1 Distribuição Normal Bivariada

Material didático pelo professor João Maurício Araújo Mota para a disciplina **CC085-Probabilidade II** ministrado em 2021.2.

Vamos iniciar com a definição.

Definição. Um vetor aleatório (X, Y) é dito possuir distribuição Normal Bivariada de parâmetros $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ se sua $f.d.p.c.$ é da forma

$$f(x, y) = \frac{1}{c}\ \exp\left(-\frac{Q(x, y)}{2(1-\rho^2)}\right) \underset{(-\infty,\infty)}{I}(x) \underset{(-\infty,\infty)}{I}(y) \ ,$$

onde

$$c = 2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sqrt{1-\rho^2},$$

e

$$Q(x, y) = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2.$$

Notação: $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

Os parâmetros μ_1 e μ_2 são reais, os parâmetros σ_1^2 e σ_2^2 são reais positivos e ρ é real no intervalo $(-1, 1)$.

1.1 Função Densidade de Probabilidade Conjunta

Devemos verificar se as condições abaixo são satisfeitas:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = 1$

Prova.
Notamos que a primeira condição é satisfeita, já que $c > 0$ e a função exponencial é sempre positiva. Para a segunda condição, seja

$$I \ = \ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c}\ e^{-\frac{Q(x,y)}{2(1-\rho^2)}}\ dydx$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$s = h_1(x,y) = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$$

e

$$v = h_2(x,y) = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

As funções inversas de h_1 e h_2 são dadas por:

$$w_1(s,v) = \mu_1 + \sigma_1 s \ \ e \ \ w_2(s,v) = \mu_2 + \sigma_2 v.$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial s} & \frac{\partial w_1}{\partial v} \\ \frac{\partial w_2}{\partial s} & \frac{\partial w_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2,$$

que é sempre positivo.

logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(w_1(s,v), w_2(s,v))\,|J|\,dv\,ds.$$

Assim,

$$Q(w_1(s,v), w_2(s,v)) = Q(\mu_1+\sigma_1 s, \mu_2+\sigma_2 v) = s^2 - 2\rho s v + v^2$$

Seja

$$N = s^2 - 2\rho s v + v^2$$

vamos completar os quadrados:

$$N = s^2 - 2\rho s v + v^2 = s^2 - 2s\rho v + v^2 = s^2 - 2\rho s v + \rho^2 v^2 - \rho^2 v^2 + v^2$$

Logo,

$$N = (s-\rho v)^2 + (1-\rho^2)v^2.$$

Daí

$$\frac{N}{2(1-\rho^2)} = \frac{(s-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{v^2}{2}.$$

Voltando ao cálculo da integral dupla I temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c}\, e^{-\frac{Q(w_1(s,v),w_2(s,v))}{2(1-\rho^2)}}\ |J| dvds \\
&= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N}{2(1-\rho^2)}}\ \sigma_1\ \sigma_2\ dvds \\
&= \frac{\sigma_1\ \sigma_2}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N}{2(1-\rho^2)}}\ dvds \\
&= \frac{\sigma_1\ \sigma_2}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{v^2}{2}}\ dsdv \\
&= \frac{\sigma_1\ \sigma_2}{2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\ dv\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}\ ds\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\ \sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\ dv\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}\ ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}\ dv\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(s-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}\ ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{v^2}{2}}\ dv \times 1 \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

pois a primeira integral é de uma normal $V \sim N(0,1)$ e segunda integral é de uma normal $S \sim N(\rho v, (1-\rho^2))$.

Vamos apresentar os gráficos que estão no capítulo 8 do Bussab&Morettin.

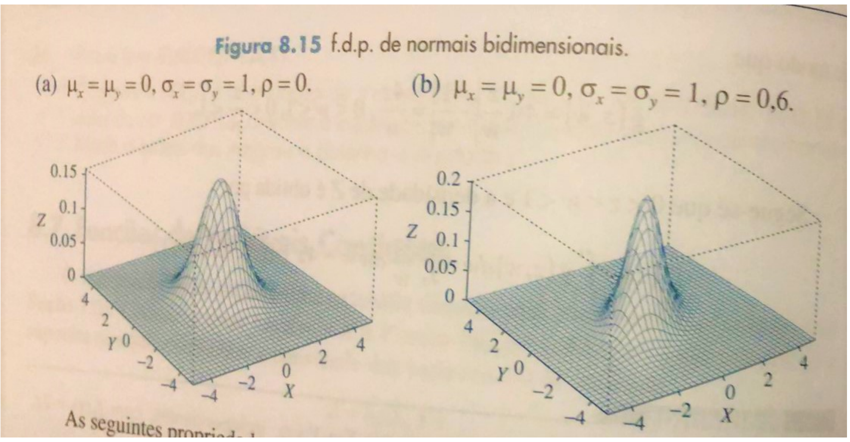

Figura 1:

1.2 Marginais

As marginais de X e Y são dadas por:

a. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

b. $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Prova.

A marginal de X é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\, Q(x,y)}\, dy
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança $z = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, temos

$$dz = \frac{dy}{\sigma_2}$$

assim $y = \mu_2 + \sigma_2 z$.
Vamos trabalhar um pouco com $Q(x, \mu_2 + \sigma_2 z)$:
Logo,

$$Q(x, \mu_2 + \sigma_2 z) = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) z + z^2.$$

Completando os quadrados na variável z temos:

$$Q(x, \mu_2 + \sigma_2 z) = \left(z^2 - 2\rho\, z \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} + \rho^2 \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \right).$$

Finalmente

$$Q(x, \mu_2 + \sigma_2 z) = \left(z - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2.$$

Logo,

$$\exp\left(\frac{Q(x, \mu_2 + \sigma_2 z)}{2(1-\rho^2)}\right) = \exp\left(- \frac{\left(z - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{2(1-\rho^2)} \right) \exp\left(- \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right).$$

Voltando para o cálculo da marginal de X temos:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c}\, \exp\left(-\frac{Q(x,y)}{2(1-\rho^2)}\right)\ dy \\
&= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{Q(x,\mu_2+\sigma_2 z)}{2(1-\rho^2)}\right)\ \sigma_2\, dz \\
&= \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(z-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right)\ \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\ dz \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(z-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\ \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\left(z-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\ \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\ \times I_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\ \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \times 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\ \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right),
\end{aligned}
$$

que é a densidade da $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ pois I_1 é a integral da $N\left(\rho\ \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\ ,\ \ 1-\rho^2\right)$.

1.3 Condicionais

As condicionais de $Y|X = x$ e $X|Y = y$ são dadas por:

a.
$$Y|X = x \sim N\left(\mu_2 + \rho\,\sigma_2\,\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, (1-\rho^2)\sigma_2^2\right).$$

b.
$$X|Y = y \sim N\left(\mu_1 + \rho\,\sigma_1\,\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}, (1-\rho^2)\sigma_1^2\right).$$

Prova.

A condicional de $Y|X = x$ é dada por:

$$\begin{aligned}
f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{c}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\,Q(x,y)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1}{c}\;\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\;Q(x,y) + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\;\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\;Q(x,y) - \frac{(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\;\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\;Q(x,y) - \frac{(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$Q(x,y) = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\,\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2.$$

Logo,

$$M = Q(x,y) - \frac{(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

e

$$M = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\,\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

vamos simplificar M

$$M = \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\rho\,\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2.$$

Assim,

$$M = \frac{1}{\sigma_2^2}\ \left[(y-\mu_2)^2 - 2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)(x-\mu_1) + \rho^2\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\ (x-\mu_1)^2\right].$$

Logo,

$$M = \frac{\left(y-\mu-\rho\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2}{\sigma_2^2}$$

$$M = \frac{\left(y-\mu_{y|x}\right)^2}{\sigma_2^2},$$

em que

$$\mu_{y|x} = \mu + \rho\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = \mu_2 - \rho\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \rho\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x = a + bx.$$

Assim, a condicional de de $Y|X = x$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\ \sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[Q(x,y) - \frac{(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\ \sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\left(y-\mu_{y|x}\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right), \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma^2_{y|x} = (1-\rho^2)\ \sigma^2$ temos que

$$Y|X = x \sim N(\mu_{y|x}, \sigma^2_{y|x}).$$

O gráfico da curva de regressão de X sobre $Y = y$ é uma função afim cujo gráfico é apresentado a seguir:

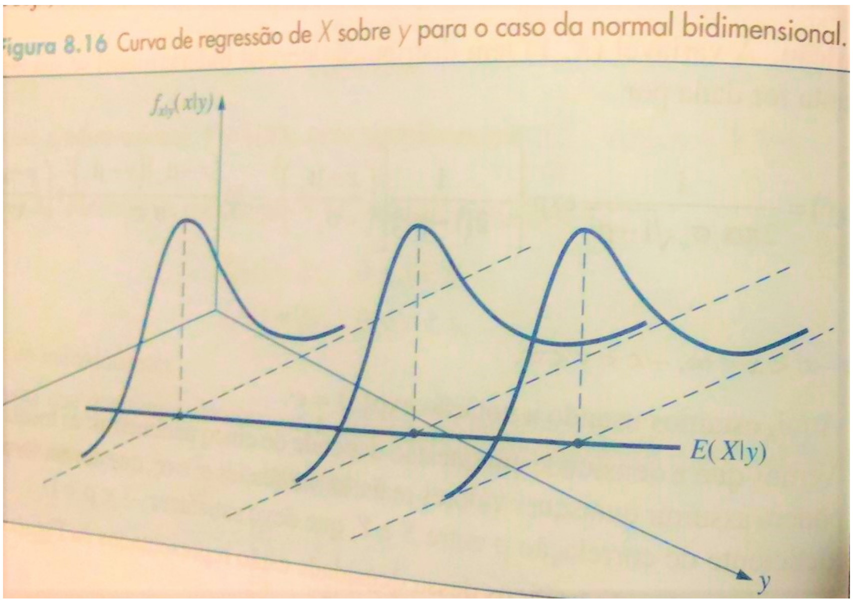

Figura 2:

Exemplo 1: Suponha que X seja a altura e Y o peso de uma pessoa selecionada aleatoriamente de uma população. Suponha que (X, Y) tenha uma distribuição normal bivariada de parâmetros $(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

Queremos predizer o peso Y de uma dada pessoa quando sua altura X é conhecida ou não usando o menor erro quadrático médio.

Quando o peso não é conhecido a melhor previsão é a média $E(Y) = \mu_2$ e o erro quadrático médio da previsão é a $V(Y) = \sigma_2^2$.

Se o peso $X = x$ é conhecido a melhor previsão é a média condicional

$$E(Y|X = x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

e o erro quadrático médio da previsão é a $V(Y|X = x) = (1 - \rho^2)\sigma_2^2$.

Se chamarmos $z = f(x, y)$ então fazendo:

$$z = c,$$

constante, determina sobre a superfície uma **curva de nível** que é uma elipse se as variâncias são distintas.

Variando c, segundo Bussab & Morettin teremos as diversas curvas de nível que são curvas em que a densidade de probabilidade é constante), semelhantes às curvas de nível de um mapa de relevo. Se as variâncias são iguais e a correlação é nula teremos círculos como curvas de nível.

Vamos apresentar a figura 8.17 do livro do Bussab & Morettin.

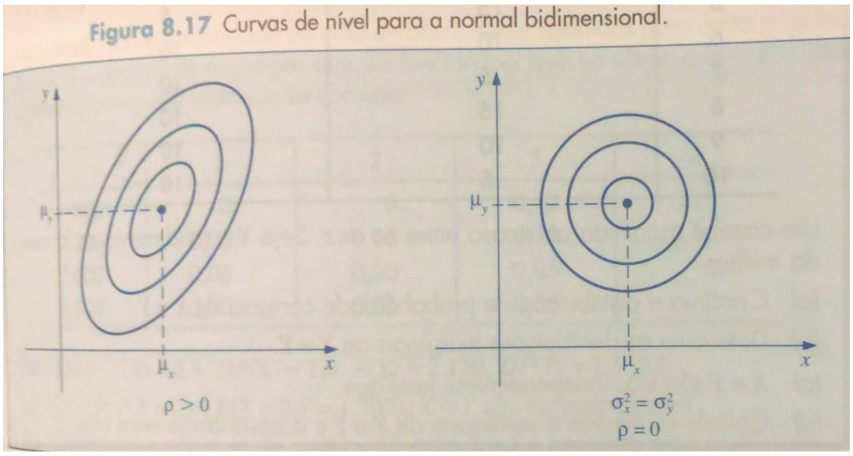

Figura 3:

1.4 Função Geradora de Momentos da Normal Bivariada

A função geradora de momentos da Normal bivariada é dada por:

$$M(t_1, t_2) = exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2\right]\right),$$

t_1 e t_2 reais.

Prova.

Vamos inicialmente mostrar que a f.g.m. de $(Z_1, Z_2) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$ é dada por:

$$M_{(Z_1,Z_2)}(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{1}{2}\left[t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right]\right).$$

Além disso sabemos que $X = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$ e $Y = \mu_2 + \sigma_2 Z_2$ tem distribuição normal bivariada de parâmetros $(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

Assim a função geradora de momentos de X, Y em função da geradora de momentos de (Z_1, Z_2) é dada por:

$$\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \exp\left(t_1 X + t_2 Y\right) \\
&= \exp\left(t_1(\mu_1 + \sigma_1 Z_1) + t_2(\mu_2 + \sigma_2 Z_2)\right) \\
&= \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \sigma_1 t_1 Z_1 + \sigma_2 t_2 Z_2\right) \\
&= \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2\right) \;\; exp\left(\sigma_1 t_1 Z_1 + \sigma_2 t_2 Z_2\right) \\
&= \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2\right) \;\; M_{(Z_1,Z_2)}(\sigma_1 t_1, \sigma_2 t_2) \\
&= \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2\right) \;\; \exp\left(\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2\right]\right)
\end{aligned}$$

Logo para terminar a prova basta calcular a função geradora de momentos de (Z_1, Z_2). Assim,

$$\begin{aligned}
M_{(Z_1,Z_2)}(t_1, t_2) &= E[\exp(t_1 Z_1 + t_2 Z_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[exp(t_1 z_1 + t_2 z_2)\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\; \exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\; \left[z_1^2\right. \\
&- \left. 2\rho t_1 t_2 + z_2^2\right])\; dz_1\, dz_2 \\
&= exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left[t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right]\right).
\end{aligned}$$

Vamos trabalhar com a expressão:

$$K_1 = t_1 z_1 + t_2 z_2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\;\left[z_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + z_2^2\right],$$

que pode ser posta na forma:

$$K_1 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[-2(1-\rho^2)(t_1 z_1 + t_2 z_2) + z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2\right].$$

Considere

$$K_2 = -2(1-\rho^2)t_1z_1 - 2(1-\rho^2)t_2z_2 + z_1^2 - 2\rho z_1z_2 + z_2^2,$$

e

$$K_2 = z_1^2 - 2z_1\left[\rho z_2 + (1-\rho^2)t_1\right] + z_2^2 - 2(1-\rho^2)t_2z_2,$$

$$K_2 \;=\; (A + z_2^2 - 2(1-\rho^2)\; t_2z_2 \;\;)$$

em que

$$A = z_1^2 - 2z_1(\rho z_2 + (1-\rho^2)t_1$$

completando os quadrados na variável z_1 temos:

$$A = z_1^2 - 2z_1(\rho z_2 + (1-\rho^2)t_1 + [\rho z_2 + (1-\rho^2)t_1]^2 - [\rho z_2 + (1-\rho^2)t_1]^2$$

$$A = \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - \rho^2z_2^2 - 2\rho(1-\rho^2)t_1z_2 - (1-\rho^2)^2t_1^2.$$

Substituindo em

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - \rho^2z_2^2 - 2\rho(1-\rho^2)t_1z_2 - (1-\rho^2)^2t_1^2 + z_2^2 \\
&- 2(1-\rho^2)t_2z_2 + z_2^2 - 2(1-\rho^2)t_2z_2 \\
&= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 + (1-\rho^2)[z_2^2 - 2z_2(t_2+\rho t_1) - (1-\rho^2)t_1^2] \\
&= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - (1-\rho^2)B
\end{aligned}$$

em que

$$B = z_2^2 - 2z_2[t_2 + \rho t_1] - (1-\rho^2)t_1^2$$

completando os quadrados na variável z_2 temos:

$$\begin{aligned}
B &= z_2^2 - 2z_2[t_2 + \rho t_1] - (1-\rho^2)t_1^2 \\
&= z_2^2 - 2z_2[t_2 + \rho t_1] + [t_2 + \rho t_1]^2 - [t_2 + \rho t_1]^2 - (1-\rho^2)t_1^2 \\
&= (z_2 - t_2 - \rho t_1)^2 - t_2^2 - 2\rho t_1t_2 - \rho^2t_1^2 - (1-\rho^2)t_1^2 \\
&= (z_2 - t_2 - \rho t_1)^2 - \left(t_1^2 + 2\rho t_1t_2 + t_2^2\right)
\end{aligned}$$

Assim K_2 fica:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - \rho^2z_2^2 - 2\rho(1-\rho^2)t_1z_2 + (1-\rho^2)^2t_1^2 + z_2^2 - 2(1-\rho^2)\; t_2z_2 \\
&= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - \rho^2z_2^2 - (1-\rho^2)(B) \\
&= \left(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 - \rho^2z_2^2 - (1-\rho^2)\,(B)
\end{aligned}$$

finalmente K_1 pode ser expresso como:

$$K_1 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left((z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1\right)^2 + (1-\rho^2)(B)\right].$$

Logo,

$$\exp(K_1) = \exp\left(-\frac{(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right)\exp\left(-\frac{(z_2 - t_2 - \rho t_1)^2}{2}\right).$$

Depois desta maratona algébrica e fazendo $c_1 = \exp\left(t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right)$ temos:

$$\begin{aligned}
M_{(Z_1,Z_2)}(t_1,t_2) &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_1 - t_2 - \rho t_1)^2}{2}\right) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(z_1 - \rho z_2 - (1-\rho^2)t_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dz_2 dz_1 \\
&= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_1 - t_2 - \rho t_1)^2}{2}\right) \times 1 \\
&= c_1 \\
&= \exp\left(t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right).
\end{aligned}$$

Vamos calcular a função geradora de Y a partir da geradora bivariada de (X, Y).

Exemplo :
Identifique a marginal de Y usando a função geradora de momentos da Normal bivariada.

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= M_{(X,Y)}\,(0,t) \\
&= exp\left(\mu_1 \times 0 + \mu_2 t + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 \times 0^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \times 0t + \sigma_2^2 t^2\right]\right) \\
&= exp\left(\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right),
\end{aligned}$$

que é a função geradora de momentos da $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

1.5 Função Geradora de Cumulantes da Normal Bivariada

A função geradora de cumulantes da Normal bivariada é dada por:

$$K(t_1,t_2)=\left(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2+\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2+\sigma_2^2 t_2^2\right]\right),$$

t_1 e t_2 reais.

Prova.

Como $K(t_1,t_2)=ln[M(t_1,t_2)]$ a prova é imediata.

1.6 Momentos

Na Normal bivariada temos:

a. $E(X)=\mu_1$.

b. $E(Y)=\mu_2$.

c. $V(X)=\sigma_1^2$.

d. $V(Y)=\sigma_2^2$

e. $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

f. $Corr(X,Y)=\rho$

g. $E(XY)=\rho\sigma_1\sigma_2+\mu_1\mu_2$.

Prova.

Vamos precisar das seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \mu_1+\sigma_1^2 t_1+\rho\sigma_1\sigma_2 t_2. \tag{1}$$

$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \mu_2+\sigma_1^2 t_2+\rho\sigma_1\sigma_2 t_1. \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1^2} = \sigma_1^2. \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_2^2} = \sigma_2^2. \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \rho\sigma_1\sigma_2. \tag{5}$$

Utilizando 1 temos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_1}(0,0) \\
&= \mu_1 + \sigma_1^2 0 + \rho\sigma_1\sigma_2 0 \\
&= \mu_1.
\end{aligned}
$$

Utilizando 2 temos:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2}(0,0) \\
&= \mu_2 + \sigma_1^2 0 + \rho\sigma_1\sigma_2 0 \\
&= \mu_2.
\end{aligned}
$$

Utilizando 3 temos:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1^2}(0,0) \\
&= \sigma_1^2
\end{aligned}
$$

Utilizando 4 temos:

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= \frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_2^2}(0,0) \\
&= \sigma_2^2.
\end{aligned}
$$

Utilizando 5 temos:

$$
\begin{aligned}
Cov(Y) &= \frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}(0,0) \\
&= \rho\sigma_1\sigma_2.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
Corr(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} \\
&= \rho.
\end{aligned}
$$

Fato: Se $(X,Y) \sim N_(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ então X e Y são independentes se e só se $\rho = 0$.

Prova.

Vamos supor inicialmente que $\rho = 0$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma 2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^1} + \exp(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^1}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^1}\right) \\ &= f_X(x) \times f_Y(y), \end{aligned}$$

logo X e Y são independentes.

A volta é bastante conhecida se X e Y são independentes então a correlação é nula.

Exemplo: Suponha que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y|X = x \sim N(x, \tau^2)$.
Identifique a distribuição de Y.

Solução:
Vamos calcular inicialmente a média , a variância de Y e a covariância entre X e Y .

Sabemos que

$$E(Y) = E[E(Y|X)] = E(X) = \mu,$$

e

$$V(Y) = V[E(Y|X)] + E(Var(Y|X)) = V(X) + E(\tau^2) = \sigma^2 + \tau^2.$$

A covariância entre X e Y é dada por:

$$Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y|X)) = Cov(X,X) = V(X) = \sigma^2.$$

O coeficiente de correlação é dado por:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2\ \tau^2}} = \frac{\sigma}{\tau}.$$

A função geradora de momentos de X é dada por

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

e a função geradora de momentos de $Y|X$ é dada por

$$M(t) = \exp\left(X\ t + \frac{\tau^2 t^2}{2}\right).$$

A função geradora de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[E(e^{tY}|X)\right] = E\left[M_{Y|X}(t)\right] = E\left[\exp\left(t\,X + \frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\right],$$

Assim,

$$M_Y(t) = \exp\left(\frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\;\; E\left[\exp(tX)\right] = \exp\left(\frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\;\; M_X(t),$$

Finalmente,

$$M_Y(t) = \exp\left(\frac{\tau^2 t^2}{2}\right)\;\; \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{(\sigma^2+\tau^2)t^2}{2}\right),$$

que é a geradora de momentos da $N(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.

Outra solução:

Vamos calcular a conjunta de (X, Y). Sabemos que:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\;\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

e a condicional de $Y|X = x$ é dada por:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\exp\left(-\;\frac{(y-x)^2}{2\tau^2}\right).$$

logo $f(x, y) = f_X(x) \times f_{Y|X=x}(y)$ é dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\;\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(y-x)^2}{\tau^2}\right)\right].$$

Temos que simplificar a expressão:

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(y-x)^2}{\tau^2} = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(x-yx)^2}{\tau^2} \tag{6}$$

Vamos utilizar o seguinte resultado:

$$K = a(x-m)^2 + b(x-n)^2 = (a+b)(x-c)^2 + \frac{ab}{a+b}(n-m)^2, \tag{7}$$

onde

$$c = \frac{am+bn}{a+b}.$$

Comparando 6 com 7 temos:

$$a = \frac{1}{\sigma^2},\;\; b = \frac{1}{\tau^2}, m = \mu, n = y.$$

Além disso

$$a+b = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\ \tau^2},$$

$$\sqrt{a+b} = \frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}{\sigma\ \tau},$$

$$\sqrt{ab} = \frac{1}{\sigma\ \tau}.$$

Além disso

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\ \tau^2}\sigma^2\ \tau^2 = \sigma^2+\tau^2.$$

E finalmente K fica:

$$K = (a+b)(x-c)^2 + \frac{ab}{a+b}(y-\mu_1)^2$$

A conjunta de (X,Y) pode ser posta na forma:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{K}{2}\right)$$

e

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{ab}{a+b}(y-\mu_1)^2\right)\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ (a+b)(x-c)^2\right)$$

A marginal de Y é dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{ab}{a+b}(y-\mu_1)^2\right)\ \int_{-\infty}^{\infty}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ (a+b)(x-c)^2\right)\ dx$$

Analisando a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ (a+b)(x-c)^2\right)\ dx$$

vemos que seu núcleo é de uma normal com média c e variância $\frac{1}{a+b}$.
Assim,

$$I = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{2\pi}\frac{\sigma\ \tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

finalmente,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{ab}{a+b}(y-\mu_1)^2\right)\ \sqrt{2\pi}\frac{\sigma\ \tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}},$$

assim,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\ \ \exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{ab}{a+b}(y-\mu_1)^2\right),$$

assim Y tem distribuição normal de média μ_1 e variância dada por:

$$V(Y) = \frac{a+b}{ab} = \sigma^2 + \tau^2.$$

1.7 Transformações

Se

$$(X, Y) \sim N_(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

então:

a. $S = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$

Prova.

Seja $M_S(t)$ a função geradora de momentos de S. Assim:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left(e^{tS}\right) \\
&= E\left(e^{t(X+Y)}\right) \\
&= E(e^{tX+tY}) \\
&= M_{(X,Y)}(t,t) \\
&= \exp\left(\mu_1 t + \mu_2 t + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t^2 + \sigma_2^2 t^2\right]\right) \\
&= \exp\left((\mu_1 + \mu_2)\, t + \frac{t^2}{2}\left[\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right]\right),
\end{aligned}$$

assim

$$S = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2).$$

b. $D = X - Y \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)$

Prova.

Seja $M_D(t)$ a função geradora de momentos de D. Assim:

$$\begin{aligned}
M_D(t) &= E(e^{tD}) \\
&= E(e^{t(X-Y)}) \\
&= E(e^{tX-tY}) \\
&= M_{(X,Y)}(t,-t) \\
&= \exp\left(\mu_1 t - \mu_2 t + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 t^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 t^2 + \sigma_2^2 t^2\right]\right) \\
&= \exp\left(\left(\mu_1 - \mu_2\right) t + \frac{t^2}{2}\left[\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right]\right),
\end{aligned}$$

assim

$$D = X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2).$$

c. A distribuição conjunta de $(S, D) = (X + Y, X - Y)$ é dada por:

$$(S, D) \sim N_2(\mu_1 + \mu_2, \mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2).$$

Prova.

Seja $M_{S,D}(t_1, t_2)$ a função geradora de momentos bivariada de (S, D). Assim:

$$\begin{aligned}
M_{(S,D)}(t_1, t_2) &= E(e^{t_1 S + t_2 D}) \\
7 & \\
&= E(e^{t_1(X+Y) + t_2(X-Y)}) \\
&= E(e^{(t_1+t_2)X + (t_1) - t_2 Y}) \\
&= M_{(X,Y)}(t_1 + t_2, t_1 - t_2) \\
&= \exp\left(\mu_1(t_1 + t_2) + \mu_2(t_1 - t_2)\right) + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2(t_1 + t_2)^2 + \right. \\
&+ \left. 2\rho\sigma_1\sigma_2(t_1 + t_2)(t_1 - t_2) + \sigma_2^2(t_1 - t_2)^2\right]\big) \\
&= \exp\left((\mu_1 + \mu_2)t_1 + (\mu_1 - \mu_2)t_2 \; + \frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)t_1^2 + \right.\right. \\
&+ \left. 2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)t_1 t_2 + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)\big) t_2^2\right],
\end{aligned}$$

que é a função geradora de momentos de uma normal bivariada com parâmetros

$$(\mu_1+\mu_2, \mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2, cov(S,D)=\sigma_1^2-\sigma_2^2).$$

A correlação entre S e D é dada por

$$\begin{aligned}\rho_{S,D} &= \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)\times(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\\ &= \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^4+\sigma_2^4+2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\end{aligned}$$

Assim $S=X+Y$ e $D=X-Y$ serão independentes quando a correlação for nula, isto é,

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2.$$

1.8 Notação matricial

É comum usar a representação matricial para apresentar os parâmetros da Normal Bivariada.

Assim,

Seja

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N_2\left(\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y)\end{bmatrix}, \Sigma=\begin{bmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y)\end{bmatrix}\right).$$

Assim vetor aleatório

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

tem distribuição normal bivariada com vetor de médias

$$\mu=\begin{bmatrix} E(X)=\mu_1 \\ E(Y)=\mu_2 \end{bmatrix}$$

e matriz de variâncias e covariâncias

$$\Sigma=\begin{bmatrix} V(X)=\sigma_1^2 & Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2 \\ Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2 & V(Y)=\sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Duas medidas são avaliadas a partir matriz de variâncias e covariâncias Σ que são: a Variância Total que é definida por:

$$VT=tra(\Sigma)=\sigma_1^2+\sigma_2^2,$$

em que $tra(\Sigma)$ é o traço da matriz Σ.

A Variância Generalizada que é definida por:

$$VG=det(\Sigma)=|\Sigma|=\sigma_1^2\times\sigma_2^2\times(1-\rho^2).$$

A função densidade de probabilidade da Normal Bidimensional é dada por;

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \quad \exp\left(\left[\begin{array}{cc} x-\mu_1, & y-\mu_2 \end{array}\right] \Sigma^{-1} \left[\begin{array}{c} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{array}\right]\right)$$

A função geradora de momentos na normal bivariada é dada por:

$$M_{(}X,Y)(t_1,t_2) = \exp\left(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{t}\right),$$

em que $\boldsymbol{t}' = (t_1, t_2)$ e $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1, \mu_2)$.

1.9 Uso do Pacote R

O pacote **mvtnorm** do **F** trabalha com a normal p-variada. Vamos trabalhar o caso $p = 2$. O restante será tratado na disciplina Análise Multivariada.

```
 ###install.packages("mvtnorm")
>
>
> require(mvtnorm)
> dmvnorm(x=c(0,0));1/(2*pi)
[1] 0.1591549
[1] 0.1591549
>
> dmvnorm(x=c(0,0), mean=c(1,1))
[1] 0.05854983
>
>
> sigma <- matrix(c(4,2,2,4), ncol=2);sigma
      [,1] [,2]
[1,]    4    2
[2,]    2    4
> corr= matrix(c(1,0.5,0.5,1), ncol=2);corr
     [,1] [,2]
[1,]  1.0  0.5
[2,]  0.5  1.0
>
>
>
>
> simx <- rmvnorm(n=10, mu, sigma)
> simx
           [,1]      [,2]
[1,]  0.4523441 1.1609906
[2,]  3.7113279 3.6028725
[3,]  2.6862838 3.8286839
[4,] -1.0265359 2.7240578
[5,]  0.6605137 2.6690871
[6,] -0.4607973 0.7585085
[7,]  0.7930860 0.5253947
```

```
[8,]  3.6917726 3.1861488
[9,]  3.5937733 0.2498557
[10,]  1.7871541 2.5191137
>
> colMeans(simx)
[1] 1.588892 2.122471
> var(simx)
       [,1]      [,2]
[1,] 3.1131767 0.7393394
[2,] 0.7393394 1.7660402
>
>
>
> #####Vamos calcular probabilidades:
>
> ####(X_1,X_2)~N_2(0,0,0,1,1)
>
> ####P(-1 < X_1 <0, -1<X_2<0)=
>
>
>
> lower=c(-1,-1);lower
[1] -1 -1
>
> upper=c(0,0);upper
[1] 0 0
>
>
> ####X_1,e X_2 independentes. P(_1<X_1<0)*P(_1<X_1<0)=[P(_1<X_1<0)]^2
>
>
>
> (pnorm(0)-pnorm(-1))
[1] 0.3413447
> (pnorm(0)-pnorm(-1))^2
[1] 0.1165162
>
>
> prob <- pmvnorm(lower, upper, mean=c(0,0), corr=diag(2))
> print(prob)
[1] 0.1165162
attr(,"error")
[1] 1e-15
attr(,"msg")
[1] "Normal Completion"
>
> ####(X_1,X_2)~N_2(0,0,0,1,1,)
>
```

1.10 Exercícios

1. Seja (X, Y) tendo uma distribuição normal bivariada com médias $\mu_X = \mu_Y = 0$ e variâncias $\sigma_X^2 = 1$ e $\sigma_Y^2 = 2$ e $\rho = \frac{1}{2}$. Qual a variância condicional de Y dado $X = x$?

   A. $\frac{1}{2}$ B.$\frac{3}{4}$ C.1 D. $\frac{3}{2}$ E. 2.

2. Seja (X, Y) tendo uma distribuição normal bivariada com média comum μ e variância comum σ^2 e correlação ρ com $-1 < \rho < 1$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

   I. X e Y são independentes se e somente se $\rho = 0$.

   II. $Y - X$ tem distribuição normal se e somente se $\rho > 0$

   II. $Var(Y - X) < 2\sigma^2$ se e somente se $\rho < 0$.

   A. I e II somente.

   B. I e III somente.

   C. II e III somente.

   D. I, II e III.

   E. A resposta correta não é dada por A, B, C ou D.

3. A distribuição conjunta das variáveis aleatórias: X é o logaritmo natural das exportações do ano de 2017 medido em bilhões de dólares e Y é o logaritmo natural das importações do ano de 2017 medido em bilhões de dólares de um determinado país pode ser modelada como uma distribuição normal bivariada com:

$$\mu = \begin{bmatrix} 2,17 \\ 2,38 \end{bmatrix}$$

   e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 6,29 & 5,18 \\ 5,18 & 4,65 \end{bmatrix}.$$

   a. Dado que um país exportou 150 bilhões de dólares em 2017, quanto em média ele deve ter importado nesse ano? Qual o desvio padrão?

   b. Dado que um país importou 100 bilhões de dólares em 2017, quanto em média ele deve ter exportado nesse ano? Qual o desvio padrão?

   c. Determine a variância total e a variância generalizada.

4. Para quais valores de c as funções são legítimas densidades bivariadas normais. Para cada caso apresente os 5 parâmetros envolvidos.

   a. $f(x,y) = c\ \exp[-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)],\ \ (x,y) \in R^2.$

   b. $f(x,y) = c\ \exp[-(2x^2 - xy + 4y^2)],\ \ (x,y) \in R^2.$

   c. $f(x,y) = c\ \exp[-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{4})],\ \ (x,y) \in R^2.$

5. Sejam X a altura e Y o peso ao nascer de crianças de uma determinada cidade. Suponha que (X,Y) tenha distribuição normal bivariada com $\mu_1 = 50,8\ cm$, $\mu_2 = 3,4\ kg$, e $\sigma_1 = 3,8\ cm$, $\sigma_2 = 0,91\ kg$ e $\rho = 0.8$.

   a. Qual a altura esperada, ao nascer, de uma criança com 5,44 kg?

   b. Qual o peso esperado, ao nascer, de uma criança com 55,9 cm de altura?

6. Suponha que a distribuição conjunta do escore médio obtidos pelos estudantes de graduação em um determinado curso em seu primeiro ano (X) e o no último ano (Y) tenha uma distribuição normal bivariada com $\mu_1 = 65$, $\mu_2 = 80$, $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2\ kg$ e $\rho = 0.8$. Calcule a $P(Y > X)$, isto é , a probabilidade de que o estudante melhore com a maturidade.

7. Considere a distribuição normal bivariada com parâmetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$. Sejam

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2},\ \ Y_2 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} - \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}.$$

   Mostre que Y_1 e Y_2 são independentes.

8. Considere a distribuição normal bivariada com parâmetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$. Suponha que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Sejam $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$. Mostre que Y_1 e Y_2 são independentes.

9. Considere a distribuição normal bivariada com parâmetros $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1, \rho = 0,1$. Qual a f.d.p de $R^2 = X_1^2 + X_2^2$? Determine c tal que $P(R \leq c) = 0,90$.

10. Sejam X_1 e X_2 independentes com a mesma distribuição normal padrão.

    a. Ache a f.d.p.c de $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$

    b. Calcule a probabilidade $P(X_1 - X_2 < 0, X_1 + X_2 > 0)$.

    c. Sejam $Y_1 = X_1 \cos X_2$ e $Y_2 = X_1 \sin X_2$. Ache a f.d.p.c. de (Y_1, Y_2) bem como suas marginais.

11. Suponha que (X_1, X_2) tenha distribuição normal bivariada satisfazendo $E(X_1|X_2) = 3,7 - 0,15X_2$, e $E(X_2|X_1) = 0,4 - 0,6X_1$ e $Var(X_2|X_1) = 3,64$. Ache a média e a variância de $X_i, i = 1,2$ e a correlação entre X_1 e X_2.

12. Considere a distribuição normal bivariada com parâmetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$. Determine o valor da constante b para que $Var(X_1 + bX_2)$ seja mínimo.

13. Suponha que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que para cada x, a distribuição condicional de $Y|X = x \sim N(ax+b, \tau^2)$, em que a, b e τ^2 são contantes. Prove que a distribuição conjunta de (X, Y) é normal bivariada.

14. Considere que $X \sim N(a, b^2)$ e que para cada x, a distribuição condicional de $Y|X = x \sim N(x, \sigma_0^2)$. Qual a distribuição condicional de $X|Y = y$?

15. Seja

$$Y \sim N_2 \left(\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 9/50 & 2/50 \\ 2/50 & 6/50 \end{bmatrix} \right).$$

Calcular:

a. $E(Y_1 + Y_2)$;

b. $Var(3Y_1 - 2Y_2)$;

c. A correlação entre Y_1 e $3Y_2$;

d. Ache C' tal que $Z = C'\,Y$, onde $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$, Z_1 e Z_2 sejam estocasticamente independentes.

1.11 Bibliografia

1. Introduction To The Theory Of Statistics- Alexander M. Mood,Franklin A. Graybill & Duane c. Boes. Third Edition

   Foi usado o material contido nas páginas 162 a 169.

2. Probability and Statistics- Morris H. deGroot & Mark J. Schervish. Third Edition

   Foi usado o material contido nas páginas 313 a 318.

3. Estatística Básica- Wilton de O. Bussab % Pedro A. Morettin. Sexta edição.

   Foi usado o material contido nas páginas 229 a 231.

4. Introduction To Mathematical Statistics-Robert V.Hogg & Allen T. Craig.Third Edition

   Foi usado o material contido nas páginas 111 a 115.

5. Probabilidade: Um Curso Moderno com aplicações-Sheldom Ross Oitava edição.

   Foi usado o material contido nas páginas 323 a 325.

6. Probabilidade:Aplicações à Estatística- Paul L. Meyer- Segunda Edição

   Foi usado o material contido nas páginas 234 a 235.