CC085 - Probabilidade II

Problema de AutoTeste-6.7-Ross - 13/10/2023.

Prof. Maurício

1. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = xy \ \ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y).$$

   a. São X e Y independentes? .
   b. Determine a marginal de X. Identifique-a. Forneça $E(X)$ e $Var(X)$.
   c. Determine a marginal de Y.Identifique-a. Forneça $E(Y)$ e $Var(Y)$.
   d. Calcule $P(X + Y < 1)$.
   e. Determine a função de distribuição acumulada de X e a de Y,
   f. Determine a função de distribuição conjunta.

   .

Solução:

A marginal de Y é dada por:

$$f_Y(y) = y \ \int_0^1 x\ dx$$

$$f_Y(y) = y\ \frac{x^2}{2}\ |_0^1$$

$$f_Y(y) = \frac{y}{2}\ I_{(0,2)}\ (y).$$

$$Y \sim \Delta(a = 0, b = c = 2).$$

$$E(Y) = \frac{a + b + c}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$Var(Y) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} = \frac{2}{9}.$$

A marginal de X é dada por:

$$f_X(x) = x \ \int_0^2 y\ dy$$

$$f_X(x) = x\ \frac{y^2}{2}\ |_0^2$$

$$f_X(x) = 2x\ I_{(0,1}\ (x).$$

$$X \sim Beta(a = 1, b = 2).$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}.$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Vamos mostrar a independência entre X e Y.

Vamos calcular a probabilidade pedida:
Temos que provar o seguinte fato: $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

Assim

$$f_X(x) \times f_Y(y) = 2x\ I_{(0,1)}\ (x) \times \frac{y}{2}\ I_{(0,2)}\ (y) = xy\ I_{(0,1)}\ (x)\ \ I_{(0,2)}\ (y) = f(x, y),$$

mostrando assim que X e Y são independentes.

Vamos calcular a probabilidade pedida:

No suporte temos $y > 0$ e o problema pede que $x + y < 1$ ou que $y < x - 1$
Assim a variação interna de y é:

$$0 < y < 1 - x,$$

com $0 < x < 1$.

$$P(X + Y < 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\ dy\ dx = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y\ dy\right] dx$$

Mas

$$\int_0^{1-x} y\ dy = \frac{y^2}{2}\ \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Assim,

$$P(X + Y < 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 x\ (1-x)^2\ dx = \frac{1}{2}\ beta(2, 3)$$

$$P(X + Y < 1) = \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma(2)\ \Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2} \times \frac{1! \times 2!}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Agora vamos calcular a acumulada de X.

Para $x \leq 0$ temos $F(x) = 0$. Para $x \geq 1$ temos $F(x) = 1$.

Para $0 < x < 1$ temos:

$$F(x) = P(X \leq x) = 0 + \int_0^x 2t\, dt = x^2.$$

$$F(x) = x^2\, I_{(0,1)}\,(x) + I_{[1,\infty)}\,(x).$$

Escrevendo de forma mais elegante e com um único indicador temos:

$$F_X(x) = min(x^2, 1) \quad I_{(0,\infty)}\,(x).$$

Agora vamos calcular a acumulada de Y.

Para $y \leq 0$ temos $F(y) = 0$. Para $y \geq 2$ temos $F(y) = 1$.

Para $0 < y < 2$ temos:

$$F(y) = P(Y \leq y) = 0 + \int_0^y \frac{t}{2}\, dt = \frac{y^2}{4}.$$

$$F(y) = \frac{y^2}{4}\, I_{(0,2)}\,(y) + I_{[2,\infty)}\,(y).$$

Escrevendo de forma mais elegante e com um único indicador temos:

$$F_Y\,(y) = min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) \quad I_{(0,\infty)}\,(y).$$

Vamos calcular a acumulada conjunta de (X, Y):

$$F(x, y) = P\,(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du\, dv.$$

Olhando o gráfico do suporte vamos dividir o plano em 5 regiões que formam uma partição:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \leq 0 \ \text{ ou } \ y \leq 0\}.$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 0 < x < 1 \ \text{ e } \ 0 < y < 2\}.$$

$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 0 < x < 1 \ \text{ e } \ y \geq 2\}.$$

$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \geq 1 \ \text{ e } \ 0 < y < 2\}.$$

$$R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \leq 1 \ \text{ e } \ \ y \geq 2\}.$$

Assim para $(x,y) \in R_1$ temos:

$$F(x,y) = 0.$$

Assim para $(x,y) \in R_2$ temos:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y u\, v\, du\, dv = \int_0^x \ u du \times \int_0^y \ v\, dv.$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{4}.$$

Assim para $(x,y) \in R_3$ temos:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^1 u\, v\, du\, dv = \int_0^x \ u du \times \int_0^1 \ v\, dv.$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{4}.$$

Assim para $(x,y) \in R_4$ temos:

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^y u\, v\, du\, dv = \int_0^1 \ u du \times \int_0^y \ v\, dv.$$

$$F(x,y) = \frac{y^2}{4}.$$

Assim para $(x,y) \in R_5$ temos:

$$F(x,y) = 1.$$

Logo,

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + \frac{x^2}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y) + \frac{y^2}{4}\ I_{[1,\infty)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + I_{[1,\infty)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y).$$

Quando X e Y são independentes fica mais fácil calcular a acumulada conjunta:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y) = F_X(x) \times F_Y(y).$$

Logo,

$$F(x,y) = min(x^2, 1) \quad I_{(0,\infty)}\,(x) \times min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) \quad I_{(0,\infty)}\,(y).$$

Note que em R_1 temos

$$I_{(0,\infty)}\,(x) = 0 \quad e \quad I_{(0,\infty)}\,(y) = 0$$

e

$$F(x,y) = 0.$$

Note que em R_5 temos

$$I_{(0,\infty)}\,(x) = 1 \quad e \quad I_{(0,\infty)}\,(y) = 1$$

Além disso

$$min(x^2, 1) = 1 \quad e \quad min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) = 1$$

e

$$F(x,y) = 1.$$

Note que em R_2 temos

$$I_{(0,\infty)}\,(x) = 1 \quad e \quad I_{(0,\infty)}\,(y) = 1$$

Além disso

$$min(x^2, 1) = x^2 \quad e \quad min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) = \frac{y^2}{4}$$

e

$$F(x,y) = \frac{x^2 y^2}{4}.$$

Note que em R_3 temos

$$I_{(0,\infty)}\,(x) = 1 \quad e \quad I_{(0,\infty)}\,(y) = 1$$

Além disso

$$min(x^2, 1) = x^2 \quad e \quad min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) = \frac{1}{4}$$

e

$$F(x,y) = \frac{x^2}{4}.$$

Note que em R_4 temos

$$I_{(0,\infty)}\ (x) = 1 \quad e \quad I_{(0,\infty)}\ (y) = 1$$

Além disso

$$min(x^2, 1) = 1 \quad e \quad min\left(\frac{y^2}{4}, 1\right) = \frac{y^2}{4}$$

e

$$F(x, y) = \frac{y^2}{4}.$$

Uma propriedade importante da acumulada conjunta é:

Note que:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = f(x, y).$$

Assim

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + \frac{x^2}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y) + \frac{y^2}{4}\ I_{[1,\infty)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + I_{[1,\infty)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y).$$

Derivando F parcialmente em relação a x temos:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{2xy^2}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + \frac{2x}{4}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{xy^2}{2}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) + \frac{x}{2}\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{[2,\infty)}\ (y)$$

Derivando agora parcialmente em relação a y temos:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = x\ y\ I_{(0,1)}\ (x)\ I_{(0,2)}\ (y) = f(x, y).$$