CC0303 -Tópicos Especiais em Probabilidade

Limites Importantes- Aula - 10/10/2023

Prof. Maurício Mota

Vamos apresentar alguns limites importantes usados em Inferência e Probabilidade.

1. Suponha que b e c não dependem de n e $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = 0$

   Assim

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right]^{cn} = e^{bc},$$

   Note que se $\psi(n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{b}{n}\right]^{cn} = e^{bc},$$

   Além disso se $b = c = 1$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n} = e.$$

Exemplo 1:

Vamos calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^3}{n^{3/2}}\right]^{-n/2}.$$

O primeiro passo é arrumar na forma dada:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-t^2)}{n} + \frac{t^3/\sqrt{n}}{n}\right]^{-n/2}.$$

Assim temos

$$b = -t^2; \quad c = -\frac{1}{2} \quad ; \; \psi(n) = \frac{t^3}{\sqrt{n}},$$

com b e c não dependendo de n.

Note que

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{\sqrt{n}} = 0.$$

Assim

$$bc = \frac{t^2}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^3}{n^{3/2}}\right]^{-n/2} = e^{t^2/2}.$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} n\left[e^{a/n}-1\right]=a.$$

A expansão em série de Taylor de e^a é dada por:

$$e^a=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}=1+a+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^i}{i!}=$$

Assim

$$e^{a/n}=1+\frac{a}{n}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^i}{n^i\,i!}$$

Assim

$$e^{a/n}-1=\frac{a}{n}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^i}{n^i\,i!}$$

Multiplicando por n temos:

$$n\left[e^{a/n}-1\right]=a+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^i}{n^{i-1}\,i!}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^i}{n^{i-1}\,i!}=0$$

Note que $i\geq 2$ temos $i-1\geq 1$ e o denominador vai para infinito, provando assim o limite desejado.

3.
$$\lim_{n\to\infty}\left[e^{a/n}\right]=1.$$