Vamos construir intervalos de confiança com nível $\gamma = 1 - \alpha$.

1. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

   i. Intervalo de confiança para μ com σ^2 conhecida.

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

   com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

   ii. Intervalo de confiança para μ com σ^2 desconhecida.

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{X} + t_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

   com

$$P(T(n-1) > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

   iii. Intervalo de confiança para σ^2.

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{q_2} \;\; ; \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right]$$

   com

$$P(\chi^2(n-1) > q_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad e \quad P(\chi^2(n-1) > q_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

2. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória

$$X \sim Exp(\theta).$$

   Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \theta).$$

$$Q = 2\theta S \sim \chi^2(2n).$$

$$\left[\frac{q_1}{2S} \;\; ; \frac{q_2}{2S}\right].$$

   com

$$P(\chi^2(2n) > q_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad e \quad P(\chi^2(2n) > q_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória

$$X \sim Ber(p).$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p) \approx N(np; np(1-p)).$$

Seja

$$\hat{p} = \frac{S}{n}$$

i. Intervalo de confiança conservador para p:

$$\left[\hat{p} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}} \quad ; \quad \hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{4n}}\right].$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

ii. Intervalo de confiança de MV para p:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad ; \quad \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

iii. Intervalo de confiança de MV com fator de correção para p:

$$[l_i \; ; \; l_s],$$

$$l_i = \frac{S-0,5}{n} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{(S-0,5)}{n}\left(1 - \frac{S-0,5}{n}\right)},$$

$$l_s = \frac{S+0,5}{n} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{(S+0,5)}{n}\left(1 - \frac{S+0,5}{n}\right)}.$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

iv. Intervalo de confiança para p usando o método de Wilson:

$$[l_i \; ; \; l_s],$$

$$l_i = \frac{s + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2} - z_{\alpha/2}\sqrt{s - \frac{s^2}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4}}}{n + z_{\alpha/2}^2}.$$

$$l_s = \frac{s + \frac{z^2_{\alpha/2}}{2} + z_{\alpha/2}\sqrt{s - \frac{s^2}{n} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{4}}}{n + z^2_{\alpha/2}}.$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

v. Intervalo de confiança exato para p.

$$[l_i\ ;\ l_s],$$

$$l_i = \frac{s}{s + (n-s+1)f_2}\ ,$$

com

$$r_1 = 2(n-s+1) \quad e \quad r_2 = 2s.$$

$$l_s = \frac{s+1}{s+1+\frac{(n-s)}{f_1}}$$

com

$$r_3 = 2(s+1) \quad e \quad r_4 = 2(n-s).$$

Em que

$$P\left(F(r_1, r_2) > f_1\right) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left(F(r_3, r_4) > f_2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

4. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X que pertence à família exponencial uniparamétrica de parâmetro θ. Seja $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança θ. Vamos usar a distribuição assintótica de $\hat{\theta}$

   Seja $I_F(\hat{\theta})$ a estimativa de MV da informação de Fisher.

   A nossa quantidade pivotal

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{(n\, I_F(\hat{\theta}))^{-1}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$Z = \sqrt{n}\, I_F(\hat{\theta}) \left(\hat{\theta} - \theta\right) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

a. $IC\,(\theta, \gamma)$

$$\left[\hat{\theta} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n\, I_F(\hat{\theta})}}\ \ ;\ \hat{\theta} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n\, I_F(\hat{\theta})}}\right]$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

b. $IC\,(g(\theta), \gamma)$

$$\left[g(\hat{\theta}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{[g'(\hat{\theta})]^2}{n\; I_F(\hat{\theta})}} \quad ; \quad g(\hat{\theta}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{[g'(\hat{\theta})]^2}{n\; I_F(\hat{\theta})}} \right]$$

5. Vamos construir intervalos de confiança para a diferença de médias $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ de duas populações normais independentes.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$

As variáveis

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad e \quad S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}.$$

são independentes . Além disso

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) \quad e \quad U = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de tamanho n de

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

As variáveis

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Y_j}{m} \quad e \quad S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{m-1}.$$

são independentes . Além disso

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right) \quad e \quad V = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1).$$

As variáveis $\bar{X}$, $\bar{Y}$, U e V são independentes.

a. $IC(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \gamma)$ quando σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos.
Sabemos que

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

Assim

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1).$$

$$\left[\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \;\; ; \;\; \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right]$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

b. $IC(\mu_1 - \mu_2 \ , \ \gamma)$ quando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ que é desconhecida.
Vamos estimar σ^2 por:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}.$$

$$E(S_p^2) = \frac{(n-1)E(S_1^2) + (m-1)E(S_2^2)}{n+m-2}.$$

$$E(S_p^2) = \frac{(n-1)\sigma^2 + (m-1)\sigma^2}{n+m-2} = \sigma^2.$$

Note que

$$U = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$V = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$W = U + V = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2}$$

$$W = U + V = \frac{(n+m_2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

Como as variâncias são iguais temos:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1).$$

Z e W são independentes então

$$T = Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mu_1, \mu_2) = \frac{Z}{\sqrt{W/(n+m-2)}} \sim t(n+m-2).$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

$$\left[\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - t_{\alpha/2} \, S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \;\; ; \;\; \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right]$$

com

$$P(T(n+m-2) > t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

c. $IC(\mu_1 - \mu_2 \ , \ \gamma)$ quando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, desconhecidas.
A quantidade pivotal é:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \sim t(r),$$

com

$$r = \frac{(A+B)^2}{\frac{A^2}{n-1} + \frac{B^2}{m-1}},$$

$$A = \frac{s_1^2}{n} \qquad B = \frac{s_2^2}{m}.$$

Arredonde r para o inteiro mais próximo.

$$\left[\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \ \ ; \ \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \right]$$

com

$$P(T(r) > t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

d. $IC(\theta \ , \ \gamma) \ , \theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.
Como

$$U = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} = \sim \chi^2(n-1)$$

Assim,

$$\frac{U}{n-1} = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}.$$

$$V = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} = \sim \chi^2(m-1)$$

Assim,

$$\frac{V}{m-1} = \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}.$$

Como U e V são independentes temos que

$$F = \frac{\frac{U}{n-1}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

Nossa quantidade pivotal

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n-1, m-1).$$

O intervalo de confiança é dado por:

$$\left[f_1 \, \frac{S_2^2}{S_1^2} \;\; ; \;\; f_2 \, \frac{S_2^2}{S_1^2}\right],$$

com

$$P\left(F(n-1, m-1) > f_2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

$$P\left(F(n-1, m-1) < f_1\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Seja

$$P\left(F(m-1, n-1) > a\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Assim

$$f_1 = \frac{1}{a}.$$

Sempre proceda deste jeito. Perceba a inversão dos graus de liberdade.

6. Populações Dependentes:
Seja

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2).$$

Seja $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatória de (X, Y).
Sabemos que

$$D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D^2),$$

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = \Delta,$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Sejam

$$D_i = X_i - Y_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

Assim
$D_1, D_2, \ldots, D_n$ é uma amostra aleatória de $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$.
Considere

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \quad e \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2}{n-1}.$$

A quantidade pivotal é

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{\bar{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

Nosso intervalo fica:

$$\left[\bar{D} - t_{\alpha/2}\ \frac{S_D}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{D} + t_{\alpha/2}\ \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right],$$

com

$$P\left(T(n-1) > t_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

7. Comparação de Proporções em duas populações independentes

$$X \sim Ber(p_1)\ \ ,\ Y \sim Ber(p_2),$$

independentes.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X Fazendo

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$$\hat{p}_1 = \frac{S_1}{n} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right),$$

aproximadamente.

Seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de Y

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} Y_j.$$

$$\hat{p}_2 = \frac{S_2}{m} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right),$$

aproximadamente.

Como $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ são independentes temos

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2\ ,\ \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right),$$

aproximadamente.

A quantidade pivotal é dada por:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente.

Vamos trabalhar com outra quantidade pivotal dada por

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente.

O intervalo de confiança é dado por (l_i, l_s):

$$l_i = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}},$$

$$l_s = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}},$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$