03. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória com função densidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_A(x), \quad A = (0,1) \;\; \theta > 0.$$

$$X \sim beta(a = \theta, b = 1).$$

(i) Mostre que o teste mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$ rejeita H_0 se se somente se

$$\sum_{i=1}^{n} -\log(x_i) \leq q$$

onde a é uma constante.

(ii) Sendo $n = 2$ e $\alpha = \frac{1-\log(2)}{2}$, qual a região crítica?

Solução: Queremos testar:

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta = 2.$$

Notemos que para

Note que:

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, x_i^{\theta-1}.$$

Seja $u = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\theta-1} = \theta^n\, u^{\theta-1}$$

Se a hipótese nula é verdadeira temos $\theta = 1$:

$$L_0(\mathbf{x}) = 1^n\, u^0 = 1.$$

Se a hipótese alternativa é verdadeira temos $\theta = 2$:

$$L_1(\mathbf{x}) = 2^n\, u.$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson , utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{2^n\ u}{1} = 2^n\ u.$$

De

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k$$

temos

$$2^n\ u \geq k$$

$$\log\left(2^n\ u\right) \geq \log(k)$$

$$n\log(2) + \log(u) \geq \log(k)$$

$$\log(u) \geq \log(k) - n\log(2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \geq \log(k) - n\log(2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} -\log(x_i) \leq -\log(k) + n\log(2) = a.$$

A nossa região crítica é da forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n}\ -log(x_i) \leq a.$$

Vamos resolver o item **b**:

Devemos achar a distribuição amostral de

$$S = \sum_{i=1}^{n} -\log(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\ Y_i.$$

Vamos achar a lei de $Y = -\log(X)$:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{-t\log(X)}\right)$$

$$M_Y(t) = E\left(e^{\log(X^{-t})}\right) = E(X^{-t}).$$

$$M_Y(t) = \theta \int_0^1 x^{-t}\ x^{\theta-1}\ dx = \theta \int_0^1 x^{(\theta-t)-1}\ dx = \frac{\theta}{\theta-t}\ x^{\theta-t}\ \Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta-t},\ t < \theta$$

A condição de existência é dada por:

$$\theta - t > 0 \qquad t < \theta.$$

Assim

$$Y \sim Exp(\theta)$$

e

$$S = \sum_{i=1}^{n} -\log(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \sim Gama(n, \theta)$$

Temos $n = 2$

$$S \sim Gama(4, 1).$$

$$\alpha = P_{H_0}(S \leq a) = \frac{1 - \log(2)}{2}.$$

Assim

$$P_{H_0}(S > a) = 1 - \frac{1 - \log(2)}{2} = \frac{1 + \log(2)}{2}.$$

$$P(S > a) = \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{-a} a^i}{i!} = e^{-a}(1 + a)$$

Note que

Fazendo $a = \log(2)$ temos:

$$P(S > \log(2)) = e^{-\log(2)}(1 + \log(2)) = \frac{1 + \log(2)}{2} = 0,6931472.$$

```
> log(2)
[1] 0.6931472
>
```

Assim A região crítica procurada é dada por:

$$RC = \{-log(x_1) - log(x_2) \leq 0,6931472\}.$$