Q03. Considere o exemplo 5.2.2. Mostre que a distribuição da quantidade pivotal

$$Q(\mathbf{X}, \theta) = \frac{Y_n}{\theta},$$

$$Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

é dada por:

$$f_Q(q) = nq^{n-1}\, I_A(q), \quad A = (0, 1)$$

que é f.d.p de uma beta de parâmetros $a = n$ e $b = 1$.

Considere o intervalo

$$\left[Y_n \; ; \; \frac{Y_n}{\alpha^{1/n}}\right] \quad 5.6.1$$

Encontre seu coeficiente de confiança , compare seu comprimento com o intervalo obtido no Exemplo **5.2.2** e mostre que o intervalo (5.6.1) é o de menor comprimento dentre todos os intervalos com coeficiente $\gamma = 1 - \alpha$.

Solução: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra da variável aleatória com densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\, I_A(x), A = (0, \theta) \;\; e\, \theta > 0$$

A acumulada de X para $0 < x < \theta$ é dada por:

$$F(x|\theta) = \frac{x}{\theta}.$$

A acumulada de Y_n para $0 < y < \theta$ é dada por:

$$F_{Y_n}(y|\theta) = \left[\frac{y}{\theta}\right]^n.$$

Seja

$$q = \frac{y}{\theta}$$

Como

$$0 < y < \theta$$

$$0 < \frac{y}{\theta} < 1$$

Logo,

$$0 < q < 1$$

Seja

$F_Q(q)$ a acumulada de Q.

$$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(\frac{Y_n}{\theta} \leq q) = P(Y_n \leq \theta q) = \frac{\theta^n q^n}{\theta^n} = q^n$$

A f.d.p, de Q é dada por:

$$f_Q(q) = F_Q'(q) = nq^{n-1}\, I_A(q),\ A = (0, 1).$$

Seja $\gamma = 1 - \alpha$ o coeficiente de confiança de

$$P\left(Y_n \leq \theta \leq \frac{Y_n}{\alpha^{1/n}}\right) = \gamma$$

$$P\left(1 \leq \frac{\theta}{Y_n} \leq \frac{1}{\alpha^{1/n}}\right) = \gamma$$

Invertendo temos:

$$P\left(\alpha^{1/n} \leq \frac{Y_n}{\theta} \leq 1\right) = \gamma$$

$$P\left(\alpha^{1/n} \leq Q \leq 1\right) = \gamma$$

$$\gamma = F_Q(1) - F_Q(\alpha^{1/n}) = 1 - \alpha,$$

Vamos construir um Intervalo de confiança para θ com nível de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

Devemos escolher q_1 e q_2 se sorte que:

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha.$$

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = q_2^n - q_1^n = 1 - \alpha.$$

Como existem infinitos pares (q_1, q_2) satisfazendo a igualdade anterior é comum pegarmos o intervalo simétrico, isto é:

$$F_Q(q_1) = q_1^n = \frac{\alpha}{2}$$

$$q_1 = \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{1/n}.$$

$$F_Q(q_2) = q_2^n = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$q_2 = \left[1 - \frac{\alpha}{2}\right]^{1/n}.$$

Vamos construir o IC:

$$P(q_1 \leq \frac{Y_n}{\theta} \leq q_2) = 1 - \alpha.$$

$$P(\frac{1}{q_2} \leq \frac{\theta}{Y_n} \leq \frac{1}{q_1}) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\frac{Y_n}{q_2} \leq \theta \leq \frac{Y_n}{q_1}\right) = 1 - \alpha.$$

Assim nosso intervalo fica

$$\left[\frac{Y_n}{\left[1 - \frac{\alpha}{2}\right]^{1/n}} \quad ; \quad \frac{Y_n}{\left[\frac{\alpha}{2}\right]^{1/n}}\right]$$

Vamos mostrar como construir um intervalo d confiança d comprimento mínimo usando a Quantidade Pivotal

$$Q = \frac{Y_n}{\theta}.$$

Devemos escolher

$$0 \leq q_1 < q_2 \leq 1$$

satisfazendo

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha.$$

Ou

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = q`2^n - q_1^n = 1 - \alpha.$$

Já vimos que o intervalo é dado por:

$$\left[\frac{Y_n}{q_2} \ ; \ \frac{Y_n}{q_1}\right]$$

cujo comprimento é dado por:

$$C = Y_n\left[\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right].$$

Derivando em relação a q_2 temos:

$$\frac{\partial C}{\partial q_2} = Y_n\left[-\frac{1}{q_1^2}\frac{\partial q_1}{\partial q_2} + \frac{1}{q_2^2}\right]$$

Agora vamos derivar em relação a q_2 a expressão:

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1 - \alpha$$

$$f_Q(q_2) \ - f_Q(q_1)\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$$

Assim,

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = \frac{f_Q(q_2)}{f_Q(q_1)} = \frac{nq_2^{n-1}}{nq_1^{n-1}} = \frac{q_2^{n-1}}{q_1^{n-1}}.$$

Vamos substituir:

$$\frac{\partial C}{\partial q_2} = Y_n \left[-\frac{1}{q_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial q_2} + \frac{1}{q_2^2} \right] = Y_n \left[-\frac{1}{q_1^2} \frac{q_2^{n-1}}{q_1^{n-1}} + \frac{1}{q_2^2} \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_2} = Y_n \left[-\frac{q_2^{n-1}}{q_1^{n+1}} + \frac{1}{q_2^2} \right] = Y_n \left[\frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1^{n+1}\, q_2^2} \right] < 0$$

para qualquer valor de q_2, pois $q_1 < q_2$.Temos então que C é uma função decrescente de q_2. Logo seu mínimo ocorre quando

$$q_2 = 1.$$

Como

$$q_2^n - q_1^n = 1 - \alpha$$

temos

$$1 - q_1^n = 1 - \alpha$$

assim

$$q_1^n = \alpha$$

finalmente temos:

$$q_1 = \alpha^{1/n}.$$

Assim

$$\left[Y_n \ ; \ \frac{Y_n}{\alpha^{1/n}} \right] \quad 5.6.1$$

é o intervalo de comprimento mínimo.