1 Probabilidade I: Variáveis Aleatórias Discretas-2023.1

Principais definições sobre variáveis aleatórias discretas que serão utilizadas ao longo do disciplina durante o primeiro semestre de 2021.

1.1 Função de Probabilidade (fp)

Seja X uma variável aleatória discreta (v.a.d.) com função de probabilidade dada por $f(x)$.

Assim:

i)

$$f(x) \geq 0$$

.

ii)

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in A} P(X = x) = 1$$

, onde

$$A = \{x | f(x) > 0\},$$

é chamado de suporte de X.

1.2 Função de Distribuição Acumulada (fDA)

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

Propriedades:

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(ii) $F(x)$ é sempre não decrescente.

(iii) $F(x)$ é contínua à direita.

(iv) Se $a < b$ então $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

(v) $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x)$.

1.3 Função de Sobrevivência

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

Propriedades:

(i) $\lim_{x \to -\infty} S(x) = 1$ e $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$

(ii) $S(x)$ é sempre não crescente.

(iii) $S(x)$ é contínua à esquerda.

(iv)Se $a < b$ então $P(a < X \leq b) = S(a) - S(b)$.

(v) $P(X = x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} S(x) \ - S(x_0)$.

1.4 Quantil de Ordem q

Seja $0 < q < 1$. O q-ésimo quantil de X é um número denotado por x_q e é definido como o menor número x satisfazendo a desigualdade: por:

$$x_q = min[\ F(x) \geq q\ ].$$

Assim:

$x_{0,25} = Q_1$ é o primeiro quartil, $x_{0,50} = Q_2$ é o segundo quartil, quinto decil ou mediana e $x_{0,75} = Q_3$ é o terceiro quartil. $x_{0,10} = D_1$ é primeiro decil, $x_{0,20} = D_2$ é segundo decil e $x_{0,90} = D_9$

é o nono decil. $x_{0,95} = P_{95}$ é o percentil de ordem 95.

1.5 Moda da Distribuição- Mo

O valor de x que maximiza $f(x)$ é chamada de moda da distribuição.

1.6 Esperança ou valor Esperado de X e de h(X)

(i)

$$E[X] = \sum_{x \in A} x f_{_X}(x).$$

(ii)

$$E[h(X)] = \sum_{x \in A} h(x)\ f_{_X}(x).$$

1.7 r-ésimo momento em relação à origem

$$\mu'_r = E[X^r] = \sum_{x \in A} x^r f_{_X}(x) \quad r = 1, 2, 3, \ldots.$$

1.8 r-ésimo momento central de X

$$\mu_r = E\left[(X - \mu)^r\right] = \sum_{x \in A} (x - \mu)^r\ f_{_X}(x), \quad \text{em que} \quad E(X) = \mu, \ \ r = 1, 2, 3, \ldots.$$

1.9 Variância (σ^2)

$$\sigma^2 = E[X - \mu]^2 = \mu_2 = \sum_{x \in A} (x - \mu)^2\ f_{_X}(x).$$

Desvio Padrão de X (σ)

$$\sigma = \sigma_X = +\sqrt{\sigma^2}$$

1.10 Desvio Médio de X

$$D_m = E\left[\ |X - \mu|\ \right] = \sum_{x \in A} |(x - \mu)|\ f_{_X}(x).$$

1.11 Coeficiente de Assimetria

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left(X-\mu\right)^3}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

Se $\alpha_3 \neq 0$, dizemos que $f_{_X}(x)$ é assimétrica ou a distribuição não é simétrica.
Se $\alpha_3 = 0$, nada se pode concluir.
Definição:

Diz-se que $f(x)$ é simétrica em torno do ponto "a"se:

$$f\left(a+x\right) = f\left(a-x\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

OBS_1: Quando $a = 0$ tem-se $f(x) = f(-x)$ e diz-se que f é simétrica em torno da origem ou f é uma função par.
Se $\alpha_3 > 0$, diz-se que f ou X é assimétrica positiva e se $\alpha_3 < 0$, diz-se que f ou X é assimétrica negativa.

1.12 Coeficiente de Curtose

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E\left(X-\mu\right)^4}{\sigma^4} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{\mu_4}{\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

$$Se \quad \begin{cases} \alpha_4 < 3, & \text{a distribuição é dita platicúrtca} \\ \alpha_4 = 3, & \text{a distribuição é dita mesocúrtica} \\ \alpha_4 > 3, & \text{a distribuição é dita leptocúrtica} \end{cases}$$

1.13 Coeficiente de Variação (CV)

$$CV = \frac{\sigma}{\mu},$$

em que σ é o Desvio Padrão e μ é a média $\neq 0$.
Geralmente é expresso em % , é uma medida relativa de variabilidade e é adimensional.

1.14 r-ésimo momento fatorial

$$\mu'_{[r]} = E\left[X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1)\right], \quad \text{r=1,2,3 \ldots}$$

1.15 Relação entre Momentos

a. $E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$.

b. $E[(X-E(X))^3] = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E^3(X)$.

c. $E[(X-E(X))^4] = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E^2(x) - 3E^4(X)$.

d. $E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X)$.

e.
$$E[(X-E(X))^r] = E[(X-\mu))^r] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i}\, E(X^i)\, \mu^{r-i}.$$

1.16 Função Geradora de Probabilidades (fgp)

$$GX(t) = E[t^X] = \sum_{x \in A} t^x f(x).$$

Propriedades:
(i) $E(X) = G^{'}(1)$.
(ii) $E(X(X-1)) = G^{''}(1)$.
(iii) $E(X_{[r]}) = E\left[X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1)\right] = G^{(r)}(1)$,
$G^{(r)}(t)$ é a derivada de ordem r de $G(t)$.
(iv) Se $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $r \in A$

$$P(X = r) = \frac{G^{(r)}(0)}{r!}, \quad G^{(0)}(0) = G(0).$$

1.17 Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x \in A} e^{tx} f(x).$$

Propriedades:
(i) $E(X) = M^{'}(0)$.
(ii) $E(X^2) = M''(0)$.
(iii) $E(X^r) = M^{(r)}(0)$,
$M^{(r)}(t)$ é a derivada de ordem r de $M(t)$.

1.18 Função Geradora de Cumulantes

$$K(t) = \ln[M(t)].$$

Propriedades: (i) $E(X) = K'(0)$.

(ii) $Var(X) = K''(0)$.

1.19 Função Característica

$$C(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[cos(tX) + isen(tX)\right] = E\left[cos(tX)\right] + iE\left[sen(tX)\right]$$

Propriedades:

(i) $C'(0) = i\ E(X)$

(ii) $C^{''}(0) = -\ E(X^2)$.

(iii) $C^r(0) = i^r\ E(X^r)$.