vamos usar o Barry James:Probabilidade: Um curso em nível intermediário e o livro do Carlos Alberto Barbosa Dantas:Probabilidade: Um Curso Introdutório e o livro do Marcos Nascimento Magalhães: Probabilidade e Variáveis Aleatórias.

Na hora do desespero sempre recorro ao livro Mood, Graybill e Boes.

2 Técnica da Função Geradora de Momentos

Esta técnica é uma das mais utilizadas para provar que $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias cuja função geradora $M_{X_n}(t)$ existe para $-h < t < h$ para todo n. Seja X uma variável aleatória com função geradora $M(t)$que existe para $|t| \leq h_1 < h$.

Se

$$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M(t), \text{para } |t| \leq h_1,$$

então

$$X_n \overset{D}{\to} X.$$

Para calcularmos este limite vamos precisar do seguinte resultado:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right]^{cn},$$

em que b e c não dependem de n e $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right]^{cn} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{cn} = e^{bc}. \quad (1)$$

Vamos fazer um exemplo:

Exemplo 1: Calcule o limite

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^3}{n^{3/2}}\right]^{-n/2}.$$

Solução: O primeiro passo é colocar o limite proposto na forma **(1)**.
Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-t^2)}{n} + \frac{t^3\ n^{-1/2}}{n}\right]^{-n/2}.$$

Logo,

$$b = -t^2; \quad c = -\frac{1}{2},$$

que não dependem de n.

Note que

$$bc = \frac{t^2}{2}.$$

Além disso

$$\psi(n) = t^3\ n^{-1/2} = \frac{t^3}{\sqrt{n}},$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{\sqrt{n}} = 0.$$

Como as condições estão satisfeitas o limite é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-t^2)}{n} + \frac{t^3\ n^{-1/2}}{n}\right]^{-n/2} = e^{t^2/2}.$$

Observação 1: Note que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ sua f.g.m. é dada por:

$$M(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\,\sigma^2\ t^2).$$

Se $Z \sim N(0,1)$ sua f.g.m. é dada por:

$$M_Z\ (t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

Exemplo 2: Seja $Y_n \sim Bin(n, p)$. Suponha que a média $\mu = np$ é a mesma para todo n, isto é,

$$p = \frac{\mu}{n},$$

sendo μ uma constante.

a. Qual a f.g.m. de Yn?

Solução

$$M_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tY_n}) = \sum_{y=0}^{n} e^{ty} \binom{n}{y} p^y \, (1-p)^{n-y},$$

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} \, (pe^t)^y \, (1-p)^{n-y},$$

usando a fórmula do Binômio de Newton:

$$M_{Y_n}(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n .$$

b. Qual a f.g.m. de $Y \sim Poisson(\mu)$?

Solução

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \, \frac{e^{-\mu} \, \mu^y}{y!},$$

$$M_Y(t) = e^{-\mu} \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \, \frac{\mu^y}{y!} = e^{-\mu} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{ty} \, \mu^y}{y!},$$

$$M_Y(t) = e^{-\mu} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\mu \, e^t)^y}{y!},$$

usando a expansão em Série de Taylor ma origem da função:

$$e^a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!},$$

temos:

$$M_Y(t) = e^{-\mu} \, e^{\mu e^t} = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

c. No item **a** substitua p por $\frac{\mu}{n}$ e calcule o limite da f.g.m. de Y_n quando $n \to \infty$.

Solução

Temos que

$$M_{Y_n}(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n = \left(\frac{\mu}{n}\, e^t + (1 - \frac{\mu}{n})\right)^n.$$

Logo,

$$M_{Y_n}(t) = \left(1 + \frac{\mu(e^t - 1)}{n}\right)^n.$$

Estamos prontos para usar o nosso limite com:

$$b = \mu(e^t - 1) \quad c = 1 \quad \psi(n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = e^{bc} = e^{\mu(e^t-1)}.$$

d. Y_n converge em distribuição para que variável aleatória?

Solução:

Como

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = e^{\mu(e^t-1)} = M(t),$$

que é a f.g.m. de uma Poisson com parâmetro μ.

e. Considere $Y_n \sim Bin(50, \frac{1}{25})$. Quanto vale $P(Y_n \leq 1)$? Calcule essa probabilidade usando a aproximação para a Poisson.

Solução:

```
\
> n=50;p=1/25
>
> pe=pbinom(1,n,p)#### probabilidade exata.
> pe
[1] 0.4004812
>
```

```
>
> ####Aproximar pela Poisson
>
> mu=n*p;mu
[1] 2
>
>
> pa=ppois(1,2)#### probabilidade aproximada
>
> pa
[1] 0.4060058
>
```

Vamos discutir a aproximação da binomial pela Poisson.

Exemplo 3: Seja $Z_n \sim \chi^2(n)$.

a. Mostre que a f.g.m. de Z_n

$$M_{Z_n}(t) = (1-2t)^{-n/2}, t < 1/2.$$

Solução: A f.g.m. de Z_n é dada poor:

$$M_{Z_n}(t) = I\!\!E(e^{tZ_n}) = \int_0^\infty e^{tz} \, \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} \, z^{n/2-1} \, e^{-z/2} \, dz,$$

Mas,

$$e^{tz} \, e^{-z/2} = e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\, z}.$$

Logo,

$$M_{Z_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} \int_0^\infty z^{n/2-1} \, e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\, z} \, dz.$$

$$M_{Z_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} \, IGG(a = n/2, b = \frac{1-2t}{2}, c = 1).$$

Temos que $a > 0$, $c > 0$ e $b = \frac{1-2t}{2} > 0$, assim

$$t < \frac{1}{2}.$$

$$IGG(a = n/2, b = \frac{1-2t}{2}, c = 1) = \frac{\Gamma(n/2)}{\frac{(1-2t)^{n/2}}{2^{n/2}}}.$$

$$IGG(a = n/2, b = \frac{1-2t}{2}, c = 1) = \frac{\Gamma(n/2)2^{n/2}}{(1-2t)^{n/2}}.$$

Finalmente:

$$M_{Z_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\ 2^{n/2}}\ \frac{\Gamma(n/2)2^{n/2}}{(1-2t)^{n/2}} = (1-2t)^{-n/2},\ \ t < 1/2.$$

b. Sabemos que $\mathbb{E}(Z_n) = n$ e $\mathrm{Var}(Z_n) = 2n$

Considere

$$Y_n = \frac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z_n)}} = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}.$$

Qual a distribuição limite de Y_n?

Solução: Vamos achar a f.g.m. de Y_n.

$$\begin{aligned}
M(t,n) &= \mathbb{E}(e^{tY_n}) \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[t\left(\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}\right)\right]\right\} \\
&= \exp\left(-\frac{nt}{\sqrt{2n}}\right)\ \mathbb{E}\left(\frac{tZ_n}{\sqrt{2n}}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{nt}{\sqrt{2n}}\right)\ M_{Z_n}\ \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)
\end{aligned}$$

Para

$$\frac{t}{\sqrt{2n}} < \frac{1}{2},$$

$$t < \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Note que:

$$M_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = (1 - 2\frac{t}{\sqrt{2n}})^{-n/2}$$

Além disso:

$$\exp\left(-\frac{nt}{\sqrt{2n}}\right) = \exp\left(-t\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right) = \exp\left(-t\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\exp\left(-\frac{nt}{\sqrt{2n}}\right) = \exp\left(-t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \frac{n}{2}\right) = \left[\exp\left(t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right]^{-n/2}.$$

Finalmente,

$$M(t,n) = \exp\left(-\frac{nt}{\sqrt{2n}}\right)\ M_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right).$$

$$M(t,n) = \left[\exp\left(t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right]^{-n/2} \times \left[1 - 2\frac{t}{\sqrt{2n}}\right]^{-n/2}$$

$$M(t,n) = \left[\exp\left(t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right]^{-n/2} \times \left[1 - t\sqrt{\frac{2}{n}}\right]^{-n/2}$$

$$M(t,n) = \left[\exp\left(t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) - t\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\left(t\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right]^{-n/2}, t < \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

A expansão em série de Taylor de e^a é dada por:

$$e^a = \sum_{i+0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots.$$

Considere o teorema:

Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, $f^{n+1}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b). Então, existe um número ξ no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}\,(b-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}\,(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}$$

Fazendo $b = x$ temos a fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

em que $a < \xi < x$. Fazendo $a = 0$ temos:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}\,x) + \frac{f^{''}(a)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

em que $0 < \xi < x$.

Logo de acordo com a fórmula de Taylor existe um número $\xi(n)$, entre zero e $t\sqrt{\frac{n}{2}}$, tal que:

$$\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 + t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{e^{\xi(n)}}{6}\left(t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^3.$$

$$\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 + t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{n} + \frac{e^{\xi(n)}}{3}\left(t^3\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\right).$$

$$M(t,n) = \left[\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) - t\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right]^{-n/2}, t < \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Vamos calcular:

$$t\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$t\sqrt{\frac{2}{n}}\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\frac{t^2}{n}+\frac{e^{\xi(n)}}{3}t^3\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\right)=$$

$$t\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{2t^2}{n}+\frac{\sqrt{2}t^3}{n\sqrt{n}}+\frac{2e^{\xi(n)}t^4}{3n^2}.$$

$$\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)-t\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\left(t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$1+t\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\frac{t^2}{n}+\frac{e^{\xi(n)}}{3}\left(t^3\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\right)-t\sqrt{\frac{2}{n}}-\frac{2t^2}{n}+\frac{\sqrt{2}t^3}{n\sqrt{n}}-\frac{2e^{\xi(n)}t^4}{3n^2}=$$

$$1-\frac{t^2}{n}-\frac{\sqrt{2}t^3}{n\sqrt{n}}-\frac{2e^{\xi(n)}t^4}{3n^2}+\frac{\sqrt{2}t^3e^{\xi(n)}}{3n\sqrt{n}}=$$

$$1-\frac{t^2}{n}+\frac{1}{n}\left(-\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}}-\frac{2e^{\xi(n)}t^4}{3n}+\frac{\sqrt{2}t^3e^{\xi(n)}}{3\sqrt{n}}\right)=$$

Como

$$0<\xi(n)<t\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

temos

$$0<\lim_{n\to\infty}\xi(n)<t\,\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=0$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}\xi(n)=0$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} e^{\xi(n)} = 1.$$

Seja

$$\psi(n) = -\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}} - \frac{2e^{\xi(n)}t^4}{3n} + \frac{\sqrt{2}t^3 e^{\xi(n)}}{3\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0.$$

Vamos substituir na f.g.m. de Y_n:

$$M(t,n) = \left[1 + \frac{(-t^2)}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right]^{-n/2}.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} M(t,n) = e^{t^2/2},$$

para todo t real pois:

$$t < \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty.$$

A variável aleatória $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}$ tem uma distribuição limite normal padrão.

Exemplo 3: Sejam $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n de $X \sim Exp(1)$. Determine a distribuição limite de

$$Z_n = (Y_n - \log(n)).$$

Solução: A função densidade de probabilidade Y_n é:

$$g(y) = n\ \left[1 - e^{-y}\right]^{n-1}\ e^{-y}\ I_{(0,\infty)}\ (y).$$

A função geradora de momentos de Y_n é dada por:

$$M(t,n) = \int_0^\infty e^{ty}\ n\left[1 - e^{-y}\right]^{n-1}\ e^{-y}\ dy.$$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = e^{-y} \quad du = -e^{-y}\, dy \qquad e^{y} = u^{-1}, \quad e^{ty} = u^{-t}.$$

Assim,

$$M(t,n) = n \int_1^0 u^{-t}\ [1-u]^{n-1}\ (-du)$$

$$M(t,n) = n \int_0^1 u^{1-t-1}\ [1-u]^{n-1}\ du.$$

Assim para $a = 1-t > 0$ e portanto $t < 1$ temos:

$$M(t,n) = n\ beta(1-t,n) = n\ \frac{\Gamma(1-t)\,\Gamma(n)}{\Gamma(n+1-t)}$$

$$M(t,n) = \Gamma(1-t)\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-t)}.$$

Vamos utilizar aproximação de Stirling para $n! = \Gamma(n+1)$.

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\ n^{1/2}\ n^n\ e^{-n}$$

Logo,
Seja

$$h_n = \frac{\Gamma(n-t+1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$h_n \approx \frac{\sqrt{2\pi}\ (n-t)^{1/2}\ (n-t)^{n-t}\ e^{-n+t}}{\sqrt{2\pi}\ n^{1/2}\ n^n\ e^{-n}}$$

$$h_n \approx e^t\ \sqrt{\frac{n-t}{n}}\ \frac{(n-t)^{n-t}}{n^n}.$$

A função geradora de momentos de Z_n é dada por:

$$M_{Z_n}(t) = I\!\!E\left[e^{t\ Z_n}\right] = I\!\!E\left[e^{t\ (Y_n - logn)}\right]$$

$$M_{Z_n}(t) = I\!\!E\left[e^{t\ Y_n}\right] \times e^{-tlogn}.$$

Mas

$$e^{-tlogn} = e^{logn^{-t}} = n^{-t}.$$

Assim,

$$M_{Z_n}(t) = \Gamma(1-t)\ e^t\ \ \frac{n^{-t}}{h_n} = \Gamma(1-t)\ e^t$$

Assim,

$$v_n = n^{-t}\ \frac{1}{h_n} = n^{-t}\ \ e^t\ \ (1-t/n)^{-1/2}\ \frac{n^n}{(n-t)^{n-t}}$$

$$v_n = e^t\ \ (1-t/n)^{-1/2}\ \ \ \frac{n^{n-t}}{(n-t)^{n-t}}$$

$$v_n = e^t\ \ (1-t/n)^{-1/2}\ \ \ \left[\frac{n}{(n-t)}\right]^n\ \left[\frac{n-t}{n}\right]^t$$

Assim

$$v_n = e^t\ \ (1-t/n)^{-1/2}\ \ \ \left[\frac{n-t}{n}\right]^t \left[\frac{(n-t)}{n}\right]^{-n}$$

$$v_n = e^{-t}\ \ (1-t/n)^{-1/2}\ \ \ \left[1-\frac{t}{n}\right]^t \left[1-\frac{t}{n}\right]^{-n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-t/n)^{-1/2} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1-\frac{t}{n}\right]^t = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1-\frac{t}{n}\right]^{-n} = e^t.$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = e^{-t}e^t = 1.$$

Assim

$$M_Z(t) = \Gamma(1-t),\ t < 1,$$

que é a função geradora de momentos da Gumbel com $\alpha = 0, \beta = 1$.

$$M(t) = e^{\alpha t}\ \Gamma(1-b),\ t < 1/\beta.$$

Exemplo 4: Seja X_n uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta sobre $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Qual a distribuição limite de

$$Y_n = \frac{X_n}{n}?$$

Solução: A função de probabilidade de X_n é dada por:

$$P(X_n = x) = \frac{1}{n+1}\, I_{A_n}\,(x).$$

A f.g.m. de X_n é dada por:
Seja $t \neq 0$.

$$M_{X_n}(t) = I\!E(e^{tY_n}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, \frac{1}{n+1}$$

$$M_{X_n}(t) = \frac{1}{n+1}\, S$$

$$S = 1 + e^t + e^{2t} + \ldots + e^{nt}.$$

Multiplicando S por e^t temos:

$$e^t\, S = e^t + e^{2t} + \ldots + e^{nt} + e^{(n+1)t}.$$

Assim,

$$e^t\, S - S = (e^t - 1) = e^{(n+1)t} - 1,$$

portanto

$$S = \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1}.$$

Logo

$$M_{X_n}(t) = \frac{1}{n+1}\, \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1} = \frac{e^{(n+1)t} - 1}{(n+1)\,(e^t - 1)}, \quad t \neq 0.$$

A função geradora de momentos de $Y_n = \frac{X_n}{n}$ é dada por:

$$M(t, n) = M_{X_n}(t/n) = \frac{e^{(n+1)t/n} - 1}{(n+1)\,(e^{t/n} - 1)}, \quad t \neq 0.$$

$$M(t,n) = M_{X_n}(t/n) = \frac{e^{t+t/n} - 1}{(n+1)\,(e^{t/n} - 1)}, \quad t \neq 0.$$

Vamos calcular o limite quando $n \to \infty$ do numerador:

$$\lim_{n\to\infty} (e^{t+t/n} - 1) = e^t - 1.$$

Vamos calcular o limite quando $n \to \infty$ do denominador:

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)(e^{t/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(e^{t/n} - 1) - \lim_{n\to\infty} (e^{t/n} - 1)$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} (e^{t/n} - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Vamos estudar com calma o limite

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{t/n} - 1)$$

pois ele aparece com frequência na teoria da probabilidade:

Inicialmente vamos expandir em série de Taylor $e^{t/n}$:

$$e^{t/n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t/n)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{n^i\, i!}.$$

Vamos começar a magia:

$$e^{t/n} = 1 + \frac{t}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{n^i\, i!}.$$

Subtraindo **1** temos:

$$e^{t/n} - 1 = \frac{t}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{n^i\, i!}.$$

Multiplicando por **n** temos:

$$n(e^{t/n} - 1) = t + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{n^{i-1}\, i!}.$$

Aplicando o limite temos:

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{t/n} - 1) = t + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{n^{i-1}\, i!}.$$

Note para $i \geq 2$ temos $i - 1 \geq 2 - 1 = 1$ e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{n^{i-1}\; i!} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \; n(e^{t/n} - 1) = t + 0 = t.$$

Finalmente,

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} \; M(t,n) = \frac{e^t - 1}{t}, \; t \neq 0,$$

que é a função geradora de momentos de uma uniforme padrão contínua.
Vamos ver:
Para $t \neq 0$ temos:

$$M(t) = \int_0^1 \; e^{tx}\; dx = \frac{e^{tx}}{t} \; \Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Exemplo 5: Seja $\{X_n, \;\; n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tais que

$$I\!P(X_n = x) = \frac{1}{2} \;\; I_A(x), \;\;\; A = \{-1, 1\}.$$

Seja

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \; X_k.$$

Mostre

$$Y_n \xrightarrow{D} Y \sim \; U[-1, 1].$$

Observação: Esta questão é a de número 20 da página 259 do livro do Barry James. Ele apresenta a seguinte sugestão:

$$\text{Use a igualdade} \quad cos(\theta) = \frac{sen(2\theta)}{2sen(\theta)}.$$

Solução: Pela sugestão dada sentimos que o autor nos remete a usar função característica. Ele é definida por:

$$C(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = cos(tX) + i\ sen(tX),$$

com $i = \sqrt{-1}$ a nossa unidade imaginária.
Vamos calcular a função característica de X_n:

$$C(t) = e^{-it} \times \frac{1}{2} + e^{it} \times \frac{1}{2} = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2} = cost.$$

Mas

$$e^{-it} = cost - isent \tag{2}$$

$$e^{it} = cost + isent \tag{3}$$

Somando **2** e **3** temos

$$e^{-it} + e^{it} = 2cost. \tag{4}$$

Fazendo **3** -**2** temos:

$$e^{it} - e^{it} = 2isent. \tag{5}$$

$$\frac{e^{it} - e^{it}}{2i} = sent.$$

A função característica de X_n é:

$$C(t) = cost.$$

Seja

$$Z_k = \frac{X_k}{2^k}.$$

A função característica de Z_k é dada por:

$$C_{Z_k}(t) = \mathbb{E}(e^{itZ_k}) = \mathbb{E}(e^{it\ \frac{X_k}{2^k}}).$$

$$C_{Z_k}(t) = \mathbb{E}(e^{\,i\,\frac{t}{2^k}X_k}) = C_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Como

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k,$$

com as variáveis Z_k independentes.
Assim

$$C_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} C_{Z_k}(t).$$

$$C_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Vamos supor $n = 2$:

$$C_{Y_2}(t) = cos\left(\frac{t}{2}\right) \times cos\left(\frac{t}{4}\right).$$

Usando a sugestão:

$$C_{Y_2}(t) = \frac{sent}{2\ sen(t/2)} \times \frac{sen(t/2)}{2sen(t/4)}$$

$$C_{Y_2}(t) = \frac{sent}{4\ sen(t/4)} = \frac{sent}{2^2\ sen(t/2^2)}.$$

Vamos supor $n = 3$:

$$C_{Y_3}(t) = cos\left(\frac{t}{2}\right) \times cos\left(\frac{t}{4}\right) cos\left(\frac{t}{8}\right).$$

Usando a sugestão:

$$C_{Y_3}(t) = \frac{sent}{2\ sen(t/2)} \times \frac{sen(t/2)}{2sen(t/4)} \times \frac{sen(t/4)}{2\ sen(t/8)}$$

$$C_{Y_3}(t) = \frac{sent}{8\ sen(t/8)} = \frac{sent}{2^3\ sen(t/2^3)}.$$

O caso geral é dado por:

$$C_{Y_n}(t) = \frac{sent}{2^n \, sen(t/2^n)}.$$

Um pouco de mágica:

$$C_{Y_n}(t) = \frac{sent}{t} \, \frac{t}{2^n \, sen(t/2^n)}.$$

$$C_{Y_n}(t) = \frac{sent}{t} \, \frac{t/2^n}{sen(t/2^n)}.$$

Fazendo

$$h_n = \frac{t/2^n}{sen(t/2^n)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \frac{t/2^n}{sen(t/2^n)}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = t/2^n \quad \text{temos que} \lim_{n\to\infty} u = 0$$

Assim,

$$h_n = \frac{u}{senu} = \frac{1}{\frac{senu}{u}}$$

Sabemos que

$$\lim_{u\to 0} \frac{senu}{u} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} C_{Y_n}(t) = \frac{sent}{t}, \; t \neq 0.$$

Vamos calcular a função característica de $Y \sim U[-1,1]$:

$$C_Y(t) = \int_{-1}^{1} e^{ity} \, \frac{1}{2} \, dy.$$

Para $t \neq 0$ temos

$$C_Y(t) = \frac{1}{2} \, \frac{e^{ity}}{it} \Big|_{-1}^{1} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \; \frac{1}{t} = \frac{sent}{t},$$

o que termina a nossa prova.

Exemplo 6: Seja $\{X_n,\ n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias com distribuições geométricas com parâmetros

$$p_n = \frac{\lambda}{n},\ \ 0 < \lambda < n.$$

Seja

$$Z_n = \frac{X_n}{n},\ \ n \geq 1.$$

Prove que

$$Z_n \stackrel{D}{\to}\ \ Z\ \sim\ Exp(\lambda).$$

Solução: Seja $X \sim Geo(p)$ e

$$P(X = x) = pq^{x-1}\ I_A(x),\ A = \{1, 2, \ldots\}.$$

A f.g.m. de X é dada por:

$$M_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty}\ e^{tx}\ pq^{x-1} = \frac{p}{q}\ \sum_{x=1}^{\infty}\ e^{tx}\ q^x = \frac{p}{q}\ \sum_{x=1}^{\infty}\ \left[qe^t\right]^x,$$

temos que

$$|qet| < 1 \qquad qe^t < 1,$$

$$e^t < \frac{1}{q} \qquad t < -lnq.$$

Assim,

$$M_X(t) = \frac{p}{q}\ \frac{qe^t}{1 - qe^t} = p\ \ \frac{e^t}{1 - qe^t}\ \ t < -lnq.$$

A f.g.m. de Z_n é dada por:

$$M_{Z_n}(t) = M_{X_n}(t/n) = p\ \ \frac{e^{t/n}}{1 - qe^{t/n}}\ \ t < -ln\ q\ n.$$

$$M_{Z_n}(t) = \frac{p}{e^{-t/n} - q} = \frac{p}{e^{-t/n} - 1 + p} = \frac{p}{p + (e^{-t/n} - 1)}.$$

Vamos usar

$$p_n = \frac{\lambda}{n}.$$

$$M_{Z_n}(t) = \frac{\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n} + (e^{-t/n} - 1)}.$$

multiplicando por n temos:

$$M_{Z_n}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + n\ (e^{-t/n} - 1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\ M_{Z_n}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \lim\limits_{n\to\infty}\ n\ (e^{-t/n} - 1)} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Vamos analisar a condição de existência:

$$t < -nln(q) = -nln(1 - \frac{\lambda}{n}) = \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ t < \ln\left(\lim_{n\to\infty}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n}\right) = \ln(e^{\lambda}) = \lambda.$$

Então,

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

Exemplo 7: Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (**v.a.i.i.d.**) com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e seja

$$Y_n = min(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Mostre que

$$Z_n = nY_n \xrightarrow{D} Y \sim Exp(1).$$

Solução: A função densidade de Y_n é dada por:

$$f_{Y_n}\ (y) = n\,[1 - F(y)]^{n-1}\ f(y),$$

$$f_{Y_n}\ (y) = n\,[1 - y]^{n-1}\ I_{(0,1)}\ (y).$$

A f.g.m. de Y_n é dada por:

$$M(t,n) = \int_0^1 e^{ty}\, n\, [1-y]^{n-1}\ dy.$$

A f.g.m. de Z_n é dada por:

$$M_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{t\, Z_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\, n\, Y_n}\right].$$

Assim,

$$M_{Z_n}(t) = \int_0^1 e^{nty}\, n\, [1-y]^{n-1}\ dy.$$

Parece que é difícil obter o limite.

Vamos obter a densidade de $Z_n = n\, Y_n$.

$$G_{Z_n}(z) = \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \mathbb{P}(X_n \leq \frac{z}{n}) = F_{X_n}\ (z/n).$$

Assim,

$$g_{Z_n}(z) = \frac{1}{n}\ f_{X_n}(z/n)$$

$$g_{Z_n}(z) = \frac{1}{n}\ n \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{n-1}\ I_{(0,1)}\ (\frac{z}{n}).$$

$$g_{Z_n}(z) = \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{n-1}\ I_{(0,n)}\ (z).$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty}\ g_{Z_n}(z) = \lim_{n\to\infty}\ \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{n-1}\ I_{(0,n)}\ (z).$$

$$\lim_{n\to\infty}\ g_{Z_n}(z) = e^{-z}\ I_{(0,\infty)}\ (z)\ ,$$

pois,

$$\lim_{n\to\infty}\ \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\ \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{n}\ \times \lim_{n\to\infty}\ \left[1 - \frac{z}{n}\right]^{-1}\ e^{-z}\ \times 1 = e^{-z}.$$

3 Convergência em Distribuição

Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Sejam F_{X_n} e F_X ,respectivamente, as funções de distribuição acumuladas de X_n e X. Seja $C(F_X)$ o conjunto de todos os pontos em que F_X é contínua. Dizemos que X_n converge em distribuição para X se

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in C(F_X).$$

Exemplo 8: Sejam $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n de $X \sim Exp(1)$. Determine a distribuição limite de

$$Z_n = (Y_n - \log(n)).$$

Solução: A acumulada do máximo Y_n é dada por:

$$G_{Y_n}(y) = [F(y)]^n.$$

$$G_{Y_n}(y) = \left[1 - e^{-y}\right]^n \quad I_A(y), \quad A = (0, \infty).$$

A acumulada de Z_n é dada por:

$$H_n(z) = I\!P(Z_n \leq z) = I\!P((Y_n - \log(n) \leq z) = I\!P(Y_n \leq z + \log(n))$$

$$H_n(z) = G_{Y_n}(z + \log(n)) = \left[1 - e^{-z-log(n)}\right]^n,$$

$$H_n(z) = \left[1 - e^{-z}e^{-log(n)}\right]^n = \left[1 - e^{-z}\frac{1}{n}\right]^n,$$

$$H_n(z) = \left[1 - \frac{e^{-z}}{n}\right]^n.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{e^{-z}}{n}\right]^n = e^{-e^{-z}} = H(z),$$

qu é acumulada de uma Gumbel padrão.

Exemplo 9: Seja X_n uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta sobre $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ usando a técnica da Função de distribuição acumulada responda: Qual a distribuição limite de

$$Y_n = \frac{X_n}{n}?$$

Solução: A função de probabilidade de X_n é dada por:

$$P(X_n = x) = \frac{1}{n+1}\, I_{A_n}\,(x).$$

A função de distribuição acumulada de X_n é dada por:

$$F_{X_n}(x) = 0 \quad se \;\; x < 0.$$

e

$$F_{X_n}(x) = 1 \quad se \;\; x > n.$$

Para $0 \leq x \leq n$ temos:

$$F_{X_n}(x) = I\!P(X_n \leq x) = \frac{[x]}{n+1}.$$

A função de distribuição acumulada de Y_n

Como

$$0 \leq X_n \leq n$$

temos:

$$0 \leq \frac{X_n}{n} \leq 1.$$

Assim

$$0 \leq Z_n \leq 1.$$

Seja $H_n(z)$ a função de distribuição acumulada de Z_n. Assim,

$$H_{Z_n}(z) = 0 \quad se \; z < 0.$$

e

$$H_{Z_n}(z) = 1 \quad se \; z > 1.$$

Para $0 \leq z \leq 1$ temos:

$$H_{Z_n}(x) = I\!\!P(Z_n \leq z) = I\!\!P(X_n \leq nz) = \frac{[nz]+1}{n+1},$$

$[a]$ é o maior inteiro que não ultrapassa a.

Note que

$$nz < [nz] + 1 \leq (nz + 1).$$

Dividindo por $n+1$ temos:

$$\frac{nz}{n+1} < \frac{[nz]+1}{n+1} \leq \frac{nz+1}{n+1}.$$

$$\frac{z}{1+1/n} < \frac{[nz]+1}{n+1} \leq \frac{z+1/n}{1+1/n}.$$

Aplicando limites temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z-1/n}{1+1/n} < \lim_{n\to\infty} \frac{[nz]}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{z}{1+1/n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} z < \lim_{n\to\infty} H_n(z) \leq z.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z) = z.$$

Seja

$$H(z) = z\, I_{(0,1)}(z) + I_{[1,\infty]}\,(z),$$

que é a acumulada da uniforme padrão.

Exemplo 10: Seja $\{X_n,\ n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias com distribuições geométricas com parâmetros

$$p_n = \frac{\lambda}{n},\ \ 0 < \lambda < n.$$

Seja

$$Z_n = \frac{X_n}{n},\ \ n \geq 1.$$

Prove que

$$Z_n \xrightarrow{D} \ Z \ \sim \ Exp(\lambda)$$

através da técnica da Acumulada.

Solução: A função de sobrevivência de $X \sim Geo(p)$ é dada por:
Sejam $x \geq 1$ e $a = [x]$ o maior inteiro que não ultrapassa x.

$$I\!\!P(X_n > x) = I\!\!P(X_n \geq [x] + 1) = \sum_{x=a+1}^{\infty} p\, q^{x-1} = p\frac{q^a}{p} = q^a = q^{[x]}.$$

A função de sobrevivência de Z_n é dada por:

$$I\!\!P(Z_n > z) = I\!\!P(X_n > nz) = q^{[nz]} = \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{[nz]}.$$

Sabemos que :

$$\left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz-1} < I\!\!P(Z_n > z) \leq \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{[nz]} \leq \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz}.$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{-1} \ \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz} < I\!\!P(Z_n > z) \leq \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{[nz]} \leq \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz}.$$

Aplicando limites temos para:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{-1} \ \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz} < \lim_{n\to\infty} I\!\!P(Z_n > z) \leq \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{[nz]} \leq \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = e^{-\lambda\, z},$$

que é a sobrevivência da exponencial de parâmetro λ.

Note que :

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{nz} = e^{-\lambda z}.$$

4 Teorema do Limite Central

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição X com média μ e variância $\sigma^2 > 0$. Então, a variável aleatória

$$Y_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \sqrt{n}\ \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right),$$

converge em distribuição para uma variável aleatória que tem lei normal padrão.

Prova Vamos supor que adicionalmente a função geradora de momentos de X , $M(t)$ existe para $-h < t < h$. Pode-se substituir a f.g.m. pela função característica que sempre existe. Para facilitar vamos centrar a variável X

$$U = X - \mu,$$

Seja $m(t)$ a f.g.m. de U. Assim

$$m(t) = \mathbb{E}(e^{tU}) - \mathbb{E}(e^{t(X-\mu)}) = \mathbb{E}(e^{tX} e^{-\mu t}) = e^{-\mu t}\, M(t),$$

que existe para $-h < t < h$. Note que:

a $m(0) = 1$.

b. $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X - \mu) = m'(0) = 0$.

c. $\mathrm{Var}(U) = \mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = m''(0) = \sigma^2$.

Vamos expandir $m(t)$ em série de Taylor. Então existe un número ξ entre 0 e t tal que:

$$m(t) = m(0) + m'(0)\, t + \frac{m''(\xi)\, t^2}{2}.$$

$$m(t) = 1 + \frac{m''(\xi)\, t^2}{2}.$$

Vamos somar e subtrair $\frac{\sigma^2\, t^2}{2}$, então

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2\, t^2}{2} - \frac{\sigma^2\, t^2}{2} + \frac{m''(\xi)\, t^2}{2}.$$

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2 \, t^2}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \, t^2}{2}. \tag{6}$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} U_i = S_n.$$

Além Se

A função geradora de momentos de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por:

$$M_{S_n}(t) = I\!E \left(e^{t(U_1+U_2+\ldots+U_n)} \right)$$

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} I\!E(e^{tU_i}) = m(t)^n.$$

A função geradora de momentos de $Y_n = \frac{S_n}{\sigma \, \sqrt{n}}$ é dada por:

$$M_{Y_n}(t) = I\!E(e^{t \, \frac{S_n}{\sigma \, \sqrt{n}}}) = m \left(\frac{t}{\sigma \, \sqrt{n}} \right)^n,$$

com

$$-h < \frac{t}{\sigma \, \sqrt{n}} < h.$$

Na equação **2** vamos trocar t por $\frac{t}{\sigma \, \sqrt{n}}$.
Assim,

$$-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n},$$

$$-h\sigma \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} < \lim_{n\to\infty} t < h\sigma \lim_{n\to\infty} \sqrt{n},$$

$$-\infty < t < \infty.$$

$$m(\frac{t}{\sigma \, \sqrt{n}}) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \, t^2}{2n\sigma^2}. \tag{7}$$

$$M_{Y_n}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \, t^2}{2n\sigma^2} \right]^n \tag{8}$$

Fazendo em **4**

$$\psi(n) = \frac{[m''(\xi) - \sigma^2]\, t^2}{2\sigma^2}.$$

Assim temos:

$$M_{Y_n}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\psi(n)}{n}\right]^n \tag{9}$$

Desde que $m^{''}(t)$ é contínua em $t = 0$ e desde que

$$0 < \xi < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$$

Aplicando limite

$$0 < \lim_{n\to\infty} \xi < \frac{t}{\sigma} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \xi = 0$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} [m"(\xi) - \sigma^2] = m''(0) - \sigma^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0.$$

Analisando **5** e fazendo $b = \frac{t^2}{2}$ e $c = 1$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}},$$

que é a função geradora de momentos da normal padrão.

Exemplo 11 Seja $X \sim$ Poisson(λ).
Seja

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Mostre que $\lambda \to \infty$,

$$Y \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Solução: Vamos utilizar o seguinte fato:

Seja $Y = aX + b$, em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X. Assim,

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{t(aX+b)}) = \mathbb{E}(e^{t(aX)e^t b}) = e^{bt} M_X(at).$$

Assim,

$$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, X - \sqrt{\lambda} = aX + b,$$

coma $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ e $b = -\sqrt{\lambda}$.

A função geradora de momentos de X é dada por:

$$M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)), \forall t \in \Re.$$

A função geradora de momentos de Y é dada por:

$$M_Y(t) = e^{-t\sqrt{\lambda}}\, M\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Aplicando logaritmo neperiano

$$\log\left[M_Y(t)\right] = -t\sqrt{\lambda} + \log\left[M\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$= -t\sqrt{\lambda} + \lambda\left(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1\right)$$

Expandindo em série de Taylor temos:

$$= -t\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{3!\lambda^{3/2}} + \dots\right)$$

$$= -t\sqrt{\lambda} + t\sqrt{\lambda} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!\lambda^{1/2}} + \dots.$$

$$\log\left[M_Y(t)\right] = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!\lambda^{1/2}} + \dots.$$

Segue que:

$$\log\left[M_Y(t)\right] \to \frac{t^2}{2} \text{ quando } \lambda \to \infty,$$

pela continuidade do limite temos:

$$M_Y(t) \to e^{\frac{t^2}{2}} \quad \text{quando } \lambda \to \infty,$$

que a f.g.m. da normal padrão.

Exemplo 12: Considere um experimento que consiste em lançamentos (independentes) sucessivos de um dado equilibrado e no registro das correspondentes somas parciais dos números observados. Seja T o número de lançamentos necessários para que a soma parcial dos números ultrapasse 336. Determine, aproximadamente, $P(T \geq 106)$.

Observação: Aceita-se uma resposta em termos da função de distribuição Normal (0,1).

Solução O enunciado pede

$$P(T > 336).$$

Seja X a face que aparece quando se joga um dado uma única vez. Assim

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{6} \; I_{\{1,2,3,4,5,6\}}\,(x).$$

A média de X é dada por:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} x,$$

$$\mu = \frac{1}{6} \; [1+2+3+4+5+6] == \frac{1}{6} \; \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} x^2,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \; \left[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right] == \frac{1}{6} \; \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{91}{6}.$$

$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. A soma dos pontos acumulados até a n-ésimo lançamento é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Vamos a probabilidade pedida em termos de S_n.

$$\mathbb{P}(T > 105) = \mathbb{E}(S_{105} < 336) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{105} X_i. < 336\right)$$

$$\mathbb{P}(T > 105) \approx \Phi(\frac{336 - n\mu}{\sqrt{n}\ \sigma}) =$$

```
> mu=3.5
> sigma2=35/12;sigma2
[1] 2.916667
> sigma=sqrt(sigma2);sigma
[1] 1.707825
> n=105
> z=(336-n*mu)/(sqrt(n)*sigma);z
[1] -1.8
>
```

Logo

$$\mathbb{P}(T > 105) \approx P(Z > -1,8) = P(-Z < 1,8) = P(-Z < 1,8)$$

$$= P(-Z < 1,8) = P(Z < 1,8) = \Phi(1,8) = 0,964.$$

```
> pnorm(1.8)
[1] 0.9640697
>
```

5 Exercícios

1. Mostre que:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

2. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t}\, dt.$$

3. Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias em que X_n tem distribuição gama com parâmetros n e $\beta > 0$. Calcule o limite em distribuição de $Z_n = \frac{X_n}{n}$?

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ **v.a.i.i.d.** com função de distribuição **F** que possui uma densidade **f**. Seja

$$M_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

e considere a sequencia $\{Y_n, n \geq 1\}$ em que

$$Y_n = [1 - F(M_n)].$$

Ache o limite em distribuição de Y_n.

5. Seja $\{X_n, n \geq 2\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias independentes tais que:

$$X_n \sim \text{ Bernoulli}(1/n).$$

Defina a variável

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

como o número de sucessos nas primeiras n realizações.

Mostre que

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - log\ n \right) \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Sugestão

a. Note que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - logn \right)$$

tende para a constante $\gamma = 0,577215...$, conhecida como constante de Euler, quando $n \to \infty$.

b.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Seja $X \sim t(n)$. Ache a distribuição limite de X quando $n \to \infty$.

7. Seja $X \sim \chi^2(n)$. Ache a distribuição limite de

$$Y_n = \frac{X_n}{n^2}.$$

8. Seja $X \sim BN(r_n\ ,\ 1 - p_n)$. Mostre que

$$X_n \xrightarrow{L} X \sim Poisson(\lambda)$$

quando $r_n \to \infty$, $p_n \to 0$ de tal sorte que $r_n\, p_n \to \lambda$.

9. Seja $X \sim BN(r\ ,\ p)$. Mostre que

$$Y = 2pX \xrightarrow{L} Z \sim \chi^2(2r)$$

quando $p \to 0$.

10. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes com a mesma distribuição $X_i \sim U[0,1]$.

Sejam $m_n = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $M_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(a) Achar a esperança da variável $Y_n = M_n - m_n$.

(b) Encontrar a função distribuição acumulada $n\, m_n$,

$$F_n(x) = \mathbb{P}(n\, m_n \leq x)$$

Obtenha a função distribuição acumulada limite

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

. Existe variável aleatória cuja função distribuição acumulada é F?. Se sim, qual é a sua média?

11. A distribuição conjunta de duas variáveis **X** e **Y** é dada pela densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{2na^2x^{n-1}}{y^{n+3}} \ \mathbf{1}_{[0,y]}\ (x)\ \ \mathbf{1}_{(a,\infty)}\ (y), \quad a > 0, n \in \{1, 2, \ldots.\}$$

   (a) Obter a função de distribuição acumulada de X dado que $Y = y, y > a$, isto é, achar $F^{(n)}(t) = P(X \leq t|Y = y),\ t \in \mathbf{R}$.

   (b) Obter $E(X|Y = y)$.

   (c) Obter limite $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(t), \quad t \in \mathbf{R}.$. Exiba uma variável aleatória cuja função de distribuição acumulada coincide com esse limite $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(t), \quad t \in \mathbf{R}$.

12. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequencia de variáveis aleatórias contínuas tais que a função densidade de probabilidade de X_n, f_n é dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}\, x^n, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{n+1}{2}\,(2-x)^n, & \text{se } 1 < x < 2 \\[2ex] 0, & \text{caso \ contrário.} \end{cases}$$

   Seja $Y_n = min\{X_n, 2 - X_n\}, \quad n \geq 1$.

   (a) Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória de Y_n, F_n, $n \geq 1$, dada por $F_n(y) = P(Y_n \leq y),\ y \in \mathbb{R}$.

   (b) Para cada $y \in \mathbb{R}$ ache o limite, $F(y) = \lim_{n\to\infty} F_n(y)$. Exiba a variável aleatória cuja função de distribuição acumulada é $F(y)$.

13. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e tais que, para cada n, X_n tem a densidade $n(1-x)^{n-1}$, se $x \in (0, 1)$ e caso $x \notin (0, 1)$ (isto é, X_n é distribuído seguindo o modelo Beta de parâmetros 1 e n). Para cada $n \geq 1$, seja $T_n = (1 - X_n)^n$.

   (a) Para cada $n \geq 1$, obtenha a distribuição de T_n.

(b) Calcule, aproximadamente, a probabilidade do evento $\{T_1 + T_2 + \cdots + T_{108} > 50\}$.

14. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, seja X_n uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dada por:

$$P(X_n = j) = \frac{2j}{n(n+1)},\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obtenha:

(a) a função de distribuição acumulada da variável aleatória cada $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

(b) o limite, em distribuição, da sequencia $(Y_n)_{n \geq 1}$.

15. Um sistema eletrônico com um grande número de componentes independentes e identicamente distribuídos funciona se, e somente se, o número de componentes funcionando for maior do que 1000. Os estados dos componentes são representados por variáveis aleatórias de Bernoulli, $X_i,\ 1 \leq i \leq N$, que assumem valores iguais a 1, se o componente i funciona e iguais a 0 se o componente i não funciona, com $I\!P(X_i = 1) = 0,92$.
Para otimizar a confiabilidade do sistema o número N de componentes pode ser maior do que 1000, permitindo redundâncias, contudo, por limitações no orçamento, o número de componentes do sistema é estimado por

$$N = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 1000\}.$$

Qual a probabilidade aproximada de que N seja maior que 1100?

16. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis independentes tais que $\forall\ n \geq 1$, X_{2n-1} é distribuída segundo o modelo uniforme em $(0, 1)$ e X_{2n} é distribuída segundo o modelo Beta de parâmetros 2 e 1, isto é, a função densidade de probabilidade de X_{2n} é dada por

$$f(t) = 2t,\ 0 < t < 1,\ \text{e}\ \ f(t) = 0,\ \ \text{caso} \quad \text{contrário}.$$

a) Determine a probabilidade do evento $\{X_1 + X_2 > 3/2\}$.

b) Determine uma aproximação para a probabilidade do evento

$$\{\sum_{i=1}^{300} I_{(3/2\,,\,\infty)}(X_{2i-1}+X_{2i}) > 95\},$$

onde $I_A(.)$ denota a função indicadora do conjunto A (isto é, $I_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $I_A(x) = 0$, caso contrário).

- Observação: Você pode exibir a resposta em termos da função de distribuição do modelo Normal $(0, 1)$.

17. Para cada $n \geq 1$, seja X_n uma variável aleatória segundo o modelo exponencial de média n. Determine F_n : a função de distribuição de

$$X_n - 10\left[\frac{X_n}{10}\right],$$

onde $[u]$ denota o maior inteiro menor ou igual a u. Qual é o limite de F_n quando $n \longrightarrow +\infty$?

18. (a) Calcule as funções geradoras de probabilidade das distribuições Poisson(μ) e Binomial(n, p), onde $\mu \in (0, \infty)$, $n \geq 1$ e $p \in (0, 1)$.

    (b) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que, para $n \geq n_0$, X_n é distribuída segundo o modelo Binomial($n, \lambda/n$), onde $\lambda \in (0, \infty)$ está fixo e n_0 é um número inteiro maior do que λ. Ache o limite da função geradora de probabilidade de X_n quando $n \to \infty$. O que se pode dizer do limite em distribuição de $(X_n)_{n\geq 1}$?

19. A duração em meses de uma pilha usada por João no seu aparelho mp3 tem distribuição uniforme em $(1, 2)$. Suponha que João troca a pilha por uma nova imediatamente após ela ficar gasta. Estime a probabilidade de que ele use mais do que 27 pilhas em um período de 42 meses.

    Observação: O seu resultado pode ser escrito em termos da função de distribuição da normal padrão.

20. Uma pessoa distribui jornais aos transeuntes na esquina de uma metrópole. Suponha que cada pessoa que passa pelo entregador pega um exemplar do jornal com probabilidade 1/3, independentemente das demais. Seja N o número de pessoas que passam pelo entregador até que sejam as

primeiras 600 cópias. Estime a probabilidade de que N seja maior que 1740.

Observação: O seu resultado pode ser escrito em termos da função de distribuição da normal padrão.

21. Um dado honesto é lançado 43 vezes. Calcule a probabilidade aproximada que a média geométrica dos resultados seja pelo menos 2,33. (Obs: aceita-se uma resposta em termos da função distribuição da Normal Padrão).

    dica: A média geométrica de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$.

22. Considere um experimento que consiste em lançamentos sucessivos de um dado. Quando o resultado do dado for 1,2 ou 3, anotamos o número 1, se o resultado for 4, anotamos o número 2 e se o resultado do dado for 5 ou 6, anotamos o número 3. Seja N : Número de lançamentos necessários para que o produto dos números anotados ultrapasse 100.000. Calcule aproximadamente
    $P[N \geq 25]$.

    (Obs. Aceita-se uma resposta em termos da função de distribuição da Normal padrão).

23. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis independentes tais que $X_n \sim Beta(n, 1)$.

    dica: Dizemos que $X \sim Beta(a, b)$ se sua densidade é proporcional a $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ para $0 \leq x \leq 1$.

    (a) Obtenha a distribuição de $Y_n = -n\ log X_n$;

    (b) Encontre uma aproximação para a probabilidade do evento

    $$\{\prod_{n=1}^{100} (X_n)^n < e^{-105}\}$$

    apresentando a resposta em termos da função de distribuição da Normal padrão.

24. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes, positivas e absolutamente contínuas com funções de distribuições $F_1, F_2, \ldots$, respectivamente.

    Ache a função de distribuição de

$$Y_i = \int_0^{X_i} \frac{d\, F_i(x)}{1 - F_i(x)}.$$

Seja

$$U_n = \prod_1^n \left[F_i(X_i)\right],$$

e calcule o limite em distribuição de

$$Z_n = \frac{\sum_1^n Y_i - n}{\sqrt{n}\, U_n^{1/n}}.$$

25. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal padrão.

    Defina

$$U_n = \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \ldots + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}},$$

$$V_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$

    e

$$Z_n = \frac{U_n}{V_n}.$$

    Encontre a distribuição limite de Z_n.

    Sugestão:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos xt}{1 + x^2}\ dt = e^{-|t|}.$$

26. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua $F(x)$.

    a. Encontre a função de densidade de probabilidade de

$$Y = tan(\pi\ F(X) - \frac{\pi}{2}).$$

b. Se $Y_1, Y_2, \ldots$ são cópias independentes de Y, e encontre a distribuição limite de

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n}{n}.$$

27. Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a $X \sim \text{Unif}(0,1)$. Considere para $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Considere a variável

$$Z_n = n(1 - Yn).$$

Mostre que ela converge em distribuição para $Z \sim Exp(1)$.

28. Seja $\{X_n, \quad n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias tais que $X_n \sim$ Binomial (n, p_n) com

$$np_n = \lambda_n \;\; e \;\; \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} I\!P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}.$$

29. Se X tem distribuição hipergeométrica de parâmetros N, m, n, isto é,

$$I\!P(X = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}},$$

$$max(0, m + n - N) \leq i \leq min(n, m).$$

Se $M, m >> n$ e $p = \frac{m}{N}$ mostre que

$$I\!P(X = i) \approx \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$