Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da UFC
Estatística Não-Paramétrica
TESTE DE FRIEDMAN
Professor: Mauricio Mota

1 Introdução

Já vimos o caso de duas amostras com dados pareados, utilizando o **Teste do Sinal**. O presente caso pode ser abordado como uma generalização do pareamento, para k amostras, dispostas em blocos, ou seja, na mesma configuração de um delineamento em blocos casualizados. Assim, podemos admitir o seguinte esquema:

TRATAMENTO	BLOCO 1	BLOCO 2	BLOCO 3	...	BLOCO n
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	X_{1n}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	X_{2n}
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	...	X_{3n}
...	...	...	...	...	...
k	X_{k1}	X_{k2}	X_{k3}		X_{kn}

Admitimos, como no caso da Estatística Paramétrica, que dentro de cada bloco os ***k*** *tratamentos estão sujeitos às mesmas condições ambientais.*

Evidentemente , os testes a serem abordados representam os competidores do teste F e seus complementares. Devemos, no entanto, salientar que, se as exigências do modelo matemático no campo paramétrico forem satisfeitas, os testes não paramétricos são geralmente menos poderosos. Entretanto, apresentam uma maior versatilidade, uma vez que não exigem normalidade dos dados e nem a homogeneidade das variâncias dos tratamentos. Além disso , podem ser aplicados, com maior eficiência, no caso de pequenas amostras, onde, as vezes, embora o modelo esteja satisfeito, a aplicação do teste F não é muito conveniente ou recomendável.

2 O Teste de Friedman ($\chi 2$ de Friedman)

2.1 Generalidades

O teste de Friedman também pode ser considerado como um teste F aplicado às ordens das observações dentro de cada bloco.

Podemos considerá-lo como uma extensão do teste Bilateral do Sinal, já discutido para o caso de duas amostras com dados pareados. Neste caso, o pareamento pode ser proveniente de um mesmo grupo de n indivíduos, considerados em situações distintas, ou poderá ser proveniente de n grupos de k indivíduos afins em cada grupo.

2.2 Pressuposições

- a) Os n grupos de k observações são independentes entre si;

- b) As k populações são aproximadamente da mesma forma e contínuas. No caso de populações não-contínuas, o teste é apenas aproximado.

2.3 Hipóteses

Consideramos

$$\begin{cases} H_0 : t_1 = t_2 = \ldots = t_k \\ H_1 : \text{Pelo menos dois tratamentos diferem entre si.} \end{cases}$$

2.4 O Método

Dentro de cada bloco procedemos a classificação conjunta das k observações, dando ordem **1** à menor e ordem **k** a maior delas.

Definimos:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1),$$

Em que R_i é a soma das ordens atribuídas aos dados do tratamento i, nos n blocos.

Para testarmos, ao nível α de significância H_0 vs H_1:

Rejeitamos H_0 se $\chi_r^2 \geq \chi_0^2$

Em que

$$P_0(\chi_r^2 \geq \chi_0^2) = \alpha$$

Observações:

Os valores de χ_0^2, para $k \leq 5$ são obtidos da Tabela 22. Para $k > 5$ ou para um número de blocos não previsto na Tabela, devemos utilizar a **aproximação para grandes amostras**.

Comprova-se que sob H_0 para grandes amostras, χ_r^2 tem uma distribuição de χ^2, com $k-1$ graus de liberdade.

2.5 Empates

No caso de empates entre observações de um mesmo bloco, utilizamos a média das ordens. Além disso, aplicamos ao valor de χ_r^2 a seguinte correção:

$$C = 1 - \frac{\sum_j T_j}{nk(k^2-1)}$$

Em que

$$T_j = \sum_i t_{ij}^3 - k$$

t_{ij}^3 = Número de observações empatadas no grupo i do bloco j.

A nova expressão de χ_r^2 fica:

$$\chi_r^2 * = \frac{\chi_r^2}{C} = \frac{\frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1)}{1 - \frac{\sum_j T_j}{nk(k^2-1)}}$$

Vejamos um exemplo ilustrativo. Suponhamos:

BLOCOS	Tratam. 1	Tratam. 2	Tratam. 3	Tratam. 4	Tratam. 5
B_1	2,5 (2,0)	3,7 (5,0)	2,5 (2,0)	3,0 (4,0)	2,5 (2,0)
B_2	4,2 (4,5)	3,8 (2,0)	4,0 (3,0)	4,2 (4,5)	3,5 (1,0)
B_3	3,5 (2,0)	3,9 (5,0)	3,7 (4,0)	3,6 (3,0)	3,2 (1,0)
	R_1 = 8,5	R_2 = 12,0	R_3 = 9,0	R_4 = 11,5	R_5 = 4,0

Calculamos preliminarmente:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1)$$

$$\chi_r^2 = \frac{12}{3(5)(6)}(8,5^2 + 12,0^2 + 9,0^2 + 11,5^2 + 4,0^2) - 3(3)(6)$$

$$\chi_r^2 = 5,40$$

Perceba que $n = 3$ e $k = 5$!!

E ainda, como ocorreram empates:

$$\begin{array}{lll} t_{11} = 3 & t_{12} = 1 & t_{13} = 1 \\ t_{21} = 1 & t_{22} = 1 & t_{23} = 1 \\ t_{31} = 1 & t_{32} = 1 & t_{33} = 1 \\ & t_{42} = 2 & t_{43} = 1 \\ & & t_{53} = 1 \end{array}$$

E ainda,

$$T_1 = \sum_i t_{i1}^3 - k = 3^3 + 1^3 + 1^3 - 5 = 24$$

$$T_2 = \sum_i t_{i2}^3 - k = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 2^3 - 5 = 6$$

$$T_3 = \sum_i t_{i3}^3 - k = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 - 5 = 0$$

Portanto,

$$C = 1 - \frac{\sum T}{nk(k^2-1)} = 1 - \frac{30}{3(5)(24)} = 0,917$$

e

$$\chi_r^2* = \frac{\chi_r^2}{C} = \frac{5,40}{0,917} = 5,89$$

Observações:

- 1) No caso de não ocorrerem empates dentro de um bloco j, teremos $T_j = O$, conforme verificamos no exemplo dado.
- 2) Quando todas as observações estão empatadas dentro de um bloco, podemos, para efeito de cálculo, sem alterar χ_r^2*, eliminar o bloco e redimensionar n. Isto se verifica mesmo que nos blocos restantes não ocorram empates.

2.6 Exemplos

2.6.1 Exemplo 1

Num ensaio sobre adubação nitrogenada de alface, realizado pelo Prof. Salim Simão, da E.S.A. "Luiz de Queiroz", foram considerados os seguintes tratamentos:

Tratamento 1: Testemunha
Tratamento 2: 5g de salitre/10 litros d'água
Tratamento 3: 10g de salitre/10 litros d'água
Tratamento 4: 20g de salitre/10 litros d'água

A adubação básica foi NPK e a adubação nitrogenada referida foi feita em cobertura. Os resultados de produção (peso de 12 pés, em gramas) foram os que se seguem.

BLOCOS	Tratam. 1	Tratam. 2	Tratam. 3	Tratam. 4
I	3.640 (1)	4.200 (2)	4.700 (3)	5.300 (4)
II	4.890 (2)	4.550 (1)	6.020 (4)	5.900 (3)
III	4.800 (1)	5.320 (4)	5.250 (3)	5.150 (2)
IV	4.460 (1)	5.500 (2)	5.580 (4)	5.560 (3)
	$R_1 = 5$	$R_2 = 9$	$R_3 = 14$	$R_4 = 12$

Verifique, pelo teste de Friedman, se houve resposta à adubação nitrogenada.
Solução:

As nossas hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : t_1 = t_2 = t_3 = t_4 \\ H_1 : \text{Pelo menos dois tratamentos diferem entre si.} \end{cases}$$

Determinamos:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1)$$
$$\chi_r^2 = \frac{12}{4(4)(5)}(5^2 + 9^2 + 14^2 + 12^2) - 3(4)(5)$$
$$\chi_r^2 = 6,90$$

Se considerarmos o nível de significância α = 0,05, a Tabela 22 nos dá:

$$\chi_0^2 = 7,50$$

Verificamos então que, ao nível α = 0,05, aceitamos H_0, isto é, os tratamentos não diferem entre si.

Por outro lado, observamos, ainda pela Tabela 22, que:

$$0,052 < n.m.s < 0,094$$

Isto é, o nível mínimo de significância no qual rejeitaríamos está entre 5,2 e 9,4%.

Esta conclusão não é muito discrepante daquela que seria obtida pela aplicação do teste F.

2.7 Exemplo 2:

Numa pesquisa sobre "Aproveitamento Tecnológico do Mandi-Defumação Fria", realizada no Departamento de Tecnologia Rural da E.S.A. "Luiz de Queiroz", pelos pesquisadores Dr[a]. Marília Oetterer de Andrade e Prof. Urgel de Almeida Lima, foram realizadas análises sensoriais com sopas provenientes de mandis aos 7 (sete) dias de armazenamento, considerando-se os seguintes tratamentos:

Tratamento 1: Amostra com 3% de sal, por 5 horas;
Tratamento 2: Amostra com 3% de sal, por 10 horas;
Tratamento 3: Amostra com 10% de sal, por 5 horas;
Tratamento 4: Amostra com 10% de sal, por 10 horas;

Foram utilizados dez degustadores que classificaram as sopas numa escala ordinal:

N: Não aceitável;
R: Razoável;
B: Boa;
O: Ótima;

Os resultados obtidos, quanto ao sabor, foram os que se seguem:

DEGUSTADORES	Tratam. 1	Tratam. 2	Tratam. 3	Tratam. 4
D_1	B (1,5)	B (1,5)	O (3,5)	O (3,5)
D_2	R (1,0)	O (3,0)	O (3,0)	O (3,0)
D_3	O (3,5)	O (3,5)	R (1,0)	B (2,0)
D_4	R (2,0)	N (1,0)	O (3,5)	O (3,5)
D_5	O (4,0)	N (1,0)	R (2,0)	B (3,0)
D_6	R (2,0)	O (3,5)	N (1,0)	O (3,5)
D_7	B (2,0)	R (1,0)	O (3,5)	O (3,5)
D_8	N (1,0)	R (2,0)	B (3,0)	O (4,0)
D_9	R (1,0)	O (4,0)	B (2,5)	B (2,5)
D_{10}	B (3,0)	R (2,0)	N (1,0)	O (4,0)
	R_1 = 21,0	R_2 = 22,5	R_3 = 24,0	R_4 = 32,5

Os dados, embora qualitativos, podem ser analisados satisfatoriamente pelo teste de Friedman.

Os números entre parênteses representam as ordens, obedecendo-se a escala de classificação dentro de cada bloco.

Determinamos:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1)$$

$$\chi_r^2 = \frac{12}{10(4)(5)}(21,0^2 + 22,5^2 + 24,0^2 + 32,5^2) - 3(10)(5)$$

$$\chi_r^2 = 4,80$$

Em decorrência dos empates consideramos:

$$\begin{array}{ccccccc} t_{11}=2 & t_{12}=1 & t_{13}=1 & t_{14}=1 & t_{15}=1 & t_{17}=1 & t_{19}=1 \\ t_{21}=2 & t_{22}=3 & t_{23}=1 & t_{24}=1 & t_{26}=1 & t_{27}=1 & t_{29}=2 \\ & & t_{33}=2 & t_{34}=2 & t_{36}=2 & t_{37}=2 & t_{39}=1 \end{array}$$

Os blocos 5, 8 e 10 não foram considerados na determinação da correção, por não apresentarem empates.

Daí temos:

$$\begin{array}{ll} T_1 = 12 & T_6 = 6 \\ T_2 = 24 & T_7 = 6 \\ T_3 = 6 & T_9 = 6 \\ T_4 = 6 & \end{array}$$

E, finalmente,

$$\chi_r^2 * = \frac{\chi_r^2}{1 - \dfrac{\sum T}{nk(k^2-1)}} = \frac{4,80}{1 - \dfrac{66}{10(4)(15)}} = 5,39.$$

Neste caso , consultamos a tabela de χ^2 com $k - 1 = 3$ graus de liberdade. A Tabela 4 nos dá, ao nível $\alpha =$ 0,05:

$$\chi^2 = 7,82.$$

O nível mínimo de significância, neste caso, é $\alpha > 0,10$. Concluímos que, quanto ao sabor, as sopas não apresentam diferenças significativas!

3 Exercícios Propostos

1. Num ensaio sobre competição de variedades de cana-de- -açucar, foram obtidos os seguintes resultados de produção, em t/ha:

VARIEDADES	Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV	Bloco V	Bloco VI
V_1	110,6	119,5	120,1	105,3	130,8	138,1
V_2	116,7	128,4	131,5	114,8	146,8	155,5
V_3	140,3	150,0	150,9	144,7	153,9	156,9
V_4	143,4	153,8	151,5	144,1	154,6	159,3

Em que,

V_1: Co 419 V_3: CB 41-70

V_2: Co 421 V_4: CB 41-76

a) Aplique o teste de Friedman aos resultados obtidos.

b) Confronte as conclusões com as obtidas pela aplicação do Teste F .

2. Incluindo no exemplo anterior uma quinta variedade (V_5 : CB 40-19) com as produções:

$$128,6; 140,2; 130,3; 138,7; 146,0; 149,8$$

respectivamente, para os blocos de I a VI , refaça o teste de Friedman para as cinco variedades em questão.

3. Admitindo os resultados seguintes:

BLOCOS	Tratam. 1	Tratam. 2	Tratam. 3	Tratam. 4
I	10,2	11,6	13,8	13,2
II	9,6	10,4	11,3	13,6
III	8,4	9,7	9,5	8,8
IV	10,3	10,3	10,3	10,3

a) Calcule χ_r^2 pelo processo usual, considerando os empates no bloco IV;
b) Elimine o bloco IV, redimensione o ensaio e recalcule χ_r^2;
c) Discuta as conclusões obtidas nos dois casos .

4 Anexos

Tabela 4 - Limites da distribuição de χ^2

					α					
G.L.	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	---	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	4,57	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	9,39	10,86	13,68	17,34	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	11,59	13,24	16,34	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77
50	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,22
80	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	69,13	73,29	80,62	89,33	98,64	107,56	113,14	118,14	124,12	128,30
100	77,93	82,36	90,13	99,33	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

5 Anexos

Tabela 22 - Limites da distribuição de χ_r^2 no teste de Friedman

$$P_0(\chi_r^2 \geq \chi_0^2) = \alpha$$

k - número de tratamentos;
n - número de repetições por tratamento.

$k = 3$

n	χ_0^2	α
2	4,00	0,167
3	4,67	0,194
	6,00	0,028
4	4,50	0,125
	6,00	0,069
	6,50	0,042
	8,00	0,005
5	3,60	0,182
	4,80	0,124
	5,20	0,093
	6,40	0,039
	7,60	0,024
	8,40	0,008
	10,00	0,001
6	4,00	0,184
	4,33	0,142
	5,33	0,072
	6,33	0,052
	7,00	0,029
	8,33	0,012
	9,00	0,008
	10,33	0,002
7	3,71	0,182
	4,57	0,112
	5,43	0,085
	6,00	0,051
	7,14	0,027
	8,00	0,016
	8,86	0,008
	11,14	0,001

$k = 3$

n	χ_0^2	α
8	4,00	0,149
	4,75	0,120
	5,25	0,079
	6,25	0,047
	7,00	0,030
	9,00	0,010
	12,00	0,001
9	3,56	0,187
	4,67	0,107
	5,56	0,069
	6,00	0,057
	6,22	0,048
	6,89	0,031
	8,67	0,010
	11,56	0,001
10	3,80	0,187
	4,20	0,135
	5,00	0,092
	5,60	0,066
	6,20	0,046
	7,40	0,026
	8,60	0,012
	9,60	0,007
	12,20	0,001
11	3,82	0,183
	4,91	0,100
	5,64	0,062
	6,54	0,043
	7,09	0,027
	8,91	0,011
	9,46	0,007
	12,18	0,001

$k = 3$

n	χ_0^2	α
12	3,50	0,191
	4,67	0,108
	5,17	0,080
	6,17	0,050
	7,17	0,028
	8,67	0,011
	9,50	0,008
	12,50	0,001
13	3,85	0,165
	4,31	0,129
	4,77	0,098
	6,00	0,050
	7,54	0,025
	8,77	0,012
	9,38	0,008
	12,15	0,001
14	3,57	0,188
	4,43	0,117
	5,14	0,089
	5,57	0,063
	6,14	0,049
	7,43	0,023
	9,00	0,010
	13,00	0,001
15	3,60	0,189
	4,80	0,106
	4,93	0,096
	5,73	0,059
	6,40	0,047
	7,60	0,022
	8,93	0,010
	12,40	0,001

Tabela 22 - continuação

$k = 4$

n	χ_0^2	α
2	5,40	0,167
	6,00	0,042
3	5,40	0,175
	5,80	0,148
	6,60	0,075
	7,00	0,054
	7,40	0,033
	8,20	0,017
	9,00	0,002
4	4,80	0,200
	6,00	0,105
	6,30	0,094
	7,50	0,052
	7,80	0,036
	8,40	0,019
	9,30	0,012
	9,90	0,007
	11,10	0,001
5	5,16	0,162
	6,12	0,107
	6,36	0,093
	7,32	0,055
	7,80	0,044
	8,76	0,023
	9,72	0,012
	9,96	0,009
	12,12	0,001

$k = 4$

n	χ_0^2	α
6	4,80	0,197
	6,20	0,110
	6,40	0,089
	7,40	0,056
	7,60	0,043
	8,80	0,023
	10,00	0,010
	12,60	0,001
7	4,89	0,195
	6,26	0,100
	7,63	0,052
	7,80	0,041
	9,00	0,023
	10,37	0,010
	13,11	0,001
8	4,80	0,193
	6,30	0,100
	7,50	0,051
	7,65	0,049
	8,85	0,025
	10,35	0,011
	10,50	0,009
	13,35	0,001

$k = 5$

n	χ_0^2	α
3	6,40	0,172
	7,20	0,117
	7,47	0,096
	8,27	0,056
	8,53	0,045
	9,87	0,015
	10,13	0,008
	11,47	0,001
4	6,20	0,197
	7,40	0,113
	7,60	0,095
	8,60	0,060
	8,80	0,049
	9,80	0,025
	11,00	0,010
	13,00	0,001
5	6,08	0,195
	7,52	0,107
	7,68	0,094
	8,80	0,056
	8,96	0,049
	10,08	0,026
	11,52	0,010
	14,08	0,001

Esta tabela, para $k = 3$ foi adaptada de:

OWEN, D.B., 1962. *Handbook of Statistical Tables*. Reading. Massachussets. Addison--Wesley Publishing Co.

Para $k = 4$ e 5 foi adaptada de:

HOLLANDER, M. e WOLFE, D.A., 1973. *Nonparametric Statistical Methods*. Nova York. John Wiley & Sons.