2.7. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \;\; I_A(x), \quad A = (\theta, \infty), \theta > 0.$$

i. Encontre uma estatística suficiente para θ.

ii. Baseado nesta estatística, obtenha um estimador não viciado para θ

Solução:

A distribuição conjunta da amostra é dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \;\; I_A(x_i).$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = e^{-s}\; e^{n\theta} \;\; \prod_{i=1}^{n} \;\; I_A(x_i)$$

Quando

$$\prod_{i=1}^{n} \;\; I_A(x_i) = 1.$$

Isto é equivalente a

$$I_A(x_i) = 1 \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim

$$x_i > \theta; \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_1 > \theta, x_2 > \theta, \ldots, x_n > \theta$$

ou

$$y_1 = min(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \theta$$

Logo

$$I_{(\theta,\infty)}(y_1) = 1.$$

Assim

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = e^{-s}\; e^{n\theta} \quad I_A(y_1), \;\; A = (\theta, \infty).$$

Fazendo

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-s} = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$g(y_1, \theta) = e^{n\theta} \quad I_A(y_1), \;\; A = (\theta, \infty).$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times g(y_1, \theta)$$

temos que

$$Y_1 = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

é uma estatística suficiente para θ.

A função de sobrevivência de X para $x > \theta$ é dada por:

$$S(x) = e^{-(x-\theta)}.$$

A f.d.p. do mínimo é dada por:

$$g_{Y_1}(y) = n \ [S(y)]^{n-1} \ f(y)$$

$$g_{Y_1}(y) = n \ \left[e^{-(y-\theta)}\right]^{n-1} \ e^{-(y-\theta)} \ I_A(y)$$

$$g_{Y_1}(y) = n \ e^{-n(y-\theta)} \ \ I_A(y)$$

Vamos calcular a esperança de Y_1:

$$E(Y_1) = \int_\theta^\infty \ y \ n \ e^{-n(y-\theta)} \ dy$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = n(y - \theta) \quad ; du = n \ dy.$$

$$y = \frac{u}{n} + \theta.$$

$$E(Y_1) = \int_0^\infty \ (\frac{u}{n} + \theta) \ e^{-u} \ du$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{n} \ \int_0^\infty u \ e^{-u} \ du + \theta \ \int_0^\infty \ e^{-u} \ du$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{n} \ \Gamma(2) + \theta \ \Gamma(1) = \frac{1}{n} \times 1! + \theta \ 0! = \frac{1}{n} + \theta$$

Logo

$$E(Y_1) - \frac{1}{n} = E\left(Y_1 - \frac{1}{n}\right) = \theta.$$

Assim

$$T = Y_1 - \frac{1}{n}$$

é o nosso estimador procurado.

Calcule a variância de T:

Note que

$$Var(T) = Var\left(Y_1 - \frac{1}{n}\right) = Var(Y_1).$$

Vamos calcular a esperança de Y_1^2:

$$E(Y_1 2) = \int_\theta^\infty y^2 \; n \; e^{-n(y-\theta)} \; dy$$

Fazendo a mesma mudança de variável temos:

$$E(Y_1^2) = \int_0^\infty (\frac{u}{n} + \theta)^2 \; e^{-u} \; du$$

$$E(Y_1^2) = \frac{1}{n^2} \int_0^\infty u^2 \; e^{-u} \; du + \frac{2\theta}{n} \int_0^\infty u \; e^{-u} \; du + \theta^2 \int_0^\infty e^{-u} \; du$$

$$E(Y_1^2) = \frac{1}{n^2} \; \Gamma(3) + \frac{2\theta}{n} \; \Gamma(2) + \theta^2.$$

$$E(Y_1^2) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2$$

$$E(Y_1^2) = \frac{1}{n^2} + \left[\theta + \frac{1}{n}\right]^2$$

A variância de Y_1 é dada por:

$$Var(Y_1) = \frac{1}{n^2} + \left[\theta + \frac{1}{n}\right]^2 - \left[\theta + \frac{1}{n}\right]^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Mostre Y_1 é um estimador assintoticamente não viciado de θ.

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_1) = \lim_{n\to\infty} \left[\theta + \frac{1}{n}\right] = \theta.$$

Mostre Y_1 é um estimador consistente para θ.

Note que

$$\lim_{n\to\infty} Var(Y_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Assim como ele é assintoticamente não viciado e $\lim\limits_{n\to\infty} Var(Y_1) = 0$, ele é consistente.

Qual o estimador pelo método dos momentos de θ?

É fácil ver que

$$U = X - \theta \sim Exp(1)$$

Logo

$$1 = E(U) = E(X) - \theta$$

$$\mu = E(X) = \theta + 1.$$

Por outro lado temos:

$$1 = Var(U) = Var(X - \theta) = Var(X) = \sigma^2$$

Logo

$$E(X) = \bar{X}$$

$$\theta + 1 = \bar{X}$$

$$T = \widehat{\theta} = \bar{X} - 1.$$

Note que:

$$E(T) = \theta \;\; e \;\;\; Var(T) = \frac{1}{n}.$$