05. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$

(i) Encontre o teste UMP para testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

(ii) Seja $\alpha = 0,05$. Faça o gráfico da função poder para $\theta_0 = 1$ e $n = 25$. (Use o teorema do limite central).

Solução: Vamos aplicar a definição 6.4.1 da página 132 do livro.

Definição 6.4.1 Um teste A_1^* é dito ser uniformemente mais poderoso (**UMP**) para testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs\ H_1 : \theta \ \in \Theta_1,$$

se ele é o mais poderoso (**MP**) para testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs\ H_1 : \theta = \theta_1,$$

qualquer que seja $\theta_1 \in \Theta_1$.

Observação: A região A_1^* não pode depender particularmente de θ_1, para qualquer $\theta_1 \in \Theta_1$.

Assim seja $\theta_1 > \theta_0$. Vamos testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs\ H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

Note que:

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\ \theta^{x_i}}{x_i!}.$$

$$L(\theta; \mathbf{x}) = e^{-n\,\theta} \frac{\theta^s}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Se a hipótese nula é verdadeira temos $\theta = \theta_0$:

$$L_0(\mathbf{x}) = e^{-n\,\theta_0} \frac{\theta_0^s}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = e^{-n\,\theta_0}\ \theta_0^s \times C,$$

com

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad e \quad C = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i!\right]^{-1}.$$

Se a hipótese alternativa é verdadeira temos $\theta = \theta_1$:

$$L_1(\mathbf{x}) = e^{-n\,\theta_1} \frac{\theta_1^s}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = e^{-n\,\theta_1}\ \theta_1^s \times C.$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson , utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{e^{-n\,\theta_1}\ \theta_1^s \times C}{e^{-n\,\theta_0}\ \theta_0^s \times C}.$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-n(\theta_1 - \theta_0)\right) \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]^s \geq k$$

Aplicando logaritmo natural temos:

$$-n(\theta_1 - \theta_0) + s \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) \geq k$$

logo

$$s \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) \geq k + n(\theta_1 - \theta_0)$$

Mas

$$\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) > 0$$

pois $\theta_1 > \theta_0$.

Assim

$$s \geq \frac{k + n(\theta_1 - \theta_0)}{\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)} = c.$$

A nossa região crítica é da forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n}\ x_i \geq c.$$

Devemos achar a distribuição amostral de

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poissonl(n\theta).$$

Se H_0 é verdade temos $\theta = 1$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poison(n).$$

Pelo Teorema do limite central temos:

$$Z = \frac{(S-n)}{\sqrt{n}} = \frac{S-25}{\sqrt{25}} \approx\sim N(0,1).$$

Como $\alpha = 0,05$ temos $P(Z > 1,645) = 0,95$.

$$P_{H_0}(S \geq c) = P(Z\frac{(c-25)}{5}) = 0,05.$$

$$c = 25 + 5 \times 1,645 = 25 + 8,225 = 33,225.$$

A nossa regra de decisão fica:

Se

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \geq 33,225,$$

rejeitar H_0 caso contrário não rejeitar.

```
 5*1.645
[1] 8.225
> c=25+5*1.645;c
[1] 33.225
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
> P95=qnorm(0.95,25,5)
> round(P95,3)
[1] 33.224
>
```

A função poder é dada por:

$$\pi(\theta) = P(S \geq 33,225) = P\left(Z \geq \frac{33,225 - n\theta}{\sqrt{n\theta}}\right)$$

$$\pi(\theta) = P\left(Z \geq \frac{33,225 - 25\theta}{\sqrt{25\theta}}\right)$$

O gráfico da função poder é dado por:

Este gráfico foi gerado no R através dos comandos:

```
>
> n=25
> ##Vamos usar direto sem padronizar!!!!!!
>
> poder=function(teta) 1-pnorm(c,n*teta,sqrt(n*teta))
>
> round(poder(1),4)###nível de significância!!!!
[1] 0.05
>
> teta=seq(1,3,0.1);teta
```

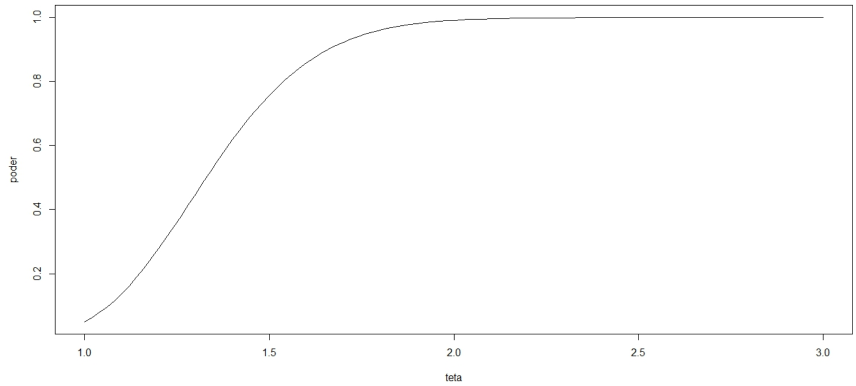

Figura 1:

```
[1] 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8
[20] 2.9 3.0
> pod=poder(teta)
> tab=cbind(teta,pod)
>
> round(tab,4)
     teta    pod
[1,]  1.0 0.0500
[2,]  1.1 0.1375
[3,]  1.2 0.2780
[4,]  1.3 0.4494
[5,]  1.4 0.6179
[6,]  1.5 0.7574
[7,]  1.6 0.8580
[8,]  1.7 0.9226
[9,]  1.8 0.9604
[10,]  1.9 0.9808
[11,]  2.0 0.9912
[12,]  2.1 0.9961
[13,]  2.2 0.9983
[14,]  2.3 0.9993
[15,]  2.4 0.9997
[16,]  2.5 0.9999
[17,]  2.6 1.0000
[18,]  2.7 1.0000
[19,]  2.8 1.0000
[20,]  2.9 1.0000
[21,]  3.0 1.0000
> plot(poder,1,3,xlab="teta")
> abline(h=0.05,col="red")
>
```

Vamos calcular a função poder usando a Poisson:

Olhando a tabela da Poison com o R temos:

$$P(S \geq 34) = 0,04978036 \approx 0,05.$$

Note que $34 > 33,225$.

```
k=qpois(0.95,25);k
[1] 33
> ppois(33,25)
[1] 0.9502196
> ppois(34,25)
[1] 0.9661576
> alfa_e=1-ppois(33,25);alfa_e;round(alfa_e,2)
[1] 0.04978036
[1] 0.05
>
> podpoisson= function(teta) 1-ppois(33,25*teta)
>
> podpoisson(1)
[1] 0.04978036
> plot(podpoisson,1,3,xlab="teta")
> abline(h=0.05,col="red")
>
```

O gráfico da função poder fica:

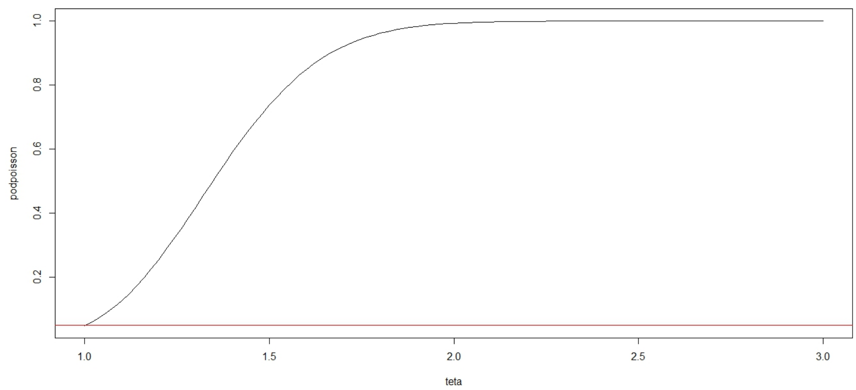

Figura 2: