Testes de Moses e Ansari-Bradley

Neves, N

23 de novembro de 2017

Natacha Neves

natacha_neves@hotmail.com (mailto:natacha_neves@hotmail.com)

http://lattes.cnpq.br/5137044427781447 (http://lattes.cnpq.br/5137044427781447)

Universidade Estadual da Paraíba

http://departamentos.uepb.edu.br/estatistica/corpo-docente/
(http://departamentos.uepb.edu.br/estatistica/corpo-docente/)

Centro de Ciência e Tecnologia

Departamento de Estatística

UEPB - CCT - DE

Teste de Moses

Moses propôs um teste para a igualdade de parâmetros de dispersão. Onde, esse teste não assume o parâmetro de igualdade de localização.

SUPOSIÇÕES

- Os dados consistem em 2 amostras aleatórias: $X_1, \ldots, X_n$ & $Y_1, \ldots, Y_n$ da população 1 e 2, respectivamente;
- A distribuição da população é contínua e é medida em, pelo menos, escala intervalar;
- As duas amostras são independentes.

Procedimento Geral

1. Hipóteses

- Bilateral

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

- Unilateral

Parte inferior da cauda:

$H_0 : \sigma_1 \geq \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$

Parte superior da cauda:

$H_0 : \sigma_1 \leq \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$

2. Nível de Significância
$\alpha = 0.05$

3. Estatística de teste

$$T = S - \frac{m_1(m_1 + 1)}{2}$$

4. Cálculo

- Divida as duas observações em subamostras de k tamanhos iguais aleatoriamente;
- Para cada amostra calcular a soma dos quadrados (*SQ*);
- Organizar a *SQ* em ordem crescente e atribua classificações;
- Encontre S e T.

5.Região Crítica

- Bilateral

$$W_{\alpha/2} \leq T \leq W_{1-\alpha/2}, \quad \text{onde} \quad W_{1-\alpha/2} = n_1 n_2 - W_{\alpha/2}$$

- Parte inferior da cauda:

$$T < W_\alpha$$

- Parte superior da cauda:

$$T < W_{1-\alpha}, \quad \text{onde} \quad W_{1-\alpha} = n_1 n_2 - W_\alpha$$

EXEMPLO

Verifique se esses dados fornecem evidências suficientes para indicar uma diferença de dispersão entre as duas populações representadas pelas amostras observadas, com 5% de significância.

Valores de X

```
X<-c(26,35,13,30,14,36,32,16,28,17,18,23,21,17,24,27,23,34,26,29,52,44,16,35)
```

Valores de Y

```
Y<-c(47,65,61,66,61,48,51,64,55,44,51,68,80,56,59,65,76,60,58,58,58)
```

Hipóteses

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Nível de significância

$$\alpha = 0.05$$

Estatística de teste

$$T = S - \frac{m_1(m_1+1)}{2}$$

Cálculos

Temos que K = 4 então, $m_1 = 6$ e $m_2 = 5$ (descarte 1 valor)

Subdivisão aleatória das observações de X

Subamostras	Observações	Soma dos Quadrados
1	26, 32, 35, 24	78.75
2	26, 36, 18, 23	172.75
3	18, 16, 30, 13	166.75
4	35, 27, 29, 29	38.75
5	52, 17, 14, 17	978.00
6	21, 44, 23, 34	341.00

Subdivisão aleatória das observações de Y

Subamostras	Observações	Soma dos Quadrados
1	60, 58, 48, 61	106.75
2	80, 58, 58, 61	336.75
3	54, 56, 51, 51	113.00
4	55, 44, 66, 65	317.00
5	59, 76, 68, 47	465.00

Soma dos Quadrados e os ranks correspondentes

SQ (Grupo de X)	Rank	SQ (Grupo de Y)	Rank
38.75	1	106.75	3
78.75	2	113.00	4
166.75	5	317.00	7
172.75	6	336.75	8
341.00	9	465.00	10
978.00	11		
Total	34		

$$T = S - \frac{m_1(m_1+1)}{2}$$

$$T = 34 - \frac{6(6+1)}{2} = 13$$

Região crítica

$$W_{\alpha/2} \leq T \leq W_{1-\alpha/2}, \quad \text{onde} \quad W_{1-\alpha/2} = n_1 n_2 - W_{\alpha/2}$$

Decisão

$$W_{\alpha/2} \leq T \leq W_{1-\alpha/2}$$
$$W_{\alpha/2} = 4 \quad \text{usando} \quad n_1 = 4 \quad \text{e} \quad n_2 = 5 \quad (\text{Tabela A.7})$$
$$W_{1-\alpha/2} = 26 \quad \text{usando} \quad W_{1-\alpha} = n_1 n_2 - W_{\alpha/2}$$

Então,

$$W_{\alpha/2} \leq T \leq W_{1-\alpha/2}$$
$$4 \leq 13 \leq 26 \quad \text{Logo, não Rejeita-se } H_0$$

VANTAGENS

- Não depende dos parâmetros de localização iguais nas suposições (mediana).

Desvantagens

- Ineficiente;
- Pessoas diferentes que aplicam o teste obtêm valores diferentes devido ao processo ser aleatório;
- Uma subdivisão pode levar a resultados significativos onde outros não.

Teste de dispersão (Ansari-Bradley)

O teste *Ansari-Bradley* é uma alternativa não paramétrica ao teste F de duas amostras com variâncias iguais. Não requer a suposição de que x e y vêm de distribuições normais.
A dispersão de uma distribuição é geralmente medida pela sua variação ou desvio padrão, mas o teste *Ansari-Bradley* pode ser usado com amostras de distribuições que não possuem variações finitas.
Este teste exige que as amostras tenham medianas iguais. Sob essa suposição, e se as distribuições das amostras forem contínuas e idênticas, o teste é independente das distribuições. Se as amostras não tiverem as mesmas medianas, os resultados podem ser equivocados.
Nesse caso, Ansari e Bradley recomendam subtrair a mediana, mas a distribuição do teste resultante sob a hipótese nula não é mais independente da distribuição comum de x e y.

Problemas de Interesse

Como problema de localização de duas amostras, temos $N = m + n$ observações:

- $X_1; \dots; X_m$ são amostras aleatórias *iid* da população 1;
- $Y_1; \dots; Y_n$ são amostras aleatórias *iid* da população 2.

Queremos fazer inferências sobre a diferença nas distribuições:

- Temos que F_1 e F_2 indicam distribuições das populações 1 e 2;
- A hipótese nula é a de que as distribuições são iguais, ou seja, $(F_1(z) = F_2(z) \quad \text{para todos os z's})$.

Usando o modelo de parâmetro de localização-escala, temos:

- $F_1(z) = G([z - \theta_1]/\eta_1)$ e $F_2(z) = G([z - \theta_2]/\eta_2)$;
- θ_j e η_j são, mediana e parâmetros de escala para a população j.

SUPOSIÇÕES

Dentro da suposição de independência da amostra:

- $X_1; \ldots ; X_m$ são amostras aleatórias *iid* da população 1;
- $Y_1; \ldots ; Y_n$ são amostras aleatórias *iid* da população 2.

Entre a suposição de independência da amostra:

- Amostras $[X_i]_{i=1}^{m}$ e $[Y_i]_{i=1}^{n}$ são mutuamente independentes.

Suposição de continuidade: tanto F_1 quanto F_2 são distribuições contínuas.

Suposição de localização: $\theta_1 = \theta_2$ ou θ_1 e θ_2 são conhecidos.

Parâmetros de Interesse e Hipóteses

Parâmetro de interesse é a razão das variâncias:

$$\gamma^2 = \frac{V(X)}{V(Y)}$$

De modo que $\gamma^2 = 1$ sempre que $V(X) = V(Y)$.

A hipótese nula sobre γ^2 é:

$$H_0 : \gamma^2 = 1$$

e poderíamos ter uma das três hipóteses alternativas:

- Unilateral à direita: $H_1 : \gamma^2 > 1$;
- Unilateral à esquerda: $H_1 : \gamma^2 < 1$;
- Bilateral: $H_1 : \gamma^2 \neq 1$.

Teste Estatístico

Temos que $[Z_{(k)}]_{k=1}^{N}$ indica sequências estatísticas das amostras combinadas e atribui as classificações dos ranks:

$$R_k^* = \begin{cases} 1, 2, 3, \ldots, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 3, 2, 1; & \text{se N for par} \\ 1, 2, 3, \ldots, \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}, 2, 1; & \text{se N for ímpar} \end{cases}$$

para amostras combinadas $[Z_{(k)}]_{k=1}^{N}$.

O teste estatístico C de Ansari-Bradley é definido como:

$$C = \sum_{j=1}^{n} R_j$$

onde R_j é a classificação dos ranks atribuídos de Y_j para $j = 1, \ldots, n$.

Distribuição da Estatística de Teste sob H_0

Sob H_0 todos $\binom{N}{n}$ arranjos de Y-ranks ocorrem com probabilidades iguais:

Dado (N, n), calcular C para todo $\binom{N}{n}$ resultados possíveis;

- Cada resultado tem probabilidade $1/\binom{N}{n}$ sob H_0.

Exemplo de distribuição nula com $m = 3$ e $n = 2$:

Ranks-Y	C	Probabilidade sob H_0
1,2	3	1/10
1,3	4	1/10
1,4	3	1/10
1,5	2	1/10
2,3	5	1/10
2,4	4	1/10
2,5	3	1/10
3,4	5	1/10
3,5	4	1/10
4,5	3	1/10

Testando as hipóteses

Teste Unilateral à direita:

- $H_0 : \gamma^2 = 1$ versus $H_1 : \gamma^2 > 1$;
- Rejeitar H_0 se $C \geq c_\alpha$, onde $P(C > c_\alpha) = \alpha$.

Teste Unilateral à esquerda:

- $H_0 : \gamma^2 = 1$ versus $H_1 : \gamma^2 < 1$;
- Rejeitar H_0 se $C \leq [c_{1-\alpha} - 1]$.

Teste Bilateral:

- $H_0 : \gamma^2 = 1$ versus $H_1 : \gamma^2 \neq 1$;
- Rejeitar H_0 se $C \geq c_{\alpha/2}$ ou $C \leq [c_{1-\alpha/2} - 1]$.

Aproximação de grandes amostras

Sob H_0, o valor esperado e a variância de C são:

- Se N é par: $E(C) = \frac{n(N+2)}{4}$ e $V(C) = \frac{mn(N+2)(N-2)}{48(N-1)}$;
- Se N é ímpar: $E(C) = \frac{n(N+2)^2}{4N}$ e $V(C) = \frac{mn(N+1)(3+N^2)}{48N^2}$;

Podemos criar uma estatística de teste padronizada C^* da seguinte forma:

$$C^* = \frac{C - E(C)}{\sqrt{V(C)}}$$

que segue, assintoticamente, a uma distribuição $N(0,1)$.

Derivação da aproximação de grandes amostras

Note que temos $C = \sum_{j=1}^{n}$, a qual implica que:

- C/n é a média número de postos (combinados) de Y;
- C/n tem a mesma distribuição como a média amostral de tamanho n tirada de uma população finita sem reposição:

$$S = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 3, 2, 1\right\}, \quad \text{se N for par}$$
$$S = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}, 2, 1\right\}, \quad \text{se N for ímpar}$$

Usando alguns resultados básicos da teoria de população finita, temos:

- $E(C/n) = \mu$,
  Onde,

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S_k = \begin{cases} \frac{N+2}{4}, & \text{se N for par} \\ \frac{(N+1)^2}{4N}, & \text{se N for ímpar} \end{cases}$$

- $V(C/n) = \sigma^2 \frac{N-n}{n(N-1)}$, onde

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_k^2\right) - \mu^2 = \begin{cases} \frac{(N+2)(N-2)}{48}, & \text{se N for par} \\ \frac{(N+1)(N-1)(3+N^2)}{48N^2}, & \text{se N for ímpar} \end{cases}$$

Manipulação de laços

Se $Z_i = Z_j$ para qualquer uma das duas observações das amostras combinadas $(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$, então usa-se o procedimento de posição central:

- C é calculado da mesma forma (usando posições centrais);
- As posições centrais, com distribuição nula, é um teste de nível aproximado α;
- Ainda pode obter um teste de nível exato α *via* distribuição condicional.

Fórmulas da variância da aproximação de grandes amostras:

$$V_*(C) = \begin{cases} \frac{mn\left[16\sum_{j=1}^{g} t_j r_j^2 - N(N+2)^2\right]}{16N(N-1)}, & \text{se N for par} \\ \frac{mn\left[16\sum_{j=1}^{g} t_j r_j^2 - (N+1)^4\right]}{16N^2(N-1)}, & \text{se N for ímpar} \end{cases}$$

Onde,

- g é o número de grupos vinculados;
- t_j é o tamanho do grupo vinculado;
- r_j é o rank médio do grupo.

EXEMPLO

Alguns dados simulados:

X	R_k	**Y**	R_k
-0.63	(5)	0.78	(8)
0.18	(9)	-1.24	(2)
-0.84	(3)	-4.43	(1)
1.60	(5)	2.25	(1)
0.33	(10)	-0.09	(7)
-0.82	(4)	-0.03	(8)
0.49	(11)	1.89	(2)
0.74	(9)	1.64	(4)
0.58	(10)	1.19	(7)
-0.31	(6)	1.84	(3)
1.51	(6)		
$\sum$	78	$\sum$	43

Exemplo: Usando R (*Hard Way*)

```
set.seed(1)
x = round(rnorm(11),2)
y = round(rnorm(10,0,2),2)
m = length(x)
n = length(y)
N = m + n
z = sort(c(x,y),index=TRUE)
rz = seq(1,(N-1)/2)
rz = c(rz,(N+1)/2,rev(rz))
r = rz[sort(z$ix,index=TRUE)$ix]
sum(r[1:11])
```

```
## [1] 78
```

```
sum(r[12:21])
```

```
## [1] 43
```

Ex: Usando o R (*Easy Way*)

```
set.seed(1)
x = round(rnorm(11),2)
y = round(rnorm(10,0,2),2)
ansari.test(x,y)
```

```
##
##  Ansari-Bradley test
##
## data:  x and y
## AB = 78, p-value = 0.04563
## alternative hypothesis: true ratio of scales is not equal to 1
```

```
ansari.test(x,y,alternative="less")
```

```
##
##  Ansari-Bradley test
##
## data:  x and y
## AB = 78, p-value = 0.02282
## alternative hypothesis: true ratio of scales is less than 1
```