1 Distribuição de Poisson

1.1 Introdução

A distribuição de Poisson foi fruto do trabalho do matemático e físico francês Siméon-Dennis Poisson (1781 – 1840) e publicada, conjuntamente com a sua teoria da probabilidade, em 1838 no seu trabalho *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*[1].

A distribuição de Poisson pode ser útil para fenômenos cujo interesse é contar a ocorrência de certo evento durante um determinado intervalo de tempo, comprimento, área ou volume. Por exemplo, suponha que o evento de interesse seja contar o número de veículos que abastecem, em um determinado posto de gasolina, na faixa do meio-dia até as quatorze horas.

2 Definição e Propriedades

Uma variável aleatória X é dita possuir *distribuição de Poisson* de parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de probabilidade (*f.p.*) é da forma

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x). \tag{1}$$

Notação: $X \sim P(\lambda)$.

Observação: Lê-se a notação acima do seguinte modo: X segue distribuição *Poisson* de parâmetro λ.

A Figura 1 apresenta o gráfico da função de probabilidade da distribuição de Poisson sob certos valores do seu parâmetro λ.

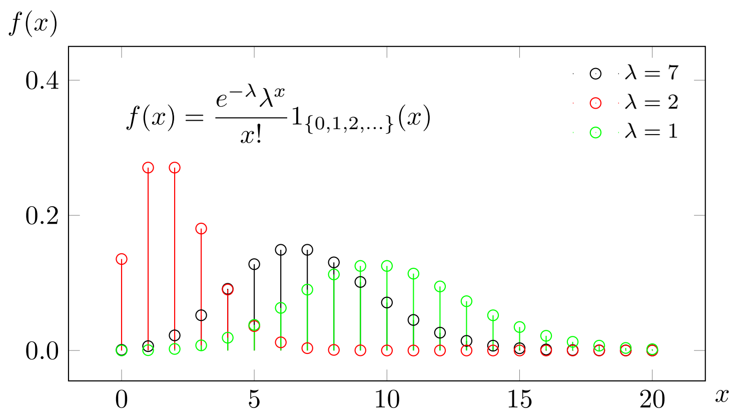

Figura 1: Gráfico da Função de Probabilidade da Poisson

[1]Fonte: Wikipédia: a enciclopédia livre `https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribuio_de_Poisson`

2.1 Propriedades da função de probabilidade

Fato 1. A expressão (1) é legítima função de probabilidade.

Prova: Deve-se verificar que

i. $f(x) > 0$, $x \in A$;

ii. $\sum_A f(x) = 1$,

sendo $A = \{x \in R \mid f(x) > 0\}$ o suporte da distribuição de X. Como $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é o suporte e $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} > 0, x \in A$. Assim $f(x) \geq 0$. A segunda propriedade nos diz que a soma dos valores das probabilidades para os pontos do suporte é 1. Assim,

$$\sum_A f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1 \qquad \blacksquare$$

Exemplo 1. O número médio de mensagens enviadas por um computador servidor segue uma distribuição de Poisson com média de $\lambda > 0$ por minuto. Seja X_t o número de mensagens que chegam ao servidor em um intervalo de t minutos. Como por minuto chegam, em média, λ mensagens no intervalo de t minutos λt mensagens chegarão. Assim,

$$X_t \sim P(\lambda t),$$

e sua f.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} 1_{\{0,1,2,\ldots\}}(x).$$

e

$$E(X_t) = V(X_t) = \lambda t.$$

Se $\lambda = 6$ mensagens por minuto. Calcule:

a. A probabilidade de aparecer exatamente 20 mensagens nos próximos 3 minutos?

   Solução: Temos $t = 3$ e assim $Y = X_3 =$ número de mensagens que chegam ao servidor em um intervalo de 3 minutos. A distribuição de $X_3 \sim P(6 \times 3 = 18)$ e sua f.p. é dada por:

$$f(y) = \frac{e^{-18}\, 18^y}{y!} 1_{\{0,1,2,\ldots\}}(y).$$

A probabilidade pedida é:

$$P(Y = 20) = \frac{e^{-18}\, 18^{20}}{20!} = 0.0798.$$

```
> ######X_3~P(18)-pa=p(Y=20)
>
> pa=dpois(20,18);pa;round(pa,4)
[1] 0.07980403
[1] 0.0798
>
```

b. Qual a probabilidade de chegar, no máximo, 2 mensagens num período de 30 segundos?

Como $t = 1/2$ então $Y = X_{1/2} \sim P(3)$ e sua f.p. é dada por:

$$f(y) = \frac{e^{-3}\, 3^y}{y!} 1_{\{0,1,2,\dots\}}(y).$$

A probabilidade pedida vale:

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = e^{-3} + 3e^{-3} + 4,5e^{-3} = 8,5\, e^{-3} = 0,4232.$$

```
>
> ###Y~P(3)
>
> pb=8.5*exp(-3);pb
[1] 0.4231901
>
> Pb=ppois(2,3);Pb
[1] 0.4231901
>
> p_0=dpois(0,3);p_0
[1] 0.04978707
> p_1=dpois(1,3);p_1
[1] 0.1493612
```

```
>
> p_2=dpois(2,3);p_2
[1] 0.2240418
> sum(p_0+p_1+p_2)
[1] 0.4231901
>
```

Exemplo 2: Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 600 m. Qual a probabilidade de que um rolo de 1500 m tenha:

a. nenhum corte?

b. no máximo 2 cortes?

c. pelo menos dois cortes?

Solução: Seja X_c= número de cortes em fita de comprimento c metros. Seja λ o número médio de sucessos em um comprimento unitário. A distribuição de probabilidade de X é Poisson com média λc

Como existe 1 corte por 600 m, a taxa de sucessos unitária é:

$$\lambda = \frac{1}{600}.$$

Agora $c = 1500$ m temos que:

$$\lambda c = \frac{1}{600}\,1500 = \frac{1500}{600} = 2,5.$$

A função de probabilidade de Y é:

$$f(y) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^y}{y!} 1_{\{0,1,2,\ldots\}}(y).$$

O item a pede

$$P(Y = 0) = e^{-2,5} = 0,082085.$$

O item b pede

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = (1 + 2,5 + 3,15)e^{-2,5} = 0,5438131.$$

o item c pede

$$P(Y \geq 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] = 1 - 3,5e^{-2,5} = 0,7127025.$$

Veja com carinho a solução pelo R:

```
>
>
> lambda=1500/600;lambda
[1] 2.5
>
> p_0=dpois(0,2.5);p_0  ###item a
[1] 0.082085
>
> p_1=dpois(1,2.5);p_1
[1] 0.2052125
>
> p_2=dpois(2,2.5);p_2
[1] 0.2565156
>
> ###item b: no máximo 2 cortes
>
> p_b=p_0+p_1 +p_2;p_b
[1] 0.5438131
>
> ppois(2,2.5) ####acumulada no ponto 2.
[1] 0.5438131
>
>
> #######item c: pelo menos dois cortes.
>
> ###P(Y>=2)= 1- P(Y<=1)=1 -F(1)=S(1)=P(Y >1)
>
> pc=1-(p_0 +p_1);pc
[1] 0.7127025
```

```
>

>

> 1- ppois(1,2.5) ####Função de distribuição acumulada

[1] 0.7127025

>

>

> ppois(1,2.5,lower.tail=F)####Outra maneira!!!!!!

[1] 0.7127025

>
```

Exemplo 3: Um pintor de paredes comete, em média, uma falha a cada 2 m^2 pintados . Uma parede de dimensões 3x2 foi pintada . Qual a probabilidade de aparecer uma única falha na parede inteira? Foram pintadas 100 paredes de dimensões 3x2 . Qual o número esperado de paredes sem defeitos?

Solução: Seja X_a= número de falhas em uma parede de a m^2.

Como existe 1 falha a cada 2 m^2, a taxa de sucessos unitária é:

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Agora $a = 6$ m^2 temos que:

$$\lambda a = \frac{1}{2}\ 6 = \frac{6}{2} = 3.$$

A distribuição de probabilidade de $Y = X_6$ é Poisson com média 3.

Como a área da parede é 6 m^2 ele comete, em média, 3 falhas.

Seja

$$Y = X_6 \sim P(3).$$

A função de probabilidade de Y é:

$$f(y) = \frac{e^{-3}(3)^y}{y!} 1_{\{0,1,2,...\}}(y).$$

Assim, a probabilidade de aparecer exatamente uma falha é:

$$P(Y = 1) = 3e^{-3} = 0,1991.$$

Seja p a probabilidade de uma parede ser pintada sem falhas. Ela é dada por:

$$p = P(Y = 0) = e^{-3} = 0,0498.$$

Seja W o número de paredes sem falhas ente as 100. Pelo enunciado

$$W \sim Bin(n = 100\ ,\ p = e^{-3}) = 4,98.$$

Logo,

$E(W) = np = 100e^{-3}$.

A solução pelo R é dada por:

```
>
> p_1=ppois(1,3);p_1
[1] 0.1991483
>
> n=100
> p=ppois(0,3);p
[1] 0.04978707
>
> EW=n*p;EW
[1] 4.978707
>
```

Exemplo 4: Certa peça de plástico de 10 cm^3 é considerada defeituosa se aparecerem 2 ou mais defeitos. Os defeitos são causados por impurezas. Em média, por cm^3, aparecem 0,05 impurezas. Qual a probabilidade de uma peça ser considerada defeituosa?

Solução: Seja X_v= número de defeitos da peça com volume vcm^3.

Como existe 0,05 falhas a cada cm^3, a taxa de sucessos unitária é:

$$\lambda = 0,05$$

Agora $v = 10cm^3$ temos que:

$$\lambda v = 0,5.$$

A distribuição de probabilidade de $Y = X_{10}$ é Poisson com média $0,5$.

$$f(y) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^y}{y!} 1_{\{0,1,2,...\}}(y).$$

Seja p a probabilidade da peça ser considerada defeituosa é:

$$p = P(Y \geq 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] = 1 - [e^{-0,5} + 0,5e^{-0,5}] = 1 - 1,5e^{-0,5} = 0,0902.$$

A solução pelo R é dada por:

```
> p=1-1.5*exp(-0.5);p
[1] 0.09020401
> 1-ppois(1,0.5)
[1] 0.09020401
>
```

3 Momentos em relação à origem

3.1 Primeiro momento

Fato 2. Se $X \sim P(\lambda)$, então $E[X] = \lambda$.

Prova:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^{x-1}}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}, \qquad \text{faça } y = x-1 \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2 Segundo momento

Fato 3. Se $X \sim P(\lambda)$, então $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$.

Prova:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{1}{x!} e^{-\lambda}\lambda^x = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{(x-1)!} e^{-\lambda}\lambda^x = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{(x-1)!}\lambda^{x-1} \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} (x-1+1)\frac{1}{(x-1)!}\lambda^{x-1} = e^{-\lambda}\lambda \left[\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{1}{(x-1)!}\lambda^{x-1} + \sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}\lambda^{x-1}\right] \\
&= e^{-\lambda}\lambda \left[\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{1}{y!}\lambda^y + \sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{y!}\lambda^y\right] = \lambda(\lambda - e^{-\lambda}e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.3 Terceiro momento

Fato 3. Se $X \sim P(\lambda)$, então $E[X^3] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$.

Prova:

$$\begin{aligned}
E[X^3] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^3 \frac{1}{x!} e^{-\lambda}\lambda^x = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{1}{(x-1)!}\lambda^{x-1} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{y=0}^{\infty}(y+1)^2 \frac{1}{y!}\lambda^y \\
&= e^{-\lambda}\lambda\left[\sum_{y=0}^{\infty} y^2 \frac{1}{y!}\lambda^y + 2\sum_{y=0}^{\infty} y\frac{1}{y!}\lambda^y + \sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{y!}\lambda^y\right] = \lambda(\lambda^2+\lambda+2\lambda+1) \\
&= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.4 Momento em relação à origem de ordem r

Fato 4. Se $X \sim P(\lambda)$, então $E[X^r] = \lambda \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} E[X^j]$, $r \geq 2$.

Prova:

$$\begin{aligned}
E[X^r] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^r \frac{1}{x!} e^{-\lambda}\lambda^x = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x^{r-1}\frac{1}{(x-1)!} e^{-\lambda}\lambda^{x-1} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty}(y+1)^{r-1}\frac{1}{y!}e^{-\lambda}\lambda^y \\
&= \lambda \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j} y^j \frac{1}{y!} e^{-\lambda}\lambda^y = \lambda \sum_{j=0}^{r-1}\binom{-1}{j}\sum_{y=0}^{\infty} y^j \frac{1}{y!}e^{-\lambda}\lambda^y \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}\sum_{y=0}^{\infty} E[X^j] \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Por exemplo, para $r = 4$, temos

$$E[X^4] = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda.$$

4 Momentos Fatoriais

Fato 5. Se $X \sim P(\lambda)$, então $E\big(X_{[r]}\big) = \lambda^r$.

<u>*Prova:*</u>

$$\begin{aligned}
E\big(X_{[r]}\big) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdots[x-(r-1)]\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1)\cdots[x-(r-1)]\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)\cdots[x-(r-1)](x-r)!} \\
&= \sum_{x=r}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-r)!} = e^{-\lambda}\lambda^r \sum_{x=r}^{\infty} \frac{\lambda^{x-r}}{(x-r)!} = e^{-\lambda}\lambda^r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^r\, e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^r \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5 Momentos Centrais

5.1 Variância

Fato 7. Se $X \sim P(\lambda)$, então $Var[X] = \lambda$.

<u>*Prova:*</u> $Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad \blacksquare$

Fato 8. Se $X \sim P(\lambda)$, então $\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \lambda \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-2}{j} E[(X-\mu)^j],\ r \geq 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \lambda. \\
\mu_3 &= \lambda. \\
\mu_4 &= 3\lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

6 Funções geradoras

6.1 Função geradora de probabilidades

Fato 6. Se $X \sim P(\lambda)$, então $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

<u>*Prova:*</u> $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{(t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)} \qquad \blacksquare.$

6.2 Função geradora de momentos

Fato 6. Se $X \sim P(\lambda)$, então $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$.

Prova: $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$ ■

6.3 Função Geradora de Cumulantes

Fato 9. Se $X \sim P(\lambda)$, então $K[t] = \lambda(e^t - 1)$.

Prova: $K[t] = \big[M_X(t)\big] = \ln e^{\lambda(e^t-1)} = \lambda(e^t-1)$ ■

7 Função de distribuição

Fato 10. Se $X \sim P(\lambda)$, então

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} \;\; I_{(0,\infty)} \;\; (x)$$

, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não ultrapassa a x.

Podemos também usar uma relação interessante entre a distribuição de Poisson com a função gama e rescrevermos o **Fato 10** como

Fato 11. Se Se $X \sim P(\lambda)$, então $F(x) = \frac{\Gamma(\lfloor x+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor x \rfloor !}$, onde $\Gamma(\cdot,\cdot)$ é a função gama superior incompleta. Por exemplo,

$$\Gamma(a,b) = \int_b^{\infty} t^{a-1}e^{-t}\,dt, \;\; a, b > 0$$

```
> #### Poisson no R
> #### Funcao de distribuicao acumulada
> #### Qual o valor de F(3.2), quando X~P(2)?
> ppois(3.2,2) #comando direto no R: primeiro argumento = x e  segundo argumento = lambda
[1] 0.8571235
> floor(3.2)####O maior numero inteiro menor que x e' obtido assim
[1] 3
> library(zipfR)#para usar a relacao da funcao gama, voce deve instalar o pacote 'zipfR'
> #Use a funcao 'Igamma' para funcao gama superior incompleta
> #para isso, faça lower = F (se lower = T, então retorna gama inferior)
> Igamma(floor(3.2+1),2,lower=F)/factorial(floor(3.2))
[1] 0.8571235
```

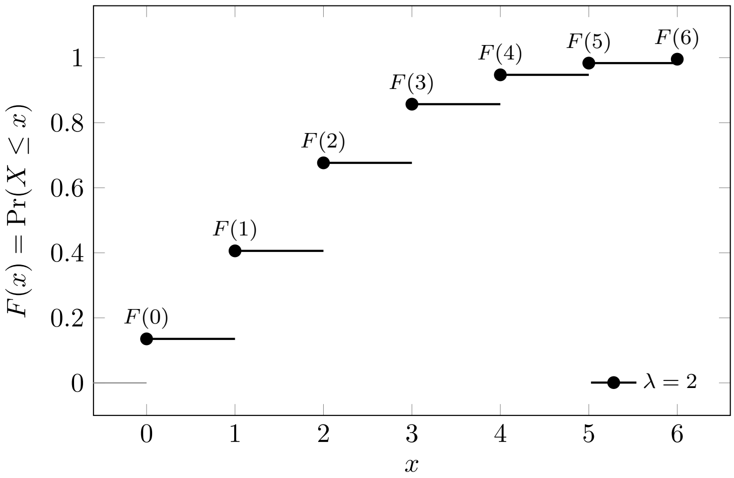

Figura 2: Gráfico da Função de Distribuição de Poisson

8 Moda

Fato 11. A moda da distribuição de $X \sim Poisson(\lambda)$ é (são) os valores inteiros de x que pertencem ao intervalo $[\lambda - 1 \ \ , \ \ \lambda]$. Para λ $geq1$ inteiro a distribuição é bimodal: $Mo = \lambda$ e $Mo = \lambda - 1$. Para λ não inteiro a distribuição é unimodal e $Mo = \lfloor \lambda \rfloor$, o maior inteiro que não ultrapassa λ.

Prova:

Considere a função $g(x) = \dfrac{P(X = x)}{P(X = x - 1)}$ para $x \geq 1$. Vamos mostrar que:

$$g(x) \begin{cases} > 1 & \text{se } x < \lambda; \\ = 1 & \text{se } x = \lambda; \\ < 1 & \text{se } x > \lambda. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{P(X = x)}{P(X = x - 1)} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}} \\ &= \lambda \, \frac{(x-1)!}{x!} \\ &= \frac{\lambda}{x}. \end{aligned}$$

Inicialmente vamos analisar o caso $g(x) = 1$

Assim, $x = \lambda$.

De maneira semelhante $g(x) < 1$ implica que $\lambda < x$ e $x > \lambda$.

Finalmente $g(x) > 1$ implica que $x < \lambda$.

Quando $0 < \lambda < 1$ e como $x \geq 1$ temos que:

$$g(x) = \frac{\lambda}{x} < 1, \ \ \forall \ \ x = 0, 1, 2, \ldots,$$

assim a moda é o ponto $M_0 = 0$

Vamos supor que $\lambda \geq 1$ e que $a = \lambda$ é inteiro positivo. Logo $g(x)$ é crescente para $x < a$ e decrescente para $x > a$. Assim $g(a)$ e $g(a-1)$ são os valores máximos de $g(x)$ mas $g(a) = g(a-1)$ e portanto a Poisson é bimodal. As modas são:

$$M_o = \lambda - 1 \qquad M_o = \lambda.$$

Quando $a = \lambda$ não é inteiro considere $b = \lfloor \lambda \rfloor$ o maior inteiro que não ultrapassa λ. A função $g(x)$ fica:

$$g(x) \begin{cases} > 1 & \text{se } x \leq \lfloor \lambda \rfloor; \\ < 1 & \text{se } x > \lfloor \lambda \rfloor \end{cases}$$

A função $g(x)$ é crescente para $x \leq \lfloor \lambda \rfloor$ e decrescente para $x > \lfloor \lambda \rfloor$. Logo a moda é dada por:

$$M_o = \lfloor \lambda \rfloor.$$

Juntando os dois casos a(s) moda(s) de X são os valores inteiros no intervalo $[\lambda - 1 \quad \lambda]$.

9 Aproximação da Binomial pela Poisson

Vamos utilizar o seguinte resultado:

Fato : Sejam b e c constantes que não dependem de n então:

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{b}{n} \right]^{cn} = e^{bc}.$$

Considere agora $Y_n \sim Bin(n,p)$. Suponha que a média de Y_n é $\lambda = np$, isto é,

$$p = \frac{\lambda}{n},$$

onde λ é uma constante positiva. Seja $M(t;n)$ a função geradora de momentos de Y_n que é dada para qualquer t real por:

$$\begin{aligned} M(t,n) &= E(e^{tY_n}) \\ &= \left[1 - p + pe^t\right]^n \\ &= \left[1 + p(e^t - 1)\right]^n \\ &= \left[1 + \frac{\lambda}{n}\,(e^t - 1)\right]^n \\ &= \left[1 + \frac{\lambda\,(e^t - 1)}{n}\right]^n \end{aligned}$$

Vamos utilizar o seguinte limite: Se

$$\lim_{n\to\infty} \; M(t,n) = M_X(t),$$

então a lei da variável aleatória Y_n se aproxima da lei da variável aleatória X.

mas,

$$\lim_{n\to\infty} \; \left[1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right]^n,$$

façamos $b = \lambda\,(e^t - 1)$ e $c = 1$ de forma que $bc = \lambda\,(e^t - 1)$. Logo,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to\lambda}} \; \left[1 + \frac{\lambda\,(e^t - 1)}{n}\right]^n = e^{\lambda\,(e^t - 1)},$$

que é a função geradora de momentos de uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com parâmetro λ.

Vamos mostrar agora que a f.p de $Y_n \sim B(n,p)$ com $p = \dfrac{\lambda}{n}$ se aproxima da f.p. de $X \sim Poisson(\lambda)$.

Assim note que

$$1 - p = 1 - \frac{\lambda}{n}.$$

e que

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\lambda}{n - \lambda}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P(Y_n = y) &= \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \binom{n}{y} \left[\frac{p}{1-p}\right]^y (1-p)^n \\
&= \frac{n!}{y!(n-y)!} \left[\frac{\lambda}{n-\lambda}\right]^y (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&= \frac{\lambda^y}{y!} \frac{n!}{(n-y)!(n-\lambda)^y} \quad (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&= \frac{\lambda^y}{y!} \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{(n-\lambda)^y} \quad (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&= \frac{\lambda^y}{y!} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{(n-j)}{n-\lambda} \quad (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = y) &= \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda},
\end{aligned}
$$

que é a função geradora de momentos da Poisson de parâmetro λ.

Vamos explicar os dois limites que apareceram na prova: Usando o limite dado com $b = -\lambda$ e $c = 1$ então

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}.$$

E,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{(n-j)}{n-\lambda} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{(1-j/n)}{1-\lambda/n} = \prod_{j=0}^{y-1} \lim_{n\to\infty} \frac{(1-j/n)}{1-\lambda/n} = \prod_{j=0}^{y-1} 1 = 1.$$

10 Processo de Poisson

Vamos discutir inicialmente material da seção 6.17 do livro do Bussab & Morettin. Eles iniciam com a noção de Processo Estocástico. Seja N_t , o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa no intervalo $[0, t)$. Então N_t é um processo de contagem e é chamado de Processo de Poisson se satisfizer as seguintes suposições:

- (S1) $N_0 = 0$, ou seja, o processo começa no instante zero com probabilidade um: $P(N_0 = 0) = 1$.
- (S2) Os números de eventos em intervalos de tempo disjuntos são variáveis aleatórias independentes. Considere $0 < t < t + s$, N_t como antes e $N_{t+s} - N_t$, o número de eventos no intervalo $[t, t + s)$.

Então estamos supondo que variáveis aleatórias N_t e N_{t+s} independentes. Dizemos que o processo tem incrementos independentes.

- (S3) Considere os intervalos $[0,t)$ e $[t,t+s)$, de mesmo comprimento t e as variáveis aleatórias N_t como antes e M_t número de eventos no intervalo $[t,t+s)$. Então, para todo $s>0$ elas tem a mesma distribuição de probabilidades. Ou seja,a distribuição do número de eventos ocorridos num intervalo depende apenas do comprimento do intervalo e não de sua localização. Dizemos que o processo tem incrementos estacionários

- (S4) Para h suficientemente pequeno , $P(N_h = 1) \approx \lambda h$ com $\lambda > 0$. Ou seja, num intervalo pequeno, a probabilidade de ocorrência de um evento é proporcional ao comprimento do intervalo.

- (S5) Para h como em $S4$, $P(N_h \geq 2) \approx 0$. Isso nos diz que a probabilidade de se ter dois ou mais eventos num intervalo suficientemente pequeno é desprezível.

Considere agora o intervalo $[0,t)$ e o divida em subintervalos de comprimento $\frac{t}{n}$, onde

$$I_i = \left[\ \frac{(i-1)t}{n}\ \ ,\ \ \frac{it}{n}\ \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teremos n subintervalos da forma:

$$I_1 = [0\ \ ,\frac{t}{n})\ \ I_2 = [\frac{t}{n}\ \ ,\frac{2t}{n}),\ \ \ldots,\ I_{n-1} = [\frac{(n-2)t}{n}\ \ ,\frac{(n-1)t}{,}\ I_n = [\frac{(n-1)t}{n}\ \ ,\frac{nt}{n}).$$

Seja Y a variável aleatória que dá o número de subintervalos com exatamente um evento. Cada subintervalo contém um evento (sucesso) ou nenhum evento (fracasso) porque dois ou mais eventos tem probabilidade desprezível pela suposição $S5$. A independência é garantida pela suposição $S2$. A probabilidade de sucesso é dada pela suposição $S4$. Como o comprimento de cada subintervalo é $\frac{t}{n}$, temos:

$$p = \lambda h = \lambda \frac{t}{n} = \frac{\lambda t}{n}.$$

E assim,

$$Y \sim Bin(n, p = \frac{\lambda t}{n}).$$

Podemos aproximar Y pela distribuição de Poisson com parâmetro

$$\theta = np = n\frac{\lambda t}{n} = \lambda t.$$

Assim dizemos que $N_t \sim P(\lambda t)$. Sua função de probabilidade é dada por

$$P(N_t = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} 1_{\{0,1,2,...\}}(x).$$

A seguir, uma prova mais rigorosa será apresentada usando a noção de equações diferenciais. Será baseada no livro Introduction to Probability Models do Sheldon Ross.

10.1 Processo de Contagem

Um processo estocástico $\{N(t) \geq 0\}$ é dito um processo de contagem se $N(t)$ representa o número total de eventos que ocorreram até o tempo t.

Um processo de contagem precisa satisfazer as seguintes propriedades:

i $\{N(t) \geq 0\}$

ii $N(t)$ só assume valores inteiros não negativos.

iii Se $s < t$ então $N(s) \leq N(t)$

iv Para $s < t$ então $N(s) - N(t)$ é o total de eventos que ocorreram no intervalo $(s, t]$.

Um processo de contagem tem incrementos independentes se os números de eventos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são independentes. Por exemplo, isto significa o número de eventos que ocorreram até o tempo $t = 10$, $N(10)$ será independente do número de eventos que ocorreram até ente os tempos $t = 10$ e $s = 15$, $N(15) - N(10)$.

Um processo de contagem tem incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo depende somente do comprimento do intervalo considerado. Podemos dizer então que se o processo tem incrementos estacionários se o número de eventos do intervalo $(t_1 + s, t_2 + s]$, $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ tem a mesma distribuição de probabilidade do número de eventos do intervalo $(t_1, t_2]$, $N(t_2) - N(t_1)$ para todo $t_1 < t_2$ e $s > 0$.

Um dos mais importantes processos de contagem é o processo de Poisson que será definido a seguir:

Definição: Um processo de contagem $\{N(t) \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa de incidência λ, $\lambda > 0$, se

i. $N(0) = 0$.

ii. O processo tem incrementos independentes.

iii. O número de eventos que em qualquer intervalo de comprimento t tem distribuição de Poisson com média λt. Isto é, para todo Se s, $t \geq 0$

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} 1_{\{0,1,2,\ldots\}}(n).$$

Note que a condição (iii) implica que o processo tenha incrementos estacionários e veja:

$$E[N(t)] = \lambda t,$$

que explica porque λ é chamada de taxa do processo.

Ross apresenta uma definição mais operacional de Processo de Poisson. Para

calcular alguns limites precisamos o conceito que define uma função f como $o(h)$.

Definição: A função f é dita ser $o(h)$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Vamos apresentar alguns exemplos:

i. a função $f(x) = x^2$ é $o(h)$ desde que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \quad h = 0$$

ii. a função $f(x) = x$ não é $o(h)$ desde que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} \quad 1 = 1.$$

item[iii.] Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são $o(h)$ então a função $f(x) + g(x)$ também o é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) + g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

iv. Se f é $o(h)$ então $g = cf$ também o é, pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

v. De (iii) e (iv) segue que qualquer combinação linear de funções $o(h)$ também é $o(h)$.

Com este comentário estamos prontos para entender a definição alternativa de processo de Poisson.

Definição 2: O processo de contagem $\{N(t) \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa de incidência λ, $\lambda > 0$, se

i. $N(0) = 0$.

ii. O processo tem incrementos independentes e estacionários.

iii. $P(N(h) = 1) = \lambda\, h + o(h)$.

iv.] $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Vamos mostrar que as duas definições são equivalentes.

Prova: Vamos mostrar que a definição 1 implica na definição 2.

Seja

$$P_n(t) = P(N(t) = n).$$

Vai-se agora obter uma equação diferencial para $P_0(t)$:

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\
&= P(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) \quad \text{, incrementos independentes} \\
&= P(N(t) = 0) P(N(t+h) - N(t) = 0) \\
&= P_0(t)[1 - P(N(t+h) - N(t) \geq 1)] \\
&= P_0(t)[1 - P(N(t+h) - N(t) = 1) - P(N(t+h) - N(t) \geq 1)] \\
&= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \\
P_0(t+h) - P_0(t) &= -\lambda P_0(t)\, h + o(h) \\
\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h} \\
\lim_{h \to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) \\
\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} &= -\lambda
\end{aligned}$$

Assim, considere a função

$$g(u) = \frac{P_0'(u)}{P_0(u)}, \quad u \geq 0.$$

Integrando a função $g(u)$ de 0 até t temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{P_0'(u)}{P_0(u)}\, du &= \int_0^t \lambda du \\
\log(P_(u))\Big|_0^t &= -\lambda t \\
\log(P_0(t)) - log(P_0(0)) &= -\lambda t \\
\log(P_0(t)) - log(1) &= -\lambda t \\
\log(P_0(t)) &= -\lambda t \\
P_0(t) &= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Similarmente, para $n > 0$

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P(N(t+h) = n) \\
&= P(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) + P(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) + \\
&\quad \sum_{k=2}^{n} P(N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k) \\
&= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\
&= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h\ P_{n-1}(t) + o(h) \\
&= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \\
P_0(t+h) - P_0(t) &= -\lambda P_0(t)\ h + o(h),
\end{aligned}$$

então,

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Fazendo $h \to 0$ temos:

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$

Assim,

$$P_n'(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t).$$

Multiplicando por $e^{\lambda t}$ ambos os lados da igualdade

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t).$$

Vejam a mágica:

$$e^{\lambda t} P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t).$$

O lado esquerdo é a derivada da função $e^{\lambda t} P_n(t)$, assim,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t).$$

Fazendo $n = 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) &= \lambda e^{\lambda t} P_0(t) \\
&= \lambda e^{\lambda t}\, e^{-\lambda t} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Integrando temos:

$$\int_0^t \frac{d}{du}\left(e^{\lambda u} P_1(u)\right)\, du = \lambda t,$$

assim,

$$e^{\lambda u} P_1(u) \Bigg|_0^t = \lambda t,$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) - P_1(0) = \lambda t,$$

Como $P_0(0) = 1$ temos que $P_1(0) = 0$ e portanto

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t,$$

e

$$P_1(t) = \lambda t \; e^{-\lambda t}.$$

Vamos usar indução matemática para provar o caso geral. Vamos supor verdade para (n-1), isto é,

$$P_{n-1}(t) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right) &= \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \\
&= \lambda e^{\lambda t} \frac{e^{-\lambda t} \lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \\
\int_0^t e^{\lambda u} P_n(u)\, du &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1}\, du \\
e^{\lambda u} P_n(u) \Bigg|_0^t &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \; \frac{u^n}{n} \Bigg|_0^t \\
e^{\lambda t} P_n(t) - e^{\lambda t} P_n(0) &= \frac{\lambda^n \; t^n}{n!} \\
P_n(t) &= \frac{\lambda^n \; t^n}{n!} \\
P_n(t) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda \; t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

11 Transformações Importantes

Fato K. Se $X \sim P(a)$ e $Y \sim P(b)$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$S = X + Y \sim P(a + b).$$

Prova: A função geradora de S é dada por

$$\begin{aligned} G_S(t) &= G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) \\ &= e^{a(t-1)}e^{b(t-1)} = e^{(a+b)(t-1)}, \end{aligned}$$

que é a f.g.p. de uma Poisson de parâmetro $(a+b)$ e cuja f.p. é dada por

$$f(s) = \frac{e^{-(a+b)}\ (a+b)^s}{s!} 1_{\{0,1,\ldots,\infty\}}(s) \qquad \blacksquare$$

Fato Q. Se $X \sim P(a)$ e $Y \sim P(b)$, então e $X|S = s \sim Bin(s, p = \dfrac{a}{a+b})$.

Prova:

$$\begin{aligned} P(X = x|S = s) &= \frac{P(X = x\ X + Y = s)}{P(S = s)} \\ &= \frac{P(X = x\ Y = s - x)}{P(S = s)} \quad \text{(por independência)} \\ &= \frac{P(X = x)P(Y = s - x)}{P(S = s)} \\ &= \frac{\dfrac{e^{-a}a^x}{x!}\ \dfrac{e^{-b}b^{s-x}}{(s-x)!}}{\dfrac{e^{-(a+b)}(a+b)^s}{s!}} 1_{\{0,1,\ldots,s\}} \\ &= \frac{s!}{x!(s-x)!}\ \frac{a^s\ b^{s-x}}{(a+b)^s} \\ &= \binom{s}{x}\ \frac{a^s\ b^{s-x}}{(a+b)^{x+s-x}} \\ &= \binom{s}{x}\ \frac{a^x}{(a+b)^x}\ ;\ \frac{b^{s-x}}{(a+b)^{s-x}} \\ &= \binom{s}{x}\ \left[\frac{a}{a+b}\right]^x\ \left[\frac{b}{a+b}\right]^{s-x} \\ &= \binom{s}{x}\ p^x\ q^{s-x}\ \ 1_{\{0,1,\ldots,s\}}(x) \qquad \blacksquare. \end{aligned}$$

que é a função de probabilidade da Binomial com parâmetros s, $p = \dfrac{a}{a+b}$.

Fato J. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas a $P(a)$ $a > 0$, então,

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(na).$$

Prova:

Sabemos que

$$G_X\ (t) = e^{a(t-1)},$$

e que

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (e^{a(t-1)})^n = e^{na(t-1)}.$$

Assim $S \sim P(na)$ $\blacksquare$

12 Exercícios Resolvidos

1. (Barry James-página 88-Exercício 4) Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson, parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que a função de distribuição acumulada de X é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\lambda}^{\infty} e^{-t}\ t^n\ dt & \text{se} n \leq x < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Solução: Considere $x > 0$ e seja $n = [x]$, o maior inteiro que não ultrapassa x.

A função de distribuição de X para $x > 0$ é dada por :

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= P(X \leq \lfloor x \rfloor) \\
&= P(X \leq n) \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!} \\
&= \frac{n!}{n!} \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}; \frac{(n-x)!}{(n-x)!} \\
&= \frac{1!}{n!} \sum_{x=0}^{n} \frac{n!(n-x)!}{x!(n-x)!}\, e^{-\lambda}\lambda^x \\
&= \frac{1!}{n!} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{-\lambda}\lambda^x\ \Gamma(n-x+1) \\
&= \frac{1!}{n!} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{-\lambda}\lambda^x \int_0^{\infty} u^{n-x}\ e^{-u}\ du \\
&= \frac{1!}{n!} \int_0^{\infty} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\ \lambda^x u^{n-x}\ e^{-(\lambda+u)}\ du. \\
&= \frac{1!}{n!} \int_0^{\infty} (\lambda+u)^n\ e^{-(\lambda+u)}\ du.
\end{aligned}$$

Usando Binônio de Newton e agora fazendo a mudança de variável $t = \lambda + u$ na integral. Assim $dt = du$. Logo,

$$F(x) = \frac{1!}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} t^n\ e^{-t}\ dt.$$

Obs. $\lfloor x \rfloor = n$ se e só se $n \leq x < n+1, n = 0, 1, 2, \ldots.$

2. Foi feita uma contagem de insetos em folhas de uma determinada planta. O número de insetos por folha tem uma distribuição de Poisson (X) com parâmetro λ exceto pelo fato de que muitas folhas não tem insetos porque elas são impróprias para a alimentação e não meramente da variação casual permitida pela lei Poisson. As folhas vazias simplesmente não são contadas. Estamos diante de uma variável aleatória Y que é uma Poisson Truncada no zero. Assim, ela é definida como

$$Y = X | X > 0.$$

O suporte de Y é o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, \infty\}$, Assim, para $y \in A$ temos

$$g(y) = P(X = y|X > 0) = \frac{P(X = y, X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X = y)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!(1 - e^{-\lambda})}.$$

Mostre que:

a. a função de probabilidade de Y é uma legítima f.p.

Solução: Seja $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o suporte de Y. Para $y \in A$ temos $g(y) > 0$. Para $y \in A^c$ temos $g(y) = 0$. Logo $g(y) \geq 0, y \in R$.

Para mostrar a segunda condição:

$$\begin{aligned}
\sum_{y=1}^{\infty} g(y) &= \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!(1 - e^{-\lambda})} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}\, P(X \geq 1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $1 - e^{-\lambda} = P(X \geq 1)$.

b. $g(y)$ pode ser posto na forma:

$$g(y) = \frac{\lambda^y}{y!(e^{\lambda} - 1)}\ \ I_A\ \ (y).$$

Solução: Considere $y \in A$

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!(1 - e^{-\lambda})}$$

multiplicando o numerador e o denominador por e^{λ} temos que

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y}{y!(e^{\lambda} - 1)}\ I_A\ \ (y).$$

c.

$$E(Y) = \mu = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda e^{\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Solução: Seja $X \sim P(\lambda)$ e vamos calcular a esperança de Y, a Poisson truncada no zero,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=1}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!(1-e^{-\lambda})} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=1}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=1}^{\infty} yP(X=y) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=0}^{\infty} y\;P(X=y) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\;E(X) \\ &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Assim,

$$E(Y) = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}.$$

d.

$$E(Y^2) = \frac{\lambda(1+\lambda)}{e^{\lambda}-1}.$$

Solução: Seja $X \sim P(\lambda)$ e vamos calcular a esperança de Y^2, da Poisson truncada no zero,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{y=1}^{\infty} y^2 \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!(1-e^{-\lambda})} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=1}^{\infty} y^2 \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=1}^{\infty} y^2\;P(X=y) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \sum_{y=0}^{\infty} y^2\;P(X=y) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\;E(X^2) \\ &= \frac{\lambda+\lambda^2}{1-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Assim,

$$E(Y^2) = \frac{\lambda+\lambda^2}{(1-e^{-\lambda})}.$$

d.
$$V(Y) = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\left[1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\right] = \mu(1+\lambda-\mu).$$

Solução:

$$\begin{aligned}
V(Y^2) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{\lambda+\lambda^2}{(1-e^{-\lambda})} - \frac{\lambda^2}{(1-e^{-\lambda})^2}. \\
&= \frac{\lambda}{(1-e^{-\lambda})}\left[1 - \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\right] \\
&= \mu\left[1+\lambda-\mu\right].
\end{aligned}$$

e. Mostre que a f.g.p. de Y é dada por:

$$G_Y(t) = \frac{e^{\lambda t}-1}{e^{\lambda}-1}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= E(t^Y) \\
&= \frac{1}{e^{\lambda}-1}\sum_{y=1}^{\infty} t^y \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \frac{1}{e^{\lambda}-1}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^y}{y!} \\
&= \frac{1}{e^{\lambda}-1}\left[\sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^y}{y!} - 1\right] \\
&= \frac{1}{e^{\lambda}-1}\left[\sum_{y=0}^{\infty} t^y P(X=y) - e^{-\lambda} - 1\right] \\
\text{Série de Taylor} &= \frac{1}{e^{\lambda}-1}\left[e^{\lambda t}-1\right] \\
&= \frac{1}{e^{\lambda}} \\
&= \frac{e^{\lambda t}-1\lambda}{e^{\lambda}-1}
\end{aligned}$$

Assim,

$$G_Y(t) = \frac{e^{\lambda t}-1}{1-e^{-\lambda}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

3. Uma distribuição para explicar o excesso de zeros em dados de contagem é a distribuição de Poisson inflacionada de zeros, com f.p. dada por:

$$g(y) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda}, & \text{se } y = 0; \\ \\ (1-p)\ \dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^y}{y!}, & \text{se } \ y = 1, 2 \ldots \\ \\ 0, & \text{para outros valores de } \ y. \end{cases}$$

Os parâmetros da distribuição são λ e p, com $\lambda > 0$ e $0 \leq p < 1$. O parâmetro p pode ser interpretado como a proporção de zeros e λ como a taxa média de ocorrência de eventos em uma unidade de tempo, também conhecido como parâmetro de intensidade. Na literatura é usada a seguinte notação:

$$Y \sim ZIP(\lambda, p).$$

Mostre que:

a. a função de probabilidade de Y é uma legítima f.p..

Solução: Seja $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o suporte de Y. Para $y \in A$ temos $g(y) > 0$. Para $y \in A^c$ temos $g(y) = 0$. Logo $g(y) \geq 0, y \in \mathbf{R}$.

Para mostrar a segunda condição:

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} g(y) &= P(Y=0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(Y=y) \\ &= p + (1-p)e^{-\lambda} + (1-p) \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^y}{y!} \\ &= p + (1-p) \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^y}{y!} \\ &= p + 1 - p \\ &= 1, \end{aligned}$$

Logo é uma legítima função de probabilidade.

b.

$$E(Y) = (1-p)\lambda = \mu.$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y P(Y=y) \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} y P(Y=y) \\
&= (1-p)\sum_{y=1}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} \\
&= (1-p)\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} \\
&= (1-p)E(X) \\
&= (1-p)\lambda = \mu.
\end{aligned}
$$

Agora vamos mostrar que:

$$E(Y^2) = (1-p)(\lambda + \lambda^2).$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{y=0}^{\infty} y^2\, P(Y=y) \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} y^2\, P(Y=y) \\
&= (1-p)\sum_{y=1}^{\infty} y^2 \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} \\
&= (1-p)\sum_{y=0}^{\infty} y^2\, \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} \\
&= (1-p)E(X^2) \\
&= (1-p)(\lambda + \lambda^2).
\end{aligned}
$$

c.

$$V(Y) = \lambda(1-p)(1+\lambda p) = \mu + \frac{p}{1-p}\,\mu^2.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= (1-p)(\lambda + \lambda^2) - [(1-p)(\lambda]^2 \\
&= (1-p)\lambda\,[1 + \lambda - (1-p)\lambda] \\
&= \mu(1 + \lambda p) \\
&= \mu + \mu\,\lambda\,p) \\
&= \mu + \mu\,p\,\frac{\mu}{1-p} \\
&= \mu + \mu^2\,\frac{p}{1-p}.
\end{aligned}$$

d. Mostre que a f.g.p. de Y é dada por:

$$G_Y(t) = p + (1-p)e^{\lambda(t-1)}, \;\; t \in \mathbf{R}.$$

solução:

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= E^{tY}) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} t^y\, P(Y = y) \\
&= P(Y = 0) + \sum_{y=1}^{\infty} t^y\, P(Y = y) \\
&= P(Y = 0) + (1-p)\sum_{y=1}^{\infty} t^y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\
&= p + (1-p)e^{-\lambda} + (1-p)\sum_{y=1}^{\infty} t^y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\
&= p + (1-p)\sum_{y=0}^{\infty} t^y \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^y}{y!} \\
&= p + (1-p)G_X(t) \\
&= p + (1-p)e^{\lambda(t-1)}.
\end{aligned}$$

e. Obtenha a esperança de Y usando a geradora de probabilidades:

Solução: Sabemos que

$$E(Y) = G'_Y(1).$$

Assim,

$$G'(t) = (1-p)\lambda e^{\lambda(t-1)}.$$

Logo,

$$E(Y) = G'_Y(1) = (1-p)\lambda e^{\lambda(1-1)} = (1-p)\lambda.$$

13 Exercícios Propostos

1. (DAVIDI-pg 136-Questão 01) Seja $X \sim Poisson(3)$. Determine:

   a. $P(X = 2)$.

   b. $P(X = 0)$.

   c. $P(X < 3)$.

   d. $P(X = 2)$.

   e. $P(X > 2)$.

   f. μ_X.

   g. σ_X.

   h. Resolva usando o R.

2. (DAVIDI-pg 136-Questão 02) A concentração de partículas em uma suspensão é 4 por ml. A suspensão é bem agitada e, em seguida, são retirados 2 ml. Seja X o número de partículas que são retiradas. Determine:

   a. $P(X = 6)$.

   b. $P(X \leq 3)$.

   c. $P(X > 2)$.

   d. μ_X.

   e. σ_X.

   f. Resolva usando o R.

3. (DAVIDI-pg 136-Questão 03) Suponha que 0,2% dos diodos em uma determinada aplicação apresentam defeito no primeiro mês de uso. Seja X o número de diodos em uma amostra aleatória de 1000 que apresentam defeito no primeiro mês. Determine:

a. $P(X = 4)$.

b. $P(X \leq 1)$.

c. $P(1 \leq X < 4)$.

d. μ_X.

e. σ_X.

f. Resolva usando o R.

4. (DAVIDI-pg 136-Questão 04) O número de falhas em uma dada área de uma lâmina segue uma distribuição de Poisson com uma média de 3 por m^2. Seja X o número de falhas em uma amostra de 1 m^2 da lâmina. Determine:

   a. $P(X = 5)$.

   b. $P(X = 0)$.

   c. $P(X < 2)$.

   d. μ_X.

   e. σ_X.

   f. Resolva usando o R.

5. (DAVIDI-pg 136-Questão 05) O número de acessos em determinado website segue uma distribuição de Poisson com uma taxa média de 4 por minuto. Qual é a probabilidade de:

   a. 5 mensagens serem recebidas em um determinado minuto?

   b. 9 mensagens serem recebidas em 1,5 minuto?

   c. menos de 3 mensagens serem recebidas em período de trinta segundos?

   d. Resolva usando o R.

6. (DAVIDI-pg 136-Questão 06) Um em cada 5000 indivíduos em uma população é portador de um determinado gene defeituoso. Uma amostra de 1000 indivíduos é estudada. Qual é:

   a. a probabilidade de exatamente um indivíduo da amostra portar o gene?

   b. a probabilidade de nenhum dos indivíduos da amostra portar o gene?

   c. a probabilidade de mais de dois indivíduos da amostra portar o gene?

   d. o número médio de indivíduos da amostra que portam o gene?

   e. o desvio padrão do número de indivíduos da amostra que portam o gene?

f. Resolva usando o R.

7. (DAVIDI-pg 136-Questão 07) Uma rede de sensores consiste em um grande número de microprocessadores espalhados ao longo de uma área que se comunicam entre si e com a estação base. Em uma determinada rede, a probabilidade de uma mensagem não chegar à estação base é 0,005. Considere que durante um determinado dia, 1000 mensagens foram enviadas. Qual é:

   a. a probabilidade de exatamente três das mensagens não chegarem à estação base?

   b. a probabilidade de menos de 994 mensagens chegarem à estação base ?

   c. o número médio de mensagens não chegam à estação base?

   d. o desvio padrão do número de de mensagens não chegam à estação base?

   e. Resolva usando o R.

8. (DAVIDI-pg 137-Questão 08)

   Geólogos estimam o tempo decorrido desde o resfriamento mais recente de um mineral contando o número de vestígios de fissões de urânio na superfície do mineral. Um determinado tipo de mineral tem uma idade tal que deve ter uma média de 6 vestígios por cm^2 da área superficial. Considere que o número de vestígios em uma área segue uma distribuição de Poisson. Seja X o número de vestígios contado em 1 cm^2 de área superficial. Determine:

   a. $P(X = 7)$.

   b. $P(X \geq 3)$.

   c. $P(2 < X < 7)$.

   d. μ_X.

   e. σ_X.

   f. Resolva usando o R.

   item (DAVIDI-pg 137-Questão 09) Uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial e uma variável aleatória X tem uma distribuição de Poisson. As duas têm médias iguais a 3. É possível determinar qual variável aleatória tem maior variância? escolha uma das seguintes respostas:

   i. Sim, X tem variância maior.

   ii. Sim, Y tem variância maior.

   iii. Não, precisamos saber o número de ensaios n, para X.

   iv. Não, precisamos saber a probabilidade de sucesso p, para X.

v. Não, precisamos saber o valor de λ para Y.

9. (DAVIDI-pg 137-Questão 10) Você recebeu uma massa radioativa para a qual se diz ter média de decaimento de pelo menos uma partícula por segundo. Se a taxa de decaimento média for menor do que uma por segundo, você deve retornar o produto para o fornecedor. Seja X o número de eventos de decaimento contados em 10 segundos:

   a. Se a taxa de decaimento média for exatamente uma por segundo (de modo que a afirmação seja verdadeira, mas por pouco), qual é o valor $P(X \leq 1)$.

   b. Baseado na resposta em **a**, se a taxa de decaimento média for exatamente uma por segundo, um evento em 10 segundos seria um número excepcionalmente pequeno?

   c. Se você contou um evento de decaimento em 10 segundos, seria uma evidência convincente de que o produto deve ser devolvido? Explique.

   d. Se a taxa de decaimento média for exatamente uma por segundo, qual é o valor $P(X \leq 8)$.

   e. Baseado na resposta em **d**, se a taxa de decaimento média for exatamente uma por segundo, oito eventos em 10 segundos seria um número excepcionalmente pequeno?

   f. Se você contou oito eventos de decaimento em 10 segundos, seria uma evidência convincente de que o produto deve ser devolvido? Explique.

   g. Resolva usando o R.

item (DAVIDI-pg 137-Questão 11) Alguém afirma que certa suspensão contém pelo menos 7 partículas por mL. Você amostra 1 mL da solução. Seja X o número de partículas na amostra.

   a. Se o número médio partículas for exatamente 7 (de modo que a afirmação seja verdadeira, mas por pouco), qual é o valor $P(X \leq 1)$.

   b. Baseado na resposta em **a**, se a suspensão contém 7 partículas por mL, uma partícula na amostra de 1 mL seria um número excepcionalmente pequeno?

   c. Se você contou uma partícula na amostra de 1 mL, seria uma evidência convincente de que afirmação é falsa? Explique.

   d. Se o número médio partículas for exatamente 7 , qual é o valor $P(X \leq 6)$.

   e. Baseado na resposta em **d**, se a suspensão contém 7 partículas por mL, 6 partículas na amostra de 1 mL seria um um número excepcionalmente pequeno? Explique.

   f. Se você contou seis partículas em uma amostra de 1 mL , seria uma evidência convincente de que a afirmação é falsa? Explique.

g. Resolva usando o R.

10. (Meyer-exerc.8.3-pg 210) O número de navios petroleiros , digamos X, que chegam a determinada refinaria, cada dia, tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $a = 2$. As atuais instalações do porto permitem podem atender a três petroleiros por dia. Se mais de três petroleiros aportarem por dia, os excedentes a três deverão seguir para outro porto.

    a. Em um dia , qual é a probabilidade de se ter de mandar petroleiros para outro porto?
    b. De quanto deverão as atuais instalações serem aumentadas para permitir manobrar todos os petroleiros, em aproximadamente 95% dos dias?
    c. Qual o número esperado de petroleiros a chegarem por dia?
    d. Qual o número mais provável de petroleiros a chegarem por dia?
    e. Qual o número esperado de petroleiros a serem atendidos diariamente ?
    f. Qual o número esperado de petroleiros que voltarão a outros portos diariamente?

11. (Meyer-exerc.8.6-pg 210) Suponha que X tenha distribuição de Poisson. Se

$$P(X = 2) = \frac{2}{3}P(X = 1),$$

calcular $P(X = 0)$ e $P(X = 3)$. Qual é a moda de X?

12. (Meyer-exerc.8.7-pg 210) Um fabricante de filmes produz 10 rolos de um filme especialmente sensível, cada ano. Se o filme não for vendido dentro de um ano, ele deve ser refugado. A experiência passada diz que D, a (pequena) procura desse filme , é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com parâmetro 8. Se um lucro 7000 u.m. for obtido, para cada rolo vendido, enquanto um prejuízo de 30000 u.m. é verificado para cada rolo refugado, calcule o lucro esperado que o fabricante poderá realizar com os 10 rolos que ele produz.

13. (Meyer-exerc.8.8-pg 210) Partículas são emitidas por uma fonte radioativa. Suponha que o número de tais partículas, emitidas durante um período de uma hora, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. Um dispositivo contador é empregado para registrar o número dessas partículas emitidas. Se mais de 30 partículas chegarem durante um período de uma hora, o dispositivo registrador é incapaz de registrar o excesso e simplesmente registra 30. Se Y for a variável aleatória definida como o número partículas registradas pelo dispositivo contador, determine a distribuição de probabilidade de Y.

14. (Meyer-exerc.8.9-pg 211) Suponha que partículas sejam emitidas por uma fonte radioativa e que o número partículas emitidas durante um período de uma hora, tenha uma distribuição de Poisson

com parâmetro λ. Admita que o dispositivo contador, que registra essas emissões, ocasionalmente falhe no registro de uma partícula emitida. Especificamente, suponha que qualquer partícula emitida tenha uma probabilidade p de ser registrada.

a. Se Y for definida como o número partículas registradas, qual é a expressão para a distribuição de probabilidade de Y.

b. Calcule $P(Y = 0)$, se $\lambda = 4$ e $p = 0,9$.

15. (Meyer-exerc.8.12-pg 211) Uma fonte radioativa é observada durante 7 intervalos de tempo, cada um de dez segundos de duração. O número partículas emitidas durante cada período é contado. Suponha que o número partículas emitidas X, durante cada período observado, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro 5. (Isto é, partículas são emitidas à taxa de 0,5 partículas por segundo .) Qual é a probabiidade de que:

    a. em cada um dos 7 intervalos de tempo, 4 ou mais partículas sejam emitidas?

    b. em ao menos 1 dos 7 intervalos de tempo, 4 ou mais partículas sejam emitidas?

16. (Meyer-exerc.8.20-pg 212) O número de partículas emitidas por uma fonte radioativa, durante um período especificado, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson . Se a probabilidade de não haver emissões for igual a $\frac{1}{3}$, qual é a probabilidade de que duas ou mais emissões ocorram?

17. (Meyer-exerc.8.21-pg 213) Suponha que X_t, o número de partículas emitidas em t horas por uma fonte radioativa, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro $20t$. Qual será a probabilidade de que exatamente 5 partículas sejam emitidas durante um período de 15 minutos?

18. (Costa Neto & Cymbalista, Exercício 22-pag 89) Os números de defeitos de solda e acabamento de uma certa marca de rádios são variáveis de Poisson independentes, de médias respectivamente 1,2 e 0,8. calcular a probabilidade de que um rádio qualquer:

    a. não seja perfeito.

    b. tenha, no máximo, um defeito de cada tipo.

19. (Costa Neto & Cymbalista, Exercício 23-pag 89) Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é 2 nos dias de bom tempo, e é 1 nos dias chuvosos. Em 70% dos dias faz bom tempo. Seja X o número de carros vendidos em um dia qualquer. Obtenha a função de probabilidade de X. Qual é a probabilidade de que em um certo dia do ano sejam vendidos pelo menos 3 carros?

20. (Costa Neto & Cymbalista, Exercício 26-pag 94) Os defeitos em um certo tipo de chapas de vidro aparecem à razão de 5 para cada 10 m^2 de chapa. Essas chapas serão usadas na construção de janelas para uma instalação industrial. Sabendo que essas janelas medem 150x80 cm, calcular:

    a. a probabilidade de uma janela ter 2 ou mais defeitos;

    b. em um grupo de 5 janelas, a probabilidade de que ao menos 4 delas não tenham defeito algum;

    c. em um grupo de 10 janelas, a probabilidade de que o número total de defeitos seja inferior a 5.

21. (Costa Neto & Cymbalista, Exercício 29-pag 94) O número de automóveis produzidos por dia por uma pequena fábrica é $10 - X$, sendo X uma variável aleatória de Poisson de média igual a 2,5. Em nenhuma hipótese, porém, deixam de ser produzidos ao menos 6 automóveis por dia. Procura-se levar a produção diária, durante a noite, para um centro comercial de distribuição. o que é feito mediante uma única viagem de uma carreta que transporta um máximo de 8 automóveis. Sabendo-se que, em dada noite, nenhum automóvel produzido precisou pernoitar na fábrica, pergunta-se

    a. qual a probabilidade de que, na noite seguinte, a carreta viaje sem sua carga máxima?

    b. qual o número esperado de automóveis que pernoitarão na fábrica na noite seguinte?

22. (Costa Neto & Cymbalista, Exercício 31-pag 95) Turistas chegam a uma cidade segundo uma distribuição de Poisson. Se dois ou mais turistas aparecem, o guia organiza uma excursão e aluga um ônibus. Na terceira vez que alugar um ônibus, ganha uma comissão. Qual a probabilidade de demorar exatamente 6 dias para ganhar a comissão, se em média aparecem 14 clientes por semana?

23. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.52-pag 171) Panes em equipamento numa grande indústria seguem a um processo de Poisson sendo o número de panes por hora uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,5$. Se a indústria reinicia os trabalhos à 7 da manhã de segunda-feira, pede-se para determinar:

    a. A probabilidade de não ocorrer panes entre as 7 e as 11 horas.

    b. A probabilidade da primeira pane ocorrer antes de transcorridas 2 horas de trabalho.

    c. Seja T a variável aleatória tempo transcorrido até se verificar a primeira pane. Mostre que a função de sobrevivência de T é dada por:

    $$S(t) = e^{-0,5t}, \;\; t > 0.$$

    Observe que T é uma variável aleatória contínua.

24. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.105-pag 185) A probabilidade de defeito em 400 m de fio de aço é 0,01. Um cabo de aço daquele comprimento é utilizado para içar numa rampa um barco pesqueiro devendo receber reparos. O cabo é constituído po 100 fios de aço, havendo segurança máxima se pelo menos 99 fios não apresentarem defeito. Qual a probabilidade de segurança máxima?

25. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.107-pag 186) Uma variável aleatória discreta X assume somente valores inteiros não negativos com função de probabilidade f satisfazendo:

$$f(x+1)\,(x+1) = 2f(x), \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Identificar a lei de X.

26. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.112-pag 186) As chegadas de automóveis a um posto de gasolina, para abastecimento, ocorrem de acordo com os postulados de Poisson. No transcurso daquele período apresentam-se por hora uma média de 30 automóveis. Qual a probabilidade de nenhum se apresentar num dado intervalo de 5 minutos?

27. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.114-pag 187) Ao examinarmos uma lâmina ao microscópio, suponhamos que o número de bactérias percebidas num área igual ao campo visual do aparelho, segue uma distribuição de Poisson , com número médio de bactérias igual a 2,5. Se uma tal área da lâmina é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de não conter mais de 5 bactérias? Nenhuma bactéria?

28. (Airton & Teresinha Xavier, exercício 3.115-pag 187) A demanda de determinado aparelho de utilização industrial , montado em certa fábrica, possui distribuição de Poisson , com uma média de 2 unidades diárias. Novo modelo do aparelho, mais aperfeiçoado, é lançado. O responsável pelo controle de estoques acredita que há uma probabilidade igual a 80 % da demanda média ser duplicada e probabilidade igual a 20 % da demanda média ser triplicada, já no decorrer do próximo mês. Qual a probabilidade da demanda de um dia do próximo mês não ultrapassar 2 unidades?

29. (Dalton Andrade & Paulo Ogliari-Exercício 28-pag 213) Verificou-se que o número de quebras cromossômicas em um roedor, em qualquer período de um dia, num local poluído, pode ser considerado como uma variável aleatória que tenha distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,1$. (Isto é, em média haverá uma quebra cromossômica a cada dez dias). Vamos supor que este roedor ficará 20 dias neste local poluído para experiência. Qual a probabilidade de se encontrarem:

   a. menos de três quebras cromossômicas.

   b. mais de duas quebras cromossômicas.

30. Mensagens chegam a um servidor de computadores, de acordo com a distribuição de Poisson, com uma taxa de 10/h. Determine o comprimento de um intervalo de tempo, tal que 0,90 seja a probabilidade de nenhuma mensagem chegar neste intervalo.

31. Sejam $X \sim Poisson(a),\ a > 0$ e $Y \sim Poisson(b),\ b > 0$, independentes. Seja $S = X + Y$.

    a. Mostre que a função geradora de probabilidade de X, $\varphi(t) = E(t^X) = e^{a(t-1)}$, t real.

    b. Mostre que a função geradora de momentos de X é dada por:

    $$M_X(t) = E(t^X) = e^{a(e^t-1)}, \text{t real.}$$

    c. Mostre que a função geradora de cumulantes de X é dada por:

    $$K(t) = ln[M_X(t)]) = a(e^t - 1), \text{t real.}$$

    d. Usando as três funções mostre que $E(X) = Var(X) = a$ e que $E(X^2) = a + a^2$.

    e. Mostre que o r-ésimo momento fatorial de X é dado por:

    $$E(X_{[r]} = E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = a^r.$$

32. Mostre que

$$E(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-e^{-a}}{a}.$$

33. Mostre que

$$E(X!) = \frac{e^{-a}}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

34. Mostre que $P(X \text{ ser par }) = \dfrac{1+e^{-2a}}{2}$.

35. Mostre que $E(X^r) = a\ E[(X+1)^{r-1}]$. Use o resultado para calcular $E(X^3)$.

36. Qual a distribuição de $S = X + Y$, em $X \sim Poisson(a),\ a > 0$ e $Y \sim Poisson(b),\ b > 0$, independentes.

    a. através da função geradora de probabilidade?

    b. através da função geradora de momentos?

    c. diretamente.

    d. primeiro calcule a distribuição conjunta de $S = X + Y$ e $V = X$. Em seguida calcula a distribuição marginal de S.

37. Mostre que a distribuição condicional de $X|S = s$ é binomial de parâmetros $r = s$ e $p = \dfrac{a}{a+b}$, se $X \sim Poisson(a),\ a > 0$ e $Y \sim Poisson(b),\ b > 0$, independentes.

38. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatóriaria de $X \sim Poisson(a)$. Sejam $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$. Mostre que

   a. $S_n \sim Poisson(na)$.

   b. $E(\bar{X}) = a$ e $Var(\bar{X}) = \frac{a}{n}$.

   c. Seja $g(a) = e^{-a} = P(X = 0)$. Seja

   $$U_i = I_{\{0\}} X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Mostre que $E(U_i) = e^{-a}$ e $Var(U_i) = e^{-a}(1 - e^{-a})$.

   d. Seja $W = \sum_{i=1}^{n} U_i$. Mostre que $W \sim Bin(n,\ p = e^{-a})$. Qual a média e a variância de $\bar{W}$?

   e. Mostre que $E(e^{-\bar{X}}) = e^{-a\ n(1-e^{-1/n})}$.

   f. Mostre que $Var(e^{-\bar{X}}) = e^{-a\ n(1-e^{-2/n})} - e^{-2a\ n(1-e^{-1/n})}$.

   g. Mostre que $\lim E(e^{-\bar{X}}) = e^{-a}$.

   h. Compare as variâncias de $e^{-\bar{X}}$ e $\bar{W}$.

39. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(a)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de $Y \sim Poisson(b)$. Sejam $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $S_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$. Mostre que a distribuição condicional de $S_n \mid S_n + S_m = s$ é binomial de parâmetros $r = s$ e $p = \frac{na}{na + mb}$.

40. Contagens de bactérias foram feitas em 27 volumes unitários de água de um rio em duas localidades. Os resultados foram os seguintes:

    Localidade 1: 0 2 0 1 1 2 2 0 2 0 0 1.

    Localidade 2: 3 1 2 1 3 2 3 3 1 2 2 1 3 3 1.

    As bactérias são supostas terem uma distribuição uniforme através da água do rio. Isto é equivalente a supor uma distribuição de Poisson com média μ_1, por unidade de volume, na localidade 1 e média μ_2, por unidade de volume, na localidade 2.

    Teste a hipótese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.

41. Seja $X \sim Poisson(a)$. Mostre que a função de probabilidade de $Y = X|X > 0$ é dada por:

    $$f(y) = \frac{e^{-a} a^y}{y!(1 - e^{-a})} I_A(y), \quad A = \{1, 2, \ldots, \infty\}, \quad a > 0,$$

    que é a distribuição de Poisson truncada no zero.

Calcule a média e a variância de Y. Calcule a função geradora de probabilidade de Y. Mostre que a f.p. de Y pode ser posta na forma:

$$f(y) = exp[c(a)T(y) + d(a) + S(y)]I_A(y),$$

onde A não depende de a. Dizemos que a densidade de Y pertence à família exponencial uniparamétrica de densidades. Este conceito é muito importante na Inferência Estatística.

42. Se X e Y são variáveis aleatórias não negativas, diremos que X é estocasticamente maior que Y, indica-se $X \overset{st}{\geq} Y$, se para $t > 0$, tivermos

$$P(X > t) \geq P(Y > t).$$

   a. Construa um exemplo de duas variáveis aleatórias discretas, X e Y, definidas num mesmo espaço amostral, tais que $X \overset{st}{\geq} Y$ (Atenção: o exemplo trivial de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, não será aceito como resposta desse item)

   b. Mostre que se $X \overset{st}{\geq} Y$ então $E(X) \geq E(Y)$.

   c. Se X e Y tem distribuição de Poisson, com parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ respectivamente, então $X \overset{st}{\geq} Y$ se e somente $a > b$.

43. Em 10 unidades do exército prussiano, num período de 20 anos, 1875-1894, o número de mortos por unidade e por ano, resultante de coices de cavalo (X), está relacionado na seguinte tabela:

X	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

Suponha que $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ desconhecido.

O tamanho da amostra será $200 = 10 \ . \ 20$, pois ele observou 10 unidades durante 20 anos. Seja Y_i a variável aleatória que representa quantas das 200 observações resultaram em i mortes, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. É claro que:

$$Y_i \sim Bin(200 \ , \ p_i = P(X = i)),$$

e seu valor esperado é dado por:

$$E(Y_i) = n \times P(X = i) = n\frac{e^{-\lambda} \ \lambda^i}{i!}.$$

Responda ao que se pede:

a. Qual a média amostral do número de mortos por coices de cavalo?

b. Calcule as frequências esperadas.

c. Discuta a qualidade do ajuste da Poisson aos dados.

44. Em uma estrada de pouco movimento passam, em média, 2 carros por minuto. Supondo a média estável, calcular a probabilidade de que, passem: a) quatro carros em 2 minutos b) no máximo 2 carros em 5 minutos c) pelo menos um carro em 8 minutos

45. Um telefone recebe, em média, 0,25 chamadas por hora. Qual a probabilidade de receber: a) 2 chamadas em 2 horas b) 2 chamadas em 4 horas c) pelo menos uma em 40 minutos

46. Revisadas as páginas de um livro, verificou-se que há, em média, 2 erros de impressão a cada 5 páginas. Se o livro contém 450 páginas, qual o número esperado de páginas sem erros de impressão?

47. Em uma indústria de rádios o número de defeitos de solda e de acabamento dos rádios produzidos são variáveis de Poisson independentes, de médias respectivamente 1,2 e 0,8. Calcular a probabilidade de que um rádio escolhido aleatoriamente da produção dessa indústria: a) seja perfeito b) não seja perfeito c) tenha, no máximo, um defeito de cada tipo

48. Uma máquina produz tela de arame em rolos de 1m de largura. Cada 10 m corridos de tela apresentam, em média, 5 defeitos, situados, ao acaso, em qualquer ponto da tela. Pensa-se em reformar essa máquina para permitir que ela produza tela de 1,20 m de largura. Admitindo-se que essa reforma não modifique a taxa de incidência dos defeitos por área unitária da tela, qual a probabilidade de uma amostra de 2,5 m de comprimento da nova produção não apresentar defeitos?

49. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é igual a 2 carros nos dias de tempo bom, e de 1 carro nos dias chuvosos. Se em 70% dos dias faz bom tempo, qual a probabilidade de que em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos 2 automóveis?

50. Um pintor de paredes comete, em média, uma falha a cada 2 m^2 pintados e seu aprendiz duas falhas a cada m^2. Uma parede de dimensões 3x2 foi pintada 2/3 pelo pintor e 1/3 pelo aprendiz. Qual a probabilidade de aparecer uma única falha na parede inteira?

51. Uma fonte radioativa emite, em média, 0,5 partículas por segundo. Uma chapa fotográfica é sensibilizada se for atingida por 3 ou mais partículas. Se 5 chapas são colocadas, uma após a outra, durante 2 segundos cada uma, em frente à fonte, qual a probabilidade de uma delas ser sensibilizada?

52. Certa peça de plástico de 10 cm^3 é considerada defeituosa se aparecerem 2 ou mais defeitos. Os defeitos podem ser impurezas ou bolhas. Em média, por cm^3, aparecem 0,05 impureza e 0,15 bolha. Qual a probabilidade de uma peça ser considerada defeituosa?

53. Certo artigo consome 750 m de fio. Em média o fio se rompe duas vezes a cada 1000 m. O lucro e a qualidade dos artigos estão relacionados da seguinte maneira:

Qualidade	No de emendas	Lucro/artigo (em reais)
1a	nenhuma	50,00
2a	uma ou duas	20,00
3a	mais de duas	10,00

Se a produção da firma é de 10.000 artigos, qual o lucro esperado?

54. Se X segue B(200 ; 0,015), qual a probabilidade de obtermos:

   a. no máximo um sucesso;

   b. pelo menos 3 sucessos;

   c. nenhum sucesso.

   Calcule a probabilidade exata e aproximada. Use o R.

55. Da produção diária de uma indústria, sabe-se que 8% das peças apresentam pequenos defeitos de fabricação. Escolhida aleatoriamente uma amostra de 50 dessas peças, qual a probabilidade de que:

   a. todas sejam perfeitas;

   b. pelo menos uma apresente pequenos defeitos

   c. entre 10 peças, exatamente 2, apresentem pequenos defeitos.

56. De acordo com a Divisão de Estatística Vital do Departamento de Saúde dos EUA, a média anual de afogamentos acidentais neste país é de 3 por 100.000 habitantes. Em uma cidade com 300.000 habitantes, qual a probabilidade de que ocorram anualmente:

   a. exatamente um afogamento;

   b. nenhum afogamento;

   c. pelo menos 2 afogamentos.

57. Na fabricação de peças de determinado tecido aparece, em média, um defeito a cada 250 m. Supondo distribuição de Poisson para os defeitos, qual a probabilidade de que:

a. na produção de uma peça de 1000 m de tecido, não sejam encontrados defeitos.

b. ocorram, pelo menos 1 defeito nos 1.000 m produzidos.

c. Num período de 90 dias de trabalho, com a produção diária de 625 m, quantos dias esperamos que ocorra produção diária sem defeitos na peça produzida?

58. O número de navios petroleiros que chegam a uma refinaria por dia tem distribuição de Poisson. A probabilidade de chegar um navio por dia é igual a de chegarem dois. As atuais instalações do porto da refinaria permitem o atendimento de três navios por dia, e os eventuais excedentes deverão seguir para outro porto. Com base nessas informações, determinar:

    a. O número esperado de navios que chegam por dia;

    b. A probabilidade de chegarem, no máximo, 4 navios em 12 horas;

    c. A probabilidade de, em um dia, o primeiro navio chegar depois de 6 horas de espera;

    d. A probabilidade de, em um dia, haver navios se dirigindo para outro porto;

    e. Qual o número esperado de navios atendidos diariamente?

    f. Qual o número esperado de navios excedentes diariamente?

    g Quantos navios a mais o porto deve atender para que seja, aproximadamente, 95% a capacidade de atendimento.

59. (Prova da bolsa IME-USP-2004.2) Suponha que X tenha distribuição de Poisson com parâmetro λ.

    (a) Calcule $E[a^X]$, em que $a > 0$.

    (b) Para que valores de λ a $E[X!]$ existe? Calcule $E[X!]$