1. Pensamento de Dalai-Lama:

   ”Podemos ser ludibriados por três formas de preguiça: a que se manifesta como intolerância, que é o desejo de adiar; a que se manifesta como sentimento de inferioridade, que é duvidar da própria capacidade; e a que se manifesta com a adoção de atitudes negativas, que é dedicar um esforço excessivo àquilo que não é virtude”.

2. Teste de Ansari-Bradley

   1.1 **Generalidades:**

   Este é um teste para comparar as dispersões de duas populações independentes.

   Ele foi introduzido por **FREUND** e **ANSARI** em 1957 e reestruturado por **ANSARI** e **BRADLEY** em 1960.

   È um competidor do teste F no campo não paramétrico embora sua eficiência, em comparação com aquele, para dados com distribuição normal seja da ordem de 0,61.

   Entretanto , devido a sua grande versatilidade,sua aplicação é muito grande.

   1.2 **Pressuposições:**

   a. As duas amostras são casuais e independentes.

   b. As duas populações representadas pelas amostras têm medianas conhecidas

   1.3 **Hipóteses:**

   Admitindo

$$\gamma = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

   em que σ_X^2 e σ_Y^2 são as variâncias das duas populações.

   Podemos testar a igualdade das variâncias:

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad ou \quad H_0 : \sigma_Y^2 = \sigma_X^2.$$

   contra uma das hipóteses alternativas a seguir:

$$H_1 : \gamma^2 > 1 \quad ou \quad H_0 : \sigma_Y^2 > \sigma_X^2.$$

$$H_1 : \gamma^2 < 1 \quad ou \quad H_0 : \sigma_Y^2 < \sigma_X^2.$$

$$H_1 : \gamma^2 \neq 1 \quad ou \quad H_0 : \sigma_Y^2 \neq \sigma_X^2.$$

1.4 **Método:**

Admitamos as amostras

$$X_1, X_2, \ldots, X_m$$

e

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

supostamente com medianas μ_X e μ_Y, respectivamente.

Preliminarmente classificamos as variáveis conjuntamente dando posto 1 a maior e a menor delas, posto 2 às duas extremas seguintes e assim por diante. Obtemos, assim, os postos:

1. Para $N = m + n$ par:

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \ldots, 3, 2, 1$$

2. Para $N = m + n$ ímpar:

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}, \ldots, 3, 2, 1$$

Definimos a estatística:

$$W = \sum_{i=1}^{m} O_i,$$

em que O_i é o posto da observação X_i.

È óbvio que , se W assume valores baixos, a variável X é mais dispersa que Y e vice-versa.

ANSARI e **BRADLEY** em 1960 definiram também a estatística W' associada com W e que pode ser obtida ordenando as variáveis numa classificação conjunta, do centro para as extremidades e conforme se segue:

3. Para $N = m + n$ par:

$$\frac{N}{2}, \ldots 3, 2, 1, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, \frac{N}{2}$$

4. Para $N = m + n$ ímpar:

$$\frac{N-1}{2}, \ldots, 3, 2, 1, \ldots, 0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{N-1}{2}.$$

Em ambos os casos temos:

$$W' = \sum_{i=1}^{m} O_i,$$

em que O_i é o posto da observação X_i na classificação conjunta.

Facilmente se prova que:

5. Se N é par

$$W' = \frac{1}{2}\, m(m+n) - W.$$

5. Se N é ímpar

$$W' = \frac{1}{2}\, m(m+n+1) - W.$$

Para testarmos, ao nível de significância α:

a.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 > 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$W \geq w$$

em que

$$P_0(W \geq w) = \alpha.$$

Os valores de w são encontrados na tabela **11**.

b.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 < 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$W \leq w$$

em que

$$P_0(W \leq w) = \alpha.$$

Os valores de w são encontrados na tabela **11.A**.

c.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 \neq 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$W \geq w \quad ou \quad W \leq w_1$$

em que

$$P_0(W \geq w) = \alpha_1 \;\; P_0(W \leq w_1) = \alpha_2,$$

com

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

1.5 Aproximação Normal:

Quando m e n são grandes, consideramos

$$W^* = \frac{W - E_0(W)}{\sqrt{V_0(W)}} \sim N(0,1).$$

Para N par temos:

$$E_0(W) = \frac{m(N+2)}{4} \quad ; \quad V_0(W) = \frac{mn(N+2)(N^2-4)}{48(N-1)}$$

Para N ímpar temos:

$$E_0(W) = \frac{m(N+1)^2}{4N} \quad ; \quad V_0(W) = \frac{mn(N+1)(3+N^2)}{48\ N^2}.$$

Para testarmos, ao nível de significância α:

a.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 > 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$W^* \geq z_\alpha$$

em que

$$P_0(Z \geq z_\alpha) = \alpha.$$

b.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 < 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$Z \leq z_\alpha$$

em que

$$P_0(Z \leq z_\alpha) = \alpha.$$

c.

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 \neq 1$$

Rejeitamos H_0 se

$$|Z| \geq z_{\alpha/2}$$

em que

$$P_0\left(|Z| \geq z_{\alpha/2}\right) = \alpha.$$

5.6 Empates

Quando na classificação conjunta das N observações ocorrem empates entre os valores de X e Y, tomamos para cada observação dentro do grupo empatado, a média dos postos que seriam atribuídos a eles, caso não ocorresse empate e computamos o valor de W da maneira usual.

No caso da aproximação Normal , utilizamos os postos médios e substituímos $V_0(W)$ por:

Se N é par

$$V_0(W) = \frac{mn\left[16\ \sum_{i=1}^{k} t_i\ O_i^2 - N(N+2)^2\right]}{16N(N-1)}$$

Ou se N é ímpar

$$V_0(W) = \frac{mn\left[16\ N\ \sum_{i=1}^{k} t_i\ O_i^2 - (N+1)^4\right]}{16\ N^2(N-1)}$$

em que:
k=número de grupos empatados ;
t_i= número de observações do grupo i;
O_i=média dos postos atribuídos às observações não empatadas do grupo i.

Cumpre observar que as observações não empatadas são também computadas, considerando-se, neste caso $t_i = 1$

Exemplo Ilustrativo

Consideremos

X	Y
3,5	3,7
4,0	4,3
4,3	4,3
	4,9
	5,8

Temos $n = 3$, $m = 5$ e $N = 8$, par.

A classificação conjunta fica:

	3,5	3,7	4,0	4,3	4,3	4,3	4,9	5,8
	1	2	3	(4)	(4)	(3)	2	1
	1	2	3	11/3	11/3	11/3	2	1

e assim,

$$W = \sum_{i=1}^{3} O_i = 1 + 3 + 11/3 = \frac{23}{3} = 7,67.$$

Se fossemos utilizar a distribuição normal, teríamos ainda:
Temos

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 1, t_5 = 1, t_6 = 1$$

$$A = \sum_{i=1}^{6} t_i\, O_i^2 =$$

$$A = 1 \times (1)^2 + 1\ (2)^2 \times +3(11/3)^2 + 1\ (2)^2 + 1 \times (1)^2 =$$

$$A = 19 + 3\ \frac{121}{9} = 19 + \frac{121}{3} = \frac{178}{3} = 59,33.$$

```
 t=c(1,1,1,3,1,1)
> k=length(t);k
[1] 6
> O=c(1,2,3,11/3,2,1)
> A=sum(t*O^2);A
[1] 59.33333
> require(MASS)
> fractions(A)
[1] 178/3
>
```

e portanto, para $N = 8$, par, temos:

$$E_0(W) = \frac{m(N+2)}{4} = \frac{3 \times 10}{4} = 7,5.$$

Além disso

$$V_0(W) = \frac{mn\left[16\ \sum_{i=1}^{k} t_i\, O_i^2 - N(N+2)^2\right]}{16N(N-1)}$$

$$V_0(W) = \frac{15\left[16 \times (178/3) - 8(10)^2\right]}{16 \times 8 \times 7} = 2,50.$$

logo

$$W^* = \frac{7,67 - 7,50}{sqrt2,5} = 0,1054.$$

Estes valores não batem com os do livro na página 163.

```
>
> m=3;n=5;N=m+n;N
[1] 8
>
> Num=m*n*(16*A-N*(N+2)^2);Num
[1] 2240
> Den=16*8*7;Den
[1] 896
> VW=Num/Den;VW
[1] 2.5
> dpW=sqrt(VW);dpW
[1] 1.581139
>
> EW=m*(N+2)/4;EW
[1] 7.5
>
> z=(23/3-EW)/dpW;z
[1] 0.1054093
```

5.7 Distribuição nula de W

A fim de ilustrar a distribuição nula de W consideremos dois casos:

a. N par: m=2 e n=4,
   Assim
$$N = m + n = 6.$$
   temos
$$\binom{N}{m} = \binom{6}{2} = 15 \quad \text{arranjos possíveis.}$$

b. N ímpar: m=3 e n=4,
   Assim
$$N = m + n = 7.$$
   temos
$$\binom{N}{m} = \binom{7}{3} = 35 \quad \text{arranjos possíveis.}$$

Para cada arranjo determinamos:

$$W = \sum_{i=1}^{m} O_i,$$

O_i é o posto de X_i.

Veja o quadro dos arranjos do item **a**:

A sequência de postos é dada por:

1 2 3 3 2 2 1

ARRANJOS	W_0	ARRANJOS	W_0	ARRANJOS	W_0
X X Y Y Y Y	3	Y X X Y Y Y	5	Y Y X Y X Y	5
X Y X Y Y Y	4	Y X Y X Y Y	5	Y Y X Y Y X	4
X Y Y X YY	4	Y X Y Y X Y	4	Y Y Y X X Y	5
X Y Y Y X Y	3	Y X Y Y Y X	3	Y Y Y X Y X	4
X Y Y Y Y X	2	Y Y X X Y	6	Y Y Y Y X X	3

A distribuição de W é dada por:

w	$15\ P(W=w)$	$15\ P(W \geq w)$	$15\ P(W \leq w)$
2	1	15	1
3	4	14	5
4	5	10	10
5	4	5	14
6	1	1	15

Note que:

$$E(W_0) = \sum_{w=2}^{6} w.P(W=w).$$

$$E(W_0) = \frac{1}{15}\left[2+12+20+20+6\right] = \frac{60}{15} = 4.$$

Usando a fórmula para N par temos:

$$E_0(W) = \frac{m(N+2)}{4} = \frac{2 \times 8}{4} = 4.$$

$$E(W_0^2) = \frac{1}{15}\left[4+36+80+100+36\right] = \frac{256}{15}.$$

A variância de W é dada por:

$$V_0(W) = \frac{256}{15} - 16 = \frac{16}{15}.$$

Note que:

$$V_0(W) = \frac{mn(N^2-4)}{48(N-1)}$$

$$V_0(W) = \frac{8 \times (36-4)}{48 \times 5}$$

$$V_0(W) = \frac{8 \times 32}{48 \times 5} = \frac{16}{15}.$$

Vamos analisar agora o caso **b**:

Temos $m = 3$, $n = 4$ e $N = 7$, ímpar assim

$$E_0(W) = \frac{m(N+1)^2}{4N} = \frac{3 \times 64}{28} = \frac{48}{7}.$$

$$V_0(W) = \frac{mn(N+1)(N^2+3)}{48N^2} = \frac{12 \times 8 \times 52}{48 \times 49} = \frac{104}{49}.$$

A sequência de postos é dada por:

1 2 3 4 3 2 2 1

Temos 35 possíveis arranjos e os três elementos de X ocupam as três posições entre 1,2,3,4,5,6,7 e.

Veja a tabela a seguir:

Posição	w	Posição	w	Posição	w	Posição	w	Posição	w
(1,2,3)	6	(1,3,6)	6	(1,6,7)	4	(2,4,7)	7	(3,5,6)	8
(1,2,4)	7	(1,3,7)	5	(2,3,4)	9	(2,5,6)	7	(3,5,7)	7
(1,2,5)	6	(1,4,5)	8	(2,3,5)	8	(2,5,7)	6	(3,6,7)	6
(1,2,6)	5	(1,4,6)	7	(2,3,6)	7	(2,6,7)	5	(4,5,6)	9
(1,2,7)	4	(1,4,7)	6	(2,3,7)	6	(3,4,5)	10	(4,5,7)	8
(1,3,4)	8	(1,5,6)	6	(2,4,5)	9	(3,4,6)	9	(4,6,7)	7
(1,3,5)	7	(1,5,7)	5	(2,4,6)	8	(3,4,7)	8	(5,6,7)	6

A distribuição de W é dada por:

w	$35\ P(W=w)$	$35\ P(W \geq w)$	$35\ P(W \leq w)$
4	2	35	2
5	4	33	6
6	9	29	15
7	8	20	23
8	7	12	30
9	4	5	34
10	1	1	35

Note que:

$$E(W_0) = \sum_{w=4}^{10} w.P(W=w).$$

$$E(W_0) = \frac{1}{35}\left[8+20+54+56+56+36+10\right] = \frac{240}{35} = \frac{48}{7}.$$

$$E(W_0^2) = \frac{1}{35}\left[32+100+324+392++448+324+100\right] = \frac{1720}{35} = \frac{344}{7}.$$

A variância de W é dada por:

$$V_0(W) = \frac{344}{7} - \frac{344}{49} = \frac{2408 - 2304}{49} = \frac{104}{49}.$$

Os dois casos ilustrados evidenciam as seguintes propriedades:

1. A estatística W_0 é uma variável aleatória discreta inteira.

2. Quando N é par, a distribuição nula de W_0 é simétrica em torno de

   $$c = \frac{m(N+2)}{4} = E_0(W),$$

   isto é,

   $$P_0\left(W \geq w_0\right) = P_0\left(W \leq \frac{m(N+2)}{2} - w_0\right)$$

   Para justificar vamos detalhar um pouco:

   Se W é simétrica em torno de c então

   $$U = W - c$$

   é simétrica em torno de zero.

   Isto que dizer

   que $U = W - c$ e $-U = c - W$ tem a mesma distribuição.

   Logo

   $$P_0\left(W \geq w_0\right) = P_0\left(W - c \geq w_0 - c\right)$$

   $$P_0\left(W \geq w_0\right) = P_0\left(c - W \geq c - w_0\right)$$

   Mas $c - W$ e $W - c$ tem a mesma distribuição, assim,

   $$P_0\left(W \geq w_0\right) = P_0\left(W - c \geq c - w_0\right)$$

   $$P_0\left(W \geq w_0\right) = P_0\left(W \geq 2c - w_0\right)$$

   Mas

   $$2c = \frac{m(N+2)}{2}.$$

   completando assim a nossa prova.

No caso **a** temos

$$P_0(W \geq w) = P(W \leq 8 - w).$$

Perceba analisando a distribuição nula.

No caso a temos $m = 2, N = 6$

$$c = \frac{m(N+2)}{4} = \frac{2(6+2)}{4} = 4.$$

Note que:

$$P(W = 5) = P(W = 4 + 1) = \frac{4}{15}.$$

$$P(W = 3) = P(W = 4 - 1) = \frac{4}{15}.$$

$$P(W = 6) = P(W = 4 + 2) = \frac{1}{15}.$$

$$P(W = 2) = P(W = 4 - 2) = \frac{1}{15}.$$

3. Se

$$P_0(W \geq x) = \alpha,$$

temos

$$P_0(W \ < x) = P_0(W \ \leq x - 1) = 1 - P_0(W \geq x) = 1 - \alpha,$$

Assim

$$P_0(W \ \leq x) = 1 - P_0(W \geq x + 1).$$

4. Podemos sempre tomar m como o tamanho d menor amostra, desde que interpretemos devidamente as hipóteses alternativas. No caso ilustrado (m=2,n=4) se a hipótese H_1 for $\gamma^2 > 1$, referindo-nos às ordens da variável X , ela se converterá em $H_1 : \gamma^2 < 1$ se nos referirmos às ordens de Y.

5.8 **Derivativos do teste**

a) ANSARI e BRADLEY (1960) nos afirmam que , quando as duas populações deferem em **posição**, as amostras podem ser ajustadas para terem iguais **posições**.

Este ajustamento é feito da seguinte forma:

Sejam μ_X e μ_Y as medianas de X e de Y, respectivamente.

Subtraímos de cada observação X , a diferença

$$\theta = \mu_X - \mu_Y$$

,isto é,

$$X' = X - (\mu_X - \mu_Y) = X - \theta.$$

Observamos que μ_X e μ_Y não precisam ser conhecidas, basta que conheçamos θ.

Uma vez feito o ajuste , procedemos como usualmente com X' e Y.

b) Para testarmos $H_0 : \gamma^2 = \gamma_0^2 \neq 1$, para populações com mediana μ_0 determinamos:

$$X_i' = X_i - \mu_0$$

e

$$Y_j' = \frac{Y_j - \mu_0}{\gamma_0}$$

e procedemos como usualmente ,com X' e Y'.

5.9 **Exemplos:**

Exemplo 1: Num ensaio de laboratório foram provados dos métodos de determinação do teor de cafeína em café solúvel. Foram feitas, numa mesma amostra, dez determinações com cada método obtendo-se a classificação seguinte:

$$X\ X\ X\ Y\ X\ Y\ Y\ Y\ X\ Y\ Y\ Y\ \ Y\ X\ Y\ X\ X\ \ X$$

Verificar, através do teste de Ansari-Bradley, acuracidade dos métodos.

Solução:

O nosso teste seria:

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 \neq 1$$

Como $m = n = 10$ temos $M = 20$ é par.

Atribuindo os postos temos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

$$W = \sum_{i=1}^{10} O_i = 1 + 2 + 3 + 5 + 9 + 7 + 5 + 3 + 2 + 1 = 38.$$

A tabela $11.A$ nos dá:

$$\alpha_2 = P(W \leq 38) = 0,005.$$

Por outro lado,

$$\alpha_1 = P(W \geq 38) = 1 - P(W \leq 37) = 1 - 0003 = 0,997.$$

O nível mínimo de significância é dado por:

$$nd = 2 \times min(\alpha_1, \alpha_2) = 0,01.$$

Podemos, pois, concluir ao nível $\alpha = 0,01$, que os métodos diferem, e, pela natureza dos resultados, concluímos que o método Y é mais preciso.

A solução direta no R é apresentada a seguir:

Colocamos os postos na ordem original de 1 a 20.

```
>  X=c(1,2,3,5, 9, 14, 16,18,19,20)
> Y=c(4,6,7,8,10,11,12,13,15,17)
> length(X);length(Y)
[1] 10
[1] 10
> ansari.test(X,Y)

Ansari-Bradley test

data:  X and Y
```

```
AB = 38, p-value = 0.009786
alternative hypothesis: true ratio of scales is not equal to 1

>
```

Exemplo 2 Pretendendo-se selecionar seis provadores de vinho para se proceder a um ensaio de degustação ,foram formados dois grupos : um de moças e outro de rapazes, e com eles foi feito um pré-teste para a seleção. Numa mesa eram colocados cinco cálices , sendo 3 do vinho em questão e e dois de outros vinhos. O parecer de cada degustador era obtido pela média das notas (0 a 10) atribuídas aos três cálices. O resultado foi o seguinte:

Moças(X)	Rapazes(Y)
7,5	5,8
8,3	6,5
7,7	8,4
8,0	6,3
6,7	9,0
8,5	9,0

Se a seleção se baseou no menor dispersão dos resultados dentro de cada grupo, qual deles deve ser escolhido?

Solução: O nosso teste seria:

$$H_0 : \gamma^2 = 1 \quad versus \quad H_1 : \gamma^2 > 1$$

$$H_0 : \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \quad versus \quad H_1 : \sigma_Y^2 > \sigma_X^2$$

Como $m = n = 6$ temos $M = 12$ é par.

Fazendo direto no R:

```
> X=c(75,83,77,80,67,85)/10
>
> Y=c(58,65,84,63,90,97)/10
>
```

```
>
> ansari.test(X,Y, alternative="less")

Ansari-Bradley test

data:  X and Y
AB = 29, p-value = 0.005411
alternative hypothesis: true ratio of scales is less than 1
```

Classificando as médias conjuntamente temos:

Nota Ordenada	Grupo	Posto
5,8	Y	1
6,3	Y	2
6,5	Y	3
6,7	X	4
7,5	X	5
7,7	X	6
8,0	X	6
8,3	X	5
8,4	Y	4
8,5	X	3
9,0	Y	2
9,7	Y	1

$$W = \sum_{i=1}^{6} O_i = 4 + 5 + 6 + 6 + 5 + 3 = 29.$$

Pela tabela 11 temos:

$$P_0(W \leq 29) = 0,005.$$

Logo, o nível mínimo de significância no qual rejeitaríamos H_0 seria

$$nd = nms = 0,005$$

isto é, o nível de 0,5% de probabilidade, que as moças têm um critério mais uniforme de julgamento.

Exemplo 3:

Dois potenciais fornecedores de equipamentos de iluminação pública, A e B, apresentaram suas propostas ao prefeito junto com os seguintes dados como uma amostra aleatória de comprimento de vida em meses.

A: 35, 66, 58, 83, 71

B: 46, 56, 60, 49.

Teste se a vida útil dos fornecedores A e B têm variabilidade igual.

Solução:

Antes de podermos testar a escala, devemos determinar se podemos assumir que os as mediana podem ser considerados iguais. Nós usaremos o Teste de soma de postos de Wilcoxon.

Como o fornecedor B tem menos observações, será a populaçãoX e e o fornecedor B Y. Assim

$$m = 4 \ \ e \quad n = 5.$$

Vamos testar se:

$$H_0 : med(B) = med(A) \quad \text{versus} H_1 : med(B) \neq med(A)$$

```
] 46 56 60 49 35 66 58 83 71
>
> Fornecedor=factor(c(rep("B",4),rep("A",5)))
> Fornecedor
[1] B B B B A A A A A
Levels: A B
> RU=rank(U);RU
[1] 2 4 6 3 1 7 5 9 8
```

```
> dad=cbind(Fornecedor,RU);dad
      Fornecedor RU
[1,]          2  2
[2,]          2  4
[3,]          2  6
[4,]          2  3
[5,]          1  1
[6,]          1  7
[7,]          1  5
[8,]          1  9
[9,]          1  8
> tapply(RU , Fornecedor,sum)
A  B
30 15
> tapply(RU , Fornecedor,sum)
A  B
30 15
> wilcox.test(X,Y)

Wilcoxon rank sum exact test

data:  X and Y
W = 5, p-value = 0.2857
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

> aux=m*(m+1)/2;aux
[1] 10
> W=15-10;W
[1] 5
>
```

Como as medianas são iguais podemos agora testar:

$$H_0 : Var(B) = Var(A) \quad \text{versus} H_1 : Var(B) \neq Var(A)$$

o teste de Ansari-Bradley apresentou o seguinte resultado:

```
ansari.test(X,Y)

Ansari-Bradley test

data:  X and Y
AB = 13, p-value = 0.5238
alternative hypothesis: true ratio of scales is not equal to 1

> ansari.test(Y,X)

Ansari-Bradley test

data:  Y and X
AB = 12, p-value = 0.5238
alternative hypothesis: true ratio of scales is not equal to 1
```

Eles têm a mesma variabilidade.

Vamos obter a estatística do teste :

Temos $N = 4 + 5 = 9$ que é ímpar.

Os postos são dados como:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$$

Na ordenação geral temos:

$$W = posto(X_1) + posto(X_2) + posto(X_3) + posto(X_4) =$$

$$W = posto(46) + posto(56) + posto(60) + posto(49)$$

$$W = posto(46) + posto(49) + posto(56) + posto(60).$$

Note os postos da maneira tradicional são:

```
> RU=rank(U);RU
[1] 2 4 6 3 1 7 5 9 8
```

Os novos postos são :

```
[1] 2 4 4 3 1 3 5 1 2
```

Como

```
 U=c(X,Y);U
[1] 46 56 60 49 35 66 58 83 71
> Uo=sort(U);Uo
[1] 35 46 49 56 58 60 66 71 83
>
```

Vamos analisar a tabela:

Amostra Ordenada	Fornecedor	Posto original	Posto novo
35	A	1	1
46	B	2	2
49	B	3	3
56	B	4	4
58	A	5	5
60	B	6	4
66	A	7	3
71	A	8	2
83	A	9	1

$$W_B = posto(46) + posto(49) + posto(56) + posto(60).$$

$$W_B = 2 + 3 + 4 + 4 = 13 = AB.$$

$$W_A = posto(35) + posto(58) + posto(66) + posto(71) + posto(83)$$

$$W_A = 1 + 5 + 3 + 2 + 1 = 12.$$

Sabemos que:

$$W_A + W_B = \frac{N+1}{2} + 2\left[1 + 2 + \ldots + \frac{N-1}{2}\right]$$

Mas

$$S = 1 + 2 + \ldots + \frac{N-1}{2} = \frac{1 + \frac{N-1}{2}}{2} \times \frac{N-1}{2}$$

$$S = \frac{N+1}{4} \times \frac{N-1}{2} = \frac{N^2-1}{8}.$$

$$W_A + W_B = \frac{N+1}{2} + 2 \ \frac{N^2-1}{8}.$$

$$W_A + W_B = \frac{N+1}{2} + \ \ \frac{N^2-1}{4}.$$

$$W_A + W_B = \frac{2(N+1) - (N-1)(N+1)}{4}$$

$$W_A + W_B = \frac{(N+1)^2}{4}.$$

No nosso exemplo temos: N=9.

$$W_A + W_B = \frac{10^2}{4} = 25 = 12 + 13 = W_A + W_B.$$

5.10 **Exercícios Propostos:**

1. Foram feitas determinações de Brix em duas variedades (A e B) de cana-de açúcar,tomando-se de cada uma delas oito colmos.Os resultados permitiram o seguinte arranjo:

$$XXXYXXYYXXXYYYYY$$

onde X = variedade A e Y = variedade B . Verifique se há menor dispersão de Brix na variedade A.

2. Em um estudo sobre variações de altura dos filhos em relação à altura dos pais, foram consideradas duas classes:

A : alturas dos filhos descendentes de pais baixos;

B : alturas dos filhos descendentes de pais altos.

Os resultados obtidos para as alturas (em metro) com dez indivíduos da classe A e oito da classe B foram as que se seguem:

Classe A (X)	Classe B (Y)
1,45 1,52	1,63 1,75
1,82 1,63	1,86 1,63
1,60 1,44	1,98 1,71
1,67 1,44	
1,37 1,75	

Frente aos resultados, teste a hipótese nula:

Há maior variação na altura entre os indivíduos da classe A?

3. No caso de emprego da aproximação normal, quando ocorrem empates, para N par, temos:

$$V_0(W) = \frac{mn\left[16\sum_{i=1}^{k} t_i\,O_i^2 - N(N+2)^2\right]}{16N(N-1)}.$$

Comprove que se não ocorrerem empates esta fórmula se reduz

$$V_0(W) = \frac{mn(N^2-4)}{48(N-1)}.$$

4. Dois métodos (A e B) de avaliação do aproveitamento de alunos foram utilizados. O método A representando o tradicional e o método B, a avaliação atrvés de questionários e entrevistas pessoais. Fotam tomadas amostras de 10 alunos para cada método, obtendo-se os seguintes totais de pontos:

Método A (X)	Método B (Y)
91 102	105 106
90 95	103 112
93 96	108 99
97 104	94 110
98 101	107 109

a. Verifique, pelo teste de Wilcoxon, a eficiência dos métodos;

b. Estude, através do teste de Ansari-Bradley, a dispersão dos dois métodos;

c. Aplique a aproximação normal aos dados e confronte l a conclusão obtida com a do item anterior;

d. Reaplique , a aproximação normal, com correção de continuidade, e confronte com os dois itens anteriores.