CC0303 -Tópicos Especiais de Probabilidade

Principais Desigualdades Aleatórias. 31/08/2023.

Prof. Maurício Mota

1. Desigualdade de Markov: Seja X uma variável aleatória não negativa. Então para qualquer $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

2. Desigualdade de Markov Generalizada: Para uma variável aleatória X qualquer. Para todo $t > 0$,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^t)}{a^t} \quad a > 0.$$

3. Desigualdade de Chebyshev. Seja X uma variável aleatória com média finita μ e variância σ^2, então para qualquer $c > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Se $c = k\sigma,\ k > 0$ a desigualdade aparece assim:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}.$$

4. Desigualdade Unilateral de Chebyshev. Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2, então para qualquer $a > 0$,

$$P(X \geq \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2},$$

$$P(X \leq \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

5. Limitantes de Chernoff. Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M(t)$. Então:

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta}\, M(t),\ \ t > 0 \ \ e \ \ P(X \leq a) \leq e^{-ta}\, M(t),\ \ t < 0.$$

6. Desigualdade de Jensen. Se $f(x)$ é uma função convexa e X uma variável aleatória com $E(X) = \mu$, então:

$$E[f(X)] \geq f[E(X)],$$

desde que as esperanças envolvidas sejam finitas.

Obs 1. Uma função $f : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$ é dita convexa se a região sobre seu gráfico, ou seja o conjunto

$$\{(x, y) \in R^2 \mid y \geq f(x)\},$$

for um conjunto convexo. Isto é, para quaisquer x e y pertencentes ao intervalo real (a, b) e para todo t pertencente ao intervalo real $[0, 1]$ temos:

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

em que se admite a possibilidade de $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Obs 2. Definição: Uma função real duplamente diferenciável é chamada de convexa se $f''(x) \geq 0$ para todo x. Similarmente é chamada de côncava se $f''(x) \leq 0$.

Obs 3. Se $g(x)$ é concava então $h(x) = -g(x)$ é convexa.

7. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Para quaisquer duas variáveis aleatórias com variâncias finitas,

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2),$$

ou

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}.$$