Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da UFC
CC0285- Probabilidade II
Quarta Provinha
Professor: Mauricio -06/09/2019

1. (Valor 10 pontos) Seja Z a normal padrão. Responda ao que se pede:

   a. Calcule $P(Z \leq -2,13)$.
   b. Calcule $P(-3,15 \leq Z \leq -1,74)$.
   c. Calcule $P(-1,56 \leq Z \leq 2,35)$.
   d. Calcule $P(Z \geq 2,31)$.
   e. Calcule $P(|Z| \geq 0,77)$.
   f. Qual o sexto decil de Z?
   g. Qual o primeiro quartil de Z?
   h. Mostre que Z é simétrica em torno da origem.
   i. Prove que a moda de Z é 0.
   j. Se $X = 2Z + 1$ identifique a lei de X.

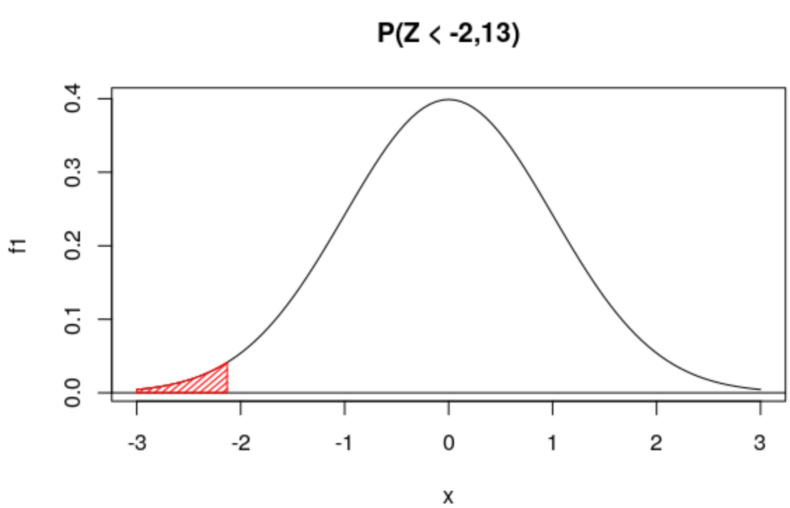
   OBs. O item j é para provar.

a. Calcule $\mathbb{P}(Z \leq -2,13)$.
RESOLUÇÃO:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq -2,13) &= \mathbb{P}(Z \leq 0) - \mathbb{P}(-2,13 \leq Z \leq 0) = 0,5 - \mathbb{P}(0 \leq 2,13) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq -2,13) = 0,5 - 0,48341 = 0,01659\end{aligned}$$

Fazendo no R, temos que:

```
####pa=P(Z <=-2,13)
>
> pa=pnorm(-2.13);pa;round(pa,5);0.5-0.48341
[1] 0.01658581
[1] 0.01659
[1] 0.01659
#GRAFICO HACHURADO:
> f1 = function(x) dnorm(x)
> plot(f1, -3,3, main = "P(Z < -2,13)")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(-3, seq(-3, -2.13, l=50),-2.13),
y = c(0, f1(seq(-3, -2.13,l=50)), 0),
col = "red", density = 30)
```



b. Calcule $\mathbb{P}(-3,15 \leq Z \leq -1,74)$.

RESOLUÇÃO:

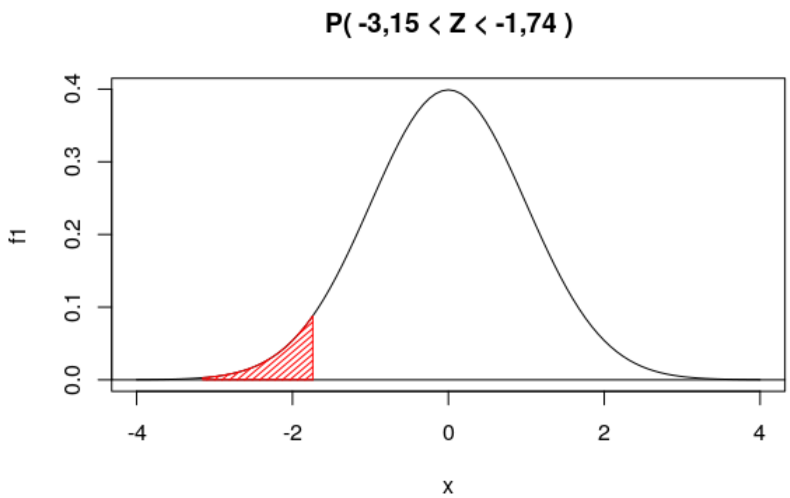
Por simetria temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-3,15 \leq Z \leq -1,74) = \mathbb{P}(1,74 \leq Z \leq 3,15) &\rightarrow \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 3,15) - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1,74) \\ &= 0,49918 - 0,45994 = 0,04011.\end{aligned}$$

Fazendo no R, temos que:

```
###pb=P(-3,15 <=Z <=-1,74)
>
>
> pb=pnorm(-1.74)-pnorm(-3.15);pb;round(pb,5)
[1] 0.04011316
[1] 0.04011
>
> pb1=pnorm(3.15)-pnorm(0);pb1;round(pb1,5)
[1] 0.4991836
[1] 0.49918
> pb2=pnorm(1.74)-pnorm(0);pb2;round(pb2,5)
[1] 0.4590705
[1] 0.45907
>
>
> round(pb1-pb2,5)
[1] 0.04011

#GRAFICO HACHURADO:
> plot(f1, -4,4, main = "P( -3,15 < Z < -1,74 )")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(-3.15, seq(-3.15, -1.74, l=50),-1.74),
  y = c(0, f1(seq(-3.15, -1.74,l=50)), 0),
          col = "red", density = 30)
```



c. Calcule $\mathbb{P}(-1,56 \leq Z \leq 2,35)$.
RESOLUÇÃO:

$$\mathbb{P}(-1,56 \leq Z \leq 2,35) = \mathbb{P}(-1,56 \leq Z \leq 0) + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2,35)$$

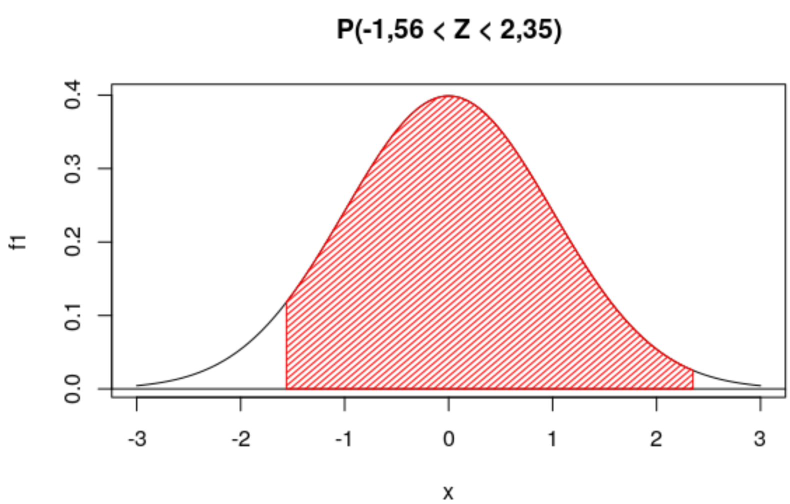
Por simetria temos que:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1,56) + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2,35) \\ &= 0,49062 + 0,40061 = 0,93123 \end{aligned}$$

Solução pelo R:

```
> ###pc=P(-1,56 <=Z <=2,35)
>
> pc=pnorm(2.35)-pnorm(-1.56);pc;round(pc,5)
[1] 0.9312334
[1] 0.93123
>
> pc1=pnorm(1.56)-pnorm(0);pc1;round(pc1,5)
[1] 0.4406201
[1] 0.44062
>
> pc2=pnorm(2.35)-pnorm(0);pc2;round(pc2,5)
[1] 0.4906133
[1] 0.49061
```

```
>
> round(pc1 +pc2,5)
[1] 0.93123
>
## GRAFICO HACHURADO:
> plot(f1, -3,3, main = "P(-1,56 < Z < 2,35)")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(-1.56, seq(-1.56, 2.35, l=50), 2.35),
  y = c(0, f1(seq(-1.56, 2.35,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
```



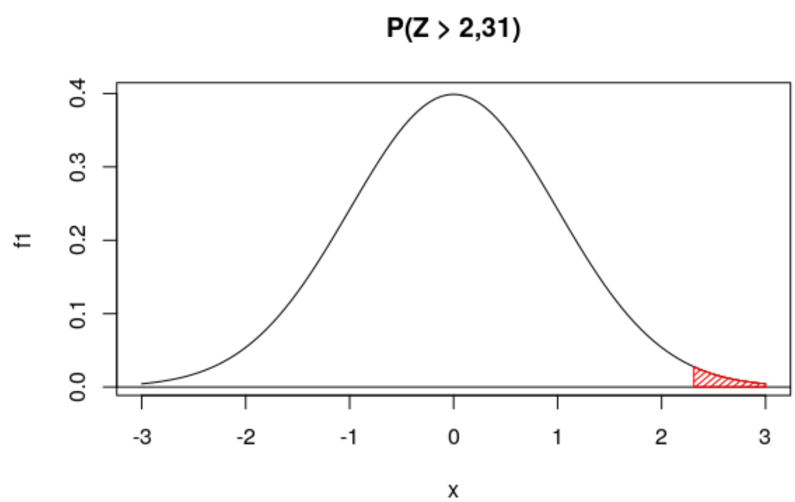
d. Calcule $\mathbb{P}(Z \geq 2,31)$.
SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq 2,31) &= \mathbb{P}(Z \geq 0) - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2,31) \\ &= 0,5 - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2,31) \\ &= 0,5 - 0,48956\end{aligned}$$

Solução pelo R:

```
> ##pd=P(Z >=2,31)
>
> pd= 1-pnorm(2.31);pd;round(pd,5)
[1] 0.01044408
```

```
[1] 0.01044
>
> ##outra maneira
>
> pnorm(2.31,lower.tail=F)
[1] 0.01044408
>
> pd1=pnorm(2.31)-pnorm(0);pd1;round(pd1,5)
[1] 0.4895559
[1] 0.48956
>
> pd=0.5-pd1;pd
[1] 0.01044408
## GRAFICO HACHURADO
> plot(f1, -3,3, main = "P(Z > 2,31)")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(2.31, seq(2.31, 3, l=50), 3),
  y = c(0, f1(seq(2.31, 3,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
```



e. Calcule $\mathbb{P}(|Z| \geq 0,77)$.

SOLUÇÃO:

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 0,77) = 2 \times \mathbb{P}(Z \geq 0,77)$$

Por simetria,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq 0,77) &= 0,5 - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 0,77) \\ &= 0,5 - 0,27935 = 0,22065\end{aligned}$$

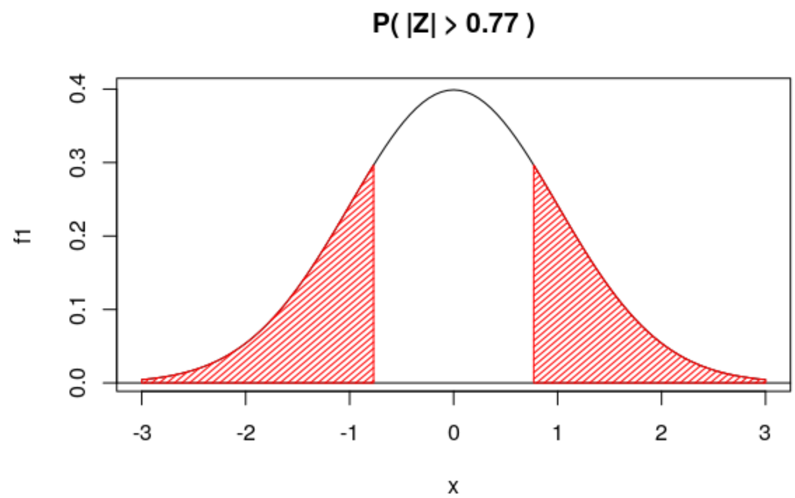
Portanto,

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 0,77) = 2 \times \mathbb{P}(Z \geq 0,77) = 2 \times 0,22065 = 0,4413$$

Solução pelo R:

```
> ###### pe=P(|Z|>=0,77)=2*P(Z>=0.77)=2*p1
>
> ##p1=0,5-P(0<=Z<0,77)=0,5-p2
>
> p2=pnorm(0.77)-1/2;p2
[1] 0.2793501
> p1=0.5-p2;p1
[1] 0.2206499
>
> pe=2*p1;pe;round(pe,5)
[1] 0.4412999
[1] 0.4413

## GRAFICO HACHURADO:
> plot(f1, -3,3, main = "P( |Z| > 0.77 )")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(0.77, seq(0.77, 3, l=50), 3),
  y = c(0, f1(seq(0.77, 3,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
> polygon(x = c(-3, seq(-3, -0.77, l=50), -0.77),
  y = c(0, f1(seq(-3, -0.77,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
```



f. Qual o sexto decil de Z?

SOLUÇÃO:

Seja D_6 o sexto decil de Z. Assim,

$$\phi(D_6) = \mathbb{P}(Z \leq D_6) = 0,6$$

Logo,

$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq D_6) = 0,1$$

Pela tabela da Normal Padrão temos:

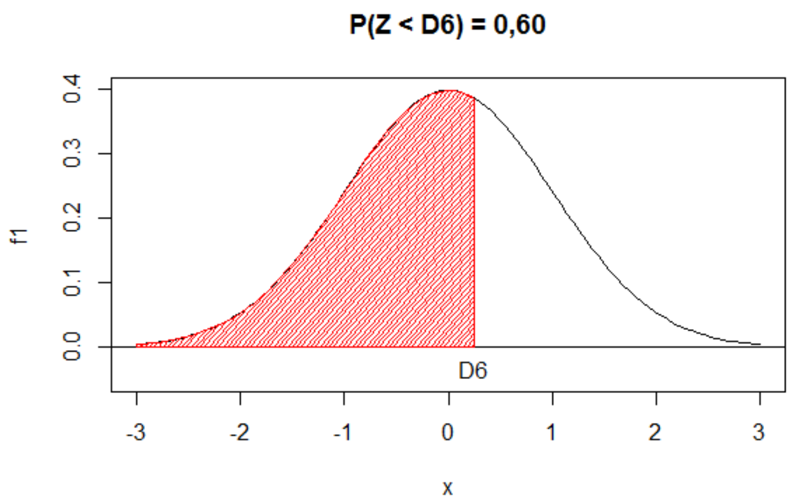
$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 0,25) = 0,09871 \approx 0,1.$$

$$D_6 = 0,25.$$

Usando o R:

```
> D_6=qnorm(0.60);D_6;round(D_6,2)
[1] 0.2533471
[1] 0.25

## GRAFICO HACHURADO:
> plot(f1, -3,3, main = "P(Z < 0,25)")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(-3, seq(-3, 0.25, l=50), 0.25),
  y = c(0, f1(seq(-3, 0.25,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
```



g. Qual o primeiro quartil de Z?
SOLUÇÃO:
Seja Q_1 o primeiro quartil de Z. Assim,

$$\phi(Q_1) = \mathbb{P}(Z \leq Q_1) = 0,25$$

Logo,

$$\mathbb{P}(Q_1 \leq Z \leq 0) = 0,25$$

E pela Simetria,

$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq -Q_1) = 0,25$$

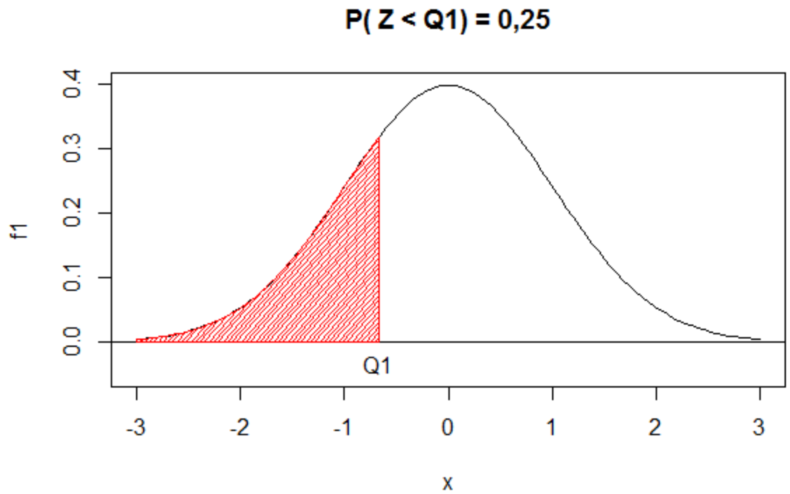
Pela tabela da Normal Padrão temos que:

$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 0,67) = 0,24857 \approx 0,25$$

Assim, $-Q_1 = 0,67 \rightarrow Q_1 = -0,67$. Solução pelo R:

```
> Q_1=qnorm(0.25);Q_1;round(Q_1,2)
[1] -0.6744898
[1] -0.67

#GRAFICO HACHURADO:
> plot(f1, -3,3, main = "P( Z < -0,67)")
> abline(h=0, col = "black")
> polygon(x = c(-3, seq(-3, -0.67, l=50), -0.67),
  y = c(0, f1(seq(-3, -0.67,l=50)), 0),
  col = "red", density = 30)
```



h. Mostre que Z é simétrica em torno da origem.
SOLUÇÃO 1:
A f.d.p de $Z \sim N(0,1)$ para z real é dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-z^2}{2}\right).$$

Devemos provar que $f(z) = f(-z)$ para todo z.
Logo,

$$f(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(-z)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) = f(z)$$

Portanto, a simetria em torno do zero está provada!

i. Prove que a moda de Z é 0.
SOLUÇÃO:
Seja

$$h(z) = log(f(z)) = -\left(\frac{1}{2}\right) log(2\pi) - \frac{z^2}{2}.$$

A derivada primeira de $h(z)$ é dada por:

$$h'(z) = -z.$$

A derivada segunda de

$$h''(z) = -1 < 0$$

Portanto,

$$h'(z) = 0 \rightarrow z = 0$$

Que é a moda procurada!

SOLUÇÃO 2:
Seja mo a moda de Z.
logo,

$$mo = max_z \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \right\}$$

$$mo = max_z \left\{ \frac{1}{exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)} \right\}$$

$$mo = min_z \left\{ \frac{z^2}{2} \right\} = min(z^2) = 0$$

Pois o menor valor de $z^2 \geq 0$ é $z = 0$

j. Se $X = 2Z + 1$ identifique a lei de X.
SOLUÇÃO 1:
Vamos calcular a acumulada G de X:

$$G_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(2Z + 1 \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-1}{2}\right) = \phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

Assim, $g_X(x) = G'_X(x)$, logo:

$$g(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(x-1)^2}{8}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(x-1)^2}{8}\right)$$

Portanto,

$$X \sim N(1, 4)$$

SOLUÇÃO 2: Pela Geradora de Momentos:

$$M_Z(t) = exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Vamos Calcular a F.G.M de $X = 2Z + 1$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

$$= \mathbb{E}(e^{t(2Z+1)})$$

$$= \mathbb{E}(e^{2tZ+t})$$

$$= \mathbb{E}(e^{2tZ} e^t)$$

$$= e^t \mathbb{E}(e^{(2t)Z})$$

$$= e^t M_Z(2t)$$

$$= e^t exp\left(\frac{4t^2}{2}\right)$$

$$= exp\left((t + \frac{4t^2}{2}\right)$$

Que caracteriza:

$$X \sim N(1,4)$$