04. Seja X uma amostra aleatória da variável aleatória com função densidade dada por:

$$f(x|\theta) = (2\theta\, x + 1 - \theta)\; I_A(x), \quad A = (0,1) \;\; \theta > 0.$$

Queremos testar $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$

(i) Obtenha o teste mais poderoso.

(ii) Se $\alpha = 0,05$ e $x = 0,8$, qual a sua conclusão?

Solução: Queremos testar:

$$H_0 : \theta = 0 \quad versus \quad H_1 : \theta = 1.$$

Se H_0 é verdade $\theta = 0$.

$$f(x|\theta) = I_A(x), A = (0,1).$$

$$X \sim U(0,1) \;\text{ ou }\; X \sim beta(1,1).$$

Se $H_1 : \theta = 1$ é verdade.

$$f(x|\theta) = 2x\; I_A(x), A = (0,1).$$

$$X \sim \Delta(a = 0, b = 1, c = 1) \;\text{ ou }\; X \sim beta(2,1).$$

Note que como $n = 1$

$$L(\theta; \mathbf{x}) = f(x|\theta) = (2\theta\, x + 1 - \theta).$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson , utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{2x}{1} = 2x.$$

De

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k$$

temos

$$2x \geq k$$

$$x \geq \frac{k}{2} = c.$$

A nossa região crítica é da forma:
Se

$$x \geq a$$

rejeitar H_0. Caso contrário não rejeitar.

$$\alpha = P_{H_0}(X \geq a) = \int_a^1 \, dx = x \,\Big|_a^1 = 1 - a$$

Assim

$$a = 1 - \alpha.$$

O teste mais poderoso com nível de significância α é dado por:
Se

$$x \geq 1 - \alpha$$

rejeitar H_0. Caso contrário não rejeitar.

Vamos resolver o item **b**:
Como $\alpha = 0,05$ temos:

$$a = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Como $x = 0,8$ está na região de aceitação de H_0 então a nossa densidade é uniforme padrão
Vamos calcular o nível descritivo:

$$\hat{\alpha} = P_{H_0}(X \geq 0,8) = \int_{0,8}^1 \, dx = x \,\Big|_{0,8}^1 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Calcule agora o tamanho erro do tipo II:

$$\beta = P_{H_1}(X < a) = P_{H_1}(X < 0,95) = \int_0^{0,95} 2x \, dx = x^2 \,\Big|_0^{0,95} = 0,9025 - 0 = 0,9025.$$