

CC0288 - Inferência Estatística I

Segunda Verificação de Aprendizagem - 03/04/2023.

Segunda Chamada da Primeira Verificação de Aprendizagem .

Prof. Maurício

1. (Valor 6 escores) Seja X uma variável aleatória que depende de um único parâmetro θ com função densidade de probabilidade ou função de probabilidade $f(x|\theta)$, suporte A e espaço paramétrico Θ .

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n . Seja $T = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ um estimador de θ com $E(T)$ e $V(T)$ finitos.

- a. (Valor 1 escore) Quando T é um estimador não viciado de θ ?
- b. (Valor 2 escores) Defina viés $B(T)$ de T . Dê uma outra definição de estimador não viciado baseada no viés.
- c. (Valor 3 escores) Defina erro quadrático médio de T . Mostre que ele pode ser colocado na forma:

$$EQM(T) = Var(T) + B^2(T).$$

2. (Valor 6 escores) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de X com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Sejam

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad e \quad T = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

- a. (Valor 2 escores) Mostre que

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2.$$

- b. (Valor 3 escores) Mostre que

$$E(T) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Assim T um estimador viciado para σ^2 .

- c. (Valor 1 escore) T é assintoticamente não viciado para σ^2 ?

3. (Valor 13 escores) Seja $X \sim \text{Bin}(5, p)$, p desconhecido.

a. (Valor 3 escores) Mostre que

$$f(x|p) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x} I_{\{0,1,2,3,4,5\}}(x), \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Identifique seu suporte, espaço paramétrico, esperança , variância e função geradora de probabilidade.

b. (Valor 2 escores)Mostre que

$$\log(f(x|p)) = [c(p)T(x) + d(p) + b(x)] I_A(x),$$

e A não depende de p . Identifique cada componente.

c (Valor 1 escore) Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de X . Qual a distribuição conjunta da amostra?

d. (Valor 1 escore) Qual a função de verossimilhança de p ?

e. (Valor 4 escores) Qual a lei de $S = \sum_{i=1}^n X_i$?

Baseado em S proponha um estimador não viciado T para $g(p) = p$.

Qual a variância de T ?

f. (Valor 2 escores) Uma amostra aleatória de tamanho $n = 100$ e apresentou o seguinte resultado:

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| f | 1 | 7 | 29 | 32 | 24 | 7 |

Calcule uma estimativa pontual para p baseada no item e.