Capítulo 2

Problema 01.

(a) razão

(b) ordinal

(c) razão

(d) intervalar

(e) razão

(f) nominal

(g) intervalar

Problema 02.

(a)

Estado Civil	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem 100 f_i
Casado	20	0,556	55,56
Solteiro	16	0,444	44,44
Total	36	1,0000	100,00

(b)

Região de Procedência	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem 100 f_i
Capital	11	0,306	30,56
Interior	12	0,333	33,33
Outra	13	0,361	36,11
Total	36	1,0000	100,00

(c)

Número de filhos dos empregados casados	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem 100 f_i
0	4	0,20	20,00
1	5	0,25	25,00
2	7	0,35	35,00
3	3	0,15	15,00
5	1	0,05	5,00
Total	20	1,00	100,00

(d)

Idade	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem $100\ f_i$
$20 \vdash 25$	2	0,0556	5,56
$25 \vdash 30$	6	0,1667	16,67
$30 \vdash 35$	10	0,2777	27,77
$35 \vdash 40$	8	0,2222	22,22
$40 \vdash 45$	8	0,2222	22,22
$45 \vdash 50$	2	0,0556	5,56
Total	36	1,0000	100,00

Problema 03.

População urbana.

Número de habitantes	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem $100\ f_i$
Menos de 500.000	3	0,1111	11,11
500.001 a 1.000.000	2	0,0740	7,40
1.000.001 a 5.000.000	15	0,5556	55,56
5.000.001 a 10.000.000	4	0,1481	14,81
Mais de 10.000.000	3	0,1111	11,11
Total	27	1,0000	100,00

Densidade populacional.

Densidade (hab/km^2)	Freqüência n_i	Proporção f_i	Porcentagem $100\ f_i$
Menos de 10	9	0,3333	33,33
$10 \vdash 30$	5	0,1852	18,52
$30 \vdash 50$	4	0,1481	14,81
$50 \vdash 100$	6	0,2222	22,22
Mais de 100	3	0,1111	11,11
Total	27	1,0000	100,00

Problema 04.

(a)

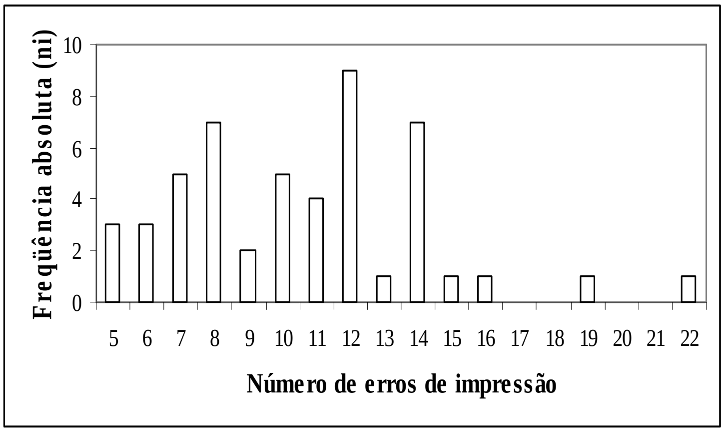
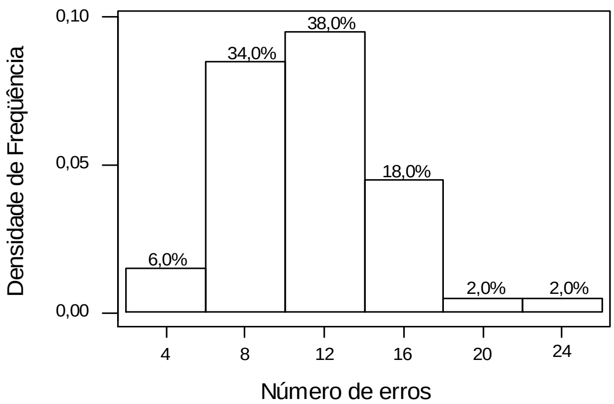


Gráfico de Barras

(b)

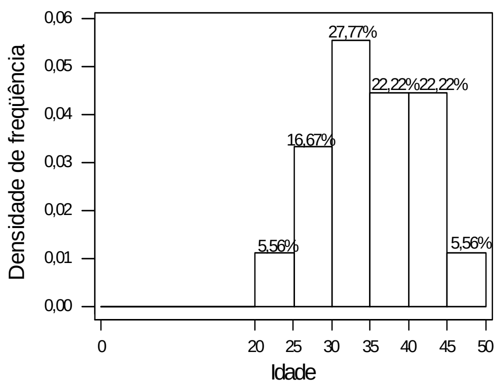


Histograma

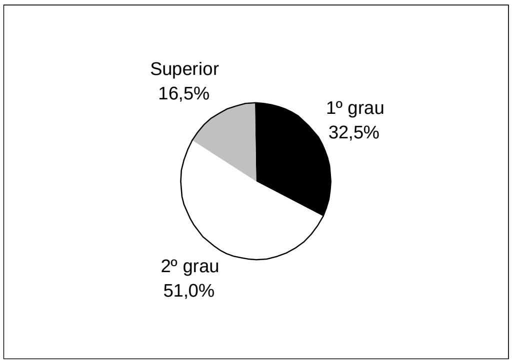
0	5 5
0	6 6 6 7 7 7 7 7
0	8 8 8 8 8 8 8 9 9
1	0 0 0 0 0 1 1 1 1
1	2 2 2 2 2 2 2 2 2 3
1	4 4 4 4 4 4 4 5 5
1	6
1	9
2	
2	2

Ramo e Folhas

Problema 05.

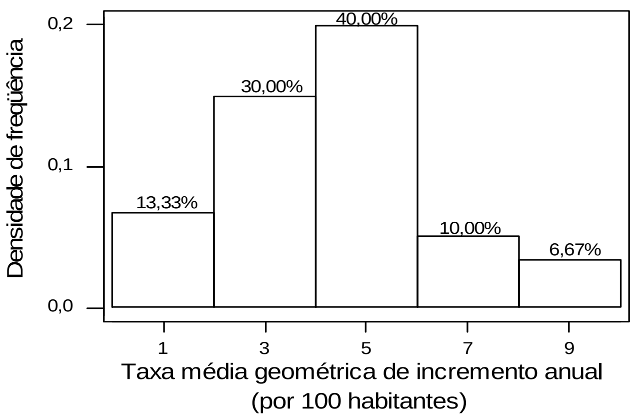


(a) Histograma

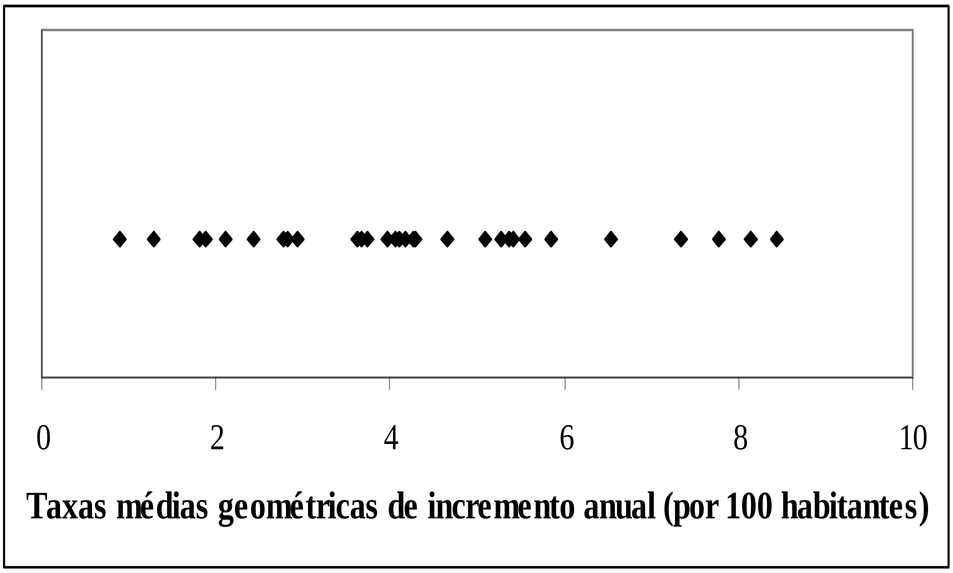


(b) Gráfico de composição em setores (pizza)

Problema 06.



(a) Histograma



(b) Gráfico de dispersão unidimensional

Problema 07.

Para decidir qual seção irei chefiar, primeiramente farei um gráfico de barras (utilizando a freqüência relativa ao invés da freqüência absoluta, devido ao diferente número de observações em cada seção) para cada seção para comparar o grau de instrução dos funcionários. Em seguida, farei um histograma para cada seção (utilizando os mesmos intervalos para ambas as seções, facilitando assim a comparação) comparando assim o salário dos funcionários.

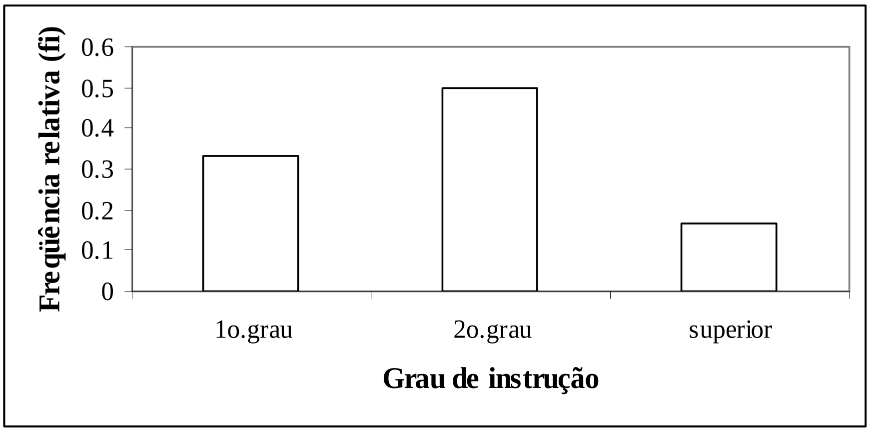


Gráfico de barras para a Seção de Orçamentos

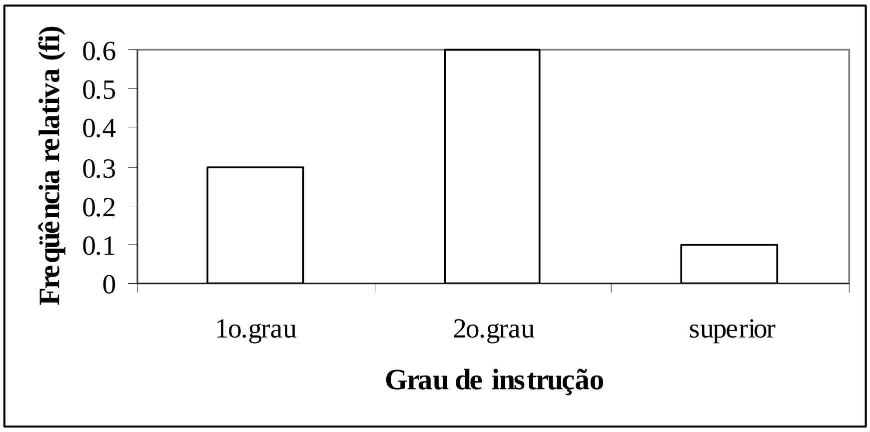
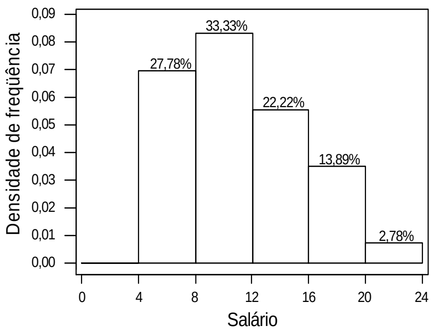
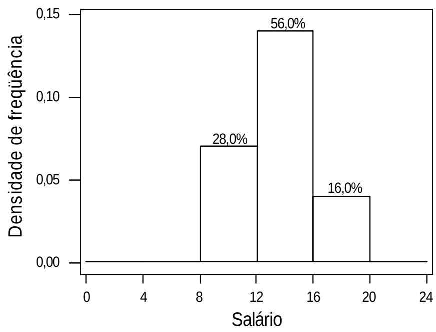


Gráfico de barras para a Seção Técnica



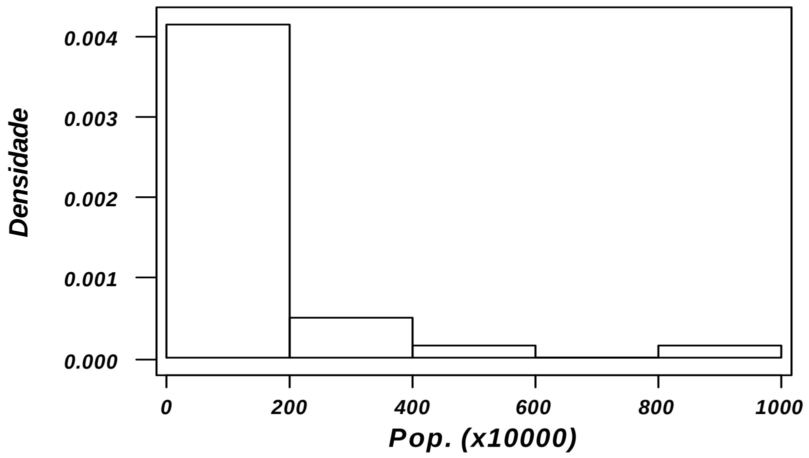
Histograma para a Seção de Orçamentos



Histograma para a Seção Técnica

Através dos gráficos de barras, pode-se notar que ambas as seções têm proporções semelhantes de funcionários com grau de instrução de 1º grau ou superior e que, a seção técnica apresenta uma proporção levemente maior de funcionários com grau de instrução de 2º grau. Considerando os salários, pode-se notar que a seção de orçamentos apresenta salários mais distribuídos, desde salários mais baixos até bem altos.

Problema 08.



Histograma

Ramo-e-folhas:

4:	6
5:	46
6:	234778
7:	35
8:	45
9:	2
10:	22
11:	69
12:	
13:	06
14:	
15:	
16:	
17:	
18:	8
19:	
20:	1
21:	1
22:	5

Ramo e folhas

Valores maiores: 556,9   998,8

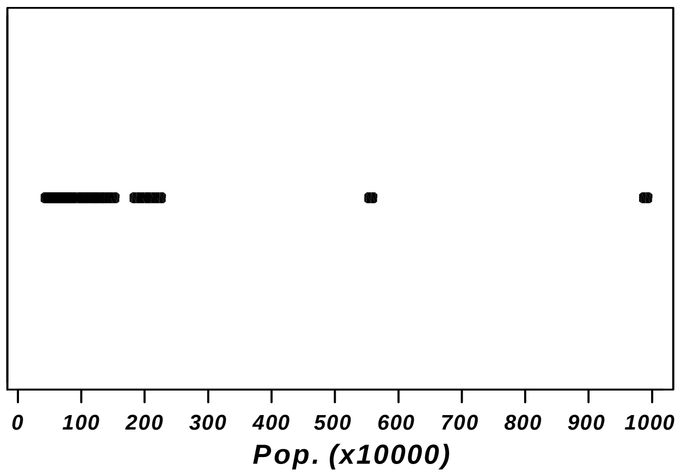


Gráfico de dispersão unidimensional

Outro gráfico para a dispersão unidimensional poderia ser o seguinte:

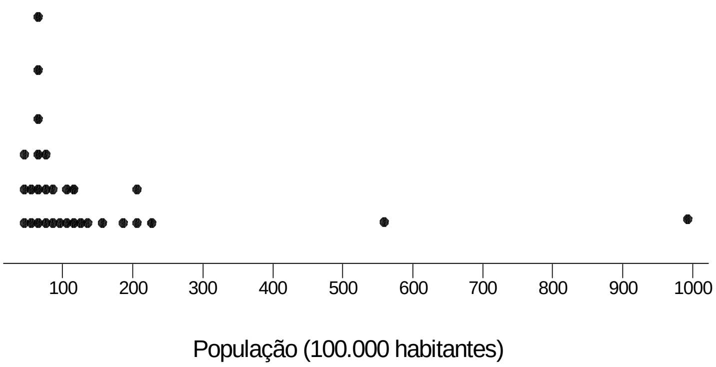


Gráfico de dispersão unidimensional.

Eliminando os dois pontos discrepantes ficaríamos com o seguinte gráfico da dispersão:

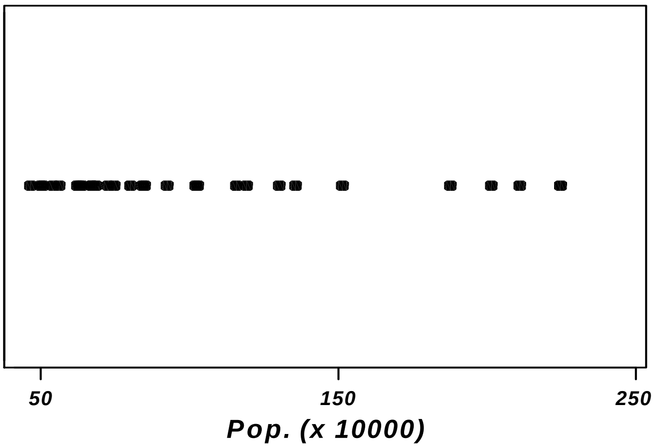


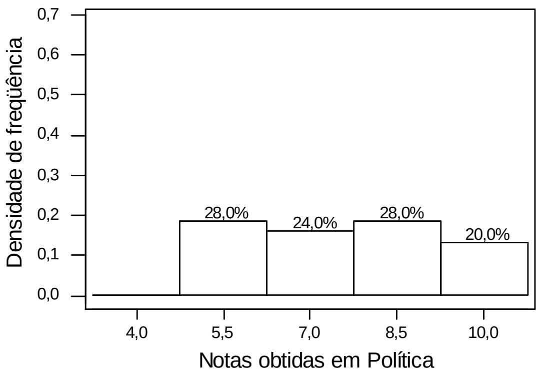
Gráfico de dispersão unidimensional - sem as duas maiores observações

Problema 09.

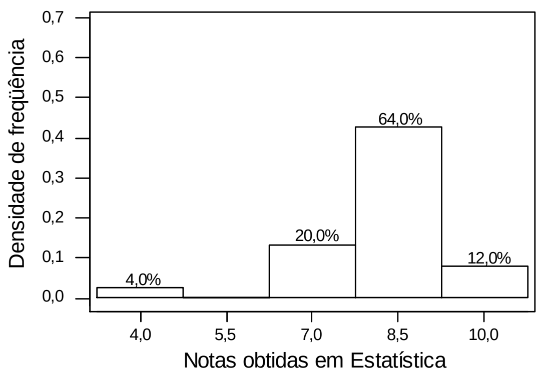
(a) Variáveis qualitativas ordinais: Inglês e Metodologia;
Variável qualitativa nominal: Seção;
Variáveis quantitativas contínuas: Administração, Direito, Redação, Estatística, Política e Economia.

(b) Para comparar as distribuições, vamos fazer alguns gráficos das variáveis:

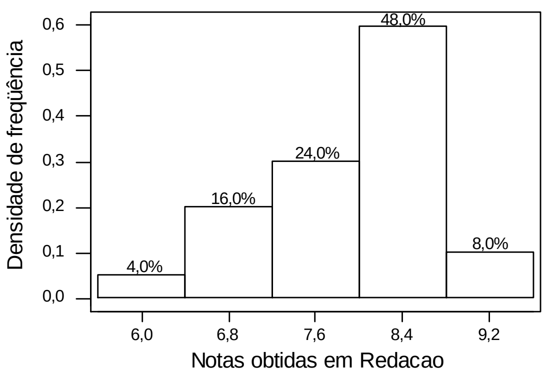
Histograma das notas de Direito



Histograma das notas de Política



Histograma das notas de Estatística



(c) Histograma das notas de Redação.

Observando os três histogramas, pode-se notar que não há variação das notas em direito (todas são iguais a 9); já as notas em política, mantiveram-se homogêneas acima de 4,75; e, por fim, as notas em estatística apresentaram pouquíssimos valores baixos (entre 3,25 e 4,75) e uma maior parte de notas no intervalo entre 7,75 e 9,25.

(c) Veja o histograma (c) acima.

(d)

Graus obtidos em Metodologia	n_i	f_i	$100.\ f_i$
A	7	0,28	28,00
B	8	0,32	32,00
C	10	0,40	40,00
Total	25	1,00	100,00

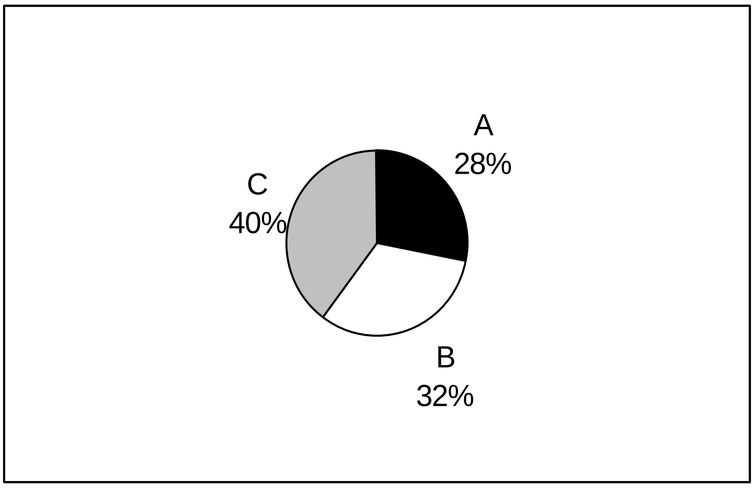


Gráfico de composição em setores ("pizza") para os graus obtidos em Metodologia

(e) Pela distribuição de freqüências dos graus obtidos em Metodologia no item anterior, pode-se notar que 7 funcionários obtiveram grau A. Portanto, como temos um total de 25 funcionários, a probabilidade de sortear ao acaso um funcionário que tenha obtido grau A em Metodologia é de $\frac{7}{25} = 0{,}28$.

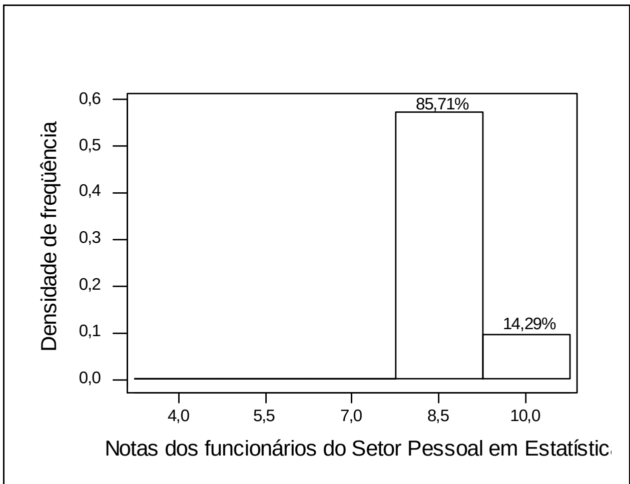
(f) Agora, sorteando dois funcionários, temos duas opções: (1) fazer o sorteio com reposição e (2) fazer o sorteio sem reposição. Em cada caso, calcularemos as probabilidades de ambos os funcionários terem obtido grau A em Metodologia:

(1) com reposição: $P(\text{ambos com grau A}) = \frac{7}{25} \times \frac{7}{25} = 0{,}0784$

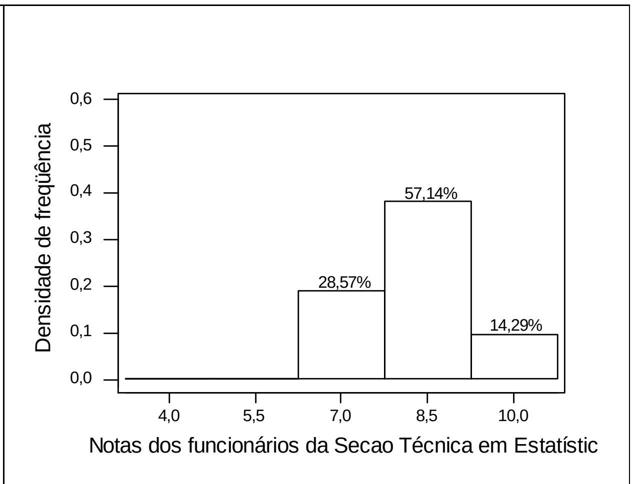
(2) sem reposição: $P(\text{ambos com grau A}) = \frac{7}{25} \times \frac{6}{24} = 0{,}0700$

Logo, as probabilidades obtidas neste item são menores que a probabilidade obtida no item anterior.

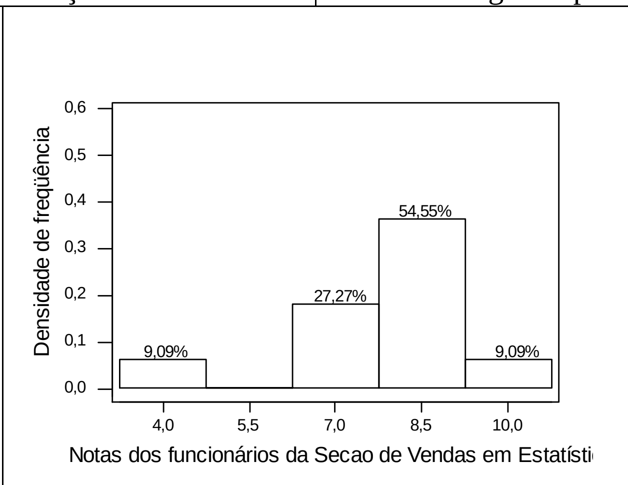
(g) Para verificar o aproveitamento dos funcionários na disciplina Estatística segundo a seção a que eles pertencem, faremos um histograma para cada seção com os mesmos intervalos em todos.



Histograma para a Seção Pessoal



Histograma para a Seção Técnica

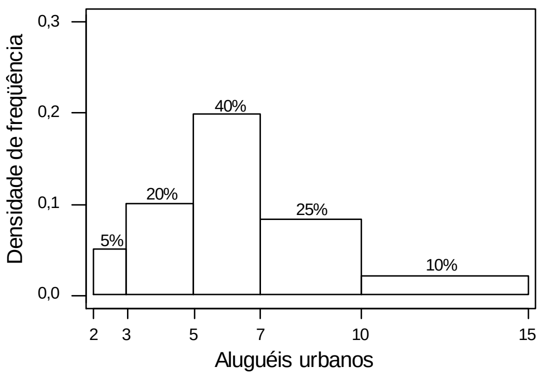


Histograma para a Seção de Vendas

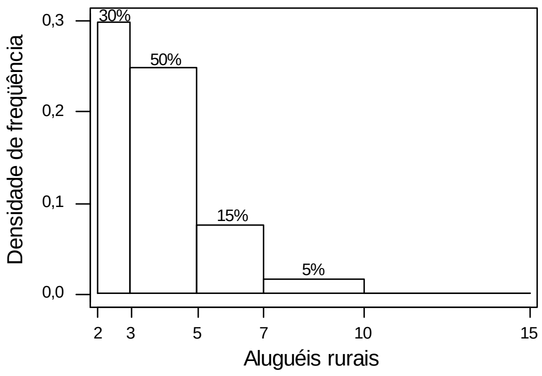
Comparando os histogramas, nota-se que o aproveitamento maior é dos funcionários da Seção Pessoal, seguido da Seção Técnica e da Seção de Vendas.

Problema 11.

(a)



Histograma para aluguéis da Zona urbana

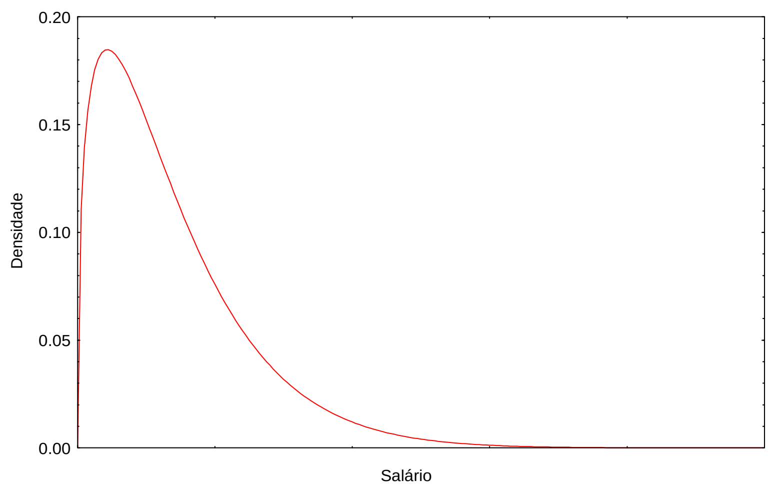


Histograma para aluguéis da Zona rural

(b) Através dos histogramas, pode-se dizer que os aluguéis na zona rural são em sua maioria mais baixos (entre 2 e 5) que na zona urbana. Na zona urbana, a maioria dos aluguéis está entre 5 e 7 e, a distribuição para esta zona parece ser mais simétrica que para a zona rural.

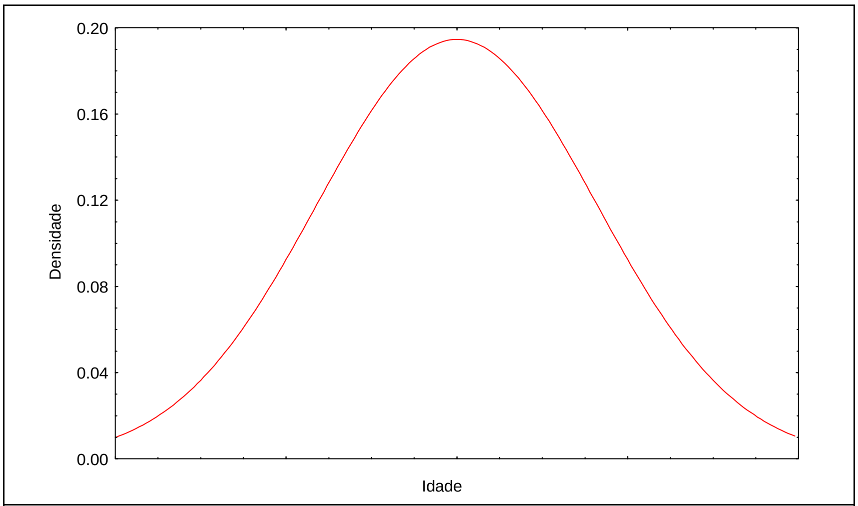
Problema 13.

(a)



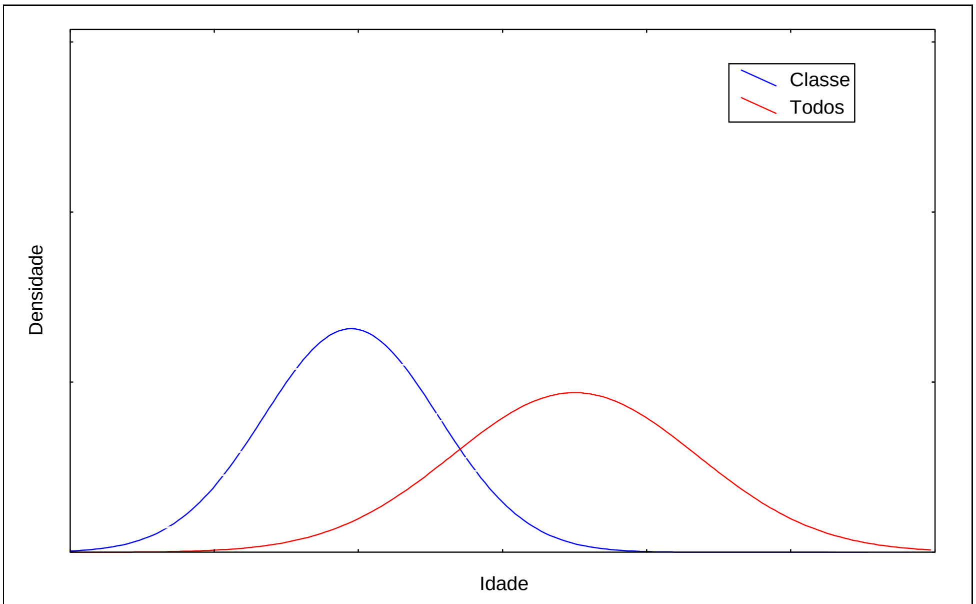
Histograma alisado

(b)



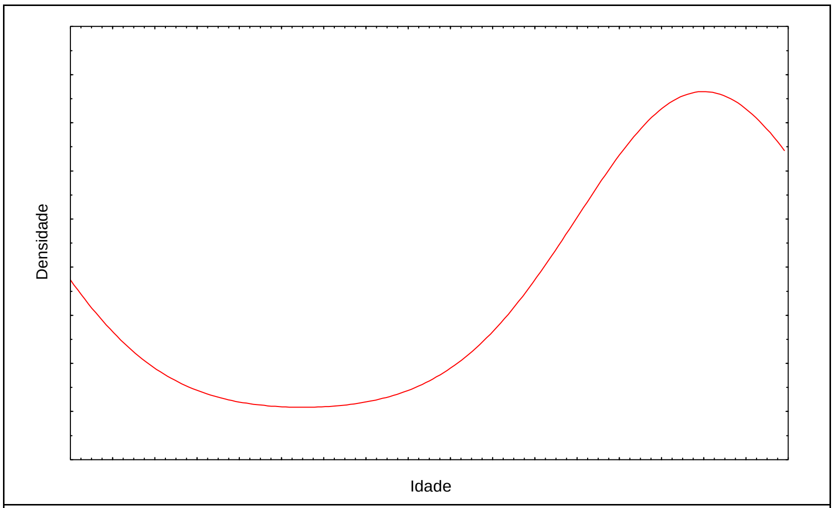
Histograma alisado

(c)



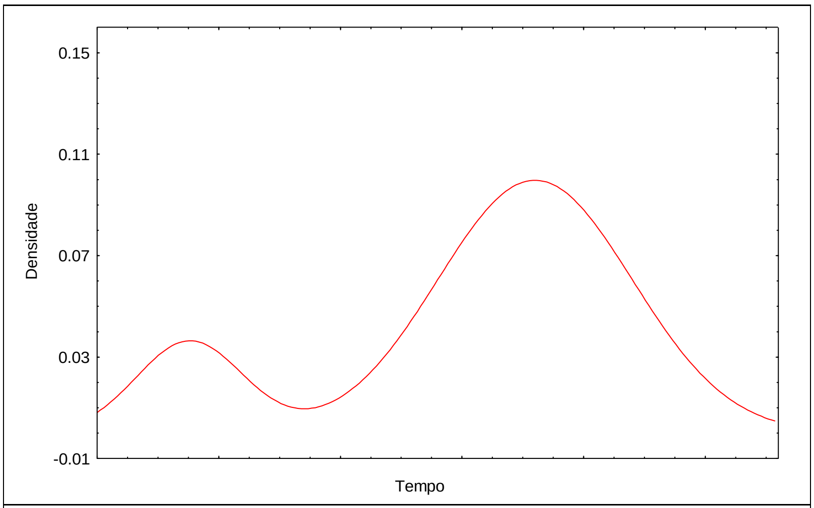
Histograma alisado

(d)



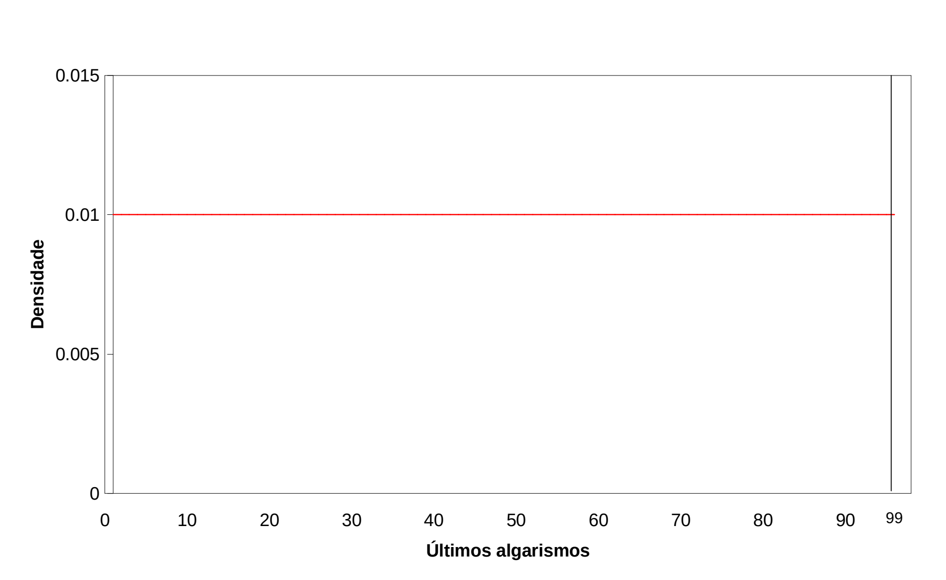
Histograma alisado

(e)



Histograma alisado

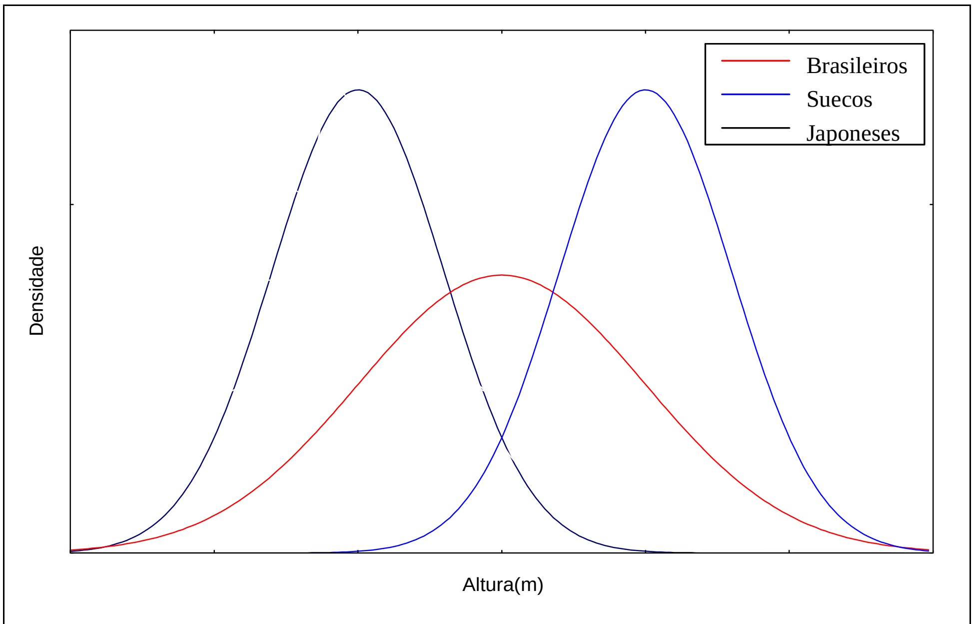
(f)



Histograma alisado

Problema 14.

Histograma alisados das alturas de japoneses, brasileiros e suecos adultos.



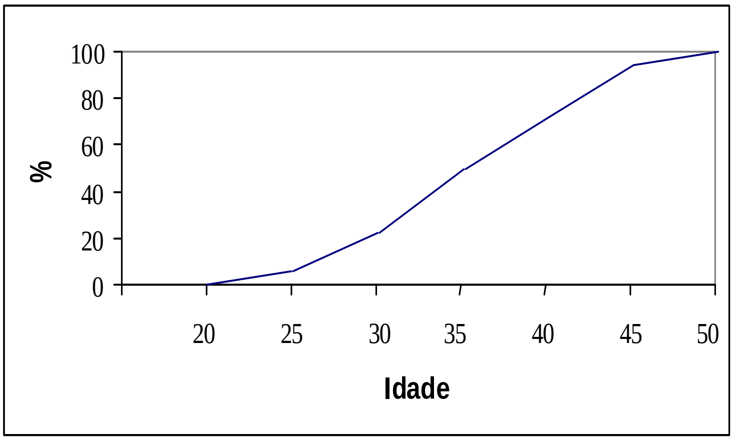
Histograma alisado

Problema 16.

(a)

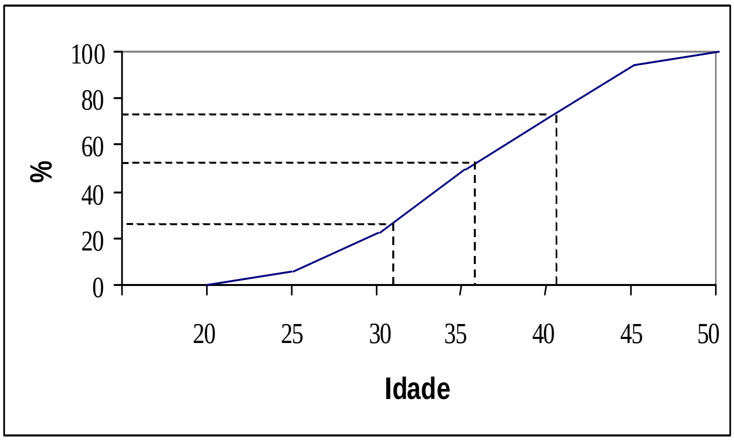
Idade	Freqüência n_i	Freqüência acumulada N_i	Proporção f_i	Porcentagem 100 f_i	Porcentagem Acumulada 100 F_i
20 ├— 25	2	2	0,0556	5,56	5,56
25 ├— 30	6	8	0,1667	16,67	22,23
30 ├— 35	10	18	0,2777	27,77	50,00
35 ├— 40	8	26	0,2222	22,22	72,22
40 ├— 45	8	34	0,2222	22,22	94,44
45 ├— 50	2	36	0,0556	5,56	100,00
Total	36	—	1,0000	100,00	—

(b)



Distribuição acumulada.

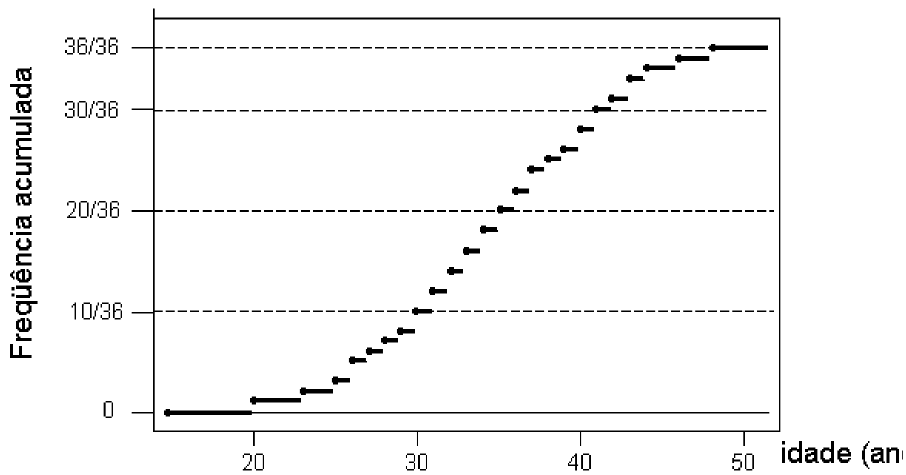
(c) Observando as linhas pontilhadas no gráfico abaixo, pode-se verificar que os valores de i correspondentes aos pontos (i, 25%), (i, 50%) e (i, 75%) são um pouco mais de 30, de 35 e de 40 anos, respectivamente.



Distribuição acumulada da idade.

Problema 18.

Para a construção do gráfico, utilizamos a idade em anos completos.



Função de distribuição empírica da idade

Problema 20.

Ramo-e-folhas para a variável CO (monóxido de carbono) para o conjunto de dados 4.

4	7 7
5	1 2
5	5 5 6 7 7 7 7 8 9
6	1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4
6	5 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 9 9 9 9 9 9 9
7	0 0 1 2 2 2 3 3 4 4 4
7	5 5 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9
8	0 1 2 3 3 4
8	5 5 6 7 8 9 9 9
9	0 1 1 4
9	5 5 7
10	1 3 3 3
10	8
11	4 6 9
12	0 5

Ramo e Folhas

Capítulo 3

Problema 01.

(c) Sendo $\bar{x}$ o número médio de erros por página, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{0\times25+1\times20+2\times3+3\times1+4\times1}{50} = \frac{33}{50} = 0,66$$

Representando o número mediano de erros por md, tem-se, pela ordenação dos valores observados, que os valores de ordem 25 e 26 são 0 e 1, respectivamente. Assim

$$md = \frac{0+1}{2} = 0,5$$

(d) $$\mathrm{var}(X) = \frac{25\times(0-0,66)^2+20\times(1-0,66)^2+3\times(2-0,66)^2+1\times(3-0,66)^2+1\times(4-0,66)^2}{50} =$$

$$= \frac{25\times0,4356+20\times0,1156+3\times1,7956+1\times5,4756+1\times11,1556}{50} = \frac{35,22}{50} = 0,7044$$

Logo,

$$dp(X) = \sqrt{0,7044} = 0,8393$$

(e)

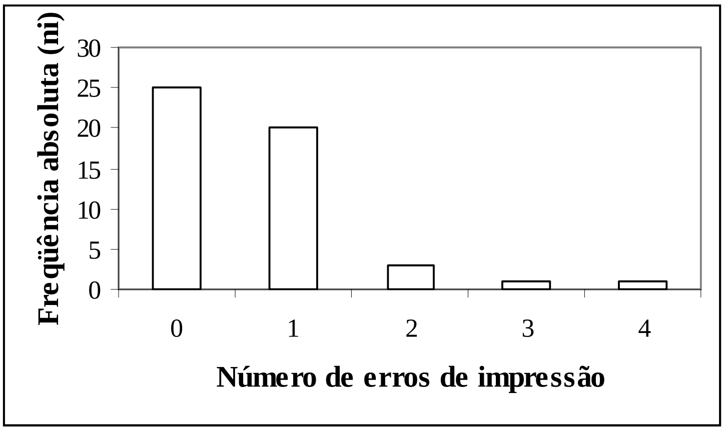


Gráfico de barras do número de erros por página

(f) Uma vez que a média de erros por página é 0,66 e o livro tem 500 páginas, o número esperado de erros no livro é $0,66\times500=330$

Problema 02.

Média:

$$\bar{x} = \frac{2,59+2,64+2,60+2,62+2,57+2,55+2,61+2,50+2,63+2,64}{10} = 2,595$$

Mediana:

$$md = \frac{2,600+2,610}{2} = 2,605$$

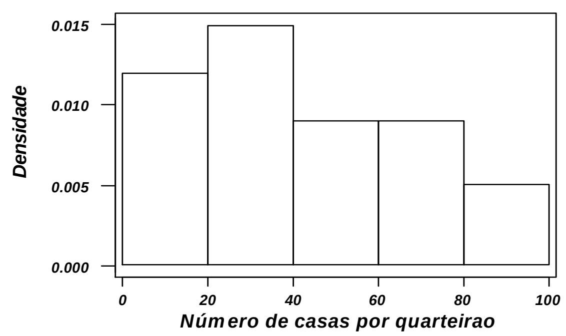
Desvio Padrão:

$$\mathrm{var}(X) = \frac{(-0{,}005)^2 + (0{,}045)^2 + (0{,}005)^2 + (0{,}025)^2 + (-0{,}025)^2 + (-0{,}045)^2 + (-0{,}045)^2}{10}$$

$$+\frac{(0{,}015)^2 + (-0{,}095)^2}{10} = 0{,}0018 \Rightarrow dp(X) = \sqrt{0{,}0018} = 0{,}0424$$

Problema 03.

(g)



Histograma do número de casas por quarteirão

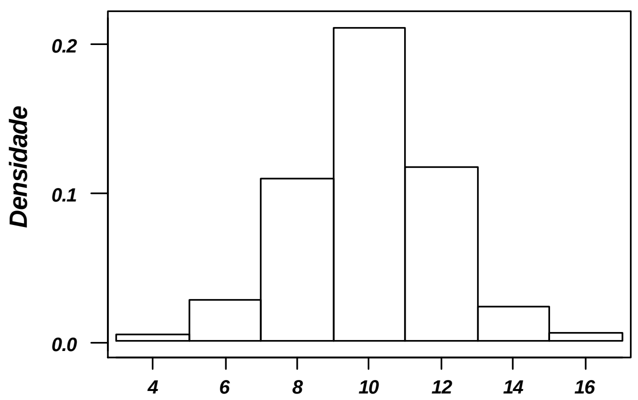
(h) Média: 40,42; desvio-padrão: 25,81.

Problema 04.

(i) A mediana é uma medida de posição mais importante do que a média, por

(j) exemplo, em situações em que a variável em estudo tem algum valor muito discrepante que "puxa" a média para cima ou para baixo.

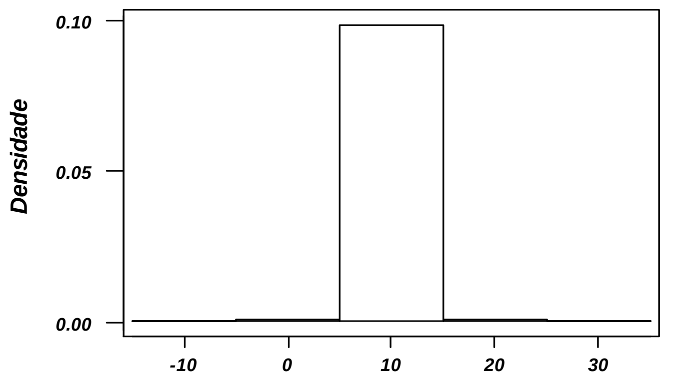
(k)



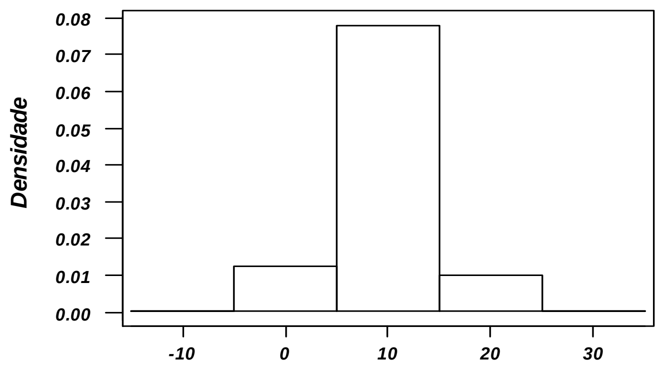
Histograma

Em distribuições simétricas, a média e a mediana coincidem.

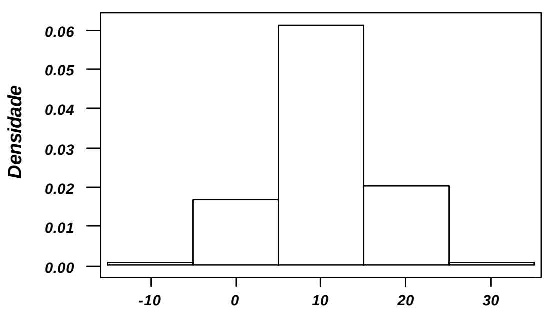
(l)



Média =10,0 e Variância = 4



Média =10,0 e Variância = 16



Média =10,0 e Variância = 36

Problema 05.

Nessa situação, tanto a média quanto a mediana (que coincidem) não se apresentam como boas medidas de posição. Elas não retratam bem a distribuição da variável estudada. Nessas condições, seria melhor considerar a moda, ou modas, pois nesse caso a distribuição é bi-modal.

Problema 06.

(m) A mediana do número de filhos é a média aritmética das observações de ordem

(n) 50 e 51, que é 2.

(o) A moda do número de filhos é 2.

(p) O cálculo da média fica prejudicado pelo fato de haver uma categoria representada por "mais que 5" filhos, sem a especificação do valor exato. Neste caso, deve-se usar o conhecimento empírico que se tem da variável para propor um valor máximo para o intervalo, ou o ponto médio da classe. Aqui vamos supor que as famílias com "mais que 5", tenham em média 8 filhos. Desse modo tem-se:

$$\bar{x} = \frac{0\times17 + 1\times20 + 2\times28 + 3\times19 + 4\times7 + 5\times4 + 8\times5}{100} = 2{,}21$$

Problema 07.

	50	
	31	
20		61
2		97

- Intervalo interquartil: $q_3 - q_1 = 61 - 20 = 41$
- Dispersão inferior (di): $q_2 - x_{(1)} = 31 - 2 = 29$
- Dispersão superior (ds): $x_{(n)} - q_2 = 97 - 31 = 66$

Para que a distribuição dos dados tenha forma normal (simétrica, em geral), é necessário:

$di \cong ds$

$q_2 - q_1 \cong q_3 - q_2$

$q_2 - q_1$ e $q_3 - q_2 <$ di e ds

Os valores acima obtidos indicam que a distribuição dos dados não tem forma normal.

Problema 08.

	37	
	35	
31		40
21		49

- Intervalo interquartil: $q_3 - q_1 = 40 - 31 = 9$
- Dispersão inferior (di): $q_2 - x_{(1)} = 35 - 21 = 14$
- Dispersão superior (ds): $x_{(n)} - q_2 = 49 - 35 = 14$

Os valores acima obtidos indicam que a distribuição dos dados tem forma aproximadamente normal.

Problema 09.

Temos que:

$$q(0{,}10) = \frac{(13+14)}{2} = 13{,}5\,,\ q(0{,}25) = 19{,}5\,,\ q(0{,}50) = 31{,}0\,,\ q(0{,}75) = 61{,}0\,,$$

$$q(0{,}90) = \frac{(78+80)}{2} = 79{,}0$$

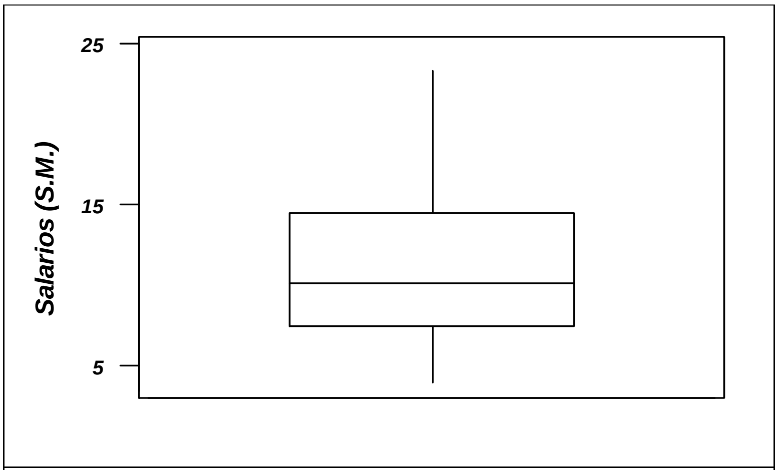
Problema 10.

Temos que:

$$q(0{,}10) = 576{,}841\,,\ q(0{,}25) = 1{,}580{,}217\,,\ q(0{,}50) = 2{,}776{,}006\,,\ q(0{,}75) = 5{,}095{,}113\,,$$

$$q(0{,}80) = 6{,}704{,}975\,,\ q(0{,}95) = 12{,}993{,}918$$

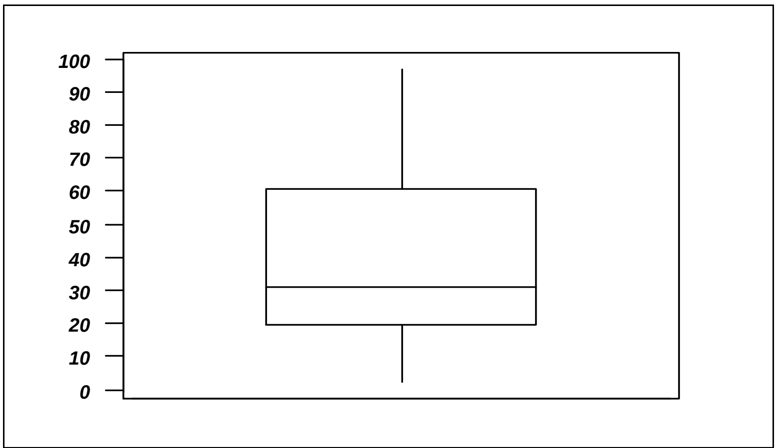
Problema 11.



Box-Plot dos Salários dos funcionários da Companhia MB

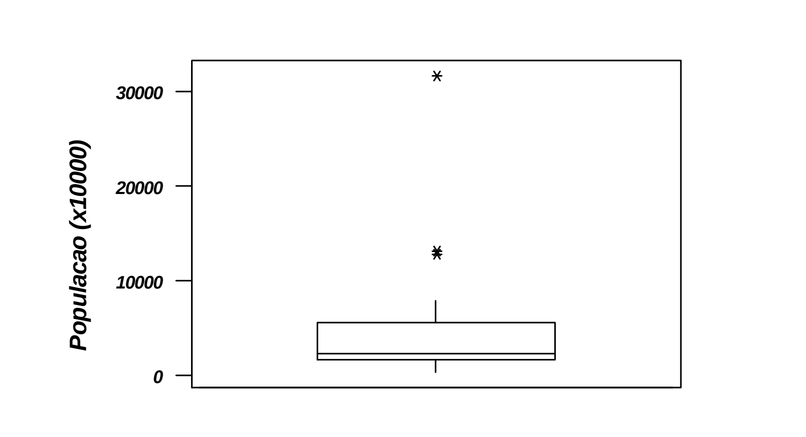
Pode-se perceber uma distribuição assimétrica à direita.

Problema 12.



Box-Plot para os dados do Problema 3

Problema 13.



Box-Plot do Problema 10

Problema 14.

(q) $$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

(r) $$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\left(\bar{x}\right)^2+n\left(\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}$$

(s) $$\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i+\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\bar{x}\right)^2=$$

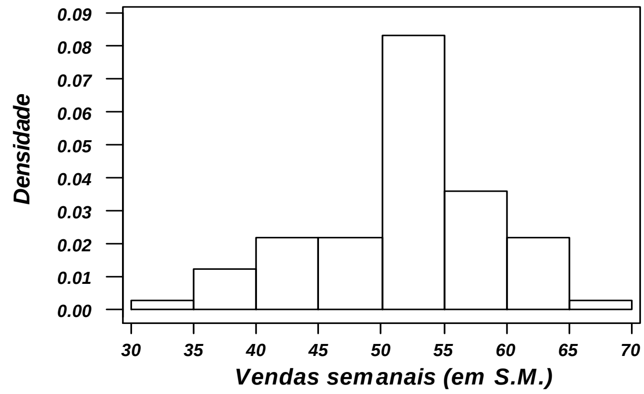
$$=\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2-n\left(\bar{x}\right)^2$$

(t) $$\sum_{i=1}^{k}f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}f_i\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{k}f_ix_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{k}f_ix_i+\sum_{i=1}^{k}f_i\left(\bar{x}\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}f_ix_i^2-\left(\bar{x}\right)^2$$

Problema 16.

(u)



Histograma das vendas semanais de vendedores de gêneros alimentícios

(v) Supondo uma variável discreta com todas as observações do intervalo concentradas no ponto médio:

$$\bar{x} = \frac{32{,}5\times 2 + 37{,}5\times 10 + 42{,}5\times 18 + 47{,}5\times 50 + 52{,}5\times 70 + 57{,}5\times 3062{,}5\times 18 + 67{,}5\times 2}{200} =$$

$$= \frac{10240}{200} = 51{,}2$$

(w) $\mathrm{var}(X) = (-18{,}7)^2 \times 0{,}01 + (-13{,}7)^2 \times 0{,}05 + (-8{,}7)^2 \times 0{,}09 + (-3{,}7)^2 \times 0{,}25 +$
$+ (1{,}3)^2 \times 0{,}35 + (6{,}3)^2 \times 0{,}15 + (11{,}3)^2 \times 0{,}09 + (16{,}3)^2 \times 0{,}01 = 43{,}81$

Logo,

$dp(X) = 6{,}62$

(x) Temos que: $\bar{x} - 2s = 51{,}2 - 2\times 6{,}62 = 37{,}96$ e $\bar{x} + 2s = 51{,}2 + 2\times 6{,}62 = 64{,}44$
Assim, queremos achar as seguintes áreas do histograma:

$$\frac{40-35}{5\%} = \frac{40-37{,}96}{A} \Rightarrow A = 2{,}04\%$$

$$\frac{65-60}{9\%} = \frac{644{,}44-60}{B} \Rightarrow B = 7{,}99\%$$

Desse modo, o intervalo em questão abriga: $2{,}04\% + 9\% + 25\% + 35\% + 15\% = 94{,}03\%$

(y) Pela distribuição de freqüências, vê-se que a mediana bruta é 52,5.

Problema 18.

(z) Mediana:

$$\frac{40-20}{28} = \frac{q_2 - 20}{24} \Rightarrow q_2 = 37{,}14$$

(aa) 1º decil:

$$\frac{20-0}{26}=\frac{x-0}{10}\Rightarrow x=7{,}69$$

(bb) Intervalo interquartil(dq):

$$\frac{20-0}{26}=\frac{q_1-0}{25}\Rightarrow q_1=19{,}23$$

$$\frac{80-60}{0{,}20}=\frac{q_3-60}{0{,}03}\Rightarrow q_3=63{,}00$$

Portanto, $dq=63{,}00-19{,}23=43{,}77$

Problema 19.

X : tempo de casamento.

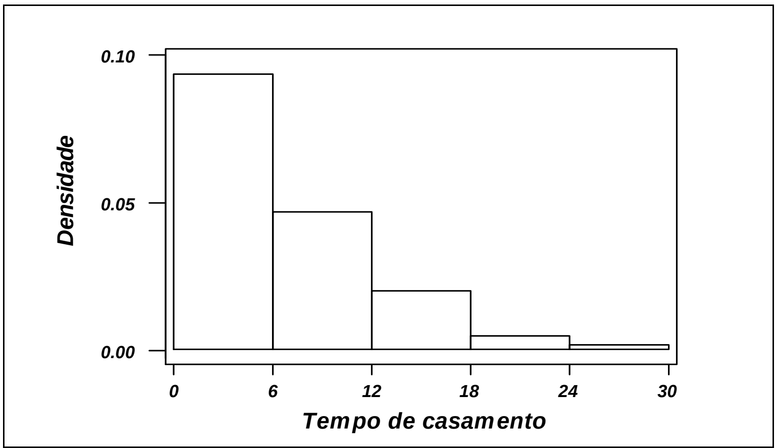
X	n_i	f_i	F_i
[0;6)	2800	0,56	0,56
[6;12)	1400	0,28	0,84
[12;18)	600	0,12	0,96
[18;24)	150	0,03	0,99
[24;30)	50	0,01	1,00
Total	5000	1,00	

(cc) $\bar{x}=3\times0{,}56+9\times0{,}28+15\times0{,}12+21\times0{,}03+27\times0{,}01=6{,}90$

$md=5{,}36$

(dd) $\text{var}(X)=(-3{,}9)^2\times0{,}56+(2{,}1)^2\times0{,}28+(8{,}1)^2\times0{,}12+(14{,}1)^2\times0{,}03+(20{,}1)^2\times0{,}01=$
$=27{,}63\Rightarrow dp(X)=5{,}26$ anos

(ee)



Histograma do tempo até o desquite

(ff) 1º decil: $\frac{6-0}{56}=\frac{x-0}{10}\Rightarrow x=1{,}07$ anos

9º decil: $\frac{18-12}{12}=\frac{y-12}{6}\Rightarrow y=15$ anos

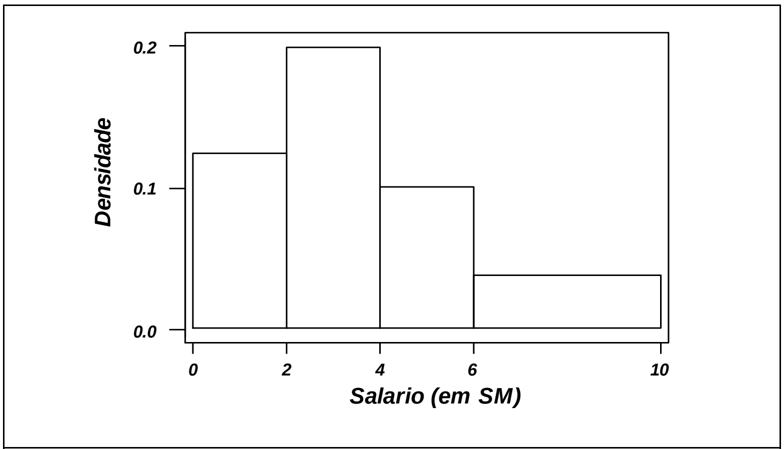
(gg) 1º quartil: $\frac{6-0}{56}=\frac{q_1-0}{25}\Rightarrow q_1=2{,}68$ anos

(hh) 3º quartil: $\frac{12-6}{28}=\frac{q_3-6}{19}\Rightarrow q_3=10{,}07$ anos

$dq=10{,}07-2{,}68=7{,}39$

Problema 20.

(ii)



Histograma para os Salários mensais dos funcionários do setor administrativo

(jj) Média: $\bar{x}=1\times0{,}25+3\times0{,}40+5\times0{,}20+8\times0{,}15=3{,}65$

Variância:

$$\text{var}(X)=(-2{,}65)^2\times0{,}25+(-0{,}65)^2\times0{,}40+(1{,}35)^2\times0{,}20+(4{,}35)^2\times0{,}15=28{,}19$$

Variância: $dp(X)=\sqrt{28{,}19}=5{,}31$

(kk) 1º quartil: $q_1=2$

Mediana: $\frac{4-2}{0{,}40}=\frac{md-2}{0{,}25}\Rightarrow md=3{,}25$

(ll) Se todos os salários aumentarem em 100%, ou seja, dobrados, a média dos salários dobrará e a sua variância será multiplicada por 4.Trata-se de um resultado geral que pode ser demonstrado da seguinte maneira.

Suponha que haja uma coleção de n valores, denotados por $x_1,x_2,...,x_n$ com média $\bar{x}$ e variância $s^2(X)$. Seja k uma constante real. Se todos os n valores da coleção acima forem multiplicados por k, teremos:

(i) Para a média:

$$\overline{x_k} = \frac{kx_1 + ... + kx_n}{n} = k\bar{x}$$

(ii) Para a variância:

$$s_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(kx_i - k\bar{x})^2 = k^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = k^2 s^2(X)$$

(mm) Dar um abono de 2 SM para todos os funcionários significa aumentar a média e a mediana em duas unidades. A variância não se altera. Novamente, esse resultado pode ser generalizado para a soma de qualquer constante real k. Vejamos:

Para a média:

$$\overline{x_2} = \frac{(k + x_1) + ... + (k + x_n)}{n} = \frac{kn + x_1 + ... + x_n}{n} = \bar{x} + k$$

Um raciocínio semelhante serve para a mediana.

Para a variância:

$$s_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i + k) - (\bar{x} + k)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + k - \bar{x} - k)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^2(X)$$

Problema 21.

(nn) – média: fica multiplicada por 2
- mediana: fica multiplicada por 2
- desvio-padrão: fica multiplicado por 2

(oo) – média: aumenta em 10 unidades
- mediana: aumenta em 10 unidades
- desvio-padrão: não se altera

(pp) – média: fica igual a zero: $\left[\frac{x_1 - \bar{x} + ... + x_n - \bar{x}}{n} = \frac{x_1 + ... + x_n - n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0\right]$
- mediana: fica reduzida em $\bar{x}$ unidades
- desvio-padrão: não se altera

(qq) – média: fica igual a zero
- mediana: como todas as observações, fica reduzida em $\bar{x}$ unidadese dividida por $dp(X)$
- desvio-padrão: fica igual a um. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{dp(X)}\right)^2 = \frac{\text{var}(X)}{\text{var}(X)} = 1$

Problema 22.

(rr) Se o terceiro quartil da distribuição dos salários da companhia A é 5000, a probabilidade de um candidato receber mais de 5000 unidades é 0,25. Assim, o mais provável é receber menos que essa quantia.

(ss) Na empresa B, o salário seria de 7000 unidades, com certeza. Na empresa A, como foi visto no item anterior, a probabilidade de se receber mais que 5000 unidades é 0,25. Desse modo, é mais interessante empregar-se na empresa B.

Problema 23.

(tt) Medidas descritivas obtidas na amostra-piloto

Média	30
Mediana	27
Variância	128,22
Amplitude	37

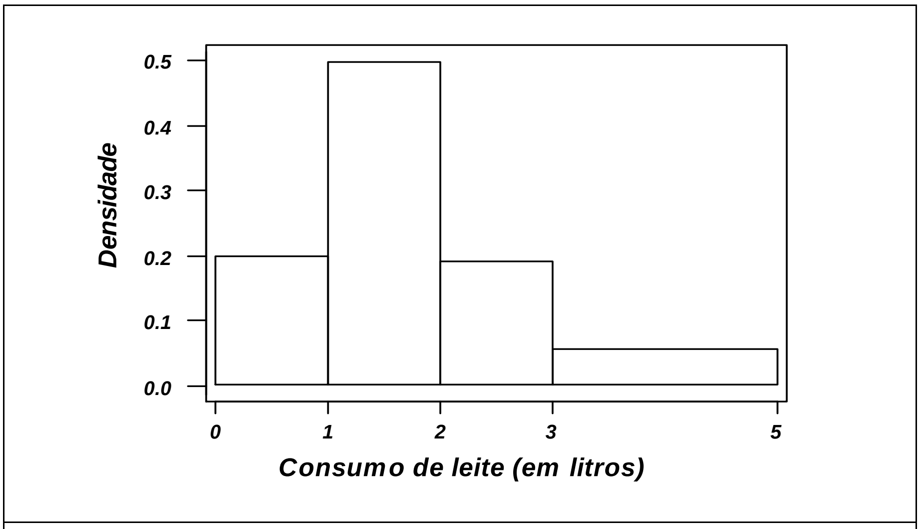
(uu) Das medidas acima, a mais importante para a determinação do tamanho da amostra final é a variância, pois fornece informação a respeito da variabilidade da variável Idade.

Problema 24.

(vv) Distribuição de freqüências do consumo diário de leite

Consumo diário de leite	f_i
Menos de 1 litro	0,20
1 a 2 litros	0,50
2 a 3 litros	0,20
3 a 5 litros	0,10

(ww)



Histograma

(xx) $\bar{x} = 0,5\times 0,20 + 1,5\times 0,50 + 2,5\times 0,20 + 4\times 0,10 = 1,75 \text{ litros}$

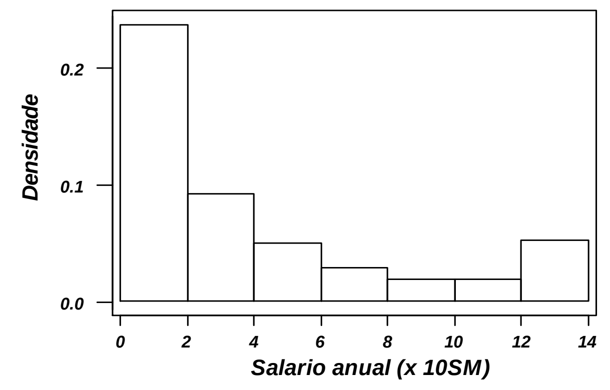
Mediana: $\dfrac{2-1}{0,50} = \dfrac{md-1}{0,30} \Rightarrow md = 1,6$

(yy) $\text{var}(X) = (-1{,}25)^2 \times 0{,}20 + (-0{,}25)^2 \times 0{,}50 + (0{,}75)^2 \times 0{,}20 + (2{,}25)^2 \times 0{,}1 = 0{,}9625$
$\Rightarrow dp(X) = 0{,}9811$

(zz) $\dfrac{2-1}{0{,}50} = \dfrac{q_1 - 1}{0{,}05} \Rightarrow q_1 = 1{,}1$

Problema 25.

(aaa)



Histograma

(bbb) $\bar{x} = 1\times 0{,}49 + 3\times 0{,}19 + 5\times 0{,}10 + 7\times 0{,}05 + 9\times 0{,}04 + 11\times 0{,}03 + 13\times 0{,}10 = 3{,}92$

$\text{var}(X) = (-2{,}92)^2 \times 0{,}49 + (-0{,}92)^2 \times 0{,}19 + (1{,}08)^2 \times 0{,}10 + (3{,}08)^2 \times 0{,}05 +$

$+ (5{,}08)^2 \times 0{,}04 + (7{,}08)^2 \times 0{,}03 + (9{,}08)^2 \times 0{,}10 = 15{,}71 \Rightarrow dp(X) = 3{,}96$

(ccc) No bairro A, pois tem menor desvio-padrão.

(ddd)

Faixa salarial	n_i	f_i	F_i
0|---2	10000	0.49	0.49
2|---4	3900	0.19	0.68
4|---6	2000	0.10	0.78
6|---8	1100	0.05	0.83
8|---10	800	0.04	0.87
10!---12	700	0.03	0.90
12|---14	2000	0.10	1.00
Total	20500	1.00	

Isso posto, pode-se perceber que os 10% mais ricos da população são os que pertencem a faixa salarial compreendida entre 12 e 14 salários mínimos anuais.

Problema 26.

Média:

$\bar{x} = 3\times 0{,}15 + 5\times 0{,}25 + 7\times 0{,}20 + 9\times 0{,}30 + 11\times 0{,}10 = 6{,}9$

Mediana:

$$\frac{8-6}{0,20}=\frac{md-6}{0,10}\Rightarrow md=7$$

Moda: nesse caso, a moda é 9.
Variância:

$$\text{var}(X)=(-3,90)^2\times 0,15+(-0,19)^2\times 0,25+(0,10)^2\times 0,20+(2,10)^2\times 0,30+(4,10)^2\times 0,10=$$
$$=6,19$$

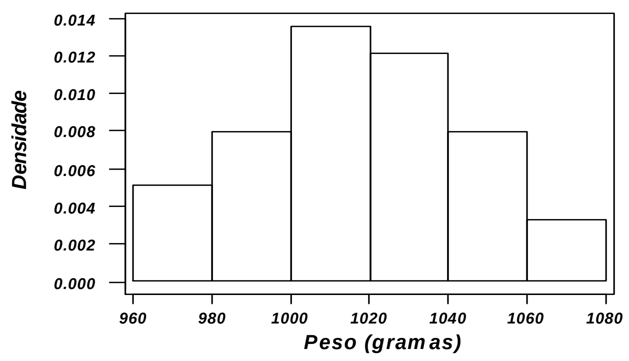
- 1º quartil: $\frac{6-4}{0,25}=\frac{q_1-4}{0,10}\Rightarrow q_1=4,8$

Problema 27.

(eee) $\bar{x}=\frac{1}{1000}\times\left(970\times 60+990\times 160+1010\times 280+1030\times 260+1050\times 160+1070\times 80\right)=1020,8$

(fff) $\text{var}(X)=\frac{1}{1000}\times\left(2580,64\times 60+948,64\times 160+116,64\times 280+84,64\times 260+852,64\times 160+\right.$
$\left.+2420,64\times 80\right)=691,36$

(ggg)



Histograma

(hhh) A tabela baixo mostra o critério a ser utilizado na classificação dos frangos:

Peso(g)	Categoria
Menos de 997,5	D
997,5 a 1020,0	C
1020,1 a 1045,0	B
Mais de 1045,0	A

$$\frac{1000-980}{16}=\frac{D-980}{14}\Rightarrow D=997,5$$
$$\frac{1060-1040}{16}=\frac{B-1040}{4}\Rightarrow B=1045$$

(iii) Temos que: $\bar{x} - 2dp(X) = 968{,}21$. Dos frangos desta granja , 2,46% estão abaixo deste peso:

$$\frac{980-960}{6} = \frac{968{,}21-960}{x} \Rightarrow x = 2{,}46$$

Também, $\bar{x} + 1{,}5dp(X) = 1060{,}24$. Acima deste patamar, encontram-se 7,90% dos frangos:

$$\frac{1080-1060}{8} = \frac{1080-1060{,}24}{y} \Rightarrow y = 7{,}90$$

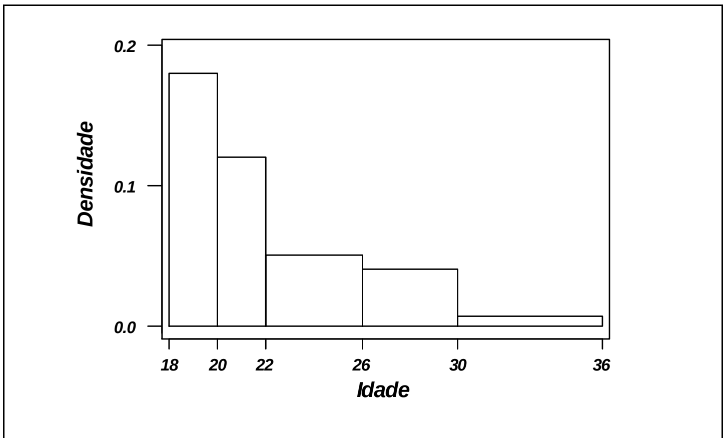
Problema 28.

(jjj) Aparentemente, a campanha não produziu o efeito esperado. A média dos dados é 22,48 anos.

$$\bar{x} = \frac{1}{50} \times (19\times18 + 21\times12 + 24\times10 + 28\times8 + 33\times2) = 22{,}48$$

(kkk) A média dos dados é 22,48 e o desvio-padrão é 3,83. Assim, a diferença $\bar{x} - 22$ é 0,48 e $2dp(X)\big/\sqrt{n}$ é 1,08. Desse modo, o critério do outro pesquisador também indica que a campanha não surtiu efeito.

(lll)



Histograma da idade média dos candidatos

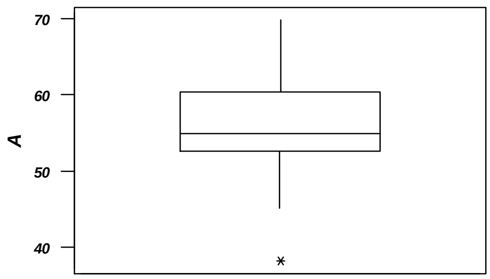
Esquema dos cinco números para a corretora A

	18	
	55	
54		60
38		70

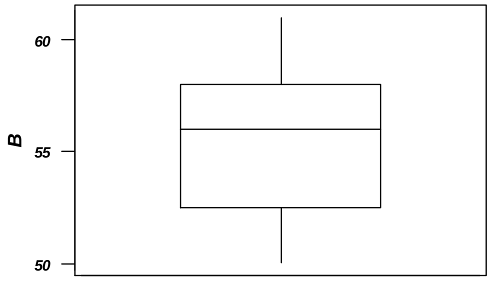
Esquema dos cinco números para a corretora B

	21	
	56	
53		58
50		61

Representação gráfica:



Corretora A



Corretora B

As medidas e a figura acima indicam que, a despeito do fato de o máximo lucro observado ser proveniente da corretora A, é a corretora B que apresenta menor variabilidade nos lucros proporcionados. As medianas das duas empresas estão bastante próximas. Estes elementos permitem acreditar que é mais vantajoso ter o dinheiro investido pela corretora B.

Problema 30.

Se as populações são homogêneas, espera-se uqe suas variâncias sejam próximas, de modo que o quociente F deve ser próximo de 1.

Problema 31.

A figura do Problema 29, nos mostra que os dados da corretora A têm maior variabilidade que os da corretora B. A mediana dos lucros proporcionados pela segunda é um pouco mais alta que a dos lucros da primeira corretora.

Problema 32.

$$S_*^{\,2} = \frac{(n_A - 1)Var(X \mid A) + (n_B - 1)Var(X \mid B)}{n_A + n_B - 2} = \frac{17 \times 58{,}98 + 20 \times 10{,}05}{18 + 21 - 2} = \frac{1203{,}66}{37} = 32{,}53$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{S_*^2 \sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}} = \frac{55{,}72 - 55{,}43}{32{,}53 \times 0{,}32} = \frac{0{,}29}{10{,}41} = 0{,}03$$

Como t =0,03 < 2, conclui-se que os desempenhos das duas corretoras são semelhantes.

Problema 33.

Média Inicial ($\bar{x}$): 15,9

Desvio Padrão (dp): 3,5

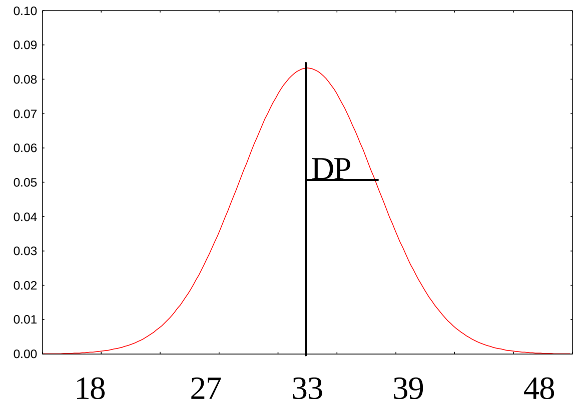
$\bar{x} + 2dp(X) = 22{,}9$

$\bar{x} - 2dp(X) = 8{,}8$

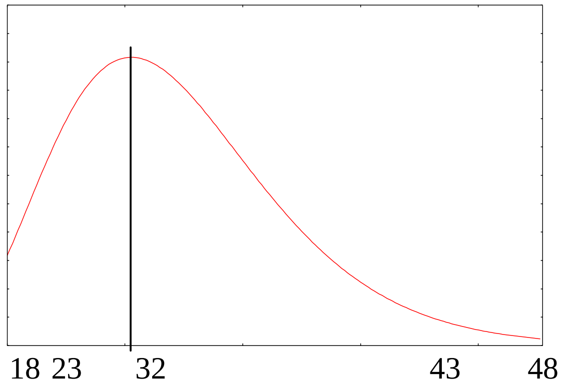
Logo, os limites são 8,8 e 29,9, ou seja, valores maiores que 22,9 ou menores uqe 8,8 devem ser retirados do cálculo. Para esse conjunto de dados, somente o valor 8 encontra-se abixo de 8,8. Assim, calculando a média final, tem-se:

Média final = 16,8

Problema 34.

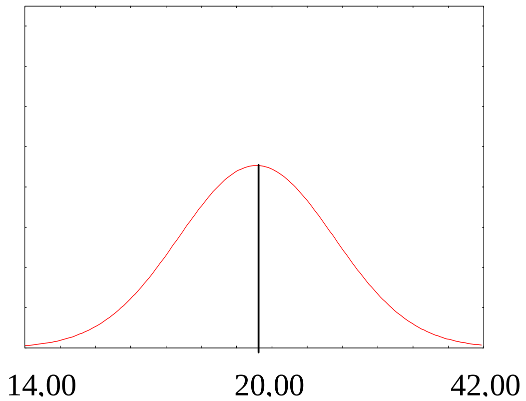


Histograma para os dados da repartição A

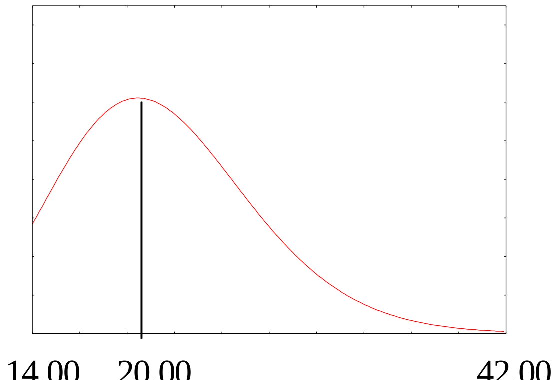


Histograma para os dados da repartição B

Problema 35.



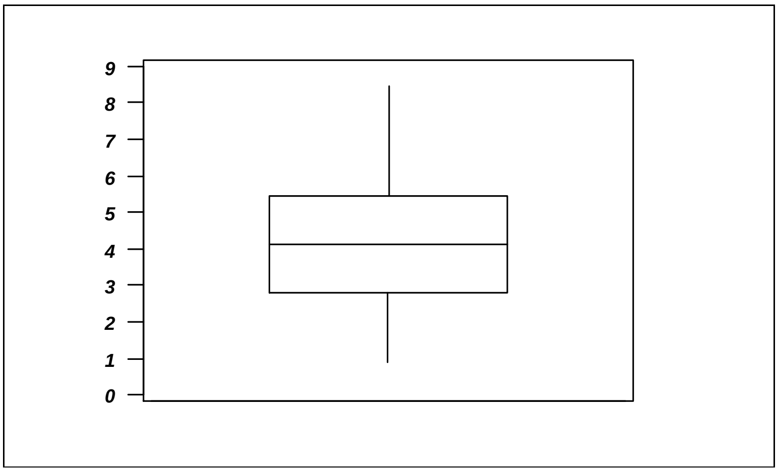
Histograma para a Região A:



Histograma para a Região B:

Basicamente, as diferenças entre os gráficos dizem respeito à variabilidade e à simetria. O gráfico da região B apresenta maior variabilidade e é assimétrico.

Problema 36.



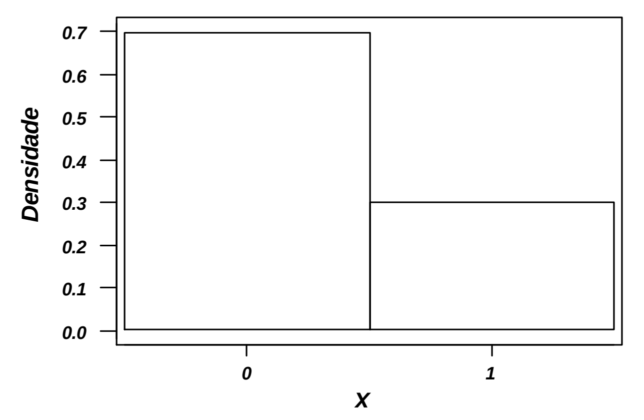
As taxas apresentam-se aproximadamente simétricas em torno de 4,32, que é o valor médio.A taxa mínima é de 0,90 e a máxima é de 8,45.

Problema 37.

(mmm) $\bar{x} = 0{,}305$; $\text{var}(X) = 0{,}305$

(nnn)O valor de $\bar{x}$ indica a proporção de empregados oriundos da capital.

(ooo)



Histograma de X

Problema 38.

(ppp)O valor Z é uma nota padronizada. Nessa padronização, o valor 0 indica que o indivíduo que o indivíduo em questão obteve a nota média. A nota Z também fornece idéia sobre o desempenho de cada elemento com relação a todo o grupo.

(qqq) As notas padronizadas são:

0,58	0,58	-0,18	-0,18	0,58
1,35	-0,18	-0,18	0,58	-0,18
1,35	-0,95	-0,95	0,58	0,58
-0,95	-0,18	0,58	-3,26	-0,95
-0,95	-0,18	1,35	0,58	0,58

(rrr) Como as notas foram padronizadas pela subtração da média e divisão pelo desvio-padrão, tem-se (Problema 21) que $\bar{z} = 0$; $dp(Z) = 1$

(sss) Existe um funcionário que obteve $Z = -3{,}26$, sendo, pois, considerado anormal.

(ttt) Para avaliar o seu desempenho relativo, é necessário comparar as notas padronizadas nas três disciplinas. Em Direito, todos obtiveram 9,0; de modo

(uuu) que o funcionário 1 obteve a nota média, cujo valor padronizado é zero. Em Política, a média das notas foi 7,76 e o desvio padrão, 1,67. Com isso, a nota padronizada do funcionário 1 é 0,74. Com isso, seu desempenho relativo foi melhor em Política.

Problema 39.

Para os salários da Tabela 2.1, temos que:

$\bar{x} = 11{,}12$

$\bar{x}(0{,}10) = 10{,}84$ (foram eliminadas as 4 primeiras e as 4 últimas observações)

$\bar{x}(0{,}25) = 10{,}52$ (foram eliminadas as 9 primeiras e as 9 últimas observações)

Problema 40.

Para a região A:

$$CV_A = \frac{s}{x} \times 100\% = \frac{4}{20} \times 100\% = 20\%$$

Para a região B:

$$CV_A = \frac{s}{x} \times 100\% = \frac{6}{20} \times 100\% = 30\%$$

Como já havia percebido no Problema 35, a variabilidade dos dados provenientes da região B é maior que a dos dados da região A. O coeficiente de variação indica a dimensão da variabilidade com relação à média.

Problema 42.

População Urbana

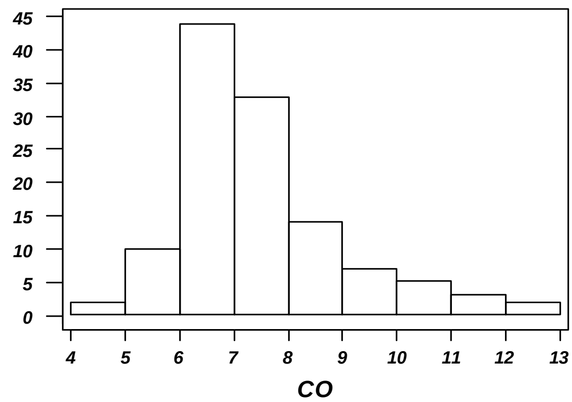
$med = 2.176.000$; $dam = 1.413.000$

População Rural

$med = 715.200$; $dam = 546.900$

Problema 44.

(vvv)

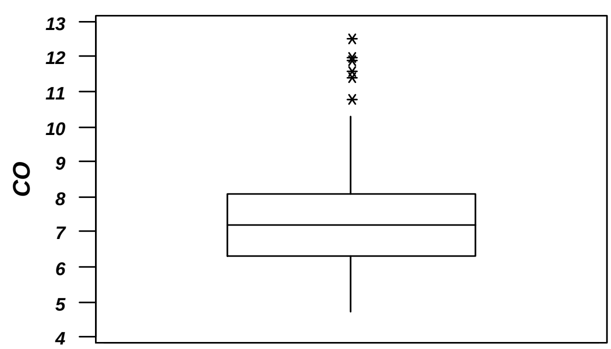


Histograma para a variável CO

4	:	77
5	:	12
5	:	55677789
6	:	1111122222222233333444444
6	:	5666677777899999999
7	:	0012233444
7	:	5566777778888899999999
8	:	012334
8	:	55678999
9	:	0114
9	:	557
10	:	1333
10	:	8
11	:	4

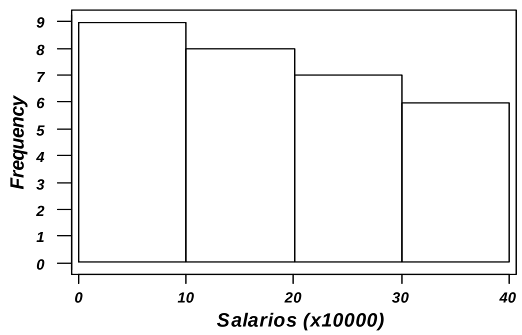
Ramo e folhas

High: 11.6 11.9 12.0 12.5



Box-Plot para a variável CO

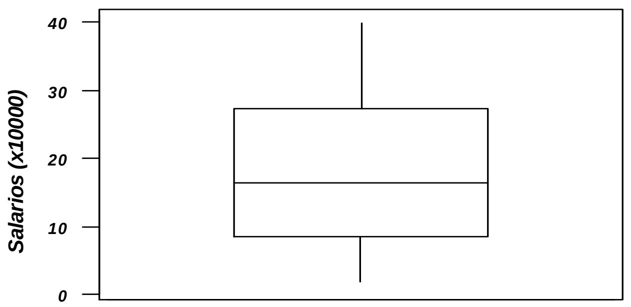
(www) Salários Mecânicos



Histograma para a variável Salários Mecânicos

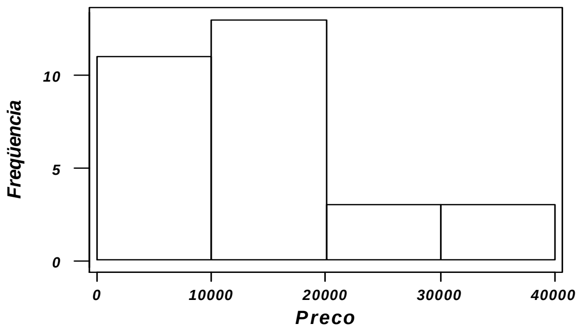
0	:	24
0	:	566789
1	:	012234
1	:	678
2	:	004
2	:	6667
3	:	3
3	:	567
4	:	00

Ramo e folhas



Box-Plot para a variável Salários Mecânicos

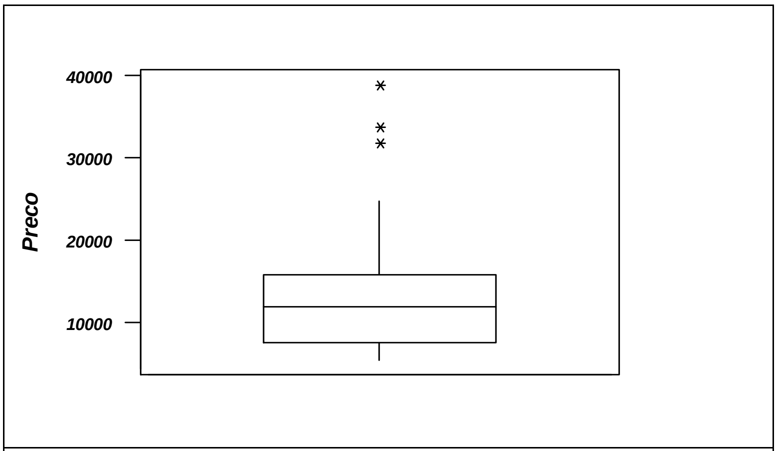
(xxx)



Histograma para a variável Preço

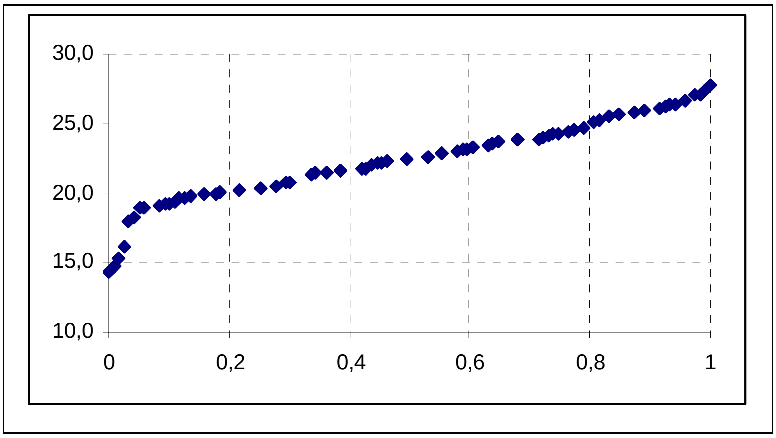
0	:	0
1	:	
2	:	
3	:	
4	:	
5	:	7
6	:	23337
7	:	78
8	:	
9	:	34
10	:	48
11	:	46
12	:	099
13	:	178
14	:	5
15	:	5
16	:	3
17	:	
18	:	
19	:	
20	:	
21	:	5
22	:	2
23	:	
24	:	6

Ramo e folhas



Box-Plot para a variável Preço

Problema 45.



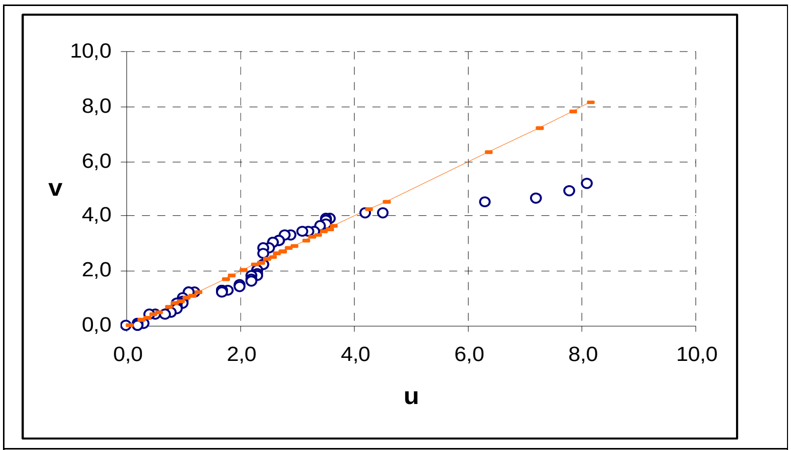


Gráfico de Simetria

Problema 48.

(yyy) $n = 120$, $d_q = 16$, $\Delta = 16 \times (0{,}039896)^{1/3} = 5{,}47$

(zzz) $n = 30$, $d_q = 20374$, $\Delta = 20374 \times (0{,}049237)^{1/3} = 7600$

Capítulo 4

Problema 01.

(aaaa)

	Grau de Instrução			
Procedência	**1º grau**	**2º grau**	**Superior**	**Total**
Interior	**3 (0,083)**	**7 (0,194)**	**2 (0,056)**	**12 (0,33)**
Capital	**4 (0,111)**	**5 (0,139)**	**2 (0,056)**	**11 (0,31)**
Outra	**5 (0,139)**	**6 (0,167)**	**2 (0,056)**	**13 (0,36)**
Total	**12 (0,33)**	**18 (0,50)**	**6 (0,17)**	**36 (1,00)**

(bbbb) Dos funcionários dessa empresa, 50% têm o segundo grau.

(cccc) Dos funcionários dessa empresa, 19,4% têm o segundo grau e são oriundos do interior.

(dddd) Dentre os funcionários do interior, 7/12 (58,3%) têm o segundo grau.

Problema 02.

(eeee) No sorteio de um indivíduo dentre os 36, é maior a probabilidade de o mesmo ter o segundo grau.

(ffff) Quanto à região de procedência, a maior probabilidade está associada com a região identificada por "Outra".

(gggg) A probabilidade de um indivíduo sorteado aleatoriamente ter grau superior de instrução é 0,17.

(hhhh) A probabilidade pedida é $\frac{0{,}056}{0{,}330} = 0{,}17$.

(iiii) Nesse caso, temos $P(Superior/Capital) = \frac{0{,}056}{0{,}310} = 0{,}18$

Problema 03.

(jjjj) Temos que $md(X) = 2{,}0$ e $md(Y) = 2{,}5$. Assim,

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (0,025)	7 (0,175)	8 (0,20)
Alto	19 (0,475)	13 (0,325)	32 (0,80)
Total	20 (0,50)	20 (0,50)	40 (1,00)

(kkkk) Da tabela, tem-se que 2,5% dos indivíduos encontram-se nessas condições.

(llll) 50%.

(mmmm) Dentre as pessoas com baixa rotatividade, 12,5% ganham pouco.

(nnnn) A probabilidade em (c) foi bastante modificada. Isto indica que a maioria das pessoas que ganham pouco têm rotatividade.

Problema 04.

(oooo)

Região de Procedência	**Grau de Instrução**		
	1º grau	**2º grau**	**Superior**
Interior	**0,250**	**0,583**	**0,167**
Capital	**0,364**	**0,455**	**0,182**
Outra	**0,385**	**0,462**	**0,154**

(pppp) Em caso de independência entre a região de procedência e grau de escolaridade, em cada tabela deveria existir 33% com 1º grau, 50% com 2º grau e 17% com grau Superior.

Problema 05.

Tabela do total de linhas

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (12,5%)	7 (87,5%)	8 (100,0%)
Alto	19 (59,4%)	13 (40,6%)	32 (100,0%)
Total	20 (50,0%)	20 (50,0%)	40 (100,0%)

Tabela do total de colunas.

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (5,0%)	7 (35,0%)	8 (20,0%)
Alto	19 (95,0%)	13 (65,0%)	32 (80,0%)
Total	20 (100,0%)	20 (100,0%)	40 (100,0%)

As tabelas acima indicam existência de relação entre as variáveis rotatividade e salário, pois as proporções marginais não se repetem no interior da tabela.

Problema 06.

(qqqq) A proporção de homens entre os indivíduos que usaram o hospital é: $100/250 = 0,4$

(rrrr) A proporção de homens entre os indivíduos que não usaramo hospital é: $900/1750 = 0,514$

(ssss) Tabela do total de colunas.

Usaram o hospital	100 (0,10)	150 (0,15)	0,25
Não usaram o hospital	900 (0,90)	850 (0,85)	0,75
	1,00	1,00	1,00

Independentemente do sexo, 25% das pessoas usam e 75% não usam o hospital. Essas porcentagens deveriam ser iguais nas duas colunas e não são. Portanto, o uso do hospital depende do sexo do segurado.

Problema 07.

Veja a tabela a seguir. Entre parênteses, encontram-se os valores esperados em caso de independência das variáveis.

Grau de Instrução				
Procedência	**1º grau**	**2º grau**	**Superior**	**Total**
Interior	**3 (4,00)**	**7 (6,00)**	**2 (2,00)**	**12**
Capital	**4 (3,67)**	**5 (5,50)**	**2 (1,83)**	**11**
Outra	**5 (4,33)**	**6 (6,50)**	**2 (2,17)**	**13**
Total	**12**	**18**	**6**	**36**

Com isso, os cálculos ficam assim:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0{,}25 + 0{,}17 + 0 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}10 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}67$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{0{,}67}{0{,}67 + 36}} = 0{,}81$$

Problema 08.

Para os dados do problema 3, tem-se:

	Y		
X	**Baixo**	**Alto**	**Total**
Baixo	**1 (4)**	**7 (4)**	**8**
Alto	**19 (16)**	**13 (16)**	**32**
Total	**20**	**20**	**40**

De modo que,

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 2{,}25 + 2{,}25 + 0{,}5625 + 0{,}5625 = 5{,}625$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{5{,}625}{5{,}625 + 40}} = 0{,}351$$

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{(r-1)\times(s-1)}} = \sqrt{\frac{5{,}625/40}{1\times 1}} = 0{,}375$$

Para os dados do problema 6, tem-se:

	Homens	Mulheres	Total
Usaram o hospital	100 (125)	150 (125)	250
Não usaram o hospital	900 (875)	850 (875)	1750
Total	1000	1000	2000

De modo que,

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 5{,}00 + 5{,}00 + 0{,}71 + 0{,}71 = 11{,}42$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{11{,}42}{11{,}42 + 2000}} = 0{,}075$$

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{(r-1)\times(s-1)}} = \sqrt{\frac{11{,}42/2000}{1\times 1}} = 0{,}076$$

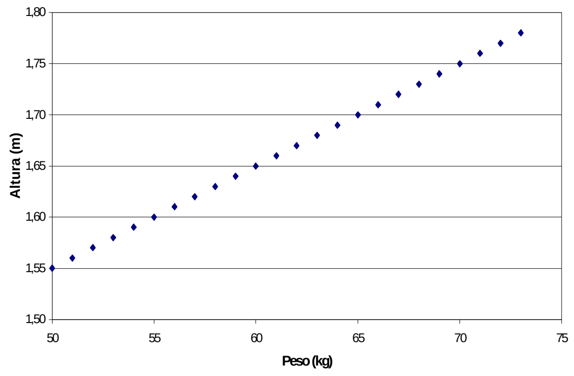
Problema 09.

Os dados podem ser assim representados:

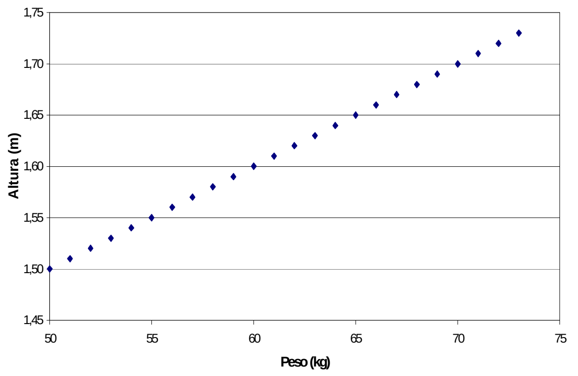
Companhia	Duração de efeito de dedetização		
	Menos de 4 meses	De 4 a 8 meses	Mais de 8 meses
X	0,32	0,60	0,08
Y	0,35	0,58	0,07
Z	0,34	0,60	0,06

Essas proporções indicam que não há diferenças da duração de efeito de dedetização entre as três empresas.

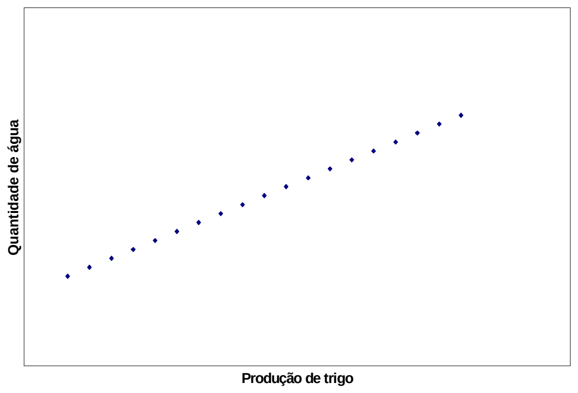
Problema 10.



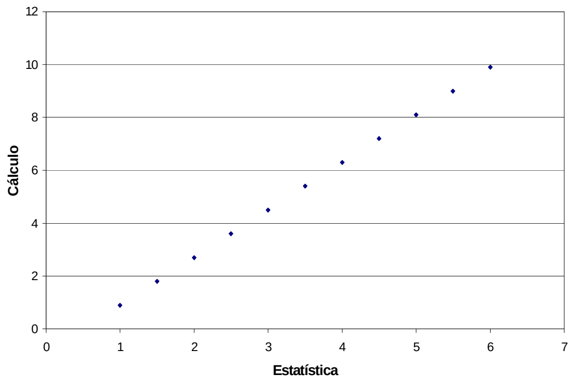
(a)



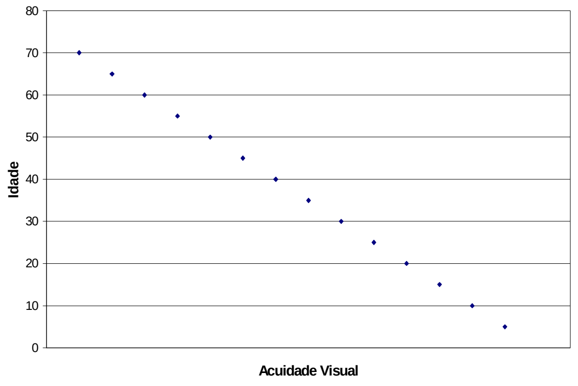
(b)



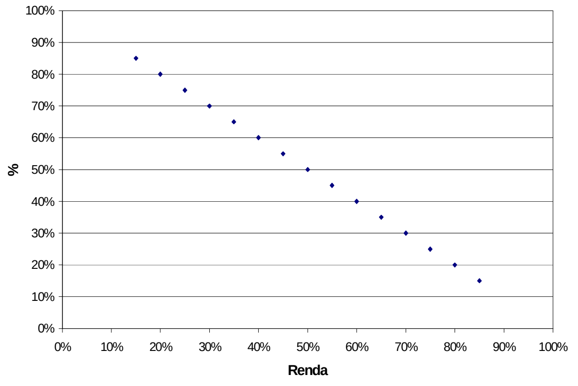
(c)



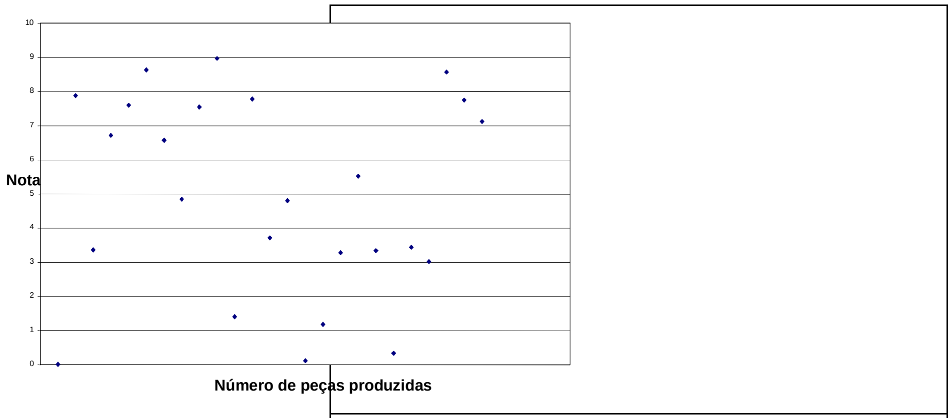
(d)



(e)



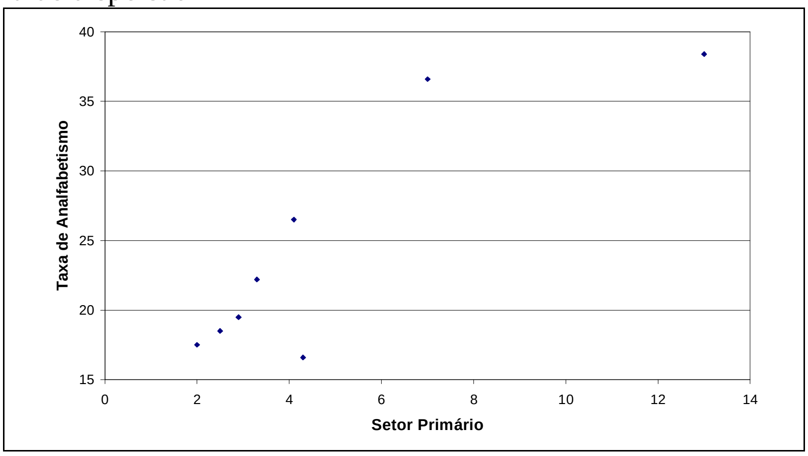
(f)



(g)

Problema 11.

(tttt) Diagrama de dispersão



(uuuu) O gráfico do item (a) indica dependência linear entre as variáveis.

(vvvv) $Corr(X,Y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\left[\left(\frac{x_i - 4{,}887}{3{,}62}\right)\times\left(\frac{y_i - 24{,}48}{8{,}63}\right)\right] = 0{,}86$

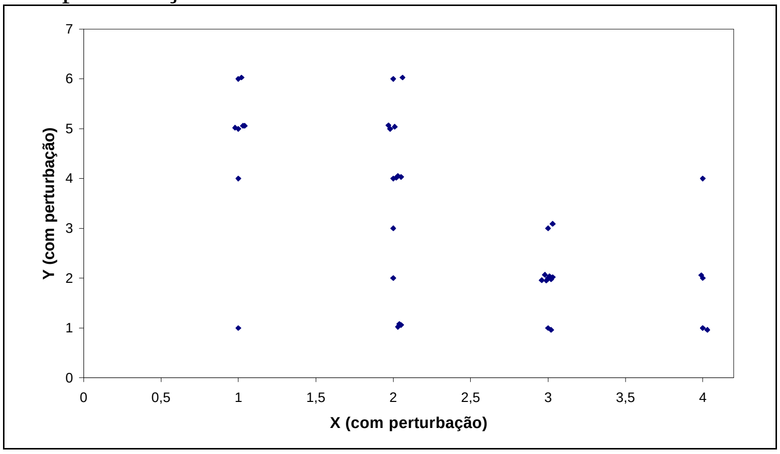
(wwww) As regiões de Porto Alegre e Fortaleza apresentam comportamento diferente das demais. Retirando-se esses elementos do cálculo resulta $Corr(X,Y) = 0{,}91$.

Problema 12.

(xxxx)

	Y						
X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**4**	**2**	**8**
2	**3**	**2**	**1**	**4**	**3**	**2**	**15**
3	**2**	**7**	**2**	**0**	**0**	**0**	**11**
4	**3**	**2**	**0**	**1**	**0**	**0**	**6**
Total	**9**	**11**	**3**	**6**	**7**	**4**	**40**

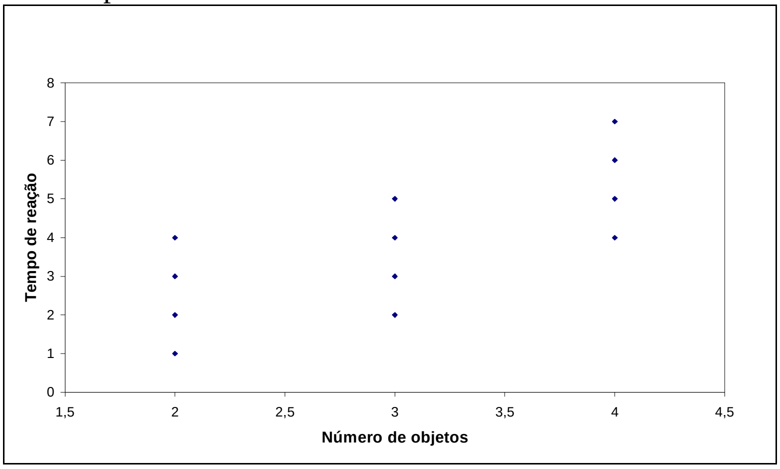
(yyyy) Como existem pontos que coincidiriam no caso de um diagrama de dispersão, pode-se representar os pontos coincidentes no gráfico com número de repetições. Outra alternativa, válida do ponto de vista descritivo é adicionar uma perturbação aos pontos. Soma-se uma quantidade pequena às coordenadas, de modo a não haver mais coincidências. A seguir, o gráfico com a perturbação:



(zzzz) O coeficiente de correlação entre X e Y é 0,59, indicando uma dependência linear moderada entre as variáveis.

Problema 13.

(aaaaa) Gráfico de dispersão



(bbbbb) O coeficiente de correlação entre as variáveis é 0,74.

Problema 14.

X: idade

Estado Civil	n	$\bar{x}$	dp(X)	var(X)	$x_{(1)}$	q_1	q_2	q_3	x_n
solteiro	**16**	**34,33**	**7,69**	**59,11**	**20,83**	**27,50**	**35,75**	**40,68**	**46,58**
casado	**20**	**35,63**	**5,95**	**35,36**	**26,08**	**31,37**	**34,91**	**39,81**	**48,92**
Total	**36**	**34,58**	**6,74**	**45,39**	**20,00**	**30,00**	**34,50**	**40,00**	**48,92**

$$\overline{\text{var}(X)} = \frac{16 \times 59{,}11 + 20 \times 35{,}36}{36} \cong 45{,}39$$

$$R^2 = \frac{\overline{\text{var}(X)}}{\text{var}(X)} = 1 - \frac{45{,}39}{45{,}39} = 0$$

Problema 15.

X: Nota em Estatística.

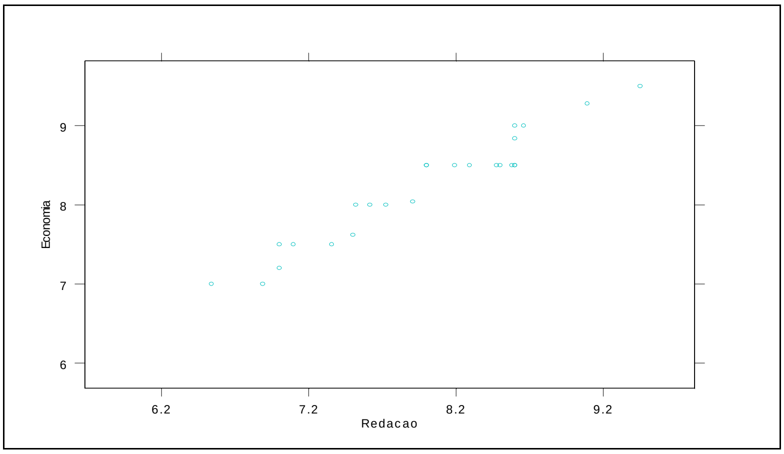
Seção	N	$\bar{x}$	dp(X)	var(X)	$x_{(1)}$	q_1	q_2	q_3	x_n
P	**7**	**8,71**	**0,75**	**0,57**	**8**	**8**	**9**	**9**	**10**
T	**7**	**8,29**	**1,11**	**1,24**	**7**	**7,5**	**8**	**9**	**10**
V	**11**	**7,91**	**1,64**	**2,69**	**4**	**7**	**8**	**9**	**10**
Total	**25**	**8,24**	**1,30**	**1,69**	**4**	**8**	**8**	**9**	**10**

$$\overline{\text{var}(X)} = \frac{7 \times 0{,}57 + 7 \times 1{,}24 + 11 \times 2{,}69}{25} = \frac{3{,}99 + 8{,}68 + 29{,}59}{25} = \frac{42{,}26}{25} = 1{,}69$$

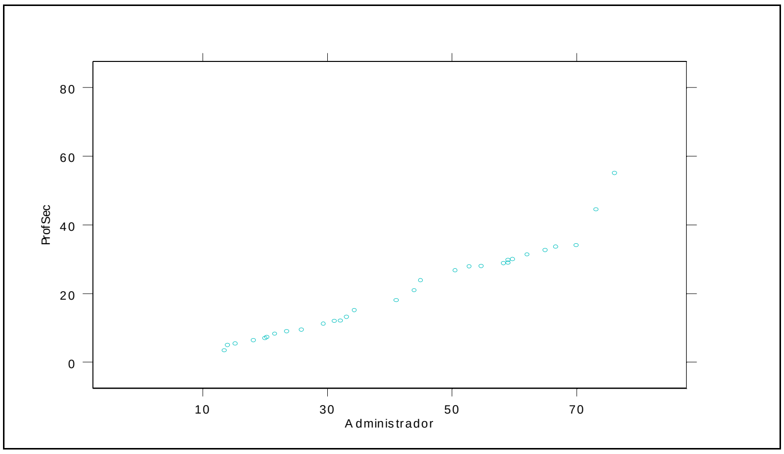
$$R^2 = \frac{\overline{\text{var}(X)}}{\text{var}(X)} = 1 - \frac{45{,}39}{45{,}39} = 0$$

Logo, Seção não serve para explicar nota.

Problema 16.



Problema 17.



Pode-se perceber que os pontos estão razoavelmente dispersos abaixo em relação a reta (x=y). Logo, parece que os salários dos professores secundários é menor que o dos administradores.

Problema 18.

(ccccc)

Estado Civil	Salário Menos de 10 SM	Entre 10 e 20 SM	Mais de 20 SM	Total
Solteiro	**0,12**	**0,19**	**0,09**	**0,40**
Casado	**0,08**	**0,31**	**0,21**	**0,60**
Total	**0,20**	**0,50**	**0,30**	**1,00**

(ddddd) Considere-se a tabela do total de colunas:

Estado Civil	Salário Menos de 10 SM	Entre 10 e 20 SM	Mais de 20 SM	Total
Solteiro	**0,60**	**0,38**	**0,30**	**0,40**
Casado	**0,40**	**0,62**	**0,70**	**0,60**
Total	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**

Pelas diferenças entre as proporções marginais e as do interior da tabela, parece haver relação entre as variáveis.

Problema 19.

(eeeee)

Opinião	Local de residência Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	**0,33**	**0,58**	**0,70**	**0,50**
Contra	**0,67**	**0,42**	**0,30**	**0,50**

(fffff) A opinião parece depender do local de residência do indivíduo.

Opinião	Local de residência Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	**30 (45)**	**35 (30)**	**35 (25)**	**100**
Contra	**60 (45)**	**25 (30)**	**15 (25)**	**100**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 5{,}00 + 5{,}00 + 0{,}83 + 0{,}83 + 4{,}00 + 4{,}00 = 19{,}66$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{19{,}66}{19{,}66 + 200}} = 0{,}30$$

Problema 20.

Considere a tabela com os valores observados e os esperados:

Propriedade	Atividade Costeira	Fluvial	Internacional	Total
Estatal	**5 (33,64)**	**141 (129,02)**	**51 (34,34)**	**197**
Particular	**92 (63,64)**	**231 (242,98)**	**48 (64,66)**	**371**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 24{,}38 + 1{,}11 + 8{,}08 + 12{,}64 + 0{,}59 + 4{,}29 = 51{,}09$$

Parece existir associação entre o tipo de atividade e propriedade das embarcações.

Problema 21.

Considere a tabela com os valores observados e esperados :

Participaram	Cidade			
	São Paulo	**Campinas**	**Rib. Preto**	**Santos**
Sim	**50 (64,76)**	**65 (80,95)**	**105 (97,14)**	**120 (97,14)**
Não	**150 (135,24)**	**185 (169,05)**	**195 (202,86)**	**180 (202,86)**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 3{,}36 + 3{,}14 + 0{,}64 + 5{,}38 + 1{,}61 + 1{,}50 + 0{,}30 + 2{,}58 = 18{,}51$$

Os dados da tabela indicam que a participação em atividades esportivas depende da cidade.

Problema 22.

(ggggg) Tabela dos totais de colunas.

Pretende continuar?	Classe social Alta	Classe social Média	Classe social Baixa	Total
Sim	**0,50**	**0,44**	**0,38**	**0,40**
Não	**0,50**	**0,56**	**0,72**	**0,60**

Há evidências de que a distribuição das respostas afirmativas e negativas não coincidem.

(hhhhh) Tabela dos valores observados e esperados:

Pretende continuar?	Classe social Alta	Classe social Média	Classe social Baixa	Total
Sim	**200 (160)**	**220 (200)**	**380 (440)**	**800**
Não	**200 (240)**	**280 (300)**	**720 (660)**	**1200**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 10{,}00 + 2{,}00 + 8{,}18 + 6{,}67 + 1{,}33 + 5{,}45 = 33{,}63$$

Existe dependência entre as variáveis.

(iiiii) Se houvesse tal modificação, a dependência entre as variáveis seria apenas menor ($\chi^2 = 7{,}01$).

Problema 23.

$$\frac{n_{11}}{n_{\cdot 1}} = \frac{30}{90} = 0{,}33 \quad \text{e} \quad \frac{n_{21}}{n_{\cdot 1}} = \frac{60}{90} = 0{,}67$$

$$\frac{n_{12}}{n_{\cdot 2}} = \frac{35}{60} = 0{,}58 \quad \text{e} \quad \frac{n_{22}}{n_{\cdot 2}} = \frac{25}{60} = 0{,}42$$

$$\frac{n_{13}}{n_{\cdot 3}} = \frac{35}{50} = 0{,}70 \quad \text{e} \quad \frac{n_{23}}{n_{\cdot 3}} = \frac{15}{50} = 0{,}30$$

Problema 24.

$$Corr(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_i\left[\left(\frac{x_i-\bar{x}}{dp(X)}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{dp(Y)}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_i\left[\frac{x_iy_i-x_i\bar{y}-y_i\bar{x}+\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2-n\bar{y}^2\right)\Big/ n^2}}\right]=$$

$$=\frac{\sum_i x_iy_i-\bar{y}\sum_i x_i-\bar{x}\sum_i y_i+n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}=\frac{\sum_i x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2-n\bar{y}^2\right)^2}}$$

Problema 25.

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é -0,92, indicando forte correlação linear entre as variáveis.

$$Corr(X,Y)=\frac{53-5\times(3,2)\times(4,4)}{\sqrt{\left[62-5\times(3,2)^2\right]\times\left[130-5\times(4,4)^2\right]}}=-\frac{17,4}{18,93}=-0,92$$

Problema 26.

Pode-se calcular, com os dados fornecidos, $Corr(X,Y)=0,95$ e $Corr(X,Z)=0,71$. Como o valor mais alto encontrado é 0,95, a variável Y é a mais indicada para explicar a variação de X.

Problema 27.

(jjjjj)

	Salário		
Idade	**[0,15)**	**[15,30)**	**Total**
[0,30)	**4**	**4**	**8**
[30,40)	**6**	**12**	**18**
[40,50)	**3**	**7**	**10**
Total	**13**	**23**	**36**

(kkkkk) O cálculo do coeficiente de correlação neste caso, poderia ser feito utilizando-se os pontos médios de cada categoria.

(lllll) Com a idéia que foi descrita no item anterior, o cálculo do coeficiente de correlação agrupados poderia ser feito com a fórmula usual, onde haveria 4 pares (15;7,5) repetidos, 6 pares (35;7,5) repetidos, etc. Assim a fórmula seria:

$$Corr(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}\frac{\left[n_i\left(x_i-\bar{x}\right)\right]}{dp(X)}\frac{\left[n_i\left(y_i-\bar{y}\right)\right]}{dp(Y)}$$

onde x_i, y_i são os pontos médios, $n_1=n_2=4$, $n_3=6$, $n_4=12$, $n_5=3$, $n_6=7$

Problema 28.

(mmmmm) Tabela dos valores observados e dos observados:

	Cara	**Coroa**	**Total**

Cara	**24 (23,92)**	**22 (22,08)**	**46**
Coroa	**28 (28,08)**	**26 (25,92)**	**54**
Total	**52**	**48**	**100**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0{,}0002 + 0{,}0002 + 0{,}0002 + 0{,}0002 = 0{,}0008$$

Logo, não há associação entre os resultados das moedas de um real e de um quarto de dólar.

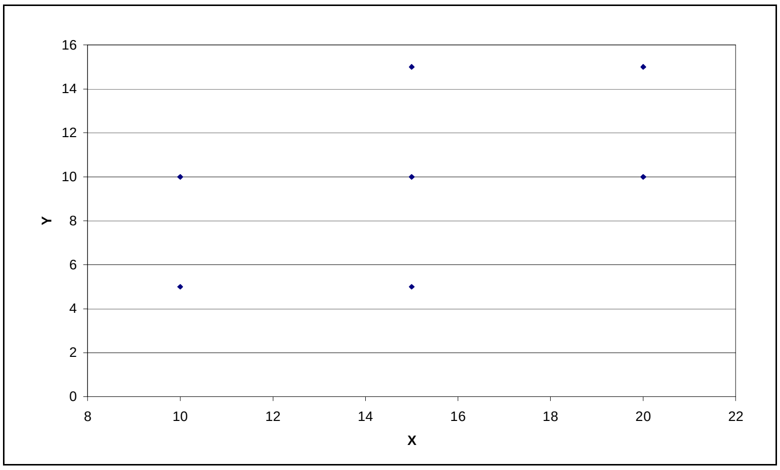
(nnnnn) O coeficiente de correlação linear entre as variáveis X_1 e X_2 é 0, pois X_1 e X_2 são independentes. Esse resultado está de acordo com o resultado do item anterior.

Problema 29.

(ooooo) O salário anual médio dos homens é 15 e o desvio-padrão 3,87.

(ppppp) O salário anual médio das mulheres é 10 e o desvio-padrão 3,16.

(qqqqq)



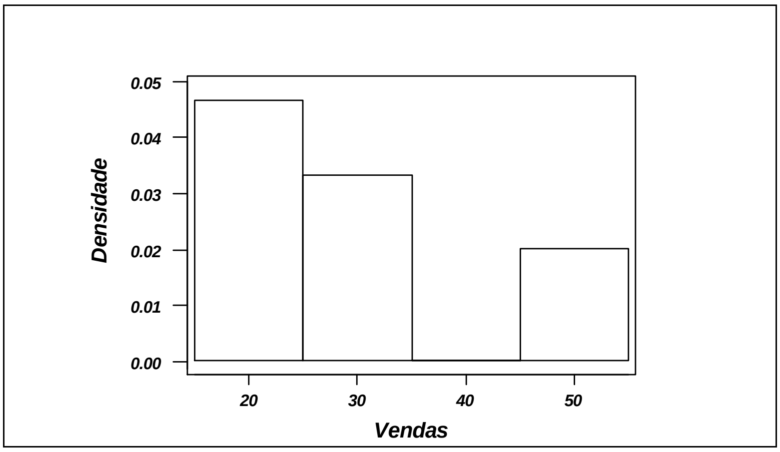
(rrrrr) $Corr(X,Y) = \dfrac{1550 - 1500}{\sqrt{[2400 - 2250] \times [1100 - 1000]}} = 0{,}41$

(sssss) O salário médio familiar é 25. A variância do salário familiar é 35.

(ttttt) Descontando 8% dos salários de todos os homens da amostra e 6% do salário de todas as mulheres, o salário médio familiar cai para 23,2 e a variância vai a 30,18.

Problema 30.

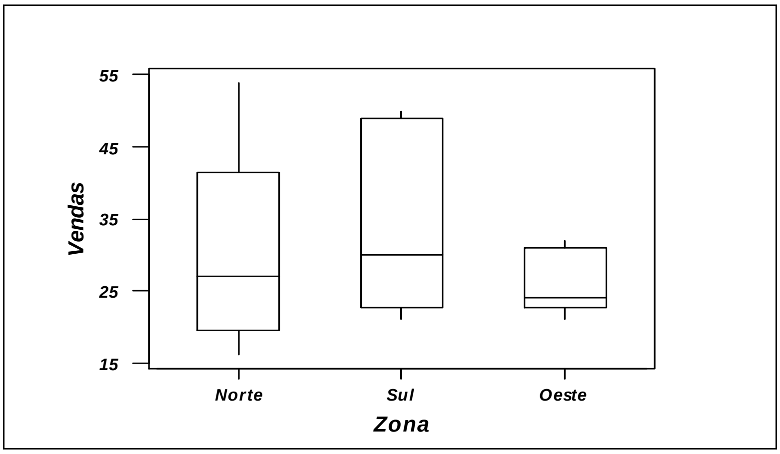
(uuuuu) Histograma



(vvvvv) A média da variável V é 30,2 e a variância 130,6. Como dp(V)=11,43, $\bar{v} + 2dp(V) = 53{,}05$ é o limite para se considerar um vendedor excepcional. Acima desse valor, há apenas 1 dentre os 15 indivíduos analisados.

(wwwww) O primeiro quartil da distribuição de V é 23,5.

(xxxxx) Os box-plots a seguirindicam que existe alguma diferença entre a distribuição das vendas nas três diferentes zonas. Assim, não é justo aplicar um mesmo critério para todas as zonas.



(yyyyy) $Corr(T,V) = 0{,}71$, $Corr(E,V) = 0{,}26$, logo a variável teste parece ser a mais importante na contratação de um empregado.

(zzzzz)

Conceito do gerente	Zona			Total
	Norte	Sul	Leste	
Bom	**4 (2,7)**	**3 (2,7)**	**1 (2,7)**	**8**
Mau	**1 (2,3)**	**2 (2,3)**	**4 (2,3)**	**7**
Total	**5**	**5**	**5**	**15**

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 3{,}76$$

Logo, existe uma baixa associação entre o Conceito do gerente e a Zona.

(aaaaaa) Considere X: resultado do teste.

Conceito do gerente	n	média	dp	var
Bom	**8**	**6,00**	**2,14**	**4,57**
Mau	**7**	**6,14**	**1,68**	**2,81**
Total	**15**	**6,07**	**1,87**	**3,50**

$$\overline{\text{var}(X)} = \frac{8 \times 4{,}57 + 7 \times 2{,}81}{15} \cong 3{,}50$$

$$R^2 = \frac{\overline{\text{var}(X)}}{\text{var}(X)} = 1 - \frac{3{,}50}{3{,}50} = 0$$

Considere agora X: vendas:

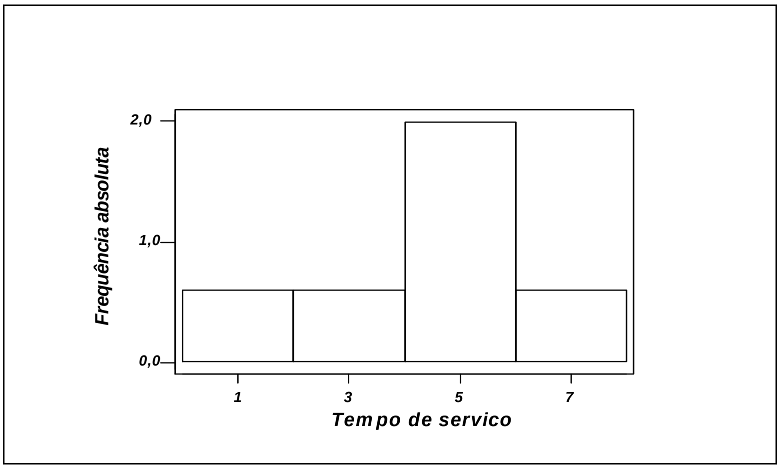
Zona	n	média	dp	var
Norte	**5**	**29,8**	**14,4**	**207,7**
Sul	**5**	**34,6**	**13,56**	**183,8**
Oeste	**5**	**26,2**	**4,6**	**21,2**
Total	**15**	**30,2**	**11,43**	**130,6**

$$\overline{\text{var}(X)} = \frac{5 \times 207{,}7 + 5 \times 183{,}8 + 5 \times 21{,}2}{15} \cong 130{,}5$$

$$R^2 = \frac{\overline{\text{var}(X)}}{\text{var}(X)} = 1 - \frac{130{,}5}{130{,}6} = 0{,}0008$$

Problema 31.

(bbbbbb)

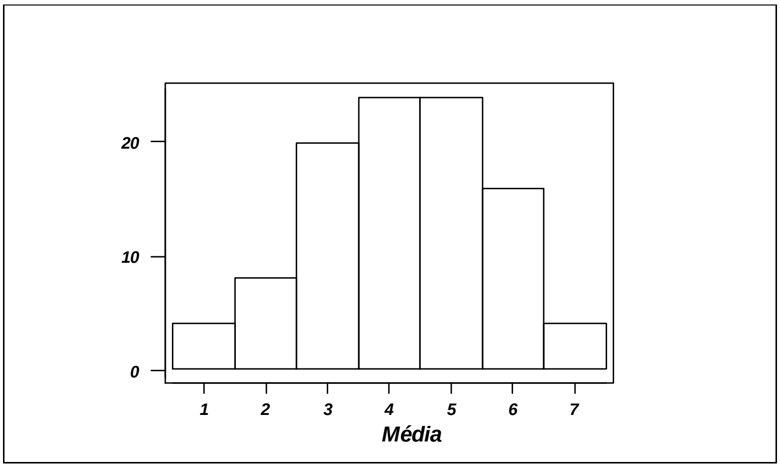


(cccccc) $me(X) = 4{,}2$; $md(X) = 5{,}0$; $\text{var}(X) = 5{,}2$

(dddddd) (A,A),..., (A,E), (B,A),..., (B,E), (C,A),..., (C,E), (D,A),..., (D,E), (E,A),...,(E,E)

(eeeeee)

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	6	7
Freq.	**0,04**	**0,08**	**0,20**	**0,24**	**0,24**	**0,16**	**0,04**

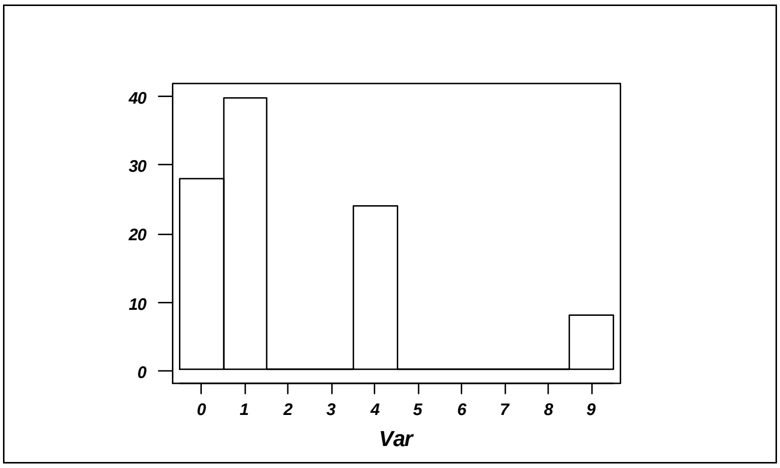


(ffffff) $me(\overline{X}) = 4,2$; $md(\overline{X}) = 4,0$; $\text{var}(\overline{X}) = 2,6$

Vemos que $me(\overline{X}) = me(X)$ e $\text{var}(\overline{X}) = \dfrac{\text{var}(X)}{2}$

(gggggg)

S^2	0	1	4	9
Freq.	$\frac{7}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{25}$



(hhhhhh) $me(S^2) = 2,08$; $\text{var}(S^2) = 6,39$.

(iiiiii)

	X_2				
X_1	1	3	5	7	Total
1	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**
3	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**

5	**0,08**	**0,08**	**0,16**	**0,08**	**0,40**
7	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**
Total	**0,20**	**0,20**	**0,40**	**0,20**	**1,00**

(jjjjjj) As variáveis são independentes, pois $P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i)) \times P(X_2 = j)$

(kkkkkk) São iguais entre si e à distribuição de X.

(llllll)Não tem esse item.

(mmmmmm) Teremos 5^3=125 triplas.

(nnnnnn) Histograma mais próximo de uma normal; $me(\overline{X}) = me(X)$, $\text{var}(\overline{X}) = \text{var}(X)$

(oooooo) Histograma com assimetria à direita.

(pppppp) Distribuições marginais iguais à distribuição de X.

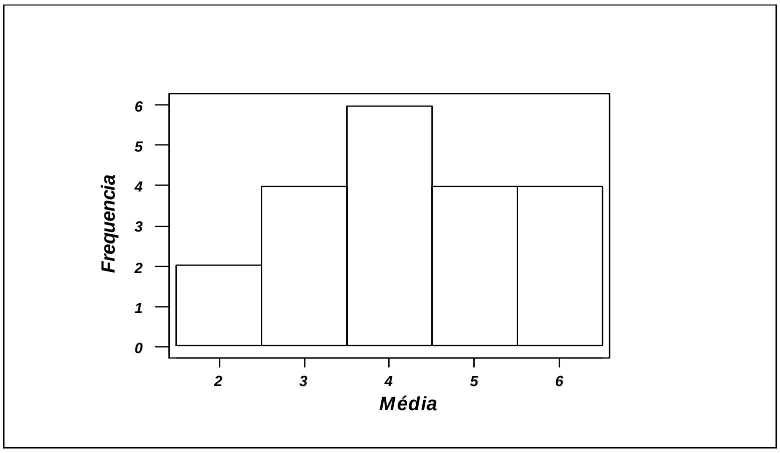
Problema 32.

(qqqqqq) Não tem.

(rrrrrr) Não tem.

(ssssss) (A,B),..., (A,E), (B,A),..., (B,E), (C,A),..., (C,E), (D,A),..., (D,E), (E,A),...,(E,D)

$\overline{X}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Freq.	**0,10**	**0,20**	**0,30**	**0,20**	**0,20**

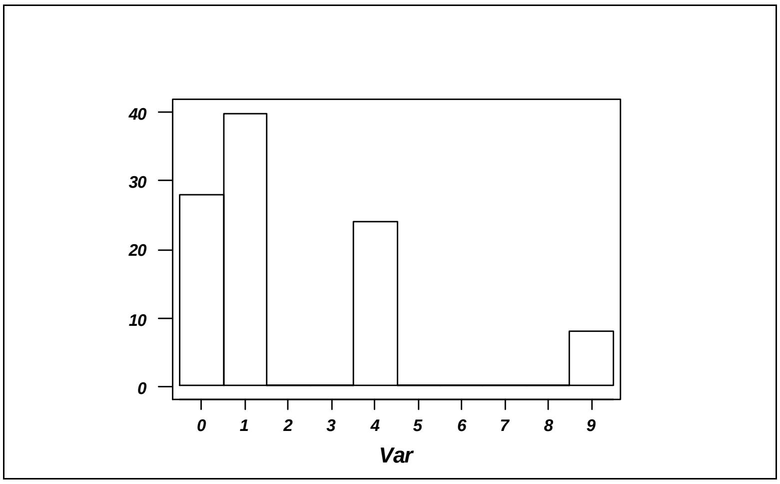


(tttttt) $me(\overline{X}) = 4{,}2$; $md(\overline{X}) = 4{,}0$; $\text{var}(\overline{X}) = 1{,}6$

Vemos que $me(\overline{X}) = me(X)$

(uuuuuu)

S^2	**0**	**1**	**4**	**9**
Freq.	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$



(vvvvvv) $me(S^2) = 2{,}60$; $\text{var}(S^2) = 6{,}64$.

X_1	X_2 1	3	5	7	Total
1	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**
3	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**
5	**0,08**	**0,08**	**0,16**	**0,08**	**0,40**
7	**0,04**	**0,04**	**0,08**	**0,04**	**0,20**
Total	**0,20**	**0,20**	**0,40**	**0,20**	**1,00**

(wwwwww) As variáveis são independentes, pois $P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i)) \times P(X_2 = j)$

(xxxxxx) São iguais entre si e à distribuição de X.

(yyyyyy) Não tem esse item.

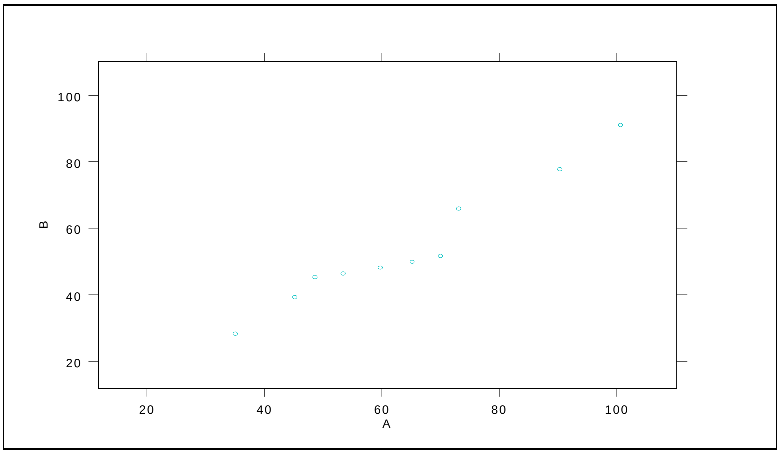
(zzzzzz) Teremos 60 triplas.

(aaaaaaa) Histograma mais próximo de uma normal; $me(\overline{X}) = me(X)$, $\text{var}(\overline{X}) = \text{var}(X)$

(bbbbbbb) Histograma com assimetria à direita.

(ccccccc) Distribuições marginais iguais à distribuição de X.

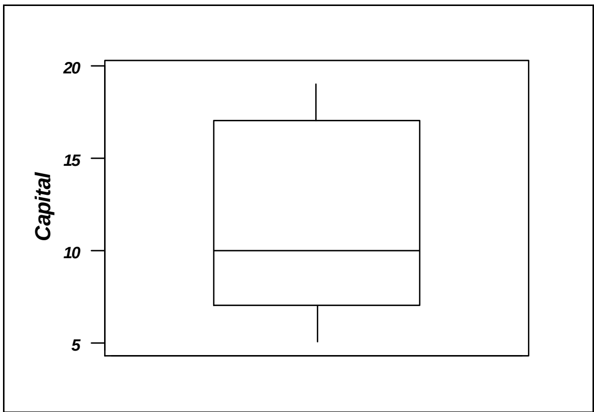
Problema 34.



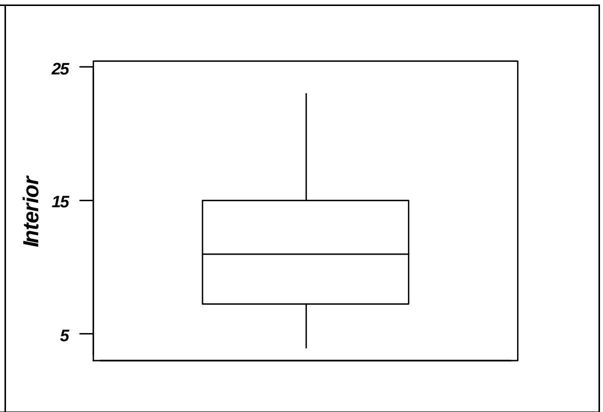
Problema 35.

Dotplot para as regiões de procedência:

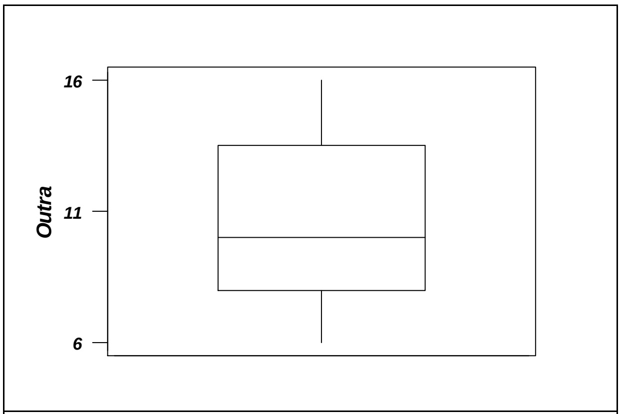
```
     .   :     .      .            .   .     :
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Capital
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0

     :   .  .      :     .      :      .
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Interior
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0


  :  .      :  .   .  .  .   :     .
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Outra
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0
```



BoxPlot - Capital



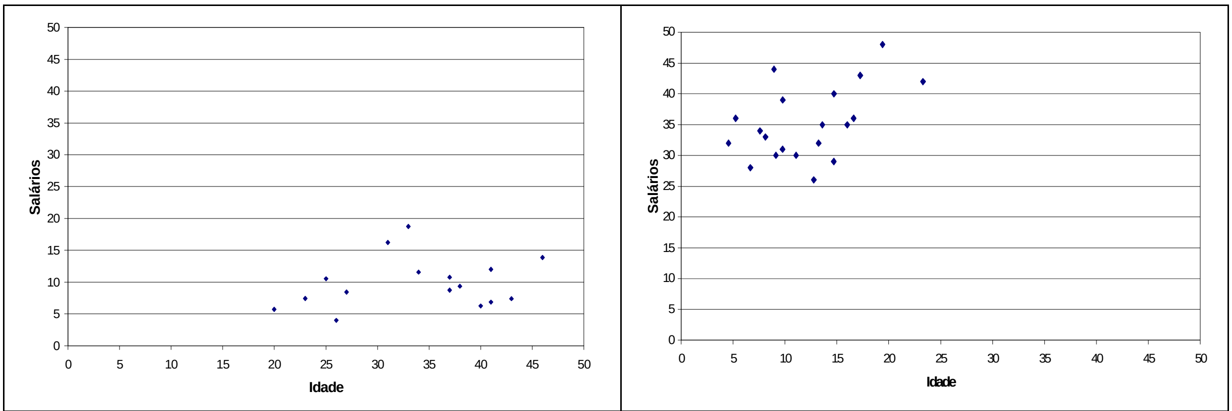
BoxPlot – Interior



BoxPlot - Outra

Pode-se observar que os salários da Capital têm variabilidade maior e distribuição mais assimétrica. As médias e medianas são similares.

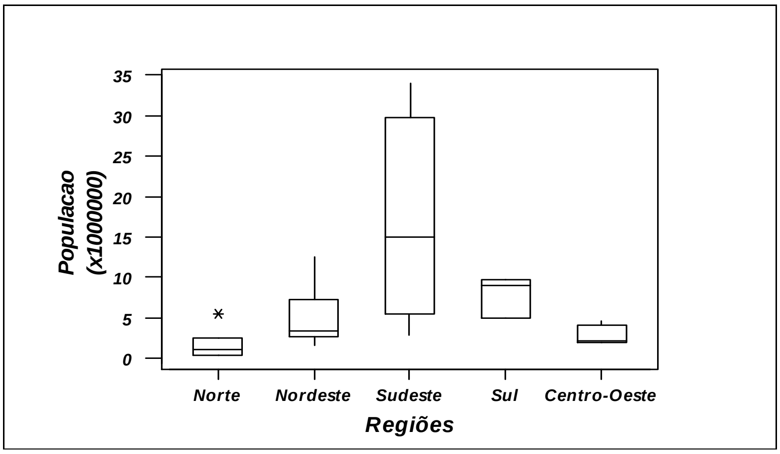
Problema 36.



Solteiros | Casados

Os gráficos de dispersão não mostram tendências particulares.

Problema 37.



Os boxplots acima mostram que todas as distribuições são assimétricas, sendo que a região Sul se destaca pelo seu aspecto peculiar. A região Sudeste tem variabilidade maior, pela inclusão do estado de São Paulo, que é bastante populoso.

Problema 38.

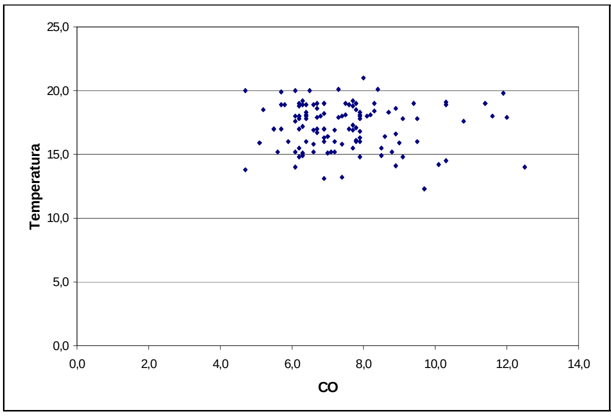
Telebrás	Ibovespa		Total
	Baixa	Alta	
Baixa	**14 (5,4)**	**0 (8,6)**	**14**
Alta	**1 (9,6)**	**24 (15,4)**	**25**
Total	**15**	**24**	**39**

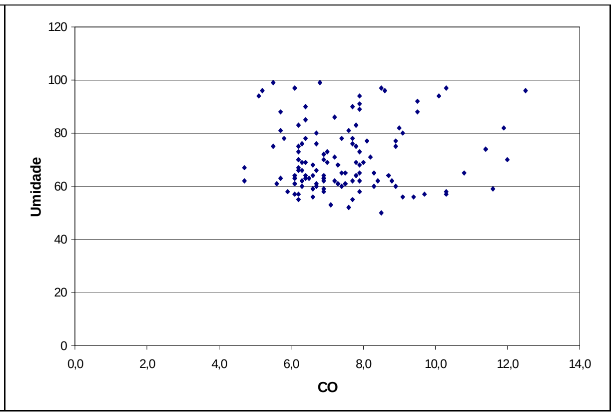
$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 34{,}83$$

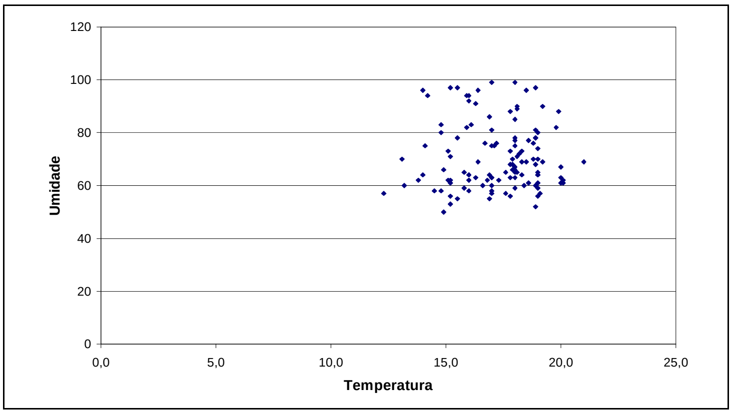
$$T = \sqrt{\frac{\chi^2 / n}{(r-1)\times(s-1)}} = 0{,}945$$

Logo, percebe-se grande associação entre os preços das ações da Telebrás e Ibovespa.

Problema 39.







Capítulo 05

Problema 01.

Representando por C a ocorrência cara e por V a ocorrência de coroa no arremesso, e também por B a retirada de bola branca e por V a retirada de bola vermelha, um espaço amostral para este experimento pode ser descrito por

$\Omega = \{BC, BR, VB, VV\}$

Problema 02.

O espaço amostral para esse experimento é um conjunto infinito. Seja 5 a representação da ocorrência da face 5 e Q a representação de outra face qualquer do dado. Então o experimento tem um espaço amostral dado por

$\Omega = \{5, Q5, QQ5, QQQ5, \ldots\}$

Problema 03.

Os resultados possíveis desse torneio de tênis constituem o espaço amostral de um experimento que consiste em verificá-los. Desse modo, podemos representar esse conjunto da seguinte forma:

$\Omega = \{AA, ACC, ACBB, ACBA, BB, BCC, BCAA, BCAB\}$

Problema 04.

Dois possíveis espaços amostram para o experimento podem ser obtidos através de maneiras diferentes de definir os pontos amostrais do experimento:

- designando C para cara e R para coroa, temos um primeiro espaço amostral, $\Omega_1 = \{CC, CR, RC, RR\}$;
- se cada ponto amostral ω representa o número de caras nos lançamentos, um outro espaço amostral é descrito por $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$.

Podemos representar Ω_1 como produto cartesiano da seguinte forma:

$\Omega_1 = \{C, R\} \times \{C, R\}$

Problema 05.

Usando a mesma representação dos problemas anteriores,

$\Omega = \{(C,1), (C,2), \ldots, (C,6), (R,1), \ldots, (R,6)\} = \{C, R\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

Problema 06.

(ddddddd) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$

(eeeeeee) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, em que M é o número máximo de peças defeituosas.

(fffffff) Representando por M a ocorrência de uma criança do sexo masculino e por F a ocorrência de uma criança do sexo feminino, temos:

$\Omega = \{(\mathrm{M,M,M}), (\mathrm{M,M,F}), (\mathrm{M,F,M}), (\mathrm{F,M,M}), (\mathrm{M,F,F}), (\mathrm{F,M,F}), (\mathrm{F,F,M}), (\mathrm{F,F,F})\}$

(ggggggg) Sendo S (sim) e N (não), segue o espaço amostral do experimento:

$\Omega = \{(\mathrm{N,N,N}, \ldots, \mathrm{N}), (\mathrm{S,N,N}, \ldots, \mathrm{N}), \ldots, (\mathrm{S,S,N}, \ldots, \mathrm{N}), \ldots, (\mathrm{S,S,S}, \ldots, \mathrm{S})\}$

(hhhhhhh) O espaço amostral desse experimento é contínuo, dado por
$\Omega = \{t \in \mathrm{R},\, t > 0\}$

(iiiiiii) $\Omega = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$

(jjjjjjj) Outro exemplo de espaço amostral dado por um conjunto infinito:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(kkkkkkk) $\Omega = \{0°, 6°, 12°, \ldots, 354°\}$

(lllllll) $\Omega = [0°, 360°)$ (espaço amostral contínuo)

(mmmmmmm) $\Omega = \{(A, A), (A, B), \ldots, (A, E), (B, A), (B, B), \ldots, (E, A), (E, B), \ldots, (E, E)\}$

(l) $\Omega = \{ (A, B), (A, C), \ldots, (A, E), (B, A), (B, C), \ldots, (E, A), (E, B), \ldots, (E, D)\}$

(m) $\Omega = \{ (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

(n) Denotando cada estado civil por: S (solteiro), Ca (casado) e V (viúvo), temos
$\Omega = \{(A, S), (A, Ca), (A, V), (B, S), (B, Ca), (B, V), (C, S), (C, Ca), (C, V), (D, S),$
$(D, Ca), (D, V)\}.$

Problema 07.

(o) $\{CC, CR, RC\}$

(p) $\{CC\}$

(q) $\{CR, RC, RR\}$

Problema 08.

(r) $A \cap B^c$

(s) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

(t) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Problema 09.

(u) $\sum_{i=1}^{8} P(\omega_i) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) = 1$

(v) $P(A \text{ vencer}) = P(AA \cup BCAA) = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$ (no lugar da vírgula, sinal de união)

$P(B \text{ vencer}) = P(BB \cup ACBB) = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$

(w) $P(\text{não haver decisão}) = P(ACBA \cup BCAB) = \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)$

Problema 10.

(x) Usando o que segue,

Resultado: Se $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *for uma PG (progressão geométrica) infinita de razão q, |q| < 1, então a soma de seus termos é dada por* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \frac{a_0}{1-q}$,

temos $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-5/6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1/6}\right) = 1$.

(y) Nesse caso, $k = 2$, e então

$$P(\text{face 5 após três lançamentos do dado}) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216} \cong 0{,}12$$

Problema 11.

$$P(\text{dois números de mesmo sinal}) = P(\text{dois positivos}) + P(\text{dois negativos}) =$$
$$= \left(\frac{6}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{8}{14}\right)\left(\frac{7}{13}\right) = \frac{43}{91} \cong 0{,}47$$

Problema 12.

$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$B = \{(4,1), \ldots,(4,6),(5,1),\ldots,(5,6),(6,1),\ldots,(6,6)\}$

$A \cup B = \{(3,6),(4,1), \ldots,(4,6),(5,1),\ldots,(5,6),(6,1),\ldots,(6,6)\}$

$A \cap B = \{(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$A^c = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),$
$(3,4),(3,5), (4,1),(4,2),(4,3),(4,4), (4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,4),$
$(6,5),(6,6)\}$

Problema 13.

Do Problema 07:

(z) $P(\text{pelo menos uma cara}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(aa) $P(\text{duas caras}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(bb) Seja E o evento “ocorrem duas caras”. Então, $P(E^c) = 1 - P(\text{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Do Problema 12:

Se o espaço amostral do experimento (lançamento de dois dados) tem 36 pontos amostrais, então,

- $P(\text{A}) = \frac{4}{36} \cong 0{,}11$;
- $P(\text{B}) = \frac{18}{36} = 0{,}50$;

- $P(A \cup B) = \dfrac{19}{36} \cong 0{,}53$;
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{36} \cong 0{,}08$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = \dfrac{32}{36} \cong 0{,}89$.

Problema 14.

(a) O dado não deve ser viciado, ou seja, todas as faces estão equilibradas.

(b) Devemos ter para cada alternativa de resposta a mesma quantidade de opiniões de moradores, por exemplo, 50% a favor e 50% contra se existirem apenas duas alternativas.

(c)

Problema 15.

(cc) Seja P a ocorrência de bola preta, e V a ocorrência de bola vermelha. Então,

Resultado	Probabilidade
PP	$(3/8)(2/7) = 3/28 \cong 0{,}107$
PV	$15/56 \cong 0{,}268$
VP	$15/56 \cong 0{,}268$
VV	$3/28 \cong 0{,}107$

(dd) Usando a mesma notação,

Resultado	Probabilidade
PP	$(3/8)(3/8) = 9/64 \cong 0{,}141$
PV	$15/64 \cong 0{,}234$
VP	$15/64 \cong 0{,}234$
VV	$25/64 \cong 0{,}391$

Problema 16.

(ee) Sem reposição:
$P(\text{bola preta na primeira e na segunda extrações}) \cong 0{,}107$
Com reposição:
$P(\text{bola preta na primeira e na segunda extrações}) \cong 0{,}141$

(ff) Sem reposição

$$P(\text{bola preta na segunda extração}) = \left(\frac{3}{28}\right) + \left(\frac{15}{56}\right) = \frac{21}{56} = 0{,}375$$

Com reposição:

$$P(\text{bola preta na segunda extração}) = \left(\frac{9}{64}\right) + \left(\frac{15}{64}\right) = 0{,}375$$

(gg) Sem reposição

$$P(\text{bola vermelha na primeira extração}) = \left(\frac{15}{56}\right) + \left(\frac{5}{14}\right) = 0{,}625$$

Com reposição:

$$P(\text{bola vermelha na primeira extração}) = \left(\frac{15}{64}\right) + \left(\frac{25}{64}\right) = 0{,}625$$

Problema 17.

Sejam os eventos *A*: A resolve o problema, e *B*: B resolve o problema. Como trabalham independentemente, temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12} \cong 0{,}92$$

Problema 18.

Como a probabilidade de sair um certo ponto é proporcional ao seu valor, digamos que a constante de proporcionalidade é *k*, e então vamos encontrar o valor de *k:*

$$P(j) = k.j \ , \ j = 1, \ldots, 6.$$

$$\sum_{j=1}^{6} P(j) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{6} k.j = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{21}$$

(hh) Utilizando o conceito de probabilidade condicional,

$$P(5 \mid \text{ímpar}) = \frac{P(5 \cap \text{ímpar})}{P(\text{ímpar})} = \frac{P(5)}{P(\text{ímpar})} = \frac{5.(1/21)}{P(1)+P(3)+P(5)} =$$

$$= \frac{5/21}{(1/21)+(3/21)+(5/21)} = \frac{5}{9} \cong 0{,}56$$

(ii) Novamente, aplicando probabilidade condicional,

$$P(\text{par} \mid > 3) = \frac{P(\text{par} \cap > 3)}{P(>3)} = \frac{P(4)+P(6)}{P(4)+P(5)+P(6)} = \frac{(6+4).(1/21)}{(4+5+6).(1/21)} = \frac{10}{15} \cong 0{,}67$$

Problema 19.

(jj) $(1-p)(1-q)$, pois se A e B são independentes, A^c e B^c também são independentes.

(kk) $p + q - pq$ (probabilidade da união de dois eventos independentes).

Problema 20.

Os componentes 2 e 3 funcionam em paralelo entre si e em série com o componente 1. Assim, a confiabilidade desse sistema é dada por

$$P(\text{sistema funcionar}) = h(p_1, p_2, p_3) = P((1 \text{ e } 2) \text{ ou } (1 \text{ e } 3)) = p_1(p_2 + p_3 - p_2 p_3)$$

Problema 21.

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A)P(B) = P(A \cap B)$. Nesse caso, $P(A)P(B) = 0{,}10 . 0{,}12 = 0{,}012 \neq 0{,}04 = P(A \cap B)$. Portanto, os eventos A e B não são independentes.

Problema 22.

Os componentes 1 e 2 funcionam em série, bem como os componentes 3 e 4. Os sub-sistemas formados funcionam em paralelo. Assim,

$$P(\text{sistema funcionar}) = h(p) = P((1 \text{ e } 2) \text{ ou } (3 \text{ e } 4)) = p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2)$$

Problema 23.

Sejam os eventos:

- D o circuito escolhido não funciona;
- I: o circuito escolhido é feito na fábrica I;
- II: o circuito escolhido é feito na fábrica II;
- III: o circuito escolhido é feito na fábrica III.

São dados do problema:

$$P(D \mid I) = 0{,}01,\ P(D \mid II) = 0{,}04,\ P(D \mid III) = 0{,}03,\ P(I) = 0{,}40,\ P(II) = 0{,}30 \text{ e } P(III) = 0{,}30.$$

Assim,

$$P(D) = P(D \mid I)\, P(I) + P(D \mid II)\, P(II) + P(D \mid III) P(III) =$$
$$= (0{,}01)(0{,}40) + (0{,}04)(0{,}30) + (0{,}03)(0{,}30) = 0{,}025$$

Problema 24.

Utilizando a mesma notação, temos

$$P(I \mid D) = \frac{P(I)\ P(I \mid D)}{P(D)} = \frac{(0{,}40)(0{,}01)}{0{,}025} = 0{,}16$$

Problema 25.

Sejam os eventos:

- U_i : seleciona - se a urna i ;
- B_{ij} **:** é retirada uma bola branca da urna i, na extração j $(i, j = 1{,}2)$;
- E **:** retira - se, na segunda extração, uma bola branca da mesma urna da primeira extração.

Supondo que a primeira e a segunda extrações sejam independentes, temos

$$P(E) = P(B_{12} \mid B_{11}) P(U_1) + P(B_{22} \mid B_{21}) P(U_2) =$$
$$= P(B_{12}) P(B_{11})\ P(U_1) + P(B_{22})\ P(B_{21})\ P(U_2) =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}305$$

Problema 26.

Construindo uma tabela com os dados do problema, temos

	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Salada (A)	0,150	0,175	0,325
Carne (B)	0,600	0,075	0,675
Total	0,750	0,250	1,000

(ll) $P(H) = 0{,}75$

$P(A\,|\,H) = 0{,}20$

$P(B\,|\,M) = 0{,}30$

(mm) $P(A \cap H) = P(A\,|\,H)P(H) = (0{,}20)(0{,}75) = 0{,}15$

$P(A) = P(A\,|\,H)\,P(H) + P(A\,|\,M)\,P(M) =$

$= (0{,}20)(0{,}75) + (0{,}70)(0{,}25) = 0{,}325\,.$

$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) =$

$= 0{,}325 + 0{,}750 - 0{,}150 = 0{,}925$

(nn) $$P(M\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,M)\,P(M)}{P(A)} = \frac{(0{,}70)(0{,}25)}{0{,}325} = \frac{175}{325} \cong 0{,}538$$

Problema 27.

Abaixo, construímos a tabela com as freqüências relativas:

	Homens	Mulheres	Total
Usaram o hospital	0,050	0,075	0,125
Não usaram o hospital	0,450	0,425	0,875
Total	0,500	0,500	1,000

(oo) $P(\text{pessoa segurada use o hospital}) = \dfrac{250}{2000} = 0{,}125$

(pp) Não, pois

$$P(\text{usar o hospital}\,|\,\text{homem}) = \frac{100}{1000} = 0{,}100 \neq P(\text{pessoa segurada use o hospital})$$

Problema 28.

Sejam os eventos:

- A: o motorista A sofre acidente;
- B: o motorista B sofre acidente;
- C: o motorista C sofre acidente.

Suponha que esses eventos sejam independentes. Tem-se que "todos os três motoristas sofrem acidentes" pode ser escrito como $A \cap B \cap C$ e "pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo" equivale a $A^c \cup B^c \cup C^c$. Assim,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

$$P(A^c \cup B^c \cup C^c) = P([A \cap B \cap C)]^c) = 1 - P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{5} = 0{,}60$$

Problema 29.

Representando por B uma lâmpada boa e por D uma lâmpada defeituosa, há três configurações possíveis para que a segunda lâmpada defeituosa seja encontrada no quarto teste: *DBBD*, *BDBD* e *BBDD*.

Os testes são feitos sem reposição das lâmpadas testadas. Assim, se X for o número de testes necessários para encontrar a segunda lâmpada defeituosa, tem-se que

$$P(X = 4) = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{28} \cong 0{,}107$$

Problema 30.

Sejam os eventos E_i = ganhar na loteria i, (i = 1, 2). Suponha que estes eventos sejam independentes. Então

(qq) $P(\text{ganhar exatamente um prêmio}) = P([E_1 \cap E_2^c] \cup [E_2 \cap E_1^c]) =$

$$= \left(\frac{100}{10000}\right)\left(\frac{4900}{5000}\right) + \left(\frac{100}{5000}\right)\left(\frac{9900}{10000}\right) = 0{,}0296$$

(rr) $P(\text{ganhar alguma coisa}) = P(E_1 \cup E_2) = 0{,}01 + 0{,}02 - (0{,}01)(0{,}02) =$

$= 0{,}03 - 0{,}0002 = 0{,}0298$

Problema 31. **Foi usada a binomial**

Seja X o número de segurados vivos daqui a 30 anos. Suponha independência e que o valor 2/3 (probabilidade de cada um deles estar vivo daqui a 30 anos) permaneça por todo o período.

(ss) Uma combinação possível para que dois estejam vivos daqui a 30 anos é VVMMM, onde V indica estar viva e M que ela está morta. Pelas informações do problema temos que

$\mathrm{P(VVMMM)} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$, porém, podemos ter também outras combinações como VMVMM com a mesma probabilidade. Podemos construir 10 dessas combinações, ou seja, as duas letras V podem combinar-se em 10 possibilidades pelas 5 posições. Esse número é representado pela combinação de 5 elementos dois a dois, ou seja, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$. Desse modo, a resposta final será:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243} \cong 0{,}165$$

(tt) $P(X = 5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \cong 0{,}132$

(uu) $P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243} \cong 0{,}329$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{243} \cong 0{,}329$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} \cong 0{,}790$$

Problema 32.

(vv) Se ele não possui habilidades especiais, pode-se supor que a resposta seja dada para a marca A ou para a marca B com igual probabilidade. Assim, se as tentativas são independentes, a probabilidade de se acertar três vezes em três tentativas é dada por $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

(ww) Se a probabilidade de se distinguir corretamente for de 90% em cada tentativa, e se as tentativas são independentes, a probabilidade de três acertos é $(0{,}90)^3 = 0{,}729$.

Problema 33.

Vamos designar por H o evento "foi sorteado um homem", e por M o evento "foi sorteada uma mulher".

(xx) $P(H^c H^c H^c) = P(MMM) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{14}{285} \cong 0{,}049$

(yy) $P(HMM, MHM, MMH) = 3\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{8}{19}\right)\left(\frac{7}{18}\right) = \frac{28}{95} \cong 0{,}295$

(zz) $P(HHM, HMH, MHH) = 3\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{11}{19}\right)\left(\frac{8}{18}\right) = \frac{44}{95} \cong 0{,}463$

Problema 34.

Sejam os eventos A: ganhar a concorrência da parte elétrica e B: ganhar a concorrência da parte de encanamento. A partir das informações do problema, temos

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B \mid A) = \frac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad P(B \mid A^c) = \frac{1}{3}.$$

Com isso,

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{24} \quad \text{e}$$

(aaa) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

(bbb) $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) =$

$$= P(A)P(B^c \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{24} \cong 0{,}292$$

(ccc) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{13}{24} - \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{3} \cong 0{,}333$$

Problema 35.

Supondo que as próximas 4 unidades sejam vendidas independentemente, a probabilidade de que duas sejam devolvidas é dada por

$$\binom{4}{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^2 \cong 0{,}0135$$

Problema 36.

Seja X o número de alarmes que funcionam quando necessário.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}10)^3 = 0{,}999$$

Problema 37.

Sendo D o evento "o parafuso encontrado é defeituoso", temos

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$$
$$= (0{,}05)(0{,}25) + (0{,}04)(0{,}35) + (0{,}02)(0{,}40) = 0{,}0345$$
$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{(0{,}05)(0{,}25)}{0{,}0345} \cong 0{,}36$$
$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{(0{,}04)(0{,}35)}{0{,}0345} \cong 0{,}41$$
$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{(0{,}02)(0{,}40)}{0{,}0345} \cong 0{,}23$$

Problema 38

Seja X: número de peças com duração inferior a 20 horas. Usando os mesmos argumentos usados no problema 31 podemos escrever:

(ddd) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$$= 1 - \left[(0{,}95)^{10} + 10(0{,}05)(0{,}95)^9\right] \cong 0{,}086$$

(eee) $P(X \leq 1) = \left[(0{,}90)^{10} + 10(0{,}10)(0{,}90)^9\right] \cong 0{,}736$

Problema 39.

Vamos indicar a ordem de compra dos carros através de índices ao lado das marcas. São dados $P(W_1) = 0{,}50$, $P(F_1) = 0{,}30$ e $P(X_1) = 0{,}20$.

(fff) Temos que

$$P(W_3) = P(W_3|W_2)P(W_2) + P(W_3|F_2)P(F_2) + P(W_3|X_2)P(X_2).$$

Mas

$$P(W_2) = P(W_2|W_1)P(W_1) + P(W_2|F_1)P(F_1) + P(W_2|X_1)P(X_1) =$$
$$= (0{,}50)(0{,}50) + (0{,}15)(0{,}30) + (0{,}30)(0{,}20) = 0{,}355;$$
$$P(F_2) = P(F_2|W_1)P(W_1) + P(F_2|F_1)P(F_1) + P(F_2|X_1)P(X_1) =$$
$$= (0{,}25)(0{,}50) + (0{,}70)(0{,}30) + (0{,}30)(0{,}20) = 0{,}395 \text{ e}$$

$$P(X_2) = P(X_2 | W_1)P(W_1) + P(X_2 | F_1)P(F_1) + P(X_2 | X_1)P(X_1) =$$
$$= (0{,}25)(0{,}50) + (0{,}15)(0{,}30) + (0{,}40)(0{,}20) = 0{,}250.$$

Logo,

$$P(W_3) = (0{,}500)(0{,}355) + (0{,}150)(0{,}395) + (0{,}300)(0{,}250) \cong 0{,}312.$$

(ggg) Como $P(W_1 | W_3) = \dfrac{P(W_3 | W_1)P(W_1)}{P(W_3)}$ e

$$P(W_3 | W_1) = P(W_3 | W_2)P(W_2 | W_1) + P(W_3 | F_2)P(F_2 | W_1) + P(W_3 | X_2)P(X_2 | W_1)$$
$$= (0{,}50)(0{,}50) + (0{,}15)(0{,}25) + (0{,}30)(0{,}25) = 0{,}3625.$$

então

$$P(W_1 | W_3) = \frac{(0{,}3625)(0{,}50)}{0{,}312} \cong 0{,}58$$

Problema 40.

(hhh) $\dfrac{2800 + 7000}{15800} \cong 0{,}62$

(iii) $\dfrac{800 + 2500}{15800} \cong 0{,}21$

(jjj) $\dfrac{1800}{15800} \cong 0{,}11$

(kkk) $\dfrac{800}{2800} \cong 0{,}29$

Problema 41.

(lll) $\left(\dfrac{8300}{15800}\right)\left(\dfrac{8300}{15800}\right) \cong 0{,}28$

(mmm) $\left(\dfrac{2800}{15800}\right)\left(\dfrac{2000}{15800}\right) \cong 0{,}02$

(nnn) $\left(\dfrac{13000}{15800}\right)\left(\dfrac{13000}{15800}\right) \cong 0{,}68$

Problema 42.

(ooo) $\left(\dfrac{8300}{15800}\right)\left(\dfrac{8299}{15800}\right) \cong 0{,}28$

(ppp) $\left(\dfrac{13000}{15800}\right)\left(\dfrac{12999}{15800}\right) \cong 0{,}68$

Os resultados obtidos são muito próximos, pois é grande o número de empregados na empresa, de modo que não faz grande diferença se a seleção for feita com ou sem reposição.

Problema 43.

(a) Representando o espaço amostral por Ω, temos

$\Omega = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (a, a, c), (a, c, a), (a, c, c), (a, b, c), (a, c, b),$
$(b, b, b), (b, b, a), (b, a, b), (b, a, a), (b, b, c), (b, c, b), (b, c, c), (b, a, c), (b, c, a),$
$(c, c, a), (c, a, a), (c, a, c), (c, c, b), (c, b, b), (c, b, c), (c, a, b), (c, b, a), (c, c, c)\}$

(b) $A = \{(a, a, a), (b, b, b), (c, c, c)\}$

$B = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (b, b, a), (b, b, b), (b, b, c), (c, c, a), (c, c, b),$
$(c, c, c)\}$

Problema 44.

O enunciado fornece os seguintes dados:

- $P(R \mid A) = 0{,}40$;
- $P(R \mid B) = 0{,}20$;
- $P(R \mid C) = 0{,}10$.

Sendo $X = RRRMMMMM$, tem-se:

- $P(X \mid A) = (0{,}40)^3 (0{,}60)^5 \cong 0{,}00498$;
- $P(X \mid B) = (0{,}20)^3 (0{,}80)^5 \cong 0{,}00262$;
- $P(X \mid C) = (0{,}10)^3 (0{,}90)^5 \cong 0{,}00059$.

E logo,

$$P(X) = P(X \mid A)P(A) + P(X \mid B)P(B) + P(X \mid C)P(C)$$

$$\cong (0{,}00498)\left(\frac{1}{3}\right) + (0{,}00262)\left(\frac{1}{3}\right) + (0{,}00059)\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0{,}0273,$$

$$P(C \mid X) = \frac{P(X \mid C)P(C)}{P(X)} \cong \frac{(0{,}00059)(1/3)}{0{,}00273} \cong 0{,}072$$

Problema 45

Para que pelo menos um dos dois próximos artigos selecionado seja de segunda qualidade, ou ambos são, ou apenas o próximo artigo é de segunda qualidade, ou apenas o seguinte é de segunda qualidade. Uma vez que já foram retirados b artigos e todos foram de segunda qualidade, atualmente há m itens de primeira qualidade e $n - b$ de segunda, num total de $m + n - b$ itens ainda para inspeção. Para as duas próximas seleções poderia ocorrer uma das seguintes possibilidades : SS, SP, PS ou PP, portanto a resposta será:

P(SS) + P(SP) + P(PS) = 1- P(PP)

Calculando obtém-se

$$1 - P(PP) = 1 - \frac{\binom{n-b}{0}\binom{m}{2}}{\binom{m+n-b}{2}}$$

$$= 1 - \frac{m!}{2!\,(m-2)!}\,\frac{2!\,(m+n-b-2)!}{(m+n-b)!} = 1 - \frac{m(m-1)}{(m+n-b)(m+n-b-1)}$$

Problema 46.

Temos, por hipótese, que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Então,

- $P(A^c \cap B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

  $= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c)$
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$

  $= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$
- $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) =$

  $= P(B)[1 - P(A)] = P(A^c)P(B)$

Problema 47.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

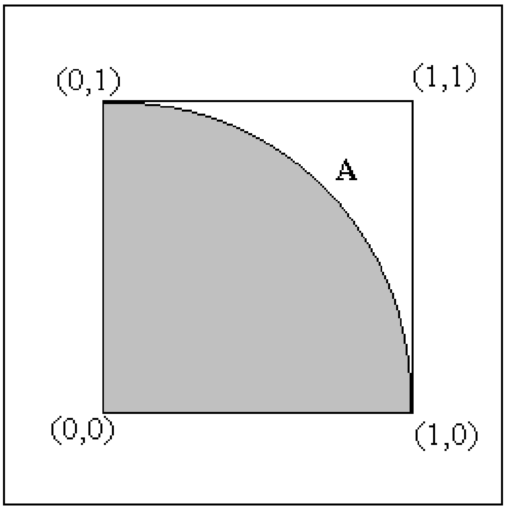
Problema 48.

Os componentes 1 e 2, bem como os componentes 4 e 5, estão ligados em série. Esses dois sub-sistemas estão em paralelo com o componente 3. Assim, a confiabilidade do sub-sistema formado pelos componentes 1, 2 e 3 é dada por $p^2 + p - p^3$. Logo, a confiabilidade total do sistema é dada por

$$h(p) = p^2 + p - p^3 + p^2 - p^2(p^2 + p - p^3) = 2p^2 + p - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 =$$
$$= p^5 - p^4 - 2p^3 + 2p^2 + p = p(p^4 - p^3 - 2p^2 + 2p + 1)$$

Problema 49.

(c) Como mostra a figura abaixo, esse evento está delimitado por um semi-círculo de raio 1, cuja origem é o ponto (0,0).

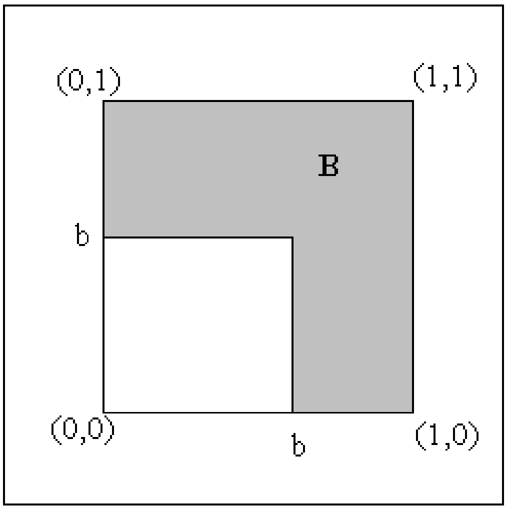


Representação gráfica do evento A.

(d) A probabilidade *P(A)* equivale à área da região A dividida pela área do quadrado todo. Como a área do quadrado é 1, temos que *P(A)* é a área da região A, ou seja,

$$P(A) = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

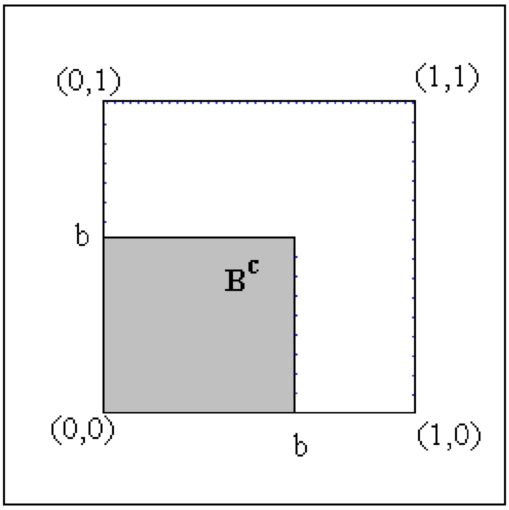
(e) O evento B está representado na figura seguinte:



Representação gráfica do evento B

Vamos então calcular *P(B)*, o que equivale a calcular a área da região B. Uma maneira simples de calcular a área de B é retirar a área do quadrado de lado *b* da área total, que é 1. Desse modo,. $P(B) = 1 - b^2$

(f) O evento B^c está representado na figura seguinte:

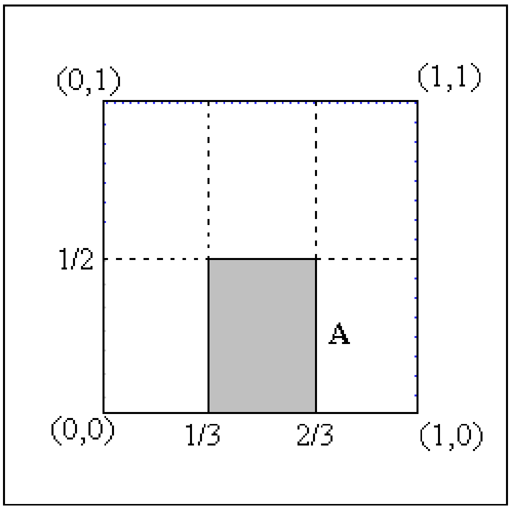


Representação gráfica do evento B^c.

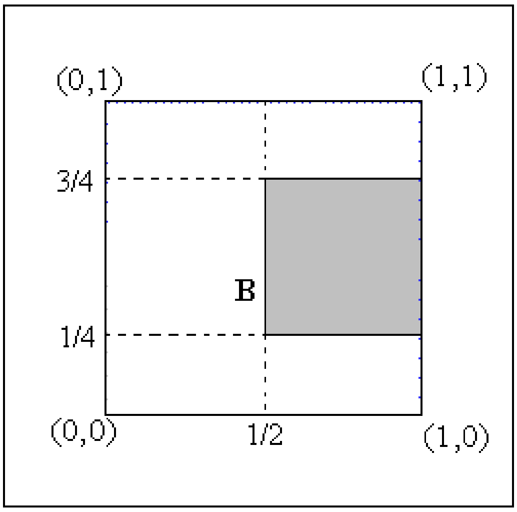
Utilizando a definição de probabilidades de eventos complementares,

$P(B^c) = 1 - P(B) = b^2$.

Problema 50.



Representação gráfica do evento A



Representação gráfica do evento B

- $P(A) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- $P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Problema 51.

A probabilidade de um evento qualquer A seria definida como a área da região no plano (ou seja, a área de A) dividida pela área do quadrado.

Problema 52.

Problema 53.

Esta probabilidade (representada aqui por p) é o quociente entre o número de amostras em que não há repetição sobre o número total de amostras com reposição. Do problema anterior, tem-se que o número de amostras de tamanho n (obtidas de uma população de tamanho N) em que não ocorrem repetições é dado por $(N)_n$. Assim,

$$p = \frac{(N)_n}{N^n}$$

Problema 54.

Considere o caso particular em que $N = 5$ e $n = 2$. Do conjunto $a_1, \ldots, a_5$, retiram-se amostras de tamanho 2, sem reposição. Os resultados possíveis são:

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_1 a_4,\ a_1 a_5$$
$$a_2 a_3,\ a_2 a_4,\ a_2 a_5$$
$$a_3 a_4,\ a_3 a_5$$
$$a_4 a_5$$

Como se vê, nesse caso existem 10 = $\binom{5}{2} = \binom{N}{n}$ amostras sem reposição.

Problema 55.

(g) $P(A \cap (B \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B \cap C)$

(h) $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) + P(B) + P(C) - P((A \cup B) \cup C) =$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) + P(C)$

$- [P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C)$

$- P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)]$

$\Rightarrow P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$

$$= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A \cup B)P(C)$$

Problema 56.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$P(A) \leq P(A \cap B) + P(B^c)$$
$$\frac{1}{3} \leq P(A \cap B) + \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{12}$$

Portanto, os eventos A e B não podem ser mutuamente exclusivos, pois $P(A \cap B) \neq 0$.

Problema 57.

O enunciado indica que os componentes 2 e 3 estão ligados em paralelo entre si e em série com o componente 1. Desse modo,

$$h(p) = (0{,}90)(0{,}80 + 0{,}70 - 0{,}56) = 0{,}846$$

Problema 58.

Os eventos V e $U \cup V$ podem ser escritos como

$$V = (U \cap V) \cup (U^c \cap V)$$
$$V \cup U = (U^c \cap V) \cup U$$

Assim,

$$P(V) = P(U \cap V) + P(U^c \cap V) \quad (1)$$
$$P(V \cup U) = P(U^c \cap V) + P(U) \quad (2)$$

A partir disso, subtraindo (2) de (1), temos

$$P(V) - P(U \cup V) = P(U \cap V) - P(U)$$

e logo

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$$

Problema 59.

(i) De acordo com o enunciado, tem-se

$A_1 = \{101, 110\}$, $A_2 = \{011, 110\}$ e $A_3 = \{011, 101\}$.

Assim,

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; \qquad P(A_2) = \frac{1}{2}; \qquad P(A_3) = \frac{1}{2}; \qquad P(A) = 0$$

(j) Os conjuntos indicados são os seguintes:

$A = \phi$, $A_1 \cap A_2 = \{110\}$, $A_1 \cap A_3 = \{101\}$, $A_2 \cap A3 = \{011\}$.

Desse modo,

- $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$;
- $P(A_1 \cap A_3) = \dfrac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$;

- $P(A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{4} = P(A_2)P(A_3);$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Portanto, os eventos são mutuamente independentes, ou seja, são independentes dois a dois, mas não são independentes.

Problema 60.

Para n eventos quaisquer A_1, ..., A_n, (5.10) pode ser escrita como

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Problema 61.

Os eventos A_1, ..., A_n são independentes se, e somente se,

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \quad \forall i,\ i = 1, \ldots n.$$

Problema 62.

Como já foi visto no problema anterior, a probabilidade de uma amostra ordenada com reposição, de tamanho k, ter todos os elementos distintos é igual a $\dfrac{(365)_k}{365^k}$. Logo, no caso,

$$1 - p = \frac{365(365-1)\ldots(365-(k-1))}{365^k} = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{365-1}{365}\right)\ldots\left(\frac{365-(k-1)}{365}\right)$$

ou seja,

$$1 - p = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{365}\right).$$

Problema 63.

$$1 - p \approx 1 - \frac{1 + 2 + \ldots + (k-1)}{365},$$

desprezando os produtos com denominadores $(365)^2$, $(365)^3$, etc.

Problema 64.

Temos que $P(A) = 0{,}20$, $P(B) = 0{,}50$, $P(C) = 0{,}30$, $P(F \mid A) = 0{,}20$, $P(F \mid B) = 0{,}05$, $P(F \mid C) = 0{,}02$, sendo F o evento "contrato futuro em dólares". Então,

$$P(F) = P(F \mid A)P(A) + P(F \mid B)P(B) + P(F \mid C)P(C) =$$
$$= (0{,}20)(0{,}20) + (0{,}05)(0{,}50) + (0{,}02)(0{,}30) = 0{,}071$$

Segue que

$$P(A \mid F) = \frac{P(F \mid A)P(A)}{P(F)} = \frac{(0{,}20)(0{,}20)}{0{,}071} = \frac{4}{71} \cong 0{,}563$$

e

$$P(C \mid F) = \frac{P(F \mid C)\, P(C)}{P(F)} = \frac{(0{,}02)(0{,}30)}{0{,}071} = \frac{60}{71} \cong 0{,}084$$

Capítulo 6

Problema 01.

$n(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$ combinações possíveis

$X = 0 \Rightarrow \binom{5}{0} \times \binom{3}{3} = 1$

$X = 1 \Rightarrow \binom{5}{1} \times \binom{3}{2} = 15$

$X = 2 \Rightarrow \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30$

$X = 3 \Rightarrow \binom{5}{3} \times \binom{3}{0} = 10$

Então a distribuição de X é dada por:

X	0	1	2	3
P(X=x)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 02.

$n(\Omega) = 8^3 = 512$ combinações possíveis

$X = 0 \Rightarrow 5^0 \times 3^3 = 27$

$X = 1 \Rightarrow \binom{3}{1} \times 5^1 \times 3^2 = 135$

$X = 2 \Rightarrow \binom{3}{2} \times 5^2 \times 3^1 = 225$

$X = 3 \Rightarrow \binom{3}{3} \times 5^3 \times 3^0 = 125$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$27/512$	$135/512$	$225/512$	$125/512$

Problema 03.

$X = 1 \Rightarrow C \Rightarrow \frac{1}{2}$

$X = 2 \Rightarrow RC \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$X = 3 \Rightarrow RRC \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

X	1	2	3	4	.....
P(X=x)	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	.....

De modo geral,

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \text{ x=1,2,3....}$$

Problema 04.

Seguindo o mesmo raciocínio idêntico ao Problema 02, tem-se:

X	0	1	2	3	4
P(X=x)	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Problema 05.

No contexto apresentado, a distribuição do número de caras é dada por:

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{4-y}, \text{ y} = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Problema 06.

Por similaridade, tem-se:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{n-y}, \text{ y} = 0, 1, 2, 3, ..., \text{n}.$$

Problema 07.

Para o Problema 01, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{15}{56} + \frac{60}{56} + \frac{30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2) = \frac{15}{56} + \frac{120}{56} + \frac{90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2) - [\text{E(X)}]^2 = 4{,}018 - [1{,}875]^2 = 0{,}502$$

Para o Problema 02, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{135}{512} + \frac{450}{512} + \frac{375}{512} = \frac{960}{512} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2) = \frac{135}{512} + \frac{900}{512} + \frac{1175}{512} = \frac{2160}{512} = 4{,}219$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2) - [\text{E(X)}]^2 = 4{,}219 - [1{,}875]^2 = 0{,}703$$

Problema 08.

$$\text{E(Y)} = \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = 2{,}0$$

$$\text{E(Y}^2) = \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = 5{,}0$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2) - [\text{E(X)}]^2 = 5{,}0 - [2{,}0]^2 = 1{,}0$$

Problema 09.

Y=3X	0	3	6	9
P(Y=y)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

$Z=X^2$	0	1	4	9
P(Z=z)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 10.

Ω	RRR	RRC	RCR	CRR	RCC	CRC	CCR	CCC
X	0	1	1	1	2	2	2	3
Y	1	2	3	2	2	3	2	1
p	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

Do quadro acima obtém-se:

X	0	1	2	3
P(X=x)	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$E(X) = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=1{,}5$$

$$Var(X) = (-1{,}5)^2\times\frac{1}{8}+(-0{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(0{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(1{,}5)^2\times\frac{1}{8}=0{,}75$$

Y	1	2	3
P(Y=y)	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X) = 1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{4}{8}+3\times\frac{2}{8}=2$$

$$Var(X) = (-1)^2\times\frac{2}{8}+(0)^2\times\frac{4}{8}+(1)^2\times\frac{2}{8}=0{,}50$$

Problema 11.

$$E(V) = 0\times q+1\times(1-q)=(1-q)$$

$$Var(V) = (q-1)^2\times q+q^2\times(1-q)=q\times(1-q)$$

Problema 12.

$$E(X) = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

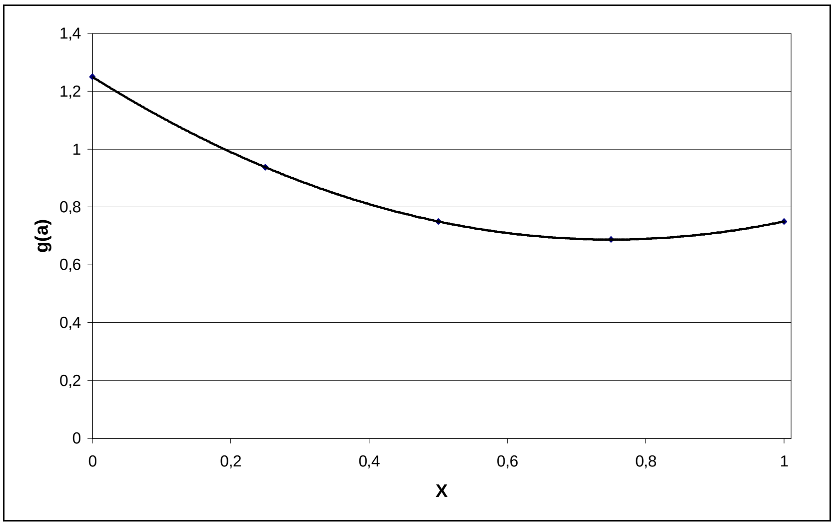
$$E(X^2) = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$E\left[(X-a)^2\right]=E(X^2)-2\times a\times E(X)+a^2=\frac{5}{4}-\frac{6a}{4}+a^2=a^2-\frac{3a}{2}+\frac{5}{4}$$

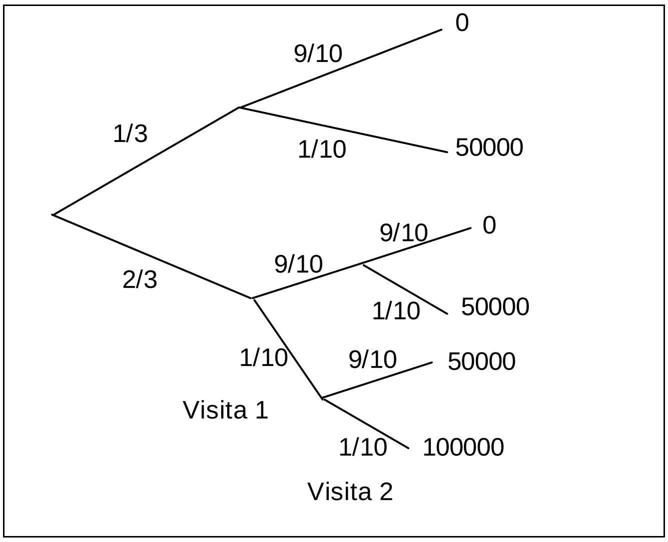
Portanto,

a	0	0,25	0,50	0,75	1
$E\left[(X-a)^2\right]$	1,2500	0,9375	0,7500	0,6875	0,7500

Os resultados encontram-se representados no gráfico a seguir, em que se percebe que g(a) é mínimo para $a \approx 0{,}75$



Problema 13.



Da árvore acima obtém-se:

$$P(Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{252}{300}=\frac{126}{150}$$

$$P(Y=50000)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{46}{300}=\frac{23}{150}$$

$$P(Y=100000)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$$

Y	0	50000	100000
P(Y=y)	$126/150$	$23/150$	$1/150$

$$E(Y)=0\times\frac{126}{150}+50000\times\frac{23}{150}+100000\times\frac{1}{150}=\frac{1250000}{150}=8333{,}33$$

Problema 14.

$$E(Y^2) = 0 \times \frac{126}{150} + (50000)^2 \times \frac{23}{150} + (100000)^2 \times \frac{1}{150} = 450000000$$

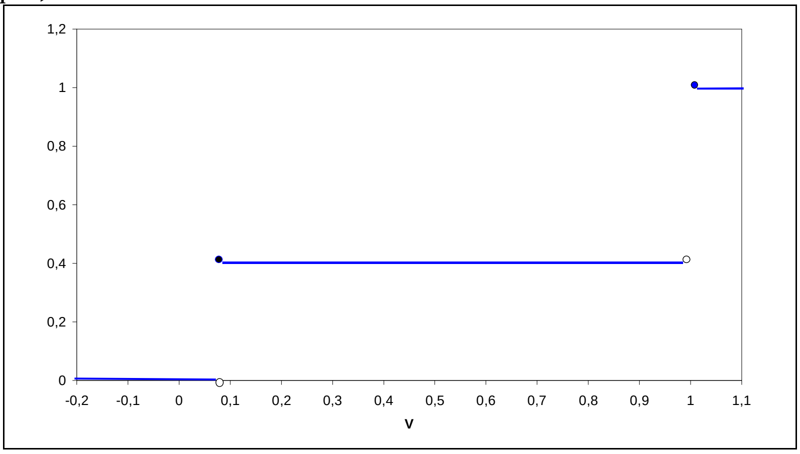
$$Var(X) = 450000000 - (8333{,}33)^2 = 380555611$$

Problema 15.

A partir do Problema 11, tem-se:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ q, & 0 \le v < 1 \\ 1, & v \ge 1 \end{cases}$$

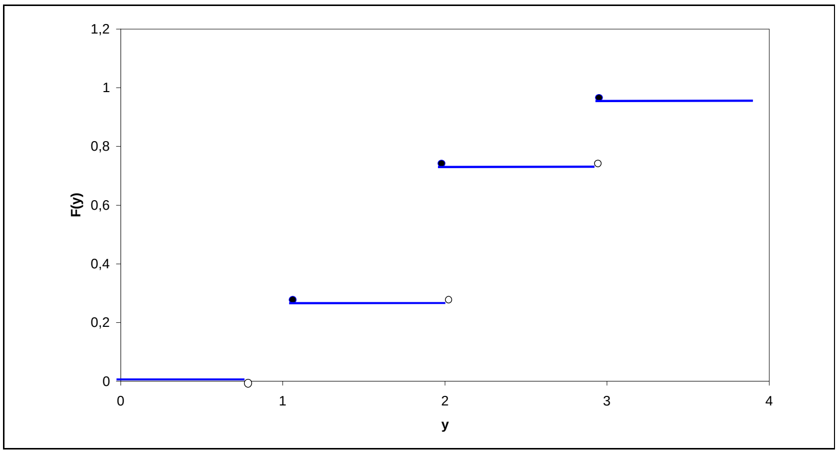
Gráfico para q=0,4:



Problema 16.

A partir do Problema 10, tem-se:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 2/8, & 1 \le y < 2 \\ 6/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$



Problema 17.

$$E(T) = 2\times0{,}1 + 3\times0{,}1 + 4\times0{,}3 + 5\times0{,}2 + 6\times0{,}2 + 7\times0{,}1 = 4{,}6$$

G	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P(G=g)	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

$$E(G) = 2\times0{,}3 + 2{,}5\times0{,}2 + 3\times0{,}3 + 3{,}5\times0{,}1 + 4\times0{,}1 = 2{,}75$$

$$E(G^2) = 4\times0{,}3 + 6{,}25\times0{,}2 + 9\times0{,}3 + 12{,}25\times0{,}1 + 16\times0{,}1 = 7{,}975$$

$$Var(G) = E(G^2) - [E(G)]^2 = 7{,}975 - 7{,}5625 = 0{,}4125$$

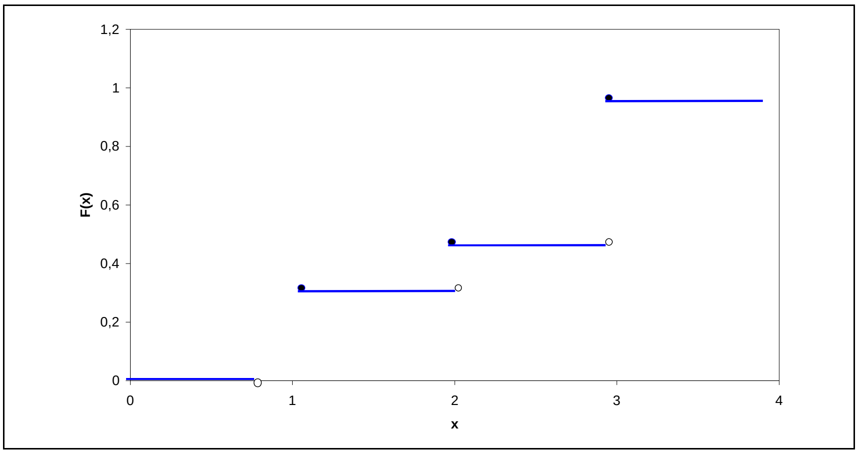
Problema 18.

A distribuição de X é dada por:

X	1	2	3
P(X=x)	1/3	1/6	1/2

Desse modo, a f.d.a de X é:

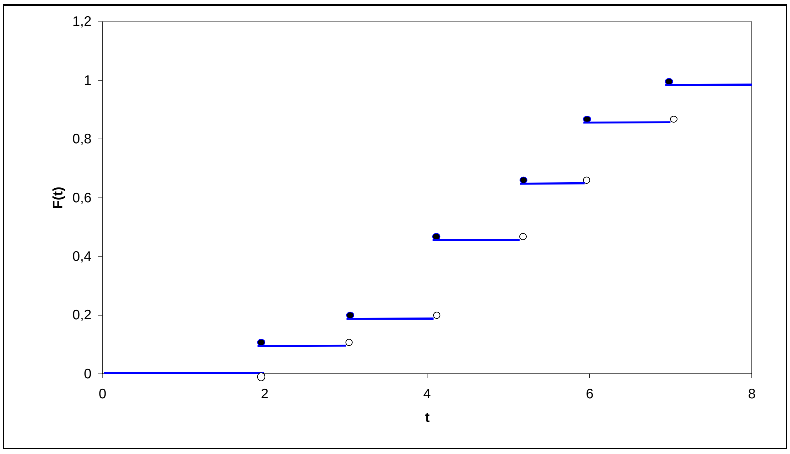
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 1/2, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



Problema 19.

A f.d.a da variável T é dada por:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 0{,}1, & 2 \le t < 3 \\ 0{,}2, & 3 \le t < 4 \\ 0{,}5, & 4 \le t < 5 \\ 0{,}7, & 5 \le t < 6 \\ 0{,}9, & 6 \le t < 7 \\ 1{,}0, & t \ge 7 \end{cases}$$



Problema 20.

(k) X ~ Binomial(5, 1/3)

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad ; \text{ x=0,1,2...,5.}$$

(l) A variável X não tem distribuição binomial, pois as extrações são feitas sem reposição, ou seja, a probabilidade de sucesso não é a mesma em todos as extrações.

(m) A variável X terá distribuição binomial apenas se a proporção de bolas brancas for a mesma em todas as urnas.

(n) Novamente, a variável em estudos terá distribuição binomial apenas se a proporção de pessoas com opinião contrária ao projeto for a mesma nas 10 cidades pesquisadas.

(o) Neste caso, as máquinas têm que funcionar independente e apresentar uniformidade quanto à produção de peças defeituosas, ou seja, a probabilidadede se obter uma peça com defeito tem de ser a mesma em todas as máquinas.

Problema 21.

Das propriedades da binomial tem-se:

$E(X) = np = 12 ; Var(X) = np(1-p) = 3$

(p) $n = 16$

(q) $p = 0{,}75$

(r) $$P(X < 12) = \sum_{k=1}^{11} \binom{16}{k} \times (0{,}75)^{k} \times (0{,}25)^{16-k} = 0{,}3698$$

(s) $$P(X \geq 14) = \sum_{k=14}^{16} \binom{16}{k} \times (0{,}75)^{k} \times (0{,}25)^{16-k} = 0{,}1971$$

(t) $$E(Z) = E\left(\frac{X - 12}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times [E(X) - 12] = 0$$

(u) $P(Y \geq 14/16) = P(X \geq 14) = 0{,}1971$

(v) $P(Y \geq 12/16) = 1 - P(X < 12) = 1 - 0{,}3698 = 0{,}6302$

Problema 22.

Seja X o número de chamadas recebidas nessa central em um minuto, e usando a tabela II tem-se:

(w) $P(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 1 - 0{,}7166 = 0{,}2834$

(x) $P(X < 9) = \sum_{k=0}^{8} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 0{,}5925$

(y) $P(7 \leq X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}1396 + 0{,}1396 = 0{,}2792$

Problema 23.

Seja X o número de cortes por 2000 pés de fita magnética. Pode-se dizer que X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1$ (Tabela II ou pacotes computacionais)

(z) $P(X = 0) = \frac{e^{-1} \times 1^0}{0!} = 0{,}3679$

(aa) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(bb) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(cc) $P(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679) = 0{,}2642$

Problema 24.

- Considerando a distribuição de binomial:

  Se X é o número de itens defeituosos encontrados na amostra de 10 produzidos, X ~ b(10;0,2) e

  $P(X \leq 1) = \binom{10}{0} \times (0{,}2)^0 \times (0{,}8)^{10} + \binom{10}{1} \times (0{,}2)^1 \times (0{,}8)^9 = 0{,}1074 + 0{,}2684 = 0{,}3758$

- Considerando a distribuição de Poisson

  Nas condições do enunciado, pode-se dizer que o número de itens defeituosos a cada dez produzidos tem distribuição de Poisson de parâmetro 2 (10×2). Assim:

  $P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-2} \times 2^k}{k!} = 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707) = 0{,}4060$

  Os resultados obtidos, apesar de diferentes, são razoavelmente próximos.

Problema 25.

(dd) Calculando o número médio de machos por ninhada:

$\bar{x} = 0 \times 20 + 1 \times 360 + ... + 5 \times 40 = 2{,}4$

mas $\bar{x} = 5 \times p \Rightarrow p = 0{,}48$

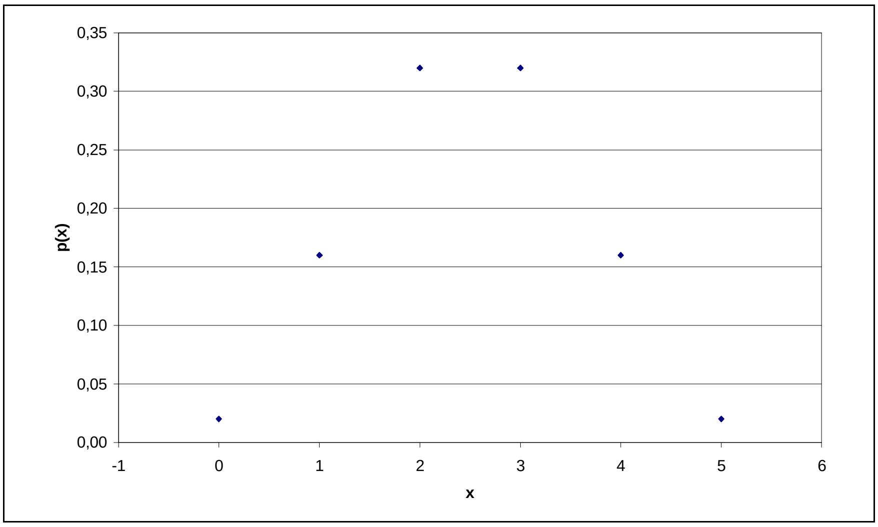
(ee) A tabela a seguir traz o número esperado de ninhadas para cada valor de X, de acordo com o modelo binomial b~(5;0,48) (os números estão arredondados). Neste caso, o número esperado de ninhadas com x machos é 2000×P(X=x).

X=Número de machos	P(X=x)*	Número esperado de ninhadas
0	0,0380	76
1	0,1755	351
2	0,3240	648
3	0,2990	598
4	0,1380	276
5	0,0255	51

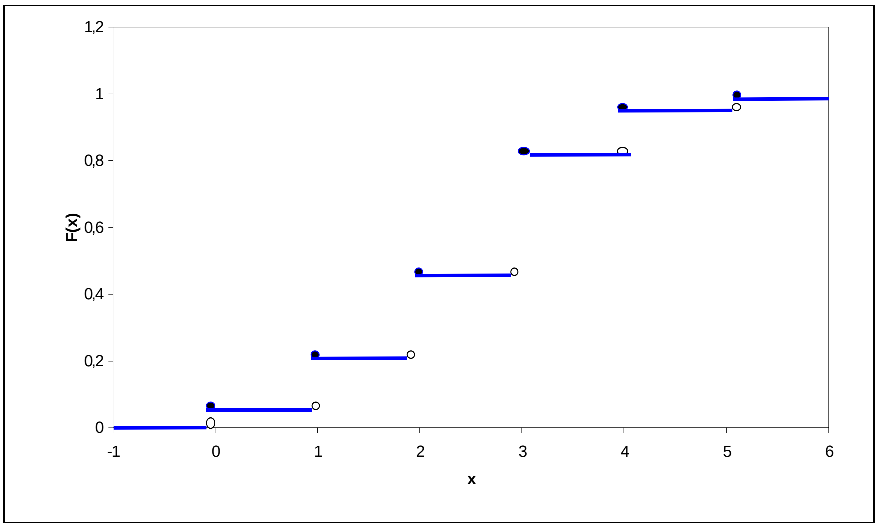
*Valores calculados com base na função distrbinom do EXCEL.

Problema 26.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:

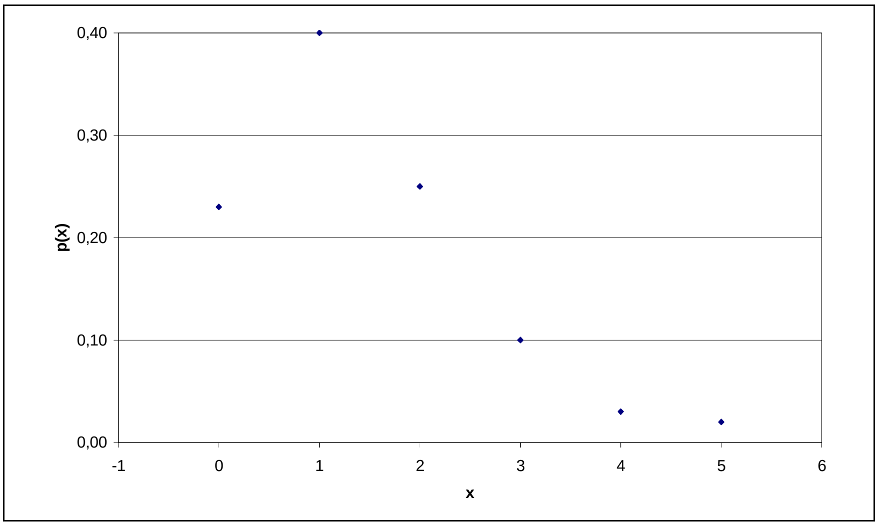


O gráfico da f.d.a de X, F(x) é:

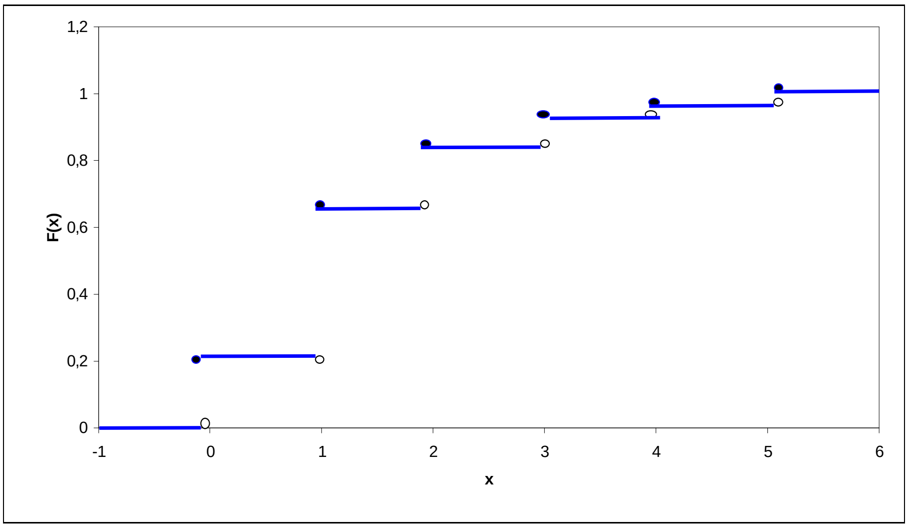


Problema 27.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:



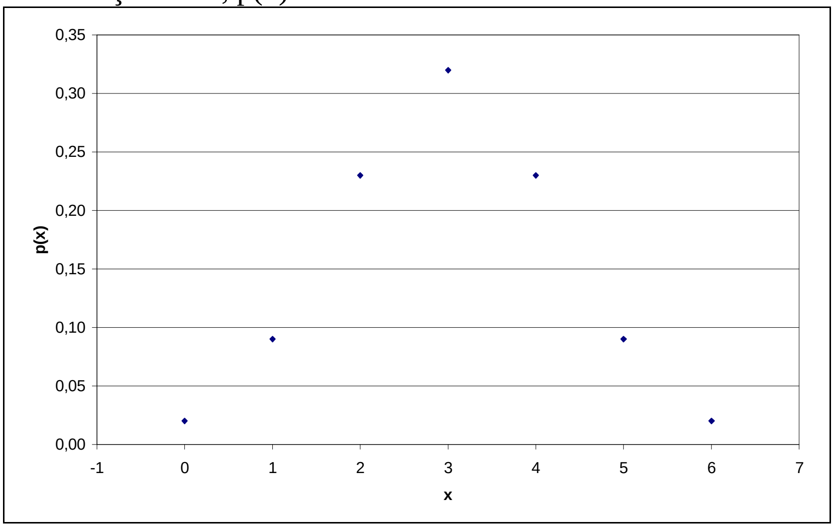
O gráfico da f.d.a de X, F(x), é:



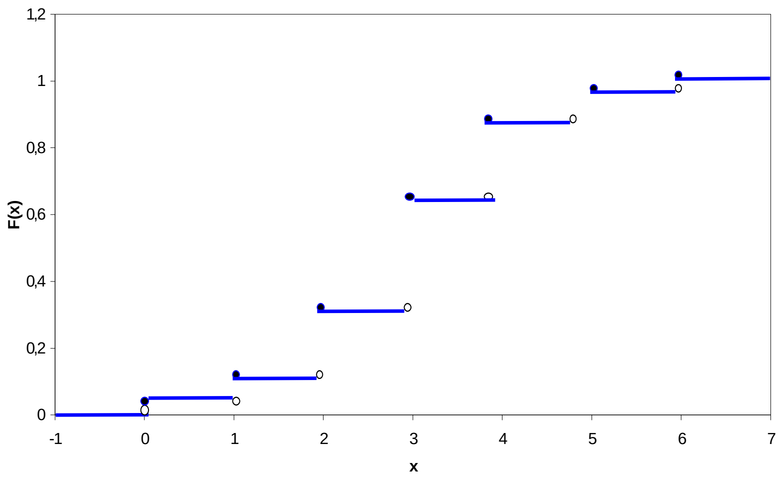
Percebe-se que o gráfico desta distribuição de X é assimétrico, fato que não aconteceu no exercício anterior. Isto se deve ao valor de p, que no caso de distribuição simétrica é igual a 0,5 e agora 0,25.

Problema 28.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:



O gráfico da f.d.a de X, F(X), é:



Problema 29.

O florista pode ter em seu estoque 1, 2 ou 3 flores. Seja L o lucro obtido. Para cada hipótese da quantidade de flores no estoque, tem-se:

- Uma flor:

L	-0,50	1,00
P(L= ℓ)	0,1	0,9

$E(L) = (-0,50)\times(0,1) + (1,00)\times(0,9) = 0,85$

- Duas flores:

L	-1,00	0,50	2,00
p(L= ℓ)	0,1	0,4	0,5

$E(L) = (-1,00)\times(0,1) + (0,50)\times(0,4) + (2,00)\times(0,5) = 1,10$

- Três flores:

L	-1,50	0,00	1,50	3,00
p(L=ℓ)	0,1	0,4	0,3	0,2

$E(L) = (-1,50)\times(0,1) + (0,00)\times(0,4) + (1,50)\times(0,3) + (3,00)\times(0,2) = 0,90$

Portanto, o estoque que maximiza o lucro médio é de 2 flores.

Problema 30.

Sejam X: número de tentativas até a obtenção do primeiro sucesso e C: custo da operação. A distribuição de X, semelhante a estudada no Problema 3 é:

$P(X = x) = p\times(1-p)^{x-1} = (0,9)\times(0,1)^{x-1}$, logo

$$E(C) = 10\times\sum_{k=1}^{5} P(X=k) + 5\times\sum_{k=6}^{\infty} P(X=k) =$$

$$= 10\times\sum_{k=1}^{5}(0,9)\times(0,1)^{k-1} + 5\times\sum_{k=6}^{\infty}(0,9)\times(0,1)^{k-1} \approx 9,99$$

Problema 31.

Seja X o número de artigos defeituosos numa amostra aleatória de tamanho 4. Tem-se que X ~ b(4; 0,10). Usando a Tabela I ou pacotescomputacionais, vem:

(ff) $P(X=0)=\binom{4}{0}\times(0{,}10)^{0}\times(0{,}90)^{4}=0{,}6561$

(gg) $P(X=1)=\binom{4}{1}\times(0{,}10)^{1}\times(0{,}90)^{3}=0{,}2916$

(hh) $P(X=2)=\binom{4}{2}\times(0{,}10)^{2}\times(0{,}90)^{2}=0{,}0486$

(ii) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}9963$

Problema 32.

Seja X o número de peças defeituosas na caixa. Tem-se que X ~ b(18; 0,05). Para satisfazer à garantia, as caixas têm de apresentar $X \leq 2$.

$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3972+0{,}3763+0{,}1683=0{,}9418$

Problema 33.

Seja X o número de funcionários que aumentam sua produtividade com o curso de treinamento. Tem-se que X ~ b(10; 0,80)

(jj) $P(X=7)=\binom{10}{7}\times(0{,}80)^{7}\times(0{,}20)^{3}=0{,}2013$

(kk) $P(X\leq 8)=\sum_{k=0}^{8}P(X=k)=0{,}6242$

(ll) $P(X\leq 7)=\sum_{k=0}^{7}P(X=k)=P(X\leq 8)-P(X=8)=0{,}6242-0{,}3020=0{,}3222$

Problema 34.

Seja X o número de petroleiros que chegam à refinaria em um dia. Do enunciado, X ~ Poisson(2).

(mm) $P(X>3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=1-(0{,}6767)=0{,}3233$

(nn) Deseja-se saber o valor x_0 tal que P(X > x_0) ≤ 0,95. Tem –se que P(X > 4) = =0,947 e P(X > 5) = 0,983. Desse modo, as instalações devem suportar 5 navios por dia.

(oo) Numa distribuição de Poisson, a média é dada pelo parâmetro $\lambda = 2$.

Problema 35.

De acordo com o modelo proposto, o número esperado de famílias com x filhos, dentre as 10690, é dado por 10690 x P (X = x). A tabela a seguir fornece os resultados obtidos. Foi feito um arredondamento para que se obtivessem números inteiros.

X	P(X = x)*	Nº esperado de famílias	|observado-esperado|
0	0,00024	3	3
1	0,00293	31	2
2	0,01611	172	12
3	0,05371	574	53
4	0,12085	1292	94
5	0,19336	2067	146
6	0,22559	2412	52
7	0,19336	2067	34
8	0,12085	1292	106
9	0,05371	574	225
10	0,01611	172	126
11	0,00293	31	29
12	0,00024	3	4

- Calculado com a planilha do EXCEL (do Capítulo 4)

Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 251{,}37$, haverá indicação de que o modelo binomial não é adequado para explicar o fenômeno.

Problema 36.

Sendo X o número de acidentes,

(pp) $\bar{x} = 0 \times 200/480 + ... + 8 \times 4/480 = 1{,}18$

(qq) A tabela a seguir traz o número esperado de horas com 0, 1, 2, ... acidentes, obtido sob o modelo de Poisson, calculados por 480 x P(X = x) e $P(X = x) = \frac{e^{-1,18} \times 1{,}18^x}{x!}$

X	P(X = x)	Número esperado	|observado– esperado|
0	0,30728	147,49	53
1	0,36259	174,04	22
2	0,21393	102,69	43
3	0,08414	40,39	10
4	0,02482	11,91	1
5	0,00586	2,81	6
6	0,00115	0,55	6
7	0,00019	0,09	5
8	0,00003	0,01	4

(rr) Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 70{,}02$, haverá indicação de que a distribuição não se aproxima de uma Poisson.

Problema 37.

É preciso saber qual o preço médio pago pela caixa de acordo com a proposta feita pelo comprador. Se X for o número de parafusos defeituosos numa amostra de 20 parafusos, tem-se que X~b (20; 0,10). Assim,

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\times(0{,}10)^{0}\times(0{,}90)^{20}=0{,}1216$$

$$P(X=1)=\binom{20}{1}\times(0{,}10)^{1}\times(0{,}90)^{19}=0{,}2702$$

$$P(X=2)=\binom{20}{2}\times(0{,}10)^{2}\times(0{,}90)^{18}=0{,}2852$$

$$P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}\times(0{,}10)^{k}\times(0{,}90)^{20-k}=0{,}3230$$

A distribuição de C: preço da proposta é:

C	20,00	10,00	8,00
P(C=c)	0,1216	0,5554	0,3230

$$\overline{C}=20{,}00\times(0{,}1216)+10{,}00\times(0{,}5554)+8{,}00\times(0{,}3230)=R\$10{,}57$$

Como se vê, de acordo com a proposta feita, o preço médio pago por uma caixa é R$ 10,57. Desse modo, mais vantajoso para o fabricante é vender suas caixas por R$13,50.

Problema 38.

Supondo que X ~ Poisson (2,2),tem-se:

(ss) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0{,}64$

(tt) Seguindo raciocínio feito nos exercícios anteriores, obtêm-se as seguintes freqüências esperadas:

X	Freqüência esperada
0	12
1	26
2	29

(uu) A observação dos resultados anteriores, indica que as plantas não se distribuem de acordo com a distribuição de Poisson com parâmetro 2,2.

(vv) Dependência , pois a reprodução na vizinhança é mais provável do que longe.

Problema 39.

Sejam X o preço de venda da caixa de válvulas e Y o número de válvulas defeituosas em cada caixa. Tem-se que Y ~ b(10; 0,20).

$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\times(0{,}20)^{0}\times(0{,}80)^{10}=0{,}1074$$

$$P(Y=1)=\binom{10}{1}\times(0{,}20)^{1}\times(0{,}80)^{9}=0{,}2684$$

$$P(Y=2)=\binom{10}{2}\times(0{,}20)^{2}\times(0{,}80)^{8}=0{,}3020$$

$$P(Y=3)=\binom{10}{3}\times(0{,}20)^3\times(0{,}80)^7=0{,}2013$$

$$P(Y>3)=\sum_{k=4}^{10}\binom{10}{k}\times(0{,}20)^k\times(0{,}80)^{10-k}=0{,}1209$$

$$E(X)=10{,}00\times(0{,}1074)+8{,}00\times(0{,}2684)+6{,}00\times(0{,}5033)+2{,}00\times(0{,}1209)=R\$6{,}48$$

Problema 40.

Seja X_i o número de peças defeituosas na amostra colhida pelo comprador i, i = A, B.

- Comprador A: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :

$$P(X_A\geq 1)=1-P(X_A=0)=1-\binom{5}{0}\times(0{,}20)^0\times(0{,}80)^5=0{,}6723$$

Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador A é:
$1{,}20\times(0{,}3277)+0{,}80\times(0{,}6723)=R\$0{,}93$

- Comprador B: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :

$$P(X_B\geq 2)=1-P(X_B=0)-P(X_B=1)-P(X_B=2)=1-0{,}1074-0{,}2684-0{,}3020=0{,}3222$$

Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador B é:
$1{,}20\times(0{,}6778)+0{,}80\times(0{,}3222)=R\$1{,}07$

Logo, o comprador B oferece maior lucro.

Problema 41.

- n=1

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=\binom{1}{1}\times p\times(1-p)^0=p$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

- n=2

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=\binom{2}{1}\times p\times(1-p)+\binom{2}{2}\times p^2\times(1-p)^0$$

$$=2p(1-p)+2p^2=2p$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2p^2+2p-4p^2=2p(1-p)$$

A prova agora será por indução:
Suponha válido para n-1, isto é:

$$E(X\mid n-1)=\sum_{x=1}^{n-1}x\binom{n-1}{x}p^x q^{n-x-1}=(n-1)p$$

e vamos provar que $E(X\mid n)=np$.
Mas pelo fato de que $p+q=1$, obtém-se que:

$$(p+q)^{n-1}=\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x q^{n-x-1}=1$$

Multiplicando a primeira expressão por $p+q$, a segunda por p, e somando-se os resultados obtém-se:

$$np = E(X \mid n-1) + p = (p+q) \times E(X \mid n-1) + (p+q)^{n-1} \times p$$

Basta provar que o último termo é $E(X \mid n)$:

$$q \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x}$$

$$p \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

$$p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

Portanto,

$$p \times E(X \mid n-1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} [x+1]$$

Então:

$$q \times E(X \mid n-1) + p \times E(X \mid n+1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} +$$

$$+ \sum_{x=0}^{n-1} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} = A$$

Separando o primeiro termo da primeira somatória e o último do segundo, tem-se:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n-2} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} + n \times p^n$$

O coeficiente de $p^k q^{n-k}$, para k=1, 2, ..., n-1, será a soma do coeficiente da primeira somatória quando x=k e o da segunda somatória quando x+1=k, ou seja, x=k-1, logo é igual a:

$$k \times \binom{n-1}{k} + k \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] = k \times \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right] =$$

$$= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [n-k+k] = k \times \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \binom{n}{k}$$

Substituindo em A, vem:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + n \times p^n = \sum_{k=0}^{n} k p^k q^{n-k} = E(X \mid n)$$

Como queríamos provar.

Problema 42.

(ww) $P(X \le 2) = (0{,}135) + (0{,}285) + (0{,}285) = 0{,}705$

(xx) $P(X \le 2) = (0{,}014) + (0{,}068) + (0{,}154) = 0{,}236$

(yy) $P(X \le 2) = (0{,}377) + (0{,}377) + (0{,}179) = 0{,}933$

Problema 43.

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\times\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times n\times(n-1)\times....\times(n-k+1)\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\times\lim_{n\to\infty}\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Como $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\to 1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to 1$ e $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\to e^{-\lambda}$

Então:

$$\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!}\quad\text{quando } n\to\infty$$

Problema 44.

Usando a propriedade da soma de infinitos termos de uma P.G. de razão menor que 1.

(zz) $P(X\ par)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$

(aaa) $P(X<3)=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k}=\frac{7}{8}$

(bbb) $P(X>10)=\sum_{k=11}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1/2^{11}}{1-1/2}=\frac{1}{2^{10}}$

Problema 45.

$$E(aX+b)=\sum(aX+b)p(x)=\sum axp(x)+\sum bp(x)=a\sum xp(x)+b\sum p(x)=aE(X)+b$$

$$Var(aX+b)=E\left[(aX+b)^2\right]-E\left[(aX+b)\right]^2=a^2\left(E(X^2)-[E(X)]^2\right)+(b^2-b^2)+$$

$$+2bE(X)-2bE(X)=a^2Var(X)$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\sum x^2p(x)-\sum xp(x)\sum xp(x)=\sum x^2p(x)-\left[\sum xp(x)\right]^2$$

Problema 46.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = (j = k-1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j+1}}{j!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Problema 47.

Para justificar a expressão, considere-se que a probabilidade de se extrair uma amostra com k elementos marcados é dada pelo quociente entre o número de amostras em que existem k elementos marcados e o número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N.

O número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N é dado por $\binom{N}{n}$.

Para o numerador da expressão a ser provada, deve-se raciocinar da seguinte maneira: é necessário obter k elementos dentre os r que possuem o tributo e n-k dentre os N-r elementos restantes. Portanto, justifica-se o valor $\binom{r}{k}$x$\binom{N-r}{n-k}$e a probabilidade em questão é dada por:

$$p_k = \frac{\binom{r}{k} \times \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Problema 48.

Cada resposta é um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso 0,50. Desse modo, o número de respostas corretas, X, tem distribuição binomial com n=50 e p=0,50. Acertar 80% das questões significa X = 40. Portanto:

$$P(X = 40) = \binom{50}{40} \times (0{,}50)^{40} \times (0{,}50)^{10} = 9 \times 10^{-6}$$

Problema 49.

No caso de alternativas por questão, a variável aleatória X segue distribuição binomial com n=50 e p = 0,20. Desse modo,

$$P(X = 40) = \binom{50}{40} \times (0{,}20)^{40} \times (0{,}80)^{10} = 1{,}21 \times 10^{-19}$$

Problema 50.

$$P(X = 2) = 12 \times P(X = 3) \Rightarrow \binom{3}{2} p^2 (1-p) = 12 \times \binom{3}{3} p^3 \Rightarrow 3p^2(1-p) = 12p^3 \Rightarrow p = 0{,}20$$

Problema 51.

Seja X o número de componentes que funcionam.Tem-se que X ~b (10; p).

(ccc) $P(\textit{funcionar}) = P(X = 10) = p^{10}$

(ddd) $P(\textit{não funcionar}) = P(X < 10) = 1 - p^{10}$

(eee) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^8 = 45 \times p^2 \times (1-p)^8$

(fff) $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \times p^k \times (1-p)^{10-k}$

Problema 52.

$$b(k+1; n, p) = \binom{n}{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1}$$

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!k!} \times p^k \times \frac{p}{1-p} \times (1-p)^{n-k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} b(k; n, p)$$

Problema 53.

Para a variável Z, a mediana é qualquer valor pertencente a (1, 2), de acordo com a definição. Nestes casos costuma-se indicar o ponto médio da classe que é 1,5.

Problema 54.

$q(0{,}25) =$ qualquer valor entre (0, 1)

$q(0{,}60) = 2$,porque $P(X \leq q(0{,}60)) = P(X \leq 2) = 0{,}75 \geq 0{,}60$ e $P(X \geq 2) = 0{,}50 \geq 0{,}40$

$q(0{,}80) = 3$, pois $P(X \leq 3) = 1{,}00 > 0{,}80$ e $P(X \geq 3) = 0{,}25 > 0{,}20$

Problema 55.

(ggg) $p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

(hhh) $E(X) = p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^j$, onde 1- p =q.

Mas, $\frac{d}{dq} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q}$, pois a série $\sum_{j=1}^{\infty} q^j$ é convergente

Logo,

$$E(X) = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Mesmo raciocínio para a Var(X).

(iii) $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty} (1-p)^j \times p}{\sum_{j=s+1}^{\infty} (1-p)^j \times p} = \frac{(1-p)^{s+t+1}}{(1-p)^{s+1}} = (1-p)^t = P(X \geq t)$

Problema 56.

Considere:
C: custo do exp.
X: nº de provas para sucesso.
$C = 1000X + 300(X - 1)$
Portanto,.

$$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300 \times \frac{1}{0,2} - 300 = 6200$$

Problema 57.

$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\}$, pois o evento $\{X+Y=n\}$ pode ser escrito como a união de eventos disjuntos $\{X=k, Y=n-k\}$, n=0,.....

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} \times P\{Y=n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times \binom{m}{n-k} \times p^{n-k} \times (1-p)^{m-n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} \times p^n \times (1-p)^m = \binom{m+n}{m} \times p^n \times (1-p)^m, \text{ pois } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} = \binom{m+n}{m}$$

Capítulo 7

Problema 01.

(jjj) $\int_0^\infty 2e^{-2x}dx = 2\times\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = 2\times\left[0+\frac{e^{-0}}{2}\right] = 1$

(kkk) $P(X > 10) = \int_{10}^\infty 2e^{-2x}dx = 2\times\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{10}^\infty = e^{-20}$

Problema 02.

(lll) $\frac{1}{2}\times\frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \text{C} = 4$

(mmm)

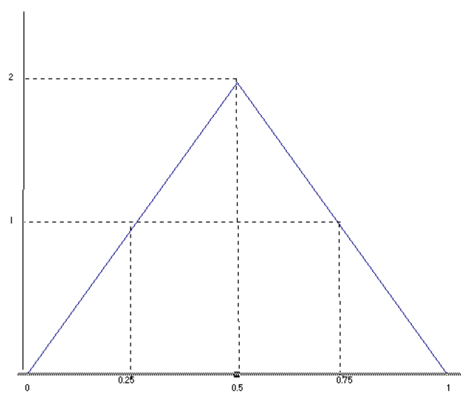


gráfico de f(x)

(nnn) $P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = P\left(X > \frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{4}\right) = 2\times P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{1}{2}\right) = 2\times\left(0{,}5 - P\left(X \le \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\times\left(\frac{1}{2} - \frac{1\times 1/4}{2}\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Problema 03.

(ooo) Como $P(X \le 10) = 1$ vem:

$\int_0^{10} kxdx = 1$, ou seja, $\int_0^{10} kxdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 50k = 1 \Rightarrow \text{k} = 0{,}02$

$$\therefore \;\; \mathrm{F(x)} = \int_0^x 0{,}02\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = 0{,}01x^2$$

Logo, $\mathrm{F}(1) = P(X < 1) = 0{,}01$

(ppp) $P(X < r) = 0{,}01r^2 = \dfrac{\pi r^2}{\pi(10)^2}$

Problema 04.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{c}{x^2}dx = c \times \int_{10}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]dx = c \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{\infty} = c \times \frac{1}{10} = 1 \;\; \rightarrow \;\; \mathrm{c} = 10$$

$$P(X > 15) = \int_{15}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx = 10 \times \int_{15}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]dx = 10 \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{15}^{\infty} = 10 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

Problema 05.

$$E(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} x4(1-x) = 4 \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + 4 \times \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = 4 \times \left\{\frac{1}{24} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)\right\} =$$

$$= 4 \times \left\{\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{2}{24}\right\} = 4 \times \frac{3}{24} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^3 dx + \int_{1/2}^{1} x^2 4(1-x) = 4 \times \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{1/2} + 4 \times \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^{1} = 4 \times \left\{\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right)\right\} =$$

$$= 4 \times \left\{\frac{1}{32} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right\} = 4 \times 7 \times \frac{1}{96} = \frac{7}{24}$$

Logo,

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$\mathrm{F(x)} = 4 \times \int_{\frac{1}{2}}^{x} (1-\mathrm{t})dt = 4 \times \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x} = 4 \times \left\{\left[x - \frac{x^2}{2}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right]\right\} = 4 \times \left\{x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}\right\} + \frac{1}{2} =$$

$$= 4x - 2x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 4x - 2x^2 - 1$$

Logo,

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0\,,\ \mathrm{se}\ \ \mathrm{x} < 0 \\ \dfrac{4\mathrm{x}^2}{2},\ \ \mathrm{se}\ \ 0 \le \mathrm{x} \le \dfrac{1}{2} \\ 4x - 2x^2 - 1,\ \ \mathrm{se}\ \ \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Problema 06.

$$E(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\,\text{sen}\,x)dx=\left[-x\cos x+\int\cos x dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

Tomando:

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=\text{sen}\,x \;\Rightarrow\; v=-\cos x$

$$=\left[-x\cos x+\text{sen}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\text{sen}\frac{\pi}{2}-0\cos 0-\text{sen}\,0\right]=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\,\text{sen}\,x)dx=$$

Tomando:

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=x\,\text{sen}\,x \;\Rightarrow\; v=-x\cos x+\text{sen}\,x$

$$=-x^2\cos x+x\,\text{sen}\,x+\int x\cos x+\text{sen}\,x=$$

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=\cos x \;\Rightarrow\; v=\text{sen}\,x$

$$=-x^2\cos x+x\,\text{sen}\,x+x\,\text{sen}\,x-\cos x+\cos x=\left[-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x\right]_0^{1/2}=\pi$$

Logo,

$Var(X)=\pi-1$

Problema 07.

$$E(X)=\int_{10}^{\infty}x\frac{10}{x^2}dx=\int_{10}^{\infty}\frac{10}{x}dx=10\times\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x}dx=10\times\left[\log x\right]_{10}^{\infty}=+\infty$$

Problema 08.

(qqq) $P\left(X>b\,\middle|\,X<b/2\right)=\dfrac{P\left(b<X<b/2\right)}{P\left(X<b/2\right)}$, onde

$$P\left(X<b/2\right)=\int_{-1}^{b/2}3x^2dx=\left(x^3\right)_{-1}^{b/2}=\frac{b^3}{8}+1$$

$$P\left(b<X<b/2\right)=\int_{b}^{b/2}3x^2dx=\left(x^3\right)_{b}^{b/2}=\frac{b^3}{8}-b^3$$

Logo,

$$P\left(X>b\,\middle|\,X<b/2\right)=\frac{P\left(b<X<b/2\right)}{P\left(X<b/2\right)}=\frac{\frac{b^3}{8}-b^3}{\frac{b^3}{8}+1}=\frac{-7b^3}{b^3+8}$$

(rrr) $E(X)=\int_{-1}^{0}3x^3dx=3\times\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{4}\times[0-1]=-\frac{3}{4}$

$E(X^2)=\int_{-1}^{0}3x^4dx=3\times\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{5}\times[0+1]=\frac{3}{5}$

Então,

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$

Problema 09.

$E(X)=\frac{3}{5}\times10^{-5}\int_{0}^{100}x^2(1-x)dx=\frac{3}{5}\times10^{-5}\left[100\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{100}=\frac{3}{5}\times10^{-5}\times100^3\left[\frac{100}{3}-\frac{100}{4}\right]=$

$=\frac{3}{5}\times10^3\times\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{5}\times10^3\times\frac{1}{12}=50$

Logo,

$E(L)=C_1+50C_2$

Problema 10.

(sss) $P(X>1{,}5)=\int_{1,5}^{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{6}\right]_{3/2}^{3}=\left(3-\frac{9}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{24}\right)=\frac{3}{8}=0{,}375$

(ttt) $E(X)=\int_{0}^{1}\frac{2}{3}x^2dx+\int_{1}^{3}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\times\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9}\right)_1^3=\frac{2}{9}+\left[\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{9}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)\right]=$

$=\frac{4}{3}=1{,}33\text{ num dia}\Rightarrow 30\text{ dias}:\frac{4}{3}\times30=40\longrightarrow\ 4000\text{ kg}$

(uuu) $P(X\le a)=0{,}95$

$P(\le 0X\le1)=\frac{1\times2}{2\times3}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+\int_{1}^{a}\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx=0{,}95$

$\int_{1}^{a}\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx=0{,}95-0{,}33=0{,}62$

$\left(x-\frac{x^2}{6}\right)_1^a=a-\frac{a^2}{6}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0{,}62\longrightarrow -a^2+6a-3=5{,}7\longrightarrow\ a^2+6a+8{,}7=0$

Logo, resolvendo a equação de 2º grau acima, encontra-se que: $a=2{,}45\ \rightarrow\ 245\text{ kg}$

Problema 11.

$E(X)=2\times\int_{0}^{\infty}xe^{-2x}dx=2\times\left[\left(-\frac{xe^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty}-\frac{1}{2}\times\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx\right]=$

Tomando:

$$v' = e^{-2x} \rightarrow v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$= \left[\left[\left(-xe^{-2x}\right)_0^{\infty}\right] + \int_0^{\infty} e^{-2x}dx\right] = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{4}$$

Problema 12.

Calculando o valor de c:

$$c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \longrightarrow c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$c\left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 1 \longrightarrow \frac{4}{3}\times c = 1 \longrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}x(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\times\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\times\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}x^2(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\times\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\times\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{3}{4}\times\frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

Logo,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)] = \frac{1}{5} - [0]^2 = \frac{1}{5}$$

Problema 13.

(vvv) $T \sim U[150,300]$

Gráfico da função densidade de probabilidade de T

$$C = C_1$$

$$V = \begin{cases} C_2, \mathrm{T} < 200 \\ \mathrm{C}_3, \mathrm{T} > 200 \end{cases}$$

(www) $L = V - C_1 = \begin{cases} C_2 - C_1, 150 < \mathrm{T} < 200 \\ C_2 - C_1, 200 < \mathrm{T} < 300 \end{cases}$

Logo,

$$E(L) = (C_2 - C_1)\times\frac{1}{3} + (C_3 - C_1)\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}C_3 + \frac{1}{3}C_2 - C_1$$

Problema 14.

$X \sim N(10;4)$

(xxx) $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = 0{,}34$

(yyy) $P(9 \le X \le 12) = P\left(-\frac{1}{2} < Z < 1\right) = 0{,}34 + 0{,}19 = 0{,}53$

(zzz) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(aaaa) $P(X < 8 \text{ ou X} > 11) = P(Z < -1) + P(Z > 0{,}5) = 0{,}16 + 0{,}31 = 0{,}47$

Problema 15.

$X \sim N(100;100)$

(bbbb) $P(X < 115) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}933$

(cccc) $P(X \ge 80) = P(Z \ge -2) = 0{,}977$

(dddd) $P(|X - 100| \le 10) = P(-10 \le X - 100 \le 10) = P\left(-1 \le \frac{X - 100}{10} \le 1\right) = P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}6827$

(eeee) $P(100 - a \le X \le 100 + a) = P(-a \le X - 100 \le a) = P\left(-\frac{a}{10} \le X \le \frac{a}{10}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{a}{10} = 1{,}96 \to a = 19{,}6$

Problema 16.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(ffff) $P(X \le \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le 2\right) = P(Z \le 2) = 0{,}977$

(gggg) $P(|X - \mu| \le \sigma) = P(|Z| \le 1) = 0{,}68$

(hhhh) $P(-a\sigma \le X - \mu \le a\sigma) = P(-a \le Z \le a) = 0{,}99 \longrightarrow a = 2{,}58$

(iiii) $P(X > b) = 0{,}90 \longrightarrow P\left(Z > \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

Logo,

$\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = -1{,}28 \longrightarrow b = \mu - 1{,}28\sigma$

Problema 17.

$X \sim N(170;5^2)$

(jjjj) $P(X > 165) = P(Z > -1) = 0{,}94134$

$\therefore$ Nº esperado $= 10000 \times 0{,}94134 = 9413$

(kkkk) $P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}75$

$P(170 - a < X < 170 + a) = 0{,}75$

$P\left(-\frac{a}{5} < Z < \frac{a}{5}\right) = 0{,}75$

$\frac{a}{5} = 1{,}15 \longrightarrow \quad a = 5{,}75$

Logo o intervalo simétrico é:

$Intervalo = (164{,}25;175{,}75)$

Problema 18.

$V \sim N(500;50^2)$

$P(V > 600) = P(Z > 2) = 0{,}023$

Problema 19.

$D_1 \sim N(42;36)$

$D_2 \sim N(45;9)$

Para um período de 45 horas, tem-se:

$P(D_1 > 45) = P(Z > 0{,}5) = 0{,}31$

$P(D_2 > 45) = P(Z > 0) = 0{,}50$

Neste caso, D_2 deve ser preferido.

Para um período de 49 horas, tem-se:

$P(D_1 > 49) = P(Z > 1{,}17) = 0{,}121$

$P(D_2 > 49) = P(Z > 1{,}33) = 0{,}092$

E neste caso, D_1 deve ser preferido.

Problema 20.

$X \sim N\left(0{,}6140;(0{,}0025)^2\right)$

(llll) $P(0{,}61 < X < 0{,}618) = 0{,}8904$ BOM

$P(0{,}608 < X < 0{,}610) + P(0{,}618 < X < 0{,}620) =$

$= P(-2{,}4 < X < -1{,}6) + P(1{,}6 < X < 2{,}4) = 0{,}0466 + 0{,}0466 = 0{,}0932$ RECUPERÁVEL

$P(X < 0{,}608) + P(X > 0{,}62) = P(Z < -2{,}4) + P(Z > 2{,}4) = 2 \times 0{,}0082 = 0{,}0164$ DEFEITUO SAS

(mmmm) $E(T) = 0{,}10 \times 0{,}8904 + 0{,}05 \times 0{,}0932 - 0{,}10 \times 0{,}0164 = 0{,}09206$

Problema 21.

Y : *Lucro esperado por item*

$$P(X \le 0{,}9) = \int_0^{0{,}9} e^{-x}dx = 1 - e^{-0{,}9} = 0{,}5934$$

$$P(X > 0{,}9) = e^{-0{,}9} = 0{,}4066$$

$$Y: \quad 2 \quad ; \quad 3$$

$$P(Y = y): 0{,}5934 \,;\, 0{,}4066$$

$$E(Y) = -1{,}1868 + 1{,}2198 = 0{,}033$$

Problema 22.

$Y \sim b(10;0{,}4)$ $\qquad X \sim N(4\,;2{,}4)$

(nnnn) $P(3 < Y < 8) = P(4 \le Y \le 7) \cong P(3{,}5 \le X \le 7{,}5) = P(-0{,}32 \le Z \le 2{,}26) = 0{,}4881 + 0{,}1255$
$= 0{,}6136$

(oooo) $P(Y \ge 7) \cong P(X \ge 6{,}5) = P(Z \ge 1{,}61) = 0{,}0537$

(pppp) $P(Y < 5) = P(Y \le 4) \cong P(X \le 4{,}5) = P(Z \le 0{,}32) = 0{,}6255$

Problema 23.

$X \sim b(100\,;0{,}1)$

$$P(X = 12) = \binom{100}{12} \times (0{,}1)^{12} \times (0{,}9)^{88}$$

$Y \sim N(10\,;9)$

$$P(X = 12) = P(11{,}5 \le Y \le 12{,}5) = P(0{,}5 \le Z \le 0{,}83) = 0{,}1043$$

Problema 24.

X : *número de defeitos*

$$P(X \ge 30) = \sum_{j=30}^{1000} \binom{1000}{j} \times (0{,}05)^{j} \times (0{,}95)^{1000-j}$$

$Y \sim N(50\,;47{,}5)$

$$P(X \ge 30) \cong P(Y \ge 29{,}5) = P\left(Z \ge \frac{29{,}5 - 50}{6{,}89}\right) = P(Z \ge -2{,}975) = 0{,}9986$$

Problema 25.

(qqqq) $P(Y \le 5{,}5) = P(X + 5 \le 5{,}5) = P(X \le 0{,}5) = 0{,}50$

(rrrr) $G(y) = P(Y \le y) = P(X + 5 \le y) = P(X \le y - 5) = F(y-5)$

Então:

$$g(y) = f(y-5) = \begin{cases} 0\,,\ y < 5 \\ 4(\text{y - 5}),\ 0 \le y - 5 \le \frac{1}{2} \to 5 \le y \le 5{,}5 \\ 4(1 - y + 5) = 4(6 - y)\,,\ \frac{1}{2} \le y - 5 \le 1 \to 5{,}5 \le y \le 6{,}0 \\ 0,\ \ y > 6 \end{cases}$$

(ssss) $G(z) = P(Z \le z) = P(2X \le z) = P\left(X \le \frac{z}{2}\right) = F\left(\frac{z}{2}\right)$

Então:

$$g(z) = \frac{1}{2} \times f\left(\frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ z,\ 0 \le \frac{z}{2} \le 1 \to 0 \le z \le 1 \\ 2 \times \left(1 - \frac{z}{2}\right), \frac{1}{2} \le \frac{z}{2} \le 1 \to 1 \le z \le 2 \\ 0, z > 2 \end{cases}$$

(tttt) Problema 26.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(2X - 0{,}6 \le y) = P(2X \le y + 0{,}6) = P\left(X \le \frac{y+0{,}6}{2}\right) = F\left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)$$

Logo,

$$g(y) = f\left(\frac{y+0{,}6}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2, -1 \le \frac{y}{2} + 0{,}3 \le 0 \to -2{,}6 \le y \le -0{,}6$$

$$E(Y) = \int_{-2,6}^{-0,6} \frac{3}{2} y \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2 dy = \frac{3}{8} \times \int_{-2,6}^{-0,6} y\left(y^2 + 0{,}36 + 1{,}2y\right) dy = \int_{-2,6}^{-0,6} \left(y^3 + 0{,}36y + 1{,}2y^2\right) dy =$$

$$= \frac{3}{8} \times \left[\frac{y^4}{4} + 0{,}36\frac{y^2}{2} + 1{,}2\frac{y^3}{3}\right]_{-2,6}^{-0,6} = -2{,}10$$

$$E(Y^2) = \int_{-2,6}^{-0,6} \frac{3}{2} y^2 \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2 dy = \frac{3}{8} \times \int_{-2,6}^{-0,6} y^2\left(y^2 + 0{,}36 + 1{,}2y\right) dy = \int_{-2,6}^{-0,6} \left(y^4 + 0{,}36y^2 + 1{,}2y^3\right) dy =$$

$$= \frac{3}{8} \times \left[\frac{y^5}{5} + 0{,}36\frac{y^3}{3} + 1{,}2\frac{y^4}{4}\right]_{-2,6}^{-0,6} = \ldots.$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - 4{,}41$$

Problema 27.

$X \sim U[-1;1]$

Tomando $Y = X^2$:

$$G(y) = P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right)$$

Logo:

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, -1 < x < 1 \\ 0,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\therefore\ g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < 1$$

Tomando $W = |X|$:

$$G(w) = P(W \le w) = P(|X| \le w) = P(-w \le X \le w) = F(w) - F(-w)$$

Logo:

$$g(w) = f(w) - f(-w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\ \ 0 < w < 1$$

Problema 28.

(uuuu) $E(X) = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{10}\right)dx + \int_2^6 \left(\frac{-3x^2}{40} + \frac{9x}{20}\right)dx = \left[\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{20}\right]_0^2 + \left[\frac{-3x^3}{120} + \frac{9x^2}{20}\right]_2^6 =$

$$= \left[\frac{8}{30} + \frac{4}{20}\right] + \left[\left(-\frac{648}{120} + \frac{324}{40}\right) - \left(-\frac{24}{120} + \frac{36}{40}\right)\right] = 2{,}47$$

(vvvv) $P(X > 3) = \int_3^6 \left(-\frac{3x}{40} + \frac{9}{20}\right)dx = \left[\frac{-3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right]_3^6 = \left(-\frac{108}{80} + \frac{54}{20}\right) - \left(-\frac{27}{80} + \frac{27}{20}\right) = 0{,}338$

(wwww) $\int_{Q_2}^6 f(x)dx = 0{,}5 \to \int_{Q_2}^6 \left(-\frac{3x}{40} + \frac{9}{20}\right)dx = \left[-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right]_{Q_2}^6 = -\frac{108}{80} + \frac{54}{20} + \frac{3Q_2}{80} - \frac{9Q_2}{20} = 0{,}5$

Portanto, $Q_2 = 2{,}06$.

Problema 29.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha},\ \alpha < x < \beta$$

(xxxx) $E(X) = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta - \alpha}dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$E(X^2) = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{\beta - \alpha}dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta)}{3(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{3}$$

$$Var(X) = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{3} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{4} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

(yyyy) $F(x) = \begin{cases} 0, x < \alpha \\ \int_\alpha^x \frac{1}{\beta - \alpha}dt = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \alpha \le x < \beta \\ 1, x > \beta \end{cases}$

Problema 30.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \alpha < x < \beta$$

$$U = \frac{X - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta - \alpha} \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$P(c < X < d) = F_U\left(\frac{d - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right) - F_U\left(\frac{c - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right)$$

Então:

$$G(u) = P(0 \le U \le u) = u,\ 0 \le u \le 1$$
$$u = 0{,}00 \longrightarrow G(0) = 0$$
$$u = 0{,}01 \longrightarrow G(0{,}01) = 0{,}01$$
$$u = 0{,}00 \longrightarrow G(0{,}02) = 0{,}02$$

e assim por diante.

Problema 31.

$$P(c < X < d) = F_U\left(\frac{d - 7{,}5}{5}\right) - F_U\left(\frac{c - 7{,}5}{5}\right)$$

(zzzz) $P(X < 7) = P(5 < X < 7) = F_U(-0{,}1) - F_U(-0{,}5) = 0{,}4$

(aaaaa) $P(8 < X < 9) = F_U(0{,}3) - F_U(0{,}1) = 0{,}2$

(bbbbb) $P(X > 8{,}5) = P(8{,}5 < X < 10) = F_U(0{,}5) - F_U(0{,}2) = 0{,}3$

(ccccc) $P(|X - 7{,}5| > 2) = 1 - P(-2 < X - 7{,}5 < 2) = 1 - P(5{,}5 < X < 9{,}5) = 1 - [F_U(0{,}4) - F_U(0{,}4)] =$

$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Problema 32.

$X \sim N(\mu;\sigma^2)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Fazendo $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x = \sigma y + \mu \longrightarrow dx = \sigma dy$, tem-se:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y + \mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \mu \times \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy + \sigma \times \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = 1, y \sim N(0,1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \int_{0}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy + \int_{-\infty}^{0} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

Considerando:

$$\int_{-\infty}^{0} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Tomando $z = -y \longrightarrow y = -z \rightarrow dy = -dz$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{0} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = -\int_{0}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_{0}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \int_{0}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$$

Logo,

$$E(X) = \mu$$

Sabe-se que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Fazendo $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x = \sigma y + \mu \longrightarrow dx = \sigma dy$, tem-se:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \mu^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \sigma^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy +$$

$$+ 2\mu\sigma \times \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Já vimos anteriormente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0$$

Queremos então calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y^2}_{u} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{v'} dy = \underbrace{\left[y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{0} = 1$$

Logo,

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Problema 33.

$X \sim N(6,4;0,8^2)$

$A \longrightarrow P(7,5 \leq X \leq 10) = P(1,38 \leq X \leq 4,5) = 0,49997 - 0,41621 = 0,0837$

$N^o\, esperado = 0,0837 \times 80 = 6,696 \cong 7$

$B \longrightarrow P(5 \leq X \leq 7,5) = P(-1,75 \leq X \leq 1,38) = 0,41621 + 0,45994 = 0,876$

$$N^o\, esperado = 0{,}876 \times 80 \cong 70$$
$$C \longrightarrow P(X < 5) = P(X < -1{,}75) = 0{,}040$$
$$N^o\, esperado = 0{,}040 \times 80 \cong 3$$

Problema 34.

$X = Peso\ Bruto \sim N(1000; 20^2)$

(ddddd) $P(X < 980) = P(Z < -1) = 0{,}15866$

(eeeee) $P(X > 1010) = P\left(Z > \frac{1}{2}\right) = 0{,}30854$

Problema 35.

(fffff) $X = Peso \sim N(5; 0{,}8^2)$ $\quad$ n = 5000

Então:

$$\frac{X - 5}{0{,}8} = Z \longrightarrow X = 0{,}8Z + 5$$
$$z_1 = 0{,}84 \rightarrow x_1 = 4{,}33$$
$$z_2 = 0{,}68 \rightarrow x_2 = 5{,}54$$
$$z_3 = 1{,}28 \rightarrow x_3 = 6{,}02$$

Logo,

$$\text{se} \begin{cases} \text{x} \le 4{,}33, \text{ então classifica como pequeno} \\ 4{,}33 < \text{x} \le 5{,}54, \text{ então classifica como médio} \\ 5{,}54 < \text{x} \le 6{,}02, \text{ então classifica como grande} \\ \text{x} > 6{,}02, \text{ então classifica como extra} \end{cases}$$

Problema 36.

$VL \sim N(1000; 10^2)$

(ggggg) $\text{P}(\text{VL} < 990) = \text{P}(\text{Z} < \text{-}1) = 0{,}16 \longrightarrow 16\%$

(hhhhh) $\text{P}(|\text{VL - }1000| < 20) = \text{P}(\text{-}20 < \text{VL - }1000 < 20) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545 \longrightarrow 95{,}5\%$

(iiiii) $\text{P}(|\text{VL - }1200| < 2 \times 20) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545 \longrightarrow 95{,}5\%$ $\quad \therefore$ *não muda*

Problema 37.

$D \sim \text{N}(0{,}10; (0{,}02)^2)$

$$\text{V} = \begin{cases} 5, & |\text{D - }0{,}10| > 0{,}03 \\ 10, & |\text{D - }0{,}10| \le 0{,}03 \end{cases}$$
$$E(\text{V}) = 5 \times \text{P}(|\text{D - }0{,}10| > 0{,}03) + 10 \times \text{P}(|\text{D - }0{,}10| \le 0{,}03)$$
$$\text{P}(|\text{D - }0{,}10| \le 0{,}03) = \text{P}(\text{- }0{,}03 < \text{D - }0{,}10 < 0{,}03) = \text{P}(\text{-}1{,}5 < \text{Z} < 1{,}5) = 0{,}867$$

Logo,

$$E(\text{V}) = 5 \times 0{,}133 + 10 \times 0{,}867 = 9{,}34$$

Problema 38.

$$\text{Aparelho A} \longrightarrow \begin{cases} Lucro = 1000,\ sem\ restituição. \\ \Pr ejuízo = 3000, com\ restituição. \end{cases}$$

$$\text{Aparelho B} \longrightarrow \begin{cases} Lucro = 2000,\ sem\ restituição. \\ \Pr ejuízo = 8000, com\ restituição. \end{cases}$$

X : tempo para a ocorrência de algum defeito grave.

$X \mid A \sim N(9;4).$

$X \mid B \sim N(12;9).$

Então:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 6 \mid \mathrm{A}) = P(Z \leq -1{,}5) = 0{,}066$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 6 \mid \mathrm{B}) = P(Z \leq -2) = 0{,}023$$

Portanto os lucros esperados para os dois produtos são:

$$A \longrightarrow 1000 \times 0{,}934 - 3000 \times 0{,}066 \cong 736$$

$$B \longrightarrow 2000 \times 0{,}977 - 8000 \times 0{,}023 \cong 1770$$

Portanto, incentivaria as vendas do aparelho do tipo B.

Problema 39.

(jjjjj) $X \sim U(1;3)$ então $E(X) = 2$

$Y = 3X + 4$ então $E(Y) = 10$

$$E(Z) = \int_1^3 e^x \times \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \times \left[e^x\right]_1^3 = \frac{1}{2} \times \left(e^3 - e\right)$$

(kkkkk) $X \sim f(x) = e^{-x}, x > 0$ então $E(X) = 1$

$$E(Y) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

$$E(Z) = \int_0^\infty \frac{3}{x+1} e^{-x} dx$$

Problema 40.

$X \sim U(-a;3a)$ então $E(X) = a$

$$Var(X) = \frac{(3a+a)^2}{12} = \frac{16a^2}{12} = \frac{4}{3}a^2$$

Problema 41.

(lllll) $E(T) = \int_0^\infty t \frac{1}{\beta} e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \times \int_0^\infty t e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \beta$, usando integração por parte.

(mmmmm) $E(T^2) = \int_0^\infty t^2 \frac{1}{\beta} e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \times \int_0^\infty t^2 e^{\frac{-t}{\beta}} dt = 2\beta^2$

Logo,

$$Var(X) = E(T^2) - [E(T)]^2 = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

Problema 43.

(nnnnn) $F_y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = F_x\left(\sqrt{y}\right) - F_x\left(-\sqrt{y}\right)$

(ooooo) $f_y(y) = \dfrac{f_x\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} - \dfrac{f_x\left(-\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_x\left(\sqrt{y}\right) - f_x\left(-\sqrt{y}\right)\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, 0< y <1

(ppppp) $E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

(qqqqq) $E(Y) = \int_0^1 y \dfrac{1}{2\sqrt{y}} dy = \dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

Problema 44.

$X \sim f(x) = e^{-x}, x > 0$ então $E(X) = 1 = Var(X)$

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{E(X-1)}{1} = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_x^2} = 1$$

Problema 45.

(rrrrr) $\alpha = 1 \longrightarrow \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 = 0!$

Vale para $\alpha = n$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n \times \Gamma(n) = n \times (n-1) = n!$$

(sssss) O raciocínio em (a) vale para qualquer $n \in \Re_+$.

(ttttt) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$; faça $x = \dfrac{u^2}{2} \longrightarrow dx = udu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} udu = \sqrt{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\pi}$$

(uuuuu) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha}e^{-x/\beta}dx=\alpha\beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{(\alpha+1)-1}e^{-x/\beta}dx$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{(\alpha+1)-1}e^{-x/\beta}dx=1$ pois é a f.d.p. de $X\sim Gama(\alpha+1,\beta)$.

Logo,

$E(X)=\alpha\beta$.

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx=\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2}{(\alpha+1)\alpha\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha}e^{-x/\beta}dx=$

$=\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2}{}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}x^{(\alpha+2)-1}e^{-x/\beta}dx=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2$

Então,

$Var(X)=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$

Problema 46.

(vvvvv) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{b}^{\infty}\frac{\alpha}{b}b^{\alpha+1}x^{-\alpha-1}dx=\frac{\alpha}{b^{-\alpha}}\times\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_b^{\infty}=b^{\alpha}\times b^{-\alpha}=1$

(wwwww) $\alpha>1$

$E(X)=\int_{b}^{\infty}\alpha b^{\alpha}x^{-\alpha}dx=\alpha b^{\alpha}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_b^{\infty}=\frac{\alpha b}{\alpha-1}$

$\alpha>2$

$E(X^2)=\int_{b}^{\infty}\alpha b^{\alpha}x^{-\alpha+1}dx=\alpha b^{\alpha}\frac{x^{-\alpha+2}}{2-\alpha}\Big|_b^{\infty}=\frac{\alpha b^2}{\alpha-2}$

Então,

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\alpha b^2}{\alpha-2}-\left[\frac{\alpha b}{\alpha-1}\right]^2=\frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Problema 47.

(xxxxx) $E(X)=\int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$ (1)

Tomando $\ln x=y\rightarrow x=e^{y}, dx=e^{y}dy$

$\frac{y-\mu}{\sigma}=z\longrightarrow y=\mu+\sigma z, dy=\sigma dz$

Voltando a (1):

$E(X)=\int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu+\sigma z}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}\sigma dz=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(z^2-2\sigma z+\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}}dz=$

$$= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(z-\sigma)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{\sqrt{2\pi}} dz}_{1} = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

(yyyyy) $E(X^2) = m^2 e^{\sigma^2}$, $m = E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

$$Var(X) = m^2 e^{\sigma^2} - m^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$$

Problema 48.

$$P(X > x) = e^{-x},\ P(X > t + x) = e^{-(t+x)}$$

$$\therefore \frac{P(X > t + x)}{P(X > x)} = \frac{e^{-(t+x)}}{e^{-x}} = e^{-t} = P(X > t)$$

Problema 49.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} -x\frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\times\int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx + \frac{1}{2}\times\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\times(-1) + \frac{1}{2}\times 1 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx = \left[xe^{x}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = -1$$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = \left[xe^{-x}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{x}dx = 1$$

Problema 50.

$X \sim U(0,1)$ $\qquad Y = \frac{1}{2}X^2$

Então:

$$E(Y) = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{2}\times\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Problema 51.

(zzzzz) $\beta = 1 \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ logo f.d.p. de uma exponencial.

(aaaaaa) $\beta = 2 \longrightarrow f(x) = 2xe^{-2x}, x \geq 0$

$$E(X) = 2\times\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}dx \text{ (integrar por partes!)}$$

Problema 52.

$$f(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)}x(1-x) = 6x(1-x),\quad 0 < x < 1$$

$$P(X \le 0{,}2) = 6 \times \int_0^{0,2} x(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0,2} = 0{,}104$$

$$E(X) = 6 \times \int_0^1 x^2(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 6 \times \int_0^1 x^3(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{20}$$

Problema 53.

$$E(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx \qquad (1)$$

Tomando:

$$1 + x^2 = y, \quad dy = 2xdx$$

Voltando a (1):

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} [\log y]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

, logo não existe.

Problema 56.

$X \sim N(10;16)$

Então:

$$Q_x = 10 + 4Q_z$$

$$Q_z(0{,}10) = -1{,}28 \longrightarrow Q_x(0{,}10) = 10 + 4 \times (-1{,}28) = 4{,}88$$

$$Q_z(0{,}25) = -0{,}67 \longrightarrow Q_x(0{,}25) = 10 + 4 \times (-0{,}67) = 7{,}32$$

$$Q_z(0{,}50) = 0 \longrightarrow Q_x(0{,}1) = 10 + 4 \times (0) = 10$$

$$Q_z(0{,}75) = 0{,}67 \longrightarrow Q_x(0{,}75) = 10 + 4 \times (0{,}67) = 12{,}68$$

$$Q_z(0{,}90) = 1{,}28 \longrightarrow Q_x(0{,}90) = 10 + 4 \times (1{,}28) = 15{,}12$$

Problema 57.

Considerando agora $Y \sim \chi^2(5)$, tem-se:

$$Q(0{,}10) = 1{,}610$$

$$Q(0{,}25) = 2{,}672$$

$$Q(0{,}50) = 4{,}351$$

$$Q(0{,}75) = 6{,}676$$

$$Q(0{,}90) = 9{,}236$$

Problema 58.

(bbbbbb) $P\left(\chi^2(4) > 9{,}488\right) = e^{-4,724} \sum_{j=0}^{1} \frac{(4{,}724)^j}{j!} = 0{,}0089 \times [1 + 4{,}724] = 0{,}051$

Da tabela da ditribuição qui-quadrado vem que: $P(\chi^2(4) > 9{,}488) = 0{,}05$.

(cccccc) $P(\chi^2(10) > 16) = e^{-8}\sum_{j=0}^{1}\frac{(8)^j}{j!} = 0{,}00034 \times [1 + 8 + 32 + 85{,}3 + 170{,}7] = 0{,}101$

Da tabela da ditribuição qui-quadrado vem que: $P(\chi^2(10) > 16) = 0{,}10$.

Capítulo 8

Problema 01.

(dddddd) Ω={C1, C2, C3, C4, C5, C6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}
Onde: C=cara e R=coroa

(eeeeee)

	y						
x	1	2	3	4	5	6	P(X=x)
0	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
1	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
P(Y=y)	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	1,00

(ffffff) Sim, pois $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j), \forall i, j$

(gggggg) 1) 0,5 2) 1,0 3) 0,5 4) 0 5) 2/3 6) 1/2

Problema 02.

(hhhhhh)

x	1	2	3
P(x)	0,3	0,2	0,5

y	0	1	2
P(y)	0,30	0,50	0,20

(iiiiii)

E(X) = 2,2	E(Y) = 0,9
$E(X^2)$ =5,6	$E(Y^2)$ =1,3
Var(X) = 0,76	Var(Y) = 0,49

(jjjjjj) Não, pois $P(X=1,Y=0)=0{,}1 \neq P(X=1)P(Y=0)=0{,}09$

(kkkkkk) $P(X=1/Y=0)=\frac{1}{3}=0{,}33$ $P(Y=2/X=3)=\frac{1}{5}=0{,}2$

(llllll) $P(X \leq 2)=0{,}5$ $P(X=2,Y \leq 1)=\frac{1}{8}=0{,}125$

Problema 03.

(mmmmmm) Preenchendo os brancos por incógnitas temos:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	y	u	d
0	x	z	t	1/3
1	1/4	w	1/4	e
P(X=x)	a	b	c	1

Da coluna 1, vem $a=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+x=\frac{1}{3}+x$. Da independência entre X e Y temos que

$$a \cdot \frac{1}{3}=x \Rightarrow a=3x$$

substituindo na expressão acima vem $3x = \frac{1}{3} + x$ ou $x = \frac{1}{6}$ e $a = \frac{1}{2}$

Ainda da independência vem que $a \cdot d = \frac{1}{12}$ ou $d = \frac{1}{6}$

Por diferenças entre marginais e caselas, e da independência encontramos:

$$e = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$b \cdot e = w = 0 \cdot u \quad \text{e} \quad b \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ , logo } b = 0$$

imediatamente $z = y = 0$

$$c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$$

$$d = c \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Substituindo temos a resposta:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	0	1/12	1/6
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/4	0	1/4	1/2
P(X=x)	1/2	0	1/2	1

(nnnnnn) $E(X) = (-1)(1/2) + (0)(0) + (1)(1/2) = 0$

$$E(Y) = (-1)(1/6) + (0)(1/3) + (1)(1/2) = 1/3$$

$$E(X^2) = (-1)^2(1/2) + (0)^2(0) + (1)^2(1/2) = 1$$

$$E(Y^2) = (-1)^2(1/6) + (0)^2(1/3) + (1)^2(1/2) = 2/3$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X) = 1 - 0 = 1$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

(oooooo) Como $P(X = x / Y = 0) = \dfrac{P(X = x, Y = 0)}{P(Y = 0)}$ vem:

X	-1	0	1	Total
P(X=x/Y=0)	1/2	0	1/2	1

E semelhante:

x	-1	0	1	Total
P(Y=y/X=1)	1/6	1/3	1/2	1

Problema 04.

De $P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 0,2 + 0,1 = 0,3$ vem

x+y	1	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

xy	0	1	2	3	4	6
p	0,3	0,2	0	0,3	0,1	0,1

$$E(X+Y)=(1)(0,1)+(2)(0,3)+\ldots+(5)(0,1)=3,1$$

$$E[(X+Y)^2]=(1)^2(0,1)+(2)^2(0,3)+\ldots+(5)^2(0,1)=0,1+1,2+0,9+6,4+2,5=11,1$$

Portanto: $Var(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E^2(X+Y)=11,1-(3,1)^2=1,49$

De modo análogo:

$$E[(XY)^2]=(0)^2(0,3)+(1)^2(0,2)+\ldots+(6)^2(0,1)=0+0,2+0+2,7+1,6+3,6=8,1$$

$$E(XY)=0+0,2=0+0,9+0,4+0,6=2,1$$

$$Var(XY)=E[(XY)^2]-E^2(XY)=8,1-(2,1)^2=3,69$$

Problema 05.

(pppppp) Do teorema 8.1 e 8.2 vem

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0+\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}$$

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)=1+\tfrac{5}{9}=\tfrac{14}{9}$$

(qqqqqq) Do teorema acima e propriedades da Esperança e Variância da pág. 208

$$E(Z)=E(aX+bY)=E(aX)+E(bY)=aE(X)+bE(Y)=a\cdot(0)+b\cdot\tfrac{1}{3}=10\Rightarrow b=30$$

$$Var(Z)=Var(aX)+Var(bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)=a^2\cdot(1)+b^2\cdot(\frac{5}{9})=600$$

$$a^2+(30)^2+(\frac{5}{9})=600\Rightarrow a^2=600-500\therefore a=\pm10$$

Problema 06.

Construindo o espaço amostral temos:

Ω={11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44}

(rrrrrr) Como cada resultado é equiprovável, obtém-se

	x				
y	1	2	3	4	P(Y=y)
1	1/16	1/8	1/8	1/8	7/16
2	0	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	0	1/16	1/8	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X=x)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

(ssssss)

z	2	3	4	5	6	7	8	Total
p(z)	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16	1

(tttttt) $E(X)=\frac{1}{16}+\frac{6}{16}+\frac{15}{16}+\frac{28}{16}=\frac{50}{16}=3,125$

$$E(X^2)=\frac{1}{16}+\frac{12}{16}+\frac{45}{16}+\frac{112}{16}=\frac{170}{16}=10,625$$

$$Var(X)=10,625-(2,125)^2=0,8594$$

$$E(Y) = \frac{7}{16} + \frac{10}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{30}{16} = 1{,}875$$

$$E(Y^2) = \frac{7}{16} + \frac{20}{16} + \frac{27}{16} + \frac{16}{16} = \frac{70}{16} = 4{,}375$$

$$Var(Y) = 4{,}375 - (1{,}875)^2 = 0{,}8594$$

$$E(Z) = \frac{25}{8} + \frac{15}{8} = 5$$

$$E(Z^2) = \frac{4 \cdot 1}{16} + \frac{9 \cdot 2}{16} + \frac{16 \cdot 3}{16} + \frac{25 \cdot 4}{16} + \frac{36 \cdot 3}{16} + \frac{49 \cdot 2}{16} + \frac{64 \cdot 1}{16} = \frac{440}{16} = \frac{55}{2}$$

$$Var(Z) = \frac{55}{2} + 25 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Problema 07.

(uuuuuu)

	x_1				
x_2	1	3	5	7	
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(vvvvvv) Ver acima.São independentes, pois os produtos das marginais são iguais as caselas.

(wwwwww) $E(X_1) = E(X_2) = 4{,}2$

$$Var(X_1) + Var(X_2) = 4{,}16$$

$$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1}{2}) + E(\frac{X_2}{2}) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_2)] = 4{,}2$$

Devido a independência $Var(\overline{X}) = \frac{1}{4}[Var(X_1) + Var(X_2)] = \frac{4{,}16}{2} = 2{,}08$

(xxxxxx) (a') O novo espaço amostral seria:

Ω={13, 15, 1$\underline{5}$, 17, 31, 35, 3$\underline{5}$, 37, 51, 53, 5$\underline{5}$, 57, $\underline{5}$1, $\underline{5}$3, $\underline{5}$5, $\underline{5}$7, 71, 73, 75, 7$\underline{5}$}

Logo, é possível construir a tabela abaixo:

	x1				
x2	1	3	5	7	
1	0	1/20	1/10	1/20	1/5
3	1/20	0	1/10	1/20	1/5
5	1/10	1/10	1/10	1/10	2/5
7	1/20	1/20	1/10	0	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(b') Não seriam independentes.

(c') $E(X_1) = E(X_2) = (1)(1/5) + (3)(1/5) + (5)(2/50) + (7)(1/5) = 4{,}2$

$$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2}{2}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 4{,}2) = 4{,}2$$

Exatamente o mesmo resultado obtido em (c). Como $X_1 e X_2$ não são independentes, da distribuição conjunta encontramos:

$\overline{x}$	2	3	4	5	6
P($\overline{x}$)	1/10	1/5	3/10	1/5	1/5

Daqui calculamos $E(\overline{X}^2)=19{,}2 \Rightarrow Var(\overline{X})=19{,}2-(4{,}2)^2=1{,}56$

Problema 08.

n (Ω)= $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

w	ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
P	-1,0	-1,0	0,1	-1,0	0,1	0,1	0,0	1,1	1,1	1,1

(yyyyyy)

	x			
y	-1	0	1	
0	0,3	0,1	0,0	0,4
1	0,0	0,3	0,3	0,6
	0,3	0,4	0,3	1,0

(zzzzzz) $E(X)=0{,}0$

$$E(X^2)=0{,}3+0{,}3=0{,}6 \Rightarrow Var(X)=0{,}6$$

(c) X e Y não são independentes, logo:

x+y	-1	0	1	2	total
P	0,3	0,1	0,3	0,3	1

$$E(X+Y)=-0{,}3+0{,}3+2\cdot 03=0{,}6$$

$$E[(X+Y)^2]=0{,}3+0{,}3+1\cdot 2=1{,}8$$

$$Var(X+Y)=1{,}8+0{,}36=1{,}44$$

Problema 09.

(aaaaaaa)

x+y	2	3	4	5	6
p	5/27	5/27	8/27	7/27	2/27

$$E(X+Y)=\frac{1}{27}[10+15+32+35+12]=\frac{104}{27}=3{,}85$$

$$E[(X+Y)^2]=\frac{1}{27}[20+45+128+175+72]=\frac{534}{27}=19{,}78$$

$$Var(X+Y)=\frac{534}{27}+(\frac{104}{27})^2=\frac{14418-10816}{729}=\frac{3602}{729}=4{,}94$$

(bbbbbbb)

xy	1	2	3	4	6	9
p	5/27	5/27	5/27	1/9	2/27	2/27

$$E(XY)=\frac{1}{27}[5+10+15+12+42+18]=\frac{102}{27}=3{,}78$$

$$E[(XY)^2]=\frac{1}{27}[5+20+45+48+252+162]=\frac{532}{27}=19{,}7$$

$$Var(XY) = 19{,}7 - (3{,}78)^2 = 5{,}43$$

Problema 10.

(ccccccc)

x+y	2	3	4	5	6
p	0,1	0,2	0,3	0,4	0

$$E(X+Y) = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 + 2{,}0 = 4{,}0$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(ddddddd)

xy	1	2	3	4	6	9
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0

$$E(XY) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}8 + 2{,}4 = 4{,}0$$

(eeeeeee) $E(XY) = 4$ $E(X) = 2$ $E(Y) = 2$

$$p(3{,}3) = 0{,}0 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}2$$

Problema 11.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2{,}1 - (2{,}2)(0{,}9) = 0{,}12$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X)\cdot DP(Y)}\frac{0{,}12}{\sqrt{0{,}76\cdot 0{,}49}} = 1{,}1967 \cong 0{,}20$$

Problema 12.

	x				
y	0	1	2	3	
1	1/8	0	0	1/8	1/4
2	0	1/4	1/4	0	1/2
3	0	1/8	1/8	0	1/4
	1/8	3/8	3/8	1/8	

$E(X) = 1{,}5$ $Var(X) = \frac{3}{4}$

$E(Y) = 2$ $Var(Y) = \frac{1}{2}$

(fffffff) $P(X+Y=1) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8}$

$$P(X+Y=2) = P(X=0,Y=2)P(X=1,Y=1) = 0 + 0 = 0$$
$$P(X+Y=3) = P(X=0,Y=3)P(X=1,Y=2)P(X=2,Y=1) = 0 + \frac{2}{8} + 0 = \frac{2}{8}$$

E assim por diante obtem-se:

x+y	1	3	4	5
p	1/8	1/4	1/2	1/8

|x-y|	0	1	2
p	2/8	1/2	2/8

(ggggggg)

xy	0	2	3	4	6
p	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

$$E(XY) = (0)(\frac{1}{8}) + (2)(\frac{2}{8}) + (3)(\frac{2}{8}) + (4)(\frac{2}{8}) + (6)(\frac{1}{8}) = 3$$

x/y	0	1/3	1/2	2/3	1	3
p	1/8	1/8	1/4	1/8	1/4	1/8

$$E(X/Y) = (0)(\frac{1}{8}) + (\frac{1}{3})(\frac{2}{8}) + (\frac{1}{2})(\frac{2}{8}) + (\frac{2}{3})(\frac{1}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) + (3)(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1{,}5 + 2{,}0 = 3{,}5$$

(hhhhhhh) Não são independentes, pois $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8} \neq P(X=0)P(Y=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{32}$

(iiiiiii) $E(XY) = 3$ é igual a $E(X)E(Y) = (1{,}5)(2) = 3$. Conclui-se que podem existir casos de variáveis não independentes onde a propriedade é válida.

(jjjjjjj) $E(X/Y) = 0{,}75$ que por meio acaso, é igual a $E(X)/E(Y) = {}^{1,5}\!/_{2} = 0{,}75$

(kkkkkkk) Da alternativa (a) temos:

$$E[(X+Y)^2] = (1)^2(\frac{1}{8}) + (3)^2(\frac{2}{8}) + (4)^2(\frac{4}{8}) + (5)^2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} + \frac{18}{8} + \frac{64}{8} + \frac{25}{8} = \frac{108}{8} = 13{,}5$$

$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) = 13{,}5 - (3{,}5)^2 = 1{,}25$ que também, por meio acaso, vale $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Problema 13.

Primeiro X e Y, não são independentes pois

$$P(X=-1, Y=-1) = 0 \neq P(X=-1)P(Y=-1) = (0 + \frac{1}{4} + 0)(0 + \frac{1}{4} + 0) = \frac{1}{16}$$
$$E(X) = E(Y) = (-1)(0) + (0)(1) + (1)(0) = 0$$
$$Logo, Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

o que responde ao exercício.Variáveis com esta característica são ditas não correlacionadas.

Problema 14.

(lllllll)

	x						
y	1	2	3	4	5	6	
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	1/18	0	0	0	0	1/12
3	1/36	1/36	1/12	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	1/9	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	1/4
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6	11/36
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

(mmmmmmm) Não são, pois $P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)P(y=1)$

(nnnnnnn) $E(X)=\dfrac{7}{2}$ $\qquad E(X^2)=\dfrac{1}{6}[1+4+9+16+25+36]=\dfrac{1}{6}[91]=\dfrac{91}{6}$

$$Var(X)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}=2{,}92$$

$$E(Y)=\frac{161}{36}=4{,}47$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{36}[1+12+45+112+225+396]=\frac{1}{36}[791]=\frac{791}{6}$$

$$Var(Y)=\frac{791}{36}-(\frac{161}{36})^2=\frac{28476-5921}{1296}=\frac{2555}{1296}=1{,}97$$

(ooooooo)

$$E(XY)=\frac{1}{36}[1+2+3+4+5+6+4+6+8+10+12+9+12+15+18+16+20+24+25+30+36]=$$

$$\frac{1}{36}[21+40+54+60+55+36]=\frac{616}{36}=\frac{154}{9}=17{,}11$$

$$Cov(X,Y)=\frac{616}{36}+\frac{7}{2}\cdot\frac{161}{36}=\frac{105}{72}=\frac{35}{24}=1{,}46$$

(ppppppp) $E(X+Y)=\dfrac{7}{2}+\dfrac{161}{36}=\dfrac{287}{36}=7{,}97$

(f)

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{35}{12}+\frac{2555}{1296}+2\frac{35}{24}=\frac{3780+2555+3780}{1296}$$

$$=\frac{10115}{1296}=7{,}80$$

Problema 15.

w:	kkk	kkc	kck	ckk	kcc	ckc	Cck	ccc
x:	2	2	1	1	1	1	0	0
y:	1	0	1	1	0	0	1	0
s:	3	2	2	2	1	1	1	0
p:	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

(qqqqqqq)

	y		
x	0	1	P(X=x)
0	1/8	1/8	1/4
1	1/4	1/4	1/2
2	1/8	1/8	1/4
P(Y=y)	1/2	1/2	1

Sim, são independentes, pois cada casela é igual ao produto das respectivas marginais. Da proposição 8.1 $Cov(X,Y)=0$. Verificando diretamente:

xy	0	1	2
p	5/8	1/4	1/8

$$E(XY) = (0)(\frac{5}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) + (2)(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2} = 0,5$$
$$E(X) = 1 \qquad E(Y) = 0,5$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,5 - (1)(0,5) = 0$$

(rrrrrrr) Já calculamos $E(X) = 1$ e $E(Y) = 0,5 - (1)(0,5) = 0$, acima .

$$E(X^2) = (0)^2(\frac{1}{4}) + (1)^2(\frac{1}{2}) + (2)^2(\frac{1}{4}) = 1,5 \Rightarrow Var(X) = 1,5 - (1)^2 = 0,5$$
$$E(Y^2) = (0)^2(\frac{1}{2}) + (1)^2(\frac{1}{2}) = 0,5 \Rightarrow Var(Y) = 0,5 - (0,5)^2 = 0,25$$

s	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(S) = \frac{1}{8}[0 + 3 + 6 + 3] = 1,5$$
$$E(S^2) = \frac{1}{8}[(0)^2 + (1)^2 3 + (2)^2 3 + (3)^2 1] = 3$$
$$Var(S) = 3 - (1,5)^2 = 0,75$$

(sssssss) Sim. Como $S = X + Y$ e Y e X são independentes :

$$0,75 = Var(S) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 0,5 + 0,25$$

Problema 16.

Vamos substituir a cada operário a mesma probabilidade 1/6. Desse modo temos:

$$E(T) = \frac{1}{6}[9 + 17 + 19 + (2)(20) + 23] = 18$$
$$E(T^2) = \frac{1}{6}[9^2 + 17^2 + 19^2 + (2)(20)^2 + 23^2] = \frac{2060}{6} = 343,3$$
$$Var(T) = \frac{2060}{6} - 18^2 = \frac{116}{6} = 19,33$$
$$E(P) = \frac{1}{6}[22 + 29 + 32 + 33 + 34 + 42] = \frac{192}{6} = 32$$
$$E(P) = \frac{1}{6}[22^2 + 29^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 42^2] = \frac{6358}{6} = 1059,67$$
$$Var(P) = \frac{6358}{6} - 32^2 = \frac{214}{6} = 35,67$$
$$E(TP) = \frac{1}{6}[(9)(22) + (17)(34) + (20)(29) + (19)(33) + (20)(42) + (23)(32)] = \frac{3559}{6} = 593,17$$
$$Cov(T,P) = \frac{3559}{6} - (18)(32) = \frac{103}{6} = 17,17$$
$$\rho(T,P) = \frac{\frac{103}{6}}{\sqrt{\frac{116}{6} - \frac{214}{6}}} = \frac{103}{\sqrt{24824}} = 0,65$$

Problema 17.

(ttttttt)

xy	-1	0	1
p	1/4	1/2	1/4

$$E(XY) = (-1)(\frac{2}{8}) + (0)(\frac{4}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) = 0$$

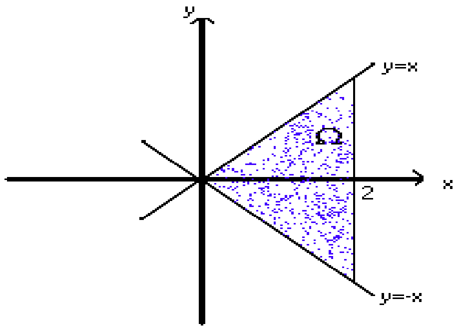
$$E(X) = E(Y) == 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

(uuuuuuu) Por exemplo: $P(X = 0, Y = 0) = 0$, que é diferente de

$$P(X = 0)P(Y = 0) = (\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$$

Problema 18.

(vvvvvvv)



(wwwwwww) $\int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{x} \frac{1}{8} x(x-y)dydx = -\frac{1}{8}[\int_0^2 (x^2 - xy)dy]dx =$

$$\frac{1}{8}\int_0^2 [\int_{-x}^{x} x^2 dy - \int_{-x}^{x} xydy]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 [x^2 \int_{-x}^{x} dy - x\int_{-x}^{x} ydy]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 [x^2 y \Big|_{-x}^{x} - 0]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 2x^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{16} = 1$$

(xxxxxxx)

$$f_y(y) = \int_{\varpi_x} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^2 \frac{1}{8} x(x-y)dx (I), 0 \le y \le 2 \\ \int_{-y}^{2} x(x-y)dx (II), -2 \le y \le 0 \\ 0, c.c. \end{cases}$$

$$(I) = \frac{1}{8}\int_y^2 (x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}[\frac{x^3}{3}\Big|_y^2 - y\frac{x^2}{2}\Big|_y^2] = \frac{1}{8}[\frac{8-y^3}{3} - (2y - \frac{y^3}{2})] =$$

$$= \frac{1}{48}[16 - 2y^3 - 12y + 3y^3] = \frac{1}{48}(y^3 - 12y + 16)$$

$$(II)=\frac{1}{8}\int_{-y}^{2}(x^2+xy)dx=\frac{1}{8}[\frac{x^3}{3}\Big|_{-y}^{2}-y\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{2}=\frac{1}{8}[\frac{8+y^3}{3}-(2y-\frac{y^3}{2})]=$$

$$=\frac{1}{48}[16+2y^2-12y+3y^3]=\frac{1}{48}[5y^3-12y+16]$$

$$f_x(x)=\int_{\varpi_y}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}x(x-y)dy(III),0\le x\le 2\\ 0,c.c.\end{cases}$$

$$(III)=\frac{1}{8}\int_{-x}^{x}(x^2-xy)dy=\frac{1}{8}[x^2\int_{-x}^{x}dy-x\int_{-x}^{x}ydy]=\frac{1}{8}[x^2y\Big|_{-x}^{x}-0]=\frac{x^3}{4}$$

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{4},0\le x\le 2\\ 0,c.c.\end{cases}$$

Problema 19.

(yyyyyyy) $f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$

$$f_y(y)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

$$f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$$

Distribuição exponencial com β=1.

(zzzzzzz)

$$P(0<X<1,1<Y<2)=\int_0^1\int_1^2 e^{-x(x+y)}dxdy=\int_0^1 e^{-x}dx\int_1^2 e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^1)(-e^{-y}\Big|_1^2)=$$

$$=[-e^{-1}+e^{-0}][-e^{-2}+e^{-1}]=(1-\frac{1}{e})(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2})=(\frac{e-1}{e})(\frac{e-1}{e^2})=\frac{(e-1)^2}{e^3}$$

(aaaaaaaa) Como os distribuições marginais de X e Y seguem o modelo exponencial com β=1 temos do exercício 7.14 os resultados $E(X)=E(Y)=1$ e $Var(X)=Var(Y)=1$

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^\infty)(-e^{-y}\Big|_0^\infty)=1\cdot 1=1$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\therefore \rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{DP(X)DP(Y)}=\frac{0}{1}=0$$

Problema 20.

(i)

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(y^3-12y+16)}, 0\le y\le 2\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(5y^3-12y+16)}, -2\le y\le 0\\[2ex] 0, c.c.\end{cases}$$

(ii)

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{x^3}{4}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-y)}{x^2}, 0\le y\le 2\\[2ex] 0, c.c.\end{cases}$$

Problema 21.

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x}$$

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}}=e^{-y}$$

As distribuições marginais seguem a distribuição exponencial com β=1. Como $f(x,y)=f_y\cdot f_{x/y}=f_x\cdot f_{y/x}$. Concluímos que as variáveis são independentes.

Problema 22.

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^4\frac{1}{64}(x+y)dy=[\frac{1}{64}(xy+\frac{y^2}{2}]\Big|_0^4=\frac{1}{64}(4x+2)$$

$$f_{y/x}=(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\frac{\frac{1}{64}(x+y)}{\frac{1}{16}(x+2)}=\frac{x+y}{4(x+2)}$$

Devido a simetria da função *f(x,y)* temos:

$$f_y(y) = \frac{1}{16}(y+2)$$

$$f_{x/y} = (x/y) = \frac{x+y}{4(y+2)}$$

Problema 23.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dx = 3e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 3e^{-3y}(-e^{-x}\Big|_0^{\infty}) = 3e^{-y}$ tem distribuição exponencial com β=1/3.

$f_X(x) = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dy = 3e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-3y}dy = 3e^{-x}(-\frac{1}{3}e^{-3y}\Big|_0^{\infty}) = e^{-x}$ tem distribuição exponencial com β=1.

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{e^{-x}} = 3e^{-3y}$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{3e^{-3y}} = e^{-x}$$

Problema 24.

$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(y/x)dy = \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y}dy = 1$. Conforme o exercício 7.41.

De modo análogo $E(X/Y) = 1$.

Problema 25.

$$E(X/Y) = \int_0^4 \frac{x(x+4)}{4(y+2)}dx = \left(\frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}y}{4(y+2)}\Big|_0^4\right) = \frac{\frac{64}{3}+8y}{4(y+2)} = \frac{16+6y}{y+2} = \frac{6y+16}{y+2}$$

Devido a simetria: $E(Y/X) = \dfrac{6x+16}{x+2}$

Problema 26.

Supõe-se que existe a função conjunta *f(x,y)* e as respectivas marginais e condicionais.
Assim, $E(X) = \int x \cdot f_X(x)dx$

$E(X/Y) = \int x \cdot f(x/y)dx = g(y)$ é uma função de y.

$$E[E(X/Y)] = E[g(y)] = \int g(y) \cdot f_Y(y)dy = \int \left(\int x \cdot f_{X/Y}(x/y)dx\right) f_Y(y)dy =$$

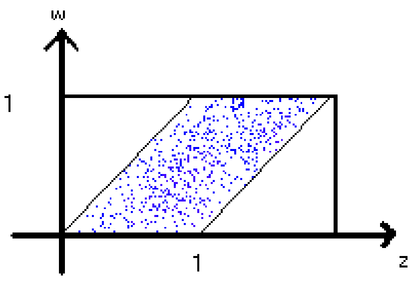
$$= \int x\left(\int f_Y(y) \cdot f_{X/Y}(x/y)dy\right)dx = \int x\left(\int f(x,y)dy\right)dx = \int x \cdot f_X(x)dx = E(X)$$

Problema 27.

Inicialmente temos que $f(x,y) = (2x)(2y) = 4xy$ .Fazendo *Z*=*X*+*Y* e *W*=*Z*, obtemos:

X=W e Y=Z-W e $|J|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$,logo $g(z,w)=4(z-w)(-1)=4w^2-4wz.$

Estamos interessados na distribuição marginal de Z, ou seja, $g_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z,w)dw.$ Porém, $0\le z-w\le 1$, ou seja,



$$g_Z(z)=\int_0^z (4w^2-4wz)dw+\int_z^1 (4w^2-4wz)dw = 4[\frac{w^3}{3}-\frac{w^2}{2}z]\Big|_0^z+4[\frac{w^3}{3}-\frac{w^2}{2}z]\Big|_z^1=$$
$$=4[\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}]+4[\frac{1}{3}-\frac{z}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^3}{2}]=\frac{4}{3}-2z$$

Problema 28.

Inicialmente temos $f(x,y)=\frac{2}{9}x^2y$

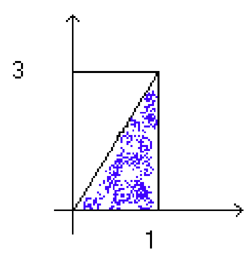
Repetindo o exemplo 8.27, temos W=XY e Z+X:

X=Z e $Y=\frac{W}{Z}$

$$|J|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}=\frac{1}{z}$$

$$g(z,w)=\frac{2}{9}z^2\cdot\frac{w}{z}\frac{1}{z}=\frac{2}{9}w$$

Encontramos agora os intervalos de integração: $0\le z\le 1;0\le\frac{w}{z}\le 3\Rightarrow 0\le w\le 3z$, ou:



$$f_W(w)=\int_0^{3z}\frac{2}{9}wdz=\frac{2}{9}w(k)\Big|_0^{3z}=\frac{2}{9}w$$

Problema 29.

$$f(x,y) = 2e^{-(x+2y)}$$

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$X = ZW \qquad |J| = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$$

$$Y = W \Rightarrow W = Y$$

$$g(z,w) = 2e^{-(zw+2w)} \cdot w = 2we^{-w(z+2)}$$

Façamos a integral indefinida: $g_Z(z) = 2\int we^{-w(z+2)}dw$

Integração por partes (ver Morettin, 1999):

$$u = w \Rightarrow du = 1$$

$$dv = e^{-w(z+2)} \Rightarrow v = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)}$$

$$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} - \int \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)}dw = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} + \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2} = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz+2w+1)$$

$$w > 0$$

$$z > 0$$

Pr

$$g_Z(z) = 2[\frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz+2w+1)]\Big|_0^\infty = \frac{2}{(z+2)^2}$$

oblema 30.

	x			
y	-1	0	1	P(Y)
-2	1/18	1/18	1/18	1/6
0	2/9	2/9	2/9	2/3
2	1/18	1/18	1/18	1/6
P(X)	1/3	1/3	1/3	1

z	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(z)	1/18	1/18	5/18	2/9	5/18	1/18	1/18

$$E(Z) = \frac{-3-2-5+0+5+2+3}{18} = 0$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = E(Z^2) = \frac{9+4+5+0+5+4+9}{18} = 2$$

Problema 31.

(bbbbbbbb)

	x			
y	5	10	15	total
5	0,1	0,2	0,1	0,4

10	0,2	0,3	0,1	0,6
total	0,3	0,5	0,2	1

(cccccccc) Veja a tabela acima.

(dddddddd) Não, pois $P[X=5,Y=5] \neq P[X=5] \cdot P[Y=5]$

(eeeeeeee)

$$E(X) = 1,5 + 5,0 + 3,0 = 9,5$$

$$E(X^2) = 7,5 + 50 + 45 = 102,5$$

$$Var(X) = 12,25$$

$$E(Y) = 2,0 + 6,0 = 8,0$$

$$E(Y^2) = 10,0 + 60,0 = 70,0$$

$$Var(X) = 6,00$$

$$E(XY) = 2,5 + 10,0 + 7,5 + 10,0 + 30,0 + 15,0 = 75$$

$$Cov(X,Y) = 75,0 + 60,0 = -1$$

(ffffffff) $Z + X + Y$

z	P[z]
10	0,1
15	0,4
20	0,4
25	0,1

$$E(Z) = 1,0 + 6,0 + 8,0 + 2,5 = 17,5$$

$$E(Z^2) = 10 + 90 + 160 + 62,5 = 322,5$$

$$Var(Z) = 322,5 - 306,25 = 16,25$$

(gggggggg) 50% dos casais.

Problema 32.

x+y:	4	4	2	1	5
x-y:	2	0	2	1	1
x-y-1:	1	-1	1	0	0

x	1	2	3
p	0,2	0,4	0,2

y	0	1	2
p	0,4	0,2	0,4

x+y	1	2	4	5
p	0,2	0,4	0,4	0,2

x-y	0	1	2
p	0,2	0,4	0,4

x-y-1	-1	0	1
p	0,2	0,4	0,4

Problema 33.

Podem ser formadas 10 turmas distintas abaixo:

334 335 335 345 345 345 345 355 355 455

Supondo que sejam sorteados de uma vez, o espaço amostral:

(hhhhhhhh)

	y		
x	4	5	Px
3	1/10	4/5	9/10
4	0	1/10	1/10
Py	1/10	9/10	1

(iiiiiiii)

$$E(X) = 3P(X+3) + 4P(X=4) = 3\cdot\frac{9}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} = 3{,}1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = 9\cdot\frac{9}{10} + 16\frac{1}{10} = 9{,}7$$

$$\therefore Var(X) = 9{,}7 + (3{,}1)^2$$

(jjjjjjjj)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(Y) = 4\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{9}{10} = 4{,}9$$

$$E(X) = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot 5\cdot\frac{8}{10} + 4\cdot 5\frac{1}{10} = 15{,}2$$

$$\therefore Cov(X,Y) = 15{,}2 + 3{,}1\cdot 4{,}9 = 0{,}01$$

(kkkkkkkk)

$$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y)$$

$$E^2(X) = [E(X) + E(Y)]^2 = (3{,}1 + 4{,}9)^2 = 64$$

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2 + Y^2 + 2XY) = E(Y^2) + E(X^2) + 2E(XY)$$

$$E(Y^2) = 16\frac{1}{10} + 25\cdot\frac{9}{10} = 24{,}1$$

$$\therefore Var(X,Y) = 64{,}2 - 64 = 0{,}2$$

Problema 34.

Vamos determinar a probabilidade de Δ, o evento de uma pessoa sorteada obter nota maior que 80, e é Δ=*{X>80}*

Considere H e M os eventos: a pessoa é homem ou mulher, respectivamente. H e M formam uma partição do espaço todo. Desse modo: $A = (\Delta \cap H)(\Delta \cap M)$, portanto:

$$P(\Delta) = P((\Delta \cap H) \cup (\Delta \cap M)) = P(\Delta \cap H) + P(\Delta \cap M) = P(H)\cdot P(\Delta / H) + P(M)\cdot P(\Delta / M)$$

Dos dados obtemos:

$$P(H)=\frac{2}{3}$$

$$P(M)=\frac{1}{3}$$

$$P(\Delta/H)=P(X>80/X\sim N(70;10^2))=P(Z>\frac{80-70}{10})=P(Z>!)=15{,}87\%$$

$$P(A/M)=(X>80/X\sim N(65;8^2))=P(Z>\frac{80-65}{8})=P(Z>1{,}875)=3{,}04\%$$

$$P(\Delta)=(\frac{2}{3}\cdot 15{,}87)+(\frac{1}{3}\cdot 3{,}04)=11{,}59\%$$

Problema 35.

(llllllll) $E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=\sigma^2+\mu^2$

(mmmmmmmm) $E[X(X-1)]=E[X^2-X]=E(X^2)-E(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu=\sigma^2+\mu(\mu-1)$

Problema 36.

(nnnnnnnn)

$$P(X=2)=0{,}30$$

$$P(X=2/Y=1200)=\frac{0{,}05}{0{,}30}=\frac{1}{6}=0{,}17$$

(oooooooo)

$$E(XY)=100\{2{,}4\cdot 0{,}1+3{,}2\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}05+24\cdot 0{,}05+36\cdot 0{,}1+48\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}05+$$
$$40\cdot 0{,}2+60\cdot 0{,}05+50\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}05+150\cdot 0{,}05\}=4530$$

$$Cov(X,Y)=4530-2120(2{,}5)=-770$$

$$\rho(X,Y)=\frac{-770}{(1)(1505{,}2)}=0{,}512$$

Problema 37.

(i)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	1/9	1/9	1/9	1/3
1	1/9	1/9	1/9	1/3
2	1/9	1/9	1/9	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

$E(X) = E(Y) = 1$

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

$Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$(a) E(XY) = \frac{1}{9}\{0+0+0+0+1+2+0+2+4\} = 1$

$(b) Cov(X,Y) = 1-(1)(1) = 0$

$(c) Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(XY) = \frac{4}{3}$

(ii)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	0	1/6	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

As marginais são as mesmas, assim:

$E(X) = E(Y) = 1$

$Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{3}$

$(a) E(X,Y) = \frac{1}{6}\{0+0+0+0+2+0+2\} = \frac{2}{3}$

$(b) Cov(X,Y) = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$

$(c) Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$

Problema 38.

Esta é uma situação particular do ex. 20, onde B=D=0. Assim A=a e C=b.
(*)vale $\forall A, B, C, D$

$\therefore satisfazedo:$

$$\rho_{ZW} = \rho(aX, bY) = \frac{ab}{|ab|} = \rho_{XY}$$

Problema 39.

$$\rho_{ZW} = \frac{Cov(Z,W)}{\sqrt{Var(Z)Var(W)}}$$

$$Cov(Z,W) = E(ZW) - E(Z)E(W) = E[(AX+B)(Y+D)] - E(AX+B)E(Y+D) =$$
$$= E(ACXY + ADX + BCY + BC) - (AE(X)+B)(CE(Y)+0) + =$$
$$= ACE(XY) + ADE(X) + BCE(Y) + BD - ACE(X)E(Y) - ADE(X) - BCE(Y) - BD =$$
$$= AC[E(XY) - E(X)E(Y)] = ACCov(X,Y)$$
$$Var(Z) = Var(AX+B) = A^2Var(X)$$
$$Var(W) = Var(CY+D) = C^2Var(Y)$$
$$\therefore \rho_{ZW} = \frac{ACCov(X,Y)}{\sqrt{A^2C^2Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|}\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|} = \rho_{XY}$$
$$A>0, C>0 \Rightarrow \frac{AC}{|AC|} = \frac{AC}{AC} = 1$$
$$\therefore \rho_{ZW} = \rho_{ZW}$$

Problema 40.

Considerando X e Y o número da 1^a e 2^a bola retirada, tem-se a distribuição conjunta da por:

$$P(X=i, Y=j) = \frac{1}{n^2}, \forall i, j$$
$$i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n$$

Logo $Z=|X-Y|$, poderá assumir os valores: 0,1,2,...,n-1Z+0, ocorrerá nas n caselas da diagonal principal , logo $P(Z=0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Z=1, ocorrerá nas duas diagonais imediatamente ao lado da principal, ou seja, em 2(n-1) caselas, logo $P(Z=1) = \frac{2(n-1)}{n^2}$.

Pelo raciocínio análogo, achamos: $P(Z=2) = \frac{2(n-2)}{n^2}$. Até: $P(Z=n-1) = 2$

Logo:

z	0	1	2	...	n-1	total
p( )	$\frac{n}{n^2}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$	$\frac{2(n-2)}{n^2}$		$\frac{2}{n^2}$	1

Problema 41.

$$Var(X-2Y) = Var(X) + Var(2Y) - 2Cov(X,2Y) = Var(X) + 4Var(Y) - 4Cov(X,Y) =$$
$$= Var(X) + 4Var(Y) - 4\rho(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 1 + 4(2) - 4(\frac{1}{2})\sqrt{1\cdot 2} = 9 - 2\sqrt{2} = 6{,}17$$

Problema 42.

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 0 = 0$$

$$E(U) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0 - 0 = 0$$

$$Cov(Z,U) = E(ZU) - E(Z)E(U) = E(ZU) - 0 = E(ZU) = E[(X+Y)(X-Y)] =$$
$$= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = E(X^2) - 0 - E(Y^2) + 0 = [E(X^2) - E^2(X)] -$$
$$-[E(Y^2) - E^2(Y)] = Var(X) - Var(Y) = 1 - 1 = 0$$

Problema 43.

(pppppppp) Como X e Y são independentes tem-se: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \iint xyf_X(x)f_y(y)dxdy = \int xf_X(x)dx \int yf_Y(y)dy = E(X)E(Y)$$

(qqqqqqqq) Das propriedades do operador E, tem-se:

$$Z = aX + bY, \log o \Rightarrow E(Z) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_1 + b\mu_2$$
$$Var(aX+bY) = Var(aX) + Var(bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$$

(rrrrrrrr) O resultado é a generalização do resultado, assim:

$$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$$
$$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$$

Problema 44.

Não, pois o produto das marginais não reproduz a função conjunta.

Problema 45.

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(Y)$$

Problema 46.

Já foi visto em 43(c) que:

$$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$$
$$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$$

Logo $E(\overline{X}) = E(\sum \frac{X_i}{n}) = \frac{1}{n}E(\sum X_i) = \frac{\sum \mu_i}{n}$, ou seja, a média é a média dos parâmetros populacionais.

$$Var(\overline{X}) = Var(\frac{\sum X_i}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum \sigma_i^2$$

Problema 47.

Substituindo os valores nas fórmulas do exercício 8.46, tem-se:

$$E(\overline{X}) = \frac{\sum \mu_i}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sum \sigma_i^2}{n^2} = \frac{\sum \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Capítulo 9

Problema 01

$18 \text{ mod } 5 = 3$, porque $18 = 3 \times 5 + 3$

$360 \text{ mod } 100 = 60$, porque $360 = 3 \times 100 + 60$

Problema 03

$a = 5, \ m = 100$

$$n_0 = 13 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

$$n_1 = (5 \times 13) \text{mod}\, 100 = 65 \text{ mod}\, 100 = 65 \longrightarrow u_1 = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

$$n_2 = (5 \times 65) \text{mod}\, 100 = 325 \text{ mod}\, 100 = 25 \longrightarrow u_2 = 0{,}25$$

$$n_3 = (5 \times 25) \text{mod}\, 100 = 125 \text{ mod}100 = 25 \longrightarrow u_3 = 0{,}25$$

i	0	1	2	3	...	9
u_i	0,13	0,65	0,25	0,25	...	0,25

Portanto, o período nesse caso é $h = 3$.

Problema 04

$a = 13, \ m = 100$

$$n_0 = 19 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

$$n_1 = (13 \times 19) \text{mod}\, 100 = 247 \text{ mod}\, 100 = 47 \longrightarrow u_1 = \frac{47}{100} = 0{,}47$$

$$n_2 = (13 \times 47) \text{mod}\, 100 = 611 \text{ mod}\, 100 = 11 \longrightarrow u_2 = 0{,}11$$

$$n_3 = (13 \times 11) \text{mod}\, 100 = 143 \text{ mod}100 = 43 \longrightarrow u_3 = 0{,}43$$

$$n_4 = (13 \times 43) \text{mod}\, 100 = 559 \text{ mod}100 = 59 \longrightarrow u_4 = 0{,}59$$

$$n_5 = (13 \times 59) \text{mod}\, 100 = 767 \text{ mod}100 = 67 \longrightarrow u_5 = 0{,}67$$

$$n_6 = (13 \times 67) \text{mod}\, 100 = 871 \text{ mod}100 = 71 \longrightarrow u_6 = 0{,}71$$

$$n_7 = (13 \times 71) \text{mod}\, 100 = 923 \text{ mod}100 = 23 \longrightarrow u_7 = 0{,}23$$

$$n_8 = (13 \times 23) \text{mod}\, 100 = 299 \text{ mod}100 = 99 \longrightarrow u_8 = 0{,}99$$

$$n_9 = (13 \times 99) \text{mod}\, 100 = 1287 \text{ mod}100 = 87 \longrightarrow u_9 = 0{,}87$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_i	0,19	0,47	0,11	0,43	0,59	0,67	0,71	0,23	0,99	0,87

Portanto, o período nesse caso é $h = 20$.

Problema 06

Da 6ª coluna da tabela VII obtem-se:

u_i : 0,11; 0,82 ; 0,43 ; 0,56 ; 0,60.

Da distribuição da variável X, vem:

$$p_1 = 0{,}1$$
$$p_1 + p_2 = 0{,}3$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}7$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}9$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1{,}0$$

Então:

$$u_1 = 0{,}11 \to \mathrm{p}_1 \le 0{,}11 \le \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 1$$

$$u_2 = 0{,}82 \to \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \le 0{,}82 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 + p_4 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}43 \to \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}43 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 2$$

$$u_4 = 0{,}56 \to \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}56 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 2$$

$$u_5 = 0{,}60 \to \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}60 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 2$$

Assim, os números gerados são: $(1, 3, 2, 2, 2)$.

Problema 07

Vejamos a distribuição da variável aleatória T:

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Da 11ª coluna da tabela VII, obtem-se:
u_i : 0,57; 0,19 ; 0,38 ; 0,33 ; 0,31;0,54;0,38;0,79;0,54;0,55.
Então:

$$u_1 = 0{,}57 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 5$$

$$u_2 = 0{,}19 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}38 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 4$$

$$u_4 = 0{,}33 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 4$$

$$u_5 = 0{,}31 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 4$$

$u_6 = 0{,}54 \longrightarrow x_6 = 5$

$u_7 = 0{,}38 \longrightarrow x_7 = 4$

$u_8 = 0{,}79 \longrightarrow x_8 = 6$

$u_9 = 0{,}54 \longrightarrow x_9 = 5$

$u_{10} = 0{,}55 \longrightarrow x_{10} = 5$

Assim, os números gerados são: $(5, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 6, 5, 5)$.

Problema 08

Vamos obter a função de distribuição acumulada da v.a. X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x} 3t^2 dt = x^3 + 1, \ -1 \leq x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$$

$F(x) = u \longrightarrow x^3 + 1 = u$

Geramos $u \sim U(0,1)$ e $x = \sqrt[3]{u-1}$, note que $x \in (-1,0)$.

Se $u = 0{,}5 \longrightarrow x = \sqrt[3]{0{,}5-1} = \sqrt[3]{-0{,}5} = (-0{,}5)^{1/3} = (-0{,}5)^{0{,}333} = -0{,}793$

Problema 09

$X \sim Bernoulli(0{,}35)$

$p = 0{,}35 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}65$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}65 \\ 1, \text{ se } u \geq 0{,}65 \end{cases}$$

Se u_i : 0,419;0,285;0,111;0,330;0,036;0,415;0,188;0,061;0,127;0,791.

Então os valores gerados são: 0,1,0,0,0,0,0,0,0,1.

Problema 10

$Y \sim b(10;0{,}2)$

Considerando 10 experimentos de Bernolli; em cada $X \sim Bernoulli(0{,}2)$

$p = 0{,}20 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}80$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}80 \\ 1, \text{ se } u \geq 0{,}80 \end{cases}$$

E_1:

$u_i \longrightarrow 0{,}11;0{,}82;0{,}00;0{,}43;0{,}56;0{,}60;0{,}72;0{,}42;0{,}08;0{,}53.$

$X_i \longrightarrow 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ .$

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$$

E_2: seguir a mesma idéia apenas gerando outros u_i´s.

Problema 11

$t = -\beta \log(u)\,;\ \beta = 1/2$

Então, para gerar um valor da distribuição exponencial com $\beta = 1/2$, basta adotar:

$$t = -\frac{1}{2}\log(u_i)$$

Considerando os valores de u_i encontrados no Problema 9, tem-se:

$t_i \longrightarrow 0{,}435;0{,}061;1{,}099;0{,}554;1{,}662;0{,}440;0{,}836;1{,}398;1{,}032;0{,}117.$

Problema 12

(ssssssss) $u = F(x) \longrightarrow x = F^{-1}(u)$.

$F(x) = x^2, 0 \le x < 1 \longrightarrow u = x^2 \ \therefore x = \sqrt{u}$

Considerando os valores de u_i do Problema 10, tem-se:

$x_1 = \sqrt{0{,}11} = 0{,}332\,;\ x_2 = 0{,}906\,;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = 0{,}656\,;\ x_5 = 0{,}748$

$x_6 = 0{,}775\,;\ x_7 = 0{,}849\,;\ x_8 = 0{,}648\,;\ x_9 = 0{,}283\,;\ x_{10} = 0{,}728.$

(tttttttt) $X \sim N(10;4)$

$\Phi(z) = u \longrightarrow z \longrightarrow x = 10 + 2 \times z$

Supondo u_i : 0,94 ; 0,31 ; 0,97 ; 0,30 ; 0,38 ; 0,44 ; 0,10 ; 0,47 ; 0,73 ; 0,23.

Então:

$u_1 = 0{,}94 \longrightarrow z_1 = 1{,}56 \longrightarrow x_1 = 13{,}12$

$u_2 = 0{,}31 \longrightarrow z_2 = -0{,}50 \longrightarrow x_2 = 9{,}00$

$u_3 = 0{,}97 \longrightarrow z_3 = 1{,}89 \longrightarrow x_3 = 13{,}78$

$u_4 = 0{,}30 \longrightarrow z_4 = -0{,}52 \longrightarrow x_4 = 8{,}96$

$u_5 = 0{,}38 \longrightarrow z_5 = -0{,}31 \longrightarrow x_5 = 9{,}38$

$u_6 = 0{,}44 \longrightarrow z_6 = -0{,}15 \longrightarrow x_6 = 9{,}70$

$u_7 = 0{,}10 \longrightarrow z_7 = -1{,}28 \longrightarrow x_7 = 7{,}44$

$u_8 = 0{,}47 \longrightarrow z_8 = -0{,}08 \longrightarrow x_8 = 9{,}84$

$u_9 = 0{,}73 \longrightarrow z_9 = 0{,}61 \longrightarrow x_9 = 11{,}22$

$u_{10} = 0{,}73 \longrightarrow z_{10} = -0{,}74 \longrightarrow x_{10} = 8{,}52$

(uuuuuuuu) $X \sim t(24)$

$\Phi(t) = u$

Considerando os valores de u_i do item b, tem-se:

$u_1 = 0{,}94 \longrightarrow t_1 = 1{,}711$

$u_2 = 0{,}31 \longrightarrow t_2 = 0{,}531$

e assim por diante.

Problema 14

10 valores de $\chi^2(3) = W$

$W = \chi^2(3) = Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2} + Z_3^{\ 2}$ com $Z_i \sim N(0;1)$

Usando u_i e z_i do Problema 12 item b, tem-se:

$W_1 = (1{,}56)^2 + (-0{,}50)^2 + (1{,}89)^2 = 6{,}256$

$W_2 = (1{,}56)^2 + (-0{,}52)^2 + (-0{,}31)^2 = 2{,}780$

$W_3 = (1{,}56)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 4{,}095$

$W_4 = (1{,}56)^2 + (-0{,}08)^2 + (0{,}61)^2 = 2{,}812$

$W_5 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}52)^2 + (-0{,}31)^2 = 0{,}617$

$W_6 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 1{,}911$

$W_7 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}08)^2 + (0{,}61)^2 = 0{,}629$

$W_8 = (1{,}89)^2 + (-0{,}52)^2 + (0{,}31)^2 = 3{,}939$

$W_9 = (1{,}89)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 5{,}233$

$W_{10} = (1{,}89)^2 + (-0{,}08)^2 + (-0{,}74)^2 = 4{,}126$

Problema 17

Método de Box-Müller:

$$X = \sqrt{-2\log U_1} \times \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2\log U_1} \times \mathrm{sen}(2\pi U_2)$$

Supondo $u_1 = 0{,}6$ e $u_2 = 0{,}09$, tem-se:

$$u_1 = 0{,}6 \longrightarrow -2\log(0{,}6) = 0{,}4437 \ , \quad \sqrt{-2\log(0{,}6)} = 0{,}666$$

$$u_2 = 0{,}09 \longrightarrow \cos(2\pi(0{,}09)) = \cos(0{,}5655) = 0{,}844, \quad \mathrm{sen}(0{,}5655) = 0{,}536$$

Então:

$$z_1 = 0{,}666 \times 0{,}844 = 0{,}562$$

$$z_2 = 0{,}666 \times 0{,}536 = 0{,}357$$

Basta repetir os mesmos passos para gerar os outros valores.

Problema 18

Considerando $m = 3$:

$$n_0 = 123 \longrightarrow n_0^2 = 1\underbrace{512}9 \longrightarrow u_0 = \frac{512}{1000} = 0{,}512$$

$$n_1 = 512 \longrightarrow n_1^2 = 02\underbrace{621}44 \longrightarrow u_1 = \frac{621}{1000} = 0{,}621$$

$$n_2 = 621 \longrightarrow n_2^2 = 03\underbrace{856}41 \longrightarrow u_2 = \frac{856}{1000} = 0{,}856$$

e assim por diante.

Problema 19

$$X \sim b(5;0{,}3)$$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}6$

2) $r = \frac{p}{1-p} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}43$, $j = 0$, $pr = (0{,}7)^5 = 0{,}17$, $F = 0{,}17$

3) $u_1 = 0{,}6 > F$

4) $pr = \frac{(0{,}43) \times 5}{1} \times 0{,}17 = 0{,}37$, $F = 0{,}17 + 0{,}37 = 0{,}54$, $j = 1$

5) $u_1 = 0{,}6 < 0{,}54 \longrightarrow X_1 = 1 \qquad \therefore 1^o$ valor gerado é $X_1 = 1$

Repita o algoritmo para u_2, u_3, u_4, u_5.

Problema 21

$X \sim P(\lambda),\ \lambda = 2$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}09$

2) $\mathrm{j} = 0$, $\mathrm{p} = e^{-\lambda} = e^{-2} = 0{,}135$ e $\mathrm{F} = 0{,}135$

3) $u_1 = 0{,}09 < 0{,}135$, então $\mathrm{X}_1 = 0$

4)Caso $u_1 > F$ então: $\mathrm{p} = \dfrac{\lambda}{\mathrm{j}+1} p,\ F = F + p$ e $j = j + 1$

5) *Volte* a 3)

Problema 26

$X \sim Gama\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$, isto é, $r = 3$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Considere os três primeiros valores gerados de $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ do Problema 11:

$t_1 = 0{,}435,\ \ t_2 = 0{,}061,\ \ t_3 = 1{,}099$

Então, o 1º valor gerado de X é: $x_1 = 0{,}435 + 0{,}061 + 1{,}099 = 1{,}595$

Gere mais 3 valores de uma $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e encontre mais um valor.

Proceda da mesma maneira para gerar os próximos valores.

Problema 29

(vvvvvvvv) $\quad X$: resultado de uma partida

Então $X = \begin{cases} 0, \text{ se o time não venceu.} \\ 1, \text{ se o time venceu.} \end{cases}$

com $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = 0{,}60$ e $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 0{,}40$

Logo, $X \sim Bernoulli(0{,}60)$

$u \sim U(0{,}1)$; $\mathrm{X} = \begin{cases} 0, \text{ se u} < 0{,}40 \\ 1, \text{ se u} \geq 0{,}40 \end{cases}$

Considerando os $u_{i's}$ do Problema 10:

$\mathrm{u_i} \longrightarrow 0{,}11; 0{,}82; 0{,}00; 0{,}43; 0{,}56; 0{,}60; 0{,}72; 0{,}42; 0{,}08; 0{,}53.$

$X_{\mathrm{i}} \longrightarrow 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ .$

Então em 10 partidas tem-se: 7 vitórias e 3 outros resultados (empate ou derrota).

(wwwwwwww) Considerando:

$$X = \begin{cases} 0, \text{se o time perdeu.} \\ 1, \text{se o time empatou.} \\ 2, \text{se o time ganhou.} \end{cases}$$

com $P(X=0)=0{,}20$, $P(X=1)=0{,}30$ e $P(X=2)=0{,}50$

Da distribuição da variável X, vem:

$p_1 = 0{,}2$
$p_1 + p_2 = 0{,}5$
$p_1 + p_2 + p_3 = 1{,}0$

Considerando os $u_{i's}$ gerados no Problema 10,vem:

$u_1 = 0{,}11 \rightarrow 0 \le 0{,}11 \le p_1 \longrightarrow x_1 = 0$

$u_2 = 0{,}82 \rightarrow p_1 + p_2 \le 0{,}82 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_2 = 2$

$u_3 = 0{,}00 \rightarrow 0 \le 0{,}00 \le p_1 \longrightarrow x_3 = 0$

$u_4 = 0{,}43 \rightarrow p_1 \le 0{,}43 \le p_1 + p_2 \longrightarrow x_4 = 1$

$u_5 = 0{,}56 \rightarrow p_1 + p_2 \le 0{,}56 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_5 = 2$

$u_6 = 0{,}60 \rightarrow p_1 + p_2 \le 0{,}60 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_6 = 2$

$u_7 = 0{,}72 \rightarrow p_1 + p_2 \le 0{,}72 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_7 = 2$

$u_8 = 0{,}42 \rightarrow p_1 \le 0{,}42 \le p_1 + p_2 \longrightarrow x_8 = 1$

$u_9 = 0{,}08 \rightarrow 0 \le 0{,}08 \le p_1 \longrightarrow x_9 = 0$

$u_{10} = 0{,}53 \rightarrow p_1 + p_2 \le 0{,}53 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_{10} = 2$

Então em 10 partidas o time terá 5 vitórias, 2 empates e 3 derrotas.

(xxxxxxxx) Repetir a mesma idéia do item anterior 12 vezes, gerando outros $u_{i's}$ e calcular o número de pontos obtidos.

(yyyyyyyy) Pode-se estudar o número de pontos perdidos, número de vitórias, etc. Para simular basta seguir a mesma idéia dos itens anteriores.

Problema 34

(zzzzzzzz) Considerando $\mu = 1{,}70$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,67
1,57
1,72
1,83
1,82
1,87
1,48
1,68
1,81
1,59

Calculando a média e desvio padrão encontram-se os seguinte valores: 1,70 e 0,13, respectivamente.

(aaaaaaaaa) Considerando os mesmos parâmetros do item anterior:

Valores gerados
1,76
1,55
1,78
1,78
1,81
1,88
1,59
1,73
1,77
1,69

Calculando a média e desvio padrão encontram-se, respectivamente, os seguinte valores: 1,73 e 0,10.Olhando as amostras elas não parecem estar vindo de populações diferentes, pois os valores simulados são bem próximos (visto que estão sendo gerado de um mesmo valor de μ e σ).

(bbbbbbbbb) Considerando $\mu = 1{,}55$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,62
1,48
1,53
1,48
1,66
1,55
1,76
1,51
1,41
1,40

Comparando estes valores com os obtidos no item a nos mostra evidências de que as duas amostras vêm de populações distintas. Visto que os valores obtidos para a população feminina é menor quando comparados para os obtidos para a população masculina.

(ccccccccc) Se as médias das duas populações forem bem diferentes e estas não apresentarem desvio – padrão alto, poderá se diferenciar bem as amostras geradas.

Capítulo 10

Problema 01.

(ddddddddd) A opinião dos operários pode estar relacionada com seus horários de chegada.

(eeeeeeeee) Parece razoável, já que as alturas devem se distribuir homogeneamente segundo os horários de chegada.

(fffffffff) Pode ser que municípios com investimentos menores não retornem os questionários, acarretando um viés na estimativa da porcentagem média da receita investida em lazer.

(ggggggggg) Não haveria problemas se os supermercados fossem homogêneos quanto à venda de sabão em pó. Porém, pode ser que as regiões tenham potenciais de venda diferentes, independentemente do brinde.

Problema 03.

(hhhhhhhhh) Por exemplo: colocar em uma urna 100 fichas, sendo 10 com o número zero, 20 com número 1, 30 com o número 2, 25 com o número 3 e 15 com o número 4. Sortear uma ficha da urna.

(iiiiiiiii)

	x_1					
x_2	0	1	2	3	4	$P(X_2 = x_2)$
0	0,010	0,020	0,030	0,025	0,015	0,10
1	0,020	0,040	0,060	0,050	0,030	0,20
2	0,030	0,060	0,090	0,075	0,045	0,30
3	0,025	0,050	0,075	0,063	0,038	0,25
4	0,015	0,030	0,045	0,038	0,023	0,15
$P(X_1 = x_1)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15	1

(jjjjjjjjj) $P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)P(X_3 = 3)P(X_4 = 1) = 0,00375$

Problema 04.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

x_1	x_2	P(X_1= x_1,X_2= x_2)	$\hat{\sigma}^2$
1	1	1/25	0
1	3	1/25	1
1	5	2/25	4
1	7	1/25	9
3	1	1/25	1
3	3	1/25	0
3	5	2/25	1
3	7	1/25	4

X_1	X_2	P(X_1= x_1,X_2= x_2)	$\hat{\sigma}^2$
5	1	2/25	4
5	3	2/25	1
5	5	4/25	0
5	7	2/25	1
7	1	1/25	9
7	3	1/25	4
7	5	2/25	1
7	7	1/25	0

Distribuição amostral de $\hat{\sigma}^2$

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	10/25	6/25	2/25

Problema 05.

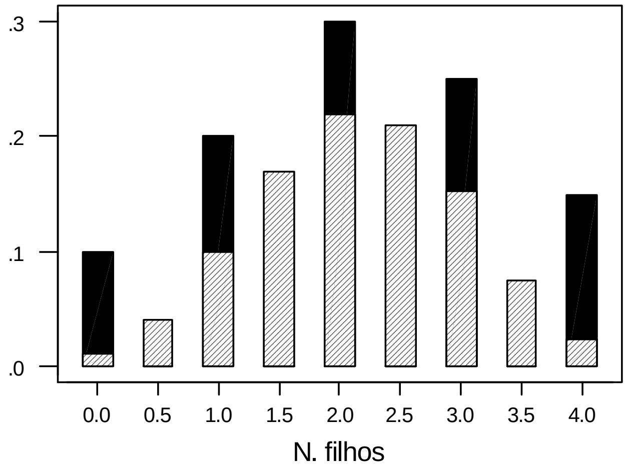
(kkkkkkkkk) $E(X) = 2{,}15$; $Var(X) = 1{,}428$.

(lllllllll) $E(X_i) = 2{,}15$, i=1,2; $Var(X_i) = 1{,}428$, i=1,2.

(mmmmmmmmm)

$\bar{x}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,0100	0,0400	0,1000	0,1700	0,2200	0,2100	0,1525	0,0750	0,0225

(nnnnnnnnn) $E(\bar{X}) = 2{,}15$; $Var(\bar{X}) = 0{,}7138$.



(ooooooooo)

(ppppppppp)

s^2	0,0	0,5	2,0	4,5	8,0
$P(S^2 = s^2)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

v	0,00	0,25	1,00	2,25	4,00
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

(qqqqqqqqq) $E(S^2) = 1{,}428$; $Var(S^2) = 3{,}206$.

$E(\hat{\sigma}^2) = 0{,}714$; $Var(\hat{\sigma}^2) = 0{,}802$.

Se desejarmos um estimador não-viciado, devemos utilizar S^2. Se desejarmos o estimador com a menor variância, devemos utilizar $\hat{\sigma}^2$.

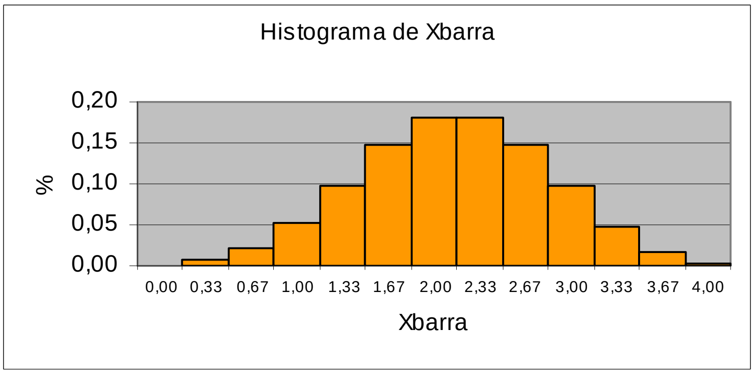
(rrrrrrrrr) $P(|\overline{X} - \mu| > 1) = P(\overline{X} < 1{,}15) + P(\overline{X} > 3{,}15) = P(\overline{X} = 0 \text{ ou } 0{,}5 \text{ ou } 1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 3{,}5 \text{ ou } 4) =$
$= 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}1 + {,}075 + 0{,}0225 = 24{,}75\%$

Problema 06.

(sssssssss)

$\overline{x}$	0,00	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00

$P(\overline{X}=\overline{x})$	0,001	0,006	0,021	0,052	0,098	0,147	0,181	0,182	0,149	0,097	0,048	0,017	0,003



(ttttttttt) $E(\overline{X}) = 2{,}15$; $Var(\overline{X}) = 0{,}4758$.

(uuuuuuuuu)
$$P(|\overline{X}-\mu|>1) = P(\overline{X}<1{,}15) + P(\overline{X}>3{,}15) =$$
$$= P(\overline{X} = 0{,}00 \text{ ou } 0{,}33 \text{ ou } 0{,}67 \text{ ou } 1{,}00) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 3{,}33 \text{ ou } 3{,}67 \text{ ou } 4{,}00) =$$
$$= 0{,}001 + 0{,}006 + 0{,}021 + 0{,}052 + 0{,}048 + 0{,}017 + 0{,}003 = 14{,}81\%$$

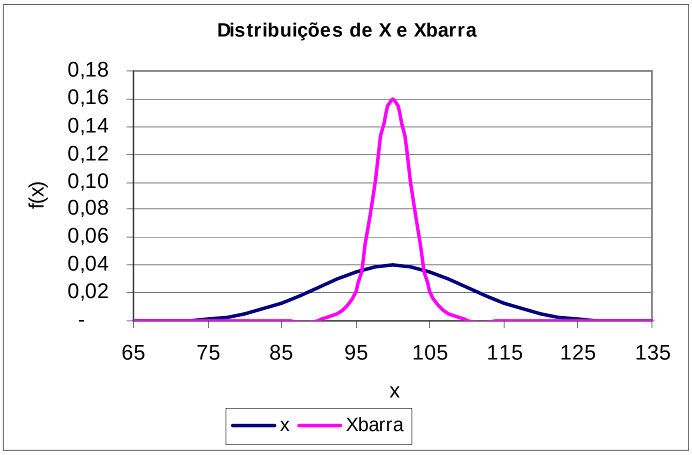
(vvvvvvvvv) Menor, pois a variância de $\overline{X}$ seria menor, fazendo com que sua distribuição fosse mais concentrada em torno de μ .

Problema 07.

(wwwwwwwww) $P(90 < X < 110) = 68{,}27\%$

(xxxxxxxxx) $\overline{X} \sim N\left(100; \dfrac{100}{16}\right) \Rightarrow P(90 < \overline{X} < 110) = 99{,}99\%$

(yyyyyyyyy)



(zzzzzzzzz) $$P(90 < \bar{X} < 110) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(\frac{(90-100)\sqrt{n}}{10} < Z < \frac{(110-100)\sqrt{n}}{10}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$$
$$P(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = 0{,}95 \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}96 \Rightarrow n \cong 4$$

Problema 08.

(aaaaaaaaaa) $P(X < 500) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{500-\mu}{10} = 1{,}28 \Rightarrow \mu = 512{,}82$.

$\bar{X} \sim N\left(512{,}82; \frac{100}{4}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000\right) = P\left(\bar{X} < 500\right) = 0{,}519\%$.

Problema 09.

(bbbbbbbbbb) Se a máquina estiver regulada: $\bar{X} \sim N\left(512{,}82; \frac{100}{4}\right)$

$P(\text{parada desnecessária}) = P(\bar{X} < 495 \text{ ou } \bar{X} > 520 \mid \text{máquina está regulada}) = 7{,}56\%$

(cccccccccc) Se o peso médio desregulou-se para 500g: $\bar{X} \sim N\left(500; \frac{100}{4}\right)$

$P(\text{continuar fora dos padrões}) = P(495 \leq \bar{X} \leq 520 \mid \text{máquina desregulou-se}) = 84{,}13\%$

Problema 10.

(dddddddddd) $\bar{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i > 500\right) = P\left(\bar{X} > \frac{500}{7}\right) = 35{,}27\%$.

(eeeeeeeeee) $\bar{X} \sim N\left(70; \frac{100}{6}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 500\right) = P\left(\bar{X} > \frac{500}{6}\right) = 0{,}055\%$.

Problema 11.

(fffffffff)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1678	0,3355	0,2936	0,1468	0,0459	0,0092	0,0011	0,0001	0,0000

(gggggggggg)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1337	0,2993	0,3221	0,1666	0,0414	0,0049	0,0003	0,0000	0,0000

Obs.: $P(\hat{p} = k/8) = P(S = k) \cong P(k - 0{,}5 < X < k + 0{,}5)$, onde $S \sim Binomial(8;0{,}2)$ e $X \sim N(1{,}6;1{,}28)$.

(hhhhhhhhhh) Razoável, pois n é pequeno,

(iiiiiiiii) Para p tendendo a 1/2.

Problema 12.

$S = 20 \times \hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra

Probabilidade exata

Se a produção estiver sob controle: $S \sim binomial(20;0{,}1)$

$$P(\text{parada desnecessária}) = \mathrm{P}(\hat{\mathrm{p}} > 0{,}15 \mid \text{produção sob controle}) =$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{S} > 3 \mid \text{produção sob controle}) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} 0{,}1^k 0{,}9^{20-k} = 13{,}30\%$$

Aproximação pela distribuição normal

Se a produção estiver sob controle: $\hat{p} \sim N\left(0{,}1; \frac{0{,}1 \times 0{,}9}{20}\right)$, aproximadamente

$$P(\text{parada desnecessária}) = \mathrm{P}(\hat{\mathrm{p}} > 0{,}15 \mid \text{produção sob controle}) \cong 22{,}80\%$$

Problema 13.

$S = 100 \times \hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra; $S \sim binomial(100;0{,}1)$

(jjjjjjjjj) *Probabilidade exata*

$$P(\hat{p} > 0{,}1) = P(S > 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} 0{,}1^k\, 0{,}9^{100-k} = 41{,}7\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$$\hat{p} \sim N\left(0{,}1; \frac{0{,}1\times 0{,}9}{100}\right), \text{ aproximadamente; } P(\hat{p} > 0{,}1) \cong 50{,}0\%.$$

(kkkkkkkkkk) $P(\hat{p} = 0) = P(S = 0) = \binom{100}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{100-0} = 0{,}9^{100} = 0{,}0027\%$

Problema 14.

(llllllllll)

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	2/5	6/25	2/25

$E(\hat{\sigma}^2) = 2{,}08 \qquad Var(\hat{\sigma}^2) = 6{,}39$

$E(S^2) = 4{,}16 \qquad Var(S^2) = 25{,}57$

$E(S^2) = \sigma^2 = 4{,}16$, ou seja, S^2 é um estimador não-viciado da variância populacional.

(mmmmmmmmmm)

U	0,00	2,00	3,00	3,67	4,00	4,33	5,00	6,00
$P(U = u)$	11/125	6/125	6/25	6/125	24/125	12/125	18/125	18/125

Obs.: Assumindo que U=0 nos casos em que os 3 elementos da amostra forem iguais.

(nnnnnnnnnn)

$\overline{x}$	1,0	1,7	2,3	3,0	3,7	4,3	5,0	5,7	6,3	7,0
$P(\overline{X} = \overline{x})$	1/125	3/125	9/125	16/125	24/125	27/125	23/125	3/25	6/125	1/125

$E(\overline{X}) = 4{,}20; \qquad Var(\overline{X}) = 1{,}39.$

$E(U) = 3{,}76; \qquad Var(U) = 2{,}52.$

U é viciado e tem variância maior que $\overline{X}$.

Problema 15.

(oooooooooo) $E(X) = 12$; $Var(X) = 10{,}8$; $Md(X) = 12$.

(pppppppppp)

$\bar{x}$	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
$P(\bar{X}=\bar{x})$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

md	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
P(Md = md)	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(qqqqqqqqqq) $E(\bar{X}) = E(Md) = 12 = Md(X)$.

(rrrrrrrrrr) Qualquer um, pois as duas distribuições amostrais são iguais.

(ssssssssss)

Z	-2,58	-1,94	-1,29	-0,65	0,00	0,65	1,29	1,94	2,58
$P(Z=z)$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(tttttttttt) $E(Z) = 0$; $Var(Z) = 1$.

(uuuuuuuuuu)

s^2	0,0	4,5	18,0	40,5	72,0
$P(S^2 = s^2)$	0,26	0,4	0,24	0,08	0,02

(vvvvvvvvvv) $E(S^2) = 10,8$; $Var(S^2) = 204$

(wwwwwwwwww)

t_0	-3,0	-1,0	-0,3	0,0	0,3	1,0	3,0
$P(t = t_0)$	0,04	0,24	0,04	0,1	0,04	0,24	0,04

Problema: t não pode ser calculado quando *S=0*. Assim, $\sum_i p(t = t_{0i}) = 0,74$, e não 1.

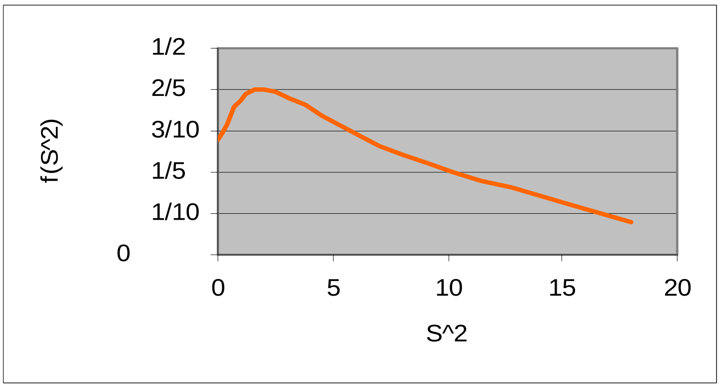
(xxxxxxxxxx) $E(t) = 0$; $Var(t) = 1,21$

(yyyyyyyyyy) $P(|t| < 2) = 0,66$

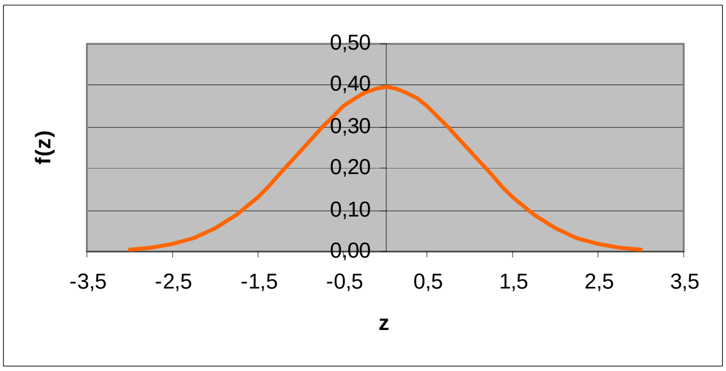
$P(|t| < 4,30) = 0,74$

Problema 16.

(zzzzzzzzzz)



(aaaaaaaaaaa)



(bbbbbbbbbbb) Para amostras grandes, a distribuição de t aproxima-se da distribuição de Z, obtida em (b).

Problema 17.

$$n = \frac{z_\gamma^2}{4\varepsilon^2} = \frac{1{,}645^2}{4(0{,}02)^2} \cong 1691.$$

Problema 18.

A função $f(p) = p(1-p)$ é decrescente no intervalo [0,5;1]. Logo, para $p \geq 0{,}80$, $p(1-p) \leq 0{,}80 \times 0{,}20 = 0{,}16$. Assim,

$$n = \frac{z_\gamma^2 \, p(1-p)}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}645^2 \times 0{,}16}{(0{,}02)^2} \cong 1082.$$

Problema 19.

$$n = \frac{z_\gamma^2 \, p(1-p)}{\varepsilon^2} \text{ e } \mathrm{n}_0 = \frac{z_\gamma^2}{4\varepsilon^2} \Rightarrow n = 4n_0 \, p(1-p) = f(p).$$

$f(p)$ assume valor máximo quando p = 1/2. Logo: $n \le f(1/2) = 4n_0 \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = n_0$.

Problema 20.

Seja $n = \dfrac{z_\gamma^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = f(p)$.

A função $f(p)$ é crescente para p no intervalo [0;0,5] e decrescente para p no intervalo [0,5;1]. Logo,

$p \le p_0 < 0{,}5 \Rightarrow f(p) \le f(p_0) < f(0{,}5) \Rightarrow n \le n_1 < n_0$.

$p \ge p_0 > 0{,}5 \Rightarrow f(p) \le f(p_0) < f(0{,}5) \Rightarrow n \le n_1 < n_0$.

Problema 21.

(ccccccccccc) $\bar{X}_{16} \sim N(10;1) \Rightarrow P(\text{ganhar o prêmio}) = P(\bar{X}_{16} > 12) = 2{,}275\%$

(ddddddddddd)

Tamanhos de amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prob. de ganhar o prêmio	30,9%	24,0%	19,3%	15,9%	13,2%	11,0%	9,3%	7,9%	6,7%	5,7%

(eeeeeeeeeee) n = 1

Problema 22.

$$DP(\bar{X}_1) = \frac{\sigma}{6} \text{ e } DP(\bar{X}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}; DP(\bar{X}_2) = \frac{2}{3} DP(\bar{X}_1) \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sigma}{6} = \frac{\sigma}{9} \Rightarrow n_2 = 81$$

Problema 23.

(fffffffffff) $E(e) = E(\bar{X}) - \mu = 0$; $Var(e) = Var(\bar{X}) = \dfrac{400}{n}$.

(ggggggggggg) $e_{25} \sim N(0;16) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 61{,}71\%$.

(hhhhhhhhhhh) $e_{100} \sim N(0;4) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 31{,}73\%$.

(iiiiiiiiiii) $d = 5{,}15$.

(jjjjjjjjjjj) $n = \dfrac{z_\gamma^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{1{,}96^2 \times 400}{1^2} = 1537$.

Problema 24.

(kkkkkkkkkkk) $\overline{X}_{30} \sim N(2;0{,}01/30) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = P(\overline{X}_{30} < 58/30) + P(\overline{X}_{30} > 61/30) = 3{,}41\%$

(lllllllllll) $\overline{X}_{29} \sim N(2;0{,}01/29) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = P(\overline{X}_{29} < 58/29) + P(\overline{X}_{29} > 61/29) = 50{,}00\%$

Problema 25.

(mmmmmmmmmmm) $\overline{X}_{1600} \sim N\left(5;\dfrac{0{,}2^2}{1600}\right) \Rightarrow P(\text{comprar} + \text{que 1 seção adicional}) = P\left(\overline{X}_{1600} < \dfrac{7995}{1600}\right) =$

(nnnnnnnnnnn) $\overline{X}_{1599} \sim N\left(5;\dfrac{0{,}2^2}{1599}\right) \Rightarrow P\left(\dfrac{8000}{1599} < \overline{X}_{1599} < \dfrac{8005}{1599}\right) = 16{,}03\%$

Problema 26.

S: nota do teste. Se o estudante estiver adivinhando as respostas: $S \sim binomial(20;0{,}5)$.

$$P(S \geq 13 \mid \text{estudante está adivinhando}) = \sum_{k=13}^{20} \binom{20}{k} 0{,}5^k 0{,}5^{20-k} = 13{,}16\%$$

Problema 27.

S: quantidade de sementes que germinam em um pacote; $S \sim binomial(200;0{,}95)$

Probabilidade exata

$$P(\hat{p} < 90\%) = P(S < 180) = 1 - \sum_{k=180}^{200} \binom{200}{k} 0{,}95^k 0{,}05^{200-k} = 0{,}116\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$\hat{p} \sim N(0{,}95;(0{,}95 \times 0{,}05)/200)$, aproximadamente

$P(\hat{p} < 0{,}90) \cong 0{,}059\%$

Problema 28.

(ooooooooooo) $\overline{X} \sim N(\mu;6{,}25/4)$

$P(\overline{X} < 46{,}3 \text{ ou } \overline{X} > 53{,}7 \mid \mu = 50) = 0{,}308\%$

$P(46{,}3 \leq \overline{X} \leq 53{,}7 \mid \mu = 53{,}7) = 50\%$

Problema 29.

Em elaboração

Problema 32.

(ppppppppppp) Pelo Teorema do Limite Central, para n e m grandes: $\overline{X} \sim N(\mu_1;\frac{\sigma_1^2}{n})$ e $\overline{Y} \sim N(\mu_2;\frac{\sigma_2^2}{m})$. Essas distribuições serão exatas se X e Y tiverem distribuição normal.

(qqqqqqqqqqq) É a distribuição das diferenças entre as médias de todos os possíveis pares de amostras de X e Y com tamanhos n e m, respectivamente.

(rrrrrrrrrrr) $E(D) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$; $Var(D) = Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$.

(sssssssssss) Normal, com média e variância dadas em *(c)*, pois *D* é uma diferença entre variáveis com distribuição (aproximadamente) normal.

Problema 33.

(ttttttttttt) $\overline{X} \sim N(5{,}4;1{,}69/16)$; $\overline{Y} \sim N(5{,}4;2{,}25/16)$; $D \sim N(0;3{,}94/16)$

$P(|D| > 0{,}5) = P(D < -0{,}5) + P(D > 0{,}5) = 31{,}37\%$

(uuuuuuuuuuu) $P(|D| > d) = 0{,}05 \Rightarrow P(D < -d) = 0{,}025 \Rightarrow d = 0{,}973$

(vvvvvvvvvvv) $P(|D| > 0{,}4) = 0{,}05 \Rightarrow P(-0{,}4 \leq D \leq 0{,}4) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{0{,}4\sqrt{n}}{\sqrt{3{,}94}} = 1{,}96 \Rightarrow n = 95$

Problema 34.

$\overline{X} \sim N(70;100/36)$; $\overline{Y} \sim N(65;225/49)$; $D = \overline{X} - \overline{Y} \sim N(5;100/36 + 225/49)$

$P(D > 6) = 35{,}6\%$

Problema 35.

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1; \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right); \ \hat{p}_2 \sim N\left(p_2; \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$$. **Logo:**

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right).$$

Problema 36.

$\bar{x}$	2	3	4	5	6
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

$$E(X) = \mu = 4{,}2; \ Var(X) = \sigma^2 = 4{,}16$$

$$E(\bar{X}) = 4{,}2 = \mu; \ Var(\bar{X}) = 1{,}56 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{4{,}16}{2} \times \frac{5-2}{5-1}$$

Problema 39.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, x \in [0;\theta] \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} ; \ F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, x \in [0;\theta] \\ 1, x > \theta \end{cases}$$

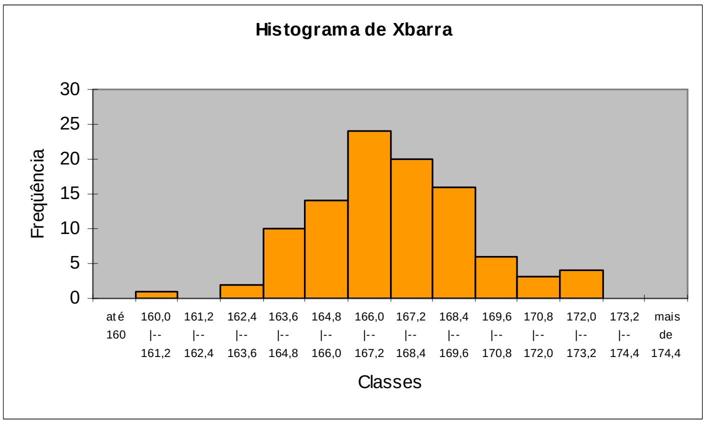
$$f_M(m) = n[F(m)]^{n-1} f(m) = n\left(\frac{m}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = \frac{nm^{n-1}}{\theta^n}, \quad m \in [0;\theta]$$

Problema 40.

Obs.: Os resultados abaixo referem-se a uma particular amostra obtida no Excel.

(wwwwwwwwwww) Média

Classe	Freqüência
até 160	0
160,0 |-- 161,2	1
161,2 |-- 162,4	0
162,4 |-- 163,6	2
163,6 |-- 164,8	10



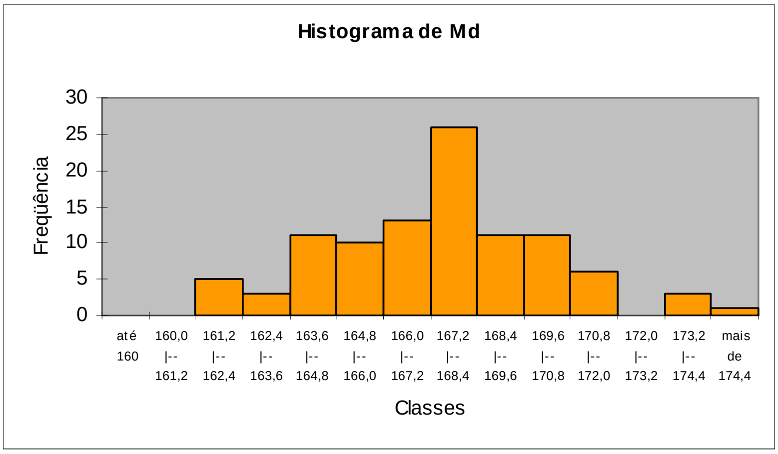
164,8 |-- 166,0	14
166,0 |-- 167,2	24
167,2 |-- 168,4	20
168,4 |-- 169,6	16
169,6 |-- 170,8	6
170,8 |-- 172,0	3
172,0 |-- 173,2	4
173,2 |-- 174,4	0
mais de 174,4	0

Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,0	165,7	167,0	168,5	173,1	167,2	5,3

(xxxxxxxxxxx) Mediana

Classe	Freqüência
até 160	0
160,0 |-- 161,2	0
161,2 |-- 162,4	5
162,4 |-- 163,6	3
163,6 |-- 164,8	11
164,8 |-- 166,0	10
166,0 |-- 167,2	13
167,2 |-- 168,4	26
168,4 |-- 169,6	11
169,6 |-- 170,8	11
170,8 |-- 172,0	6
172,0 |-- 173,2	0
173,2 |-- 174,4	3
mais de 174,4	1



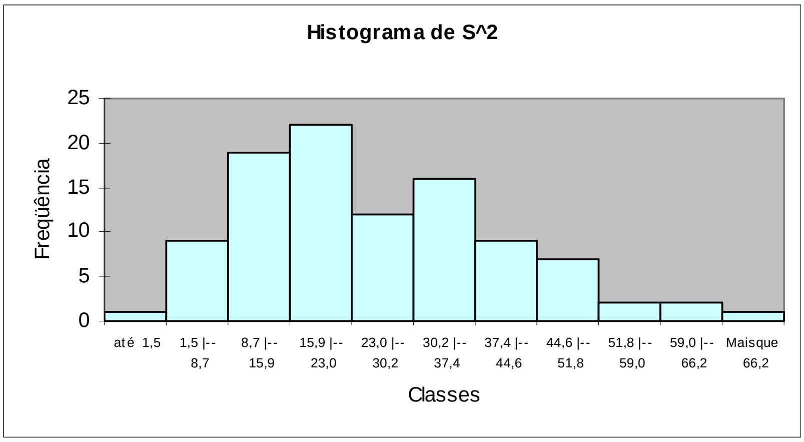
Medidas resumo

Mínimo	1º quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,5	165,8	167,5	169,4	174,8	167,5	7,8

(yyyyyyyyyyy) A distribuição amostral da mediana apresenta uma variabilidade maior em torno da média (igual à mediana) populacional.

(zzzzzzzzzzz) Variância, com n-1 no denominador.

Classe	Freqüência
até 1,5	1
1,5 |-- 8,7	9
8,7 |-- 15,9	19
15,9 |-- 23,0	22
23,0 |-- 30,2	12
30,2 |-- 37,4	16
37,4 |-- 44,6	9
44,6 |-- 51,8	7
51,8 |-- 59,0	2
59,0 |-- 66,2	2
Mais que 66,2	1



Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
1,48	12,86	21,92	34,57	73,38	25,65	226,60

Problema 41.

j	x_j	$\bar{X}_j$	S_j^2
1	3	3,00	0,00
2	5	4,00	2,00
3	2	3,33	2,33
4	6	4,00	3,33
5	4	4,00	2,50

Problema 42.

$$E(\hat{T}) = NE(\bar{X}) = N\mu = N\frac{T}{N} = T\ ;\ Var(\hat{T}) = N^2 Var(\bar{X}) = N^2\frac{\sigma^2}{n}.$$

Problema 43.

Idêntico, substituindo-se S^2 no passo [3] por $S^2 = \bar{x}_n(1-\bar{x}_n)$.

Capítulo 11

Problema 01

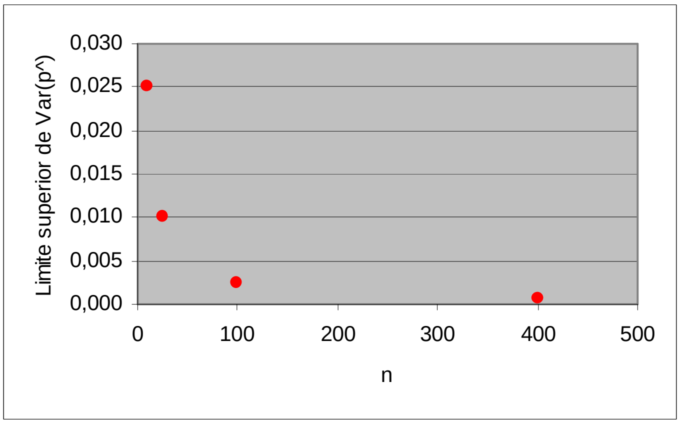
Nº de sucessos	0	1	2	3	4	5
$\hat{p}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$P(\hat{p})$	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

$$E(\hat{p}) = 0{,}2 = p\ ;\ \ Var(\hat{p}) = 0{,}032 = \frac{p(1-p)}{5}.$$

Problema 02

$$Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

n	10	25	100	400
Limite superior de $Var(\hat{p})$	0,025	0,01	0,0025	0,000625



Problema 03

(aaaaaaaaaaaa) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$X \sim Binomial(n; p)\ ;\ \ E(X) = np\ ;\ \ Var(X) = np(1-p)$$

$$E(\hat{p}_1) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p\,;$$

$$Var(\hat{p}_1) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}\,.$$

(bbbbbbbbbbbb) X_1 = resultado da 1ª prova

$X_1 \sim Bernoulli(p)$; $E(X_1) = p$; $Var(X_1) = p(1-p)$

$E(\hat{p}_2) = E(X_1) = p$;

$Var(\hat{p}_2) = Var(X_1) = p(1-p)$.

O estimador $\hat{p}_2$ não é bom porque só assume os valores 0 ou 1, dependendo do resultado da 1ª prova. Além disso, $Var(\hat{p}_2) = nVar(\hat{p}_1)$, ou seja, sua variância é maior que a variância de $\hat{p}_1$, para todo *n* maior que 1.

Problema 04

$\lim_{n\to\infty}(E(\hat{p}_1)) = p$ e $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{p}_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0$.

Logo, $\hat{p}_1$ é um estimador consistente de *p*.

$\lim_{n\to\infty}(E(\hat{p}_2)) = p$ e $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{p}_2) = \lim_{n\to\infty} p(1-p) = p(1-p) \neq 0$, para $p \neq 0$ e $p \neq 1$.

Logo, $\hat{p}_2$ não é um estimador consistente de *p*.

Problema 05

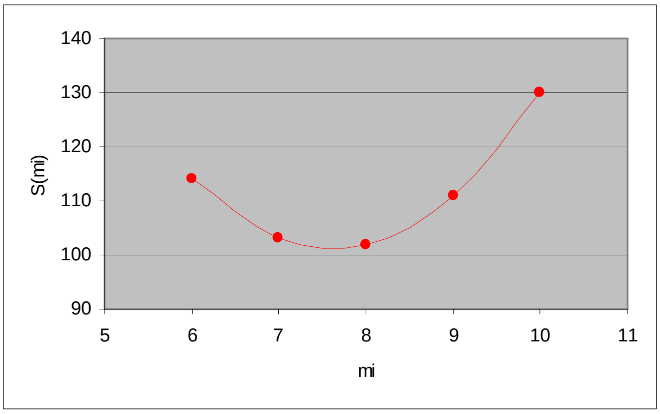
Propriedades dos estimadores	Estimador	
	t_1	t_2
Viés	2	0
Variância	5	10
EQM	9	10

O estimador t_1 é viesado, enquanto que t_2 é não-viesado. A mediana e a moda de t_1 e t_2 são iguais ou muito próximas de $\theta = 100$. Além disso, $EQM(t_1) = 9$, enquanto que $EQM(t_2) = 10$. A única medida realmente discrepante é a variância: $Var(t_2) = 2Var(t_1)$. Como o viés de t_1 é pequeno e sua variância a metade da variância de t_2, pode-se considerar que t_1 é um estimador melhor que t_2.

Problema 06

(cccccccccccc)

t	y_t	$(y_t-6)^2$	$(y_t-7)^2$	$(y_t-8)^2$	$(y_t-9)^2$	$(y_t-10)^2$
1	3	9	16	25	36	49
2	5	1	4	9	16	25
3	6	0	1	4	9	16
4	8	4	1	0	1	4
5	16	100	81	64	49	36
	$S(\mu)$	114	103	102	111	130



$S(\mu)$ parece ser mínimo para μ aproximadamente igual a 7,5.

(dddddddddddd)

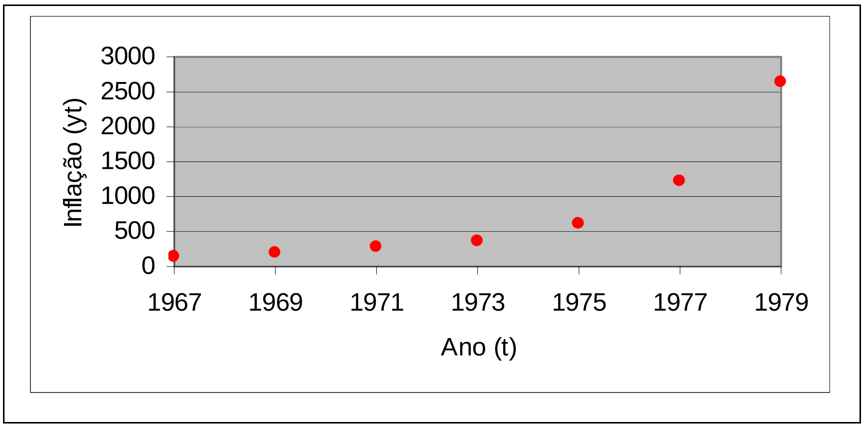
$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = -2\sum_t (y_t - \mu) = -2\sum_t y_t + 2n\mu$$

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu}_{MQ} = \frac{\sum_t y_t}{n} = \bar{y}$$

Logo, $\hat{\mu}_{MQ} = \bar{y} = 7{,}6$. Esse valor é próximo àquele visualizado no gráfico do item (a).

Problema 07

(eeeeeeeeeeee)



(ffffffffffff) $S(\alpha,\beta)=\sum_t (y_t-\alpha-\beta t)^2$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\alpha}=-2\sum_t (y_t-\alpha-\beta t)=-2\sum_t y_t+2n\alpha+2\beta\sum_t t=-2n\bar{y}+2n\alpha+2n\beta\bar{t}$$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\beta}=-2\sum_t t(y_t-\alpha-\beta t)=-2\sum_t ty_t+2\alpha\sum_t t+2\beta\sum_t t^2$$

Igualando a zero, temos:

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\alpha}=0\Leftrightarrow \alpha=\hat{\alpha}=\bar{y}-\beta\hat{t}$$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\beta}=0\Leftrightarrow (\bar{y}-\beta\bar{t})n\bar{t}+\beta\sum_t t^2=\sum_t ty_t\Leftrightarrow \beta=\hat{\beta}=\frac{\sum_t ty_t-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2-n\bar{t}^2}.$$

Logo, os estimadores de mínimos quadrados de α e β são dados, respectivamente, por

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{t}\ \text{ e }\ \hat{\beta}=\frac{\sum_t ty_t-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2-n\bar{t}^2}.$$

Na amostra observada, obtemos as seguintes estimativas:

$$\hat{\alpha}=350026{,}73\ \text{ e }\ \hat{\beta}=177{,}80.$$

(gggggggggggg) A inflação prevista pelo modelo ajustado é

$$\hat{y}(1981)=350026{,}73+177{,}80\times 1981=2202{,}143.$$

(hhhhhhhhhhhh) Sim, pois a inflação cresceu exponencialmente (e não linearmente) no período observado.

Problema 08

Com cálculos análogos aos feitos no Exercício 7, substituindo t por x_t, obtemos que

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\overline{xy}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2}.$$

Problema 09

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\overline{xy}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2} = \frac{2586{,}43 - 10 \times 3{,}73 \times 68{,}66}{169{,}25 - 10 \times 3{,}73^2} = 0{,}844;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 68{,}66 - 0{,}844 \times 3{,}73 = 65{,}513.$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

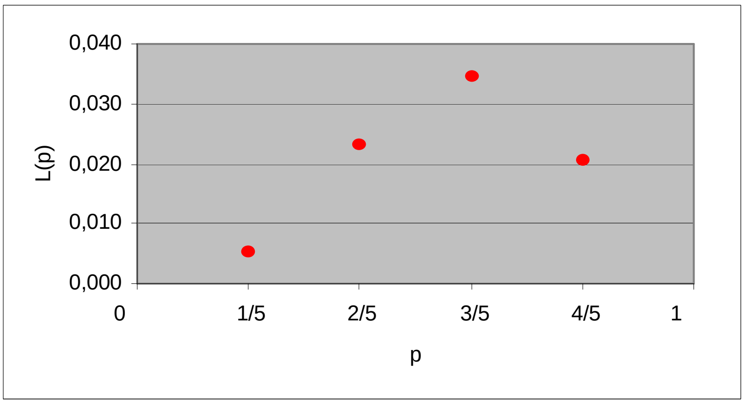
$$\hat{y}_t = 65{,}513 + 0{,}844 x_t.$$

Problema 10

$$L(p) = p^x (1-p)^{n-x} = p^3 (1-p)^2$$

Função de verossimilhança da distribuição Binomial(5;p)

p	1/5	2/5	3/5	4/5
L(p)	0,005	0,023	0,035	0,020



Problema 11

(iiiiiiiiiii) $P(X = x) = P(\text{x -1 fracassos e 1 sucesso}) = P(FFF...FS) = p(1-p)^{x-1}$.

(jjjjjjjjjjj) Função de verossimilhança

$$L(p \mid \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1 \mid p) \cdots P(X_n = x_n \mid p) = p(1-p)^{x_1 - 1} \cdots p(1-p)^{x_n - 1} = p^n (1-p)^{\sum x_i - n};$$

Função log-verossimilhança

$$l(p\,|\,\mathbf{x}) = \log(L(p\,|\,\mathbf{x})) = n\log p + \left(\sum x_i - n\right)\log(1-p)\,;$$

Maximizando em relação a p:

$$l'(p\,|\,\mathbf{x}) = \frac{n}{p} - \frac{\sum x_i - n}{1-p} = 0 \Leftrightarrow n(1-p) - \left(\sum x_i - n\right)p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum x_i}\,.$$

Logo, o EMV para p é dado por

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum x_i}\,.$$

(kkkkkkkkkkk) $\hat{p} = \dfrac{5}{11} = 0{,}455\,.$

Sim, poderíamos estimar *p* = P(coroa) lançando a moeda *n* vezes e contando o número de coroas (*m*). Nesse caso, $\hat{p} = m/n$.

Problema 12

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i\,|\,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu\,|\,\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\mu) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}\right\};$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu\,|\,\mathbf{x}) = \log(L(\mu\,|\,\mathbf{x})) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2}\,;$$

Maximizando em relação a μ:

$$l'(\mu\,|\,\mathbf{x}) = \sum(x_i-\mu) = n\bar{x} - n\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}\,.$$

Logo, o EMV de μ é dado por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x}\quad.$$

Problema 13

Função de probabilidade

$$P(Y_i = y_i\,|\,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!}\,;$$

Função de verossimilhança

$$L(\lambda \mid \mathbf{y}) = P(Y_1 = y_1 \mid \lambda) \cdots P(Y_n = y_n \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum y_i}}{\prod y_i!};$$

Função de log-verossimilhança

$$l(\lambda \mid \mathbf{y}) = \log(L(\lambda \mid \mathbf{y})) = -n\lambda + \sum y_i \log \lambda - \log(\prod y_i!);$$

Maximizando em relação a λ:

$$l'(\lambda \mid \mathbf{y}) = -n + \frac{\sum y_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}.$$

Logo, o EMV de λ é dado por:

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{y}.$$

Problema 14.

$$IC(\mu;\gamma) = \left]\bar{X} - z(\gamma)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z(\gamma)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Média amostral	Tamanho da amostra	Desvio padrão da população	Coeficiente de confiança	$z(\gamma)$	Intervalo de confiança: Limite inferior	Intervalo de confiança: Limite superior
170	100	15	95%	1,960	167,06	172,94
165	184	30	85%	1,440	161,82	168,18
180	225	30	70%	1,036	177,93	182,07

Problema 15

(lllllllllll) $IC(\mu;0{,}99) = 800 \pm 2{,}576 \times \frac{100}{20} =]787{,}12;812{,}88[$

(mmmmmmmmmmmmm)

$$e = 0{,}98 \Rightarrow z(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}98 \Rightarrow z(\gamma) = 0{,}98\frac{\sqrt{n}}{s} = 0{,}98 \times \frac{20}{100} = 0{,}196 \Rightarrow \gamma = 15{,}54\%.$$

(nnnnnnnnnnn) $e = z(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \times 100}{7{,}84}\right)^2 = 625.$

Suposições: Amostragem aleatória simples; tamanho amostral grande.

Problema 16

(oooooooooooo) $P(|\bar{X}-\mu|<e)=\gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{s/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}<\frac{e}{s/\sqrt{n}}\right)=\gamma \Leftrightarrow \frac{e}{s/\sqrt{n}}=z(\gamma) \Leftrightarrow n=\left(\frac{z(\gamma)}{e}\right.$

$$n=\left(\frac{1{,}96\times 10}{1}\right)^2=384{,}16\cong 385.$$

(pppppppppppp) $n=\left(\frac{2{,}576\times 10}{1}\right)^2=663{,}58\cong 664.$

Problema 17

(qqqqqqqqqqqq) $P(|\bar{X}-\mu|>1)=8\% \Leftrightarrow P(|\bar{X}-\mu|<1)=92\%;$

$$n=\left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2=\left(\frac{1{,}75\times 10}{1}\right)^2=306{,}25\cong 307.$$

(rrrrrrrrrrrr) $IC(\mu;0{,}92)=50\pm 1{,}75\times\frac{10}{307}=]49{,}0;51{,}0[.$

Problema 18

$$IC(p;\gamma)=\hat{p}\pm z(\gamma)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$IC(p;0{,}9)=0{,}7\pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{625}}=0{,}7\pm 0{,}030=]0{,}670;0{,}730[.$$

Intervalo conservador: $IC(p;0{,}9)=0{,}7\pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4\times 625}}=0{,}7\pm 0{,}033=]0{,}667;0{,}733[$

Problema 19

$$IC(p;0{,}95)=0{,}3\pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3\times 0{,}7}{400}}=0{,}3\pm 0{,}045=]0{,}255;0{,}345[.$$

Intervalo conservador: $IC(p;0{,}95)=0{,}3\pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 400}}=0{,}3\pm 0{,}049=]0{,}251;0{,}349[.$

Problema 20

(sssssssssss)

$$P(|\hat{p}-p|<e)=\gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}}<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}<\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)=\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}}=z(\gamma) \Leftrightarrow n=\left(\frac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p)$$

Supondo que a proporção na amostra real seja próxima de *p*:

$$n=\left(\frac{1,2816}{0,01}\right)^2 \times 0,6 \times 0,4 \cong 3942$$

(ttttttttttt) $IC(p;0,95)=0,55 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{3942}}=0,55 \pm 0,016=]0,534;0,566[$.

Intervalo conservador: $IC(p;0,95)=0,55 \pm 1,96\sqrt{\frac{1}{4 \times 3942}}=0,55 \pm 0,016=]0,534;0,566[$.

Problema 21

(uuuuuuuuuuu) $IC(p;0,95)=0,333 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,333 \times 0,667}{300}}=0,333 \pm 0,053=]0,280;0,387[$.

Intervalo conservador:

$$IC(p;0,95)=0,333 \pm 1,96\sqrt{\frac{1}{4 \times 300}}=0,333 \pm 0,057=]0,277;0,390[.$$

Interpretação: Se pudéssemos construir um grande número de intervalos aleatórios para *p*, todos baseados em amostras de tamanho *n*, 95% deles conteriam o parâmetro *p*.

(vvvvvvvvvvv) Utilizando a estimativa da amostra observada ($\hat{p}=0,333$):

$$n=\left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2 \times 0,333 \times 0,667 \cong 2134 .$$

Utilizando o valor máximo de *p(1-p)*:

$$n=\left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2 \times \frac{1}{4} \cong 2401$$

Interpretação: Utilizando o tamanho amostral encontrado, teremos uma probabilidade de 95% de que a proporção amostral difira do verdadeiro valor de p por menos que 2%.

Problema 22

(wwwwwwwwwww)

Propriedades	Estimador t	t'
Média	10	9,9
Vício	0,0	-0,1
Variância	4,8	3,79
EQM	4,8	3,8

O estimador *t* é não-viesado, porém tem variância maior que t', o qual é viesado. O EQM de t' é menor que o de *t*.

(xxxxxxxxxxxx) Pode-se escolher t', pois seu vício é pequeno, e sua variância e EQM são bem menores que os de *t*.

Problema 23

(yyyyyyyyyyyy) $IC(\mu;0{,}95) = 150 \pm 1{,}96 \times \dfrac{5}{6} = 150 \pm 1{,}633 =]148{,}37;151{,}63[$;

(zzzzzzzzzzzz) $e = z(\gamma)\dfrac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\dfrac{1{,}96 \times 5}{0{,}98}\right)^2 = 100$.

Problema 24

(aaaaaaaaaaaa) $IC(\mu;0{,}90) = 6{,}222 \pm 1{,}645 \times \dfrac{2}{3} = 6{,}222 \pm 1{,}097 =]5{,}13;7{,}32[$

(bbbbbbbbbbbb) $e = z(\gamma)\dfrac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\dfrac{1{,}645 \times 2}{0{,}01}\right)^2 = 108241$.

(cccccccccccc) Como *n* é pequeno (*n* = 9), não seria razoável simplesmente substituir o desvio padrão populacional pelo amostral. Pode-se usar o desvio padrão amostral *s*, e substituir a estatística *z* pela estatística *t*, obtida de uma distribuição *t*-Student com *n-1* graus de liberdade.

Problema 25

$$IC(\mu;0{,}95) = 400 \pm 1{,}96 \times \frac{103{,}923}{10} = 400 \pm 20{,}37 =]379{,}63;420{,}37[$$

Problema 26

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_t t y_t - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2 - n\bar{t}^2} = \frac{529{,}40 - 10\times 5{,}50\times 8{,}55}{385{,}00 - 10\times 5{,}50^2} = 0{,}717\ ;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{t} = 8{,}55 - 0{,}717\times 5{,}50 = 4{,}607\ .$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

$$\hat{y}_t = 4{,}607 + 0{,}717t\ .$$

Novembro (t = 11): 12,49;

Dezembro (t = 12): 13,21;

Julho (t = 19): 18,23;

Agosto (t = 20): 18,95.

Problema 27

(ddddddddddddd) $IC(p;0{,}90) = 0{,}6 \pm 1{,}645\sqrt{\dfrac{0{,}6\times 0{,}4}{300}} = 0{,}6 \pm 0{,}047 =]0{,}553;0{,}647[\ .$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}90) = 0{,}6 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4\times 300}} = 0{,}6 \pm 0{,}047 =]0{,}553;0{,}647[\ .$$

(eeeeeeeeeeeee)

$$P(|\hat{p} - p| < 0{,}001) = P\left(\frac{-0{,}001}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{0{,}001}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \cong$$

$$P\left(\frac{-0{,}001}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4/300}} < Z < \frac{0{,}001}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4/300}}\right) = P(-0{,}035 < Z < 0{,}035) = 2{,}820\%$$

(fffffffffffff) $n = \left(\dfrac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p) \cong \left(\dfrac{1{,}96}{0{,}0005}\right)^2 \times 0{,}6\times 0{,}4 = 3.687.936\ .$

Não parece factível, pois o tamanho amostral é muito grande. Deve-se aumentar e ou diminuir γ.

Problema 28

(ggggggggggggg) $IC(p;0{,}98) = 0{,}4 \pm 2{,}326\sqrt{\dfrac{1}{4\times 10000}} = 0{,}4 \pm 0{,}012 =]0{,}388;0{,}412[\ .$

(hhhhhhhhhhhh) $IC(p;0,98)=0,4\pm 2,326\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{10000}}=0,4\pm 0,011=]0,389;0,411[$.

Problema 29

$$IC(p;0,95)=0,52\pm 1,96\sqrt{\frac{0,52\times 0,48}{400}}=0,52\pm 0,049=]0,471;0,569[\,.$$

Problema 30

$$e=z(\gamma)\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Leftrightarrow z(\gamma)=\frac{e\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}=\frac{0,045\times 10}{\sqrt{0,6\times 0,4}}=0,919\Rightarrow \gamma=64,2\%$$

Problema 31

$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$ e $\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$, independentes.

Logo:

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Portanto, o intervalo de confiança para $\mu_1-\mu_2$ é dado por:

$$IC(\mu_1-\mu_2;\gamma)=\bar{X}-\bar{Y}\pm z(\gamma)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,.$$

Problema 32

(iiiiiiiiiiii) $IC(\mu_A;0,95)=50\pm 1,96\frac{10}{4}=50\pm 4,9=]45,1;54,9[$;

$$IC(\mu_B;0,95)=60\pm 1,96\frac{10}{5}=60\pm 3,92=]56,08;63,92[\,.$$

(jjjjjjjjjjjj) $IC(\mu_1-\mu_2;0,95)=50-60\pm 1,96\sqrt{\frac{100}{16}+\frac{100}{25}}=-10\pm 6,28=]-16,28;-3,72[$.

O zero não está contido no intervalo. Logo, há evidências de que as duas médias são diferentes.

Problema 33

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B \sim N\left(p_A - p_B ; \frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B} \right)$$

$$IC(p_A - p_B;\gamma) = \hat{p}_A - \hat{p}_B \pm z(\gamma)\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}}$$

$$IC(p_A - p_B;0{,}95) = 0{,}450 - 0{,}583 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}450\times 0{,}550}{400} + \frac{0{,}583\times 0{,}417}{600}} =$$

$$= -0{,}133 \pm 0{,}063 =]-0{,}196;-0{,}070[$$

Problema 34

$$\overline{X} \sim N\left(\mu;\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P(|\overline{X}-\mu| \geq k) \leq \frac{Var(\overline{X})}{k^2} = \frac{\sigma^2}{nk^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Logo, $\overline{X}$ é consistente.

Problema 35

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(k/n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \text{ pois } Var\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Problema 36

$$\delta = 1-\gamma = 1-0{,}95 = 0{,}05$$

$$n = \frac{1}{4\delta\varepsilon^2} = \frac{1}{4\times 0{,}05 \times 0{,}05^2} = 2000$$

Problema 37

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x}) = \log(L(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2};$$

Maximizando em relação a μ e σ^2:

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})}{\partial\mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu) = \frac{1}{2\sigma^2}(n\bar{x}-n\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\left(-n+\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$$

Logo, os EMV's de μ e σ^2 são dados por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x} \text{ e } \hat{\sigma}^2{}_{MV} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

Problema 38

(kkkkkkkkkkkkk) $E(T_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2\times\frac{\theta}{2} = \theta$. Logo, T_1 é um estimador não-viciado para θ.

(lllllllllllll) Como T_1 é um estimador não-viesado:

$$EQM(T_1) = Var(T_1) = Var(2\bar{X}) = 4Var(\bar{X}) = 4\frac{Var(X)}{n} = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

(mmmmmmmmmmmmmm) T_1 é consistente, pois T_1 é não-viesado e

$$\lim_{n\to\infty}(Var(T_1)) = \lim\left(\frac{\theta^2}{3n}\right) = 0.$$

Problema 39

(nnnnnnnnnnnnn) $E(M) = \int_0^\theta x\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right) = \theta\frac{n}{n+1}$. Logo, M é um estimador viesado. Seu viés é dado por

$$V(\theta) = E(M) - \theta = \theta\frac{n}{n+1} - \theta = -\frac{1}{n+1}\theta.$$

Logo: $\lim_{n\to\infty}(V(\theta)) = 0$.

(ooooooooooooo) Como T_2 é não-viesado:

$$EQM(T_2) = Var(T_2) = Var\left(\frac{n+1}{n}M\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var(M).$$

Mas: $Var(M) = E(M^2) - [E(M)]^2$, onde

$$E(M^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1} dx = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right) = \theta^2 \frac{n}{n+2} \quad .$$

Logo:

$$EQM(T_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\theta^2 \frac{n}{n+2} - \theta^2 \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

(ppppppppppppp) Temos que:

$\lim_{n\to\infty}(Var(t_2)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+2)}\theta^2 = 0$. Além disso, T_2 é não-viciado. Logo, T_2 é um estimador consistente.

Problema 40

$$\frac{Var(T_2)}{Var(T_1)} = \frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}} = \frac{3}{n+2} \Leftrightarrow Var(T_2) = \frac{3}{n+2}Var(T_1)$$

n	1	2	10	50	100
$Var(T_2)/Var(T_1)$	1,000	0,750	0,250	0,058	0,029

Logo, para *n* grande, a variância de T_2 é muito menor que a variância de T_1.

Problema 41

Temos que $\bar{X} \sim N\left(\frac{\theta}{2};\frac{\theta^2}{12n}\right)$.

$$P\left(-1{,}645 < \frac{\bar{X} - \theta/2}{\theta/\sqrt{12n}} < 1{,}645\right) = 90\% \Rightarrow P\left(2\left(\bar{X} - \frac{1{,}645\theta}{\sqrt{12n}}\right) < \theta < 2\left(\bar{X} + \frac{1{,}645\theta}{\sqrt{12n}}\right)\right).$$

(qqqqqqqqqqqqq) Usando $T_1 = 2\bar{X}$ como estimador de θ:

$$IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\bar{X} - \frac{1{,}645\times 2\bar{X}}{\sqrt{12n}}\right);2\left(\bar{X} + \frac{1{,}645\times 2\bar{X}}{\sqrt{12n}}\right)\right] = \left[2\bar{X}\left(1 - \frac{3{,}29}{\sqrt{12n}}\right);2\bar{X}\left(1 + \frac{3{,}29}{\sqrt{12n}}\right)\right]$$

(rrrrrrrrrrrrr) Usando $T_2 = \frac{n+1}{n} M$ como estimador de θ:

$$IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\overline{X} - \frac{1{,}645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right);2\left(\overline{X} + \frac{1{,}645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right)\right].$$

(sssssssssssss) $IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\overline{X} - \frac{1{,}645M}{\sqrt{12n}}\right);2\left(\overline{X} + \frac{1{,}645M}{\sqrt{12n}}\right)\right].$

(ttttttttttttt) Serão aproximadamente iguais, pois para n grande, $(n+1)/n \approx 1$.

Problema 42

$T_1 = 5{,}094$; $T_2 = 4{,}997$.

	$IC(\theta;90\%)$	
Estimador	Limite inferior	Limite superior
T_1	4,941	5,247
T_2	4,944	5,244
M	4,944	5,244

Problema 44

$$IC(\mu;0{,}95) = 10{,}3 \pm 1{,}96\frac{1{,}4}{\sqrt{600}} = 10{,}3 \pm 0{,}112 =]10{,}19;10{,}41[\,.$$

Problema 45

$$E(T_1) = E\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)\right) = \mu\,;$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(4E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)\right) = \mu\,;$$

$$E(T_3) = E\left(\hat{\mu}_1\right) = \mu\,.$$

(i) Logo, os três estimadores são não-viesados.

$$Var(T_1) = Var\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)\right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} Var(\hat{\mu}_2) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0{,}333Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_2) = Var\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{25}\left(16Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)\right) = \frac{19}{75} Var(\hat{\mu}_2) = 0{,}253Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_3) = Var\left(\hat{\mu}_1\right) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0{,}333Var(\hat{\mu}_2)$$

(ii) Ordenando segundo a eficiência: $Var(T_2) < Var(T_1) = Var(T_3)$.

Problema 46

Temos que $\lambda = E(Y)$ (1º momento populacional). Pelo método dos momentos, a estimativa para λ é dada pelo 1º momento amostral, isto é, $\hat{\lambda}_M = \overline{Y}$.

Problema 47

Amostra de bootstrap sorteada

Indivíduo	22	15	74	35	74	78	17	78	87	57
Nota	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	7,0	6,5	7,0	6,5	7,5

Amostra	Notas										Mediana	Desvio Médio	Desvio absoluto mediano
1	3,0	7,0	7,0	3,0	6,5	4,0	6,5	6,5	6,5	7,5	6,5	1,5	1,3
2	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,3	0,8
3	6,5	3,0	7,0	7,0	6,5	6,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,2	0,8
4	7,0	7,0	6,5	7,0	7,5	7,5	7,0	7,5	7,5	6,5	7,0	0,3	0,4
5	6,5	6,5	6,5	7,0	7,5	6,5	4,0	7,0	6,5	4,0	6,5	0,9	0,6
6	7,0	6,5	7,0	7,5	3,0	7,5	3,0	7,0	4,0	7,0	7,0	1,6	1,3
7	6,5	6,5	3,0	7,5	6,5	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	6,5	0,7	0,3
8	7,0	7,0	6,5	4,0	3,0	7,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,5	1,2
9	6,5	7,0	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	7,5	4,0	6,5	6,5	1,0	0,5
10	4,0	6,5	6,5	4,0	7,5	7,0	7,0	7,5	3,0	6,5	6,5	1,4	1,3
11	7,5	7,0	3,0	7,5	7,0	7,5	7,0	4,0	7,5	6,5	7,0	1,2	1,1
12	7,5	6,5	3,0	6,5	4,0	3,0	7,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,6	1,5
13	7,5	6,5	6,5	6,5	4,0	7,5	4,0	6,5	7,5	6,5	6,5	0,9	0,7
14	6,5	3,0	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	6,5	7,0	0,7	0,6
15	7,5	7,0	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	3,0	7,5	7,5	7,3	0,9	0,8
					Desvio padrão						**0,3**	**0,4**	**0,4**

Portanto, as estimativas de bootstrap dos parâmetros de interesse são dadas por:

$$\hat{ep}(Med) = 0{,}3;\ \hat{ep}(DM) = 0{,}4;\ \hat{ep}(DAM) = 0{,}4$$

Capítulo 12

Problema 01

(uuuuuuuuuuuu)

$$P(\text{Erro I}) = \text{P(dizer que são de B | na verdade são de A)} = P\left(\overline{X} > 176 \mid \overline{X} \sim N(175;1)\right) =$$
$$P\left(Z > \frac{176-175}{1}\right) = P(Z > 1) = 15{,}87\%$$

$$P(\text{Erro II}) = \text{P(dizer que são de A | na verdade são de B)} = P\left(\overline{X} \le 176 \mid \overline{X} \sim N(177;1)\right) =$$
$$P\left(Z \le \frac{176-177}{1}\right) = P(Z \le -1) = 15{,}87\%$$

(vvvvvvvvvvvvv)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;1)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{1}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{1} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 176{,}645$$

Regra de decisão: Se $\overline{X} > 176{,}645$, dizer que habitantes da ilha são descendentes de B; caso contrário, dizer que são descendentes de A.

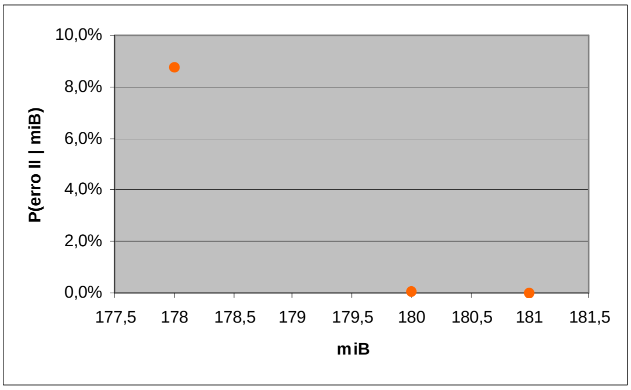
$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \le 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \le \frac{176{,}645-177}{1}\right) =$$
$$= P(Z \le -0{,}355) = 36{,}13\%$$

(wwwwwwwwwwwww)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;0{,}5^2)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 175{,}823$$

$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \le 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \le \frac{175{,}823-177}{1}\right) =$$
$$= P(Z \le -1{,}177) = 11{,}96\%$$

μ_B	$P(\text{Erro II} \mid \mu_B)$
178	8,771%
180	0,040%
181	0,001%



(xxxxxxxxxxxxx)

Problema 02

(yyyyyyyyyyyyy)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ verdadeira}) = P\left(\bar{X} > 1170 \mid \bar{X} \sim N(1150;15^2)\right) =$$
$$= P\left(Z > \frac{1170-1150}{15}\right) = P(Z > 1{,}333) = 9{,}12\%$$

(zzzzzzzzzzzzz)

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_1 \text{ é verdadeira}) = \text{P}\left(\bar{\text{X}} < 1170 \mid \bar{\text{X}} \sim \text{N}(1200;20^2\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{1170-1200}{20}\right) = P(Z < -1{,}5) = 6{,}68\%$$

(aaaaaaaaaaaaa)

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P\left(\bar{X} > \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(1150;15^2)\right) = P\left(\bar{X} < \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(1200;20^2)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\bar{X}_C - 1150}{15}\right) = P\left(Z < \frac{\bar{X}_C - 1200}{20}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_C - 1150}{15} = -\frac{\bar{X}_C - 1200}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bar{X}_C = 1171{,}429$$
$$RC = \left]1171{,}429;+\infty\right[.$$

Problema 03

(a) H_0: Está começando um ataque.

H_1: Está acontecendo uma leve interferência.

Erro I: Dizer que está acontecendo uma leve interferência, quando na verdade está começando um ataque;

Erro II: Dizer que está começando um ataque, quando na verdade está acontecendo uma leve interferência.

(b) H_0: O acusado é inocente.

H_1: O acusado é culpado.

Erro I: Dizer que o acusado é culpado, quando na verdade é inocente.

Erro II: Dizer que o acusado é inocente, quando na verdade é culpado.

(c) H_0: A vacina não é eficaz.

H_1: A vacina é eficaz.

Erro I: Dizer que a vacina é eficaz, quando na verdade não é eficaz.

Erro II: Dizer que a vacina não é eficaz, quando na verdade é eficaz.

Problema 04

X: número de coroas em 3 lançamentos.

X ~ Binomial(3;p).

$H_0: p = 0{,}5$ versus $H_1: p \neq 0{,}5$.

$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ verdadeira}) = P(X = 3 | p = 0{,}5) = 12{,}50\%$.

$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ falsa}) = P(X < 3 | p = 0{,}667) = 70{,}37\%$.

Problema 05

(bbbbbbbbbbbbb) $H_0: \mu = 200$ versus $H_1: \mu = 210$.

(ccccccccccccc) Por exemplo: Se $\overline{X} < 205$, dizer que $\mu = 200$. Caso contrário, dizer que $\mu = 210$.

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ verdadeira}) = P(\bar{X} > 205 \mid \bar{X} \sim N(200;4^2)) =$$
$$= P\left(Z > \frac{205-200}{4}\right) = P(Z > 1{,}25) = 10{,}56\%$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} < 205 | \bar{X} \sim N(210;4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{205-210}{4}\right) = P(Z < -1{,}25) = 10{,}56\%$$

Problema 06

(ddddddddddddd)

Passo 1: $H_0 : \mu \geq 8$ versus $H_1 : \mu < 8$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu;0{,}4^2)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(8;0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\bar{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_C - 8}{0{,}4} = -1{,}645 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 7{,}342$$

$RC =]-\infty;7{,}342[$

Passo 4: $\bar{X} = 7{,}2$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, rejeita-se H_0, ou seja, com base na amostra colhida, a diretoria deve decidir por retirar o produto da linha de produção.

(eeeeeeeeeeeee)

$$\beta = P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \geq 7{,}342 | \bar{X} \sim N(7{,}8;0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z \geq \frac{7{,}342 - 7{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z > -1{,}145) = 87{,}4\%$$

(fffffffffffff)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(8;0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\bar{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 1\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_C - 8}{0{,}4} = -2{,}326 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 7{,}07 \qquad RC =]-\infty;7{,}07[\,.$$

O valor observado não pertenceria à RC. Logo, a decisão seria diferente, isto é, H_0 não seria rejeitada.

(gggggggggggggg)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8;0{,}8^2)) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 6{,}684$$

$RC =]-\infty;6{,}684[$.

Novamente, o valor observado não pertenceria à RC, e portanto, H_0 não seria rejeitada.

Problema 07

Passo 1: $H_0 : \mu = 60$ versus $H_1 : \mu < 60$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;6{,}667^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\frac{\overline{X}_C - 60}{6{,}667} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 49{,}03$. $RC =]-\infty;49{,}03[$

Passo 4: $\overline{X} = 50$.

Passo 5: O valor observado não pertence à RC. Logo, não se rejeita H_0. Não há evidências de melhoria.

Problema 08

Passo 1: $H_0 : \mu = 2{,}5$ versus $H_1 : \mu < 2{,}5$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;0{,}0714^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\frac{\overline{X}_C - 2{,}5}{0{,}0714} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 2{,}38$. $RC =]-\infty;2{,}38[$

Passo 4: $\overline{X} = 2{,}3$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que esta indústria paga salários inferiores, em média.

Problema 09

Passo 1: $H_0 : \mu \leq 23$ versus $H_1 : \mu > 23$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;0{,}9^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}10$ $\frac{\overline{X}_C - 23}{0{,}9} = 1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 24{,}15$. $RC =]24{,}15;+\infty[$

Passo 4: $\overline{X} = 24{,}17$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a informação do fabricante é falsa, ao nível significância de 10%.

Problema 10

Passo 1: $H_0: p = 0{,}5$ versus $H_1: p > 0{,}5$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{6}\right)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\big(\hat{p} > \hat{p}_C \mid \hat{p} \sim N(0{,}5;0{,}25/6)\big) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}836 \qquad RC = \{p : p > 0{,}836\}$$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}833$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não se rejeita H_0, ou seja, não há evidências de que a pessoa acerta mais que metade das vezes.

Problema 11

Passo 1: $H_0: p \leq 0{,}2$ versus $H_1: p > 0{,}2$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{50}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}10$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}2}{\sqrt{0{,}2 \times 0{,}8/50}} = 1{,}282 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}273 \qquad RC = \{p : p > 0{,}273\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}270$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças defeituosas seja maior que 20%.

Problema 12

i. $\alpha = 0{,}05$

Passo 1: $H_0: p = 0{,}90$ versus $H_1: p < 0{,}90$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{200}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}9}{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1/200}} = -1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}865$. $RC = \{p : p < 0{,}865\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}875$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças de acordo com as especificação seja menor que 90%.

ii. $\alpha = 0{,}01$

Passo 3: $\alpha = 0{,}01$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}9}{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1/200}} = -2{,}326 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}851$. $RC = \{p : p < 0{,}851\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}875$.

Passo 5: A conclusão é a mesma obtida com $\alpha = 0{,}05$.

Problema 13

Passo 1: $H_0 : p \geq 0{,}25$ versus $H_1 : p < 0{,}25$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{400}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75/400}} = -1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}214$. $RC = \{p : p < 0{,}214\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}200$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a proporção de possuidores de TV que assistem ao programa é menor que 25%. Logo, a decisão dos produtores deve ser modificar o programa.

Problema 14

(hhhhhhhhhhhhh) X: número de sucessos em 10 tentativas.⇒X~Binomial(10;p)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in RC \mid p = 0{,}5) = 0{,}109.$$

(iiiiiiiiiiiii) $\pi(p) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p) = P(X \in RC \mid p)$

p

0,2

0,4

0,5

0,6

0,8

$\pi(p)$

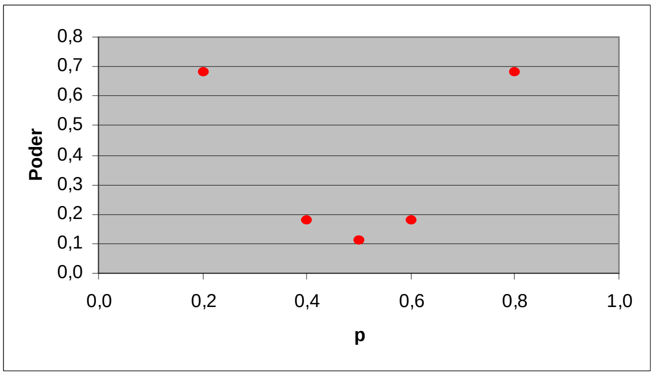
0,678

0,180

0,109

0,180

0,678



(jjjjjjjjjjjjjj) $\pi(0{,}5) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p = 0{,}5) = \alpha = 0{,}109$.

Problema 15

(kkkkkkkkkkkkkk) Passo 1: $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 4^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\frac{\overline{X}_C - 200}{4} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 206{,}58$. $RC =]206{,}58; +\infty[$

(llllllllllllll) $\pi(\mu) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \mu) = P(\overline{X} > 206{,}58 \mid \overline{X} \sim N(\mu; 4^2)) = P\left(Z > \frac{206{,}58 - \mu}{4}\right)$

μ

195

200

205

210

215

220

225

$\pi(\mu)$

0,002

0,050

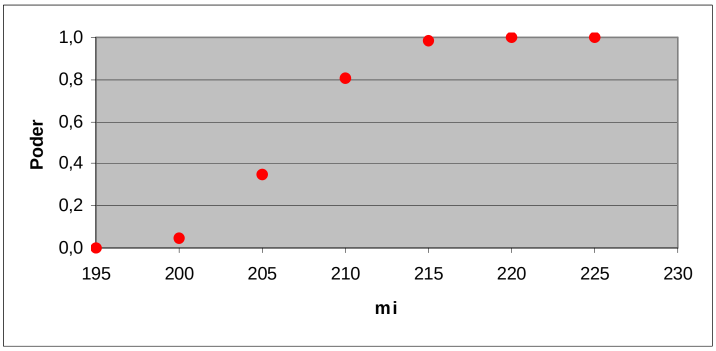
0,346

0,804

0,982

1,000

1,000



(mmmmmmmmmmmmmm)

$$\pi(\mu) = P\left(Z > \frac{206{,}58 - \mu}{4}\right) = 50\% \Leftrightarrow \frac{206{,}58 - \mu}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{X}_C = 206{,}58$$. Logo, para $\mu > 206{,}58$, o poder do teste será maior que 50%.

Problema 16

$$\hat{\alpha} = P\left(\bar{X} > 52 \mid \bar{X} \sim N(50;5^2)\right) = P\left(Z > \frac{52-50}{5}\right) = P(Z > 0{,}4) = 0{,}345.$$

Problema 17

Passo 1: $H_0: \mu = 25$ versus $H_1: \mu < 25$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 2{,}5^2)$.

Passo 3: $\overline{X} = 20{,}5$ $\quad \hat{\alpha} = P\left(\overline{X} < 20{,}5 \mid \overline{X} \sim N(25; 2{,}5^2)\right) = P\left(Z < \dfrac{20{,}5 - 25}{2{,}5}\right) = P(Z < -1{,}8) = 0{,}036$.

Passo 4: Rejeitamos H_0 para qualquer nível de significância $\alpha > \hat{\alpha}$. Por exemplo, fixando $\alpha = 5\%$, rejeita-se H_0, isto é, há evidências de que a nova técnica é melhor que a anterior.

Problema 18

$$n\frac{\hat{\sigma}_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad ; \quad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$n = 10$; $\sigma^2 = 100$.

(nnnnnnnnnnnnnn) $P(\hat{\sigma}_*^2 > a) = P\left(\chi^2(n) > \dfrac{n}{\sigma^2}a\right) = 10\% \Leftrightarrow \dfrac{n}{\sigma^2}a = 15{,}987 \Leftrightarrow a = 15{,}987 \times \dfrac{100}{10} = 159{,}87$

(oooooooooooooo) $P(S^2 < a) = P\left(\chi^2(n-1) < \dfrac{n-1}{\sigma^2}a\right) = 5\% \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{\sigma^2}a = 3{,}325 \Leftrightarrow a = 3{,}325 \times \dfrac{100}{9} = 36{,}95$

.

$$P(S^2 > b) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2}b\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}b = 16{,}919 \Leftrightarrow b = 16{,}919 \times \frac{100}{9} = 187{,}99$$

(pppppppppppppp)

$$\alpha = P(S^2 < 163{,}16) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} \times 163{,}16\right) = P\left(\chi^2(9) < 14{,}684\right) = 0{,}90.$$

(qqqqqqqqqqqqqq) $\alpha = P(S^2 > 100) = P\left(\chi^2(n-1) > \dfrac{n-1}{\sigma^2} \times 100\right) = P\left(\chi^2(9) > 9\right) = 0{,}437$.

(rrrrrrrrrrrrrr) $\alpha = P(S^2 < 18) = P\left(\chi^2(n-1) < \dfrac{n-1}{\sigma^2} \times 18\right) = P\left(\chi^2(9) < 1{,}62\right) = 0{,}004$.

(ssssssssssssss) $P(S^2 > 180) = P\left(\chi^2(n-1) > \dfrac{n-1}{\sigma^2} \times 180\right) = P\left(\chi^2(9) > 16{,}2\right) = 0{,}063$.

Problema 19

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 300$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 300$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(23)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 20\%$

$\chi_1^2 = 14{,}848$ e $\chi_2^2 = 32{,}007 . \Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 14{,}84 \text{ ou } \chi^2 > 32{,}007\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{23}{300} \times 400 = 30{,}667$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a variância mudou, ao nível de 20%.

Problema 20

(ttttttttttttt) A variância, já que a mesma é uma medida de dispersão em torno da média.

(uuuuuuuuuuuuu)

$S^2 = 114{,}09 . \Rightarrow$

$$IC(\sigma^2;95\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2};\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{10\times 114{,}09}{20{,}483};\frac{10\times 114{,}09}{3{,}247}\right] = [55{,}7;351{,}38]$$

Problema 21

(vvvvvvvvvvvvv) $P\left(|\,\overline{X} - 50| < tS/\sqrt{10}\right) = P(|T_9| < t) = 10\% \Leftrightarrow P(T_9 < t) = 5\% \Leftrightarrow t = 0{,}129$.

(wwwwwwwwwwwww) $t_o = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{48-50}{\sqrt{120/10}} = -0{,}577 . \Rightarrow P(T_9 < -0{,}577) = 0{,}289$.

(xxxxxxxxxxxxx) $P\left(|\,\overline{X} - 50| < 2\right) = P\left(|T_9| < \dfrac{2}{S/\sqrt{n}}\right) = P\left(|T_9| < \dfrac{2}{\sqrt{120/10}}\right) = P\left(|T_9| < 0{,}577\right) = 0{,}422$

.

Problema 22

Passo 1: $H_0 : \mu = 100$ versus $H_1 : \mu < 100$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 100}{S/4} \sim t(15)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\quad \alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(T_{15} < t_c\right) = 5\% \Rightarrow t_c = -1{,}753 . \Rightarrow$

$RC = \{t : t < -1{,}753\}$

Passo 4: $t_o = -5$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhora no tempo médio de execução da tarefa.

Problema 23

(yyyyyyyyyyyyyy) Passo 1: $H_0 : \mu = 1229$ versus $H_1 : \mu > 1229$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 1229}{S/\sqrt{10}} \sim t(9)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_9 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}833 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}833\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{1350 - 1229}{675{,}82/\sqrt{10}} = 0{,}566$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, aceita-se H_0. Logo, não há evidências de que a média das cidades pequenas seja diferente da média do estado.

(zzzzzzzzzzzzzz) Isso ocorre devido à grande variância da renda dos municípios.

Problema 24

(aaaaaaaaaaaaaaa)

$$IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_{15}\frac{s}{\sqrt{n}} = 41{,}563 \pm 2{,}131 \times \frac{10{,}35}{4} = 41{,}563 \pm 5{,}514 = [36{,}05;47{,}08].$$

(bbbbbbbbbbbbbbb) Suposições: a porcentagem da receita gasta com alimentação pelos moradores dessa vila tem distribuição normal; foi feita uma amostragem aleatória simples.

Problema 25

(ccccccccccccccc) Passo 1: $H_0 : \mu \le 30$ versus $H_1 : \mu > 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 1{,}033^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\dfrac{\overline{X}_C - 30}{1{,}033} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 31{,}70 . \Rightarrow RC =]31{,}70;+\infty[$

Passo 4: $\overline{X} = 30{,}044$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a média de precipitação pluviométrica anual é maior que 30,0.

(ddddddddddddddd) Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 30}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_8 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860$. $\Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{30{,}004 - 30}{3{,}153/3} = 0{,}042$.

Passo 5: A conclusão é a mesma do item (a).

(eeeeeeeeeeeeeee)

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = \text{P}\left(\overline{\text{X}} < 31{,}70 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(33;1{,}033^2\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{31{,}70 - 33}{1{,}033}\right) = P(Z < -1{,}258) = 0{,}1042.$$

Problema 26

$\overline{X} = 50{,}4$; $S^2 = \sigma^2 = 175{,}84$; n=50

Passo 1: $H_0 : \mu = 30$ versus $H_1 : \mu \neq 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 1{,}875^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_{C1} - 30}{1{,}875} = -1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C1} = 26{,}33$; $\dfrac{\overline{X}_{C2} - 30}{1{,}875} = 1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C2} = 33{,}68$.

$$RC = \{\overline{x} : \overline{x} < 26{,}33 \textbf{ ou } \overline{x} > 33{,}68\}$$

Passo 4: $\overline{X} = 50{,}4$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que o número médio de funcionários é diferente de 30.

$$IC(\mu;95\%) = \overline{x} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50{,}4 \pm 1{,}96 \times \frac{13{,}260}{\sqrt{50}} = 50{,}4 \pm 3{,}675 = [46{,}72;54{,}08].$$

Problema 27

Passo 1: $H_0 : \mu = 11$ versus $H_1 : \mu > 11$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}135^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_C - 11}{0{,}135} = 1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 11{,}17$.$\Rightarrow RC = \{\overline{x} : \overline{x} > 11{,}17\}$

Passo 4: $\overline{X} = 11{,}3$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, há evidências de que o consumo é maior que o anunciado pela fábrica.

Problema 28

(fffffffffffffff) $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu \in \{45;58\}$

(ggggggggggggggg) Erro I: Rejeitar H_0 sendo que H_0 é verdadeira, isto é, dizer que o valor real é diferente do declarado, quando na verdade o valor declarado está correto.

Erro II: Aceitar H_0 sendo que H_0 é falsa, isto é, dizer que o valor declarado está correto, quando na verdade não está.

(hhhhhhhhhhhhhhh)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_{C1} \text{ ou } \overline{X} > \overline{X}_{C2} \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(50;100)) =$$

$$= \text{P}\left(Z < \frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10}\right) + \text{P}\left(Z > \frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10}\right) = 10\% \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10} = -1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C1} = 33{,}55$$

$$\frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10} = 1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C2} = 66{,}45$$

$$RC = \{\bar{x} : \bar{x} < 33{,}55 \textbf{ ou } \bar{x} > 66{,}45\}.$$

(iiiiiiiiiiiiiii) Se $\mu = 45$:

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(45;100)) =$$

$$= \text{P}\left(\frac{33{,}55 - 45}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 45}{10}\right) = P(-1{,}145 < Z < 2{,}145) = 0{,}858$$

Se $\mu = 58$:

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(58;100)) =$$

$$= \text{P}\left(\frac{33{,}55 - 58}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 58}{10}\right) = P(-2{,}445 < Z < 0{,}845) = 0{,}794$$

(jjjjjjjjjjjjjjj) α : probabilidade de erro tipo I, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está incorreto, quando na verdade está correto.

β: probabilidade de erro tipo II, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está correto, quando na verdade está incorreto (depende do verdadeiro valor de μ).

Problema 29

Passo 1: $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ versus $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.

Passo 2: $Var(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = Var(\overline{X}_A) + Var(\overline{X}_B) = 100/25 + 100/16 = 10{,}25$

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N(\mu_A - \mu_B; 10{,}25) \Leftrightarrow Z = \frac{\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{10{,}25}} \sim N(0{,}1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)}{\sqrt{10{,}25}} \sim N(0{,}1)$

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(|Z| > z_C\right) = 5\% \Rightarrow z_c = 1{,}96$.

$RC = \{z : |z| > 1{,}96\}$

Passo 4: $z_o = 1{,}918$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que as médias são diferentes.

Problema 30

Passo 1: $H_0 : p_S = p_N = p_0$ versus $H_1 : p_S \neq p_N$.

Passo 2: $Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N) = Var(\hat{p}_S) + Var(\hat{p}_N) = \dfrac{p_S(1-p_S)}{n_S} + \dfrac{p_N(1-p_N)}{n_N}$

$$\hat{p}_S - \hat{p}_N \sim N(p_S - p_N; Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)) \Leftrightarrow Z = \frac{(\hat{p}_S - \hat{p}_N) - (p_S - p_N)}{\sqrt{Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)}} \sim N(0{,}1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_S} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_N})}} \sim N(0{,}1)$.

É preciso estimar o denominador de Z sob H_0. Sob H_0, a estimativa de $p_S = p_N = p_0$ é dada por: $\hat{p}_0 = \dfrac{n_s \hat{p}_S + n_N \hat{p}_N}{n_s + n_N} = 0{,}150$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(|Z| > z_C\right) = 5\% \Rightarrow z_c = 1{,}96$.

$RC = \{z : |z| > 1{,}96\}$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_S} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_N})}} = \dfrac{0{,}150 - 0{,}178}{\sqrt{0{,}00089}} = -0{,}932$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as proporções nas duas regiões são diferentes.

Problema 31

Passo 1: $H_0 : p_1 = p_2 = p_0$ versus $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Passo 2: Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_1} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_2}})} \sim N(0,1)$. $\Rightarrow \hat{p}_0 = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0{,}310$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1{,}96$.

$$RC = \{z : |z| > 1{,}96\}$$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_2}})} = \dfrac{0{,}330 - 0{,}290}{\sqrt{0{,}0107}} = 1{,}223$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as preferências nos dois anos sejam diferentes.

Problema 32

(kkkkkkkkkkkkkk)

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in \{0,1,2\} \mid X \sim Binomia(15;0,5)) =$$
$$= 0{,}0037$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar H}_0 \mid X \sim Binomial(15;0,3)) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15;0,3)) =$$
$$= 0{,}8732$$

(lllllllllllllll)

$$\pi(\mu) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15; p)$$

(mmmmmmmmmmmmmmmm)

p
0,05
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6

0,8

$\pi(p)$

0,964

0,816

0,398

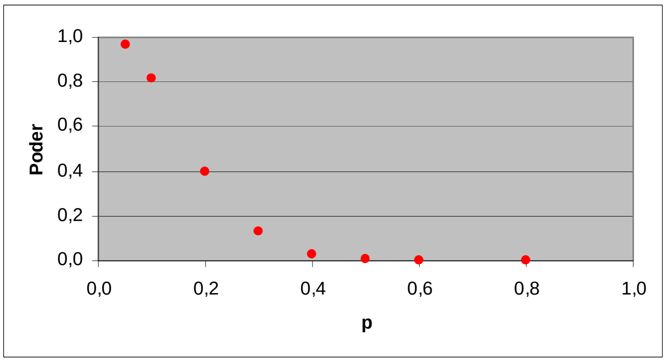
0,127

0,027

0,004

0,000

0,000



Problema 33

(nnnnnnnnnnnnnnn) $H_0: \mu = 200$ versus $H_1: \mu > 200$.

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\overline{X} > \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(200;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n}$$

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \overline{X} \sim N(210;/n)) = P\left(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(210;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}}\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}} = -1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 210 - 25{,}64/\sqrt{n}$$

Logo: $200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 210 - 25{,}64/\sqrt{n} \Leftrightarrow n = 34{,}27 \cong 35$.

(ooooooooooooooo) $\overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 200 + 32{,}9/\sqrt{34{,}27} = 205{,}62$. Nesse caso, a RC é dada por: $RC =]205{,}62;+\infty[$.

Problema 34

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 80^2$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 80^2$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(24)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \,|\, \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 5\%$.

$\chi_1^2 = 12{,}401$ e $\chi_2^2 = 39{,}364$. $\Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 12{,}401 \text{ ou } \chi^2 > 39{,}364\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{24}{80^2} \times 2500 = 9{,}375$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha se alterado.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 250$ versus $H_1 : \mu > 250$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 250}{S/5} \sim t(24)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P\left(T_{24} > t_c\right) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}711. \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}711\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{280 - 250}{50/5} = 3$.

Passo 5: Como to pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de que o número médio diário de clientes tenha aumentado.

Suposições: Amostragem aleatória simples; número diário de clientes do posto de gasolina tem distribuição normal.

Problema 35

Passo 1: $H_0 : \mu = 7$ versus $H_1 : \mu > 7$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 7}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P\left(T_8 > t_c\right) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860. \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{10{,}556 - 7}{2{,}555/3} = 4{,}175$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhoria.

$$IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_8 \frac{s}{\sqrt{n}} = 10,556 \pm 2,306 \times \frac{2,555}{3} = 10,556 \pm 1,964 = [8,59;12,52].$$

Problema 36

$$S^2 = 6,528 . \Rightarrow IC(\sigma^2;90\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2};\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{8\times 6,528}{19,11};\frac{8\times 6,528}{3,37}\right] = [3,37;19,11]$$

Problema 37

(ppppppppppppppp) $\dfrac{erro}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} = 1,645 \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{1,645}{erro}\right)^2 p(1-p)$. Tomando p=0,5 (para maximizar $p(1-p)$):

$n = 270,6 \cong 271$.

(qqqqqqqqqqqqqqq)

$$IC(p;0,95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,40 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{400}} = 0,40 \pm 0,048 = [0,352;0,448]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0,95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0,40 \pm 1,96\sqrt{\frac{1}{4\times 400}} = 0,40 \pm 0,049 = [0,351;0,449]$$

Problema 38

$$IC(p;0,90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,40 \pm 1,645\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{2000}} = 0,40 \pm 0,018 = [0,382;0,418]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0,90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0,40 \pm 1,645\sqrt{\frac{1}{4\times 2000}} = 0,40 \pm 0,018 = [0,382;0,418]$$

Problema 39

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 \le 25$ versus $H_1 : \sigma^2 > 5$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \,|\, \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = 5\% . \Rightarrow \chi_2^2 = 18{,}307$.

$RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 > 18{,}307\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{10}{25} \times 48 = 19{,}2$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a variância seja maior que a anunciada pelo fabricante.

Problema 40

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 25$ versus $H_1 : \sigma^2 < 25$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(7)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \,|\, \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = 5\% . \Rightarrow \chi_1^2 = 2{,}167$

$RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 2{,}167\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{7}{25} \times 1{,}351 = 0{,}378$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha diminuído.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 24$ versus $H_1 : \mu \neq 24$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 24}{S/\sqrt{8}} \sim t(7)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P\left(|T_7| > t_c\right) = 5\% \Rightarrow t_c = 2{,}365 . \Rightarrow RC = \left\{t : |t| > 2{,}365\right\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{24{,}6 - 24}{1{,}162/\sqrt{8}} = 1{,}369$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, não rejeitamos H_0. Ou seja, não há evidências de que o rendimento médio seja diferente de 24%.

Problema 41

(rrrrrrrrrrrrrr) X~Binomial(10;p) $\Rightarrow H_0 : p = 0{,}6$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = P(X \leq 3 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}055.$$

(sssssssssssssss) $\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 3 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}110.$

Problema 42

$$\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}266.$$

Problema 43

Exemplo 12.7

$$\hat{\alpha} = P(\overline{X} > 314 \mid \overline{X} \sim N(300;90)) + P(\overline{X} < 300 - (314 - 300) \mid \overline{X} \sim N(300;90)) =$$

$$= P\left(Z > \frac{314 - 300}{\sqrt{90}}\right) + P\left(Z < \frac{286 - 300}{\sqrt{90}}\right) = 2 \times P(Z > 1{,}476) = 0{,}14$$

Problema 42

$$\hat{\alpha} = P(X \geq 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) + P(X \leq 6 - (6 - 6) \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) =$$

$$= 1 + P(X = 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}251$$

Capítulo 13

Problema 01

(ttttttttttttttt) $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < a\right) = 95\% \Rightarrow P(F(9;5) < a) = 95\% \Rightarrow a = 4{,}772$

(uuuuuuuuuuuuuuu) $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > b\right) = 95\% \Rightarrow P(F(9;5) > b) = 95\% \Rightarrow b = 0{,}287$

Problema 02

Porque as duas amostras são independentes.

Problema 03

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(14;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos $RC =]0;0{,}378[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = (1600/1000)^2 = 2{,}56$.

Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que a fábrica A seja mais coerente que a fábrica B na política salarial.

Problema 04

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(16;20)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}373[\cup]2{,}547;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = 0{,}1734 / 0{,}0412 = 4{,}21$.

Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que as variâncias dos comprimentos dos produtos das duas fábricas sejam diferentes.

Intervalo de confiança para o quociente das variâncias ($\gamma = 95\%$):

$P(f_1 < F(20;16) < f_2) = 95\% \Rightarrow f_1 = 0{,}393$ e $f_2 = 2{,}681$.

Logo: $f_1 \dfrac{S_B^2}{S_a^2} < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < f_2 \dfrac{S_B^2}{S_a^2} \Rightarrow 0,393\dfrac{0,1734}{0,0412} < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < 2,681\dfrac{0,1734}{0,0412} \Rightarrow 1,653 < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < 11,283$

Problema 05

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_H^2 = \sigma_M^2$ *versus* $H_1 : \sigma_H^2 \neq \sigma_M^2$

Estatística do teste: $W = S_M^2 / S_H^2$. Sob H_0, $W \sim F(49;49)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0,567[\cup]1,762;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_M^2 / s_H^2 = (0,9/0,8)^2 = 1,27$. Como w_0 não pertence à região crítica, aceitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_H = \mu_M$ *versus* $H_1 : \mu_H \neq \mu_M$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_H - \overline{X}_M}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_H} + \dfrac{1}{n_M}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{98}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1,984[\cup]1,984;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{3,2 - 3,7}{0,851\sqrt{\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{50}}} = -2,936$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que o tempo médio de adaptação das mulheres é maior que o dos homens.

Suposição: Os tempos de adaptação de homens e mulheres têm distribuições normais com variâncias iguais

Problema 06

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{98}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1,984[\cup]1,984;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{62-71}{20\sqrt{\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{50}}} = -2{,}250$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que os gastos médios das duas filiais não são iguais.

$$IC(\Delta;95\%) = (\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm t_{95\%} S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} = -9 \pm 1{,}984 \times 20\sqrt{\frac{2}{50}} = -9 \pm 7{,}938 =]-16{,}938;-1{,}062[$$

Problema 07

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(11;14)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}298[\cup]3{,}095;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = (15/10)^2 = 2{,}25$. Como w_0 não pertence à região crítica, aceitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{25}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}060[\cup]2{,}060;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{48-52}{12{,}45\sqrt{\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{12}}} = -0{,}830$. Como t_0 não pertence à região crítica, concluímos que os dois processos produzem resultados similares.

Problema 08

No problema 4, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A}+\dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0{,}002$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 0{,}010$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A-1) + B^2/(n_B-1)} = \frac{(0{,}002+0{,}010)^2}{0{,}002^2/20 + 0{,}010^2/16} \approx 22$$. Sob H_0, $T \sim t_{22}$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}074[\cup]2{,}074;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{21{,}15 - 21{,}12}{\sqrt{\dfrac{0{,}0412}{21} + \dfrac{0{,}1734}{17}}} = 0{,}272$. Como t_0 não pertence à região crítica, concluímos não há diferença entre as médias populacionais dos comprimentos dos produtos das duas fábricas.

Problema 09

$\bar{x}_L = 9{,}87$; $s_L^2 = 5{,}92$; $\bar{x}_A = 9{,}23$; $s_A^2 = 0{,}79$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_L^2 = \sigma_A^2$ versus $H_1 : \sigma_L^2 \neq \sigma_A^2$

Estatística do teste: $W = S_L^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(6;7)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}176[\cup]5{,}119;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_l^2 / s_a^2 = 5{,}92 / 0{,}79 = 7{,}51$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_L = \mu_A$ *versus* $H_1 : \mu_L \neq \mu_A$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_L - \bar{X}_A}{\sqrt{\dfrac{S_L^2}{n_L} + \dfrac{S_A^2}{n_A}}}$. $A = \dfrac{s_L^2}{n_L} = 0{,}846$; $B = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0{,}097$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \frac{(0{,}846 + 0{,}097)^2}{0{,}846^2/6 + 0{,}097^2/7} \approx 7$$. Sob H_0, $T \sim t_7$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}365[\cup]2{,}365;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{9{,}87 - 9{,}23}{\sqrt{\dfrac{5{,}92}{7} + \dfrac{0{,}79}{8}}} = 0{,}666$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que os salários médios populacionais dos dois grupos de profissionais sejam diferentes.

Problema 10

População	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Produção	6,0	6,6	6,8	6,9	7,0	7,0	7,0	7,1	7,4	8,0	6,6	6,7	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8	6,9	6,9	7,5
Postos	1	2,5	7,5	12	15	15	15	17	18	20	3	4	8	8	8	8	8	12	12	19

$W_S = 87$; $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{10 \times 21}{2} = 105$;

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)} \sum_{i=1}^{e} (d_i^3 - d_i) = \frac{10 \times 10 \times 21}{12} - \frac{10 \times 10}{12 \times 20 \times 19} \times 264 = 169{,}21$$

$H_0 : \mu_T = \mu_C$ *versus* $H_1 : \mu_T > \mu_C$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}645;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{87 - 105}{\sqrt{169{,}21}} = -1{,}384$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo fertilizante aumente a produção.

$\hat{\alpha} = P(Z > -1{,}384) = 0{,}914$

Problema 11

(vvvvvvvvvvvvvvv)

w	3	4	5	6	7
P(*Ws*=*w*)	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

(wwwwwwwwwwwwwww)

w	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P(*Ws*=*w*)	1/15	1/15	2/15	2/15	1/5	2/15	2/15	1/15	1/15

(xxxxxxxxxxxxxxx)

w	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P(*Ws*=*w*)	1/20	1/20	1/10	3/20	3/20	3/20	3/20	1/10	1/20	1/20

Problema 12

(yyyyyyyyyyyyyyy) $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{6 \times 14}{2} = 42$;

$$Var(W_S) = \frac{nm(N+1)}{12} = \frac{7 \times 6 \times 14}{12} = 49$$

$P(W_S \leq 48) = P(Z \leq (48 - 42)/7) = P(Z \leq 0{,}857) = 80{,}43\%$.

(zzzzzzzzzzzzzzz) $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{8 \times 19}{2} = 76$;

$$Var(W_S) = \frac{nm(N+1)}{12} = \frac{10 \times 8 \times 19}{12} = 126{,}67$$

$$P(W_S \le 95) = P(Z \le (95 - 76) / \sqrt{126{,}67}) = P(Z \le 1{,}688) = 95{,}43\% .$$

(aaaaaaaaaaaaaaaa) $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{10 \times 21}{2} = 105 ;$

$$Var(W_S) = \frac{nm(N+1)}{12} = \frac{10 \times 20 \times 21}{12} = 175{,}00$$

$$P(W_S \ge 63) = P(Z \ge (63 - 105) / \sqrt{175}) = P(Z \ge -3{,}175) = 99{,}93\% .$$

Problema 13

(bbbbbbbbbbbbbbb)

w	6,5	8,0	9,0	9,5	10,5	11,5	12,0	13,0	14,5
P(*Ws*=*w*)	1/10	1/10	1/10	1/10	1/5	1/10	1/10	1/10	1/10

(cccccccccccccccc)

w	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5
P(*Ws*=*w*)	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

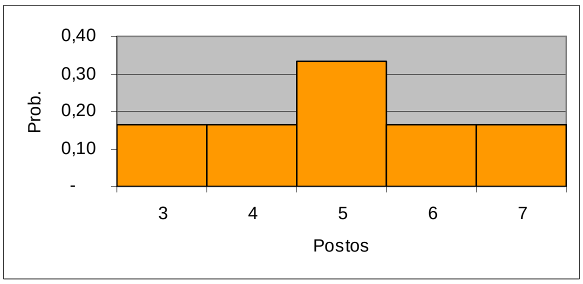
(dddddddddddddddd)

w	3	5	6	8
P(*Ws*=*w*)	1/10	3/10	3/10	3/10

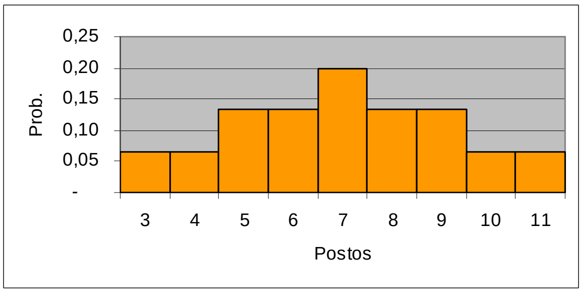
Problema 14

P11

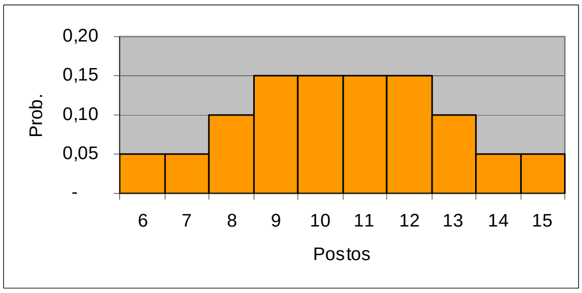
(a) m = 2; n = 2



(b) m = 2; n = 4

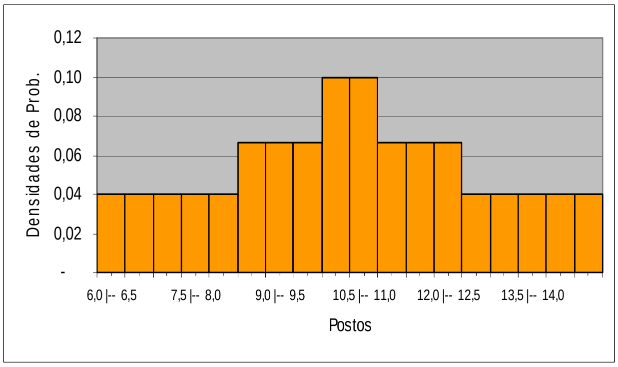


(c) m = n = 3

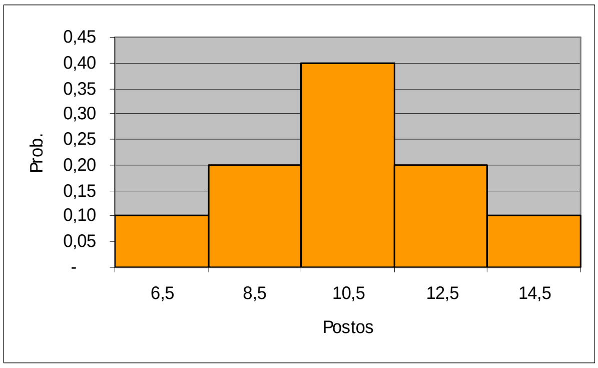


P13

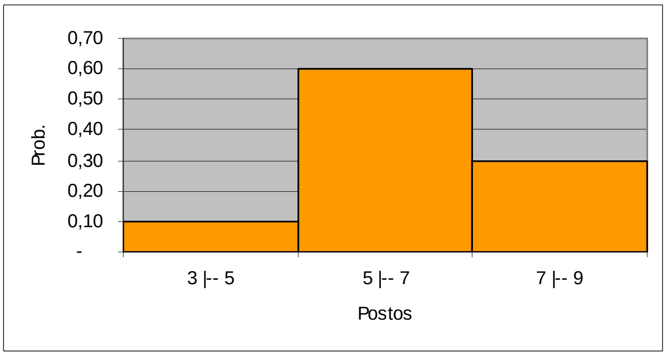
(a) $m = n = 3\,;\ d_1 = d_2 = 1;\ d_3 = 2;\ d_4 = d_5 = 1$



(b) $m = n = 3\,;\ d_1 = d_2 = d_3 = 2$



(c) $m = 2;\ n = 3\,;\ d_1 = d_2 = 1;\ d_3 = 3$



Problema 15

População	C	C	C	T	T	T	T
Observ.	1	4	8	3	3	5	7
Postos	1	4	7	2,5	2,5	5	6

$$W_S = 16;\ E(W_S) = \frac{m(N+1)}{2} = \frac{4\times 8}{2} = 16;$$

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{4\times3\times8}{12} - \frac{4\times3}{12\times7\times6}\times6 = 7{,}857$$

$$\hat{\alpha} = P(W_S \geq w) = P\left(\frac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}} > \frac{w - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}\right) \cong P\left(Z > \frac{16-16}{\sqrt{7{,}857}}\right) = P(Z>0) = 50\%$$

Problema 16

$\bar{d} = 4{,}29$; $s_D^2 = 9{,}90$

Teste de igualdade de médias: $H_0: \mu_D = 0$ *versus* $H_1: \mu_D > 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\bar{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_6$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}943;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{7}\times4{,}29}{\sqrt{9{,}90}} = 3{,}603$. Como t_0 pertence à região crítica, rejeitamos H_0.

Ou seja, há evidências de que o cartaz produz um efeito positivo nas vendas médias.

Problema 17

Em elaboração

Problema 18

Em elaboração

Problema 19

Em elaboração

Problema 20

$\bar{d} = 1{,}50$; $s_D = 2{,}9$

Teste de igualdade de médias: $H_0: \mu_D = 0$ *versus* $H_1: \mu_D > 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\bar{D}}{S_D} = \dfrac{\sqrt{6}\bar{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_5$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]2{,}015;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{6}\times1{,}50}{2{,}9} = 1{,}275$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a pausa aumente a produtividade média dos trabalhadores.

Problema 21

$\bar{x}_D = 12$; $s_D^2 = 35{,}7$; $\bar{x}_N = 10$; $s_N^2 = 105{,}7$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_D^2 = \sigma_N^2$ versus $H_1 : \sigma_D^2 \neq \sigma_N^2$

Estatística do teste: $W = S_N^2 / S_D^2$. Sob H_0, $W \sim F(14;14)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}403[\cup]2{,}484;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_N^2 / s_D^2 = 105{,}7 / 35{,}7 = 2{,}96$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = \mu_N$ *versus* $H_1 : \mu_D \neq \mu_N$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_D - \bar{X}_N}{\sqrt{\dfrac{S_D^2}{n_D} + \dfrac{S_N^2}{n_N}}}$. $A = \dfrac{s_D^2}{n_D} = 2{,}381$; $B = \dfrac{s_N^2}{n_N} = 7{,}048$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \frac{(2{,}381 + 7{,}048)^2}{2{,}381^2/15 + 7{,}048^2/15} \approx 22.$$ Sob H_0, $T \sim t_{22}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}074[\cup]2{,}074;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{12 - 10}{\sqrt{\dfrac{35{,}7}{15} + \dfrac{105{,}7}{15}}} = 0{,}651$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as produtividades médias dos dois períodos sejam diferentes. No entanto, a produtividade do período noturno tem variância maior.

Problema 22

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_T^2 = 0{,}85^2$ versus $H_1 : \sigma_T^2 \neq 0{,}85^2$

Estatística do teste: $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S_T^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24 S_T^2}{0{,}85^2}$. Sob H_0, $W \sim \chi_{24}^2$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;12{,}401[\cup]39{,}364;+\infty[$.

Valor observado: $\chi_0^2 = \dfrac{24 \times 1{,}25^2}{0{,}85^2} = 51{,}903$. Como w_0 pertence à região crítica, concluímos que a variância dos salários dos torneiros mecânicos é maior que a variância dos salários da indústria mecânica como um todo.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_T = 3{,}64$ *versus* $H_1 : \mu_T \neq 3{,}64$

Estatística do teste: $T = \dfrac{(\overline{X}_T - \mu_0)\sqrt{n}}{S_T} = \dfrac{5(\overline{X}_T - 3{,}64)}{S_T}$. Sob H_0, $T \sim t_{24}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}064[\cup]2{,}064;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{5(4{,}22-3{,}64)}{1{,}25} = 2{,}32$. Como t_0 pertence à região crítica,

concluímos que o salário médio dos torneiros mecânicos é maior que o salário médio da indústria mecânica como um todo.

Problema 23

(eeeeeeeeeeeeeeee)

Média

69,8

Desvio Padrão

1,90

Mínimo

65,6

1º quartil

68,9

Mediana

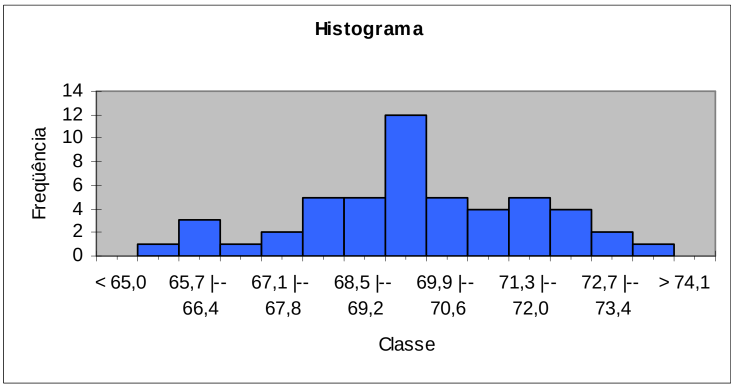
69,7

3º quartil

71,0

Máximo

73,8



(fffffffffffffff) $\hat{p} =$ proporção estimada de municípios em que o gasto com pessoal é maior que 70%;

$\hat{N}$ = número estimado de municípios em que o gasto com pessoal é maior que 70%;

Temos que: $\hat{p} = 20/50 = 0{,}4$; $\hat{N} = 200 \times \hat{p} = 200 \times 0{,}4 = 80$

Portanto, estima-se que 80 municípios tenham gasto com pessoal superior a 70% do orçamento.

(ggggggggggggggggg) $H_0 : \sigma^2 = 20^2$ versus $H_1 : \sigma^2 < 20^2$

Estatística do teste: $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{49S^2}{20^2}$. Sob H_0, $W \sim \chi_{49}^2$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;33{,}93[$.

Valor observado: $\chi_0^2 = \dfrac{49 \times 1{,}90^2}{20^2} = 0{,}440$. Como w_0 pertence à região crítica, concluímos que os gastos com pessoal na primeira região são mais homogêneos, isto é, têm variância menor, que na segunda região.

Problema 24

(hhhhhhhhhhhhhhh)

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ versus $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística do teste: $W = S_2^2 / S_1^2$. Sob H_0, $W \sim F(49;99)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}601[\cup]1{,}597;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_2^2 / s_1^2 = 9/4 = 2{,}25$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

$$A = \frac{s_1^2}{n_1} = 4/100 = 0{,}04;\ B = \frac{s_2^2}{n_2} = 9/50 = 0{,}18;\ \nu = \frac{(0{,}04+0{,}18)^2}{0{,}04^2/99 + 0{,}18^2/49} \approx 71.$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2;95\%) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{71;0,95}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (12-11) \pm 1{,}994\sqrt{0{,}04+0{,}18} =$$
$$= 1 \pm 0{,}935 =]0{,}065;1{,}935[$$

Como os dois extremos do intervalo são positivos, concluímos que o tempo médio gasto pelos operários da primeira fábrica para concluir a tarefa é maior que o dos operários da segunda fábrica.

(iiiiiiiiiiiiiii) *Suposições:* Os tempos gastos para concluir a tarefa têm distribuição normal com variâncias desiguais e desconhecidas. As amostras são aleatórias.

Problema 25

Teste de igualdade de variâncias: $H_0:\sigma_I^2=\sigma_{II}^2$ versus $H_1:\sigma_I^2\neq\sigma_{II}^2$

Estatística do teste: $W=S_{II}^2/S_I^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;11)$.

Região crítica: Tomando $\alpha=5\%$, temos que $RC=]0;0,256[\cup]3,588;+\infty[$.

Valor observado: $w_0=s_{II}^2/s_I^2=100/25=4$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0:\mu_I=\mu_{II}$ *versus* $H_1:\mu_I\neq\mu_{II}$

Estatística do teste: $T=\dfrac{\overline{X}_I-\overline{X}_{II}}{\sqrt{\dfrac{S_I^2}{n_I}+\dfrac{S_{II}^2}{n_{II}}}}$. $A=\dfrac{s_I^2}{n_I}=25/12=2{,}083$; $B=\dfrac{s_{II}^2}{n_{II}}=100/10=10$;

$$\nu=\frac{(A+B)^2}{A^2/(n_I-1)+B^2/(n_{II}-1)}=\frac{(2{,}083+10)^2}{2{,}083^2/11+10^2/9}\approx 13.$$ Sob H_0, $T\sim t_{13}$.

Região crítica: Tomando $\alpha=5\%$, temos que $RC=]-\infty;-2{,}179[\cup]2{,}179;+\infty[$.

Valor observado: $t_0=\dfrac{75-74}{\sqrt{2{,}083+10}}=0{,}288$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as notas médias dos dois tipos de ensino sejam diferentes. Porém, o ensino do Tipo I apresenta notas mais homogêneas.

Problema 26

(jjjjjjjjjjjjjjj)

Empresários: $H_0:\mu=7{,}6$ *versus* $H_1:\mu\neq 7{,}6$

Estatística do teste: $T=\dfrac{(\overline{X}_E-\mu_E)\sqrt{n_E}}{S_E}=\dfrac{\sqrt{90}(\overline{X}_E-7{,}6)}{S_E}$. Sob H_0, $T\sim t_{89}$.

Região crítica: Tomando $\alpha=5\%$, temos que $RC=]-\infty;-1{,}987[\cup]1{,}987;+\infty[$.

Valor observado: $t_0=\dfrac{\sqrt{90}(7{,}0-7{,}6)}{2{,}9}=-1{,}963$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação dos empresários seja falsa.

Operários: $H_0:\mu=6{,}5$ *versus* $H_1:\mu\neq 6{,}5$

Estatística do teste: $T = \dfrac{(\overline{X}_O - \mu_O)\sqrt{n_O}}{S_O} = \dfrac{\sqrt{60}(\overline{X}_O - 6{,}5)}{S_O}$. Sob H_0, $T \sim t_{59}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}001[\cup]2{,}001;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{60}(7{,}1-6{,}5)}{2{,}4} = 1{,}936$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação dos operários seja falsa.

As duas amostras colhidas justificam, ao nível de significância de 5%, as afirmações dos dois grupos. Porém, se tomássemos um nível de significância um pouco maior (6%, por exemplo), concluiríamos a partir da amostra dos empresários que o salário médio é menor que 7,6 e a partir da amostra dos operários que o salário médio é maior que 6,5 (já que os valores das estatísticas t_0 das duas amostras encontram-se próximas dos extremos dos intervalos construídos). Logo, é possível que o salário médio seja um valor intermediário entre aqueles afirmados pelos operários e pelos empresários.

Problema 27

(kkkkkkkkkkkkkkk) Proprietário da torrefação: Bilateral.

(lllllllllllllll) Fabricante de A: Unilateral à esquerda

(mmmmmmmmmmmmmmmm) Fabricante de B: Unilateral à direita

Problema 28

$\overline{d} = -4{,}70$; $s_D = 4{,}5$

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = 0$ *versus* $H_1 : \mu_D < 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\overline{D}}{S_D} = \dfrac{\sqrt{5}\overline{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_4$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}132[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{5}\times(-4{,}70)}{4{,}5} = -2{,}090$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências, ao nível de significância de 5%, de que a droga reduz a pressão arterial média.

Suposições: As diferenças entre a pressão arterial depois de tomar a droga e antes de tomá-la têm distribuição normal.

Problema 29

$\hat{p}_H = 170/400 = 0{,}425$; $\hat{p}_M = 194/625 = 0{,}310$.

$H_0: p_H - p_M = 0{,}10$ *versus* $H_1: p_H - p_M \neq 0{,}10$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\hat{p}_H - \hat{p}_M - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_H(1-\hat{p}_H)}{n_H} + \dfrac{\hat{p}_M(1-\hat{p}_M)}{n_M}}}$. Sob H_0, como os tamanhos amostrais são grandes, $Z \sim N(0{,}1)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty; -1{,}96[\cup]1{,}96; +\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{0{,}425 - 0{,}310 - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{0{,}425 \times 0{,}575}{400} + \dfrac{0{,}310 \times 0{,}290}{625}}} = 0{,}473$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação do partido seja falsa.

Problema 30

$H_0: \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 81$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 192$;

$\nu = \dfrac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \dfrac{(81+192)^2}{81^2/10 + 192^2/75} \approx 132$. Sob H_0, $T \sim t_{132}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty; -1{,}978[\cup]1{,}978; +\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{1190 - 1230}{\sqrt{81+192}} = -2{,}421$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que as lâmpadas produzidas pela fábrica B têm vida média populacional maior que as produzidas pela fábrica A.

Problema 31

(nnnnnnnnnnnnnnnn)

Procedimento 1: X_i (nota da *i*-ésima criança submetida ao método A) e Y_i (nota da *i*-ésima criança submetida ao método B), *i* = 1, ..., 20 ;

Procedimento 2: $D_i = X_i - Y_i$, *i* = 1, ..., 20, onde X_i e Y_i são as notas das crianças do *i*-ésimo par, submetidas aos métodos A e B, respectivamente.

(oooooooooooooooo)

Procedimento 1: $H_0: \mu_X = \mu_Y$ *versus* $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$;

Procedimento 2: $H_0: \mu_D = 0$ *versus* $H_1: \mu_D \neq 0$.

(pppppppppppppppp) As estatísticas dos testes são dadas por:

Procedimento 1: $T = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{20} + \dfrac{S_Y^2}{20}}}$; ***Procedimento 2:*** $T = \dfrac{\sqrt{20}\bar{D}}{S_D}$.

(qqqqqqqqqqqqqqqq) O procedimento 2, pois nesse caso controlamos um fator externo que pode interferir no aprendizado. Ou seja, se houver diferença entre os resultados dos dois métodos, essa diferença deve-se realmente aos métodos.

Problema 32

$\hat{p}_I = 300/400 = 0{,}75$; $\hat{p}_T = 40/160 = 0{,}25$

(rrrrrrrrrrrrrrrr) $H_0: p_I = p_T$ *versus* $H_1: p_I \neq p_T$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\hat{p}_I - \hat{p}_T}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_I(1-\hat{p}_I)}{n_I} + \dfrac{\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n_T}}}$. Sob H_0, como os tamanhos amostrais são razoavelmente grandes, $Z \sim N(0,1)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1{,}96[\cup]1{,}96;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{0{,}75 - 0{,}25}{\sqrt{\dfrac{0{,}75 \times 0{,}25}{400} + \dfrac{0{,}25 \times 0{,}75}{160}}} = 12{,}344$. Como z_0 pertence à região crítica, concluímos que na cidade industrial a proporção de favoráveis ao projeto governamental é maior que na cidade turística.

(ssssssssssssssss) Seja N o número de pessoas em cada cidade e p a proporção de favoráveis ao projeto nas duas cidades.

$$p = \frac{Np_I + Np_T}{2N} = \frac{p_I + p_T}{2} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\hat{p}_I + \hat{p}_T}{2} = \frac{0{,}75 + 0{,}25}{2} = 0{,}5$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{Var(\hat{p}_I) + Var(\hat{p}_T)}{4} = \frac{1}{4}\left[\frac{p_I(1-p_I)}{n_I} + \frac{p_T(1-p_T)}{n_T}\right] \Rightarrow$$

$$\hat{V}ar(\hat{p}) = \frac{1}{4}\left[\frac{\hat{p}_I(1-\hat{p}_I)}{n_I} + \frac{\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n_T}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{0{,}75\times 0{,}25}{400} + \frac{0{,}25\times 0{,}75}{160}\right] = 0{,}00041$$

Logo: $IC(p;90\%) = \hat{p} \pm 1{,}645\sqrt{Var(\hat{p})} = 0{,}5 \pm 1{,}645\sqrt{0{,}00041} =]0{,}467;0{,}533[$

Problema 33

$\bar{x}_A = 17{,}4$; $s_A^2 = 3{,}6$; $\bar{x}_B = 16{,}0$; $s_B^2 = 18{,}0$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}248[\cup]4{,}026;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = 18{,}0/3{,}6 = 5{,}0$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0: \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0{,}36$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 1{,}8$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A-1) + B^2/(n_B-1)} = \frac{(0{,}36+1{,}8)^2}{0{,}36^2/9 + 1{,}8^2/9} \approx 12$$. Sob H_0, $T \sim t_{12}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}179[\cup]2{,}179;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{17{,}4 - 16{,}0}{\sqrt{0{,}36 + 1{,}8}} = 0{,}953$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as resistências médias dos dois tipos de montagem sejam diferentes. No entanto, no tipo cruzado (A) as resistências são mais homogêneas que no tipo quadrado (B).

Problema 34

$\bar{x}_A = 14{,}2$; $s_A^2 = 6{,}17$; $\bar{x}_B = 11{,}8$; $s_B^2 = 4{,}94$.

(ttttttttttttttt)

Teste de igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_A^2 / S_B^2$. Sob H_0, $W \sim F(5;8)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}148[\cup]4{,}817;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_A^2 / s_B^2 = 6{,}17/4{,}94 = 1{,}25$. Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A > \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{13}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 1\%$, temos que $RC =]2{,}650;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{14{,}2 - 11{,}8}{2{,}327\sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9}}} = 1{,}948$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a dieta A seja mais eficaz que a dieta B.

$\hat{\alpha} = P(t_{13} > 1{,}948) = 0{,}037$

(uuuuuuuuuuuuuuu)

Dieta	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Ganho de peso	11	12	14	15	15	18	8	10	11	11	12	12	13	13	16
Postos	4	7	11	13	13	15	1	2	4	4	7	7	9,5	9,5	14

$W_S = 62$; $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{6\times16}{2} = 48$;

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{6\times9\times16}{12} - \frac{6\times9}{12\times15\times14}\times60 = 70{,}71$$

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A > \mu_B$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 1\%$, temos que $RC =]2{,}326;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{62-48}{\sqrt{70{,}71}} = 1{,}665$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a dieta A seja mais eficaz que a dieta B.

$\hat{\alpha} = P(Z > 1{,}665) = 0{,}048$

Problema 35

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ *versus* $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{18}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1{,}704[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{80 - 83}{4{,}123\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}}} = -1{,}627$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a média da primeira população seja menor.

Problema 36

$\bar{x}_N = 8{,}15$; $s_N^2 = 1{,}34$; $\bar{x}_C = 7{,}25$; $s_C^2 = 3{,}01$.

Teste t

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_N^2 = \sigma_C^2$ versus $H_1 : \sigma_N^2 \neq \sigma_C^2$

Estatística do teste: $W = S_C^2 / S_N^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}248[\cup]4{,}026;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_C^2 / s_N^2 = 3{,}01/1{,}34 = 2{,}26$. Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_N = \mu_C$ *versus* $H_1 : \mu_N > \mu_C$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_N - \bar{X}_C}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_N} + \dfrac{1}{n_C}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{18}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}734;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{8{,}15 - 7{,}25}{1{,}475\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}}} = 1{,}365$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo método tenha nota média maior.

$\hat{\alpha} = P(t_{18} > 1{,}365) = 0{,}095$.

Teste de Wilcoxon

Método	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
Notas	4,5	5,0	6,5	6,5	7,5	7,5	7,5	8,0	9,5	10,0
Postos	1	2	4	4	9,5	9,5	9,5	12,5	17,5	19,5

Método	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Notas	6,5	7,0	7,0	7,5	8,0	8,5	8,5	9,0	9,5	10,0
Postos	4	6,5	6,5	9,5	12,5	14,5	14,5	16	17,5	19,5

$W_S = 121;\ E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{10\times 21}{2} = 105;$

$Var(W_S) = \dfrac{mn(N+1)}{12} - \dfrac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \dfrac{10\times 10\times 21}{12} - \dfrac{10\times 10}{12\times 20\times 19}\times 114 = 172{,}50$

$H_0: \mu_N = \mu_C$ *versus* $H_1: \mu_N > \mu_C$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}96;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{121-105}{\sqrt{172{,}50}} = 1{,}218$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo método tenha nota média maior.

$\hat{\alpha} = P(Z > 1{,}218) = 0{,}112$

Problema 37

$W_R + W_S = 1 + 2 + \cdots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}.$

Problema 40

Em elaboração

Problema 41

Em elaboração

Capítulo 3

Problema 01.

(a) Sendo $\bar{x}$ o número médio de erros por página, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{0\times 25 + 1\times 20 + 2\times 3 + 3\times 1 + 4\times 1}{50} = \frac{33}{50} = 0{,}66$$

Representando o número mediano de erros por md, tem-se, pela ordenação dos valores observados, que os valores de ordem 25 e 26 são 0 e 1, respectivamente. Assim

$$md = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$$

(b)
$$\mathrm{var}(X) = \frac{25\times(0-0{,}66)^2 + 20\times(1-0{,}66)^2 + 3\times(2-0{,}66)^2 + 1\times(3-0{,}66)^2 + 1\times(4-0{,}66)^2}{50} =$$

$$= \frac{25\times 0{,}4356 + 20\times 0{,}1156 + 3\times 1{,}7956 + 1\times 5{,}4756 + 1\times 11{,}1556}{50} = \frac{35{,}22}{50} = 0{,}7044$$

Logo,

$$dp(X) = \sqrt{0{,}7044} = 0{,}8393$$

(c)

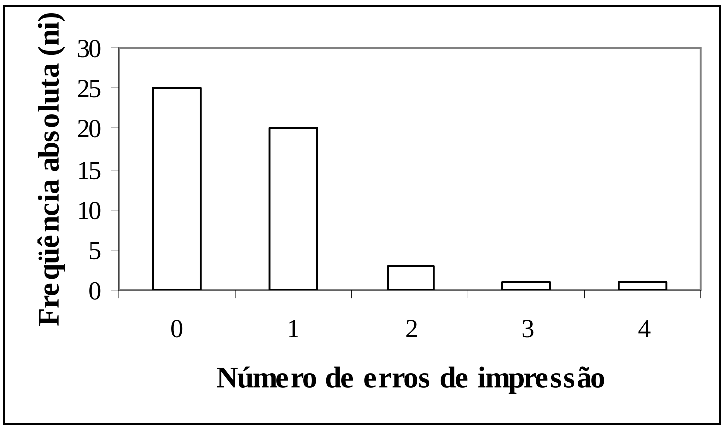


Gráfico de barras do número de erros por página

(d) Uma vez que a média de erros por página é 0,66 e o livro tem 500 páginas, o número esperado de erros no livro é $0{,}66\times 500 = 330$

Problema 02.

Média:

$$\bar{x} = \frac{2{,}59 + 2{,}64 + 2{,}60 + 2{,}62 + 2{,}57 + 2{,}55 + 2{,}61 + 2{,}50 + 2{,}63 + 2{,}64}{10} = 2{,}595$$

Mediana:

$$md = \frac{2{,}600 + 2{,}610}{2} = 2{,}605$$

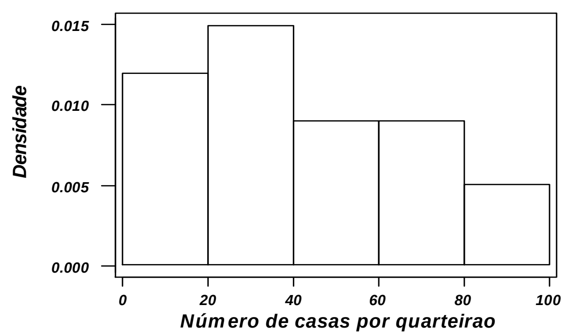
Desvio Padrão:

$$\mathrm{var}(X) = \frac{(-0{,}005)^2 + (0{,}045)^2 + (0{,}005)^2 + (0{,}025)^2 + (-0{,}025)^2 + (-0{,}045)^2 + (-0{,}045)^2}{10}$$

$$+\frac{(0{,}015)^2 + (-0{,}095)^2}{10} = 0{,}0018 \Rightarrow dp(X) = \sqrt{0{,}0018} = 0{,}0424$$

Problema 03.

(a)



Histograma do número de casas por quarteirão

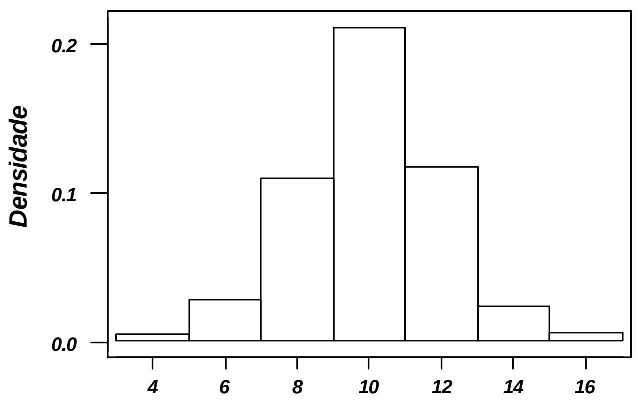
(b) Média: 40,42; desvio-padrão: 25,81.

Problema 04.

(a) A mediana é uma medida de posição mais importante do que a média, por

(b) exemplo, em situações em que a variável em estudo tem algum valor muito discrepante que "puxa" a média para cima ou para baixo.

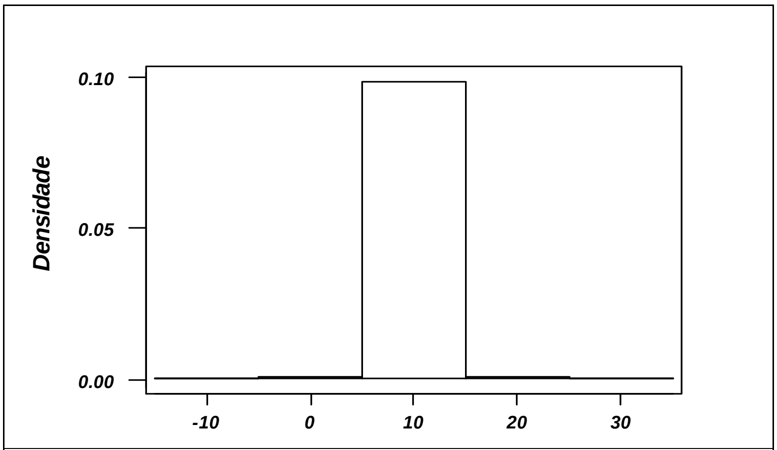
(c)



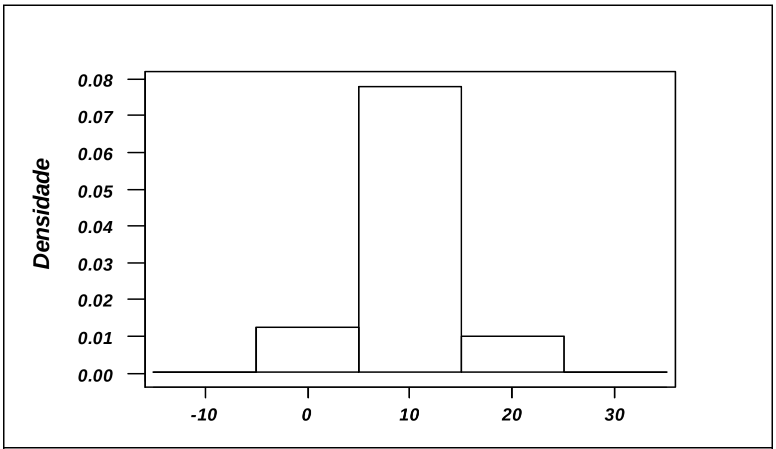
Histograma

Em distribuições simétricas, a média e a mediana coincidem.

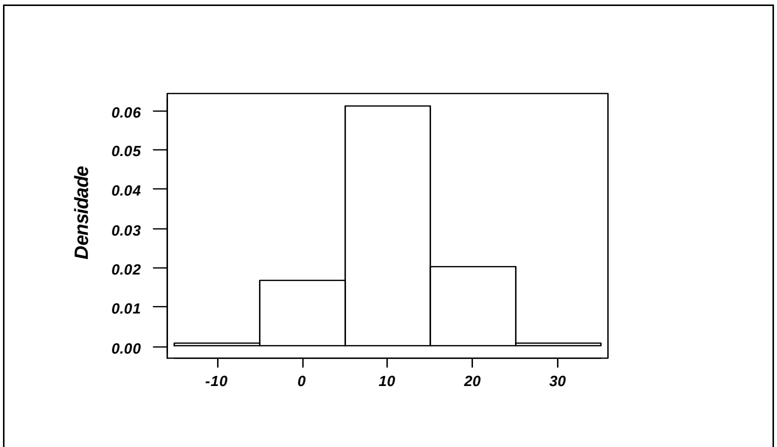
(d)



Média =10,0 e Variância = 4



Média =10,0 e Variância = 16



Média =10,0 e Variância = 36

Problema 05.

Nessa situação, tanto a média quanto a mediana (que coincidem) não se apresentam como boas medidas de posição. Elas não retratam bem a distribuição da variável estudada. Nessas condições, seria melhor considerar a moda, ou modas, pois nesse caso a distribuição é bi-modal.

Problema 06.

(a) A mediana do número de filhos é a média aritmética das observações de ordem

(b) 50 e 51, que é 2.

(c) A moda do número de filhos é 2.

(d) O cálculo da média fica prejudicado pelo fato de haver uma categoria representada por "mais que 5" filhos, sem a especificação do valor exato. Neste caso, deve-se usar o conhecimento empírico que se tem da variável para propor um valor máximo para o intervalo, ou o ponto médio da classe. Aqui vamos supor que as famílias com "mais que 5", tenham em média 8 filhos. Desse modo tem-se:

$$\bar{x} = \frac{0\times17+1\times20+2\times28+3\times19+4\times7+5\times4+8\times5}{100} = 2{,}21$$

Problema 07.

	50	
	31	
20		61
2		97

- Intervalo interquartil: $q_3 - q_1 = 61 - 20 = 41$
- Dispersão inferior (di): $q_2 - x_{(1)} = 31 - 2 = 29$
- Dispersão superior (ds): $x_{(n)} - q_2 = 97 - 31 = 66$

Para que a distribuição dos dados tenha forma normal (simétrica, em geral), é necessário:

$di \cong ds$

$q_2 - q_1 \cong q_3 - q_2$

$q_2 - q_1$ e $q_3 - q_2 <\ di\ e\ ds$

Os valores acima obtidos indicam que a distribuição dos dados não tem forma normal.

Problema 08.

	37	
	35	
31		40
21		49

- Intervalo interquartil: $q_3 - q_1 = 40 - 31 = 9$
- Dispersão inferior (di): $q_2 - x_{(1)} = 35 - 21 = 14$
- Dispersão superior (ds): $x_{(n)} - q_2 = 49 - 35 = 14$

Os valores acima obtidos indicam que a distribuição dos dados tem forma aproximadamente normal.

Problema 09.

Temos que:

$q(0{,}10) = \dfrac{(13+14)}{2} = 13{,}5$, $q(0{,}25) = 19{,}5$, $q(0{,}50) = 31{,}0$, $q(0{,}75) = 61{,}0$,

$q(0{,}90) = \dfrac{(78+80)}{2} = 79{,}0$

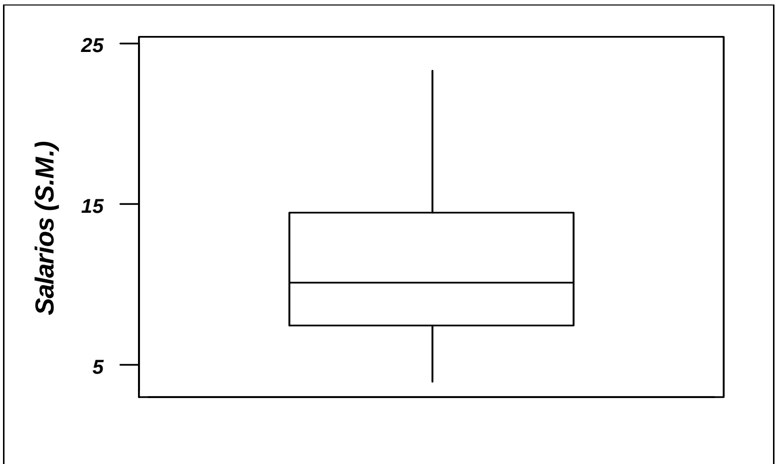
Problema 10.

Temos que:

$q(0{,}10) = 576{,}841$, $q(0{,}25) = 1{,}580{,}217$, $q(0{,}50) = 2{,}776{,}006$, $q(0{,}75) = 5{,}095{,}113$,

$q(0{,}80) = 6{,}704{,}975$, $q(0{,}95) = 12{,}993{,}918$

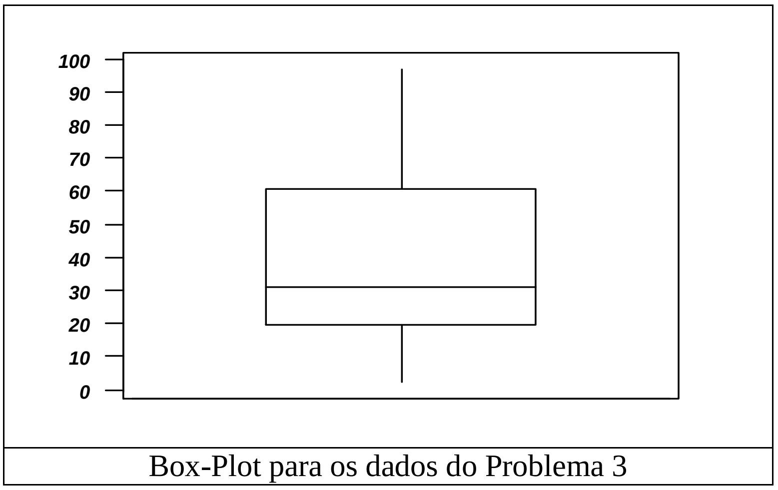
Problema 11.



Box-Plot dos Salários dos funcionários da Companhia MB

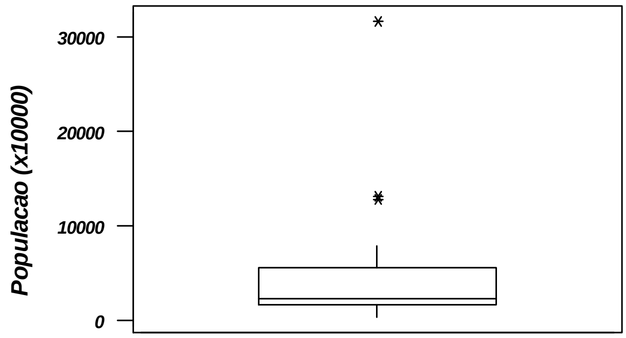
Pode-se perceber uma distribuição assimétrica à direita.

Problema 12.



Box-Plot para os dados do Problema 3

Problema 13.



Box-Plot do Problema 10

Problema 14.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}\right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\left(\bar{x}\right)^2 + n\left(\bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$$

(c) $\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{x}\right)^2 =$

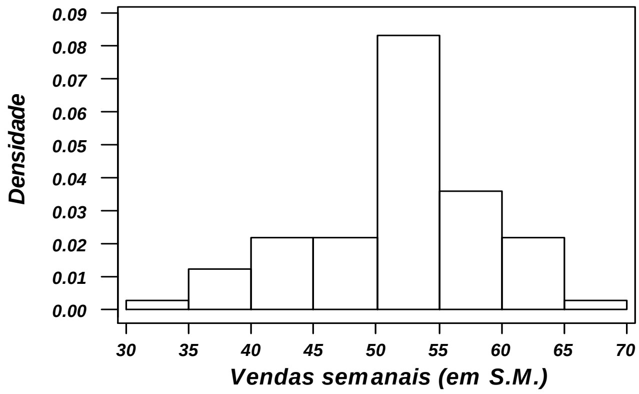
$$= \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - n\left(\bar{x}\right)^2$$

(d) $\sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \sum_{i=1}^{k} f_i\left(\bar{x}\right)^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2$$

Problema 16.

(a)



Histograma das vendas semanais de vendedores de gêneros alimentícios

(b) Supondo uma variável discreta com todas as observações do intervalo concentradas no ponto médio:

$$\bar{x} = \frac{32{,}5\times 2 + 37{,}5\times 10 + 42{,}5\times 18 + 47{,}5\times 50 + 52{,}5\times 70 + 57{,}5\times 3062{,}5\times 18 + 67{,}5\times 2}{200} =$$

$$= \frac{10240}{200} = 51{,}2$$

(c) $\mathrm{var}(X) = (-18{,}7)^2 \times 0{,}01 + (-13{,}7)^2 \times 0{,}05 + (-8{,}7)^2 \times 0{,}09 + (-3{,}7)^2 \times 0{,}25 +$
$+ (1{,}3)^2 \times 0{,}35 + (6{,}3)^2 \times 0{,}15 + (11{,}3)^2 \times 0{,}09 + (16{,}3)^2 \times 0{,}01 = 43{,}81$

Logo,

$dp(X) = 6{,}62$

(d) Temos que: $\bar{x} - 2s = 51{,}2 - 2\times 6{,}62 = 37{,}96$ e $\bar{x} + 2s = 51{,}2 + 2\times 6{,}62 = 64{,}44$
Assim, queremos achar as seguintes áreas do histograma:

$$\frac{40-35}{5\%} = \frac{40-37{,}96}{A} \Rightarrow A = 2{,}04\%$$

$$\frac{65-60}{9\%} = \frac{644{,}44-60}{B} \Rightarrow B = 7{,}99\%$$

Desse modo, o intervalo em questão abriga: $2{,}04\% + 9\% + 25\% + 35\% + 15\% = 94{,}03\%$

(e) Pela distribuição de freqüências, vê-se que a mediana bruta é 52,5.

Problema 18.

(a) Mediana:

$$\frac{40-20}{28} = \frac{q_2 - 20}{24} \Rightarrow q_2 = 37{,}14$$

(b) 1º decil:

$$\frac{20-0}{26}=\frac{x-0}{10}\Rightarrow x=7{,}69$$

(c) Intervalo interquartil(dq):

$$\frac{20-0}{26}=\frac{q_1-0}{25}\Rightarrow q_1=19{,}23$$

$$\frac{80-60}{0{,}20}=\frac{q_3-60}{0{,}03}\Rightarrow q_3=63{,}00$$

Portanto, $dq=63{,}00-19{,}23=43{,}77$

Problema 19.

X : tempo de casamento.

X	n_i	f_i	F_i
[0;6)	2800	0,56	0,56
[6;12)	1400	0,28	0,84
[12;18)	600	0,12	0,96
[18;24)	150	0,03	0,99
[24;30)	50	0,01	1,00
Total	5000	1,00	

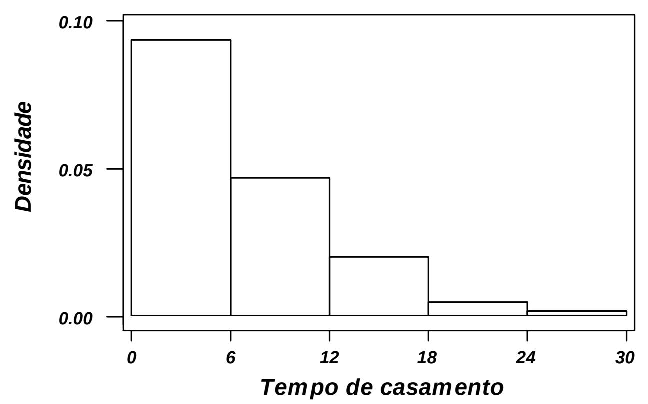
(a) $\bar{x}=3\times0{,}56+9\times0{,}28+15\times0{,}12+21\times0{,}03+27\times0{,}01=6{,}90$

$md=5{,}36$

(b) $\text{var}(X)=(-3{,}9)^2\times0{,}56+(2{,}1)^2\times0{,}28+(8{,}1)^2\times0{,}12+(14{,}1)^2\times0{,}03+(20{,}1)^2\times0{,}01=$

$=27{,}63\Rightarrow dp(X)=5{,}26$ anos

(c)



Histograma do tempo até o desquite

(d) 1º decil: $\frac{6-0}{56}=\frac{x-0}{10}\Rightarrow x=1{,}07$ anos

9º decil: $\frac{18-12}{12}=\frac{y-12}{6}\Rightarrow y=15$ anos

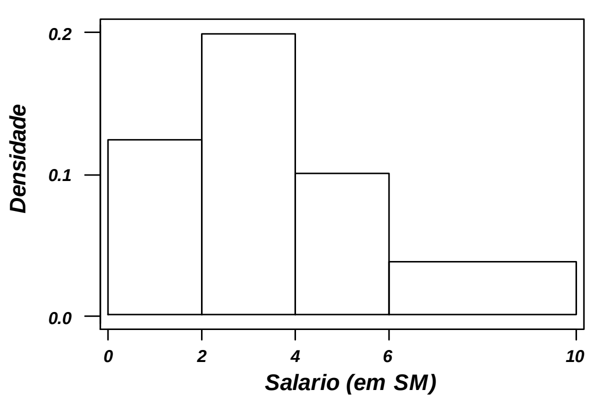
(e) 1º quartil: $\frac{6-0}{56}=\frac{q_1-0}{25}\Rightarrow q_1=2{,}68$ anos

(f) 3º quartil: $\frac{12-6}{28}=\frac{q_3-6}{19}\Rightarrow q_3=10{,}07$ anos

$dq=10{,}07-2{,}68=7{,}39$

Problema 20.

(a)



Histograma para os Salários mensais dos funcionários do setor administrativo

(b) Média: $\bar{x}=1\times0{,}25+3\times0{,}40+5\times0{,}20+8\times0{,}15=3{,}65$

Variância:

$$\mathrm{var}(X)=(-2{,}65)^2\times0{,}25+(-0{,}65)^2\times0{,}40+(1{,}35)^2\times0{,}20+(4{,}35)^2\times0{,}15=28{,}19$$

Variância: $dp(X)=\sqrt{28{,}19}=5{,}31$

(c) 1º quartil: $q_1=2$

Mediana: $\frac{4-2}{0{,}40}=\frac{md-2}{0{,}25}\Rightarrow md=3{,}25$

(d) Se todos os salários aumentarem em 100%, ou seja, dobrados, a média dos salários dobrará e a sua variância será multiplicada por 4.Trata-se de um resultado geral que pode ser demonstrado da seguinte maneira.

Suponha que haja uma coleção de n valores, denotados por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com média $\bar{x}$ e variância $s^2(X)$. Seja k uma constante real. Se todos os n valores da coleção acima forem multiplicados por k, teremos:

(i) Para a média:

$$\overline{x_k} = \frac{kx_1 + \ldots + kx_n}{n} = k\bar{x}$$

(ii) Para a variância:

$$s_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(kx_i - k\bar{x})^2 = k^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = k^2 s^2(X)$$

(e) Dar um abono de 2 SM para todos os funcionários significa aumentar a média e a mediana em duas unidades. A variância não se altera. Novamente, esse resultado pode ser generalizado para a soma de qualquer constante real k. Vejamos:
Para a média:

$$\overline{x_2} = \frac{(k + x_1) + \ldots + (k + x_n)}{n} = \frac{kn + x_1 + \ldots + x_n}{n} = \bar{x} + k$$

Um raciocínio semelhante serve para a mediana.

Para a variância:

$$s_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i + k) - (\bar{x} + k)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + k - \bar{x} - k)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^2(X)$$

Problema 21.

(a) – média: fica multiplicada por 2
- mediana: fica multiplicada por 2
- desvio-padrão: fica multiplicado por 2

(b) – média: aumenta em 10 unidades
- mediana: aumenta em 10 unidades
- desvio-padrão: não se altera

(c) – média: fica igual a zero: $\left[\frac{x_1 - \bar{x} + \ldots + x_n - \bar{x}}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n - n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0\right]$
- mediana: fica reduzida em $\bar{x}$ unidades
- desvio-padrão: não se altera

(d) – média: fica igual a zero
- mediana: como todas as observações, fica reduzida em $\bar{x}$ unidadese dividida por $dp(X)$
- desvio-padrão: fica igual a um. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{dp(X)}\right)^2 = \frac{\mathrm{var}(X)}{\mathrm{var}(X)} = 1$

Problema 22.

(a) Se o terceiro quartil da distribuição dos salários da companhia A é 5000, a probabilidade de um candidato receber mais de 5000 unidades é 0,25. Assim, o mais provável é receber menos que essa quantia.

(b) Na empresa B, o salário seria de 7000 unidades, com certeza. Na empresa A, como foi visto no item anterior, a probabilidade de se receber mais que 5000 unidades é 0,25. Desse modo, é mais interessante empregar-se na empresa B.

Problema 23.

(a) Medidas descritivas obtidas na amostra-piloto

Média	30
Mediana	27
Variância	128,22
Amplitude	37

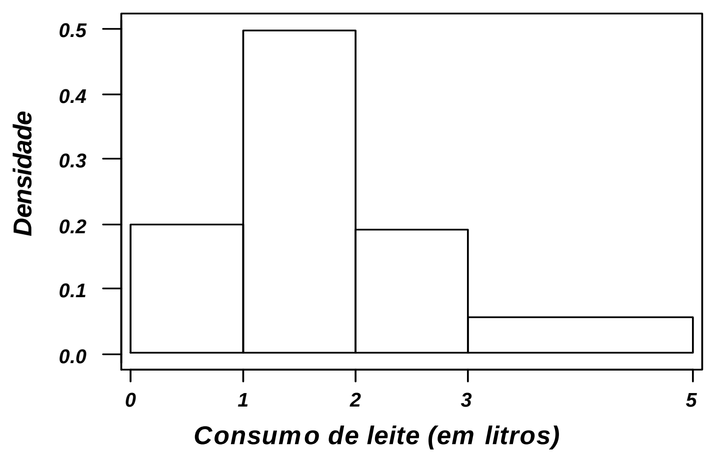
(b) Das medidas acima, a mais importante para a determinação do tamanho da amostra final é a variância, pois fornece informação a respeito da variabilidade da variável Idade.

Problema 24.

(a) Distribuição de freqüências do consumo diário de leite

Consumo diário de leite	f_i
Menos de 1 litro	0,20
1 a 2 litros	0,50
2 a 3 litros	0,20
3 a 5 litros	0,10

(b)



Histograma

(c) $\bar{x} = 0,5 \times 0,20 + 1,5 \times 0,50 + 2,5 \times 0,20 + 4 \times 0,10 = 1,75$ litros

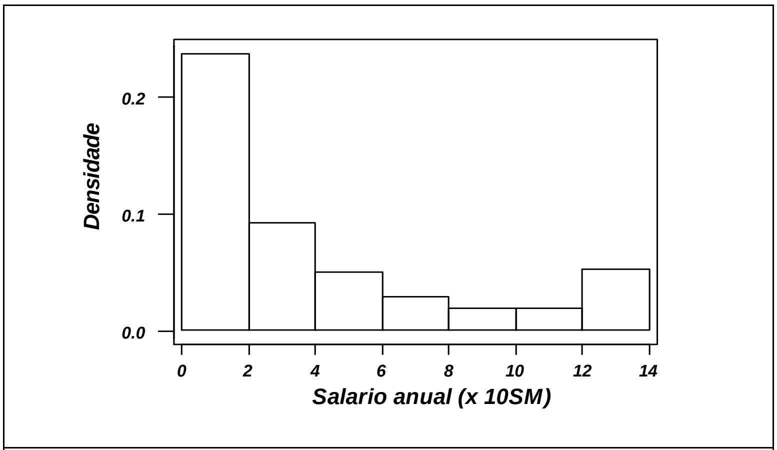
Mediana: $\dfrac{2-1}{0,50} = \dfrac{md-1}{0,30} \Rightarrow md = 1,6$

(d) $\text{var}(X) = (-1{,}25)^2 \times 0{,}20 + (-0{,}25)^2 \times 0{,}50 + (0{,}75)^2 \times 0{,}20 + (2{,}25)^2 \times 0{,}1 = 0{,}9625$
$\Rightarrow dp(X) = 0{,}9811$

(e) $\dfrac{2-1}{0{,}50} = \dfrac{q_1 - 1}{0{,}05} \Rightarrow q_1 = 1{,}1$

Problema 25.

(a)



Histograma

(b) $\bar{x} = 1\times 0{,}49 + 3\times 0{,}19 + 5\times 0{,}10 + 7\times 0{,}05 + 9\times 0{,}04 + 11\times 0{,}03 + 13\times 0{,}10 = 3{,}92$

$\text{var}(X) = (-2{,}92)^2 \times 0{,}49 + (-0{,}92)^2 \times 0{,}19 + (1{,}08)^2 \times 0{,}10 + (3{,}08)^2 \times 0{,}05 +$

$+ (5{,}08)^2 \times 0{,}04 + (7{,}08)^2 \times 0{,}03 + (9{,}08)^2 \times 0{,}10 = 15{,}71 \Rightarrow dp(X) = 3{,}96$

(c) No bairro A, pois tem menor desvio-padrão.

(d)

Faixa salarial	n_i	f_i	F_i
0|---2	10000	0.49	0.49
2|---4	3900	0.19	0.68
4|---6	2000	0.10	0.78
6|---8	1100	0.05	0.83
8|---10	800	0.04	0.87
10!---12	700	0.03	0.90
12|---14	2000	0.10	1.00
Total	20500	1.00	

Isso posto, pode-se perceber que os 10% mais ricos da população são os que pertencem a faixa salarial compreendida entre 12 e 14 salários mínimos anuais.

Problema 26.

Média:

$$\bar{x} = 3\times 0{,}15 + 5\times 0{,}25 + 7\times 0{,}20 + 9\times 0{,}30 + 11\times 0{,}10 = 6{,}9$$

Mediana:

$$\frac{8-6}{0{,}20}=\frac{md-6}{0{,}10}\Rightarrow md=7$$

Moda: nesse caso, a moda é 9.
Variância:

$$\operatorname{var}(X)=(-3{,}90)^2\times 0{,}15+(-0{,}19)^2\times 0{,}25+(0{,}10)^2\times 0{,}20+(2{,}10)^2\times 0{,}30+(4{,}10)^2\times 0{,}10=$$
$$=6{,}19$$

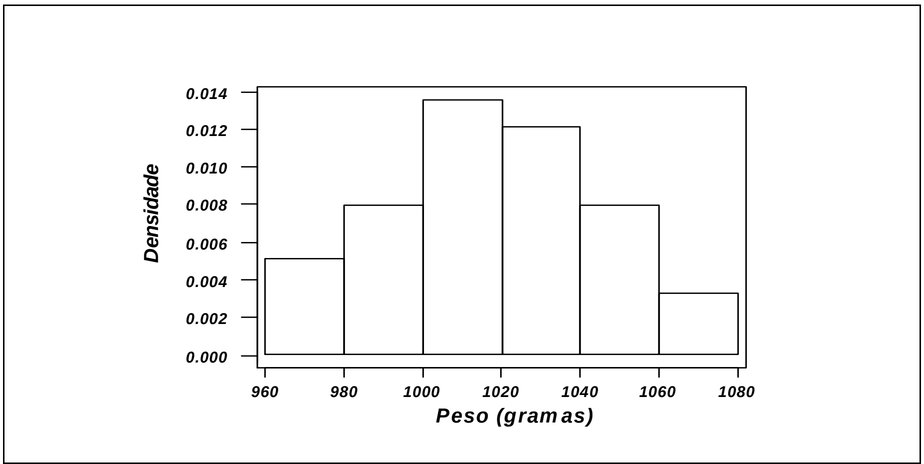
- 1º quartil: $\dfrac{6-4}{0{,}25}=\dfrac{q_1-4}{0{,}10}\Rightarrow q_1=4{,}8$

Problema 27.

(a) $\bar{x}=\dfrac{1}{1000}\times\left(970\times 60+990\times 160+1010\times 280+1030\times 260+1050\times 160+1070\times 80\right)=1020{,}8$

(b) $\operatorname{var}(X)=\dfrac{1}{1000}\times\left(2580{,}64\times 60+948{,}64\times 160+116{,}64\times 280+84{,}64\times 260+852{,}64\times 160+\right.$
$\left.+\,2420{,}64\times 80\right)=691{,}36$

(c)



Histograma

(d) A tabela baixo mostra o critério a ser utilizado na classificação dos frangos:

Peso(g)	Categoria
Menos de 997,5	D
997,5 a 1020,0	C
1020,1 a 1045,0	B
Mais de 1045,0	A

$$\frac{1000-980}{16}=\frac{D-980}{14}\Rightarrow D=997{,}5$$
$$\frac{1060-1040}{16}=\frac{B-1040}{4}\Rightarrow B=1045$$

(e) Temos que: $\bar{x} - 2dp(X) = 968{,}21$. Dos frangos desta granja , 2,46% estão abaixo deste peso:

$$\frac{980-960}{6} = \frac{968{,}21-960}{x} \Rightarrow x = 2{,}46$$

Também, $\bar{x} + 1{,}5dp(X) = 1060{,}24$. Acima deste patamar, encontram-se 7,90% dos frangos:

$$\frac{1080-1060}{8} = \frac{1080-1060{,}24}{y} \Rightarrow y = 7{,}90$$

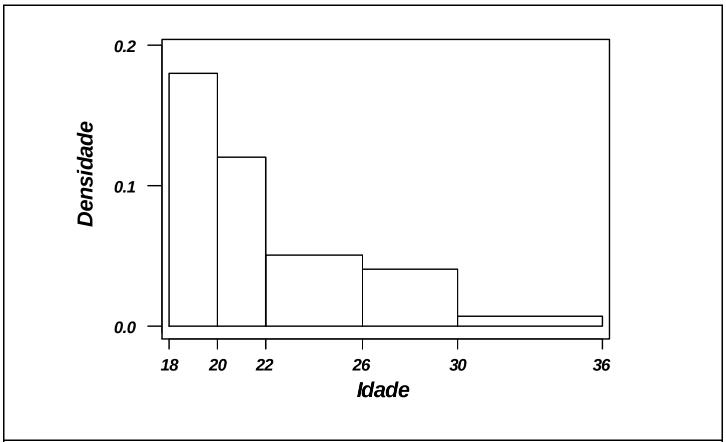
Problema 28.

(a) Aparentemente, a campanha não produziu o efeito esperado. A média dos dados é 22,48 anos.

$$\bar{x} = \frac{1}{50} \times (19\times18 + 21\times12 + 24\times10 + 28\times8 + 33\times2) = 22{,}48$$

(b) A média dos dados é 22,48 e o desvio-padrão é 3,83. Assim, a diferença $\bar{x} - 22$ é 0,48 e $2dp(X)/\sqrt{n}$ é 1,08. Desse modo, o critério do outro pesquisador também indica que a campanha não surtiu efeito.

(c)



Histograma da idade média dos candidatos

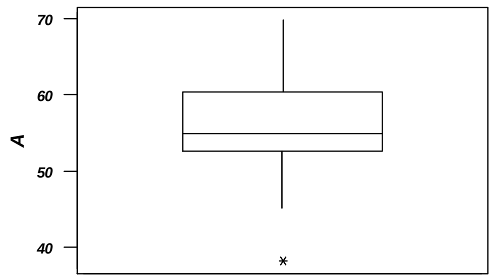
Esquema dos cinco números para a corretora A

	18	
	55	
54		60
38		70

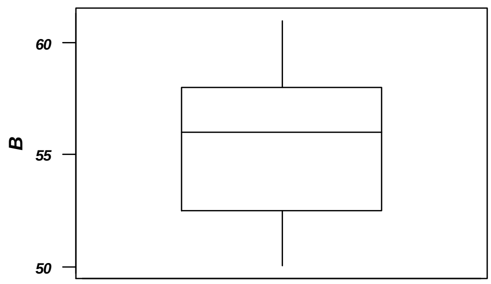
Esquema dos cinco números para a corretora B

	21	
	56	
53		58
50		61

Representação gráfica:



Corretora A



Corretora B

As medidas e a figura acima indicam que, a despeito do fato de o máximo lucro observado ser proveniente da corretora A, é a corretora B que apresenta menor variabilidade nos lucros proporcionados. As medianas das duas empresas estão bastante próximas. Estes elementos permitem acreditar que é mais vantajoso ter o dinheiro investido pela corretora B.

Problema 30.

Se as populações são homogêneas, espera-se uqe suas variâncias sejam próximas, de modo que o quociente F deve ser próximo de 1.

Problema 31.

A figura do Problema 29, nos mostra que os dados da corretora A têm maior variabilidade que os da corretora B. A mediana dos lucros proporcionados pela segunda é um pouco mais alta que a dos lucros da primeira corretora.

Problema 32.

$$S_*^{\,2} = \frac{(n_A - 1)Var(X \mid A) + (n_B - 1)Var(X \mid B)}{n_A + n_B - 2} = \frac{17 \times 58{,}98 + 20 \times 10{,}05}{18 + 21 - 2} = \frac{1203{,}66}{37} = 32{,}53$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{S_*^2 \sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}} = \frac{55{,}72 - 55{,}43}{32{,}53 \times 0{,}32} = \frac{0{,}29}{10{,}41} = 0{,}03$$

Como t =0,03 < 2, conclui-se que os desempenhos das duas corretoras são semelhantes.

Problema 33.

Média Inicial ($\bar{x}$): 15,9

Desvio Padrão (dp): 3,5

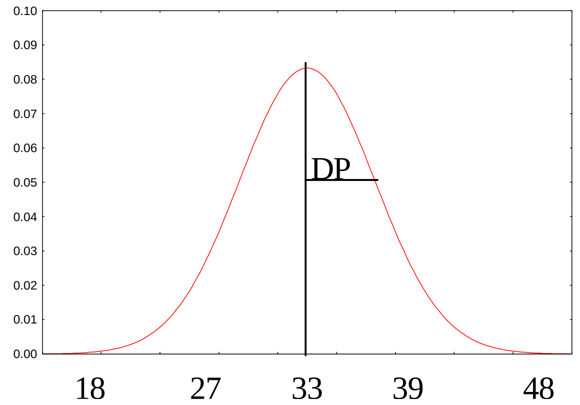
$\bar{x} + 2dp(X) = 22{,}9$

$\bar{x} - 2dp(X) = 8{,}8$

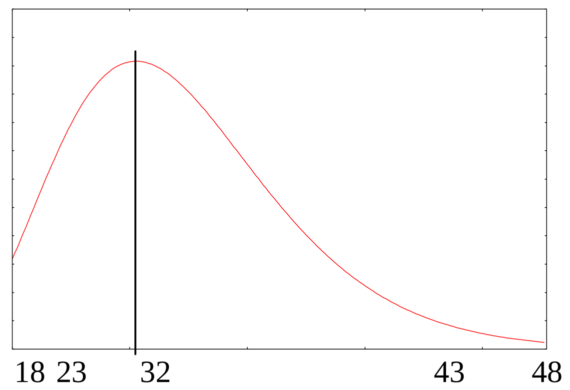
Logo, os limites são 8,8 e 29,9, ou seja, valores maiores que 22,9 ou menores uqe 8,8 devem ser retirados do cálculo. Para esse conjunto de dados, somente o valor 8 encontra-se abixo de 8,8. Assim, calculando a média final, tem-se:

Média final = 16,8

Problema 34.

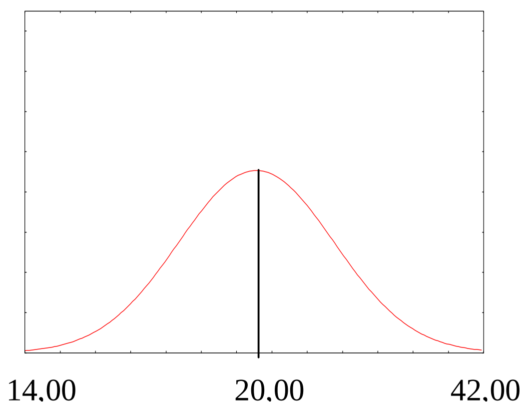


Histograma para os dados da repartição A

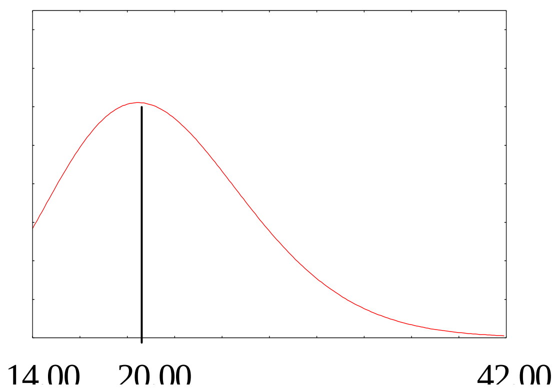


Histograma para os dados da repartição B

Problema 35.



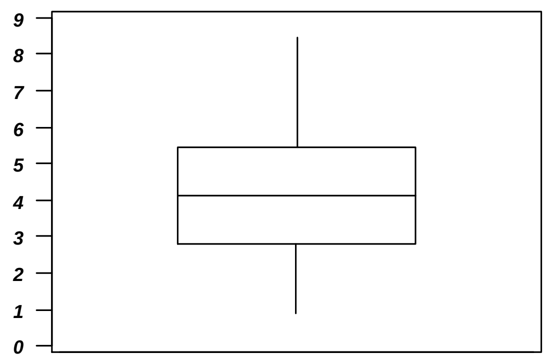
Histograma para a Região A:



Histograma para a Região B:

Basicamente, as diferenças entre os gráficos dizem respeito à variabilidade e à simetria. O gráfico da região B apresenta maior variabilidade e é assimétrico.

Problema 36.



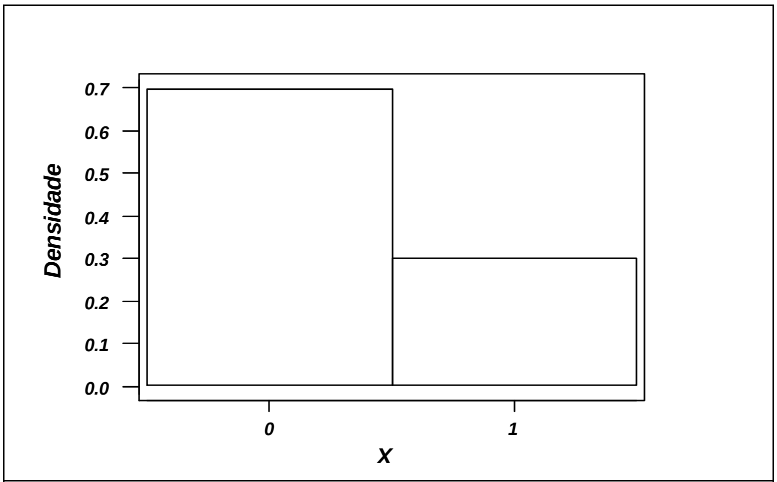
As taxas apresentam-se aproximadamente simétricas em torno de 4,32, que é o valor médio.A taxa mínima é de 0,90 e a máxima é de 8,45.

Problema 37.

(a) $\bar{x} = 0{,}305$; $\mathrm{var}(X) = 0{,}305$

(b) O valor de $\bar{x}$ indica a proporção de empregados oriundos da capital.

(c)



Histograma de X

Problema 38.

(a) O valor Z é uma nota padronizada. Nessa padronização, o valor 0 indica que o indivíduo que o indivíduo em questão obteve a nota média. A nota Z também fornece idéia sobre o desempenho de cada elemento com relação a todo o grupo.

(b) As notas padronizadas são:

0,58	0,58	-0,18	-0,18	0,58
1,35	-0,18	-0,18	0,58	-0,18
1,35	-0,95	-0,95	0,58	0,58
-0,95	-0,18	0,58	-3,26	-0,95
-0,95	-0,18	1,35	0,58	0,58

(c) Como as notas foram padronizadas pela subtração da média e divisão pelo desvio-padrão, tem-se (Problema 21) que $\bar{z} = 0$; $dp(Z) = 1$

(d) Existe um funcionário que obteve $Z = -3{,}26$, sendo, pois, considerado anormal.

(e) Para avaliar o seu desempenho relativo, é necessário comparar as notas padronizadas nas três disciplinas. Em Direito, todos obtiveram 9,0; de modo

(f) que o funcionário 1 obteve a nota média, cujo valor padronizado é zero. Em Política, a média das notas foi 7,76 e o desvio padrão, 1,67. Com isso, a nota padronizada do funcionário 1 é 0,74. Com isso, seu desempenho relativo foi melhor em Política.

Problema 39.

Para os salários da Tabela 2.1, temos que:

$\overline{x} = 11{,}12$

$\overline{x}(0{,}10) = 10{,}84$ (foram eliminadas as 4 primeiras e as 4 últimas observações)

$\overline{x}(0{,}25) = 10{,}52$ (foram eliminadas as 9 primeiras e as 9 últimas observações)

Problema 40.

Para a região A:

$$CV_A = \frac{s}{x} \times 100\% = \frac{4}{20} \times 100\% = 20\%$$

Para a região B:

$$CV_A = \frac{s}{x} \times 100\% = \frac{6}{20} \times 100\% = 30\%$$

Como já havia percebido no Problema 35, a variabilidade dos dados provenientes da região B é maior que a dos dados da região A. O coeficiente de variação indica a dimensão da variabilidade com relação à média.

Problema 42.

População Urbana

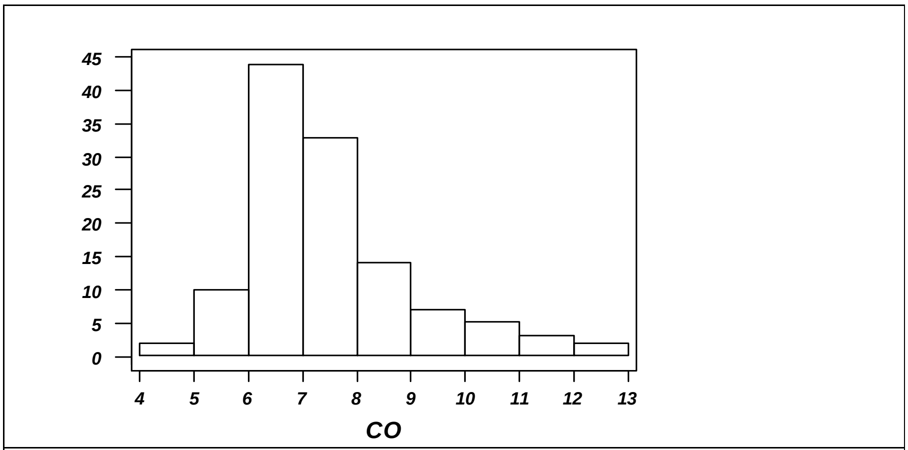
$med = 2.176.000$; $dam = 1.413.000$

População Rural

$med = 715.200$; $dam = 546.900$

Problema 44.

(a)

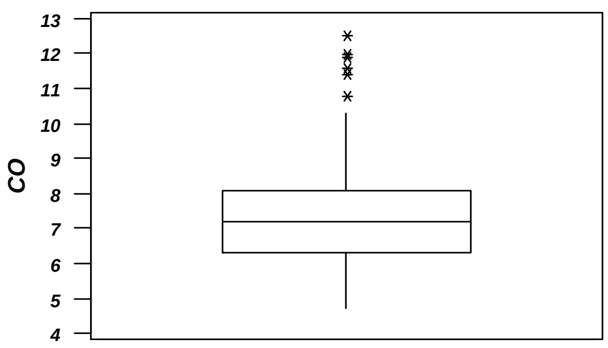


Histograma para a variável CO

4	:	77
5	:	12
5	:	55677789
6	:	1111122222222233333444444
6	:	566667777899999999
7	:	0012233444
7	:	556677777888889999999
8	:	012334
8	:	55678999
9	:	0114
9	:	557
10	:	1333
10	:	8
11	:	4

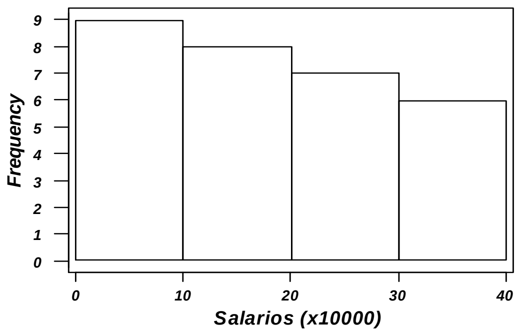
Ramo e folhas

High: 11.6 11.9 12.0 12.5



Box-Plot para a variável CO

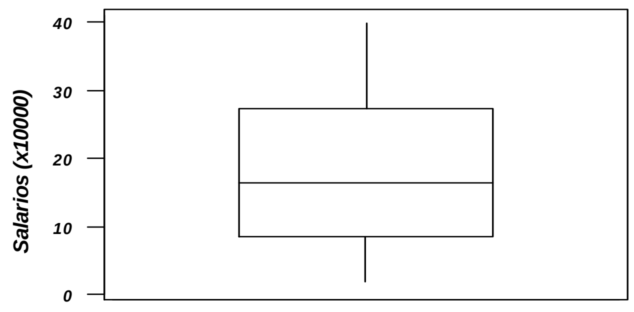
(b) Salários Mecânicos



Histograma para a variável Salários Mecânicos

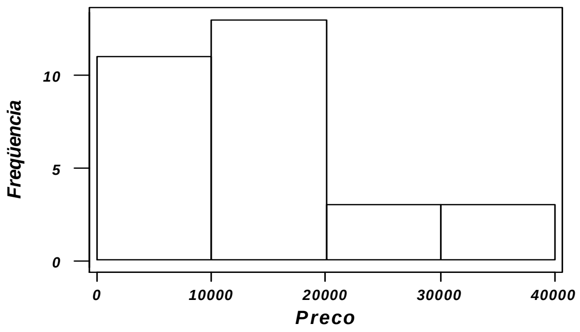
0	:	24
0	:	566789
1	:	012234
1	:	678
2	:	004
2	:	6667
3	:	3
3	:	567
4	:	00

Ramo e folhas



Box-Plot para a variável Salários Mecânicos

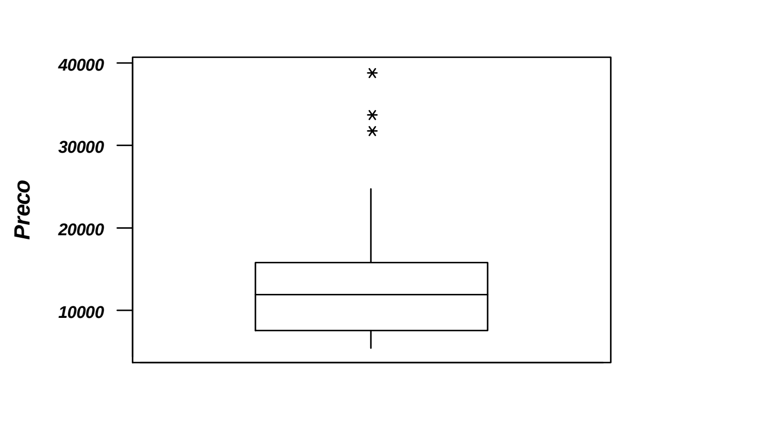
(c)



Histograma para a variável Preço

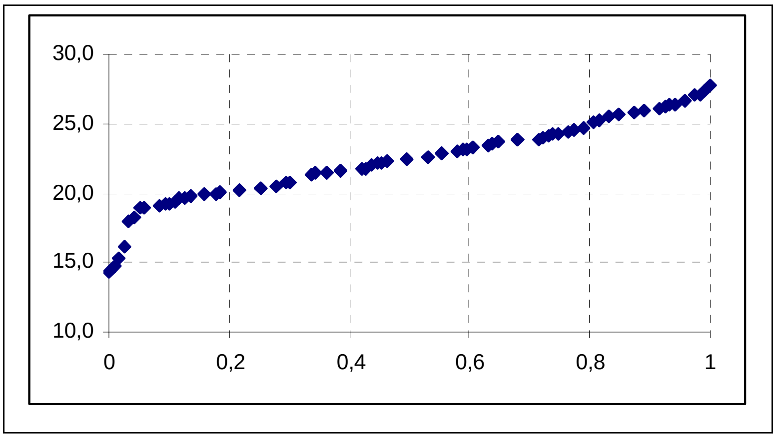
0	:	0
1	:	
2	:	
3	:	
4	:	
5	:	7
6	:	23337
7	:	78
8	:	
9	:	34
10	:	48
11	:	46
12	:	099
13	:	178
14	:	5
15	:	5
16	:	3
17	:	
18	:	
19	:	
20	:	
21	:	5
22	:	2
23	:	
24	:	6

Ramo e folhas



Box-Plot para a variável Preço

Problema 45.



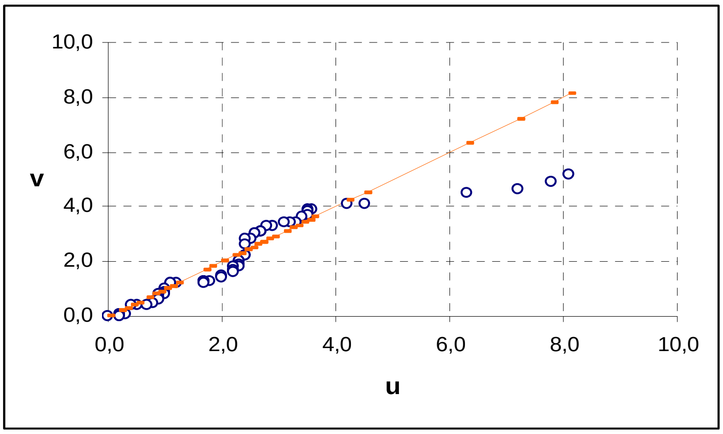


Gráfico de Simetria

Problema 48.

(a) $n = 120$, $d_q = 16$, $\Delta = 16 \times (0{,}039896)^{1/3} = 5{,}47$

(b) $n = 30$, $d_q = 20374$, $\Delta = 20374 \times (0{,}049237)^{1/3} = 7600$

Capítulo 4

Problema 01.

(a)

	Grau de Instrução			
Procedência	1º grau	2º grau	Superior	Total
Interior	3 (0,083)	7 (0,194)	2 (0,056)	12 (0,33)
Capital	4 (0,111)	5 (0,139)	2 (0,056)	11 (0,31)
Outra	5 (0,139)	6 (0,167)	2 (0,056)	13 (0,36)
Total	12 (0,33)	18 (0,50)	6 (0,17)	36 (1,00)

(b) Dos funcionários dessa empresa, 50% têm o segundo grau.

(c) Dos funcionários dessa empresa, 19,4% têm o segundo grau e são oriundos do interior.

(d) Dentre os funcionários do interior, 7/12 (58,3%) têm o segundo grau.

Problema 02.

(a) No sorteio de um indivíduo dentre os 36, é maior a probabilidade de o mesmo ter o segundo grau.

(b) Quanto à região de procedência, a maior probabilidade está associada com a região identificada por "Outra".

(c) A probabilidade de um indivíduo sorteado aleatoriamente ter grau superior de instrução é 0,17.

(d) A probabilidade pedida é $\frac{0{,}056}{0{,}330} = 0{,}17$.

(e) Nesse caso, temos $P(Superior / Capital) = \frac{0{,}056}{0{,}310} = 0{,}18$

Problema 03.

(a) Temos que $md(X) = 2{,}0$ e $md(Y) = 2{,}5$. Assim,

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (0,025)	7 (0,175)	8 (0,20)
Alto	19 (0,475)	13 (0,325)	32 (0,80)
Total	20 (0,50)	20 (0,50)	40 (1,00)

(b) Da tabela, tem-se que 2,5% dos indivíduos encontram-se nessas condições.

(c) 50%.

(d) Dentre as pessoas com baixa rotatividade, 12,5% ganham pouco.

(e) A probabilidade em (c) foi bastante modificada. Isto indica que a maioria das pessoas que ganham pouco têm rotatividade.

Problema 04.

(a)

Região de Procedência	Grau de Instrução		
	1º grau	2º grau	Superior
Interior	0,250	0,583	0,167
Capital	0,364	0,455	0,182
Outra	0,385	0,462	0,154

(b) Em caso de independência entre a região de procedência e grau de escolaridade, em cada tabela deveria existir 33% com 1º grau, 50% com 2º grau e 17% com grau Superior.

Problema 05.

Tabela do total de linhas

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (12,5%)	7 (87,5%)	8 (100,0%)
Alto	19 (59,4%)	13 (40,6%)	32 (100,0%)
Total	20 (50,0%)	20 (50,0%)	40 (100,0%)

Tabela do total de colunas.

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (5,0%)	7 (35,0%)	8 (20,0%)
Alto	19 (95,0%)	13 (65,0%)	32 (80,0%)
Total	20 (100,0%)	20 (100,0%)	40 (100,0%)

As tabelas acima indicam existência de relação entre as variáveis rotatividade e salário, pois as proporções marginais não se repetem no interior da tabela.

Problema 06.

(a) A proporção de homens entre os indivíduos que usaram o hospital é: $100/250 = 0,4$

(b) A proporção de homens entre os indivíduos que não usaramo hospital é: $900/1750 = 0,514$

(c) Tabela do total de colunas.

Usaram o hospital	100 (0,10)	150 (0,15)	0,25
Não usaram o hospital	900 (0,90)	850 (0,85)	0,75
	1,00	1,00	1,00

Independentemente do sexo, 25% das pessoas usam e 75% não usam o hospital. Essas porcentagens deveriam ser iguais nas duas colunas e não são. Portanto, o uso do hospital depende do sexo do segurado.

Problema 07.

Veja a tabela a seguir. Entre parênteses, encontram-se os valores esperados em caso de independência das variáveis.

	Grau de Instrução			
Procedência	1º grau	2º grau	Superior	Total
Interior	3 (4,00)	7 (6,00)	2 (2,00)	12
Capital	4 (3,67)	5 (5,50)	2 (1,83)	11
Outra	5 (4,33)	6 (6,50)	2 (2,17)	13
Total	12	18	6	36

Com isso, os cálculos ficam assim:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0{,}25 + 0{,}17 + 0 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}10 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}67$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{0{,}67}{0{,}67 + 36}} = 0{,}81$$

Problema 08.

Para os dados do problema 3, tem-se:

	Y		
X	Baixo	Alto	Total
Baixo	1 (4)	7 (4)	8
Alto	19 (16)	13 (16)	32
Total	20	20	40

De modo que,

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 2{,}25 + 2{,}25 + 0{,}5625 + 0{,}5625 = 5{,}625$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{5{,}625}{5{,}625 + 40}} = 0{,}351$$

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2 / n}{(r-1)\times(s-1)}} = \sqrt{\frac{5{,}625/40}{1\times 1}} = 0{,}375$$

Para os dados do problema 6, tem-se:

	Homens	Mulheres	Total
Usaram o hospital	100 (125)	150 (125)	250
Não usaram o hospital	900 (875)	850 (875)	1750
Total	1000	1000	2000

De modo que,

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 5{,}00 + 5{,}00 + 0{,}71 + 0{,}71 = 11{,}42$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{11{,}42}{11{,}42 + 2000}} = 0{,}075$$

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2 / n}{(r-1)\times(s-1)}} = \sqrt{\frac{11{,}42/2000}{1\times 1}} = 0{,}076$$

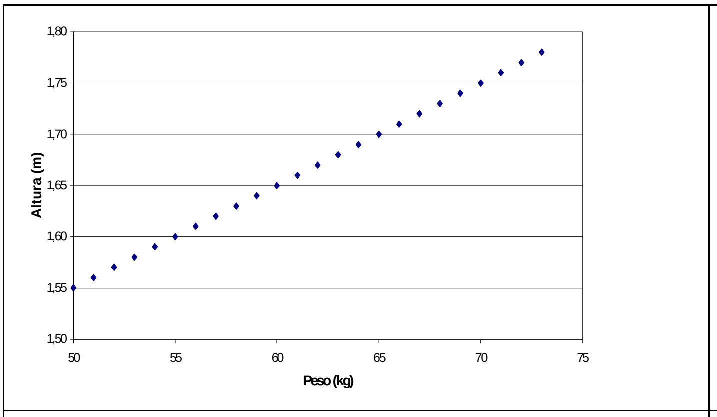
Problema 09.

Os dados podem ser assim representados:

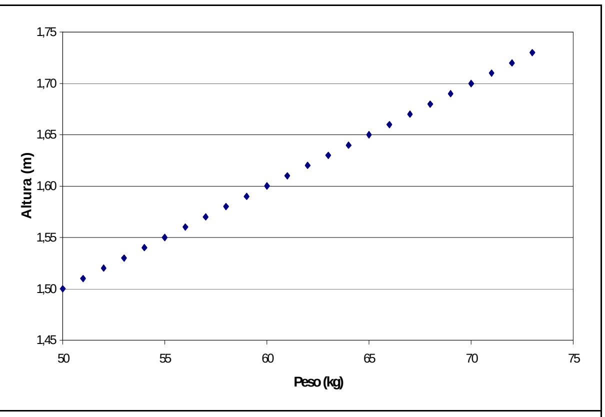
Companhia	Duração de efeito de dedetização		
	Menos de 4 meses	De 4 a 8 meses	Mais de 8 meses
X	0,32	0,60	0,08
Y	0,35	0,58	0,07
Z	0,34	0,60	0,06

Essas proporções indicam que não há diferenças da duração de efeito de dedetização entre as três empresas.

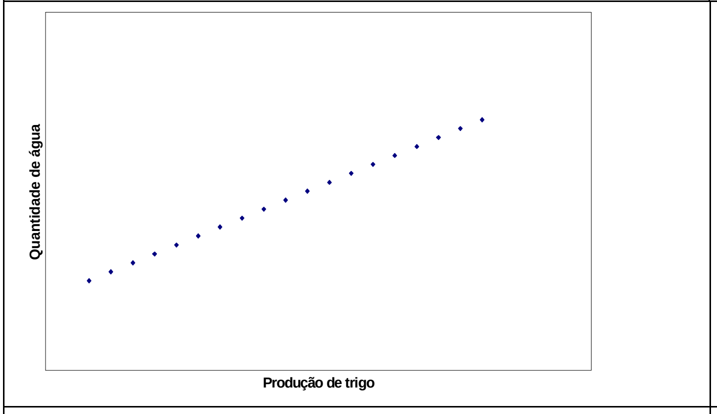
Problema 10.



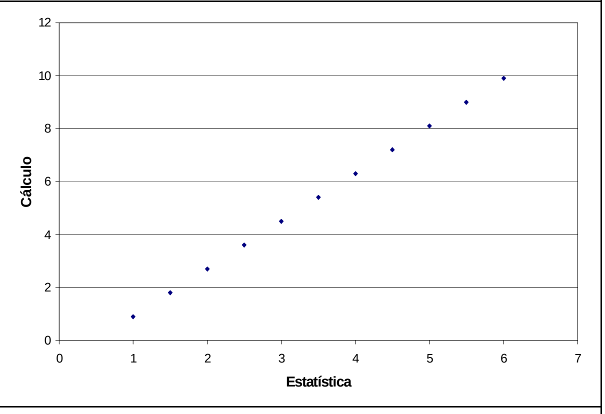
(a)



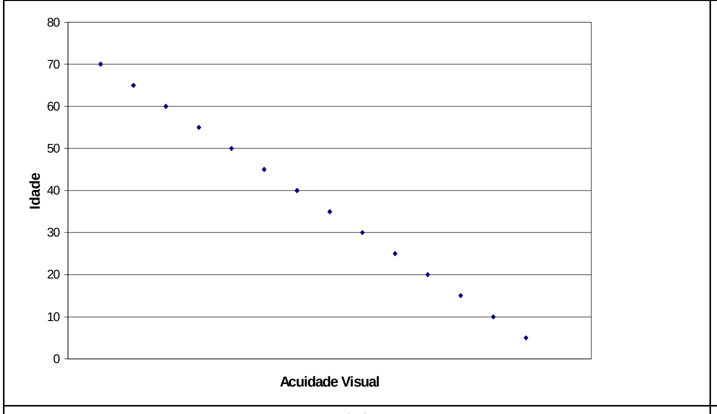
(b)



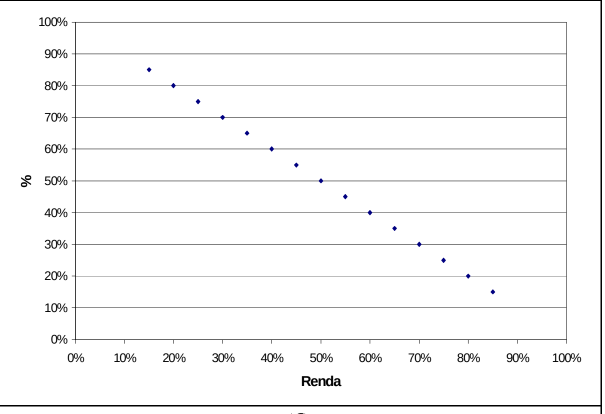
(c)



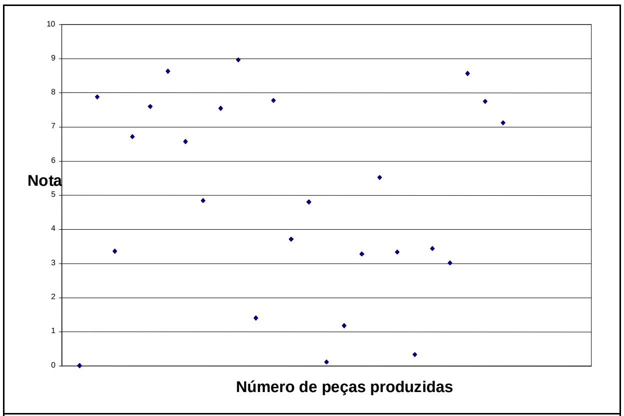
(d)



(e)



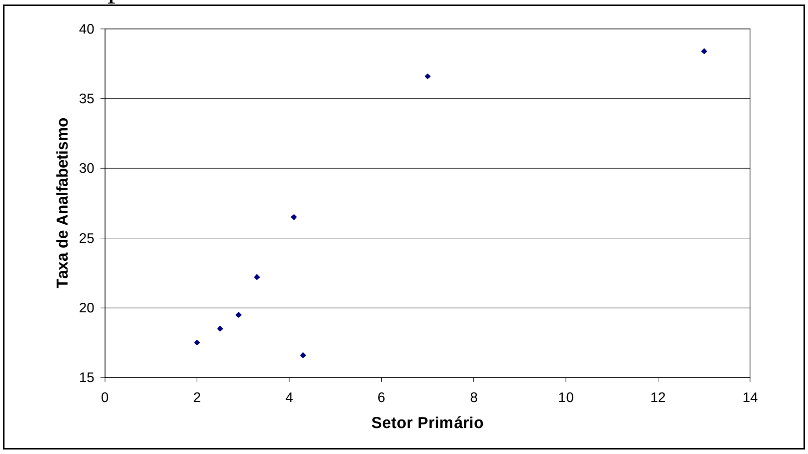
(f)



(g)

Problema 11.

(a) Diagrama de dispersão



(b) O gráfico do item (a) indica dependência linear entre as variáveis.

(c) $$Corr(X,Y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\left[\left(\frac{x_i - 4{,}887}{3{,}62}\right)\times\left(\frac{y_i - 24{,}48}{8{,}63}\right)\right] = 0{,}86$$

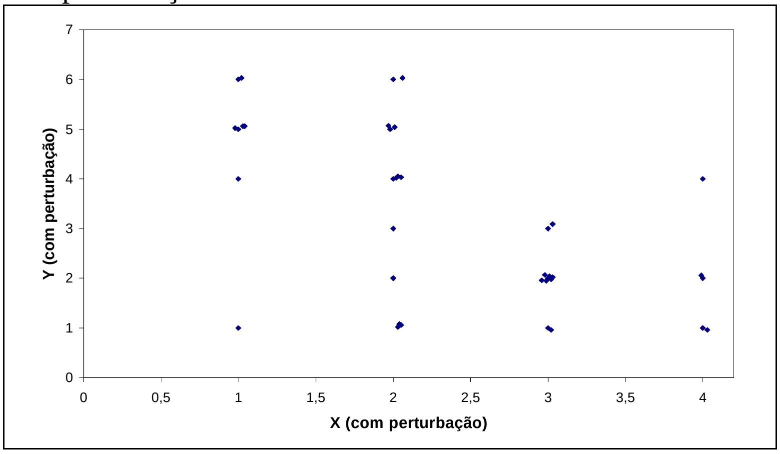
(d) As regiões de Porto Alegre e Fortaleza apresentam comportamento diferente das demais. Retirando-se esses elementos do cálculo resulta $Corr(X,Y) = 0{,}91$.

Problema 12.

(a)

	Y						
X	1	2	3	4	5	6	Total
1	1	0	0	1	4	2	8
2	3	2	1	4	3	2	15
3	2	7	2	0	0	0	11
4	3	2	0	1	0	0	6
Total	9	11	3	6	7	4	40

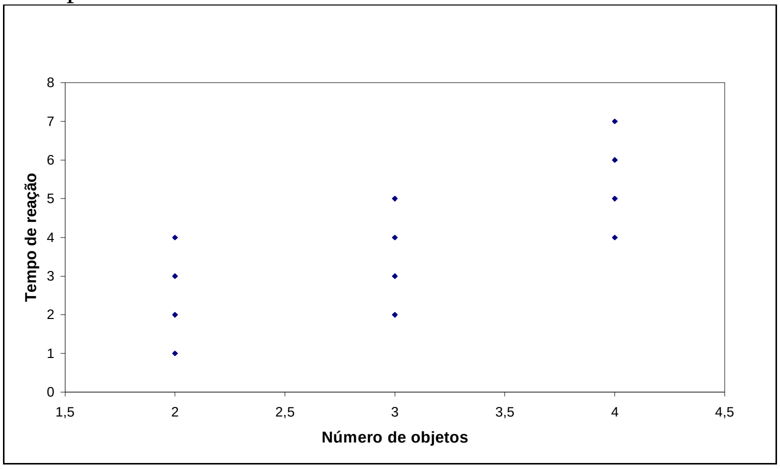
(b) Como existem pontos que coincidiriam no caso de um diagrama de dispersão, pode-se representar os pontos coincidentes no gráfico com número de repetições. Outra alternativa, válida do ponto de vista descritivo é adicionar uma perturbação aos pontos. Soma-se uma quantidade pequena às coordenadas, de modo a não haver mais coincidências. A seguir, o gráfico com a perturbação:



(c) O coeficiente de correlação entre X e Y é 0,59, indicando uma dependência linear moderada entre as variáveis.

Problema 13.

(a) Gráfico de dispersão



(b) O coeficiente de correlação entre as variáveis é 0,74.

Problema 14.

X: idade

Estado Civil	n	$\bar{x}$	dp(X)	var(X)	$x_{(1)}$	q_1	q_2	q_3	x_n
solteiro	16	34,33	7,69	59,11	20,83	27,50	35,75	40,68	46,58
casado	20	35,63	5,95	35,36	26,08	31,37	34,91	39,81	48,92
Total	36	34,58	6,74	45,39	20,00	30,00	34,50	40,00	48,92

$$\overline{\mathrm{var}(X)} = \frac{16 \times 59{,}11 + 20 \times 35{,}36}{36} \cong 45{,}39$$

$$R^2 = \frac{\overline{\mathrm{var}(X)}}{\mathrm{var}(X)} = 1 - \frac{45{,}39}{45{,}39} = 0$$

Problema 15.

X: Nota em Estatística.

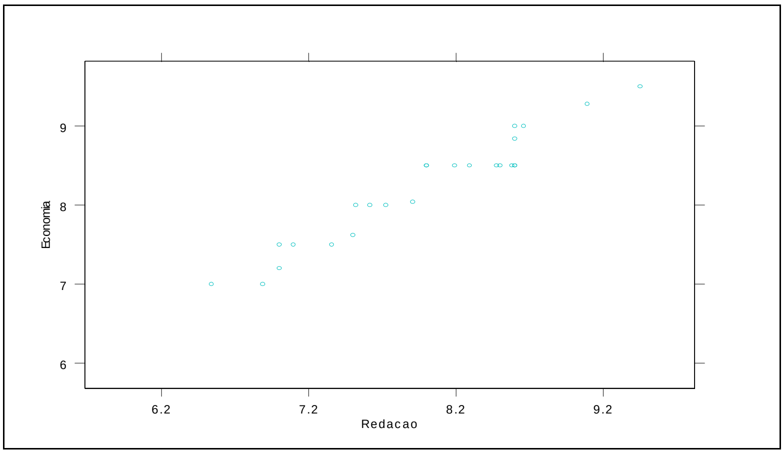
Seção	N	$\overline{x}$	dp(X)	var(X)	$x_{(1)}$	q_1	q_2	q_3	x_n
P	7	8,71	0,75	0,57	8	8	9	9	10
T	7	8,29	1,11	1,24	7	7,5	8	9	10
V	11	7,91	1,64	2,69	4	7	8	9	10
Total	25	8,24	1,30	1,69	4	8	8	9	10

$$\overline{\mathrm{var}(X)} = \frac{7\times 0{,}57 + 7\times 1{,}24 + 11\times 2{,}69}{25} = \frac{3{,}99 + 8{,}68 + 29{,}59}{25} = \frac{42{,}26}{25} = 1{,}69$$

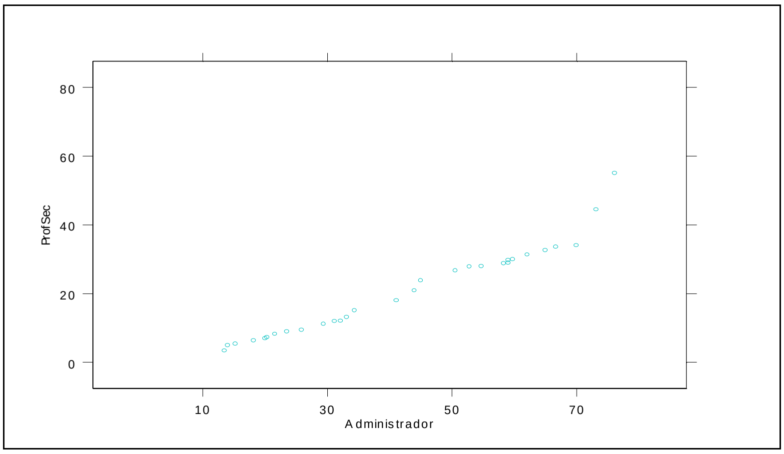
$$R^2 = \frac{\overline{\mathrm{var}(X)}}{\mathrm{var}(X)} = 1 - \frac{45{,}39}{45{,}39} = 0$$

Logo, Seção não serve para explicar nota.

Problema 16.



Problema 17.



Pode-se perceber que os pontos estão razoavelmente dispersos abaixo em relação a reta (x=y). Logo, parece que os salários dos professores secundários é menor que o dos administradores.

Problema 18.

(a)

Estado Civil	Salário: Menos de 10 SM	Entre 10 e 20 SM	Mais de 20 SM	Total
Solteiro	0,12	0,19	0,09	0,40
Casado	0,08	0,31	0,21	0,60
Total	0,20	0,50	0,30	1,00

(b) Considere-se a tabela do total de colunas:

Estado Civil	Salário: Menos de 10 SM	Entre 10 e 20 SM	Mais de 20 SM	Total
Solteiro	0,60	0,38	0,30	0,40
Casado	0,40	0,62	0,70	0,60
Total	1,00	1,00	1,00	1,00

Pelas diferenças entre as proporções marginais e as do interior da tabela, parece haver relação entre as variáveis.

Problema 19.

(a)

Opinião	Local de residência: Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	0,33	0,58	0,70	0,50
Contra	0,67	0,42	0,30	0,50

(b) A opinião parece depender do local de residência do indivíduo.

Opinião	Local de residência: Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	30 (45)	35 (30)	35 (25)	100
Contra	60 (45)	25 (30)	15 (25)	100

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 5{,}00 + 5{,}00 + 0{,}83 + 0{,}83 + 4{,}00 + 4{,}00 = 19{,}66$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{19{,}66}{19{,}66 + 200}} = 0{,}30$$

Problema 20.

Considere a tabela com os valores observados e os esperados:

Propriedade	Atividade: Costeira	Fluvial	Internacional	Total
Estatal	5 (33,64)	141 (129,02)	51 (34,34)	197
Particular	92 (63,64)	231 (242,98)	48 (64,66)	371

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 24{,}38 + 1{,}11 + 8{,}08 + 12{,}64 + 0{,}59 + 4{,}29 = 51{,}09$$

Parece existir associação entre o tipo de atividade e propriedade das embarcações.

Problema 21.

Considere a tabela com os valores observados e esperados :

Participaram	Cidade			
	São Paulo	Campinas	Rib. Preto	Santos
Sim	50 (64,76)	65 (80,95)	105 (97,14)	120 (97,14)
Não	150 (135,24)	185 (169,05)	195 (202,86)	180 (202,86)

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 3{,}36 + 3{,}14 + 0{,}64 + 5{,}38 + 1{,}61 + 1{,}50 + 0{,}30 + 2{,}58 = 18{,}51$$

Os dados da tabela indicam que a participação em atividades esportivas depende da cidade.

Problema 22.

(a) Tabela dos totais de colunas.

Pretende continuar?	Classe social Alta	Média	Baixa	Total
Sim	0,50	0,44	0,38	0,40
Não	0,50	0,56	0,72	0,60

Há evidências de que a distribuição das respostas afirmativas e negativas não coincidem.

(b) Tabela dos valores observados e esperados:

Pretende continuar?	Classe social Alta	Média	Baixa	Total
Sim	200 (160)	220 (200)	380 (440)	800
Não	200 (240)	280 (300)	720 (660)	1200

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 10{,}00 + 2{,}00 + 8{,}18 + 6{,}67 + 1{,}33 + 5{,}45 = 33{,}63$$

Existe dependência entre as variáveis.

(c) Se houvesse tal modificação, a dependência entre as variáveis seria apenas menor ($\chi^2 = 7{,}01$).

Problema 23.

$$\frac{n_{11}}{n_{\cdot 1}} = \frac{30}{90} = 0{,}33 \quad \text{e} \quad \frac{n_{21}}{n_{\cdot 1}} = \frac{60}{90} = 0{,}67$$

$$\frac{n_{12}}{n_{\cdot 2}} = \frac{35}{60} = 0{,}58 \quad \text{e} \quad \frac{n_{22}}{n_{\cdot 2}} = \frac{25}{60} = 0{,}42$$

$$\frac{n_{13}}{n_{\cdot 3}} = \frac{35}{50} = 0{,}70 \quad \text{e} \quad \frac{n_{23}}{n_{\cdot 3}} = \frac{15}{50} = 0{,}30$$

Problema 24.

$$Corr(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_i \left[\left(\frac{x_i - \bar{x}}{dp(X)}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{dp(Y)}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_i \left[\frac{x_i y_i - x_i \bar{y} - y_i \bar{x} + \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2 - n\bar{y}^2\right) \big/ n^2}}\right] =$$

$$= \frac{\sum_i x_i y_i - \bar{y}\sum_i x_i - \bar{x}\sum_i y_i + n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_i y_i^2 - n\bar{y}^2\right)^2}}$$

Problema 25.

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é -0,92, indicando forte correlação linear entre as variáveis.

$$Corr(X,Y) = \frac{53 - 5\times(3,2)\times(4,4)}{\sqrt{\left[62 - 5\times(3,2)^2\right]\times\left[130 - 5\times(4,4)^2\right]}} = -\frac{17,4}{18,93} = -0,92$$

Problema 26.

Pode-se calcular, com os dados fornecidos, $Corr(X,Y) = 0,95$ e $Corr(X,Z) = 0,71$. Como o valor mais alto encontrado é 0,95, a variável Y é a mais indicada para explicar a variação de X.

Problema 27.

(a)

Idade	Salário [0,15)	Salário [15,30)	Total
[0,30)	4	4	8
[30,40)	6	12	18
[40,50)	3	7	10
Total	13	23	36

(b) O cálculo do coeficiente de correlação neste caso, poderia ser feito utilizando-se os pontos médios de cada categoria.

(c) Com a idéia que foi descrita no item anterior, o cálculo do coeficiente de correlação agrupados poderia ser feito com a fórmula usual, onde haveria 4 pares (15;7,5) repetidos, 6 pares (35;7,5) repetidos, etc. Assim a fórmula seria:

$$Corr(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}\frac{\left[n_i\left(x_i - \bar{x}\right)\right]}{dp(X)}\frac{\left[n_i\left(y_i - \bar{y}\right)\right]}{dp(Y)}$$

onde x_i, y_i são os pontos médios, $n_1 = n_2 = 4$, $n_3 = 6$, $n_4 = 12$, $n_5 = 3$, $n_6 = 7$

Problema 28.

(a) Tabela dos valores observados e dos observados:

	Cara	Coroa	Total
Cara	24 (23,92)	22 (22,08)	46
Coroa	28 (28,08)	26 (25,92)	54
Total	52	48	100

$$\chi^2 = \sum\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0,0002 + 0,0002 + 0,0002 + 0,0002 = 0,0008$$

Logo, não há associação entre os resultados das moedas de um real e de um quarto de dólar.

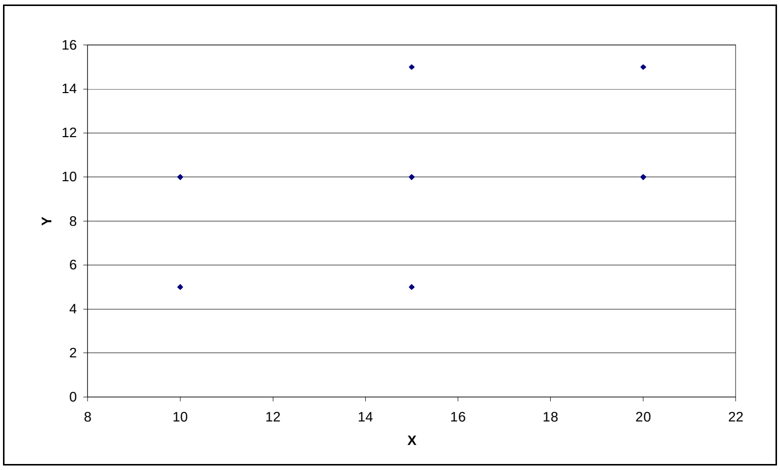
(b) O coeficiente de correlação linear entre as variáveis X_1 e X_2 é 0, pois X_1 e X_2 são independentes. Esse resultado está de acordo com o resultado do item anterior.

Problema 29.

(a) O salário anual médio dos homens é 15 e o desvio-padrão 3,87.

(b) O salário anual médio das mulheres é 10 e o desvio-padrão 3,16.

(c)



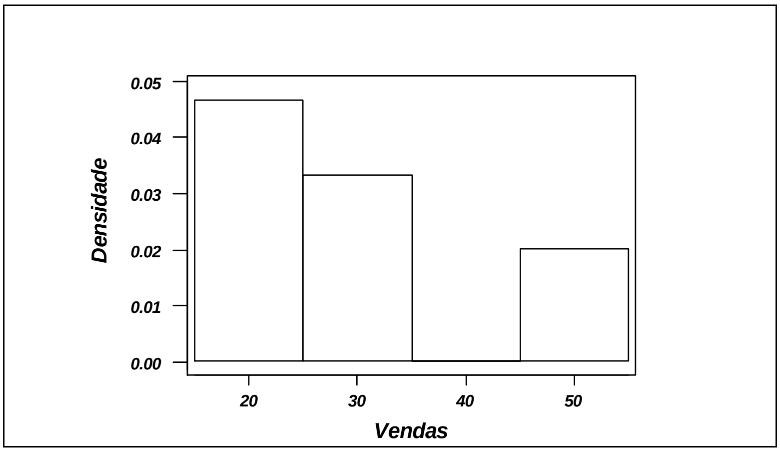
(d) $$Corr(X,Y) = \frac{1550-1500}{\sqrt{[2400-2250]\times[1100-1000]}} = 0{,}41$$

(e) O salário médio familiar é 25. A variância do salário familiar é 35.

(f) Descontando 8% dos salários de todos os homens da amostra e 6% do salário de todas as mulheres, o salário médio familiar cai para 23,2 e a variância vai a 30,18.

Problema 30.

(a) Histograma



(b) A média da variável V é 30,2 e a variância 130,6. Como dp(V)=11,43, $\bar{v}+2dp(V)=53{,}05$ é o limite para se considerar um vendedor excepcional. Acima desse valor, há apenas 1 dentre os 15 indivíduos analisados.

(c) O primeiro quartil da distribuição de V é 23,5.

(d) Os box-plots a seguirindicam que existe alguma diferença entre a distribuição das vendas nas três diferentes zonas. Assim, não é justo aplicar um mesmo critério para todas as zonas.

(e) $Corr(T,V)=0{,}71$, $Corr(E,V)=0{,}26$, logo a variável teste parece ser a mais importante na contratação de um empregado.

(f)

Conceito do gerente	Zona			Total
	Norte	Sul	Leste	
Bom	4 (2,7)	3 (2,7)	1 (2,7)	8
Mau	1 (2,3)	2 (2,3)	4 (2,3)	7
Total	5	5	5	15

$$\chi^2=\sum\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}=3{,}76$$

Logo, existe uma baixa associação entre o Conceito do gerente e a Zona.

(g) Considere X: resultado do teste.

Conceito do gerente	n	média	dp	var
Bom	8	6,00	2,14	4,57
Mau	7	6,14	1,68	2,81
Total	15	6,07	1,87	3,50

$$\overline{\text{var}(X)}=\frac{8\times 4{,}57+7\times 2{,}81}{15}\cong 3{,}50$$

$$R^2=\frac{\overline{\text{var}(X)}}{\text{var}(X)}=1-\frac{3{,}50}{3{,}50}=0$$

Considere agora X: vendas:

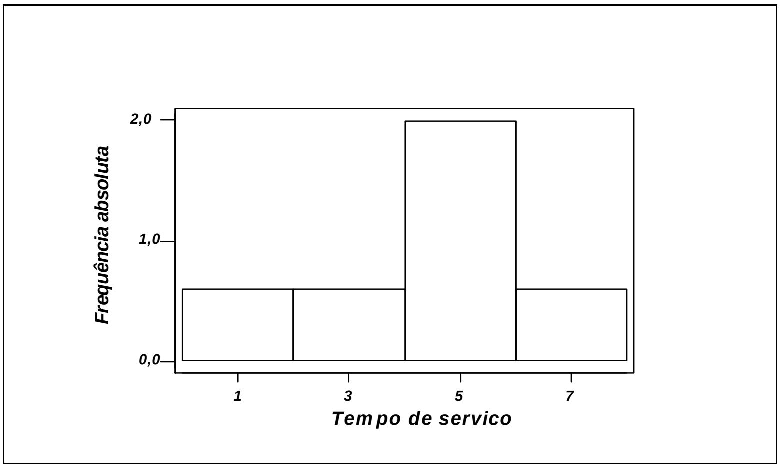
Zona	n	média	dp	var
Norte	5	29,8	14,4	207,7
Sul	5	34,6	13,56	183,8
Oeste	5	26,2	4,6	21,2
Total	15	30,2	11,43	130,6

$$\overline{\mathrm{var}(X)} = \frac{5\times207{,}7+5\times183{,}8+5\times21{,}2}{15} \cong 130{,}5$$

$$R^2 = \frac{\overline{\mathrm{var}(X)}}{\mathrm{var}(X)} = 1-\frac{130{,}5}{130{,}6} = 0{,}0008$$

Problema 31.

(a)

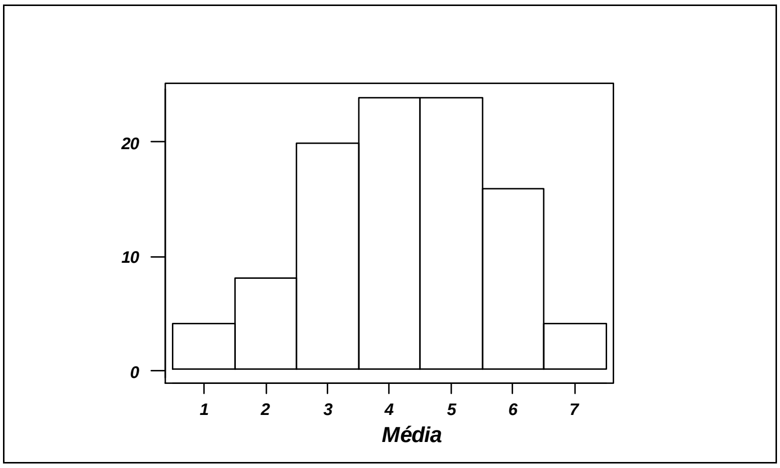


(b) $me(X) = 4{,}2$; $md(X) = 5{,}0$; $\mathrm{var}(X) = 5{,}2$

(c) (A,A),..., (A,E), (B,A),..., (B,E), (C,A),..., (C,E), (D,A),..., (D,E), (E,A),...,(E,E)

(d)

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	6	7
Freq.	0,04	0,08	0,20	0,24	0,24	0,16	0,04

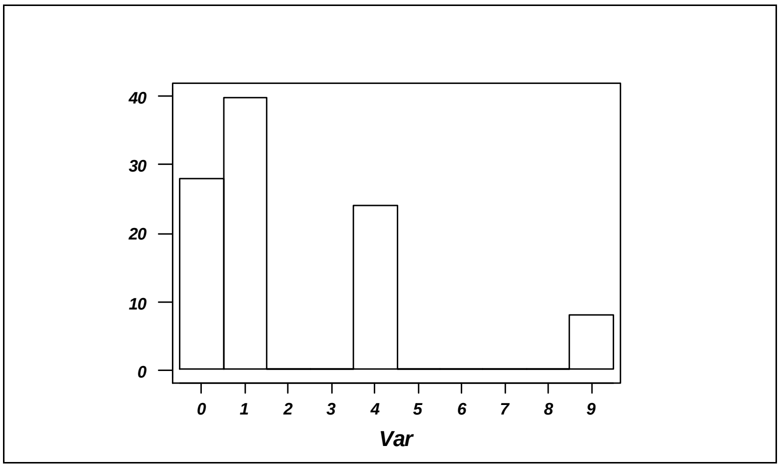


(e) $me(\overline{X}) = 4{,}2$; $md(\overline{X}) = 4{,}0$; $\text{var}(\overline{X}) = 2{,}6$

Vemos que $me(\overline{X}) = me(X)$ e $\text{var}(\overline{X}) = \dfrac{\text{var}(X)}{2}$

(f)

S^2	0	1	4	9
Freq.	$\frac{7}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{25}$



(g) $me(S^2) = 2{,}08$; $\text{var}(S^2) = 6{,}39$.

(h)

X_1	X_2: 1	3	5	7	Total
1	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
3	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
5	0,08	0,08	0,16	0,08	0,40
7	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
Total	0,20	0,20	0,40	0,20	1,00

(i) As variáveis são independentes, pois $P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) \times P(X_2 = j)$

(j) São iguais entre si e à distribuição de X.

(k) Não tem esse item.

(l) Teremos 5^3=125 triplas.

(m) Histograma mais próximo de uma normal; $me(\overline{X}) = me(X)$, $\text{var}(\overline{X}) = \text{var}(X)$

(n) Histograma com assimetria à direita.

(o) Distribuições marginais iguais à distribuição de X.

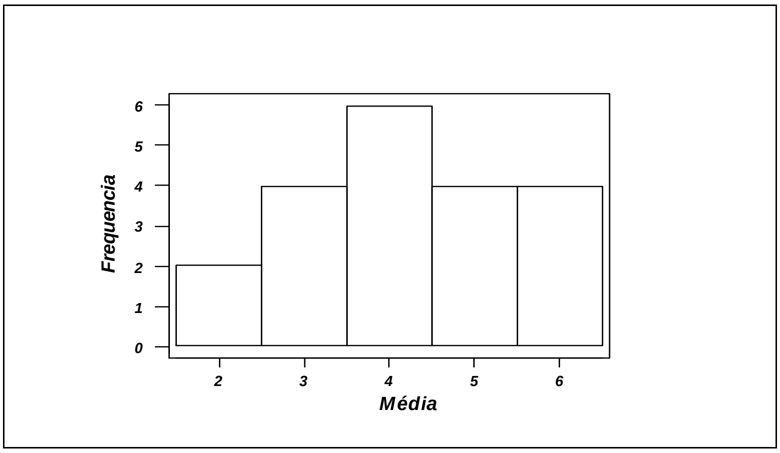
Problema 32.

(a) Não tem.

(b) Não tem.

(c) (A,B),..., (A,E), (B,A),..., (B,E), (C,A),..., (C,E), (D,A),..., (D,E), (E,A),...,(E,D)

$\overline{X}$	2	3	4	5	6
Freq.	0,10	0,20	0,30	0,20	0,20

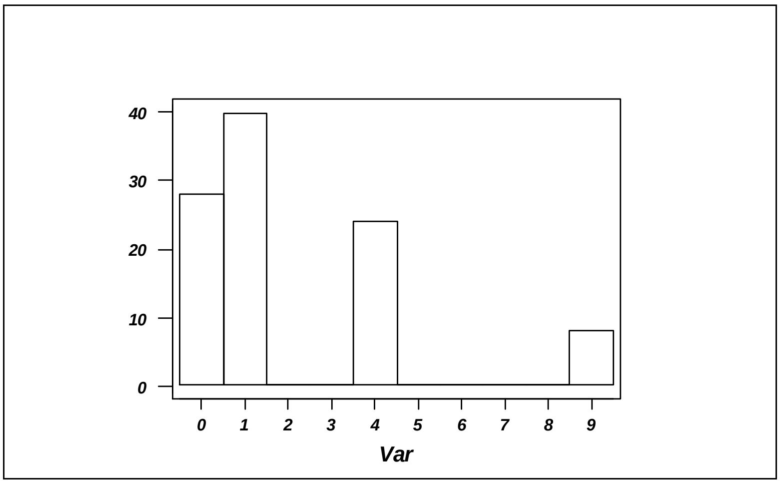


(d) $me(\overline{X}) = 4{,}2$; $md(\overline{X}) = 4{,}0$; $\text{var}(\overline{X}) = 1{,}6$

Vemos que $me(\overline{X}) = me(X)$

(e)

S^2	0	1	4	9
Freq.	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$



(f) $me(S^2) = 2{,}60$; $\text{var}(S^2) = 6{,}64$.

	X_2				
X_1	1	3	5	7	Total
1	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
3	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
5	0,08	0,08	0,16	0,08	0,40
7	0,04	0,04	0,08	0,04	0,20
Total	0,20	0,20	0,40	0,20	1,00

(g) As variáveis são independentes, pois $P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) \times P(X_2 = j)$

(h) São iguais entre si e à distribuição de X.

(i) Não tem esse item.

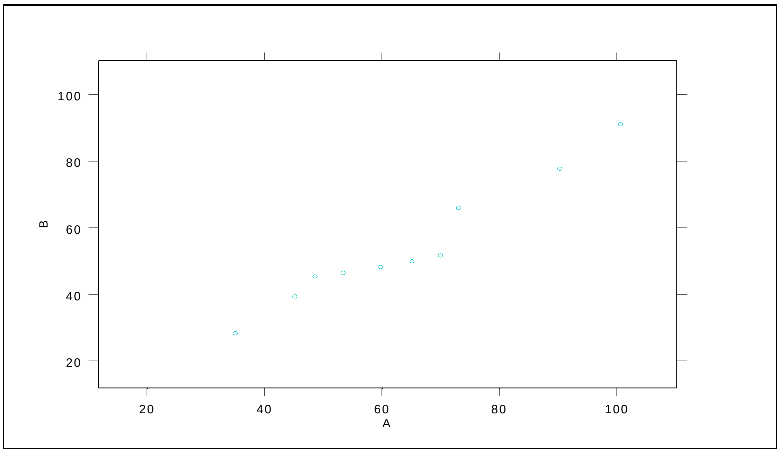
(j) Teremos 60 triplas.

(k) Histograma mais próximo de uma normal; $me(\overline{X}) = me(X)$, $\text{var}(\overline{X}) = \text{var}(X)$

(l) Histograma com assimetria à direita.

(m) Distribuições marginais iguais à distribuição de X.

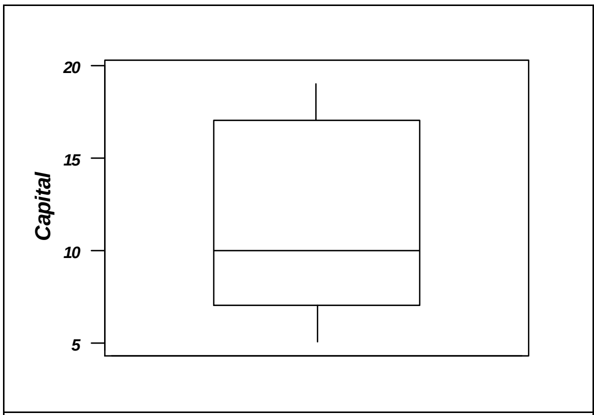
Problema 34.



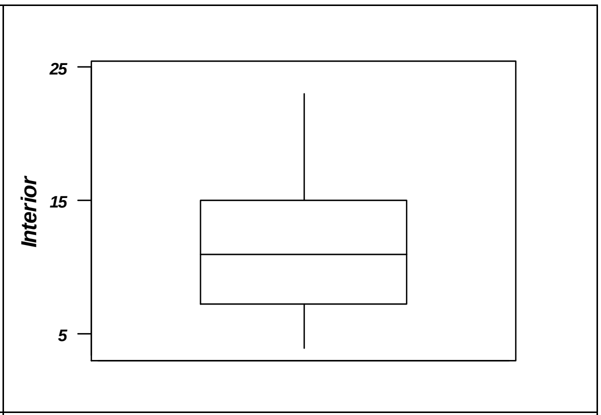
Problema 35.

Dotplot para as regiões de procedência:

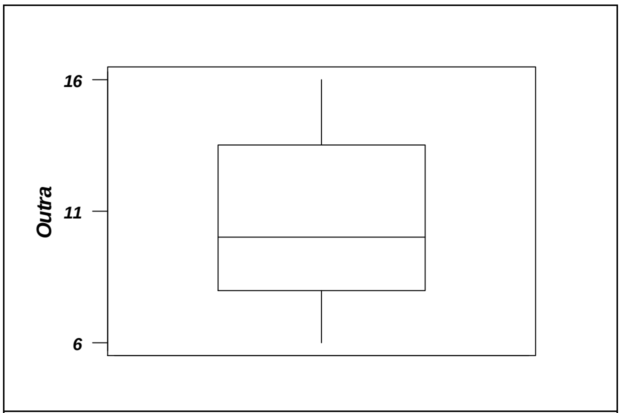
```
     .   :     .      .            .   .     :
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Capital
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0

     :   .  .      :     .      :      .
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Interior
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0

  :  .      :  .   .  .  .   :     .
  +---------+---------+---------+---------+---------+-Outra
6.0       9.0      12.0      15.0      18.0      21.0
```



BoxPlot - Capital



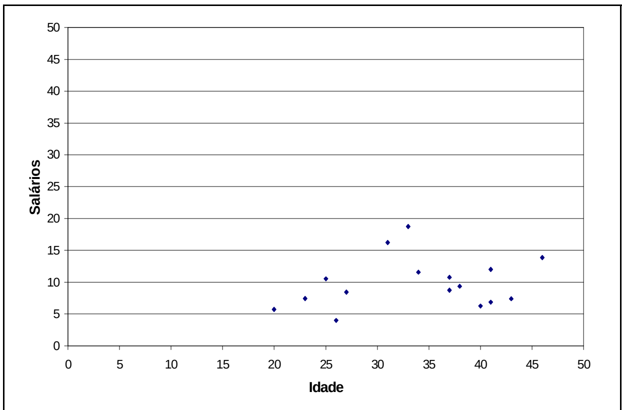
BoxPlot – Interior



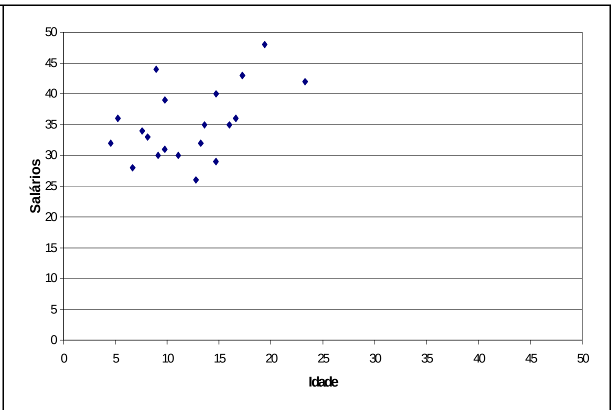
BoxPlot - Outra

Pode-se observar que os salários da Capital têm variabilidade maior e distribuição mais assimétrica. As médias e medianas são similares.

Problema 36.



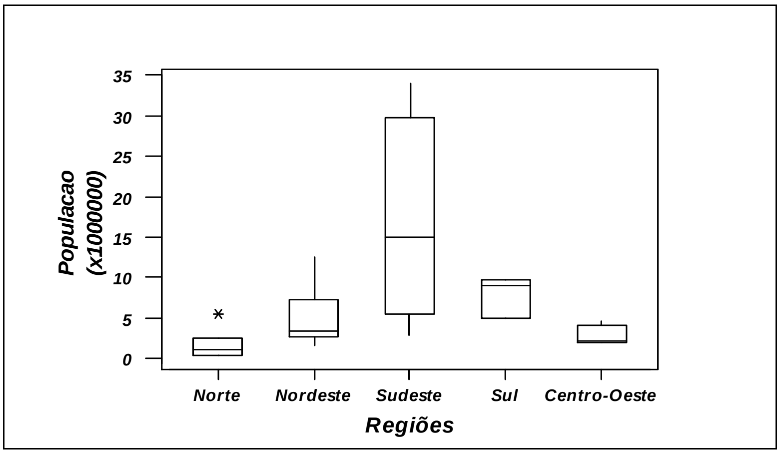
Solteiros



Casados

Os gráficos de dispersão não mostram tendências particulares.

Problema 37.



Os boxplots acima mostram que todas as distribuições são assimétricas, sendo que a região Sul se destaca pelo seu aspecto peculiar. A região Sudeste tem variabilidade maior, pela inclusão do estado de São Paulo, que é bastante populoso.

Problema 38.

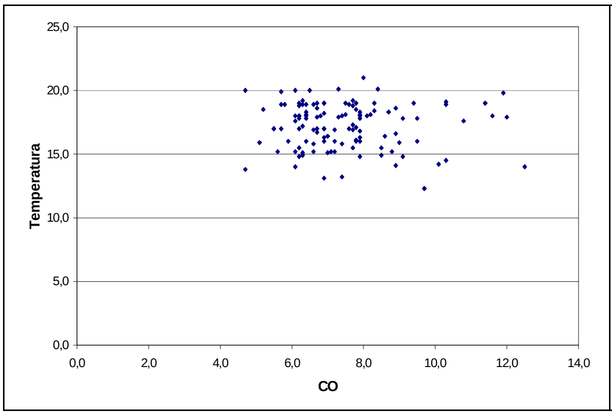
Telebrás	Ibovespa		Total
	Baixa	Alta	
Baixa	14 (5,4)	0 (8,6)	14
Alta	1 (9,6)	24 (15,4)	25
Total	15	24	39

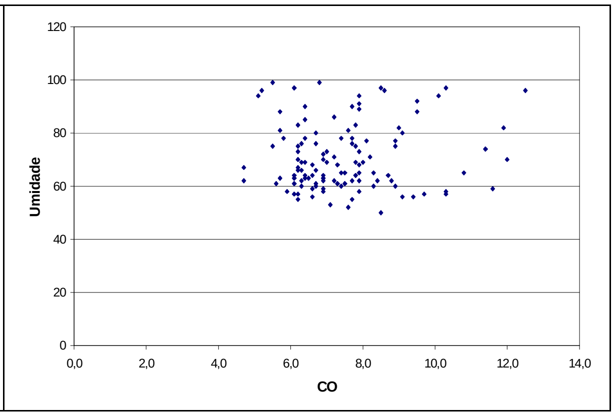
$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 34,83$$

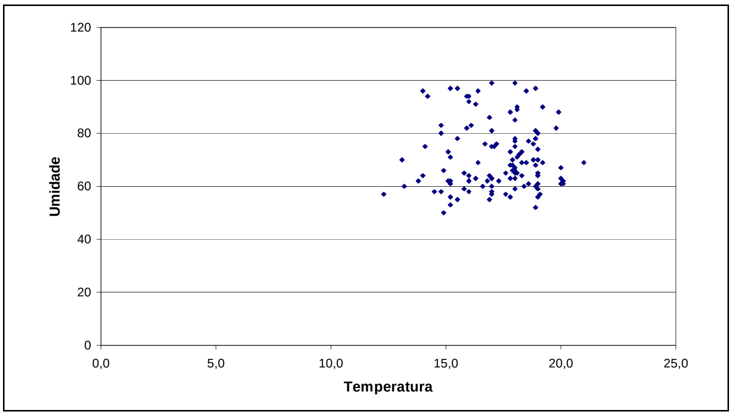
$$T = \sqrt{\frac{\chi^2 / n}{(r-1)\times(s-1)}} = 0,945$$

Logo, percebe-se grande associação entre os preços das ações da Telebrás e Ibovespa.

Problema 39.






120
100
80
60
40
20
0
Umidade
0,0
5,0
10,0
15,0
20,0
25,0
Temperatura

Capítulo 05

Problema 01.
Representando por C a ocorrência cara e por V a ocorrência de coroa no arremesso, e também por B a retirada de bola branca e por V a retirada de bola vermelha, um espaço amostral para este experimento pode ser descrito por
$\Omega = \{BC, BR, VB, VV\}$

Problema 02.
O espaço amostral para esse experimento é um conjunto infinito. Seja 5 a representação da ocorrência da face 5 e Q a representação de outra face qualquer do dado. Então o experimento tem um espaço amostral dado por
$\Omega = \{5, Q5, QQ5, QQQ5, \ldots\}$

Problema 03.
Os resultados possíveis desse torneio de tênis constituem o espaço amostral de um experimento que consiste em verificá-los. Desse modo, podemos representar esse conjunto da seguinte forma:
$\Omega = \{AA, ACC, ACBB, ACBA, BB, BCC, BCAA, BCAB\}$

Problema 04.
Dois possíveis espaços amostram para o experimento podem ser obtidos através de maneiras diferentes de definir os pontos amostrais do experimento:

- designando C para cara e R para coroa, temos um primeiro espaço amostral, $\Omega_1 = \{CC, CR, RC, RR\}$;
- se cada ponto amostral ω representa o número de caras nos lançamentos, um outro espaço amostral é descrito por $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$.

Podemos representar Ω_1 como produto cartesiano da seguinte forma:
$\Omega_1 = \{C, R\} \times \{C, R\}$

Problema 05.
Usando a mesma representação dos problemas anteriores,
$\Omega = \{(C,1), (C,2), \ldots, (C,6), (R, 1), \ldots, (R, 6)\} = \{C, R\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Problema 06.

(a) $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \ldots, (6, 6)\}$

(b) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, em que M é o número máximo de peças defeituosas.

(c) Representando por M a ocorrência de uma criança do sexo masculino e por F a ocorrência de uma criança do sexo feminino, temos:
$\Omega = \{$(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, F, F), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)$\}$

(d) Sendo S (sim) e N (não), segue o espaço amostral do experimento:

$\Omega = \{(\text{N, N, N}, \ldots, \text{N}), (\text{S, N, N}, \ldots, \text{N}), \ldots, (\text{S, S, N}, \ldots, \text{N}), \ldots, (\text{S, S, S}, \ldots, \text{S})\}$

(e) O espaço amostral desse experimento é contínuo, dado por
$\Omega = \{t \in \mathbb{R}, t > 0\}$

(f) $\Omega = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$

(g) Outro exemplo de espaço amostral dado por um conjunto infinito:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(h) $\Omega = \{0°, 6°, 12°, \ldots, 354°\}$

(i) $\Omega = [0°, 360°)$ (espaço amostral contínuo)

(j) $\Omega = \{(\text{A, A}), (\text{A, B}), \ldots, (\text{A, E}), (\text{B, A}), (\text{B, B}), \ldots, (\text{E, A}), (\text{E, B}), \ldots, (\text{E, E})\}$

(l) $\Omega = \{(\text{A, B}), (\text{A, C}), \ldots, (\text{A, E}), (\text{B, A}), (\text{B, C}), \ldots, (\text{E, A}), (\text{E, B}), \ldots, (\text{E, D})\}$

(m) $\Omega = \{(\text{A, B}), (\text{A, C}), (\text{A, D}), (\text{A, E}), (\text{B, C}), (\text{B, D}), (\text{B, E}), (\text{C, D}), (\text{C, E}), (\text{D, E})\}$

(n) Denotando cada estado civil por: S (solteiro), Ca (casado) e V (viúvo), temos
$\Omega = \{(\text{A, S}), (\text{A, Ca}), (\text{A, V}), (\text{B, S}), (\text{B, Ca}), (\text{B, V}), (\text{C, S}), (\text{C, Ca}), (\text{C, V}), (\text{D, S}),$
$(\text{D, Ca}), (\text{D, V})\}$.

Problema 07.

(a) $\{CC, CR, RC\}$

(b) $\{CC\}$

(c) $\{CR, RC, RR\}$

Problema 08.

(a) $A \cap B^c$

(b) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

(c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Problema 09.

(a) $\sum_{i=1}^{8} P(\omega_i) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) = 1$

(b) $P(A\text{ vencer}) = P(AA \cup BCAA) = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$ (no lugar da vírgula, sinal de união)

$P(B\text{ vencer}) = P(BB \cup ACBB) = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$

(c) $P(\text{não haver decisão}) = P(ACBA \cup BCAB) = \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)$

Problema 10.

(a) Usando o que segue,

Resultado: Se $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *for uma PG (progressão geométrica) infinita de razão q, |q| < 1, então a soma de seus termos é dada por* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \frac{a_0}{1-q}$,

temos $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-5/6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1/6}\right) = 1$.

(b) Nesse caso, k = 2, e então

$$P(\text{face 5 após três lançamentos do dado}) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216} \cong 0{,}12$$

Problema 11.

$$P(\text{dois números de mesmo sinal}) = P(\text{dois positivos}) + P(\text{dois negativos}) =$$

$$= \left(\frac{6}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{8}{14}\right)\left(\frac{7}{13}\right) = \frac{43}{91} \cong 0{,}47$$

Problema 12.

$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$B = \{(4,1), \ldots,(4,6),(5,1),\ldots,(5,6),(6,1),\ldots,(6,6)\}$

$A \cup B = \{(3,6),(4,1), \ldots,(4,6),(5,1),\ldots,(5,6),(6,1),\ldots,(6,6)\}$

$A \cap B = \{(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$A^c = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),$
$(3,4),(3,5), (4,1),(4,2),(4,3),(4,4), (4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,4),$
$(6,5),(6,6)\}$

Problema 13.

Do Problema 07:

(a) $P(\text{pelo menos uma cara}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(b) $P(\text{duas caras}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(c) Seja E o evento “ocorrem duas caras”. Então, $P(E^c) = 1 - P(\text{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Do Problema 12:

Se o espaço amostral do experimento (lançamento de dois dados) tem 36 pontos amostrais, então,

- $P(\text{A}) = \frac{4}{36} \cong 0{,}11$;

- $P(\text{B}) = \dfrac{18}{36} = 0{,}50$;
- $P(\text{A} \cup B) = \dfrac{19}{36} \cong 0{,}53$;
- $P(\text{A} \cap B) = \dfrac{3}{36} \cong 0{,}08$;
- $P(\text{A}^c) = 1 - P(\text{A}) = \dfrac{32}{36} \cong 0{,}89$.

Problema 14.

(a) O dado não deve ser viciado, ou seja, todas as faces estão equilibradas.

(b) Devemos ter para cada alternativa de resposta a mesma quantidade de opiniões de moradores, por exemplo, 50% a favor e 50% contra se existirem apenas duas alternativas.

(c)

Problema 15.

(a) Seja P a ocorrência de bola preta, e V a ocorrência de bola vermelha. Então,

Resultado	Probabilidade
PP	$(3/8)(2/7) = 3/28 \cong 0{,}107$
PV	$15/56 \cong 0{,}268$
VP	$15/56 \cong 0{,}268$
VV	$3/28 \cong 0{,}107$

(b) Usando a mesma notação,

Resultado	Probabilidade
PP	$(3/8)(3/8) = 9/64 \cong 0{,}141$
PV	$15/64 \cong 0{,}234$
VP	$15/64 \cong 0{,}234$
VV	$25/64 \cong 0{,}391$

Problema 16.

(a) Sem reposição:
$P(\text{bola preta na primeira e na segunda extrações}) \cong 0{,}107$
Com reposição:
$P(\text{bola preta na primeira e na segunda extrações}) \cong 0{,}141$

(b) Sem reposição

$$P(\text{bola preta na segunda extração}) = \left(\frac{3}{28}\right) + \left(\frac{15}{56}\right) = \frac{21}{56} = 0{,}375$$

Com reposição:

$$P(\text{bola preta na segunda extração}) = \left(\frac{9}{64}\right) + \left(\frac{15}{64}\right) = 0{,}375$$

(c) Sem reposição

$$P(\text{bola vermelha na primeira extração}) = \left(\frac{15}{56}\right) + \left(\frac{5}{14}\right) = 0{,}625$$

Com reposição:

$$P(\text{bola vermelha na primeira extração}) = \left(\frac{15}{64}\right) + \left(\frac{25}{64}\right) = 0{,}625$$

Problema 17.

Sejam os eventos A: A resolve o problema, e B: B resolve o problema. Como trabalham independentemente, temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12} \cong 0{,}92$$

Problema 18.

Como a probabilidade de sair um certo ponto é proporcional ao seu valor, digamos que a constante de proporcionalidade é k, e então vamos encontrar o valor de k:

$P(j) = k.j \;,\; j = 1,\ldots,6.$

$$\sum_{j=1}^{6} P(j) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{6} k.j = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{21}$$

(a) Utilizando o conceito de probabilidade condicional,

$$P(5\,|\,\text{ímpar}) = \frac{P(5 \cap \text{ímpar})}{P(\text{ímpar})} = \frac{P(5)}{P(\text{ímpar})} = \frac{5.(1/21)}{P(1)+P(3)+P(5)} =$$

$$= \frac{5/21}{(1/21)+(3/21)+(5/21)} = \frac{5}{9} \cong 0{,}56$$

(b) Novamente, aplicando probabilidade condicional,

$$P(\text{par}\,|>3) = \frac{P(\text{par} \cap >3)}{P(>3)} = \frac{P(4)+P(6)}{P(4)+P(5)+P(6)} = \frac{(6+4).(1/21)}{(4+5+6).(1/21)} = \frac{10}{15} \cong 0{,}67$$

Problema 19.

(a) $(1-p)(1-q)$, pois se A e B são independentes, A^c e B^c também são independentes.

(b) $p + q - pq$ (probabilidade da união de dois eventos independentes).

Problema 20.

Os componentes 2 e 3 funcionam em paralelo entre si e em série com o componente 1. Assim, a confiabilidade desse sistema é dada por

$$P(\text{sistema funcionar}) = h(p_1, p_2, p_3) = P((1 \text{ e } 2) \text{ ou } (1 \text{ e } 3)) = p_1(p_2 + p_3 - p_2 p_3)$$

Problema 21.

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A)P(B) = P(A \cap B)$. Nesse caso, $P(A)P(B) = 0{,}10 . 0{,}12 = 0{,}012 \neq 0{,}04 = P(A \cap B)$. Portanto, os eventos A e B não são independentes.

Problema 22.

Os componentes 1 e 2 funcionam em série, bem como os componentes 3 e 4. Os sub-sistemas formados funcionam em paralelo. Assim,

$$P(\text{sistema funcionar}) = h(p) = P((1 \text{ e } 2) \text{ ou } (3 \text{ e } 4)) = p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2)$$

Problema 23.

Sejam os eventos:

- D o circuito escolhido não funciona;
- I: o circuito escolhido é feito na fábrica I;
- II: o circuito escolhido é feito na fábrica II;
- III: o circuito escolhido é feito na fábrica III.

São dados do problema:

$P(D \mid I) = 0{,}01$, $P(D \mid II) = 0{,}04$, $P(D \mid III) = 0{,}03$, $P(I) = 0{,}40$, $P(II) = 0{,}30$ e $P(III) = 0{,}30$
.

Assim,

$$P(D) = P(D \mid I)\,P(I) + P(D \mid II)\,P(II) + P(D \mid III)P(III) =$$
$$= (0{,}01)(0{,}40) + (0{,}04)(0{,}30) + (0{,}03)(0{,}30) = 0{,}025$$

Problema 24.

Utilizando a mesma notação, temos

$$P(I \mid D) = \frac{P(I)\ P(I \mid D)}{P(D)} = \frac{(0{,}40)(0{,}01)}{0{,}025} = 0{,}16$$

Problema 25.

Sejam os eventos:

- $\mathrm{U_i}$: seleciona - se a urna i ;
- B_{ij} **:** é retirada uma bola branca da urna i, na extração j $(i, j = 1{,}2)$;
- E **:** retira - se, na segunda extração, uma bola branca da mesma urna da primeira extração.

Supondo que a primeira e a segunda extrações sejam independentes, temos

$$P(E) = P(B_{12} \mid B_{11})P(U_1) + P(B_{22} \mid B_{21})P(U_2) =$$
$$= P(B_{12})P(B_{11})\ P(U_1) + P(B_{22})\ P(B_{21})\ P(U_2) =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}305$$

Problema 26.

Construindo uma tabela com os dados do problema, temos

	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
Salada (A)	0,150	0,175	0,325
Carne (B)	0,600	0,075	0,675
Total	0,750	0,250	1,000

(a) $P(H) = 0{,}75$
$P(A|H) = 0{,}20$
$P(B|M) = 0{,}30$

(b) $P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = (0{,}20)(0{,}75) = 0{,}15$
$P(A) = P(A|H)\,P(H) + P(A|M)\,P(M) =$
$= (0{,}20)(0{,}75) + (0{,}70)(0{,}25) = 0{,}325$.
$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) =$
$= 0{,}325 + 0{,}750 - 0{,}150 = 0{,}925$

(c) $P(M\mid A) = \dfrac{P(A|M)\,P(M)}{P(A)} = \dfrac{(0{,}70)(0{,}25)}{0{,}325} = \dfrac{175}{325} \cong 0{,}538$

Problema 27.

Abaixo, construímos a tabela com as freqüências relativas:

	Homens	Mulheres	Total
Usaram o hospital	0,050	0,075	0,125
Não usaram o hospital	0,450	0,425	0,875
Total	0,500	0,500	1,000

(a) P(pessoa segurada use o hospital) = $\dfrac{250}{2000} = 0{,}125$

(b) Não, pois

$$P(\text{usar o hospital} \mid \text{homem}) = \frac{100}{1000} = 0{,}100 \neq P(\text{pessoa segurada use o hospital})$$

Problema 28.

Sejam os eventos:

- A: o motorista A sofre acidente;
- B: o motorista B sofre acidente;
- C: o motorista C sofre acidente.

Suponha que esses eventos sejam independentes. Tem-se que "todos os três motoristas sofrem acidentes" pode ser escrito como $A \cap B \cap C$ e "pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo" equivale a $A^c \cup B^c \cup C^c$. Assim,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

$$P(A^c \cup B^c \cup C^c) \;=\; P([A \cap B \cap C)]^c) = 1 - P(A \cap B \cap C) \;=\; \frac{3}{5} \;=\; 0{,}60$$

Problema 29.

Representando por B uma lâmpada boa e por D uma lâmpada defeituosa, há três configurações possíveis para que a segunda lâmpada defeituosa seja encontrada no quarto teste: *DBBD***,** *BDBD* e *BBDD***.**

Os testes são feitos sem reposição das lâmpadas testadas. Assim, se X for o número de testes necessários para encontrar a segunda lâmpada defeituosa, tem-se que

$$P(X = 4) \;=\; \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{28} \;\cong\; 0{,}107$$

Problema 30.

Sejam os eventos E_i = ganhar na loteria i, (i = 1, 2). Suponha que estes eventos sejam independentes. Então

(a) $P(\text{ganhar exatamente um prêmio}) \;=\; P([E_1 \cap E_2^c] \cup [E_2 \cap E_1^c]) =$

$$= \left(\frac{100}{10000}\right)\left(\frac{4900}{5000}\right) + \left(\frac{100}{5000}\right)\left(\frac{9900}{10000}\right) \;=\; 0{,}0296$$

(b) $P(\text{ganhar alguma coisa}) \;=\; P(E_1 \cup E_2) \;=\; 0{,}01 + 0{,}02 - (0{,}01)(0{,}02) =$

$= \;0{,}03 \;-\; 0{,}0002 \;=\; 0{,}0298$

Problema 31. Foi usada a binomial

Seja X o número de segurados vivos daqui a 30 anos. Suponha independência e que o valor 2/3 (probabilidade de cada um deles estar vivo daqui a 30 anos) permaneça por todo o período.

(a) Uma combinação possível para que dois estejam vivos daqui a 30 anos é VVMMM, onde V indica estar viva e M que ela está morta. Pelas informações do problema temos que $\text{P(VVMMM)} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$, porém, podemos ter também outras combinações como VMVMM com a mesma probabilidade. Podemos construir 10 dessas combinações, ou seja, as duas letras V podem combinar-se em 10 possibilidades pelas 5 posições. Esse número é representado pela combinação de 5 elementos dois a dois, ou seja, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$. Desse modo, a resposta final será:

$$P(X = 2) \;=\; \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \;=\; \frac{40}{243} \;\cong\; 0{,}165$$

(b) $P(X = 5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \;=\; \frac{32}{243} \;\cong\; 0{,}132$

(c) $P(X = 3) \;=\; \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \;=\; \frac{80}{243} \;\cong\; 0{,}329$

$$P(X=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{243} \cong 0{,}329$$

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$$

$$= \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243} \cong 0{,}790$$

Problema 32.

(a) Se ele não possui habilidades especiais, pode-se supor que a resposta seja dada para a marca A ou para a marca B com igual probabilidade. Assim, se as tentativas são independentes, a probabilidade de se acertar três vezes em três tentativas é dada por $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

(b) Se a probabilidade de se distinguir corretamente for de 90% em cada tentativa, e se as tentativas são independentes, a probabilidade de três acertos é $(0{,}90)^3 = 0{,}729$.

Problema 33.

Vamos designar por H o evento "foi sorteado um homem", e por M o evento "foi sorteada uma mulher".

(a) $P(H^c H^c H^c) = P(MMM) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{14}{285} \cong 0{,}049$

(b) $P(HMM, MHM, MMH) = 3\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{8}{19}\right)\left(\frac{7}{18}\right) = \frac{28}{95} \cong 0{,}295$

(c) $P(HHM, HMH, MHH) = 3\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{11}{19}\right)\left(\frac{8}{18}\right) = \frac{44}{95} \cong 0{,}463$

Problema 34.

Sejam os eventos A: ganhar a concorrência da parte elétrica e B: ganhar a concorrência da parte de encanamento. A partir das informações do problema, temos

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B|A) = \frac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad P(B|A^c) = \frac{1}{3}.$$

Com isso,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{24} \quad \text{e}$$

(a) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

(b) $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) =$

$$= P(A)P(B^c|A) + P(A^c)P(B|A^c) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{24} \cong 0{,}292$$

(c) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{13}{24} - \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{3} \cong 0{,}333$$

Problema 35.

Supondo que as próximas 4 unidades sejam vendidas independentemente, a probabilidade de que duas sejam devolvidas é dada por

$$\binom{4}{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^2 \cong 0{,}0135$$

Problema 36.

Seja X o número de alarmes que funcionam quando necessário.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}10)^3 = 0{,}999$$

Problema 37.

Sendo D o evento "o parafuso encontrado é defeituoso", temos

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$$

$$= (0{,}05)(0{,}25) + (0{,}04)(0{,}35) + (0{,}02)(0{,}40) = 0{,}0345$$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{(0{,}05)(0{,}25)}{0{,}0345} \cong 0{,}36$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{(0{,}04)(0{,}35)}{0{,}0345} \cong 0{,}41$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{(0{,}02)(0{,}40)}{0{,}0345} \cong 0{,}23$$

Problema 38

Seja X: número de peças com duração inferior a 20 horas. Usando os mesmos argumentos usados no problema 31 podemos escrever:

(a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$= 1 - \left[(0{,}95)^{10} + 10(0{,}05)(0{,}95)^9\right] \cong 0{,}086$

(b) $P(X \leq 1) = \left[(0{,}90)^{10} + 10(0{,}10)(0{,}90)^9\right] \cong 0{,}736$

Problema 39.

Vamos indicar a ordem de compra dos carros através de índices ao lado das marcas. São dados $P(W_1) = 0{,}50$, $P(F_1) = 0{,}30$ e $P(X_1) = 0{,}20$.

(a) Temos que

$P(W_3) = P(W_3|W_2)P(W_2) + P(W_3|F_2)P(F_2) + P(W_3|X_2)P(X_2)$.

Mas

$P(W_2) = P(W_2|W_1)P(W_1) + P(W_2|F_1)P(F_1) + P(W_2|X_1)P(X_1) =$

$= (0{,}50)(0{,}50) + (0{,}15)(0{,}30) + (0{,}30)(0{,}20) = 0{,}355$;

$P(F_2) = P(F_2|W_1)P(W_1) + P(F_2|F_1)P(F_1) + P(F_2|X_1)P(X_1) =$

$= (0{,}25)(0{,}50) + (0{,}70)(0{,}30) + (0{,}30)(0{,}20) = 0{,}395$ e

$P(X_2) = P(X_2 | W_1)P(W_1) + P(X_2 | F_1)P(F_1) + P(X_2 | X_1)P(X_1) =$
$= (0,25)(0,50) + (0,15)(0,30) + (0,40)(0,20) = 0,250.$

Logo,

$P(W_3) = (0,500)(0,355) + (0,150)(0,395) + (0,300)(0,250) \cong 0,312.$

(b) Como $P(W_1 | W_3) = \dfrac{P(W_3 | W_1)P(W_1)}{P(W_3)}$ e

$P(W_3 | W_1) = P(W_3 | W_2)P(W_2 | W_1) + P(W_3 | F_2)P(F_2 | W_1) + P(W_3 | X_2)P(X_2 | W_1)$
$= (0,50)(0,50) + (0,15)(0,25) + (0,30)(0,25) = 0,3625.$

então

$$P(W_1 | W_3) = \frac{(0,3625)(0,50)}{0,312} \cong 0,58$$

Problema 40.

(a) $\dfrac{2800+7000}{15800} \cong 0,62$

(b) $\dfrac{800+2500}{15800} \cong 0,21$

(c) $\dfrac{1800}{15800} \cong 0,11$

(d) $\dfrac{800}{2800} \cong 0,29$

Problema 41.

(a) $\left(\dfrac{8300}{15800}\right)\left(\dfrac{8300}{15800}\right) \cong 0,28$

(b) $\left(\dfrac{2800}{15800}\right)\left(\dfrac{2000}{15800}\right) \cong 0,02$

(c) $\left(\dfrac{13000}{15800}\right)\left(\dfrac{13000}{15800}\right) \cong 0,68$

Problema 42.

(a) $\left(\dfrac{8300}{15800}\right)\left(\dfrac{8299}{15800}\right) \cong 0,28$

(b) $\left(\dfrac{13000}{15800}\right)\left(\dfrac{12999}{15800}\right) \cong 0,68$

Os resultados obtidos são muito próximos, pois é grande o número de empregados na empresa, de modo que não faz grande diferença se a seleção for feita com ou sem reposição.

Problema 43.

(a) Representando o espaço amostral por Ω, temos

$$\Omega = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(a,a,c),(a,c,a),(a,c,c),(a,b,c),(a,c,b),$$
$$(b,b,b),(b,b,a),(b,a,b),(b,a,a),(b,b,c),(b,c,b),(b,c,c),(b,a,c),(b,c,a),$$
$$(c,c,a),(c,a,a),(c,a,c),(c,c,b),(c,b,b),(c,b,c),(c,a,b),(c,b,a),(c,c,c)\}$$

(b) $A = \{(a,a,a),(b,b,b),(c,c,c)\}$

$$B = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,a,c),(b,b,a),(b,b,b),(b,b,c),(c,c,a),(c,c,b),$$
$$(c,c,c)\}$$

Problema 44.

O enunciado fornece os seguintes dados:

- $P(R \mid A) = 0{,}40$;
- $P(R \mid B) = 0{,}20$;
- $P(R \mid C) = 0{,}10$.

Sendo $X = RRRMMMMM$, tem-se:

- $P(X \mid A) = (0{,}40)^3(0{,}60)^5 \cong 0{,}00498$;
- $P(X \mid B) = (0{,}20)^3(0{,}80)^5 \cong 0{,}00262$;
- $P(X \mid C) = (0{,}10)^3(0{,}90)^5 \cong 0{,}00059$.

E logo,

$$P(X) = P(X \mid A)P(A) + P(X \mid B)P(B) + P(X \mid C)P(C)$$

$$\cong (0{,}00498)\left(\frac{1}{3}\right) + (0{,}00262)\left(\frac{1}{3}\right) + (0{,}00059)\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0{,}0273,$$

$$P(C \mid X) = \frac{P(X \mid C)P(C)}{P(X)} \cong \frac{(0{,}00059)(1/3)}{0{,}00273} \cong 0{,}072$$

Problema 45

Para que pelo menos um dos dois próximos artigos selecionado seja de segunda qualidade, ou ambos são, ou apenas o próximo artigo é de segunda qualidade, ou apenas o seguinte é de segunda qualidade. Uma vez que já foram retirados b artigos e todos foram de segunda qualidade, atualmente há m itens de primeira qualidade e $n - b$ de segunda, num total de $m + n - b$ itens ainda para inspeção. Para as duas próximas seleções poderia ocorrer uma das seguintes possibilidades : SS, SP, PS ou PP, portanto a resposta será:

P(SS) + P(SP) + P(PS) = 1- P(PP)

Calculando obtém-se

$$1 - P(PP) = 1 - \frac{\binom{n-b}{0}\binom{m}{2}}{\binom{m+n-b}{2}}$$

$$= 1 - \frac{m!}{2!\,(m-2)!}\,\frac{2!\,(m+n-b-2)!}{(m+n-b)!} = 1 - \frac{m(m-1)}{(m+n-b)(m+n-b-1)}$$

Problema 46.

Temos, por hipótese, que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Então,

- $P(A^c \cap B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

  $= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c)$
- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$

  $= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$
- $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) =$

  $= P(B)[1 - P(A)] = P(A^c)P(B)$

Problema 47.

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) =$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] =$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

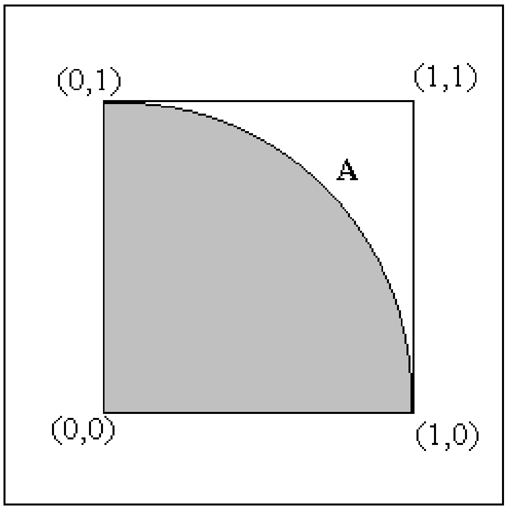
Problema 48.

Os componentes 1 e 2, bem como os componentes 4 e 5, estão ligados em série. Esses dois sub-sistemas estão em paralelo com o componente 3. Assim, a confiabilidade do sub-sistema formado pelos componentes 1, 2 e 3 é dada por $p^2 + p - p^3$. Logo, a confiabilidade total do sistema é dada por

$h(p) = p^2 + p - p^3 + p^2 - p^2(p^2 + p - p^3) = 2p^2 + p - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 =$
$= p^5 - p^4 - 2p^3 + 2p^2 + p = p(p^4 - p^3 - 2p^2 + 2p + 1)$

Problema 49.

(a) Como mostra a figura abaixo, esse evento está delimitado por um semi-círculo de raio 1, cuja origem é o ponto (0,0).

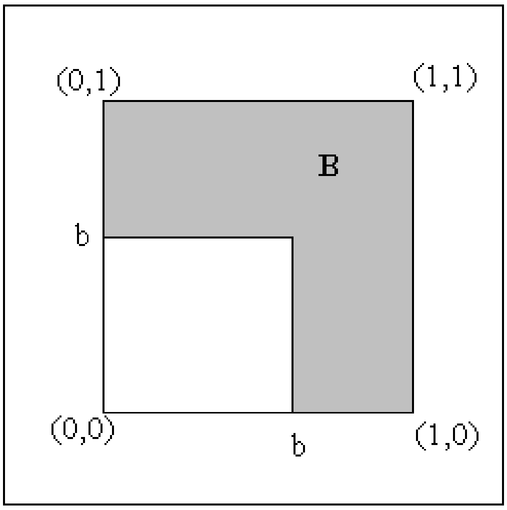


Representação gráfica do evento A.

(b) A probabilidade *P(A)* equivale à área da região A dividida pela área do quadrado todo. Como a área do quadrado é 1, temos que *P(A)* é a área da região A, ou seja,

$$P(A) = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

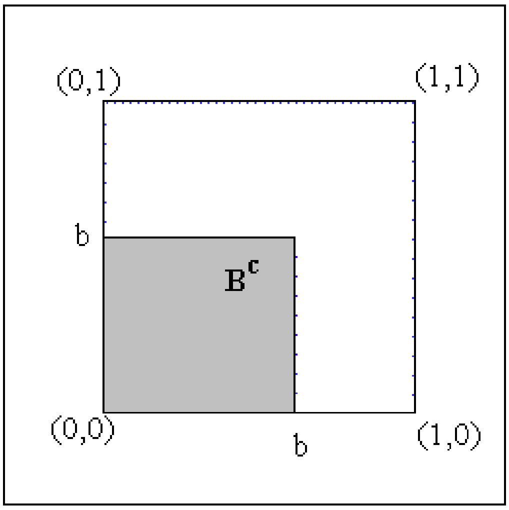
(c) O evento B está representado na figura seguinte:



Representação gráfica do evento B

Vamos então calcular *P(B)*, o que equivale a calcular a área da região B. Uma maneira simples de calcular a área de B é retirar a área do quadrado de lado *b* da área total, que é 1. Desse modo,. $P(B) = 1 - b^2$

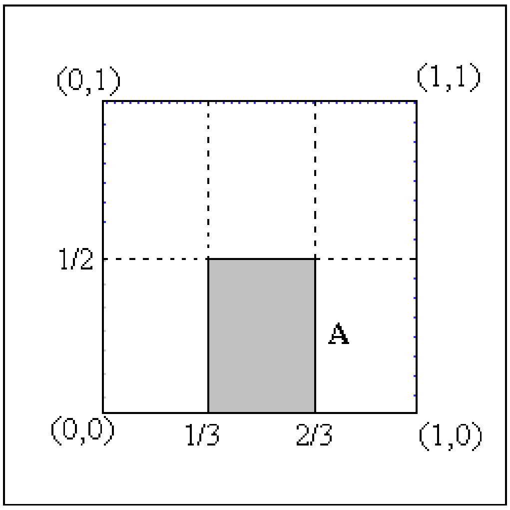
(d) O evento B^c está representado na figura seguinte:



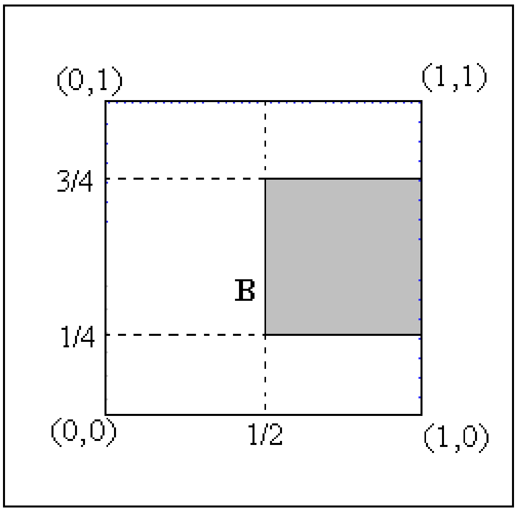
Representação gráfica do evento B^c.

Utilizando a definição de probabilidades de eventos complementares,
$P(B^c) = 1 - P(B) = b^2$.

Problema 50.



Representação gráfica do evento A



Representação gráfica do evento B

- $P(A) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- $P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Problema 51.
A probabilidade de um evento qualquer A seria definida como a área da região no plano (ou seja, a área de A) dividida pela área do quadrado.

Problema 52.

Problema 53.
Esta probabilidade (representada aqui por *p*) é o quociente entre o número de amostras em que não há repetição sobre o número total de amostras com reposição. Do problema anterior, tem-se que o número de amostras de tamanho *n* (obtidas de uma população de tamanho *N*) em que não ocorrem repetições é dado por $(N)_n$. Assim,

$$p = \frac{(N)_n}{N^n}$$

Problema 54.
Considere o caso particular em que $N = 5$ e $n = 2$. Do conjunto $a_1, \ldots, a_5$, retiram-se amostras de tamanho 2, sem reposição. Os resultados possíveis são:

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_1 a_4,\ a_1 a_5$$
$$a_2 a_3,\ a_2 a_4,\ a_2 a_5$$
$$a_3 a_4,\ a_3 a_5$$
$$a_4 a_5$$

Como se vê, nesse caso existem 10 = $\binom{5}{2} = \binom{N}{n}$ amostras sem reposição.

Problema 55.

(a) $P(A \cap (B \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B \cap C)$

(b) $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) + P(B) + P(C) - P((A \cup B) \cup C) =$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) + P(C)$

$- [P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C)$

$- P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)]$

$\Rightarrow P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$

$$= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A \cup B)P(C)$$

Problema 56.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(A) \leq P(A \cap B) + P(B^c)$$

$$\frac{1}{3} \leq P(A \cap B) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{12}$$

Portanto, os eventos A e B não podem ser mutuamente exclusivos, pois $P(A \cap B) \neq 0$.

Problema 57.

O enunciado indica que os componentes 2 e 3 estão ligados em paralelo entre si e em série com o componente 1. Desse modo,

$$h(p) = (0{,}90)(0{,}80 + 0{,}70 - 0{,}56) = 0{,}846$$

Problema 58.

Os eventos V e $U \cup V$ podem ser escritos como

$$V = (U \cap V) \cup (U^c \cap V)$$

$$V \cup U = (U^c \cap V) \cup U$$

Assim,

$$P(V) = P(U \cap V) + P(U^c \cap V) \quad (1)$$

$$P(V \cup U) = P(U^c \cap V) + P(U) \quad (2)$$

A partir disso, subtraindo (2) de (1), temos

$$P(V) - P(U \cup V) = P(U \cap V) - P(U)$$

e logo

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$$

Problema 59.

(a) De acordo com o enunciado, tem-se

$A_1 = \{101, 110\}$, $A_2 = \{011, 110\}$ e $A_3 = \{011, 101\}$.

Assim,

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A_2) = \frac{1}{2}; \quad P(A_3) = \frac{1}{2}; \quad P(A) = 0$$

(b) Os conjuntos indicados são os seguintes:

$A = \phi$, $A_1 \cap A_2 = \{110\}$, $A_1 \cap A_3 = \{101\}$, $A_2 \cap A3 = \{011\}$.

Desse modo,

- $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$;
- $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$;

- $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$;
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Portanto, os eventos são mutuamente independentes, ou seja, são independentes dois a dois, mas não são independentes.

Problema 60.

Para n eventos quaisquer A_1, ..., A_n, (5.10) pode ser escrita como

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Problema 61.

Os eventos A_1, ..., A_n são independentes se, e somente se,

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \quad \forall i,\ i = 1, \ldots n.$$

Problema 62.

Como já foi visto no problema anterior, a probabilidade de uma amostra ordenada com reposição, de tamanho k, ter todos os elementos distintos é igual a $\frac{(365)_k}{365^k}$. Logo, no caso,

$$1 - p = \frac{365(365-1)\ldots(365-(k-1))}{365^k} = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{365-1}{365}\right)\ldots\left(\frac{365-(k-1)}{365}\right)$$

ou seja,

$$1 - p = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{365}\right).$$

Problema 63.

$$1 - p \approx 1 - \frac{1 + 2 + \ldots + (k-1)}{365},$$

desprezando os produtos com denominadores $(365)^2$, $(365)^3$, etc.

Problema 64.

Temos que $P(A) = 0{,}20$, $P(B) = 0{,}50$, $P(C) = 0{,}30$, $P(F \mid A) = 0{,}20$, $P(F \mid B) = 0{,}05$, $P(F \mid C) = 0{,}02$, sendo F o evento "contrato futuro em dólares". Então,

$$P(F) = P(F \mid A)P(A) + P(F \mid B)P(B) + P(F \mid C)P(C) =$$
$$= (0{,}20)(0{,}20) + (0{,}05)(0{,}50) + (0{,}02)(0{,}30) = 0{,}071$$

Segue que

$$P(A \mid F) = \frac{P(F \mid A)P(A)}{P(F)} = \frac{(0{,}20)(0{,}20)}{0{,}071} = \frac{4}{71} \cong 0{,}563$$

e

$$P(C \mid F) = \frac{P(F \mid C)\, P(C)}{P(F)} = \frac{(0{,}02)(0{,}30)}{0{,}071} = \frac{60}{71} \cong 0{,}084$$

Capítulo 6

Problema 01.

$$n(\Omega)=\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!\,3!}=56\text{ combinações possíveis}$$

$$X=0\Rightarrow\binom{5}{0}\times\binom{3}{3}=1$$

$$X=1\Rightarrow\binom{5}{1}\times\binom{3}{2}=15$$

$$X=2\Rightarrow\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}=30$$

$$X=3\Rightarrow\binom{5}{3}\times\binom{3}{0}=10$$

Então a distribuição de X é dada por:

X	0	1	2	3
P(X=x)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 02.

$$n(\Omega)=8^3=512\text{ combinações possíveis}$$

$$X=0\Rightarrow 5^0\times 3^3=27$$

$$X=1\Rightarrow\binom{3}{1}\times 5^1\times 3^2=135$$

$$X=2\Rightarrow\binom{3}{2}\times 5^2\times 3^1=225$$

$$X=3\Rightarrow\binom{3}{3}\times 5^3\times 3^0=125$$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$27/512$	$135/512$	$225/512$	$125/512$

Problema 03.

$$X=1\Rightarrow C\Rightarrow\frac{1}{2}$$

$$X=2\Rightarrow RC\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$X=3\Rightarrow RRC\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

X	1	2	3	4	.....
P(X=x)	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	.....

De modo geral,

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \text{, x=1,2,3....}$$

Problema 04.

Seguindo o mesmo raciocínio idêntico ao Problema 02, tem-se:

X	0	1	2	3	4
P(X=x)	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Problema 05.

No contexto apresentado, a distribuição do número de caras é dada por:

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{4-y} \text{, y} = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Problema 06.

Por similaridade, tem-se:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{n-y} \text{, y} = 0, 1, 2, 3, \ldots, \text{n.}$$

Problema 07.

Para o Problema 01, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{15}{56} + \frac{60}{56} + \frac{30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2\text{)} = \frac{15}{56} + \frac{120}{56} + \frac{90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{) - [E(X)]}^2 = 4{,}018 - [1{,}875]^2 = 0{,}502$$

Para o Problema 02, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{135}{512} + \frac{450}{512} + \frac{375}{512} = \frac{960}{512} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2\text{)} = \frac{135}{512} + \frac{900}{512} + \frac{1175}{512} = \frac{2160}{512} = 4{,}219$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{) - [E(X)]}^2 = 4{,}219 - [1{,}875]^2 = 0{,}703$$

Problema 08.

$$\text{E(Y)} = \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = 2{,}0$$

$$\text{E(Y}^2\text{)} = \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = 5{,}0$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{) - [E(X)]}^2 = 5{,}0 - [2{,}0]^2 = 1{,}0$$

Problema 09.

Y=3X	0	3	6	9
P(Y=y)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

$Z=X^2$	0	1	4	9
$P(Z=z)$	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 10.

Ω	RRR	RRC	RCR	CRR	RCC	CRC	CCR	CCC
X	0	1	1	1	2	2	2	3
Y	1	2	3	2	2	3	2	1
p	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

Do quadro acima obtém-se:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=1{,}5$$

$$Var(X)=(-1{,}5)^2\times\frac{1}{8}+(-0{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(0{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(1{,}5)^2\times\frac{1}{8}=0{,}75$$

Y	1	2	3
$P(Y=y)$	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{4}{8}+3\times\frac{2}{8}=2$$

$$Var(X)=(-1)^2\times\frac{2}{8}+(0)^2\times\frac{4}{8}+(1)^2\times\frac{2}{8}=0{,}50$$

Problema 11.

$$E(V)=0\times q+1\times(1-q)=(1-q)$$

$$Var(V)=(q-1)^2\times q+q^2\times(1-q)=q\times(1-q)$$

Problema 12.

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

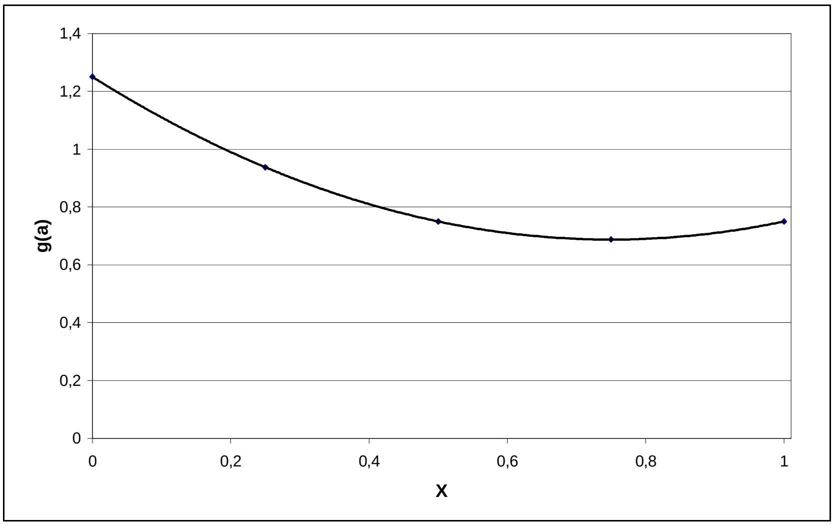
$$E(X^2)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$E\left[(X-a)^2\right]=E(X^2)-2\times a\times E(X)+a^2=\frac{5}{4}-\frac{6a}{4}+a^2=a^2-\frac{3a}{2}+\frac{5}{4}$$

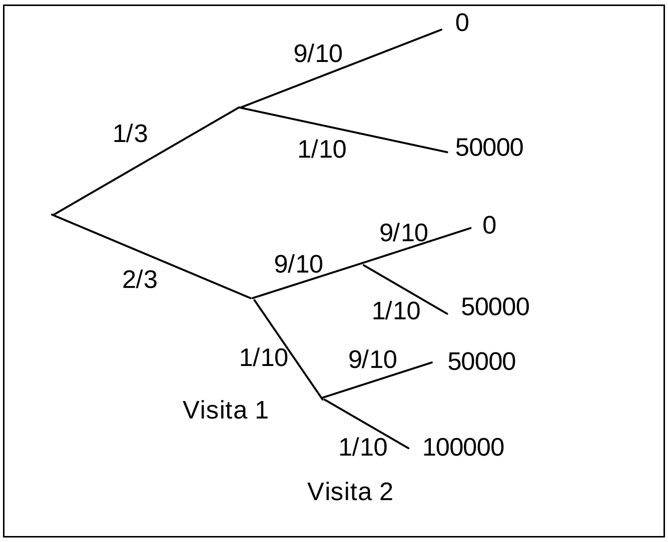
Portanto,

a	0	0,25	0,50	0,75	1
$E\left[(X-a)^2\right]$	1,2500	0,9375	0,7500	0,6875	0,7500

Os resultados encontram-se representados no gráfico a seguir, em que se percebe que g(a) é mínimo para $a\approx 0{,}75$



Problema 13.



Da árvore acima obtém-se:

$$P(Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{252}{300}=\frac{126}{150}$$

$$P(Y=50000)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{46}{300}=\frac{23}{150}$$

$$P(Y=100000)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$$

Y	0	50000	100000
P(Y=y)	$126/150$	$23/150$	$1/150$

$$E(Y)=0\times\frac{126}{150}+50000\times\frac{23}{150}+100000\times\frac{1}{150}=\frac{1250000}{150}=8333,33$$

Problema 14.

$$E(Y^2) = 0 \times \frac{126}{150} + (50000)^2 \times \frac{23}{150} + (100000)^2 \times \frac{1}{150} = 450000000$$

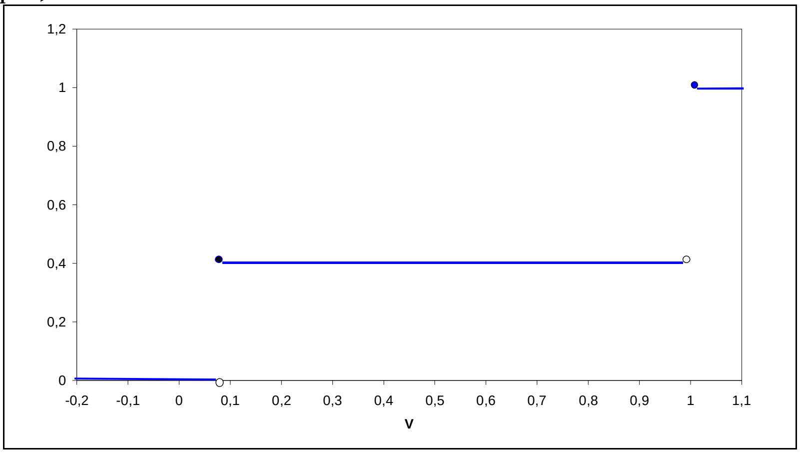
$$Var(X) = 450000000 - (8333{,}33)^2 = 380555611$$

Problema 15.

A partir do Problema 11, tem-se:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ q, & 0 \le v < 1 \\ 1, & v \ge 1 \end{cases}$$

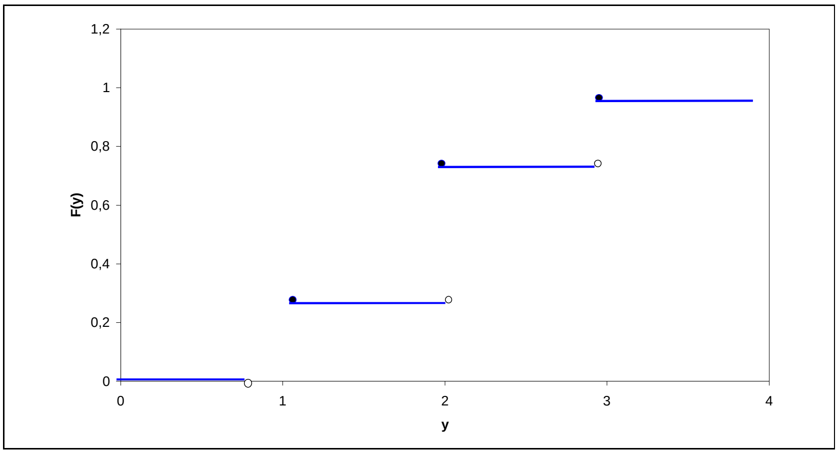
Gráfico para q=0,4:



Problema 16.

A partir do Problema 10, tem-se:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 2/8, & 1 \le y < 2 \\ 6/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$



Problema 17.

$E(T) = 2\times 0{,}1 + 3\times 0{,}1 + 4\times 0{,}3 + 5\times 0{,}2 + 6\times 0{,}2 + 7\times 0{,}1 = 4{,}6$

G	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P(G=g)	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

$$E(G) = 2\times 0{,}3 + 2{,}5\times 0{,}2 + 3\times 0{,}3 + 3{,}5\times 0{,}1 + 4\times 0{,}1 = 2{,}75$$

$$E(G^2) = 4\times 0{,}3 + 6{,}25\times 0{,}2 + 9\times 0{,}3 + 12{,}25\times 0{,}1 + 16\times 0{,}1 = 7{,}975$$

$$Var(G) = E(G^2) - [E(G)]^2 = 7{,}975 - 7{,}5625 = 0{,}4125$$

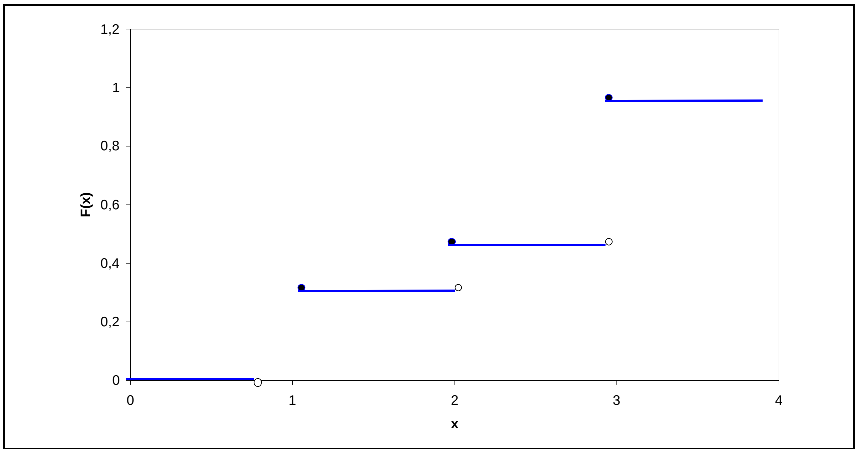
Problema 18.

A distribuição de X é dada por:

X	1	2	3
P(X=x)	1/3	1/6	1/2

Desse modo, a f.d.a de X é:

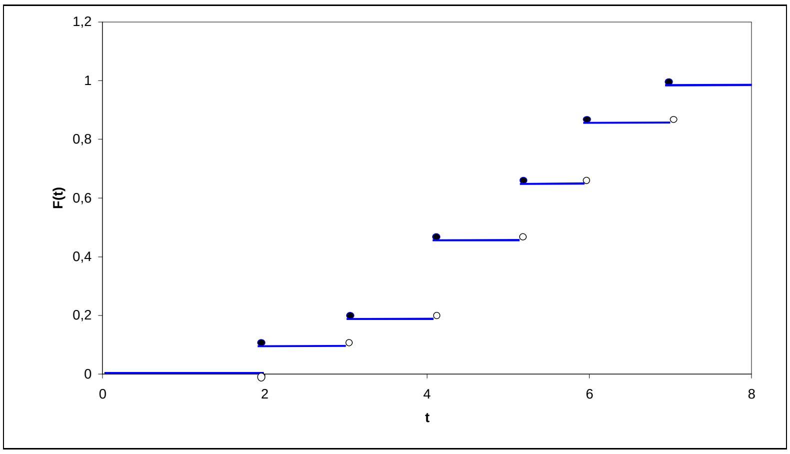
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 1/2, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



Problema 19.

A f.d.a da variável T é dada por:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 0{,}1, & 2 \le t < 3 \\ 0{,}2, & 3 \le t < 4 \\ 0{,}5, & 4 \le t < 5 \\ 0{,}7, & 5 \le t < 6 \\ 0{,}9, & 6 \le t < 7 \\ 1{,}0, & t \ge 7 \end{cases}$$



Problema 20.

(a) X ~ Binomial(5, 1/3)

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \text{ ; x=0,1,2...,5.}$$

(b) A variável X não tem distribuição binomial, pois as extrações são feitas sem reposição, ou seja, a probabilidade de sucesso não é a mesma em todos as extrações.

(c) A variável X terá distribuição binomial apenas se a proporção de bolas brancas for a mesma em todas as urnas.

(d) Novamente, a variável em estudos terá distribuição binomial apenas se a proporção de pessoas com opinião contrária ao projeto for a mesma nas 10 cidades pesquisadas.

(e) Neste caso, as máquinas têm que funcionar independente e apresentar uniformidade quanto à produção de peças defeituosas, ou seja, a probabilidadede se obter uma peça com defeito tem de ser a mesma em todas as máquinas.

Problema 21.

Das propriedades da binomial tem-se:
$E(X) = np = 12; Var(X) = np(1-p) = 3$

(a) $n = 16$

(b) $p = 0{,}75$

(c) $P(X < 12) = \sum_{k=1}^{11} \binom{16}{k} \times (0{,}75)^k \times (0{,}25)^{16-k} = 0{,}3698$

(d) $P(X \geq 14) = \sum_{k=14}^{16} \binom{16}{k} \times (0{,}75)^k \times (0{,}25)^{16-k} = 0{,}1971$

(e) $E(Z) = E\left(\frac{X-12}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times [E(X) - 12] = 0$

(f) $P(Y \geq 14/16) = P(X \geq 14) = 0{,}1971$

(g) $P(Y \geq 12/16) = 1 - P(X < 12) = 1 - 0{,}3698 = 0{,}6302$

Problema 22.

Seja X o número de chamadas recebidas nessa central em um minuto, e usando a tabela II tem-se:

(a) $P(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 1 - 0{,}7166 = 0{,}2834$

(b) $P(X < 9) = \sum_{k=0}^{8} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 0{,}5925$

(c) $P(7 \leq X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}1396 + 0{,}1396 = 0{,}2792$

Problema 23.

Seja X o número de cortes por 2000 pés de fita magnética. Pode-se dizer que X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1$ (Tabela II ou pacotes computacionais)

(a) $P(X = 0) = \frac{e^{-1} \times 1^0}{0!} = 0{,}3679$

(b) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(c) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(d) $P(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679) = 0{,}2642$

Problema 24.

- Considerando a distribuição de binomial:

  Se X é o número de itens defeituosos encontrados na amostra de 10 produzidos, X ~ b(10;0,2) e

  $P(X \leq 1) = \binom{10}{0} \times (0{,}2)^0 \times (0{,}8)^{10} + \binom{10}{1} \times (0{,}2)^1 \times (0{,}8)^9 = 0{,}1074 + 0{,}2684 = 0{,}3758$

- Considerando a distribuição de Poisson

  Nas condições do enunciado, pode-se dizer que o número de itens defeituosos a cada dez produzidos tem distribuição de Poisson de parâmetro 2 (10×2). Assim:

  $P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-2} \times 2^k}{k!} = 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707) = 0{,}4060$

  Os resultados obtidos, apesar de diferentes, são razoavelmente próximos.

Problema 25.

(a) Calculando o número médio de machos por ninhada:

$\bar{x} = 0 \times 20 + 1 \times 360 + \ldots + 5 \times 40 = 2{,}4$

mas $\bar{x} = 5 \times p \Rightarrow p = 0{,}48$

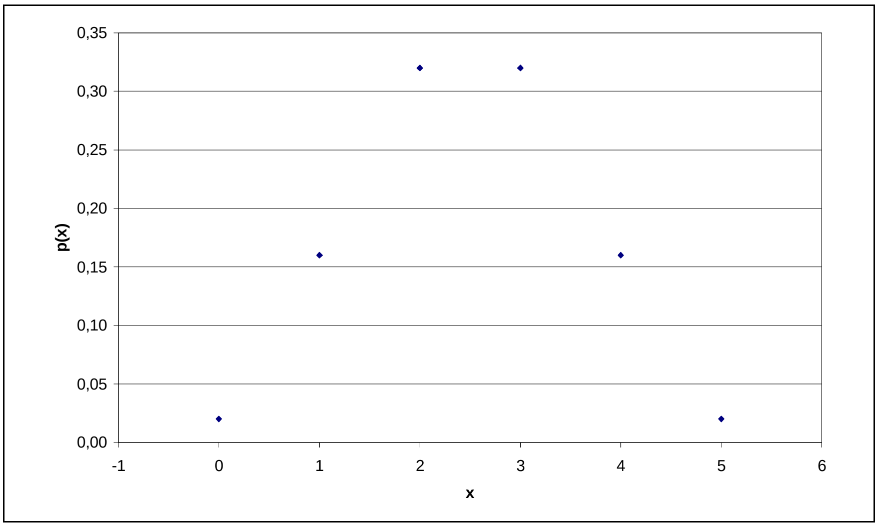
(b) A tabela a seguir traz o número esperado de ninhadas para cada valor de X, de acordo com o modelo binomial b~(5;0,48) (os números estão arredondados). Neste caso, o número esperado de ninhadas com x machos é $2000 \times P(X=x)$.

X=Número de machos	P(X=x)*	Número esperado de ninhadas
0	0,0380	76
1	0,1755	351
2	0,3240	648
3	0,2990	598
4	0,1380	276
5	0,0255	51

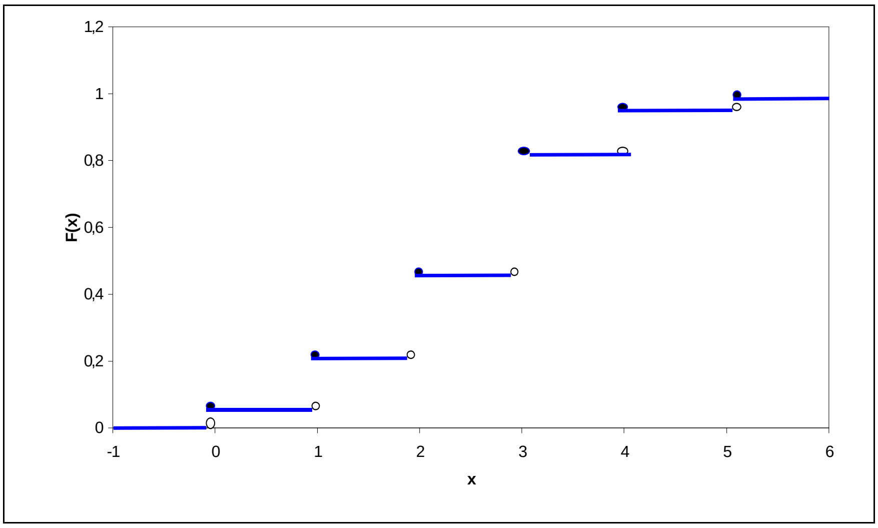
*Valores calculados com base na função distrbinom do EXCEL.

Problema 26.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:

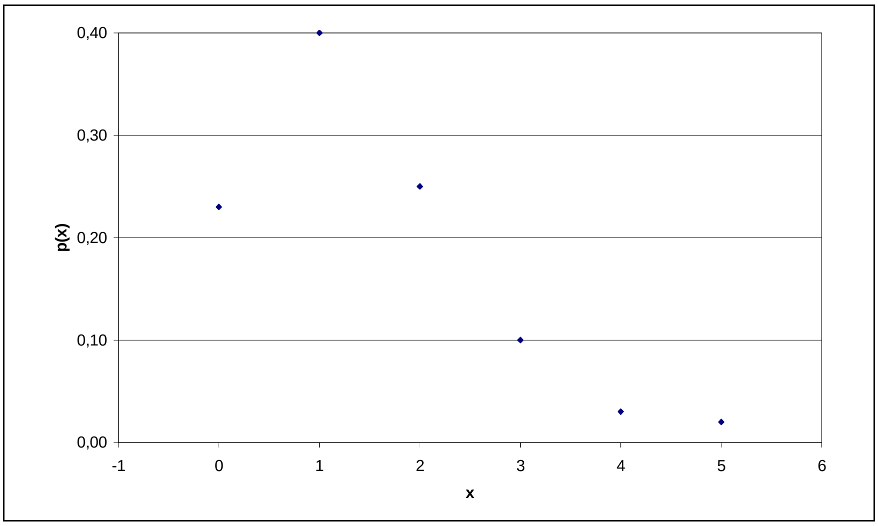


O gráfico da f.d.a de X, F(x) é:

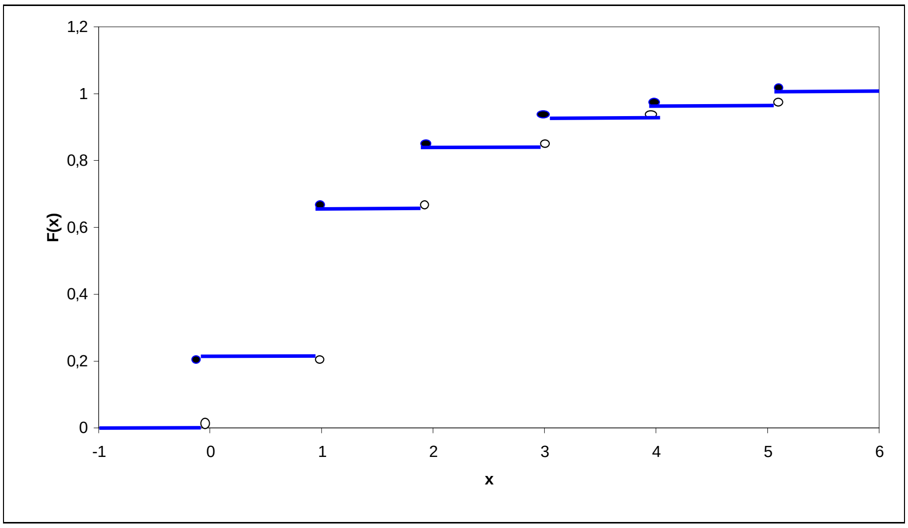


Problema 27.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:

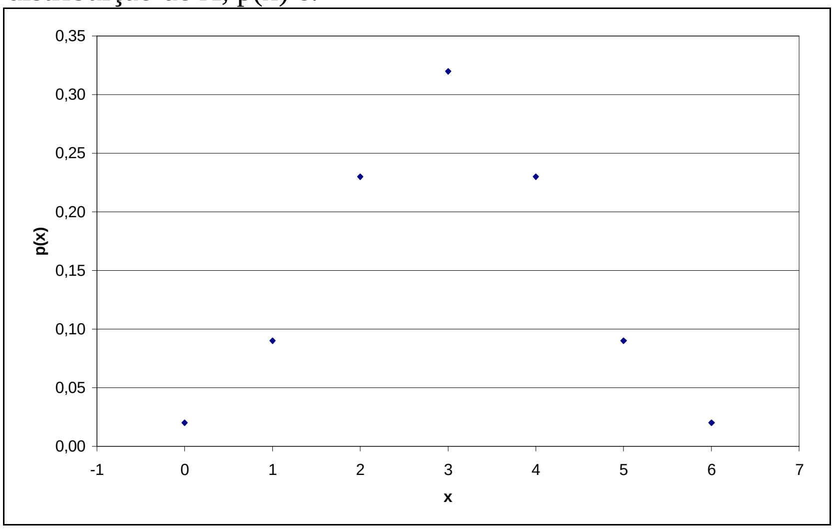


O gráfico da f.d.a de X, F(x), é:

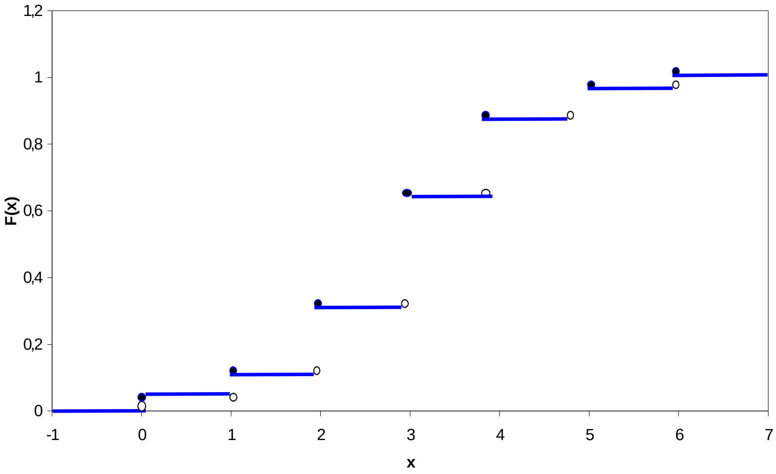


Percebe-se que o gráfico desta distribuição de X é assimétrico, fato que não aconteceu no exercício anterior. Isto se deve ao valor de p, que no caso de distribuição simétrica é igual a 0,5 e agora 0,25.

Problema 28.
O gráfico da distribuição de X, p(x) é:



O gráfico da f.d.a de X, F(X), é:



Problema 29.

O florista pode ter em seu estoque 1, 2 ou 3 flores. Seja L o lucro obtido. Para cada hipótese da quantidade de flores no estoque, tem-se:

- Uma flor:

L	-0,50	1,00
P(L= ℓ)	0,1	0,9

$$E(L) = (-0{,}50)\times(0{,}1) + (1{,}00)\times(0{,}9) = 0{,}85$$

- Duas flores:

L	-1,00	0,50	2,00
p(L= ℓ)	0,1	0,4	0,5

$$E(L) = (-1{,}00)\times(0{,}1) + (0{,}50)\times(0{,}4) + (2{,}00)\times(0{,}5) = 1{,}10$$

- Três flores:

L	-1,50	0,00	1,50	3,00
p(L=ℓ)	0,1	0,4	0,3	0,2

$$E(L) = (-1{,}50)\times(0{,}1) + (0{,}00)\times(0{,}4) + (1{,}50)\times(0{,}3) + (3{,}00)\times(0{,}2) = 0{,}90$$

Portanto, o estoque que maximiza o lucro médio é de 2 flores.

Problema 30.

Sejam X: número de tentativas até a obtenção do primeiro sucesso e C: custo da operação. A distribuição de X, semelhante a estudada no Problema 3 é:

$P(X = x) = p \times (1-p)^{x-1} = (0{,}9)\times(0{,}1)^{x-1}$, logo

$$E(C) = 10\times\sum_{k=1}^{5} P(X=k) + 5\times\sum_{k=6}^{\infty} P(X=k) =$$

$$= 10\times\sum_{k=1}^{5}(0{,}9)\times(0{,}1)^{k-1} + 5\times\sum_{k=6}^{\infty}(0{,}9)\times(0{,}1)^{k-1} \approx 9{,}99$$

Problema 31.

Seja X o número de artigos defeituosos numa amostra aleatória de tamanho 4. Tem-se que X ~ b(4; 0,10). Usando a Tabela I ou pacotescomputacionais, vem:

(a) $P(X=0)=\binom{4}{0}\times(0{,}10)^0\times(0{,}90)^4=0{,}6561$

(b) $P(X=1)=\binom{4}{1}\times(0{,}10)^1\times(0{,}90)^3=0{,}2916$

(c) $P(X=2)=\binom{4}{2}\times(0{,}10)^2\times(0{,}90)^2=0{,}0486$

(d) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}9963$

Problema 32.

Seja X o número de peças defeituosas na caixa. Tem-se que X ~ b(18; 0,05). Para satisfazer à garantia, as caixas têm de apresentar $X\leq 2$.

$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3972+0{,}3763+0{,}1683=0{,}9418$

Problema 33.

Seja X o número de funcionários que aumentam sua produtividade com o curso de treinamento. Tem-se que X ~ b(10; 0,80)

(a) $P(X=7)=\binom{10}{7}\times(0{,}80)^7\times(0{,}20)^3=0{,}2013$

(b) $P(X\leq 8)=\sum_{k=0}^{8}P(X=k)=0{,}6242$

(c) $P(X\leq 7)=\sum_{k=0}^{7}P(X=k)=P(X\leq 8)-P(X=8)=0{,}6242-0{,}3020=0{,}3222$

Problema 34.

Seja X o número de petroleiros que chegam à refinaria em um dia. Do enunciado, X ~ Poisson(2).

(a) $P(X>3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=1-(0{,}6767)=0{,}3233$

(b) Deseja-se saber o valor x_0 tal que P(X > x_0) $\leq$ 0,95. Tem –se que P(X > 4) = =0,947 e P(X > 5) = 0,983. Desse modo, as instalações devem suportar 5 navios por dia.

(c) Numa distribuição de Poisson, a média é dada pelo parâmetro $\lambda=2$.

Problema 35.

De acordo com o modelo proposto, o número esperado de famílias com x filhos, dentre as 10690, é dado por 10690 x P (X = x). A tabela a seguir fornece os resultados obtidos. Foi feito um arredondamento para que se obtivessem números inteiros.

X	P(X = x)*	Nº esperado de famílias	|observado-esperado|
0	0,00024	3	3
1	0,00293	31	2
2	0,01611	172	12
3	0,05371	574	53
4	0,12085	1292	94
5	0,19336	2067	146
6	0,22559	2412	52
7	0,19336	2067	34
8	0,12085	1292	106
9	0,05371	574	225
10	0,01611	172	126
11	0,00293	31	29
12	0,00024	3	4

- Calculado com a planilha do EXCEL (do Capítulo 4)

Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 251{,}37$, haverá indicação de que o modelo binomial não é adequado para explicar o fenômeno.

Problema 36.
Sendo X o número de acidentes,

(a) $\bar{x} = 0 \times 200/480 + \ldots + 8 \times 4/480 = 1{,}18$

(b) A tabela a seguir traz o número esperado de horas com 0, 1, 2, ... acidentes, obtido sob o modelo de Poisson, calculados por 480 x P(X = x) e $P(X = x) = \frac{e^{-1{,}18} \times 1{,}18^x}{x!}$

X	P(X = x)	Número esperado	|observado– esperado|
0	0,30728	147,49	53
1	0,36259	174,04	22
2	0,21393	102,69	43
3	0,08414	40,39	10
4	0,02482	11,91	1
5	0,00586	2,81	6
6	0,00115	0,55	6
7	0,00019	0,09	5
8	0,00003	0,01	4

(c) Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 70{,}02$, haverá indicação de que a distribuição não se aproxima de uma Poisson.

Problema 37.

É preciso saber qual o preço médio pago pela caixa de acordo com a proposta feita pelo comprador. Se X for o número de parafusos defeituosos numa amostra de 20 parafusos, tem-se que X~b (20; 0,10). Assim,

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\times(0,10)^0\times(0,90)^{20}=0,1216$$

$$P(X=1)=\binom{20}{1}\times(0,10)^1\times(0,90)^{19}=0,2702$$

$$P(X=2)=\binom{20}{2}\times(0,10)^2\times(0,90)^{18}=0,2852$$

$$P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}\times(0,10)^k\times(0,90)^{20-k}=0,3230$$

A distribuição de C: preço da proposta é:

C	20,00	10,00	8,00
P(C=c)	0,1216	0,5554	0,3230

$$\overline{C}=20,00\times(0,1216)+10,00\times(0,5554)+8,00\times(0,3230)=R\$10,57$$

Como se vê, de acordo com a proposta feita, o preço médio pago por uma caixa é R$ 10,57. Desse modo, mais vantajoso para o fabricante é vender suas caixas por R$13,50.

Problema 38.

Supondo que X ~ Poisson (2,2),tem-se:

(a) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0,64$

(b) Seguindo raciocínio feito nos exercícios anteriores, obtêm-se as seguintes freqüências esperadas:

X	Freqüência esperada
0	12
1	26
2	29

(c) A observação dos resultados anteriores, indica que as plantas não se distribuem de acordo com a distribuição de Poisson com parâmetro 2,2.

(d) Dependência , pois a reprodução na vizinhança é mais provável do que longe.

Problema 39.

Sejam X o preço de venda da caixa de válvulas e Y o número de válvulas defeituosas em cada caixa. Tem-se que Y ~ b(10; 0,20).

$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\times(0,20)^0\times(0,80)^{10}=0,1074$$

$$P(Y=1)=\binom{10}{1}\times(0,20)^1\times(0,80)^{9}=0,2684$$

$$P(Y=2)=\binom{10}{2}\times(0,20)^2\times(0,80)^{8}=0,3020$$

$$P(Y=3)=\binom{10}{3}\times(0{,}20)^3\times(0{,}80)^7=0{,}2013$$

$$P(Y>3)=\sum_{k=4}^{10}\binom{10}{k}\times(0{,}20)^k\times(0{,}80)^{10-k}=0{,}1209$$

$$E(X)=10{,}00\times(0{,}1074)+8{,}00\times(0{,}2684)+6{,}00\times(0{,}5033)+2{,}00\times(0{,}1209)=R\$6{,}48$$

Problema 40.

Seja X_i o número de peças defeituosas na amostra colhida pelo comprador i, i = A, B.

- Comprador A: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :

  $$P(X_A\geq 1)=1-P(X_A=0)=1-\binom{5}{0}\times(0{,}20)^0\times(0{,}80)^5=0{,}6723$$

  Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador A é:
  $1{,}20\times(0{,}3277)+0{,}80\times(0{,}6723)=R\$0{,}93$

- Comprador B: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :
  $P(X_B\geq 2)=1-P(X_B=0)-P(X_B=1)-P(X_B=2)=1-0{,}1074-0{,}2684-0{,}3020=0{,}3222$

  Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador B é:
  $1{,}20\times(0{,}6778)+0{,}80\times(0{,}3222)=R\$1{,}07$

  Logo, o comprador B oferece maior lucro.

Problema 41.

- n=1

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=\binom{1}{1}\times p\times(1-p)^0=p$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

- n=2

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=\binom{2}{1}\times p\times(1-p)+\binom{2}{2}\times p^2\times(1-p)^0$$

$$=2p(1-p)+2p^2=2p$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2p^2+2p-4p^2=2p(1-p)$$

A prova agora será por indução:
Suponha válido para n-1, isto é:

$$E(X\mid n-1)=\sum_{x=1}^{n-1}x\binom{n-1}{x}p^xq^{n-x-1}=(n-1)p$$

e vamos provar que $E(X\mid n)=np$.
Mas pelo fato de que $p+q=1$, obtém-se que:

$$(p+q)^{n-1}=\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^xq^{n-x-1}=1$$

Multiplicando a primeira expressão por $p+q$, a segunda por p, e somando-se os resultados obtém-se:

$np = E(X \mid n-1) + p = (p+q) \times E(X \mid n-1) + (p+q)^{n-1} \times p$

Basta provar que o último termo é $E(X \mid n)$:

$$q \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x}$$

$$p \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

$$p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

Portanto,

$$p \times E(X \mid n-1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} [x+1]$$

Então:

$$q \times E(X \mid n-1) + p \times E(X \mid n+1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} +$$

$$+ \sum_{x=0}^{n-1} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} = A$$

Separando o primeiro termo da primeira somatória e o último do segundo, tem-se:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n-2} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} + n \times p^n$$

O coeficiente de $p^k q^{n-k}$, para k=1, 2, ..., n-1, será a soma do coeficiente da primeira somatória quando x=k e o da segunda somatória quando x+1=k, ou seja, x=k-1, logo é igual a:

$$k \times \binom{n-1}{k} + k \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] = k \times \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right] =$$

$$= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [n-k+k] = k \times \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \binom{n}{k}$$

Substituindo em A, vem:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + n \times p^n = \sum_{k=0}^{n} k p^k q^{n-k} = E(X \mid n)$$

Como queríamos provar.

Problema 42.

(a) $P(X \le 2) = (0{,}135) + (0{,}285) + (0{,}285) = 0{,}705$

(b) $P(X \le 2) = (0{,}014) + (0{,}068) + (0{,}154) = 0{,}236$

(c) $P(X \le 2) = (0{,}377) + (0{,}377) + (0{,}179) = 0{,}933$

Problema 43.

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\times\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times n\times(n-1)\times....\times(n-k+1)\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\times\lim_{n\to\infty}\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Como $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\to 1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)....\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to 1$ e $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\to e^{-\lambda}$

Então:

$$\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!}\text{ quando } n\to\infty$$

Problema 44.

Usando a propriedade da soma de infinitos termos de uma P.G. de razão menor que 1.

(a) $P(X\ par)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$

(b) $P(X<3)=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k}=\frac{7}{8}$

(c) $P(X>10)=\sum_{k=11}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1/2^{11}}{1-1/2}=\frac{1}{2^{10}}$

Problema 45.

$$E(aX+b)=\sum(aX+b)p(x)=\sum axp(x)+\sum bp(x)=a\sum xp(x)+b\sum p(x)=aE(X)+b$$

$$Var(aX+b)=E\left[(aX+b)^2\right]-E[(aX+b)]^2=a^2\left(E(X^2)-[E(X)]^2\right)+(b^2-b^2)+$$
$$+2bE(X)-2bE(X)=a^2Var(X)$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\sum x^2p(x)-\sum xp(x)\sum xp(x)=\sum x^2p(x)-\left[\sum xp(x)\right]^2$$

Problema 46.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}=(j=k-1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j+1}}{j!}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}+\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}=\lambda^2+\lambda$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Problema 47.

Para justificar a expressão, considere-se que a probabilidade de se extrair uma amostra com k elementos marcados é dada pelo quociente entre o número de amostras em que existem k elementos marcados e o número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N.

O número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N é dado por $\binom{N}{n}$.

Para o numerador da expressão a ser provada, deve-se raciocinar da seguinte maneira: é necessário obter k elementos dentre os r que possuem o tributo e n-k dentre os N-r elementos restantes. Portanto, justifica-se o valor $\binom{r}{k}$x$\binom{N-r}{n-k}$e a probabilidade em questão é dada por:

$$p_k=\frac{\binom{r}{k}\times\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Problema 48.

Cada resposta é um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso 0,50. Desse modo, o número de respostas corretas, X, tem distribuição binomial com n=50 e p=0,50. Acertar 80% das questões significa X = 40. Portanto:

$$P(X=40)=\binom{50}{40}\times(0{,}50)^{40}\times(0{,}50)^{10}=9\times10^{-6}$$

Problema 49.

No caso de alternativas por questão, a variável aleatória X segue distribuição binomial com n=50 e p = 0,20. Desse modo,

$$P(X=40)=\binom{50}{40}\times(0{,}20)^{40}\times(0{,}80)^{10}=1{,}21\times10^{-19}$$

Problema 50.

$$P(X=2)=12\times P(X=3)\Rightarrow\binom{3}{2}p^2(1-p)=12\times\binom{3}{3}p^3\Rightarrow 3p^2(1-p)=12p^3\Rightarrow p=0{,}20$$

Problema 51.

Seja X o número de componentes que funcionam.Tem-se que X ~b (10; p).

(a) $P(funcionar) = P(X = 10) = p^{10}$

(b) $P(não\ funcionar) = P(X < 10) = 1 - p^{10}$

(c) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^8 = 45 \times p^2 \times (1-p)^8$

(d) $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \times p^k \times (1-p)^{10-k}$

Problema 52.

$$b(k+1; n, p) = \binom{n}{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1}$$

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!k!} \times p^k \times \frac{p}{1-p} \times (1-p)^{n-k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} b(k; n, p)$$

Problema 53.
Para a variável Z, a mediana é qualquer valor pertencente a (1, 2), de acordo com a definição. Nestes casos costuma-se indicar o ponto médio da classe que é 1,5.

Problema 54.
$q(0{,}25) =$ qualquer valor entre (0, 1)
$q(0{,}60) = 2$,porque $P(X \leq q(0{,}60)) = P(X \leq 2) = 0{,}75 \geq 0{,}60$ e $P(X \geq 2) = 0{,}50 \geq 0{,}40$
$q(0{,}80) = 3$, pois $P(X \leq 3) = 1{,}00 > 0{,}80$ e $P(X \geq 3) = 0{,}25 > 0{,}20$

Problema 55.

(e) $p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

(f) $E(X) = p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^j$, onde 1- p =q.

Mas, $\frac{d}{dq} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q}$, pois a série $\sum_{j=1}^{\infty} q^j$ é convergente

Logo,

$E(X) = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

Mesmo raciocínio para a Var(X).

(g) $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty} (1-p)^j \times p}{\sum_{j=s+1}^{\infty} (1-p)^j \times p} = \frac{(1-p)^{s+t+1}}{(1-p)^{s+1}} = (1-p)^t = P(X \geq t)$

Problema 56.

Considere:

C: custo do exp.

X: nº de provas para sucesso.

$C = 1000X + 300(X - 1)$

Portanto,.

$$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300 \times \frac{1}{0,2} - 300 = 6200$$

Problema 57.

$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n - k\}$, pois o evento $\{X + Y = n\}$ pode ser escrito como a união de eventos disjuntos $\{X = k, Y = n - k\}$, n=0,.....

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n - k\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X = k\} \times P\{Y = n - k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \times \binom{m}{n-k} \times p^{n-k} \times (1 - p)^{m-n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} \times p^n \times (1 - p)^m = \binom{m+n}{m} \times p^n \times (1 - p)^m, \text{ pois } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} = \binom{m+n}{m}$$

Capítulo 7

Problema 01.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = 2\times\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = 2\times\left[0+\frac{e^{-0}}{2}\right]=1$

(b) $\displaystyle P(X>10)=\int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}dx = 2\times\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{10}^{\infty} = e^{-20}$

Problema 02.

(a) $\displaystyle \frac{1}{2}\times\frac{C}{2}=1 \Rightarrow \mathrm{C}=4$

(b)

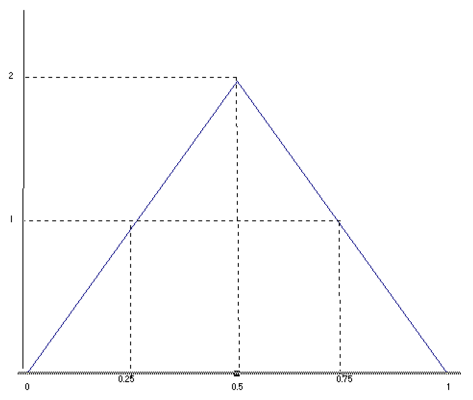


gráfico de f(x)

(c) $\displaystyle P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=P\left(X>\frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}\right)=2\times P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\right)=2\times\left(0{,}5-P\left(X\le\frac{1}{4}\right)\right)=$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1\times{}^{1}\!/_{4}}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Problema 03.

(a) Como $P(X\le 10)=1$ vem:

$\displaystyle\int_0^{10} kxdx=1$, ou seja, $\displaystyle\int_0^{10} kxdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 50k=1 \Rightarrow \mathrm{k}=0{,}02$

$$\therefore \quad F(x) = \int_0^x 0{,}02x\,dx = 0{,}01x^2$$

Logo, $F(1) = P(X < 1) = 0{,}01$

(b) $P(X < r) = 0{,}01r^2 = \dfrac{\pi r^2}{\pi(10)^2}$

Problema 04.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{c}{x^2}dx = c \times \int_{10}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]dx = c \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{\infty} = c \times \frac{1}{10} = 1 \quad \rightarrow \quad c = 10$$

$$P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{10}{x^2}dx = 10 \times \int_{15}^{\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]dx = 10 \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{15}^{\infty} = 10 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

Problema 05.

$$E(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} x4(1-x) = 4 \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + 4 \times \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = 4 \times \left\{\frac{1}{24} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)\right\} =$$

$$= 4 \times \left\{\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{2}{24}\right\} = 4 \times \frac{3}{24} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^3 dx + \int_{1/2}^{1} x^2 4(1-x) = 4 \times \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{1/2} + 4 \times \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^{1} = 4 \times \left\{\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right)\right\} =$$

$$= 4 \times \left\{\frac{1}{32} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right\} = 4 \times 7 \times \frac{1}{96} = \frac{7}{24}$$

Logo,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$F(x) = 4 \times \int_{\frac{1}{2}}^{x} (1 - t)dt = 4 \times \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x} = 4 \times \left\{\left[x - \frac{x^2}{2}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right]\right\} = 4 \times \left\{x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}\right\} + \frac{1}{2} =$$

$$= 4x - 2x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 4x - 2x^2 - 1$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \dfrac{4x^2}{2}, \text{ se } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x - 2x^2 - 1, \text{ se } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Problema 06.

$$E(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\,\text{sen}\,x)dx=\left[-x\cos x+\int\cos x dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

Tomando:

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=\text{sen}\,x \;\Rightarrow\; v=-\cos x$

$$=\left[-x\cos x+\text{sen}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\text{sen}\frac{\pi}{2}-0\cos 0-\text{sen}\,0\right]=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1$$

$$E(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\,\text{sen}\,x)dx=$$

Tomando:

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=x\,\text{sen}\,x \;\Rightarrow\; v=-x\cos x+\text{sen}\,x$

$$=-x^2\cos x+x\,\text{sen}\,x+\int x\cos x+\text{sen}\,x=$$

$u=x \quad \Rightarrow \quad du=1$

$dv=\cos x \;\Rightarrow\; v=\text{sen}\,x$

$$=-x^2\cos x+x\,\text{sen}\,x+x\,\text{sen}\,x-\cos x+\cos x=\left[-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x\right]_0^{1/2}=\pi$$

Logo,

$Var(X)=\pi-1$

Problema 07.

$$E(X)=\int_{10}^{\infty}x\frac{10}{x^2}dx=\int_{10}^{\infty}\frac{10}{x}dx=10\times\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x}dx=10\times\left[\log x\right]_{10}^{\infty}=+\infty$$

Problema 08.

(a) $P\left(X>b \middle| X<b/2\right)=\dfrac{P\left(b<X<b/2\right)}{P\left(X<b/2\right)}$, onde

$$P\left(X<b/2\right)=\int_{-1}^{b/2}3x^2dx=\left(x^3\right)_{-1}^{b/2}=\frac{b^3}{8}+1$$

$$P\left(b<X<b/2\right)=\int_{b}^{b/2}3x^2dx=\left(x^3\right)_{b}^{b/2}=\frac{b^3}{8}-b^3$$

Logo,

$$P\left(X>b \middle| X<b/2\right)=\frac{P\left(b<X<b/2\right)}{P\left(X<b/2\right)}=\frac{\frac{b^3}{8}-b^3}{\frac{b^3}{8}+1}=\frac{-7b^3}{b^3+8}$$

(b) $E(X)=\int_{-1}^{0}3x^3dx=3\times\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{4}\times[0-1]=-\frac{3}{4}$

$E(X^2)=\int_{-1}^{0}3x^4dx=3\times\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{5}\times[0+1]=\frac{3}{5}$

Então,

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$

Problema 09.

$E(X)=\frac{3}{5}\times10^{-5}\int_{0}^{100}x^2(1-x)dx=\frac{3}{5}\times10^{-5}\left[100\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{100}=\frac{3}{5}\times10^{-5}\times100^3\left[\frac{100}{3}-\frac{100}{4}\right]=$

$=\frac{3}{5}\times10^3\times\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{5}\times10^3\times\frac{1}{12}=50$

Logo,

$E(L)=C_1+50C_2$

Problema 10.

(a) $P(X>1{,}5)=\int_{1,5}^{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{6}\right]_{3/2}^{3}=\left(3-\frac{9}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{24}\right)=\frac{3}{8}=0{,}375$

(a) $E(X)=\int_{0}^{1}\frac{2}{3}x^2dx+\int_{1}^{3}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\times\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9}\right)_1^3=\frac{2}{9}+\left[\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{9}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)\right]=$

$=\frac{4}{3}=1{,}33\text{ num dia}\Rightarrow 30\text{ dias}:\frac{4}{3}\times30=40\longrightarrow 4000\text{ kg}$

(b) $P(X\le a)=0{,}95$

$P(\le 0X\le 1)=\frac{1\times2}{2\times3}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+\int_{1}^{a}\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx=0{,}95$

$\int_{1}^{a}\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx=0{,}95-0{,}33=0{,}62$

$\left(x-\frac{x^2}{6}\right)_1^a=a-\frac{a^2}{6}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0{,}62\longrightarrow -a^2+6a-3=5{,}7\longrightarrow a^2+6a+8{,}7=0$

Logo, resolvendo a equação de 2º grau acima, encontra-se que: $a=2{,}45\rightarrow 245\text{ kg}$

Problema 11.

$E(X)=2\times\int_{0}^{\infty}xe^{-2x}dx=2\times\left[\left(-\frac{xe^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty}-\frac{1}{2}\times\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx\right]=$

Tomando:

$$v' = e^{-2x} \rightarrow v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$= \left[\left[\left(-xe^{-2x}\right)_0^\infty\right] + \int_0^\infty e^{-2x}dx\right] = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{4}$$

Problema 12.

Calculando o valor de c:

$$c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \longrightarrow c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$c\left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 1 \longrightarrow \frac{4}{3}\times c = 1 \longrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}x(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\times\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\times\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}x^2(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\times\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\times\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{3}{4}\times\frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

Logo,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)] = \frac{1}{5} - [0]^2 = \frac{1}{5}$$

Problema 13.

(a) $T \sim U[150{,}300]$

Gráfico da função densidade de probabilidade de T

$$C = C_1$$

$$V = \begin{cases} C_2, \mathrm{T} < 200 \\ \mathrm{C}_3, \mathrm{T} > 200 \end{cases}$$

(b) $L = V - C_1 = \begin{cases} C_2 - C_1, 150 < \mathrm{T} < 200 \\ C_2 - C_1, 200 < \mathrm{T} < 300 \end{cases}$

Logo,

$$E(L) = (C_2 - C_1) \times \frac{1}{3} + (C_3 - C_1) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} C_3 + \frac{1}{3} C_2 - C_1$$

Problema 14.

$X \sim N(10;4)$

(a) $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = 0{,}34$

(b) $P(9 \le X \le 12) = P\left(-\frac{1}{2} < Z < 1\right) = 0{,}34 + 0{,}19 = 0{,}53$

(c) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(d) $P(X < 8 \text{ ou X} > 11) = P(Z < -1) + P(Z > 0{,}5) = 0{,}16 + 0{,}31 = 0{,}47$

Problema 15.

$X \sim N(100;100)$

(a) $P(X < 115) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}933$

(b) $P(X \ge 80) = P(Z \ge -2) = 0{,}977$

(c) $P(|X - 100| \le 10) = P(-10 \le X - 100 \le 10) = P\left(-1 \le \frac{X - 100}{10} \le 1\right) = P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}6827$

(d) $P(100 - a \le X \le 100 + a) = P(-a \le X - 100 \le a) = P\left(-\frac{a}{10} \le X \le \frac{a}{10}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{a}{10} = 1{,}96 \rightarrow a = 19{,}6$

Problema 16.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(a) $P(X \le \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le 2\right) = P(Z \le 2) = 0{,}977$

(b) $P(|X - \mu| \le \sigma) = P(|Z| \le 1) = 0{,}68$

(c) $P(-a\sigma \le X - \mu \le a\sigma) = P(-a \le Z \le a) = 0{,}99 \longrightarrow a = 2{,}58$

(d) $P(X > b) = 0{,}90 \longrightarrow P\left(Z > \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

Logo,

$\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = -1{,}28 \longrightarrow b = \mu - 1{,}28\sigma$

Problema 17.

$X \sim N(170;5^2)$

(a) $P(X > 165) = P(Z > -1) = 0,94134$

$\therefore$ Nº esperado $= 10000 \times 0,94134 = 9413$

(b) $P(\mu - a < X < \mu + a) = 0,75$

$P(170 - a < X < 170 + a) = 0,75$

$P\left(-\frac{a}{5} < Z < \frac{a}{5}\right) = 0,75$

$\frac{a}{5} = 1,15 \longrightarrow a = 5,75$

Logo o intervalo simétrico é:

$Intervalo = (164,25;175,75)$

Problema 18.

$V \sim N(500;50^2)$

$P(V > 600) = P(Z > 2) = 0,023$

Problema 19.

$D_1 \sim N(42;36)$

$D_2 \sim N(45;9)$

Para um período de 45 horas, tem-se:

$P(D_1 > 45) = P(Z > 0,5) = 0,31$

$P(D_2 > 45) = P(Z > 0) = 0,50$

Neste caso, D_2 deve ser preferido.

Para um período de 49 horas, tem-se:

$P(D_1 > 49) = P(Z > 1,17) = 0,121$

$P(D_2 > 49) = P(Z > 1,33) = 0,092$

E neste caso, D_1 deve ser preferido.

Problema 20.

$X \sim N\left(0,6140;(0,0025)^2\right)$

(a) $P(0,61 < X < 0,618) = 0,8904$ BOM

$P(0,608 < X < 0,610) + P(0,618 < X < 0,620) =$

$= P(-2,4 < X < -1,6) + P(1,6 < X < 2,4) = 0,0466 + 0,0466 = 0,0932$ RECUPERÁVEL

$P(X < 0,608) + P(X > 0,62) = P(Z < -2,4) + P(Z > 2,4) = 2 \times 0,0082 = 0,0164$ DEFEITUOSAS

(b) $E(T) = 0,10 \times 0,8904 + 0,05 \times 0,0932 - 0,10 \times 0,0164 = 0,09206$

Problema 21.

Y : *Lucro esperado por item*

$$P(X \le 0{,}9) = \int_0^{0{,}9} e^{-x}dx = 1 - e^{-0{,}9} = 0{,}5934$$
$$P(X > 0{,}9) = e^{-0{,}9} = 0{,}4066$$
$$Y: \quad 2 \quad ; \quad 3$$
$$P(Y = y): 0{,}5934 \,;\, 0{,}4066$$
$$E(Y) = -1{,}1868 + 1{,}2198 = 0{,}033$$

Problema 22.

$Y \sim b(10;0{,}4)$ $\qquad X \sim N(4\,;2{,}4)$

(a) $P(3 < Y < 8) = P(4 \le Y \le 7) \cong P(3{,}5 \le X \le 7{,}5) = P(-0{,}32 \le Z \le 2{,}26) = 0{,}4881 + 0{,}1255$
$= 0{,}6136$

(b) $P(Y \ge 7) \cong P(X \ge 6{,}5) = P(Z \ge 1{,}61) = 0{,}0537$

(c) $P(Y < 5) = P(Y \le 4) \cong P(X \le 4{,}5) = P(Z \le 0{,}32) = 0{,}6255$

Problema 23.

$X \sim b(100\,;0{,}1)$

$$P(X = 12) = \binom{100}{12} \times (0{,}1)^{12} \times (0{,}9)^{88}$$

$Y \sim N(10\,;9)$

$$P(X = 12) = P(11{,}5 \le Y \le 12{,}5) = P(0{,}5 \le Z \le 0{,}83) = 0{,}1043$$

Problema 24.

X : *número de defeitos*

$$P(X \ge 30) = \sum_{j=30}^{1000} \binom{1000}{j} \times (0{,}05)^j \times (0{,}95)^{1000-j}$$

$Y \sim N(50\,;47{,}5)$

$$P(X \ge 30) \cong P(Y \ge 29{,}5) = P\left(Z \ge \frac{29{,}5 - 50}{6{,}89}\right) = P(Z \ge -2{,}975) = 0{,}9986$$

Problema 25.

(a) $P(Y \le 5{,}5) = P(X + 5 \le 5{,}5) = P(X \le 0{,}5) = 0{,}50$

(b) $G(y) = P(Y \le y) = P(X + 5 \le y) = P(X \le y - 5) = F(y - 5)$

Então:

$$g(y) = f(y-5) = \begin{cases} 0\,,\ y < 5 \\ 4(\text{y - 5}),\ 0 \le y - 5 \le \dfrac{1}{2} \to 5 \le y \le 5{,}5 \\ 4(1 - y + 5) = 4(6 - y)\,,\ \dfrac{1}{2} \le y - 5 \le 1 \to 5{,}5 \le y \le 6{,}0 \\ 0,\ \ y > 6 \end{cases}$$

(c) $G(z) = P(Z \le z) = P(2X \le z) = P\left(X \le \frac{z}{2}\right) = F\left(\frac{z}{2}\right)$

Então:

$$g(z) = \frac{1}{2} \times f\left(\frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ z,\ 0 \le \frac{z}{2} \le 1 \ \rightarrow 0 \le z \le 1 \\ 2 \times \left(1 - \frac{z}{2}\right), \frac{1}{2} \le \frac{z}{2} \le 1 \ \rightarrow 1 \le z \le 2 \\ 0, z > 2 \end{cases}$$

(d) Problema 26.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(2X - 0{,}6 \le y) = P(2X \le y + 0{,}6) = P\left(X \le \frac{y+0{,}6}{2}\right) = F\left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)$$

Logo,

$$g(y) = f\left(\frac{y+0{,}6}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2, -1 \le \frac{y}{2} + 0{,}3 \le 0 \rightarrow -2{,}6 \le y \le -0{,}6$$

$$E(Y) = \int_{-2,6}^{-0,6} \frac{3}{2} y \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2 dy = \frac{3}{8} \times \int_{-2,6}^{-0,6} y\left(y^2 + 0{,}36 + 1{,}2y\right)dy = \int_{-2,6}^{-0,6} \left(y^3 + 0{,}36y + 1{,}2y^2\right)dy =$$

$$= \frac{3}{8} \times \left[\frac{y^4}{4} + 0{,}36\frac{y^2}{2} + 1{,}2\frac{y^3}{3}\right]_{-2,6}^{-0,6} = -2{,}10$$

$$E(Y^2) = \int_{-2,6}^{-0,6} \frac{3}{2} y^2 \left(\frac{y+0{,}6}{2}\right)^2 dy = \frac{3}{8} \times \int_{-2,6}^{-0,6} y^2\left(y^2 + 0{,}36 + 1{,}2y\right)dy = \int_{-2,6}^{-0,6} \left(y^4 + 0{,}36y^2 + 1{,}2y^3\right)dy =$$

$$= \frac{3}{8} \times \left[\frac{y^5}{5} + 0{,}36\frac{y^3}{3} + 1{,}2\frac{y^4}{4}\right]_{-2,6}^{-0,6} = ...$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - 4{,}41$$

Problema 27.

$X \sim U[-1;1]$

Tomando $Y = X^2$:

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

Logo:

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, -1 < x < 1 \\ 0,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\therefore\ g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < 1$$

Tomando $W = |X|$:

$$G(w) = P(W \le w) = P(|X| \le w) = P(-w \le X \le w) = F(w) - F(-w)$$

Logo:

$$g(w) = f(w) - f(-w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\ \ 0 < w < 1$$

Problema 28.

(a) $$E(X) = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{10}\right)dx + \int_2^6 \left(\frac{-3x^2}{40} + \frac{9x}{20}\right)dx = \left[\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{20}\right]_0^2 + \left[\frac{-3x^3}{120} + \frac{9x^2}{20}\right]_2^6 =$$

$$= \left[\frac{8}{30} + \frac{4}{20}\right] + \left[\left(-\frac{648}{120} + \frac{324}{40}\right) - \left(-\frac{24}{120} + \frac{36}{40}\right)\right] = 2{,}47$$

(b) $$P(X > 3) = \int_3^6 \left(-\frac{3x}{40} + \frac{9}{20}\right)dx = \left[\frac{-3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right]_3^6 = \left(-\frac{108}{80} + \frac{54}{20}\right) - \left(-\frac{27}{80} + \frac{27}{20}\right) = 0{,}338$$

(c) $$\int_{Q_2}^6 f(x)dx = 0{,}5 \rightarrow \int_{Q_2}^6 \left(-\frac{3x}{40} + \frac{9}{20}\right)dx = \left[-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right]_{Q_2}^6 = -\frac{108}{80} + \frac{54}{20} + \frac{3Q_2}{80} - \frac{9Q_2}{20} = 0{,}5$$

Portanto, $Q_2 = 2{,}06$.

Problema 29.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha},\ \alpha < \mathrm{x} < \beta$$

(a) $$E(X) = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta - \alpha}dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$E(X^2) = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{\beta - \alpha}dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta)}{3(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{3}$$

$$Var(X) = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{3} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{4} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} 0, x < \alpha \\ \int_\alpha^x \frac{1}{\beta - \alpha}dt = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \alpha \le x < \beta \\ 1, x > \beta \end{cases}$$

Problema 30.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \alpha < x < \beta$$

$$U = \frac{X - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha} \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$P(c < X < d) = F_U\left(\frac{d - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right) - F_U\left(\frac{c - \frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right)$$

Então:

$$G(u) = P(0 \le U \le u) = u,\ 0 \le u \le 1$$
$$u = 0{,}00 \longrightarrow G(0) = 0$$
$$u = 0{,}01 \longrightarrow G(0{,}01) = 0{,}01$$
$$u = 0{,}00 \longrightarrow G(0{,}02) = 0{,}02$$

e assim por diante.

Problema 31.

$$P(c < X < d) = F_U\left(\frac{d-7{,}5}{5}\right) - F_U\left(\frac{c-7{,}5}{5}\right)$$

(a) $P(X < 7) = P(5 < X < 7) = F_U(-0{,}1) - F_U(-0{,}5) = 0{,}4$

(b) $P(8 < X < 9) = F_U(0{,}3) - F_U(0{,}1) = 0{,}2$

(c) $P(X > 8{,}5) = P(8{,}5 < X < 10) = F_U(0{,}5) - F_U(0{,}2) = 0{,}3$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2) = 1 - P(-2 < X - 7{,}5 < 2) = 1 - P(5{,}5 < X < 9{,}5) = 1 - [F_U(0{,}4) - F_U(0{,}4)] =$
$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Problema 32.

$X \sim N(\mu;\sigma^2)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Fazendo $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x = \sigma y + \mu \longrightarrow dx = \sigma dy$, tem-se:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \mu \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \sigma \times \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1,\ y \sim N(0{,}1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_{0}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \int_{-\infty}^{0} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Considerando:

$$\int_{-\infty}^{0} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

Tomando $z=-y \longrightarrow y=-z \rightarrow dy=-dz$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{0} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=-\int_{0}^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=\int_{0}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy-\int_{0}^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=0$$

Logo,

$$E(X)=\mu$$

Sabe-se que:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Fazendo $y=\dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x=\sigma y+\mu \longrightarrow dx=\sigma dy$, tem-se:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=\mu^2\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy+\sigma^2\times\int_{-\infty}^{\infty}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy+$$

$$+2\mu\sigma\times\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

Já vimos anteriormente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=0$$

Queremos então calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{y}_{u}\underbrace{y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{v'}dy=\underbrace{\left[y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{0}=1$$

Logo,

$$E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$$

$$Var(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

Problema 33.

$X \sim N(6{,}4;0{,}8^2)$

$A \longrightarrow P(7{,}5\le X\le 10)=P(1{,}38\le X\le 4{,}5)=0{,}49997-0{,}41621=0{,}0837$

$N^o\, esperado=0{,}0837\times 80=6{,}696\cong 7$

$B \longrightarrow P(5\le X\le 7{,}5)=P(-1{,}75\le X\le 1{,}38)=0{,}41621+0{,}45994=0{,}876$

$N^o\, esperado=0{,}876\times 80\cong 70$

$$C \longrightarrow P(X < 5) = P(X < -1{,}75) = 0{,}040$$
$$N^o \, esperado = 0{,}040 \times 80 \cong 3$$

Problema 34.

$X = Peso\ Bruto \sim N(1000; 20^2)$

(a) $P(X < 980) = P(Z < -1) = 0{,}15866$

(b) $P(X > 1010) = P\left(Z > \dfrac{1}{2}\right) = 0{,}30854$

Problema 35.

(a) $X = Peso \sim N(5; 0{,}8^2) \quad \mathrm{n} = 5000$

Então:

$$\frac{X - 5}{0{,}8} = Z \longrightarrow X = 0{,}8Z + 5$$
$$z_1 = 0{,}84 \rightarrow x_1 = 4{,}33$$
$$z_2 = 0{,}68 \rightarrow x_2 = 5{,}54$$
$$z_3 = 1{,}28 \rightarrow x_3 = 6{,}02$$

Logo,

$$\text{se} \begin{cases} \text{x} \leq 4{,}33, \text{ então classifica como pequeno} \\ 4{,}33 < \text{x} \leq 5{,}54, \text{ então classifica como médio} \\ 5{,}54 < \text{x} \leq 6{,}02, \text{ então classifica como grande} \\ \text{x} > 6{,}02, \text{ então classifica como extra} \end{cases}$$

Problema 36.

$VL \sim N(1000; 10^2)$

(a) $\mathrm{P}(\mathrm{VL} < 990) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -1) = 0{,}16 \longrightarrow 16\%$

(b) $\mathrm{P}(|\mathrm{VL} - 1000| < 20) = \mathrm{P}(-20 < \mathrm{VL} - 1000 < 20) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545 \longrightarrow 95{,}5\%$

(c) $\mathrm{P}(|\mathrm{VL} - 1200| < 2 \times 20) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545 \longrightarrow 95{,}5\% \quad \therefore$ *não muda*

Problema 37.

$D \sim \mathrm{N}(0{,}10; (0{,}02)^2)$

$$\mathrm{V} = \begin{cases} 5, & |\mathrm{D} - 0{,}10| > 0{,}03 \\ 10, & |\mathrm{D} - 0{,}10| \leq 0{,}03 \end{cases}$$
$$E(\mathrm{V}) = 5 \times \mathrm{P}(|\mathrm{D} - 0{,}10| > 0{,}03) + 10 \times \mathrm{P}(|\mathrm{D} - 0{,}10| \leq 0{,}03)$$
$$\mathrm{P}(|\mathrm{D} - 0{,}10| \leq 0{,}03) = \mathrm{P}(-0{,}03 < \mathrm{D} - 0{,}10 < 0{,}03) = \mathrm{P}(-1{,}5 < \mathrm{Z} < 1{,}5) = 0{,}867$$

Logo,

$$E(\mathrm{V}) = 5 \times 0{,}133 + 10 \times 0{,}867 = 9{,}34$$

Problema 38.

$$\text{Aparelho A} \longrightarrow \begin{cases} Lucro = 1000, \textit{ sem restituição.} \\ \Pr ejuízo = 3000, \textit{com restituição.} \end{cases}$$

$$\text{Aparelho B} \longrightarrow \begin{cases} Lucro = 2000, \textit{ sem restituição.} \\ \Pr ejuízo = 8000, \textit{com restituição.} \end{cases}$$

X : tempo para a ocorrência de algum defeito grave.

$X \mid A \sim N(9;4)$.

$X \mid B \sim N(12;9)$.

Então:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 6 \mid \mathrm{A}) = P(Z \le -1{,}5) = 0{,}066$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 6 \mid \mathrm{B}) = P(Z \le -2) = 0{,}023$$

Portanto os lucros esperados para os dois produtos são:

$$A \longrightarrow 1000 \times 0{,}934 - 3000 \times 0{,}066 \cong 736$$

$$B \longrightarrow 2000 \times 0{,}977 - 8000 \times 0{,}023 \cong 1770$$

Portanto, incentivaria as vendas do aparelho do tipo B.

Problema 39.

(a) $X \sim U(1;3)$ então $E(X) = 2$

$Y = 3X + 4$ então $E(Y) = 10$

$$E(Z) = \int_1^3 e^x \times \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \times \left[e^x\right]_1^3 = \frac{1}{2} \times \left(e^3 - e\right)$$

(b) $X \sim f(x) = e^{-x}, x > 0$ então $E(X) = 1$

$$E(Y) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

$$E(Z) = \int_0^\infty \frac{3}{x+1} e^{-x} dx$$

Problema 40.

$X \sim U(-a;3a)$ então $E(X) = a$

$$Var(X) = \frac{(3a+a)^2}{12} = \frac{16a^2}{12} = \frac{4}{3}a^2$$

Problema 41.

(a) $E(T) = \int_0^\infty t \frac{1}{\beta} e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \times \int_0^\infty t e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \beta$, usando integração por parte.

(b) $E(T^2) = \int_0^\infty t^2 \frac{1}{\beta} e^{\frac{-t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \times \int_0^\infty t^2 e^{\frac{-t}{\beta}} dt = 2\beta^2$

Logo,

$$Var(X) = E(T^2) - [E(T)]^2 = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

Problema 43.

(a) $F_y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = F_x\left(\sqrt{y}\right) - F_x\left(-\sqrt{y}\right)$

(b) $f_y(y) = \dfrac{f_x\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} - \dfrac{f_x\left(-\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_x\left(\sqrt{y}\right) - f_x\left(-\sqrt{y}\right)\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, 0< y <1

(c) $E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

(d) $E(Y) = \int_0^1 y \dfrac{1}{2\sqrt{y}} dy = \dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

Problema 44.

$X \sim f(x) = e^{-x}, x > 0$ então $E(X) = 1 = Var(X)$

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{E(X-1)}{1} = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_x^2} = 1$$

Problema 45.

(a) $\alpha = 1 \longrightarrow \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 = 0!$

Vale para $\alpha = n$:

$$\Gamma(\mathrm{n}+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} x^n dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n \times \Gamma(n) = n \times (n-1) = n!$$

(b) O raciocínio em (a) vale para qualquer $n \in \Re_+$.

(c) $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} dx = 1$

$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$; faça $x = \dfrac{u^2}{2} \longrightarrow dx = udu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} udu = \sqrt{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\pi}$$

(d) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha}e^{-x/\beta}dx=\alpha\beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{(\alpha+1)-1}e^{-x/\beta}dx$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{(\alpha+1)-1}e^{-x/\beta}dx=1$ pois é a f.d.p. de $X\sim Gama(\alpha+1,\beta)$.

Logo,

$E(X)=\alpha\beta$.

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx=\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2}{(\alpha+1)\alpha\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha}e^{-x/\beta}dx=$

$=\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2}{1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}x^{(\alpha+2)-1}e^{-x/\beta}dx=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2$

Então,

$Var(X)=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$

Problema 46.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{b}^{\infty}\frac{\alpha}{b}b^{\alpha+1}x^{-\alpha-1}dx=\frac{\alpha}{b^{-\alpha}}\times\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_b^{\infty}=b^{\alpha}\times b^{-\alpha}=1$

(b) $\alpha>1$

$E(X)=\int_{b}^{\infty}\alpha b^{\alpha}x^{-\alpha}dx=\alpha b^{\alpha}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_b^{\infty}=\frac{\alpha b}{\alpha-1}$

$\alpha>2$

$E(X^2)=\int_{b}^{\infty}\alpha b^{\alpha}x^{-\alpha+1}dx=\alpha b^{\alpha}\left.\frac{x^{-\alpha+2}}{2-\alpha}\right|_b^{\infty}=\frac{\alpha b^2}{\alpha-2}$

Então,

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\alpha b^2}{\alpha-2}-\left[\frac{\alpha b}{\alpha-1}\right]^2=\frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Problema 47.

(a) $E(X)=\int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx \quad (1)$

Tomando $\ln x=y\rightarrow x=e^y, dx=e^y dy$

$\frac{y-\mu}{\sigma}=z\longrightarrow y=\mu+\sigma z, dy=\sigma dz$

Voltando a (1):

$E(X)=\int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu+\sigma z}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}\sigma dz=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(z^2-2\sigma z+\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}}dz=$

$$= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(z-\sigma)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{\sqrt{2\pi}} dz}_{1} = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

(b) $E(X^2) = m^2 e^{\sigma^2}$, $m = E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

$$Var(X) = m^2 e^{\sigma^2} - m^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$$

Problema 48.

$$P(X > x) = e^{-x},\ P(X > t + x) = e^{-(t+x)}$$

$$\therefore \frac{P(X > t + x)}{P(X > x)} = \frac{e^{-(t+x)}}{e^{-x}} = e^{-t} = P(X > t)$$

Problema 49.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} -x\frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\times\int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx + \frac{1}{2}\times\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\times(-1) + \frac{1}{2}\times 1 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx = \left[xe^{x}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = -1$$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = \left[xe^{-x}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{x}dx = 1$$

Problema 50.

$X \sim U(0,1)$ $\qquad Y = \frac{1}{2}X^2$

Então:

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\times\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Problema 51.

(a) $\beta = 1 \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ logo f.d.p. de uma exponencial.

(b) $\beta = 2 \longrightarrow f(x) = 2xe^{-2x}, x \geq 0$

$$E(X) = 2\times\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \text{ (integrar por partes!)}$$

Problema 52.

$$f(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)} x(1-x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1$$

$$P(X \le 0{,}2) = 6 \times \int_0^{0{,}2} x(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{0{,}2} = 0{,}104$$

$$E(X) = 6 \times \int_0^1 x^2(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 6 \times \int_0^1 x^3(1-x)dx = 6 \times \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{20}$$

Problema 53.

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx \qquad (1)$$

Tomando:

$$1 + x^2 = y, \quad dy = 2xdx$$

Voltando a (1):

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\pi}[\log y]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

, logo não existe.

Problema 56.

$X \sim N(10;16)$

Então:

$$Q_x = 10 + 4Q_z$$

$$Q_z(0{,}10) = -1{,}28 \longrightarrow \mathrm{Q_x}(0{,}10) = 10 + 4 \times (-1{,}28) = 4{,}88$$

$$Q_z(0{,}25) = -0{,}67 \longrightarrow \mathrm{Q_x}(0{,}25) = 10 + 4 \times (-0{,}67) = 7{,}32$$

$$Q_z(0{,}50) = 0 \longrightarrow \mathrm{Q_x}(0{,}1) = 10 + 4 \times (0) = 10$$

$$Q_z(0{,}75) = 0{,}67 \longrightarrow \mathrm{Q_x}(0{,}75) = 10 + 4 \times (0{,}67) = 12{,}68$$

$$Q_z(0{,}90) = 1{,}28 \longrightarrow \mathrm{Q_x}(0{,}90) = 10 + 4 \times (1{,}28) = 15{,}12$$

Problema 57.

Considerando agora $Y \sim \chi^2(5)$, tem-se:

$$Q(0{,}10) = 1{,}610$$

$$Q(0{,}25) = 2{,}672$$

$$Q(0{,}50) = 4{,}351$$

$$Q(0{,}75) = 6{,}676$$

$$Q(0{,}90) = 9{,}236$$

Problema 58.

(a) $$P\left(\chi^2(4) > 9{,}488\right) = e^{-4{,}724}\sum_{j=0}^{1}\frac{(4{,}724)^j}{j!} = 0{,}0089 \times [1 + 4{,}724] = 0{,}051$$

Da tabela da ditribuição qui-quadrado vem que: $P\left(\chi^2(4) > 9{,}488\right) = 0{,}05$.

(b) $P\left(\chi^2(10) > 16\right) = e^{-8}\sum_{j=0}^{1}\frac{(8)^j}{j!} = 0{,}00034 \times [1 + 8 + 32 + 85{,}3 + 170{,}7] = 0{,}101$

Da tabela da ditribuição qui-quadrado vem que: $P\left(\chi^2(10) > 16\right) = 0{,}10$.

Capítulo 8

Problema 01.

(a) Ω={C1, C2, C3, C4, C5, C6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}
Onde: C=cara e R=coroa

(b)

	y						
x	1	2	3	4	5	6	P(X=x)
0	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
1	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
P(Y=y)	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	1,00

(c) Sim, pois $P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j), \forall i, j$

(d) 1) 0,5 2) 1,0 3) 0,5 4) 0 5) 2/3 6) 1/2

Problema 02.

(a)

x	1	2	3
P(x)	0,3	0,2	0,5

y	0	1	2
P(y)	0,30	0,50	0,20

(b)

E(X) = 2,2 E(Y) = 0,9

E(X^2) =5,6 E(Y^2) =1,3

Var(X) = 0,76 Var(Y) = 0,49

(c) Não, pois $P(X=1, Y=0) = 0{,}1 \neq P(X=1)P(Y=0) = 0{,}09$

(d) $P(X=1/Y=0) = \frac{1}{3} = 0{,}33$ $P(Y=2/X=3) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

(e) $P(X \leq 2) = 0{,}5$ $P(X=2, Y \leq 1) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Problema 03.

(a) Preenchendo os brancos por incógnitas temos:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	y	u	d
0	x	z	t	1/3
1	1/4	w	1/4	e
P(X=x)	a	b	c	1

Da coluna 1, vem $a = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + x = \frac{1}{3} + x$. Da independência entre X e Y temos que

$$a \cdot \frac{1}{3} = x \Rightarrow a = 3x$$

substituindo na expressão acima vem $3x=\frac{1}{3}+x$ ou $x=\frac{1}{6}$ e $a=\frac{1}{2}$

Ainda da independência vem que $a\cdot d=\frac{1}{12}$ ou $d=\frac{1}{6}$

Por diferenças entre marginais e caselas, e da independência encontramos:

$$e=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

$$w=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$b\cdot e=w=0\cdot u \quad \text{e} \quad b\cdot\frac{1}{2}=0 \text{ , logo } b=0$$

imediatamente $z=y=0$

$$c=1-a-b=\frac{1}{2}$$

$$d=c\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

Substituindo temos a resposta:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	0	1/12	1/6
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/4	0	1/4	1/2
P(X=x)	1/2	0	1/2	1

(b) $E(X)=(-1)(\tfrac{1}{2})+(0)(0)+(1)(\tfrac{1}{2})=0$

$E(Y)=(-1)(\tfrac{1}{6})+(0)(\tfrac{1}{3})+(1)(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{3}$

$E(X^2)=(-1)^2(\tfrac{1}{2})+(0)^2(0)+(1)^2(\tfrac{1}{2})=1$

$E(Y^2)=(-1)^2(\tfrac{1}{6})+(0)^2(\tfrac{1}{3})+(1)^2(\tfrac{1}{2})=\tfrac{2}{3}$

$Var(X)=E(X^2)-E(X)=1-0=1$

$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

(c) Como $P(X=x/Y=0)=\dfrac{P(X=x,Y=0)}{P(Y=0)}$ vem:

X	-1	0	1	Total
P(X=x/Y=0)	1/2	0	1/2	1

E semelhante:

x	-1	0	1	Total
P(Y=y/X=1)	1/6	1/3	1/2	1

Problema 04.

De $P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$ vem

x+y	1	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

xy	0	1	2	3	4	6
p	0,3	0,2	0	0,3	0,1	0,1

$$E(X+Y) = (1)(0{,}1) + (2)(0{,}3) + \ldots + (5)(0{,}1) = 3{,}1$$

$$E[(X+Y)^2] = (1)^2(0{,}1) + (2)^2(0{,}3) + \ldots + (5)^2(0{,}1) = 0{,}1 + 1{,}2 + 0{,}9 + 6{,}4 + 2{,}5 = 11{,}1$$

Portanto: $Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) = 11{,}1 - (3{,}1)^2 = 1{,}49$

De modo análogo:

$$E[(XY)^2] = (0)^2(0{,}3) + (1)^2(0{,}2) + \ldots + (6)^2(0{,}1) = 0 + 0{,}2 + 0{+}2{,}7{+}1{,}6{+}3{,}6{=}8{,}1$$

$$E(XY) = 0 + 0{,}2 = 0 + 0{,}9 + 0{,}4 + 0{,}6 = 2{,}1$$

$$Var(XY) = E[(XY)^2] - E^2(XY) = 8{,}1 - (2{,}1)^2 = 3{,}69$$

Problema 05.

(a) Do teorema 8.1 e 8.2 vem

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1 + \tfrac{5}{9} = \tfrac{14}{9}$$

(b) Do teorema acima e propriedades da Esperança e Variância da pág. 208

$$E(Z) = E(aX + bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = a \cdot (0) + b \cdot \tfrac{1}{3} = 10 \Rightarrow b = 30$$

$$Var(Z) = Var(aX) + Var(bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) = a^2 \cdot (1) + b^2 \cdot (\frac{5}{9}) = 600$$

$$a^2 + (30)^2 + (\frac{5}{9}) = 600 \Rightarrow a^2 = 600 - 500 \therefore a = \pm 10$$

Problema 06.

Construindo o espaço amostral temos:

Ω={11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44}

(a) Como cada resultado é equiprovável, obtém-se

	x				
y	1	2	3	4	P(Y=y)
1	1/16	1/8	1/8	1/8	7/16
2	0	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	0	1/16	1/8	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X=x)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

(b)

z	2	3	4	5	6	7	8	Total
p(z)	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16	1

(c)

$$E(X) = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{15}{16} + \frac{28}{16} = \frac{50}{16} = 3{,}125$$

$$E(X^2) = \frac{1}{16} + \frac{12}{16} + \frac{45}{16} + \frac{112}{16} = \frac{170}{16} = 10{,}625$$

$$Var(X) = 10{,}625 - (2{,}125)^2 = 0{,}8594$$

$$E(Y) = \frac{7}{16} + \frac{10}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{30}{16} = 1{,}875$$

$$E(Y^2) = \frac{7}{16} + \frac{20}{16} + \frac{27}{16} + \frac{16}{16} = \frac{70}{16} = 4{,}375$$

$$Var(Y) = 4{,}375 - (1{,}875)^2 = 0{,}8594$$

$$E(Z) = \frac{25}{8} + \frac{15}{8} = 5$$

$$E(Z^2) = \frac{4 \cdot 1}{16} + \frac{9 \cdot 2}{16} + \frac{16 \cdot 3}{16} + \frac{25 \cdot 4}{16} + \frac{36 \cdot 3}{16} + \frac{49 \cdot 2}{16} + \frac{64 \cdot 1}{16} = \frac{440}{16} = \frac{55}{2}$$

$$Var(Z) = \frac{55}{2} + 25 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Problema 07.

(a)

	x_1				
x_2	1	3	5	7	
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(b) Ver acima.São independentes, pois os produtos das marginais são iguais as caselas.

(c) $E(X_1) = E(X_2) = 4{,}2$

$Var(X_1) + Var(X_2) = 4{,}16$

$$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1}{2}) + E(\frac{X_2}{2}) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_2)] = 4{,}2$$

Devido a independência $Var(\overline{X}) = \frac{1}{4}[Var(X_1) + Var(X_2)] = \frac{4{,}16}{2} = 2{,}08$

(d) (a') O novo espaço amostral seria:

Ω={13, 15, 1$\underline{5}$, 17, 31, 35, 3$\underline{5}$, 37, 51, 53, 5$\underline{5}$, 57, $\underline{5}$1, $\underline{5}$3, $\underline{5}$5, $\underline{5}$7, 71, 73, 75, 7$\underline{5}$}

Logo, é possível construir a tabela abaixo:

	x1				
x2	1	3	5	7	
1	0	1/20	1/10	1/20	1/5
3	1/20	0	1/10	1/20	1/5
5	1/10	1/10	1/10	1/10	2/5
7	1/20	1/20	1/10	0	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(b') Não seriam independentes.

(c') $E(X_1) = E(X_2) = (1)(\frac{1}{5}) + (3)(\frac{1}{5}) + (5)(\frac{2}{50}) + (7)(\frac{1}{5}) = 4{,}2$

$$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2}{2}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 4{,}2) = 4{,}2$$

Exatamente o mesmo resultado obtido em (c). Como $X_1 e X_2$ não são independentes, da distribuição conjunta encontramos:

$\bar{x}$	2	3	4	5	6
P($\bar{x}$)	1/10	1/5	3/10	1/5	1/5

Daqui calculamos $E(\bar{X}^2) = 19{,}2 \Rightarrow Var(\bar{X}) = 19{,}2 - (4{,}2)^2 = 1{,}56$

Problema 08.

n (Ω)= $\frac{5!}{3!2!}$ =10

w	ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
P	-1,0	-1,0	0,1	-1,0	0,1	0,1	0,0	1,1	1,1	1,1

(a)

	x			
y	-1	0	1	
0	0,3	0,1	0,0	0,4
1	0,0	0,3	0,3	0,6
	0,3	0,4	0,3	1,0

(b) $E(X) = 0{,}0$

$E(X^2) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6 \Rightarrow Var(X) = 0{,}6$

(c) X e Y não são independentes, logo:

x+y	-1	0	1	2	total
P	0,3	0,1	0,3	0,3	1

$E(X+Y) = -0{,}3 + 0{,}3 + 2 \cdot 03 = 0{,}6$

$E[(X+Y)^2] = 0{,}3 + 0{,}3 + 1 \cdot 2 = 1{,}8$

$Var(X+Y) = 1{,}8 + 0{,}36 = 1{,}44$

Problema 09.

(a)

x+y	2	3	4	5	6
p	5/27	5/27	8/27	7/27	2/27

$$E(X+Y) = \frac{1}{27}[10+15+32+35+12] = \frac{104}{27} = 3{,}85$$

$$E[(X+Y)^2] = \frac{1}{27}[20+45+128+175+72] = \frac{534}{27} = 19{,}78$$

$$Var(X+Y) = \frac{534}{27} + (\frac{104}{27})^2 = \frac{14418-10816}{729} = \frac{3602}{729} = 4{,}94$$

(b)

xy	1	2	3	4	6	9
p	5/27	5/27	5/27	1/9	2/27	2/27

$$E(XY) = \frac{1}{27}[5+10+15+12+42+18] = \frac{102}{27} = 3{,}78$$

$$E[(XY)^2] = \frac{1}{27}[5+20+45+48+252+162] = \frac{532}{27} = 19{,}7$$

$$Var(XY) = 19,7 - (3,78)^2 = 5,43$$

Problema 10.

(a)

x+y	2	3	4	5	6
p	0,1	0,2	0,3	0,4	0

$$E(X+Y) = 0,2 + 0,6 + 1,2 + 2,0 = 4,0$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(b)

xy	1	2	3	4	6	9
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0

$$E(XY) = 0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,8 + 2,4 = 4,0$$

(c) $E(XY) = 4 \qquad E(X) = 2 \qquad E(Y) = 2$

$$p(3,3) = 0,0 \neq 0,3 \cdot 0,2$$

Problema 11.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2,1 - (2,2)(0,9) = 0,12$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X)\cdot DP(Y)} \frac{0,12}{\sqrt{0,76 \cdot 0,49}} = 1,1967 \cong 0,20$$

Problema 12.

	x				
y	0	1	2	3	
1	1/8	0	0	1/8	1/4
2	0	1/4	1/4	0	1/2
3	0	1/8	1/8	0	1/4
	1/8	3/8	3/8	1/8	

$E(X) = 1,5 \qquad Var(X) = \frac{3}{4}$

$E(Y) = 2 \qquad Var(Y) = \frac{1}{2}$

(a) $P(X+Y=1) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8}$

$$P(X+Y=2) = P(X=0,Y=2)P(X=1,Y=1) = 0 + 0 = 0$$
$$P(X+Y=3) = P(X=0,Y=3)P(X=1,Y=2)P(X=2,Y=1) = 0 + \frac{2}{8} + 0 = \frac{2}{8}$$

E assim por diante obtem-se:

x+y	1	3	4	5
p	1/8	1/4	1/2	1/8

|x-y|	0	1	2
p	2/8	1/2	2/8

(b)

xy	0	2	3	4	6
p	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

$$E(XY)=(0)(\frac{1}{8})+(2)(\frac{2}{8})+(3)(\frac{2}{8})+(4)(\frac{2}{8})+(6)(\frac{1}{8})=3$$

x/y	0	1/3	1/2	2/3	1	3
p	1/8	1/8	1/4	1/8	1/4	1/8

$$E(X/Y)=(0)(\frac{1}{8})+(\frac{1}{3})(\frac{2}{8})+(\frac{1}{2})(\frac{2}{8})+(\frac{2}{3})(\frac{1}{8})+(1)(\frac{2}{8})+(3)(\frac{1}{8})=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1{,}5+2{,}0=3{,}5$$

(c) Não são independentes, pois $P(X=0,Y=1)=\frac{1}{8}\neq P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{32}$

(d) $E(XY)=3$ é igual a $E(X)E(Y)=(1{,}5)(2)=3$. Conclui-se que podem existir casos de variáveis não independentes onde a propriedade é válida.

(e) $E(X/Y)=0{,}75$ que por meio acaso, é igual a $E(X)/E(Y)={}^{1{,}5}\!/_{2}=0{,}75$

(f) Da alternativa (a) temos:

$$E[(X+Y)^2]=(1)^2(\frac{1}{8})+(3)^2(\frac{2}{8})+(4)^2(\frac{4}{8})+(5)^2(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}+\frac{18}{8}+\frac{64}{8}+\frac{25}{8}=\frac{108}{8}=13{,}5$$

$Var(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E^2(X+Y)=13{,}5-(3{,}5)^2=1{,}25$ que também, por meio acaso, vale $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1{,}25$

Problema 13.

Primeiro X e Y, não são independentes pois

$$P(X=-1,Y=-1)=0\neq P(X=-1)P(Y=-1)=(0+\frac{1}{4}+0)(0+\frac{1}{4}+0)=\frac{1}{16}$$

$$E(X)=E(Y)=(-1)(0)+(0)(1)+(1)(0)=0$$

$$Logo, Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0=0$$

o que responde ao exercício.Variáveis com esta característica são ditas não correlacionadas.

Problema 14.

(a)

	x						
y	1	2	3	4	5	6	
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	1/18	0	0	0	0	1/12
3	1/36	1/36	1/12	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	1/9	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	1/4
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6	11/36
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

(b) Não são, pois $P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(y=1)$

(c) $E(X)=\dfrac{7}{2}$ $\quad E(X^2)=\dfrac{1}{6}[1+4+9+16+25+36]=\dfrac{1}{6}[91]=\dfrac{91}{6}$

$$Var(X)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}=2{,}92$$

$$E(Y)=\frac{161}{36}=4{,}47$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{36}[1+12+45+112+225+396]=\frac{1}{36}[791]=\frac{791}{6}$$

$$Var(Y)=\frac{791}{36}-(\frac{161}{36})^2=\frac{28476-5921}{1296}=\frac{2555}{1296}=1{,}97$$

(d)

$$E(XY)=\frac{1}{36}[1+2+3+4+5+6+4+6+8+10+12+9+12+15+18+16+20+24+25+30+36]=$$

$$\frac{1}{36}[21+40+54+60+55+36]=\frac{616}{36}=\frac{154}{9}=17{,}11$$

$$Cov(X,Y)=\frac{616}{36}+\frac{7}{2}\cdot\frac{161}{36}=\frac{105}{72}=\frac{35}{24}=1{,}46$$

(e) $E(X+Y)=\dfrac{7}{2}+\dfrac{161}{36}=\dfrac{287}{36}=7{,}97$

(f)

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{35}{12}+\frac{2555}{1296}+2\frac{35}{24}=\frac{3780+2555+3780}{1296}$$

$$=\frac{10115}{1296}=7{,}80$$

Problema 15.

w:	kkk	kkc	kck	ckk	kcc	ckc	Cck	ccc
x:	2	2	1	1	1	1	0	0
y:	1	0	1	1	0	0	1	0
s:	3	2	2	2	1	1	1	0
p:	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

(a)

	y		
x	0	1	P(X=x)
0	1/8	1/8	1/4
1	1/4	1/4	1/2
2	1/8	1/8	1/4
P(Y=y)	1/2	1/2	1

Sim, são independentes, pois cada casela é igual ao produto das respectivas marginais. Da proposição 8.1 $Cov(X,Y)=0$. Verificando diretamente:

xy	0	1	2
p	5/8	1/4	1/8

$$E(XY) = (0)(\frac{5}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) + (2)(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$E(X) = 1 \qquad E(Y) = 0{,}5$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}5 - (1)(0{,}5) = 0$$

(b) Já calculamos $E(X) = 1$ e $E(Y) = 0{,}5 - (1)(0{,}5) = 0$, acima .

$$E(X^2) = (0)^2(\frac{1}{4}) + (1)^2(\frac{1}{2}) + (2)^2(\frac{1}{4}) = 1{,}5 \Rightarrow Var(X) = 1{,}5 - (1)^2 = 0{,}5$$

$$E(Y^2) = (0)^2(\frac{1}{2}) + (1)^2(\frac{1}{2}) = 0{,}5 \Rightarrow Var(Y) = 0{,}5 - (0{,}5)^2 = 0{,}25$$

s	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(S) = \frac{1}{8}[0 + 3 + 6 + 3] = 1{,}5$$

$$E(S^2) = \frac{1}{8}[(0)^2 + (1)^2 3 + (2)^2 3 + (3)^2 1] = 3$$

$$Var(S) = 3 - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

(c) Sim. Como $S = X + Y$ e Y e X são independentes :
$0{,}75 = Var(S) = Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = 0{,}5 + 0{,}25$

Problema 16.

Vamos substituir a cada operário a mesma probabilidade 1/6. Desse modo temos:

$$E(T) = \frac{1}{6}[9 + 17 + 19 + (2)(20) + 23] = 18$$

$$E(T^2) = \frac{1}{6}[9^2 + 17^2 + 19^2 + (2)(20)^2 + 23^2] = \frac{2060}{6} = 343{,}3$$

$$Var(T) = \frac{2060}{6} - 18^2 = \frac{116}{6} = 19{,}33$$

$$E(P) = \frac{1}{6}[22 + 29 + 32 + 33 + 34 + 42] = \frac{192}{6} = 32$$

$$E(P) = \frac{1}{6}[22^2 + 29^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 42^2] = \frac{6358}{6} = 1059{,}67$$

$$Var(P) = \frac{6358}{6} - 32^2 = \frac{214}{6} = 35{,}67$$

$$E(TP) = \frac{1}{6}[(9)(22) + (17)(34) + (20)(29) + (19)(33) + (20)(42) + (23)(32)] = \frac{3559}{6} = 593{,}17$$

$$Cov(T,P) = \frac{3559}{6} - (18)(32) = \frac{103}{6} = 17{,}17$$

$$\rho(T,P) = \frac{\frac{103}{6}}{\sqrt{\frac{116}{6} - \frac{214}{6}}} = \frac{103}{\sqrt{24824}} = 0{,}65$$

Problema 17.

(a)

xy	-1	0	1
p	1/4	1/2	1/4

$$E(XY) = (-1)(\frac{2}{8}) + (0)(\frac{4}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) = 0$$

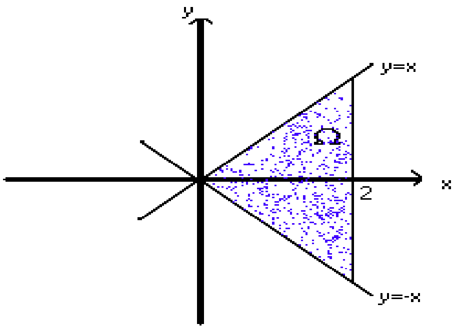
$$E(X) = E(Y) == 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

(b) Por exemplo: $P(X = 0, Y = 0) = 0$, que é diferente de

$$P(X = 0)P(Y = 0) = (\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$$

Problema 18.

(a)



(b) $$\int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{-x}^{x} \frac{1}{8} x(x-y)dydx = -\frac{1}{8}[\int_0^2 (x^2 - xy)dy]dx =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^2 [\int_{-x}^{x} x^2 dy - \int_{-x}^{x} xydy]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 [x^2 \int_{-x}^{x} dy - x\int_{-x}^{x} ydy]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 [x^2 y \Big|_{-x}^{x} - 0]dx = \frac{1}{8}\int_0^2 2x^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{16} = 1$$

(c)

$$f_y(y)=\int_{\varpi_x} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx(I), 0\le y\le 2\\ \int_{-y}^2 x(x-y)dx(II), -2\le y\le 0\\ 0, c.c.\end{cases}$$

$$(I)=\frac{1}{8}\int_y^2(x^2-xy)dx=\frac{1}{8}[\frac{x^3}{3}\Big|_y^2-y\frac{x^2}{2}\Big|_y^2]=\frac{1}{8}[\frac{8-y^3}{3}-(2y-\frac{y^3}{2})]=$$

$$=\frac{1}{48}[16-2y^3-12y+3y^3]=\frac{1}{48}(y^3-12y+16)$$

$$(II)=\frac{1}{8}\int_{-y}^2(x^2+xy)dx=\frac{1}{8}[\frac{x^3}{3}\Big|_{-y}^2-y\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^2=\frac{1}{8}[\frac{8+y^3}{3}-(2y-\frac{y^3}{2})]=$$

$$=\frac{1}{48}[16+2y^2-12y+3y^3]=\frac{1}{48}[5y^3-12y+16]$$

$$f_x(x)=\int_{\varpi_y} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^x \frac{1}{8}x(x-y)dy(III), 0\le x\le 2\\ 0, c.c.\end{cases}$$

$$(III)=\frac{1}{8}\int_{-x}^x(x^2-xy)dy=\frac{1}{8}[x^2\int_{-x}^x dy-x\int_{-x}^x ydy]=\frac{1}{8}[x^2y\Big|_{-x}^x-0]=\frac{x^3}{4}$$

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{4}, 0\le x\le 2\\ 0, c.c.\end{cases}$$

Problema 19.

(a) $f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$

$f_y(y)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$

$f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$

Distribuição exponencial com β=1.

(b)

$$P(0<X<1,1<Y<2)=\int_0^1\int_1^2 e^{-x(x+y)}dxdy=\int_0^1 e^{-x}dx\int_1^2 e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^1)(-e^{-y}\Big|_1^2)=$$

$$=[-e^{-1}+e^{-0}][-e^{-2}+e^{-1}]=(1-\frac{1}{e})(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2})=(\frac{e-1}{e})(\frac{e-1}{e^2})=\frac{(e-1)^2}{e^3}$$

(c) Como os distribuições marginais de X e Y seguem o modelo exponencial com β=1 temos do exercício 7.14 os resultados $E(X)=E(Y)=1$ e $Var(X)=Var(Y)=1$

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^\infty)(-e^{-y}\Big|_0^\infty)=1\cdot 1=1$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\therefore \rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{DP(X)DP(Y)}=\frac{0}{1}=0$$

Problema 20.

(i)

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(y^3-12y+16)},0\le y\le 2\\ \dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(5y^3-12y+16)},-2\le y\le 0\\ 0,c.c.\end{cases}$$

(ii)

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{x^3}{4}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-y)}{x^2},0\le y\le 2\\ 0,c.c.\end{cases}$$

Problema 21.

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x}$$

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}}=e^{-y}$$

As distribuições marginais seguem a distribuição exponencial com β=1. Como

$f(x,y) = f_y \cdot f_{x/y} = f_x \cdot f_{y/x}$. Concluímos que as variáveis são independentes.

Problema 22.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dy = [\frac{1}{64}(xy+\frac{y^2}{2}]\Big|_0^4 = \frac{1}{64}(4x+2)$$

$$f_{y/x} = (y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{1}{64}(x+y)}{\frac{1}{16}(x+2)} = \frac{x+y}{4(x+2)}$$

Devido a simetria da função *f(x,y)* temos:

$$f_y(y) = \frac{1}{16}(y+2)$$

$$f_{x/y} = (x/y) = \frac{x+y}{4(y+2)}$$

Problema 23.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dx = 3e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 3e^{-3y}(-e^{-x}\Big|_0^{\infty}) = 3e^{-y}$ tem distribuição exponencial com β=1/3.

$f_X(x) = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dy = 3e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-3y}dy = 3e^{-x}(-\frac{1}{3}e^{-3y}\Big|_0^{\infty}) = e^{-x}$ tem distribuição exponencial com β=1.

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{e^{-x}} = 3e^{-3y}$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{3e^{-3y}} = e^{-x}$$

Problema 24.

$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(y/x)dy = \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y}dy = 1$. Conforme o exercício 7.41.

De modo análogo $E(X/Y) = 1$.

Problema 25.

$$E(X/Y) = \int_0^4 \frac{x(x+4)}{4(y+2)}dx = (\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}y}{4(y+2)}\Big|_0^4) = \frac{\frac{64}{3}+8y}{4(y+2)} = \frac{16+6y}{y+2} = \frac{6y+16}{y+2}$$

Devido a simetria: $E(Y/X) = \dfrac{6x+16}{x+2}$

Problema 26.

Supõe-se que existe a função conjunta *f(x,y)* e as respectivas marginais e condicionais. Assim, $E(X)=\int x\cdot f_X(x)dx$

$E(X/Y)=\int x\cdot f(x/y)dx=g(y)$ é uma função de y.

$E[E(X/Y)]=E[g(y)]=\int g(y)\cdot f_Y(y)dy=\int(\int x\cdot f_{X/Y}(x/y)dx)f_Y(y)dy=$

$=\int x(\int f_Y(y)\cdot f_{X/Y}(x/y)dy)dx=\int x(\int f(x,y)dy)dx=\int x\cdot f_X(x)dx=E(X)$

Problema 27.

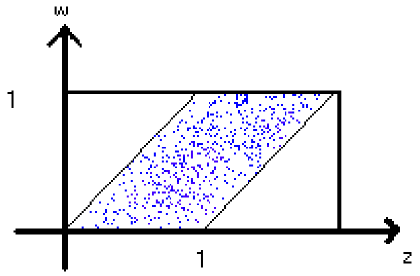
Inicialmente temos que $f(x,y)=(2x)(2y)=4xy$ .Fazendo *Z=X+Y* e *W=Z*, obtemos:

X=W e *Y=Z-W* e $|J|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$,logo $g(z,w)=4(z-w)(-1)=4w^2-4wz.$

Estamos interessados na distribuição marginal de Z, ou seja, $g_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}g(z,w)dw.$

Porém,

$0\le z-w\le 1$, ou seja,



$$g_Z(z)=\int_0^z(4w^2-4wz)dw+\int_z^1(4w^2-4wz)dw=4[\frac{w^3}{3}-\frac{w^2}{2}z]\Big|_0^z+4[\frac{w^3}{3}-\frac{w^2}{2}z]\Big|_z^1=$$

$$=4[\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}]+4[\frac{1}{3}-\frac{z}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^3}{2}]=\frac{4}{3}-2z$$

Problema 28.

Inicialmente temos $f(x,y)=\frac{2}{9}x^2y$

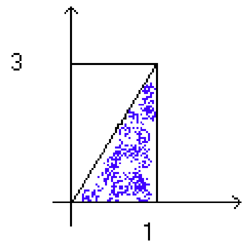
Repetindo o exemplo 8.27, temos *W=XY* e *Z+X:*

X=Z e $Y=\frac{W}{Z}$

$|J|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\frac{w}{z} & \frac{1}{z}\end{vmatrix}=\frac{1}{z}$

$g(z,w)=\frac{2}{9}z^2\cdot\frac{w}{z}\frac{1}{z}=\frac{2}{9}w$

Encontramos agora os intervalos de integração: $0 \leq z \leq 1; 0 \leq \frac{w}{z} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq w \leq 3z$, ou:



$$f_W(w) = \int_0^{3z} \frac{2}{9} w dz = \frac{2}{9} w(k) \Big|_0^{3z} = \frac{2}{9} w$$

Problema 29.

$$f(x, y) = 2e^{-(x+2y)}$$

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$X = ZW \qquad |J| = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$$

$$Y = W \Rightarrow W = Y$$

$$g(z, w) = 2e^{-(zw+2w)} \cdot w = 2we^{-w(z+2)}$$

Façamos a integral indefinida: $g_Z(z) = 2\int we^{-w(z+2)} dw$

Integração por partes (ver Morettin, 1999):

$$u = w \Rightarrow du = 1$$

$$dv = e^{-w(z+2)} \Rightarrow v = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)}$$

$$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} - \int \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)} dw = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} + \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2} = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz + 2w + 1)$$

$$w > 0$$

$$z > 0$$

$$g_Z(z) = 2[\frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz + 2w + 1)] \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{(z+2)^2}$$

Problema 30.

	x			
y	-1	0	1	P(Y)
-2	1/18	1/18	1/18	1/6
0	2/9	2/9	2/9	2/3
2	1/18	1/18	1/18	1/6
P(X)	1/3	1/3	1/3	1

z	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(z)	1/18	1/18	5/18	2/9	5/18	1/18	1/18

$$E(Z) = \frac{-3-2-5+0+5+2+3}{18} = 0$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = E(Z^2) = \frac{9+4+5+0+5+4+9}{18} = 2$$

Problema 31.

(a)

	x			
y	5	10	15	total
5	0,1	0,2	0,1	0,4
10	0,2	0,3	0,1	0,6
total	0,3	0,5	0,2	1

(b) Veja a tabela acima.

(c) Não, pois $P[X=5, Y=5] \neq P[X=5] \cdot P[Y=5]$

(d)

$$E(X) = 1{,}5 + 5{,}0 + 3{,}0 = 9{,}5$$
$$E(X^2) = 7{,}5 + 50 + 45 = 102{,}5$$
$$Var(X) = 12{,}25$$
$$E(Y) = 2{,}0 + 6{,}0 = 8{,}0$$
$$E(Y^2) = 10{,}0 + 60{,}0 = 70{,}0$$
$$Var(X) = 6{,}00$$
$$E(XY) = 2{,}5 + 10{,}0 + 7{,}5 + 10{,}0 + 30{,}0 + 15{,}0 = 75$$
$$Cov(X,Y) = 75{,}0 + 60{,}0 = -1$$

(e) $Z + X + Y$

z	P[z]
10	0,1
15	0,4
20	0,4
25	0,1

$$E(Z) = 1{,}0 + 6{,}0 + 8{,}0 + 2{,}5 = 17{,}5$$
$$E(Z^2) = 10 + 90 + 160 + 62{,}5 = 322{,}5$$
$$Var(Z) = 322{,}5 - 306{,}25 = 16{,}25$$

(f) 50% dos casais.

Problema 32.

x+y:	4	4	2	1	5
x-y:	2	0	2	1	1
x-y-1:	1	-1	1	0	0

x	1	2	3
p	0,2	0,4	0,2

y	0	1	2
p	0,4	0,2	0,4

x+y	1	2	4	5
p	0,2	0,4	0,4	0,2

x-y	0	1	2
p	0,2	0,4	0,4

x-y-1	-1	0	1
p	0,2	0,4	0,4

Problema 33.

Podem ser formadas 10 turmas distintas abaixo:

$3\underline{3}4$ $3\underline{3}5$ $3\underline{35}$ 345 $34\underline{5}$ $\underline{3}45$ $\underline{3}4\underline{5}$ $35\underline{5}$ $\underline{3}5\underline{5}$ $45\underline{5}$

Supondo que sejam sorteados de uma vez, o espaço amostral:

(a)

	y		
x	4	5	Px
3	1/10	4/5	9/10
4	0	1/10	1/10
Py	1/10	9/10	1

(b)

$$E(X) = 3P(X+3) + 4P(X=4) = 3\cdot\frac{9}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} = 3{,}1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = 9\cdot\frac{9}{10} + 16\frac{1}{10} = 9{,}7$$

$$\therefore Var(X) = 9{,}7 + (3{,}1)^2$$

(c)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(Y) = 4\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{9}{10} = 4{,}9$$

$$E(X) = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot 5\cdot\frac{8}{10} + 4\cdot 5\frac{1}{10} = 15{,}2$$

$$\therefore Cov(X,Y) = 15{,}2 + 3{,}1\cdot 4{,}9 = 0{,}01$$

(d)

$$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y)$$

$$E^2(X) = [E(X) + E(Y)]^2 = (3{,}1 + 4{,}9)^2 = 64$$

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2 + Y^2 + 2XY) = E(Y^2) + E(X^2) + 2E(XY)$$

$$E(Y^2) = 16\frac{1}{10} + 25\cdot\frac{9}{10} = 24{,}1$$

$$\therefore Var(X,Y) = 64{,}2 - 64 = 0{,}2$$

Problema 34.

Vamos determinar a probabilidade de Δ, o evento de uma pessoa sorteada obter nota maior que 80, e é Δ=*{X>80}*
Considere H e M os eventos: a pessoa é homem ou mulher, respectivamente. H e M formam uma partição do espaço todo. Desse modo: $A = (\Delta \cap H)(\Delta \cap M)$, portanto:

$$P(\Delta) = P((\Delta \cap H) \cup (\Delta \cap M)) = P(\Delta \cap H) + P(\Delta \cap M) = P(H) \cdot P(\Delta / H) + P(M) \cdot P(\Delta / M)$$

Dos dados obtemos:

$$P(H) = \frac{2}{3}$$

$$P(M) = \frac{1}{3}$$

$$P(\Delta / H) = P(X > 80 / X \sim N(70;10^2)) = P(Z > \frac{80-70}{10}) = P(Z >!) = 15{,}87\%$$

$$P(A / M) = (X > 80 / X \sim N(65;8^2)) = P(Z > \frac{80-65}{8}) = P(Z > 1{,}875) = 3{,}04\%$$

$$P(\Delta) = (\frac{2}{3} \cdot 15{,}87) + (\frac{1}{3} \cdot 3{,}04) = 11{,}59\%$$

Problema 35.

(a) $E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2$

(b) $E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E(X^2) - E(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu = \sigma^2 + \mu(\mu - 1)$

Problema 36.

(a)

$$P(X = 2) = 0{,}30$$

$$P(X = 2 / Y = 1200) = \frac{0{,}05}{0{,}30} = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

(b)

$$E(XY) = 100\{2{,}4 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}05 + 24 \cdot 0{,}05 + 36 \cdot 0{,}1 + 48 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}05 +$$
$$40 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}05 + 50 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}05 + 150 \cdot 0{,}05\} = 4530$$

$$Cov(X,Y) = 4530 - 2120(2{,}5) = -770$$

$$\rho(X,Y) = \frac{-770}{(1)(1505{,}2)} = 0{,}512$$

Problema 37.

(i)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	1/9	1/9	1/9	1/3
1	1/9	1/9	1/9	1/3
2	1/9	1/9	1/9	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

$$E(X) = E(Y) = 1$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$(a) E(XY) = \frac{1}{9}\{0+0+0+0+1+2+0+2+4\} = 1$$

$$(b) Cov(X,Y) = 1 - (1)(1) = 0$$

$$(c) Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(XY) = \frac{4}{3}$$

(ii)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	0	1/6	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

As marginais são as mesmas, assim:

$$E(X) = E(Y) = 1$$

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{3}$$

$$(a) E(X,Y) = \frac{1}{6}\{0+0+0+0+2+0+2\} = \frac{2}{3}$$

$$(b) Cov(X,Y) = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$$

$$(c) Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

Problema 38.

Esta é uma situação particular do ex. 20, onde B=D=0. Assim A=a e C=b.

(*)vale $\forall A, B, C, D$

$\therefore$ *satisfazedo*:

$$\rho_{ZW} = \rho(aX, bY) = \frac{ab}{|ab|} = \rho_{XY}$$

Problema 39.

$$\rho_{ZW} = \frac{Cov(Z,W)}{\sqrt{Var(Z)Var(W)}}$$

$$Cov(Z,W) = E(ZW) - E(Z)E(W) = E[(AX+B)(Y+D)] - E(AX+B)E(Y+D) =$$
$$= E(ACXY + ADX + BCY + BC) - (AE(X)+B)(CE(Y)+0) + =$$
$$= ACE(XY) + ADE(X) + BCE(Y) + BD - ACE(X)E(Y) - ADE(X) - BCE(Y) - BD =$$
$$= AC[E(XY) - E(X)E(Y)] = ACCov(X,Y)$$
$$Var(Z) = Var(AX+B) = A^2Var(X)$$
$$Var(W) = Var(CY+D) = C^2Var(Y)$$
$$\therefore \rho_{ZW} = \frac{ACCov(X,Y)}{\sqrt{A^2C^2Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|}\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|} = \rho_{XY}$$
$$A>0, C>0 \Rightarrow \frac{AC}{|AC|} = \frac{AC}{AC} = 1$$
$$\therefore \rho_{ZW} = \rho_{ZW}$$

Problema 40.

Considerando X e Y o número da 1[a] e 2[a] bola retirada, tem-se a distribuição conjunta da por:

$$P(X=i, Y=j) = \frac{1}{n^2}, \forall i, j$$
$$i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n$$

Logo $Z=|X-Y|$, poderá assumir os valores: 0,1,2,...,n-1Z+0, ocorrerá nas n caselas da diagonal principal , logo $P(Z=0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Z=1, ocorrerá nas duas diagonais imediatamente ao lado da principal, ou seja, em 2(n-1) caselas, logo $P(Z=1) = \frac{2(n-1)}{n^2}$.

Pelo raciocínio análogo, achamos: $P(Z=2) = \frac{2(n-2)}{n^2}$. Até: $P(Z=n-1) = 2$

Logo:

z	0	1	2	...	n-1	total
p( )	$\frac{n}{n^2}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$	$\frac{2(n-2)}{n^2}$		$\frac{2}{n^2}$	1

Problema 41.

$$Var(X-2Y) = Var(X) + Var(2Y) - 2Cov(X,2Y) = Var(X) + 4Var(Y) - 4Cov(X,Y) =$$
$$= Var(X) + 4Var(Y) - 4\rho(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 1 + 4(2) - 4(\frac{1}{2})\sqrt{1\cdot 2} = 9 - 2\sqrt{2} = 6{,}17$$

Problema 42.

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 0 = 0$$

$$E(U) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0 - 0 = 0$$

$$Cov(Z,U) = E(ZU) - E(Z)E(U) = E(ZU) - 0 = E(ZU) = E[(X+Y)(X-Y)] =$$
$$= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = E(X^2) - 0 - E(Y^2) + 0 = [E(X^2) - E^2(X)] -$$
$$-[E(Y^2) - E^2(Y)] = Var(X) - Var(Y) = 1 - 1 = 0$$

Problema 43.

(a) Como X e Y são independentes tem-se: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \iint xyf_X(x)f_y(y)dxdy = \int xf_X(x)dx \int yf_Y(y)dy = E(X)E(Y)$$

(b) Das propriedades do operador E, tem-se:

$$Z = aX + bY, \log o \Rightarrow E(Z) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_1 + b\mu_2$$

$$Var(aX+bY) = Var(aX) + Var(bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) = a^2\sigma_1^{\ 2} + b^2\sigma_2^{\ 2}$$

(c) O resultado é a generalização do resultado, assim:

$$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$$

$$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$$

Problema 44.

Não, pois o produto das marginais não reproduz a função conjunta.

Problema 45.

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(Y)$$

Problema 46.

Já foi visto em 43(c) que:

$$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$$

$$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$$

Logo $E(\overline{X}) = E(\sum \frac{X_i}{n}) = \frac{1}{n}E(\sum X_i) = \frac{\sum \mu_i}{n}$, ou seja, a média é a média dos parâmetros populacionais.

$$Var(\overline{X}) = Var(\frac{\sum X_i}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum \sigma_i^{\ 2}$$

Problema 47.

Substituindo os valores nas fórmulas do exercício 8.46, tem-se:

$$E(\overline{X}) = \frac{\sum \mu_i}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sum \sigma_i^2}{n^2} = \frac{\sum \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Capítulo 9

Problema 01

$18 \mod 5 = 3$, porque $18 = 3 \times 5 + 3$

$360 \mod 100 = 60$, porque $360 = 3 \times 100 + 60$

Problema 03

$a = 5, \ m = 100$

$$n_0 = 13 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

$$n_1 = (5 \times 13) \mod 100 = 65 \mod 100 = 65 \longrightarrow u_1 = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

$$n_2 = (5 \times 65) \mod 100 = 325 \mod 100 = 25 \longrightarrow u_2 = 0{,}25$$

$$n_3 = (5 \times 25) \mod 100 = 125 \mod 100 = 25 \longrightarrow u_3 = 0{,}25$$

i	0	1	2	3	...	9
u_i	0,13	0,65	0,25	0,25	...	0,25

Portanto, o período nesse caso é $h = 3$.

Problema 04

$a = 13, \ m = 100$

$$n_0 = 19 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

$$n_1 = (13 \times 19) \mod 100 = 247 \mod 100 = 47 \longrightarrow u_1 = \frac{47}{100} = 0{,}47$$

$$n_2 = (13 \times 47) \mod 100 = 611 \mod 100 = 11 \longrightarrow u_2 = 0{,}11$$

$$n_3 = (13 \times 11) \mod 100 = 143 \mod 100 = 43 \longrightarrow u_3 = 0{,}43$$

$$n_4 = (13 \times 43) \mod 100 = 559 \mod 100 = 59 \longrightarrow u_4 = 0{,}59$$

$$n_5 = (13 \times 59) \mod 100 = 767 \mod 100 = 67 \longrightarrow u_5 = 0{,}67$$

$$n_6 = (13 \times 67) \mod 100 = 871 \mod 100 = 71 \longrightarrow u_6 = 0{,}71$$

$$n_7 = (13 \times 71) \mod 100 = 923 \mod 100 = 23 \longrightarrow u_7 = 0{,}23$$

$$n_8 = (13 \times 23) \mod 100 = 299 \mod 100 = 99 \longrightarrow u_8 = 0{,}99$$

$$n_9 = (13 \times 99) \mod 100 = 1287 \mod 100 = 87 \longrightarrow u_9 = 0{,}87$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_i	0,19	0,47	0,11	0,43	0,59	0,67	0,71	0,23	0,99	0,87

Portanto, o período nesse caso é $h = 20$.

Problema 06

Da 6ª coluna da tabela VII obtem-se:

u_i : 0,11; 0,82; 0,43; 0,56; 0,60.

Da distribuição da variável X, vem:

$$p_1 = 0{,}1$$
$$p_1 + p_2 = 0{,}3$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}7$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}9$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1{,}0$$

Então:

$$u_1 = 0{,}11 \to p_1 \le 0{,}11 \le p_1 + p_2 \longrightarrow x_1 = 1$$

$$u_2 = 0{,}82 \to p_1 + p_2 + p_3 \le 0{,}82 \le p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \longrightarrow x_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}43 \to p_1 + p_2 \le 0{,}43 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_3 = 2$$

$$u_4 = 0{,}56 \to p_1 + p_2 \le 0{,}56 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_4 = 2$$

$$u_5 = 0{,}60 \to p_1 + p_2 \le 0{,}60 \le p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow x_5 = 2$$

Assim, os números gerados são: $(1, 3, 2, 2, 2)$.

Problema 07

Vejamos a distribuição da variável aleatória T:

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Da 11ª coluna da tabela VII, obtem-se:
u_i : 0,57; 0,19; 0,38; 0,33; 0,31;0,54;0,38;0,79;0,54;0,55.
Então:

$$u_1 = 0{,}57 \longrightarrow x_1 = 5$$

$$u_2 = 0{,}19 \longrightarrow x_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}38 \longrightarrow x_3 = 4$$

$$u_4 = 0{,}33 \longrightarrow x_4 = 4$$

$$u_5 = 0{,}31 \longrightarrow x_5 = 4$$

$u_6 = 0{,}54 \longrightarrow x_6 = 5$

$u_7 = 0{,}38 \longrightarrow x_7 = 4$

$u_8 = 0{,}79 \longrightarrow x_8 = 6$

$u_9 = 0{,}54 \longrightarrow x_9 = 5$

$u_{10} = 0{,}55 \longrightarrow x_{10} = 5$

Assim, os números gerados são: $(5, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 6, 5, 5)$.

Problema 08

Vamos obter a função de distribuição acumulada da v.a. X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -1 \\ \int_{-1}^{x} 3t^2 dt = x^3 + 1, \ -1 \le x < 0 \\ 1, \ x \ge 0 \end{cases}$$

$F(x) = u \longrightarrow x^3 + 1 = u$

Geramos $u \sim U(0,1)$ e $x = \sqrt[3]{u-1}$, note que $x \in (-1,0)$.

Se $u = 0{,}5 \longrightarrow x = \sqrt[3]{0{,}5 - 1} = \sqrt[3]{-0{,}5} = (-0{,}5)^{1/3} = (-0{,}5)^{0{,}333} = -0{,}793$

Problema 09

$X \sim Bernoulli(0{,}35)$

$p = 0{,}35 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}65$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}65 \\ 1, \text{ se } u \ge 0{,}65 \end{cases}$$

Se u_i : 0,419;0,285;0,111;0,330;0,036;0,415;0,188;0,061;0,127;0,791.

Então os valores gerados são: 0,1,0,0,0,0,0,0,0,1.

Problema 10

$Y \sim b(10;0{,}2)$

Considerando 10 experimentos de Bernolli; em cada $X \sim Bernoulli(0{,}2)$

$p = 0{,}20 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}80$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}80 \\ 1, \text{ se } u \ge 0{,}80 \end{cases}$$

E_1:

$u_i \longrightarrow 0{,}11;0{,}82;0{,}00;0{,}43;0{,}56;0{,}60;0{,}72;0{,}42;0{,}08;0{,}53.$

$X_i \longrightarrow 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ .$

$$Y=\sum_{i=1}^{10} X_i = 1$$

E_2: seguir a mesma idéia apenas gerando outros u_i´s.

Problema 11

$t=-\beta\log(u)$; $\beta=1/2$

Então, para gerar um valor da distribuição exponencial com $\beta=1/2$,basta adotar:

$$t=-\frac{1}{2}\log(u_i)$$

Considerando os valores de u_i encontrados no Problema 9, tem-se:

$t_i \longrightarrow 0{,}435;0{,}061;1{,}099;0{,}554;1{,}662;0{,}440;0{,}836;1{,}398;1{,}032;0{,}117.$

Problema 12

(a) $u = F(x) \longrightarrow x = F^{-1}(u)$.

$F(x)=x^2, 0\le x<1 \longrightarrow u=x^2\ \therefore x=\sqrt{u}$

Considerando os valores de u_i do Problema 10, tem-se:

$x_1=\sqrt{0{,}11}=0{,}332$; $x_2=0{,}906$; $x_3=0$; $x_4=0{,}656$; $x_5=0{,}748$

$x_6=0{,}775$; $x_7=0{,}849$; $x_8=0{,}648$; $x_9=0{,}283$; $x_{10}=0{,}728$.

(b) $X \sim N(10;4)$

$\Phi(z)=u \longrightarrow z \longrightarrow x=10+2\times z$

Supondo u_i : 0,94 ; 0,31 ; 0,97 ; 0,30 ; 0,38 ; 0,44 ; 0,10 ; 0,47 ; 0,73 ; 0,23.

Então:

$u_1=0{,}94 \longrightarrow z_1=1{,}56 \longrightarrow x_1=13{,}12$

$u_2=0{,}31 \longrightarrow z_2=-0{,}50 \longrightarrow x_2=9{,}00$

$u_3=0{,}97 \longrightarrow z_3=1{,}89 \longrightarrow x_3=13{,}78$

$u_4=0{,}30 \longrightarrow z_4=-0{,}52 \longrightarrow x_4=8{,}96$

$u_5=0{,}38 \longrightarrow z_5=-0{,}31 \longrightarrow x_5=9{,}38$

$u_6 = 0,44 \longrightarrow z_6 = -0,15 \longrightarrow x_6 = 9,70$

$u_7 = 0,10 \longrightarrow z_7 = -1,28 \longrightarrow x_7 = 7,44$

$u_8 = 0,47 \longrightarrow z_8 = -0,08 \longrightarrow x_8 = 9,84$

$u_9 = 0,73 \longrightarrow z_9 = 0,61 \longrightarrow x_9 = 11,22$

$u_{10} = 0,73 \longrightarrow z_{10} = -0,74 \longrightarrow x_{10} = 8,52$

(c) $X \sim t(24)$

$\Phi(t) = u$

Considerando os valores de u_i do item b, tem-se:

$u_1 = 0,94 \longrightarrow t_1 = 1,711$

$u_2 = 0,31 \longrightarrow t_2 = 0,531$

e assim por diante.

Problema 14

10 valores de $\chi^2(3) = W$

$W = \chi^2(3) = Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2} + Z_3^{\ 2}$ com $Z_i \sim N(0;1)$

Usando u_i e z_i do Problema 12 item b, tem-se:

$W_1 = (1,56)^2 + (-0,50)^2 + (1,89)^2 = 6,256$

$W_2 = (1,56)^2 + (-0,52)^2 + (-0,31)^2 = 2,780$

$W_3 = (1,56)^2 + (-0,15)^2 + (-1,28)^2 = 4,095$

$W_4 = (1,56)^2 + (-0,08)^2 + (0,61)^2 = 2,812$

$W_5 = (-0,50)^2 + (-0,52)^2 + (-0,31)^2 = 0,617$

$W_6 = (-0,50)^2 + (-0,15)^2 + (-1,28)^2 = 1,911$

$W_7 = (-0,50)^2 + (-0,08)^2 + (0,61)^2 = 0,629$

$W_8 = (1,89)^2 + (-0,52)^2 + (0,31)^2 = 3,939$

$W_9 = (1,89)^2 + (-0,15)^2 + (-1,28)^2 = 5,233$

$W_{10} = (1,89)^2 + (-0,08)^2 + (-0,74)^2 = 4,126$

Problema 17

Método de Box-Müller:

$$X = \sqrt{-2\log U_1} \times \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2\log U_1} \times \text{sen}(2\pi U_2)$$

Supondo $u_1 = 0{,}6$ e $u_2 = 0{,}09$, tem-se:

$$u_1 = 0{,}6 \longrightarrow -2\log(0{,}6) = 0{,}4437 \ , \ \sqrt{-2\log(0{,}6)} = 0{,}666$$

$$u_2 = 0{,}09 \longrightarrow \cos(2\pi(0{,}09)) = \cos(0{,}5655) = 0{,}844, \quad \text{sen}(0{,}5655) = 0{,}536$$

Então:

$$z_1 = 0{,}666 \times 0{,}844 = 0{,}562$$

$$z_2 = 0{,}666 \times 0{,}536 = 0{,}357$$

Basta repetir os mesmos passos para gerar os outros valores.

Problema 18

Considerando $m = 3$:

$$n_0 = 123 \longrightarrow n_0^{\ 2} = 1\underbrace{512}9 \longrightarrow u_0 = \frac{512}{1000} = 0{,}512$$

$$n_1 = 512 \longrightarrow n_1^{\ 2} = 02\underbrace{621}44 \longrightarrow u_1 = \frac{621}{1000} = 0{,}621$$

$$n_2 = 621 \longrightarrow n_2^{\ 2} = 03\underbrace{856}41 \longrightarrow u_2 = \frac{856}{1000} = 0{,}856$$

e assim por diante.

Problema 19

$X \sim b(5;0{,}3)$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}6$

2) $r = \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}43$, $j = 0$, $pr = (0{,}7)^5 = 0{,}17$, $F = 0{,}17$

3) $u_1 = 0{,}6 > F$

4) $pr = \dfrac{(0{,}43) \times 5}{1} \times 0{,}17 = 0{,}37$, $F = 0{,}17 + 0{,}37 = 0{,}54$, $j = 1$

5) $u_1 = 0{,}6 < 0{,}54 \longrightarrow X_1 = 1 \qquad \therefore 1^o$ valor gerado é $X_1 = 1$

Repita o algoritmo para u_2, u_3, u_4, u_5.

Problema 21

$X \sim P(\lambda),\ \lambda = 2$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}09$

2) $\mathrm{j} = 0,\ \mathrm{p} = e^{-\lambda} = e^{-2} = 0{,}135 \ \mathrm{e}\ \mathrm{F} = 0{,}135$

3) $u_1 = 0{,}09 < 0{,}135,$ então $\mathrm{X}_1 = 0$

4)Caso $u_1 > F$ então: $\mathrm{p} = \dfrac{\lambda}{\mathrm{j}+1} p,\ F = F + p \ \ e\ \ j = j + 1$

5) *Volte* a 3)

Problema 26

$X \sim Gama\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$, isto é, $r = 3$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Considere os três primeiros valores gerados de $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ do Problema 11:

$t_1 = 0{,}435,\ \ t_2 = 0{,}061,\ t_3 = 1{,}099$

Então, o 1º valor gerado de X é: $x_1 = 0{,}435 + 0{,}061 + 1{,}099 = 1{,}595$

Gere mais 3 valores de uma $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e encontre mais um valor.

Proceda da mesma maneira para gerar os próximos valores.

Problema 29

(a) X : resultado de uma partida

Então $X = \begin{cases} 0, \text{se o time não venceu.} \\ 1, \text{se o time venceu.} \end{cases}$

com $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = 0{,}60$ e $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 0{,}40$

Logo, $X \sim Bernoulli(0{,}60)$

$u \sim U(0{,}1);\ \ \mathrm{X} = \begin{cases} 0, \text{se u} < 0{,}40 \\ 1, \text{se u} \geq 0{,}40 \end{cases}$

Considerando os $u_{i's}$ do Problema 10:

$\mathrm{u_i} \longrightarrow 0{,}11; 0{,}82; 0{,}00; 0{,}43; 0{,}56; 0{,}60; 0{,}72; 0{,}42; 0{,}08; 0{,}53.$

$X_{\mathrm{i}} \longrightarrow 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ .$

Então em 10 partidas tem-se: 7 vitórias e 3 outros resultados (empate ou derrota).

(b) Considerando:

$$X = \begin{cases} 0, \text{se o time perdeu.} \\ 1, \text{se o time empatou.} \\ 2, \text{se o time ganhou.} \end{cases}$$

com $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=0{,}20$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=0{,}30$ e $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=0{,}50$

Da distribuição da variável X, vem:

$$p_1 = 0{,}2$$
$$p_1 + p_2 = 0{,}5$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1{,}0$$

Considerando os $u_{i's}$ gerados no Problema 10,vem:

$$u_1 = 0{,}11 \rightarrow 0 \le 0{,}11 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 0$$

$$u_2 = 0{,}82 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}82 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 2$$

$$u_3 = 0{,}00 \rightarrow 0 \le 0{,}00 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 0$$

$$u_4 = 0{,}43 \rightarrow \mathrm{p}_1 \le 0{,}43 \le \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 1$$

$$u_5 = 0{,}56 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}56 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 2$$

$$u_6 = 0{,}60 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}60 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_6 = 2$$

$$u_7 = 0{,}72 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}72 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_7 = 2$$

$$u_8 = 0{,}42 \rightarrow \mathrm{p}_1 \le 0{,}42 \le \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_8 = 1$$

$$u_9 = 0{,}08 \rightarrow 0 \le 0{,}08 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_9 = 0$$

$$u_{10} = 0{,}53 \rightarrow \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 \le 0{,}53 \le \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 \longrightarrow \mathrm{x}_{10} = 2$$

Então em 10 partidas o time terá 5 vitórias, 2 empates e 3 derrotas.

(c) Repetir a mesma idéia do item anterior 12 vezes, gerando outros $u_{i's}$ e calcular o número de pontos obtidos.

(d) Pode-se estudar o número de pontos perdidos, número de vitórias, etc. Para simular basta seguir a mesma idéia dos itens anteriores.

Problema 34

(a) Considerando $\mu = 1{,}70$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,67
1,57
1,72
1,83
1,82
1,87
1,48
1,68
1,81
1,59

Calculando a média e desvio padrão encontram-se os seguinte valores: 1,70 e 0,13, respectivamente.

(b) Considerando os mesmos parâmetros do item anterior:

Valores gerados
1,76
1,55
1,78
1,78
1,81
1,88
1,59
1,73
1,77
1,69

Calculando a média e desvio padrão encontram-se, respectivamente, os seguinte valores: 1,73 e 0,10.Olhando as amostras elas não parecem estar vindo de populações diferentes, pois os valores simulados são bem próximos (visto que estão sendo gerado de um mesmo valor de μ e σ).

(c) Considerando $\mu = 1{,}55$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,62
1,48
1,53
1,48
1,66
1,55
1,76
1,51
1,41
1,40

Comparando estes valores com os obtidos no item a nos mostra evidências de que as duas amostras vêm de populações distintas. Visto que os valores obtidos para a população feminina é menor quando comparados para os obtidos para a população masculina.

(d) Se as médias das duas populações forem bem diferentes e estas não apresentarem desvio – padrão alto, poderá se diferenciar bem as amostras geradas.

Capítulo 10

Problema 01.

(a) A opinião dos operários pode estar relacionada com seus horários de chegada.

(b) Parece razoável, já que as alturas devem se distribuir homogeneamente segundo os horários de chegada.

(c) Pode ser que municípios com investimentos menores não retornem os questionários, acarretando um viés na estimativa da porcentagem média da receita investida em lazer.

(d) Não haveria problemas se os supermercados fossem homogêneos quanto à venda de sabão em pó. Porém, pode ser que as regiões tenham potenciais de venda diferentes, independentemente do brinde.

Problema 03.

(a) Por exemplo: colocar em uma urna 100 fichas, sendo 10 com o número zero, 20 com número 1, 30 com o número 2, 25 com o número 3 e 15 com o número 4. Sortear uma ficha da urna.

(b)

	x_1					
x_2	0	1	2	3	4	$P(X_2 = x_2)$
0	0,010	0,020	0,030	0,025	0,015	0,10
1	0,020	0,040	0,060	0,050	0,030	0,20
2	0,030	0,060	0,090	0,075	0,045	0,30
3	0,025	0,050	0,075	0,063	0,038	0,25
4	0,015	0,030	0,045	0,038	0,023	0,15
$P(X_1 = x_1)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15	1

(c) $P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)P(X_3 = 3)P(X_4 = 1) = 0,00375$

Problema 04.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

x_1	x_2	$P(X_1= x_1,X_2= x_2)$	$\hat{\sigma}^2$
1	1	1/25	0
1	3	1/25	1
1	5	2/25	4
1	7	1/25	9
3	1	1/25	1
3	3	1/25	0
3	5	2/25	1
3	7	1/25	4

X_1	X_2	$P(X_1= x_1,X_2= x_2)$	$\hat{\sigma}^2$
5	1	2/25	4
5	3	2/25	1
5	5	4/25	0
5	7	2/25	1
7	1	1/25	9
7	3	1/25	4
7	5	2/25	1
7	7	1/25	0

Distribuição amostral de $\hat{\sigma}^2$

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	10/25	6/25	2/25

Problema 05.

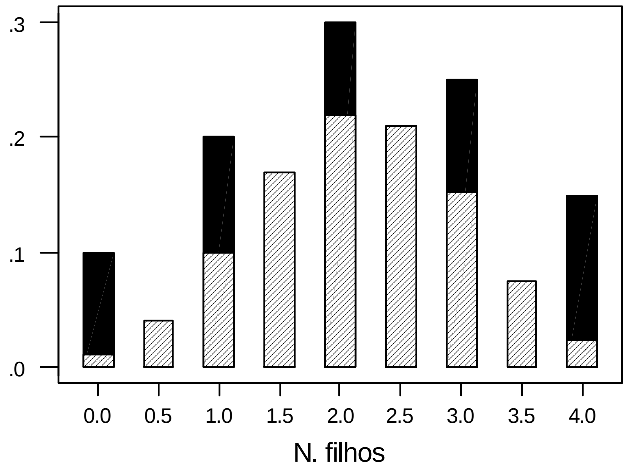
(a) $E(X) = 2{,}15$; $Var(X) = 1{,}428$.

(b) $E(X_i) = 2{,}15$, i=1,2; $Var(X_i) = 1{,}428$, i=1,2.

(c)

$\bar{x}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,0100	0,0400	0,1000	0,1700	0,2200	0,2100	0,1525	0,0750	0,0225

(d) $E(\bar{X}) = 2{,}15$; $Var(\bar{X}) = 0{,}7138$.



(e)

(f)

s^2	0,0	0,5	2,0	4,5	8,0
$P(S^2 = s^2)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

v	0,00	0,25	1,00	2,25	4,00
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

(g) $E(S^2) = 1{,}428$; $Var(S^2) = 3{,}206$.

$E(\hat{\sigma}^2) = 0{,}714$; $Var(\hat{\sigma}^2) = 0{,}802$.

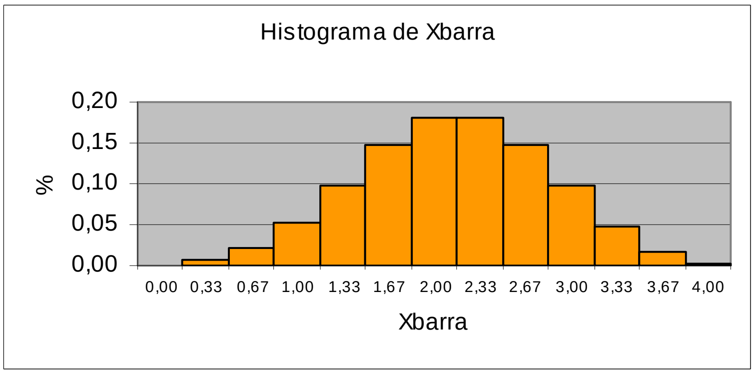
Se desejarmos um estimador não-viciado, devemos utilizar S^2. Se desejarmos o estimador com a menor variância, devemos utilizar $\hat{\sigma}^2$.

(h) $P(|\overline{X} - \mu| > 1) = P(\overline{X} < 1{,}15) + P(\overline{X} > 3{,}15) = P(\overline{X} = 0 \text{ ou } 0{,}5 \text{ ou } 1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 3{,}5 \text{ ou } 4) =$
$= 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}1 + {,}075 + 0{,}0225 = 24{,}75\%$

Problema 06.

(a)

$\overline{x}$	0,00	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
$P(\overline{X} = \overline{x})$	0,001	0,006	0,021	0,052	0,098	0,147	0,181	0,182	0,149	0,097	0,048	0,017	0,003



(b) $E(\bar{X}) = 2{,}15$; $Var(\bar{X}) = 0{,}4758$.

(c)
$$P(|\bar{X} - \mu| > 1) = P(\bar{X} < 1{,}15) + P(\bar{X} > 3{,}15) =$$
$$= P(\bar{X} = 0{,}00 \text{ ou } 0{,}33 \text{ ou } 0{,}67 \text{ ou } 1{,}00) + \mathrm{P}(\bar{\mathrm{X}} = 3{,}33 \text{ ou } 3{,}67 \text{ ou } 4{,}00) =$$
$$= 0{,}001 + 0{,}006 + 0{,}021 + 0{,}052 + 0{,}048 + 0{,}017 + 0{,}003 = 14{,}81\%$$

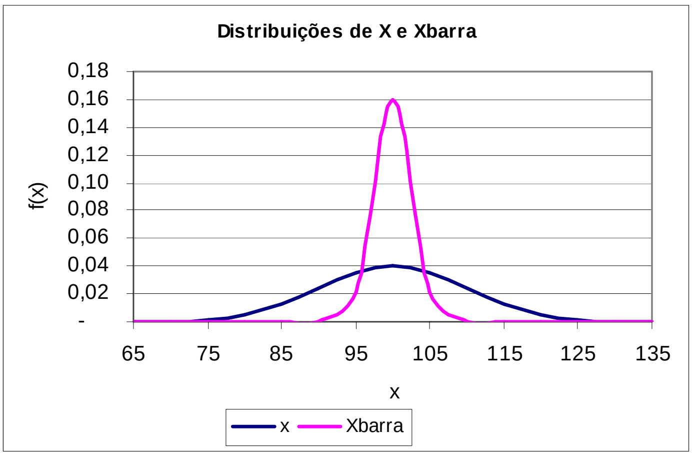
(d) Menor, pois a variância de $\bar{X}$ seria menor, fazendo com que sua distribuição fosse mais concentrada em torno de μ .

Problema 07.

(a) $P(90 < X < 110) = 68{,}27\%$

(b) $\bar{X} \sim N\left(100; \dfrac{100}{16}\right) \Rightarrow P(90 < \bar{X} < 110) = 99{,}99\%$

(c)



(d) $P(90 < \overline{X} < 110) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(\frac{(90-100)\sqrt{n}}{10} < Z < \frac{(110-100)\sqrt{n}}{10}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$

$P(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = 0{,}95 \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}96 \Rightarrow n \cong 4$

Problema 08.

(a) $P(X < 500) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{500-\mu}{10} = 1{,}28 \Rightarrow \mu = 512{,}82$.

$\overline{X} \sim N\left(512{,}82; \frac{100}{4}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000\right) = P(\overline{X} < 500) = 0{,}519\%$.

Problema 09.

(a) Se a máquina estiver regulada: $\overline{X} \sim N\left(512{,}82; \frac{100}{4}\right)$

$P(\text{parada desnecessária}) = P(\overline{X} < 495 \text{ ou } \overline{X} > 520 \mid \text{máquina está regulada}) = 7{,}56\%$

(b) Se o peso médio desregulou-se para 500g: $\overline{X} \sim N\left(500; \frac{100}{4}\right)$

$P(\text{continuar fora dos padrões}) = P(495 \le \overline{X} \le 520 \mid \text{máquina desregulou-se}) = 84{,}13\%$

Problema 10.

(a) $\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i > 500\right) = P\left(\overline{X} > \frac{500}{7}\right) = 35{,}27\%$.

(b) $\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{6}\right)$; $P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 500\right) = P\left(\overline{X} > \frac{500}{6}\right) = 0{,}055\%$.

Problema 11.

(a)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1678	0,3355	0,2936	0,1468	0,0459	0,0092	0,0011	0,0001	0,0000

(b)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p}=k/8)$	0,1337	0,2993	0,3221	0,1666	0,0414	0,0049	0,0003	0,0000	0,0000

Obs.: $P(\hat{p}=k/8)=P(S=k)\cong P(k-0{,}5<X<k+0{,}5)$, onde $S\sim Binomial(8;0{,}2)$ e $X\sim N(1{,}6;1{,}28)$.

(c) Razoável, pois n é pequeno,

(d) Para p tendendo a 1/2.

Problema 12.

$S=20\times\hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra

Probabilidade exata

Se a produção estiver sob controle: $S\sim binomial(20;0{,}1)$

$$P(\text{parada desnecessária}) = \text{P}(\hat{\text{p}}>0{,}15\,|\,\text{produção sob controle}) =$$

$$= \text{P}(\text{S}>3\,|\,\text{produção sob controle}) = 1-\sum_{k=0}^{3}\binom{20}{k}0{,}1^k\,0{,}9^{20-k} = 13{,}30\%$$

Aproximação pela distribuição normal

Se a produção estiver sob controle: $\hat{p}\sim N\left(0{,}1;\dfrac{0{,}1\times 0{,}9}{20}\right)$, aproximadamente

$$P(\text{parada desnecessária}) = \text{P}(\hat{\text{p}}>0{,}15\,|\,\text{produção sob controle}) \cong 22{,}80\%$$

Problema 13.

$S=100\times\hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra; $S\sim binomial(100;0{,}1)$

(a) *Probabilidade exata*

$$P(\hat{p}>0{,}1)=P(S>10)=1-\sum_{k=0}^{10}\binom{100}{k}0{,}1^k\,0{,}9^{100-k} = 41{,}7\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$\hat{p}\sim N\left(0{,}1;\dfrac{0{,}1\times 0{,}9}{100}\right)$, aproximadamente; $P(\hat{p}>0{,}1)\cong 50{,}0\%$.

(b) $P(\hat{p}=0)=P(S=0)=\dbinom{100}{0}0{,}1^0\,0{,}9^{100-0}=0{,}9^{100}=0{,}0027\%$

Problema 14.

(a)

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	2/5	6/25	2/25

$$E(\hat{\sigma}^2) = 2{,}08 \qquad Var(\hat{\sigma}^2) = 6{,}39$$

$$E(S^2) = 4{,}16 \qquad Var(S^2) = 25{,}57$$

$E(S^2) = \sigma^2 = 4{,}16$, ou seja, S^2 é um estimador não-viciado da variância populacional.

(b)

U	0,00	2,00	3,00	3,67	4,00	4,33	5,00	6,00
$P(U = u)$	11/125	6/125	6/25	6/125	24/125	12/125	18/125	18/125

Obs.: Assumindo que U=0 nos casos em que os 3 elementos da amostra forem iguais.

(c)

$\bar{x}$	1,0	1,7	2,3	3,0	3,7	4,3	5,0	5,7	6,3	7,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/125	3/125	9/125	16/125	24/125	27/125	23/125	3/25	6/125	1/125

$$E(\bar{X}) = 4{,}20; \qquad Var(\bar{X}) = 1{,}39.$$

$$E(U) = 3{,}76; \qquad Var(U) = 2{,}52.$$

U é viciado e tem variância maior que $\bar{X}$.

Problema 15.

(a) $E(X) = 12$; $Var(X) = 10{,}8$; $Md(X) = 12$.

(b)

$\bar{x}$	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

md	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
P(Md = md)	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(c) $E(\bar{X}) = E(Md) = 12 = Md(X)$.

(d) Qualquer um, pois as duas distribuições amostrais são iguais.

(e)

Z	-2,58	-1,94	-1,29	-0,65	0,00	0,65	1,29	1,94	2,58
$P(Z=z)$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(f) $E(Z)=0$; $Var(Z)=1$.

(g)

s^2	0,0	4,5	18,0	40,5	72,0
$P(S^2=s^2)$	0,26	0,4	0,24	0,08	0,02

(h) $E(S^2)=10{,}8$; $Var(S^2)=204$

(i)

t_0	-3,0	-1,0	-0,3	0,0	0,3	1,0	3,0
$P(t=t_0)$	0,04	0,24	0,04	0,1	0,04	0,24	0,04

Problema: t não pode ser calculado quando *S=0*. Assim, $\sum_i p(t=t_{0i})=0{,}74$, e não 1.

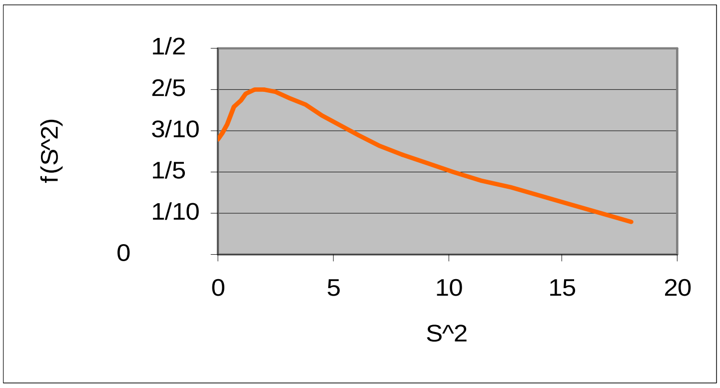
(j) $E(t)=0$; $Var(t)=1{,}21$

(k) $P(|t|<2)=0{,}66$

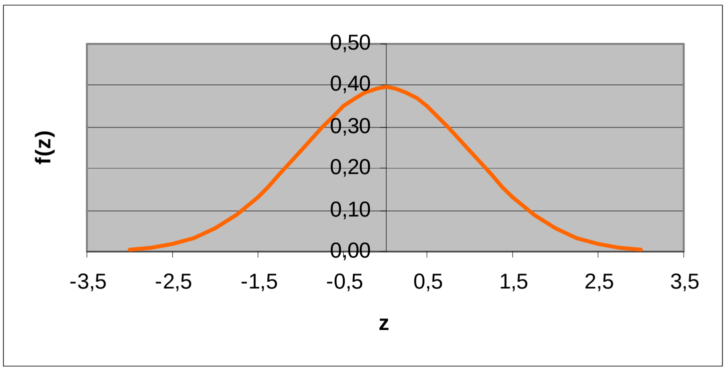
$P(|t|<4{,}30)=0{,}74$

Problema 16.

(a)



(b)



(c) Para amostras grandes, a distribuição de t aproxima-se da distribuição de Z, obtida em (b).

Problema 17.

$$n = \frac{z_\gamma^2}{4\varepsilon^2} = \frac{1{,}645^2}{4(0{,}02)^2} \cong 1691.$$

Problema 18.

A função $f(p) = p(1-p)$ é decrescente no intervalo [0,5;1]. Logo, para $p \geq 0{,}80$, $p(1-p) \leq 0{,}80 \times 0{,}20 = 0{,}16$. Assim,

$$n = \frac{z_\gamma^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}645^2 \times 0{,}16}{(0{,}02)^2} \cong 1082.$$

Problema 19.

$$n = \frac{z_\gamma^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} \text{ e } \mathrm{n}_0 = \frac{z_\gamma^2}{4\varepsilon^2} \Rightarrow n = 4n_0 p(1-p) = f(p).$$

$f(p)$ assume valor máximo quando p = 1/2. Logo: $n \leq f(1/2) = 4n_0 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n_0$.

Problema 20.

Seja $n = \frac{z_\gamma^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = f(p)$.

A função $f(p)$ é crescente para p no intervalo [0;0,5] e decrescente para p no intervalo [0,5;1]. Logo,

$$p \leq p_0 < 0{,}5 \Rightarrow f(p) \leq f(p_0) < f(0{,}5) \Rightarrow n \leq n_1 < n_0.$$

$p \geq p_0 > 0{,}5 \Rightarrow f(p) \leq f(p_0) < f(0{,}5) \Rightarrow n \leq n_1 < n_0$.

Problema 21.

(a) $\bar{X}_{16} \sim N(10;1) \Rightarrow P(\text{ganhar o prêmio}) = P(\bar{X}_{16} > 12) = 2{,}275\%$

(b)

Tamanhos de amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prob. de ganhar o prêmio	30,9%	24,0%	19,3%	15,9%	13,2%	11,0%	9,3%	7,9%	6,7%	5,7%

(c) $n = 1$

Problema 22.

$$DP(\bar{X}_1) = \frac{\sigma}{6} \text{ e } DP(\bar{X}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\,;\, DP(\bar{X}_2) = \frac{2}{3} DP(\bar{X}_1) \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sigma}{6} = \frac{\sigma}{9} \Rightarrow n_2 = 81$$

Problema 23.

(a) $E(e) = E(\bar{X}) - \mu = 0\,;\; Var(e) = Var(\bar{X}) = \dfrac{400}{n}$.

(b) $e_{25} \sim N(0;16) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 61{,}71\%$.

(c) $e_{100} \sim N(0;4) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 31{,}73\%$.

(d) $d = 5{,}15$.

(e) $n = \dfrac{z_\gamma^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{1{,}96^2 \times 400}{1^2} = 1537$.

Problema 24.

(a) $\bar{X}_{30} \sim N(2;0{,}01/30) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = \mathrm{P}(\bar{X}_{30} < 58/30) + \mathrm{P}(\bar{X}_{30} > 61/30) = 3{,}41\%$

(b) $\bar{X}_{29} \sim N(2;0{,}01/29) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = \mathrm{P}(\bar{X}_{29} < 58/29) + \mathrm{P}(\bar{X}_{29} > 61/29) = 50{,}00\%$

Problema 25.

(a) $\bar{X}_{1600} \sim N\left(5;\dfrac{0,2^2}{1600}\right) \Rightarrow P(\text{comprar} + \text{que 1 seção adicional}) = \mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{X}}_{1600} < \dfrac{7995}{1600}\right) = 26,60\%$

(b) $\bar{X}_{1599} \sim N\left(5;\dfrac{0,2^2}{1599}\right) \Rightarrow P\left(\dfrac{8000}{1599} < \bar{\mathrm{X}}_{1599} < \dfrac{8005}{1599}\right) = 16,03\%$

Problema 26.

S: nota do teste. Se o estudante estiver adivinhando as respostas: $S \sim binomial(20;0,5)$.

$$P(S \geq 13 \mid \text{estudante está adivinhando}) = \sum_{k=13}^{20} \binom{20}{k} 0,5^k 0,5^{20-k} = 13,16\%$$

Problema 27.

S: quantidade de sementes que germinam em um pacote; $S \sim binomial(200;0,95)$

Probabilidade exata

$$\mathrm{P}(\hat{\mathrm{p}} < 90\%) = \mathrm{P}(\mathrm{S} < 180) = 1 - \sum_{\mathrm{k}=180}^{200} \binom{200}{k} 0,95^k 0,05^{200-k} = 0,116\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$\hat{p} \sim N(0,95;(0,95 \times 0,05)/200)$, aproximadamente

$P(\hat{p} < 0,90) \cong 0,059\%$

Problema 28.

(a) $\bar{X} \sim N(\mu;6,25/4)$

$P(\bar{X} < 46,3 \text{ ou } \bar{\mathrm{X}} > 53,7 \mid \mu = 50) = 0,308\%$

$P(46,3 \leq \bar{\mathrm{X}} \leq 53,7 \mid \mu = 53,7) = 50\%$

Problema 29.

Em elaboração

Problema 32.

(a) Pelo Teorema do Limite Central, para n e m grandes: $\overline{X} \sim N(\mu_1; \frac{\sigma_1^2}{n})$ e

$\overline{Y} \sim N(\mu_2; \frac{\sigma_2^2}{m})$. Essas distribuições serão exatas se X e Y tiverem distribuição normal.

(b) É a distribuição das diferenças entre as médias de todos os possíveis pares de amostras de X e Y com tamanhos n e m, respectivamente.

(c) $E(D) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$; $Var(D) = Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$.

(d) Normal, com média e variância dadas em *(c)*, pois *D* é uma diferença entre variáveis com distribuição (aproximadamente) normal.

Problema 33.

(a) $\overline{X} \sim N(5{,}4;1{,}69/16)$; $\overline{Y} \sim N(5{,}4;2{,}25/16)$; $D \sim N(0;3{,}94/16)$

$P(|D| > 0{,}5) = P(D < -0{,}5) + P(D > 0{,}5) = 31{,}37\%$

(b) $P(|D| > d) = 0{,}05 \Rightarrow P(D < -d) = 0{,}025 \Rightarrow d = 0{,}973$

(c) $P(|D| > 0{,}4) = 0{,}05 \Rightarrow P(-0{,}4 \le D \le 0{,}4) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{0{,}4\sqrt{n}}{\sqrt{3{,}94}} = 1{,}96 \Rightarrow n = 95$

Problema 34.

$\overline{X} \sim N(70;100/36)$; $\overline{Y} \sim N(65;225/49)$; $D = \overline{X} - \overline{Y} \sim N(5;100/36 + 225/49)$

$P(D > 6) = 35{,}6\%$

Problema 35.

$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1; \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right)$; $\hat{p}_2 \sim N\left(p_2; \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$. **Logo:**

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$.

Problema 36.

$\overline{x}$	2	3	4	5	6
$P(\overline{X}=\overline{x})$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

$$E(X)=\mu=4{,}2\,;\ Var(X)=\sigma^2=4{,}16$$

$$E(\overline{X})=4{,}2=\mu\,;\ Var(\overline{X})=1{,}56=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}=\frac{4{,}16}{2}\times\frac{5-2}{5-1}$$

Problema 39.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},\ x\in[0;\theta]\\ 0,\ \text{caso contrário}\end{cases}\ ;\ F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \dfrac{x}{\theta},\ x\in[0;\theta]\\ 1,\ x>\theta\end{cases}$$

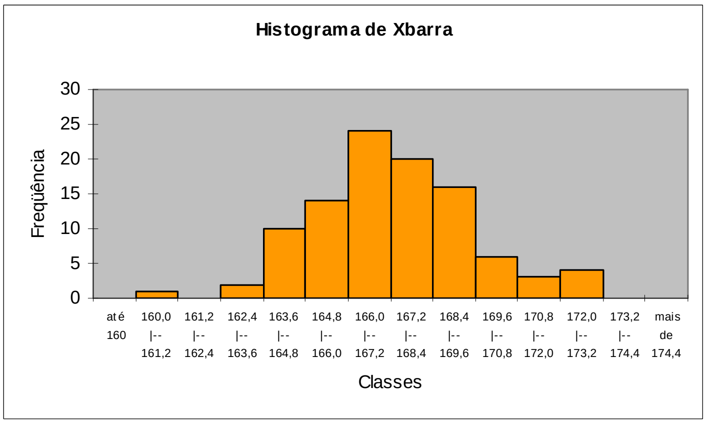
$$f_M(m)=n[F(m)]^{n-1}f(m)=n\left(\frac{m}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=\frac{nm^{n-1}}{\theta^n},\quad m\in[0;\theta]$$

Problema 40.

Obs.: Os resultados abaixo referem-se a uma particular amostra obtida no Excel.

(a) Média

Classe	Freqüência
até 160	0
160,0 |-- 161,2	1
161,2 |-- 162,4	0
162,4 |-- 163,6	2
163,6 |-- 164,8	10
164,8 |-- 166,0	14
166,0 |-- 167,2	24
167,2 |-- 168,4	20
168,4 |-- 169,6	16
169,6 |-- 170,8	6
170,8 |-- 172,0	3
172,0 |-- 173,2	4
173,2 |-- 174,4	0
mais de 174,4	0

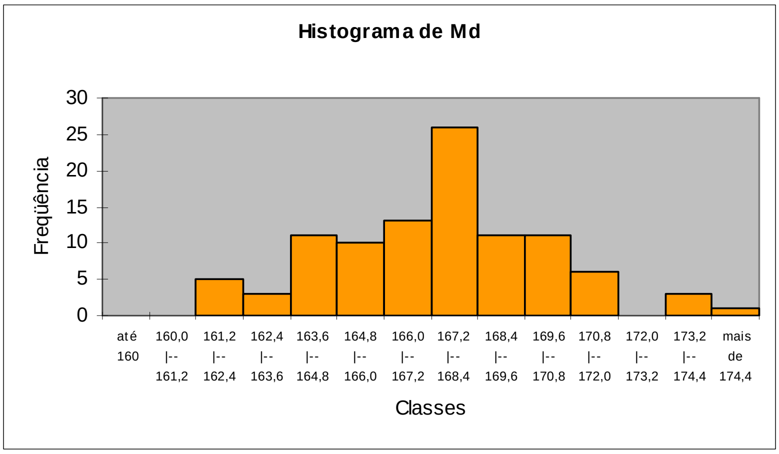


Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,0	165,7	167,0	168,5	173,1	167,2	5,3

(b) Mediana

Classe	Freqüência
até 160	0
160,0 |-- 161,2	0
161,2 |-- 162,4	5
162,4 |-- 163,6	3
163,6 |-- 164,8	11
164,8 |-- 166,0	10
166,0 |-- 167,2	13
167,2 |-- 168,4	26
168,4 |-- 169,6	11
169,6 |-- 170,8	11
170,8 |-- 172,0	6
172,0 |-- 173,2	0
173,2 |-- 174,4	3
mais de 174,4	1



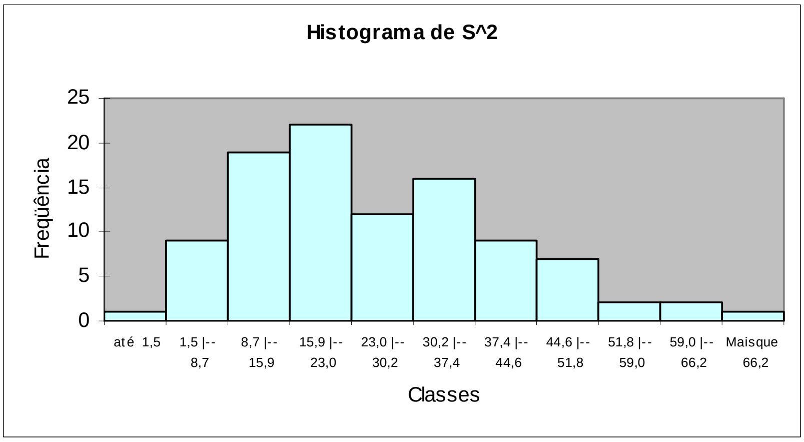
Medidas resumo

Mínimo	1^o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,5	165,8	167,5	169,4	174,8	167,5	7,8

(c) A distribuição amostral da mediana apresenta uma variabilidade maior em torno da média (igual à mediana) populacional.

(d) Variância, com n-1 no denominador.

Classe	Freqüência
até 1,5	1
1,5 |-- 8,7	9
8,7 |-- 15,9	19
15,9 |-- 23,0	22
23,0 |-- 30,2	12
30,2 |-- 37,4	16



37,4 |-- 44,6	9
44,6 |-- 51,8	7
51,8 |-- 59,0	2
59,0 |-- 66,2	2
Mais que 66,2	1

Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
1,48	12,86	21,92	34,57	73,38	25,65	226,60

Problema 41.

j	x_j	$\overline{X}_j$	S_j^2
1	3	3,00	0,00
2	5	4,00	2,00
3	2	3,33	2,33
4	6	4,00	3,33
5	4	4,00	2,50

Problema 42.

$$E(\hat{T}) = NE(\overline{X}) = N\mu = N\frac{T}{N} = T \; ; \; Var(\hat{T}) = N^2 Var(\overline{X}) = N^2 \frac{\sigma^2}{n} .$$

Problema 43.

Idêntico, substituindo-se S^2 no passo [3] por $S^2 = \overline{x}_n(1-\overline{x}_n)$.

Capítulo 11

Problema 01

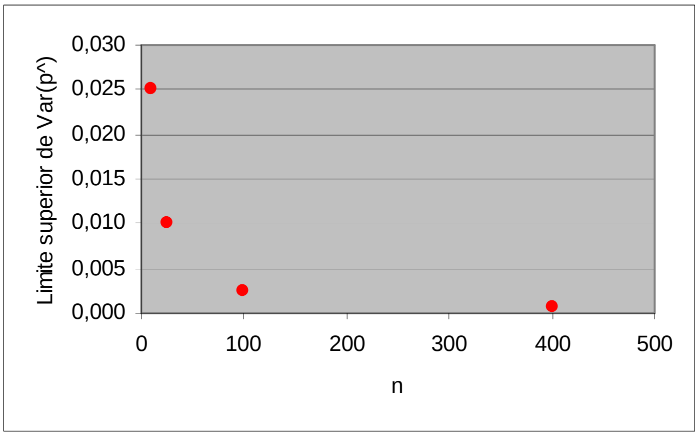
Nº de sucessos	0	1	2	3	4	5
$\hat{p}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$P(\hat{p})$	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

$$E(\hat{p}) = 0{,}2 = p\ ;\ \ Var(\hat{p}) = 0{,}032 = \frac{p(1-p)}{5}.$$

Problema 02

$$Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

n	10	25	100	400
Limite superior de $Var(\hat{p})$	0,025	0,01	0,0025	0,000625



Problema 03

(a) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X \sim Binomial(n; p)\ ;\ E(X) = np\ ;\ Var(X) = np(1-p)$

$$E(\hat{p}_1) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p\,;$$

$$Var(\hat{p}_1) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}\,.$$

(b) X_1 = resultado da 1ª prova

$X_1 \sim Bernoulli(p)$; $E(X_1) = p$; $Var(X_1) = p(1-p)$

$E(\hat{p}_2) = E(X_1) = p$;

$Var(\hat{p}_2) = Var(X_1) = p(1-p)$.

O estimador $\hat{p}_2$ não é bom porque só assume os valores 0 ou 1, dependendo do resultado da 1ª prova. Além disso, $Var(\hat{p}_2) = nVar(\hat{p}_1)$, ou seja, sua variância é maior que a variância de $\hat{p}_1$, para todo n maior que 1.

Problema 04

$$\lim_{n\to\infty}(E(\hat{p}_1)) = p \text{ e } \lim_{n\to\infty} Var(\hat{p}_1) = \lim_{n\to\infty}\frac{p(1-p)}{n} = 0\,.$$

Logo, $\hat{p}_1$ é um estimador consistente de *p*.

$$\lim_{n\to\infty}(E(\hat{p}_2)) = p \text{ e } \lim_{n\to\infty} Var(\hat{p}_2) = \lim_{n\to\infty} p(1-p) = p(1-p) \neq 0\text{, para } p \neq 0 \text{ e } p \neq 1\,.$$

Logo, $\hat{p}_2$ não é um estimador consistente de *p*.

Problema 05

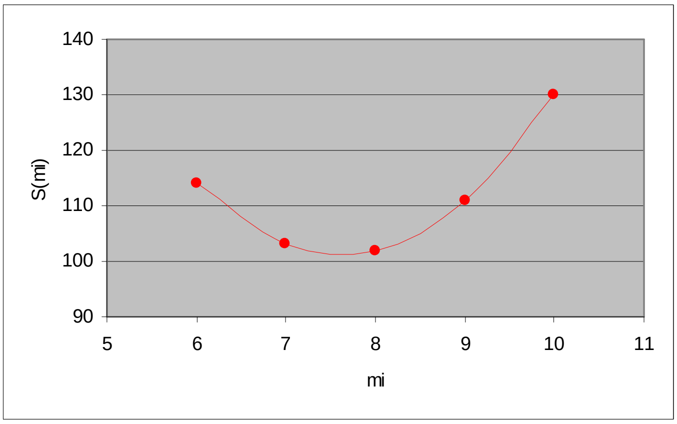
Propriedades dos estimadores	Estimador t_1	Estimador t_2
Viés	2	0
Variância	5	10
EQM	9	10

O estimador t_1 é viesado, enquanto que t_2 é não-viesado. A mediana e a moda de t_1 e t_2 são iguais ou muito próximas de $\theta = 100$. Além disso, $EQM(t_1) = 9$, enquanto que $EQM(t_2) = 10$. A única medida realmente discrepante é a variância: $Var(t_2) = 2Var(t_1)$. Como o viés de t_1 é pequeno e sua variância a metade da variância de t_2, pode-se considerar que t_1 é um estimador melhor que t_2.

Problema 06

(a)

t	y_t	$(y_t-6)^2$	$(y_t-7)^2$	$(y_t-8)^2$	$(y_t-9)^2$	$(y_t-10)^2$
1	3	9	16	25	36	49
2	5	1	4	9	16	25
3	6	0	1	4	9	16
4	8	4	1	0	1	4
5	16	100	81	64	49	36
	$S(\mu)$	114	103	102	111	130



$S(\mu)$ parece ser mínimo para μ aproximadamente igual a 7,5.

(b)

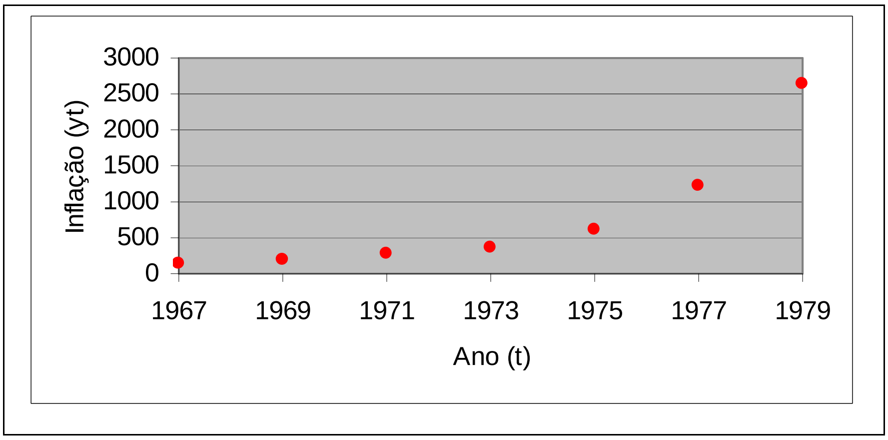
$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = -2\sum_t (y_t - \mu) = -2\sum_t y_t + 2n\mu$$

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu}_{MQ} = \frac{\sum_t y_t}{n} = \bar{y}$$

Logo, $\hat{\mu}_{MQ} = \bar{y} = 7{,}6$. Esse valor é próximo àquele visualizado no gráfico do item (a).

Problema 07

(a)



(b) $S(\alpha,\beta)=\sum_t (y_t-\alpha-\beta t)^2$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\alpha}=-2\sum_t (y_t-\alpha-\beta t)=-2\sum_t y_t+2n\alpha+2\beta\sum_t t=-2n\bar{y}+2n\alpha+2n\beta\bar{t}$$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\beta}=-2\sum_t t(y_t-\alpha-\beta t)=-2\sum_t ty_t+2\alpha\sum_t t+2\beta\sum_t t^2$$

Igualando a zero, temos:

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\alpha}=0\Leftrightarrow \alpha=\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{t}$$

$$\frac{dS(\alpha,\beta)}{d\beta}=0\Leftrightarrow (\bar{y}-\beta\bar{t})n\bar{t}+\beta\sum_t t^2=\sum_t ty_t\Leftrightarrow \beta=\hat{\beta}=\frac{\sum_t ty_t-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2-n\bar{t}^2}.$$

Logo, os estimadores de mínimos quadrados de α e β são dados, respectivamente, por

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{t} \text{ e } \hat{\beta}=\frac{\sum_t ty_t-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2-n\bar{t}^2}.$$

Na amostra observada, obtemos as seguintes estimativas:

$$\hat{\alpha}=350026{,}73 \text{ e } \hat{\beta}=177{,}80.$$

(c) A inflação prevista pelo modelo ajustado é

$$\hat{y}(1981)=350026{,}73+177{,}80\times 1981=2202{,}143.$$

(d) Sim, pois a inflação cresceu exponencialmente (e não linearmente) no período observado.

Problema 08

Com cálculos análogos aos feitos no Exercício 7, substituindo t por x_t, obtemos que

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \text{ e } \hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2}.$$

Problema 09

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2} = \frac{2586{,}43 - 10 \times 3{,}73 \times 68{,}66}{169{,}25 - 10 \times 3{,}73^2} = 0{,}844;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 68{,}66 - 0{,}844 \times 3{,}73 = 65{,}513.$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

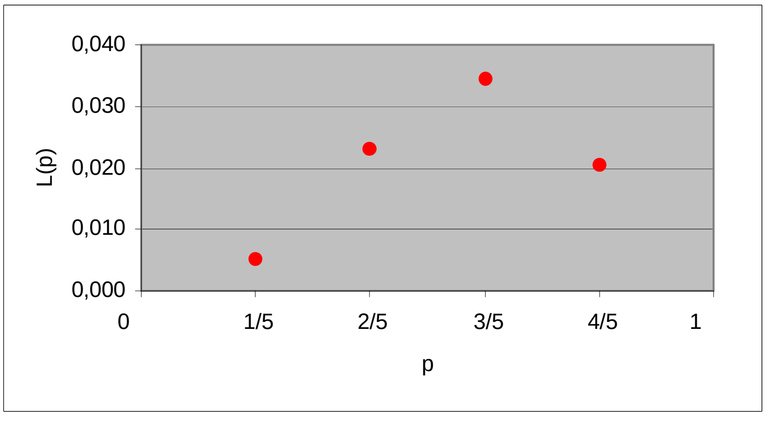
$$\hat{y}_t = 65{,}513 + 0{,}844 x_t.$$

Problema 10

$$L(p) = p^x (1-p)^{n-x} = p^3 (1-p)^2$$

Função de verossimilhança da distribuição Binomial(5;p)

p	1/5	2/5	3/5	4/5
L(p)	0,005	0,023	0,035	0,020



Problema 11

(a) $P(X = x) = P(\text{x - 1 fracassos e 1 sucesso}) = P(FFF...FS) = p(1-p)^{x-1}.$

(b) Função de verossimilhança

$$L(p \mid \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1 \mid p) \cdots P(X_n = x_n \mid p) = p(1-p)^{x_1 - 1} \cdots p(1-p)^{x_n - 1} = p^n (1-p)^{\sum x_i - n};$$

Função log-verossimilhança

$$l(p \mid \mathbf{x}) = \log(L(p \mid \mathbf{x})) = n \log p + \left(\sum x_i - n\right) \log(1-p);$$

Maximizando em relação a p:

$$l'(p \mid \mathbf{x}) = \frac{n}{p} - \frac{\sum x_i - n}{1-p} = 0 \Leftrightarrow n(1-p) - \left(\sum x_i - n\right)p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum x_i}.$$

Logo, o EMV para p é dado por

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum x_i}.$$

(c) $\hat{p} = \frac{5}{11} = 0{,}455.$

Sim, poderíamos estimar *p* = P(coroa) lançando a moeda *n* vezes e contando o número de coroas (*m*). Nesse caso, $\hat{p} = m/n$.

Problema 12

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2} \right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2} \right\} \right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2} \right\};$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu \mid \mathbf{x}) = \log(L(\mu \mid \mathbf{x})) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2};$$

Maximizando em relação a μ:

$$l'(\mu \mid \mathbf{x}) = \sum (x_i - \mu) = n\bar{x} - n\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

Logo, o EMV de μ é dado por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x} \quad .$$

Problema 13

Função de probabilidade

$$P(Y_i = y_i \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!};$$

Função de verossimilhança

$$L(\lambda \mid \mathbf{y}) = P(Y_1 = y_1 \mid \lambda) \cdots P(Y_n = y_n \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum y_i}}{\prod y_i!};$$

Função de log-verossimilhança

$$l(\lambda \mid \mathbf{y}) = \log(L(\lambda \mid \mathbf{y})) = -n\lambda + \sum y_i \log \lambda - \log(\prod y_i!);$$

Maximizando em relação a λ:

$$l'(\lambda\,|\,\mathbf{y}) = -n + \frac{\sum y_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}.$$

Logo, o EMV de λ é dado por:

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{y}.$$

Problema 14.

$$IC(\mu;\gamma) = \left]\bar{X} - z(\gamma)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z(\gamma)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Média amostral	Tamanho da amostra	Desvio padrão da população	Coeficiente de confiança	$z(\gamma)$	Intervalo de confiança: Limite inferior	Intervalo de confiança: Limite superior
170	100	15	95%	1,960	167,06	172,94
165	184	30	85%	1,440	161,82	168,18
180	225	30	70%	1,036	177,93	182,07

Problema 15

(a) $IC(\mu;0{,}99) = 800 \pm 2{,}576 \times \frac{100}{20} =]787{,}12;812{,}88[$

(b) $e = 0{,}98 \Rightarrow z(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}98 \Rightarrow z(\gamma) = 0{,}98\frac{\sqrt{n}}{s} = 0{,}98 \times \frac{20}{100} = 0{,}196 \Rightarrow \gamma = 15{,}54\%.$

(c) $e = z(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \times 100}{7{,}84}\right)^2 = 625.$

Suposições: Amostragem aleatória simples; tamanho amostral grande.

Problema 16

(a) $P(|\bar{X} - \mu| < e) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{s/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < \frac{e}{s/\sqrt{n}}\right) = \gamma \Leftrightarrow \frac{e}{s/\sqrt{n}} = z(\gamma) \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2$

$$n = \left(\frac{1{,}96 \times 10}{1}\right)^2 = 384{,}16 \cong 385.$$

(b) $n = \left(\frac{2{,}576 \times 10}{1}\right)^2 = 663{,}58 \cong 664.$

Problema 17

(a) $P(|\bar{X} - \mu| > 1) = 8\% \Leftrightarrow P(|\bar{X} - \mu| < 1) = 92\%;$

$$n = \left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\frac{1{,}75\times 10}{1}\right)^2 = 306{,}25 \cong 307\,.$$

(b) $IC(\mu;0{,}92) = 50 \pm 1{,}75\times\frac{10}{307} =]49{,}0;51{,}0[\,.$

Problema 18

$$IC(p;\gamma) = \hat{p} \pm z(\gamma)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$IC(p;0{,}9) = 0{,}7 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}7\times 0{,}3}{625}} = 0{,}7 \pm 0{,}030 =]0{,}670;0{,}730[\,.$$

Intervalo conservador: $IC(p;0{,}9) = 0{,}7 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4\times 625}} = 0{,}7 \pm 0{,}033 =]0{,}667;0{,}733[$

Problema 19

$$IC(p;0{,}95) = 0{,}3 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3\times 0{,}7}{400}} = 0{,}3 \pm 0{,}045 =]0{,}255;0{,}345[\,.$$

Intervalo conservador: $IC(p;0{,}95) = 0{,}3 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 400}} = 0{,}3 \pm 0{,}049 =]0{,}251;0{,}349[\,.$

Problema 20

(a) $$P(|\hat{p}-p| < e) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) = \gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}} = z(\gamma) \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p)$$

Supondo que a proporção na amostra real seja próxima de p:

$$n = \left(\frac{1{,}2816}{0{,}01}\right)^2 \times 0{,}6\times 0{,}4 \cong 3942$$

(b) $IC(p;0{,}95) = 0{,}55 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55\times 0{,}45}{3942}} = 0{,}55 \pm 0{,}016 =]0{,}534;0{,}566[\,.$

Intervalo conservador: $IC(p;0{,}95) = 0{,}55 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 3942}} = 0{,}55 \pm 0{,}016 =]0{,}534;0{,}566[\,.$

Problema 21

(a) $IC(p;0{,}95) = 0{,}333 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}333\times 0{,}667}{300}} = 0{,}333 \pm 0{,}053 =]0{,}280;0{,}387[\,.$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}95) = 0{,}333 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 300}} = 0{,}333 \pm 0{,}057 =]0{,}277;0{,}390[\ .$$

Interpretação: Se pudéssemos construir um grande número de intervalos aleatórios para *p*, todos baseados em amostras de tamanho *n*, 95% deles conteriam o parâmetro *p*.

(b) Utilizando a estimativa da amostra observada ($\hat{p} = 0{,}333$):

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \times 0{,}333 \times 0{,}667 \cong 2134\ .$$

Utilizando o valor máximo de *p(1-p)*:

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \times \frac{1}{4} \cong 2401$$

Interpretação: Utilizando o tamanho amostral encontrado, teremos uma probabilidade de 95% de que a proporção amostral difira do verdadeiro valor de p por menos que 2%.

Problema 22

(a)

Propriedades	Estimador	
	t	t'
Média	10	9,9
Vício	0,0	-0,1
Variância	4,8	3,79
EQM	4,8	3,8

O estimador *t* é não-viesado, porém tem variância maior que t', o qual é viesado. O EQM de t' é menor que o de *t*.

(b) Pode-se escolher t', pois seu vício é pequeno, e sua variância e EQM são bem menores que os de *t*.

Problema 23

(a) $IC(\mu;0{,}95) = 150 \pm 1{,}96 \times \frac{5}{6} = 150 \pm 1{,}633 =]148{,}37;151{,}63[\ ;$

(b) $e = z(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96\times 5}{0{,}98}\right)^2 = 100\ .$

Problema 24

(a) $IC(\mu;0{,}90) = 6{,}222 \pm 1{,}645 \times \dfrac{2}{3} = 6{,}222 \pm 1{,}097 =]5{,}13;7{,}32[$

(b) $e = z(\gamma)\dfrac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{z(\gamma)s}{e}\right)^2 = \left(\dfrac{1{,}645 \times 2}{0{,}01}\right)^2 = 108241.$

(c) Como n é pequeno (n = 9), não seria razoável simplesmente substituir o desvio padrão populacional pelo amostral. Pode-se usar o desvio padrão amostral s, e substituir a estatística z pela estatística t, obtida de uma distribuição t-Student com n-1 graus de liberdade.

Problema 25

$$IC(\mu;0{,}95) = 400 \pm 1{,}96 \times \frac{103{,}923}{10} = 400 \pm 20{,}37 =]379{,}63;420{,}37[$$

Problema 26

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_t ty_t - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2 - n\bar{t}^2} = \frac{529{,}40 - 10 \times 5{,}50 \times 8{,}55}{385{,}00 - 10 \times 5{,}50^2} = 0{,}717\ ;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta\bar{t} = 8{,}55 - 0{,}717 \times 5{,}50 = 4{,}607\ .$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

$$\hat{y}_t = 4{,}607 + 0{,}717t\ .$$

Novembro (t = 11): 12,49;

Dezembro (t = 12): 13,21;

Julho (t = 19): 18,23;

Agosto (t = 20): 18,95.

Problema 27

(a) $IC(p;0{,}90) = 0{,}6 \pm 1{,}645\sqrt{\dfrac{0{,}6 \times 0{,}4}{300}} = 0{,}6 \pm 0{,}047 =]0{,}553;0{,}647[\ .$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}90) = 0{,}6 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4 \times 300}} = 0{,}6 \pm 0{,}047 =]0{,}553;0{,}647[\ .$$

(b)

$$P(|\hat{p}-p|<0{,}001)=P\left(\frac{-0{,}001}{\sqrt{p(1-p)/n}}<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}<\frac{0{,}001}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)\cong$$
$$P\left(\frac{-0{,}001}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4/300}}<Z<\frac{0{,}001}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4/300}}\right)=P(-0{,}035<Z<0{,}035)=2{,}820\%$$

(c) $n=\left(\frac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p)\cong\left(\frac{1{,}96}{0{,}0005}\right)^2\times 0{,}6\times 0{,}4=3.687.936$.

Não parece factível, pois o tamanho amostral é muito grande. Deve-se aumentar e ou diminuir γ.

Problema 28

(a) $IC(p;0{,}98)=0{,}4\pm 2{,}326\sqrt{\frac{1}{4\times 10000}}=0{,}4\pm 0{,}012=]0{,}388;0{,}412[$.

(b) $IC(p;0{,}98)=0{,}4\pm 2{,}326\sqrt{\frac{0{,}4\times 0{,}6}{10000}}=0{,}4\pm 0{,}011=]0{,}389;0{,}411[$.

Problema 29

$$IC(p;0{,}95)=0{,}52\pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{400}}=0{,}52\pm 0{,}049=]0{,}471;0{,}569[\,.$$

Problema 30

$$e=z(\gamma)\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Leftrightarrow z(\gamma)=\frac{e\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}=\frac{0{,}045\times 10}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}=0{,}919\Rightarrow\gamma=64{,}2\%$$

Problema 31

$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$ e $\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$, independentes.

Logo:

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Portanto, o intervalo de confiança para $\mu_1-\mu_2$ é dado por:

$$IC(\mu_1-\mu_2;\gamma)=\bar{X}-\bar{Y}\pm z(\gamma)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,.$$

Problema 32

(a) $IC(\mu_A;0,95) = 50 \pm 1,96\frac{10}{4} = 50 \pm 4,9 =]45,1;54,9[$;

$IC(\mu_B;0,95) = 60 \pm 1,96\frac{10}{5} = 60 \pm 3,92 =]56,08;63,92[$.

(b) $IC(\mu_1 - \mu_2;0,95) = 50 - 60 \pm 1,96\sqrt{\frac{100}{16} + \frac{100}{25}} = -10 \pm 6,28 =]-16,28;-3,72[$.

O zero não está contido no intervalo. Logo, há evidências de que as duas médias são diferentes.

Problema 33

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B \sim N\left(p_A - p_B; \frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}\right)$$

$$IC(p_A - p_B;\gamma) = \hat{p}_A - \hat{p}_B \pm z(\gamma)\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}}$$

$$IC(p_A - p_B;0,95) = 0,450 - 0,583 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,450 \times 0,550}{400} + \frac{0,583 \times 0,417}{600}} =$$
$$= -0,133 \pm 0,063 =]-0,196;-0,070[$$

Problema 34

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq k) \leq \frac{Var(\bar{X})}{k^2} = \frac{\sigma^2}{nk^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$

Logo, $\bar{X}$ é consistente.

Problema 35

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(k/n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \text{ pois } Var\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n} .$$

Problema 36

$$\delta = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$n = \frac{1}{4\delta\varepsilon^2} = \frac{1}{4 \times 0,05 \times 0,05^2} = 2000$$

Problema 37

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x}) = \log(L(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2};$$

Maximizando em relação a μ e σ^2:

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i-\mu) = \frac{1}{2\sigma^2}(n\bar{x}-n\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2 \mid \mathbf{x})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum (x_i-\mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\left(-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum (x_i-\mu)^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{n}$$

Logo, os EMV's de μ e σ^2 são dados por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x} \text{ e } \hat{\sigma}^2{}_{MV} = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

Problema 38

(a) $E(T_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2\times\frac{\theta}{2} = \theta$. Logo, T_1 é um estimador não-viciado para θ.

(b) Como T_1 é um estimador não-viesado:

$$EQM(T_1) = Var(T_1) = Var(2\bar{X}) = 4Var(\bar{X}) = 4\frac{Var(X)}{n} = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

(c) T_1 é consistente, pois T_1 é não-viesado e $\lim_{n\to\infty}(Var(T_1)) = \lim\left(\frac{\theta^2}{3n}\right) = 0$.

Problema 39

(a) $E(M)=\int_0^\theta x\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=\frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right)=\theta\frac{n}{n+1}$. Logo, M é um estimador viesado. Seu viés é dado por

$$V(\theta)=E(M)-\theta=\theta\frac{n}{n+1}-\theta=-\frac{1}{n+1}\theta.$$

Logo: $\lim_{n\to\infty}(V(\theta))=0$.

(b) Como T_2 é não-viesado:

$$EQM(T_2)=Var(T_2)=Var\left(\frac{n+1}{n}M\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var(M).$$

Mas: $Var(M)=E(M^2)-[E(M)]^2$, onde

$$E(M^2)=\int_0^\theta x^2\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx=\frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right)=\theta^2\frac{n}{n+2}.$$

Logo:

$$EQM(T_2)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\theta^2\frac{n}{n+2}-\theta^2\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

(c) Temos que:

$\lim_{n\to\infty}(Var(t_2))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+2)}\theta^2=0$. Além disso, T_2 é não-viciado. Logo, T_2 é um estimador consistente.

Problema 40

$$\frac{Var(T_2)}{Var(T_1)}=\frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}}=\frac{3}{n+2}\Leftrightarrow Var(T_2)=\frac{3}{n+2}Var(T_1)$$

n	1	2	10	50	100
$Var(T_2)/Var(T_1)$	1,000	0,750	0,250	0,058	0,029

Logo, para *n* grande, a variância de T_2 é muito menor que a variância de T_1.

Problema 41

Temos que $\bar{X}\sim N\left(\frac{\theta}{2};\frac{\theta^2}{12n}\right)$.

$$P\left(-1{,}645<\frac{\bar{X}-\theta/2}{\theta/\sqrt{12n}}<1{,}645\right)=90\%\Rightarrow P\left(2\left(\bar{X}-\frac{1{,}645\theta}{\sqrt{12n}}\right)<\theta<2\left(\bar{X}+\frac{1{,}645\theta}{\sqrt{12n}}\right)\right).$$

(a) Usando $T_1 = 2\overline{X}$ como estimador de θ:

$$IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\overline{X} - \frac{1{,}645\times 2\overline{X}}{\sqrt{12n}}\right);2\left(\overline{X} + \frac{1{,}645\times 2\overline{X}}{\sqrt{12n}}\right)\right] = \left[2\overline{X}\left(1-\frac{3{,}29}{\sqrt{12n}}\right);2\overline{X}\left(1+\frac{3{,}29}{\sqrt{12n}}\right)\right]$$

(b) Usando $T_2 = \dfrac{n+1}{n}M$ como estimador de θ:

$$IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\overline{X} - \frac{1{,}645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right);2\left(\overline{X} + \frac{1{,}645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right)\right].$$

(c) $$IC(\theta;90\%) = \left[2\left(\overline{X} - \frac{1{,}645M}{\sqrt{12n}}\right);2\left(\overline{X} + \frac{1{,}645M}{\sqrt{12n}}\right)\right].$$

(d) Serão aproximadamente iguais, pois para n grande, $(n+1)/n \approx 1$.

Problema 42

$T_1 = 5{,}094$; $T_2 = 4{,}997$.

	$IC(\theta;90\%)$	
Estimador	Limite inferior	Limite superior
T_1	4,941	5,247
T_2	4,944	5,244
M	4,944	5,244

Problema 44

$$IC(\mu;0{,}95) = 10{,}3 \pm 1{,}96\frac{1{,}4}{\sqrt{600}} = 10{,}3 \pm 0{,}112 =]10{,}19;10{,}41[\,.$$

Problema 45

$$E(T_1) = E\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)\right) = \mu;$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(4E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)\right) = \mu;$$

$$E(T_3) = E\left(\hat{\mu}_1\right) = \mu.$$

(i) Logo, os três estimadores são não-viesados.

$$Var(T_1) = Var\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}Var(\hat{\mu}_2) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0{,}333Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_2) = Var\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{25}\left(16Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)\right) = \frac{19}{75}Var(\hat{\mu}_2) = 0{,}253Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_3) = Var(\hat{\mu}_1) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0{,}333Var(\hat{\mu}_2)$$

(ii) Ordenando segundo a eficiência: $Var(T_2) < Var(T_1) = Var(T_3)$.

Problema 46

Temos que $\lambda = E(Y)$ (1º momento populacional). Pelo método dos momentos, a estimativa para λ é dada pelo 1º momento amostral, isto é, $\hat{\lambda}_M = \bar{Y}$.

Problema 47

Amostra de bootstrap sorteada

Indivíduo	22	15	74	35	74	78	17	78	87	57
Nota	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	7,0	6,5	7,0	6,5	7,5

Amostra	Notas										Mediana	Desvio Médio	Desvio absoluto mediano
1	3,0	7,0	7,0	3,0	6,5	4,0	6,5	6,5	6,5	7,5	6,5	1,5	1,3
2	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,3	0,8
3	6,5	3,0	7,0	7,0	6,5	6,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,2	0,8
4	7,0	7,0	6,5	7,0	7,5	7,5	7,0	7,5	7,5	6,5	7,0	0,3	0,4
5	6,5	6,5	6,5	7,0	7,5	6,5	4,0	7,0	6,5	4,0	6,5	0,9	0,6
6	7,0	6,5	7,0	7,5	3,0	7,5	3,0	7,0	4,0	7,0	7,0	1,6	1,3
7	6,5	6,5	3,0	7,5	6,5	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	6,5	0,7	0,3
8	7,0	7,0	6,5	4,0	3,0	7,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,5	1,2
9	6,5	7,0	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	7,5	4,0	6,5	6,5	1,0	0,5
10	4,0	6,5	6,5	4,0	7,5	7,0	7,0	7,5	3,0	6,5	6,5	1,4	1,3
11	7,5	7,0	3,0	7,5	7,0	7,5	7,0	4,0	7,5	6,5	7,0	1,2	1,1
12	7,5	6,5	3,0	6,5	4,0	3,0	7,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,6	1,5
13	7,5	6,5	6,5	6,5	4,0	7,5	4,0	6,5	7,5	6,5	6,5	0,9	0,7
14	6,5	3,0	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	6,5	7,0	0,7	0,6
15	7,5	7,0	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	3,0	7,5	7,5	7,3	0,9	0,8
				Desvio padrão							**0,3**	**0,4**	**0,4**

Portanto, as estimativas de bootstrap dos parâmetros de interesse são dadas por:

$$\hat{e}p(Med) = 0{,}3;\ \hat{e}p(DM) = 0{,}4;\ \hat{e}p(DAM) = 0{,}4$$

Capítulo 12

Problema 01

(a)

$$P(\text{Erro I}) = \text{P(dizer que são de B | na verdade são de A)} = P\left(\overline{X} > 176 \mid \overline{X} \sim N(175;1)\right) =$$

$$P\left(Z > \frac{176-175}{1}\right) = P(Z > 1) = 15{,}87\%$$

$$P(\text{Erro II}) = \text{P(dizer que são de A | na verdade são de B)} = P\left(\overline{X} \leq 176 \mid \overline{X} \sim N(177;1)\right) =$$

$$P\left(Z \leq \frac{176-177}{1}\right) = P(Z \leq -1) = 15{,}87\%$$

(b)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;1)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{1}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{1} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 176{,}645$$

Regra de decisão: Se $\overline{X} > 176{,}645$, dizer que habitantes da ilha são descendentes de B; caso contrário, dizer que são descendentes de A.

$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \leq 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \leq \frac{176{,}645-177}{1}\right) =$$

$$= P(Z \leq -0{,}355) = 36{,}13\%$$

(c)

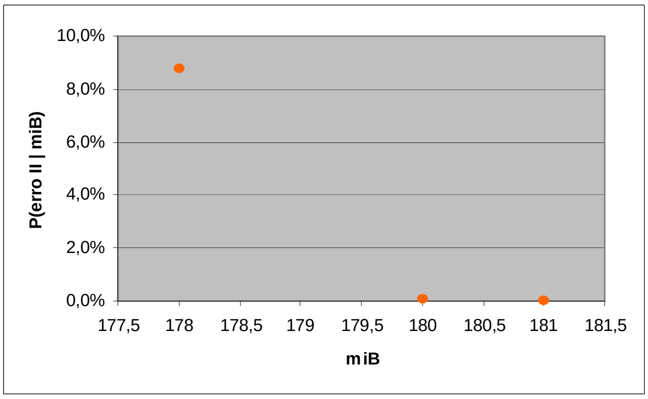
$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;0{,}5^2)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 175{,}823$$

$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \leq 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \leq \frac{175{,}823-177}{1}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1{,}177) = 11{,}96\%$$

μ_B	$P(\text{Erro II} \mid \mu_B)$
178	8,771%
180	0,040%
181	0,001%



(d)

Problema 02

(a)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ verdadeira}) = P\left(\bar{X} > 1170 \mid \bar{X} \sim N(1150;15^2)\right) =$$
$$= P\left(Z > \frac{1170-1150}{15}\right) = P(Z > 1{,}333) = 9{,}12\%$$

(b)

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_1 \text{ é verdadeira}) = \text{P}\left(\bar{\text{X}} < 1170 \mid \bar{\text{X}} \sim \text{N}(1200;20^2)\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{1170-1200}{20}\right) = P(Z < -1{,}5) = 6{,}68\%$$

(c)

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P\left(\bar{X} > \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(1150;15^2)\right) = P\left(\bar{X} < \bar{X}_C \mid \bar{X} \sim N(1200;20^2)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\bar{X}_C - 1150}{15}\right) = P\left(Z < \frac{\bar{X}_C - 1200}{20}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_C - 1150}{15} = -\frac{\bar{X}_C - 1200}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bar{X}_C = 1171{,}429$$
$$RC = \left]1171{,}429;+\infty\right[.$$

Problema 03

(a) H_0: Está começando um ataque.

H_1: Está acontecendo uma leve interferência.

Erro I: Dizer que está acontecendo uma leve interferência, quando na verdade está começando um ataque;

Erro II: Dizer que está começando um ataque, quando na verdade está acontecendo uma leve interferência.

(b) H_0: O acusado é inocente.

H_1: O acusado é culpado.

Erro I: Dizer que o acusado é culpado, quando na verdade é inocente.

Erro II: Dizer que o acusado é inocente, quando na verdade é culpado.

(c) H_0: A vacina não é eficaz.

H_1: A vacina é eficaz.

Erro I: Dizer que a vacina é eficaz, quando na verdade não é eficaz.

Erro II: Dizer que a vacina não é eficaz, quando na verdade é eficaz.

Problema 04

X: número de coroas em 3 lançamentos.

X ~ Binomial(3;p).

$$H_0: p = 0{,}5 \text{ versus } H_1: p \neq 0{,}5.$$

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ verdadeira}) = P(X = 3 | p = 0{,}5) = 12{,}50\%.$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ falsa}) = P(X < 3 | p = 0{,}667) = 70{,}37\%.$$

Problema 05

(a) $H_0: \mu = 200$ versus $H_1: \mu = 210$.

(b) Por exemplo: Se $\overline{X} < 205$, dizer que $\mu = 200$. Caso contrário, dizer que $\mu = 210$.

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ verdadeira}) = P(\overline{X} > 205 \mid \overline{X} \sim N(200;4^2)) =$$
$$= P\left(Z > \frac{205-200}{4}\right) = P(Z > 1{,}25) = 10{,}56\%.$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ falsa}) = P(\overline{X} < 205 | \overline{X} \sim N(210;4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{205-210}{4}\right) = P(Z < -1{,}25) = 10{,}56\%.$$

Problema 06

(a)

Passo 1: $H_0: \mu \geq 8$ versus $H_1: \mu < 8$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}4^2)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 7{,}342$$

$RC =]-\infty; 7{,}342[$

Passo 4: $\overline{X} = 7{,}2$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, rejeita-se H_0, ou seja, com base na amostra colhida, a diretoria deve decidir por retirar o produto da linha de produção.

(b)

$$\beta = P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ falsa}) = P(\overline{X} \geq 7{,}342 | \overline{X} \sim N(7{,}8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z \geq \frac{7{,}342 - 7{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z > -1{,}145) = 87{,}4\%$$

(c)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 1\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4} = -2{,}326 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 7{,}07 \qquad RC =]-\infty; 7{,}07[.$$

O valor observado não pertenceria à RC. Logo, a decisão seria diferente, isto é, H_0 não seria rejeitada.

(d)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}8^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 6{,}684$$

$RC =]-\infty; 6{,}684[$.

Novamente, o valor observado não pertenceria à RC, e portanto, H_0 não seria rejeitada.

Problema 07

Passo 1: $H_0: \mu = 60$ versus $H_1: \mu < 60$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 6{,}667^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\qquad \dfrac{\bar{X}_C - 60}{6{,}667} = -1{,}645 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 49{,}03$. $\quad RC =]-\infty;49{,}03[$

Passo 4: $\bar{X} = 50$.

Passo 5: O valor observado não pertence à RC. Logo, não se rejeita H_0. Não há evidências de melhoria.

Problema 08

Passo 1: $H_0: \mu = 2{,}5$ versus $H_1: \mu < 2{,}5$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu;0{,}0714^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\qquad \dfrac{\bar{X}_C - 2{,}5}{0{,}0714} = -1{,}645 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 2{,}38$. $\quad RC =]-\infty;2{,}38[$

Passo 4: $\bar{X} = 2{,}3$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que esta indústria paga salários inferiores, em média.

Problema 09

Passo 1: $H_0: \mu \le 23$ versus $H_1: \mu > 23$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu;0{,}9^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}10$ $\qquad \dfrac{\bar{X}_C - 23}{0{,}9} = 1{,}282 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 24{,}15$. $\quad RC =]24{,}15;+\infty[$

Passo 4: $\bar{X} = 24{,}17$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a informação do fabricante é falsa, ao nível significância de 10%.

Problema 10

Passo 1: $H_0: p = 0{,}5$ versus $H_1: p > 0{,}5$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{6}\right)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\big(\hat{p} > \hat{p}_C \mid \hat{p} \sim N(0{,}5;0{,}25/6)\big) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}836$$

$RC = \{p : p > 0{,}836\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}833$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não se rejeita H_0, ou seja, não há evidências de que a pessoa acerta mais que metade das vezes.

Problema 11

Passo 1: $H_0 : p \leq 0,2$ versus $H_1 : p > 0,2$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{50}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0,10$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0,2}{\sqrt{0,2 \times 0,8/50}} = 1,282 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0,273$ $\quad RC = \{p : p > 0,273\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,270$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças defeituosas seja maior que 20%.

Problema 12

i. $\alpha = 0,05$

Passo 1: $H_0 : p = 0,90$ versus $H_1 : p < 0,90$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{200}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0,9}{\sqrt{0,9 \times 0,1/200}} = -1,645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0,865$. $\quad RC = \{p : p < 0,865\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,875$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças de acordo com as especificação seja menor que 90%.

ii. $\alpha = 0,01$

Passo 3: $\alpha = 0,01$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0,9}{\sqrt{0,9 \times 0,1/200}} = -2,326 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0,851$. $\quad RC = \{p : p < 0,851\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,875$.

Passo 5: A conclusão é a mesma obtida com $\alpha = 0,05$.

Problema 13

Passo 1: $H_0 : p \geq 0,25$ versus $H_1 : p < 0,25$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{400}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$. $\frac{\hat{p}_C - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75/400}} = -1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}214$. $RC = \{p : p < 0{,}214\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}200$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a proporção de possuidores de TV que assistem ao programa é menor que 25%. Logo, a decisão dos produtores deve ser modificar o programa.

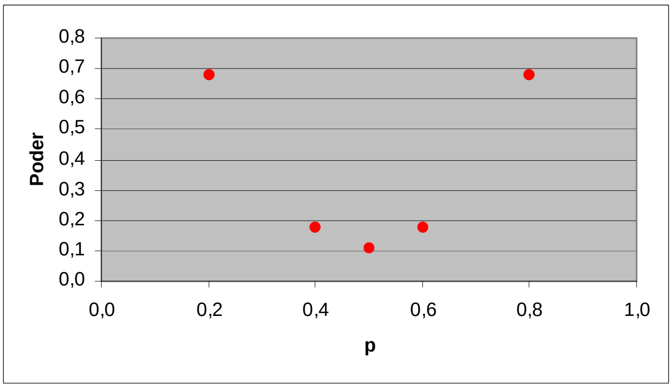
Problema 14

(a) X: número de sucessos em 10 tentativas.$\Rightarrow X \sim$Binomial(10;p)

$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in RC \mid p = 0{,}5) = 0{,}109$.

(b) $\pi(p) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p) = P(X \in RC \mid p)$

p	$\pi(p)$
0,2	0,678
0,4	0,180
0,5	0,109
0,6	0,180
0,8	0,678



(c) $\pi(0{,}5) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p = 0{,}5) = \alpha = 0{,}109$.

Problema 15

(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

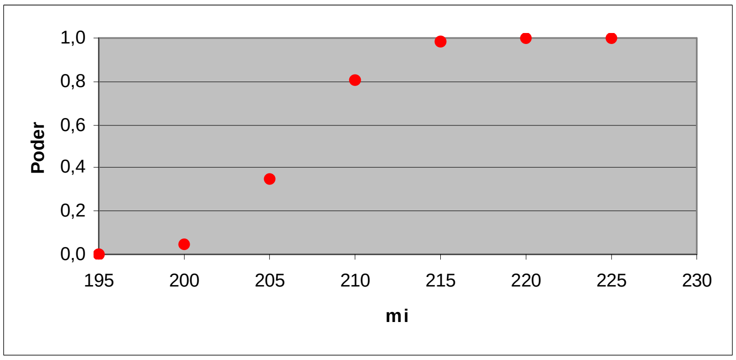
Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 4^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\quad \dfrac{\bar{X}_C - 200}{4} = 1{,}645 \Leftrightarrow \bar{X}_C = 206{,}58$. $RC =]206{,}58; +\infty[$

(b) $\pi(\mu) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \mu) = P(\bar{X} > 206{,}58 \mid \bar{X} \sim N(\mu; 4^2)) = P\left(Z > \dfrac{206{,}58 - \mu}{4}\right)$

μ
195
200
205
210
215
220
225

$\pi(\mu)$
0,002
0,050
0,346
0,804
0,982
1,000
1,000



(c) $\pi(\mu) = P\left(Z > \frac{206{,}58 - \mu}{4}\right) = 50\% \Leftrightarrow \frac{206{,}58 - \mu}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \overline{X}_C = 206{,}58$. Logo, para $\mu > 206{,}58$, o poder do teste será maior que 50%.

Problema 16

$$\hat{\alpha} = P\left(\overline{X} > 52 \mid \overline{X} \sim N(50;5^2)\right) = P\left(Z > \frac{52-50}{5}\right) = P(Z > 0{,}4) = 0{,}345.$$

Problema 17

Passo 1: $H_0 : \mu = 25$ versus $H_1 : \mu < 25$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 2{,}5^2)$.

Passo 3: $\overline{X} = 20{,}5$

$$\hat{\alpha} = P\left(\overline{X} < 20{,}5 \mid \overline{X} \sim N(25;2{,}5^2)\right) = P\left(Z < \frac{20{,}5 - 25}{2{,}5}\right) = P(Z < -1{,}8) = 0{,}036.$$

Passo 4: Rejeitamos H_0 para qualquer nível de significância $\alpha > \hat{\alpha}$. Por exemplo, fixando $\alpha = 5\%$, rejeita-se H_0, isto é, há evidências de que a nova técnica é melhor que a anterior.

Problema 18

$$n\frac{\hat{\sigma}_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad ; \quad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$n = 10$; $\sigma^2 = 100$.

(a) $P(\hat{\sigma}_*^2 > a) = P\left(\chi^2(n) > \frac{n}{\sigma^2}a\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{n}{\sigma^2}a = 15{,}987 \Leftrightarrow a = 15{,}987 \times \frac{100}{10} = 159{,}87$

(b) $P(S^2 < a) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}a\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}a = 3{,}325 \Leftrightarrow a = 3{,}325 \times \frac{100}{9} = 36{,}95$.

$$P(S^2 > b) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2}b\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}b = 16{,}919 \Leftrightarrow b = 16{,}919 \times \frac{100}{9} = 187{,}99$$

(c) $\alpha = P(S^2 < 163{,}16) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}\times 163{,}16\right) = P\left(\chi^2(9) < 14{,}684\right) = 0{,}90$.

(d) $\alpha = P(S^2 > 100) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2}\times 100\right) = P\left(\chi^2(9) > 9\right) = 0{,}437$.

(e) $\alpha = P(S^2 < 18) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}\times 18\right) = P\left(\chi^2(9) < 1{,}62\right) = 0{,}004$.

(f) $P(S^2 > 180) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2}\times 180\right) = P\left(\chi^2(9) > 16{,}2\right) = 0{,}063$.

Problema 19

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 300$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 300$.

Passo 2: $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(23)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 20\%$

$\chi_1^2 = 14{,}848$ e $\chi_2^2 = 32{,}007$.$\Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 14{,}84 \text{ ou } \chi^2 > 32{,}007\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{23}{300}\times 400 = 30{,}667$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a variância mudou, ao nível de 20%.

Problema 20

(a) A variância, já que a mesma é uma medida de dispersão em torno da média.

(b)

$S^2 = 114{,}09 .\Rightarrow$

$$IC(\sigma^2;95\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2};\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{10\times 114{,}09}{20{,}483};\frac{10\times 114{,}09}{3{,}247}\right] = [55{,}7;351{,}38]$$

Problema 21

(a) $P\left(\mid \overline{X} - 50 \mid < tS/\sqrt{10}\right) = P(\mid T_9 \mid < t) = 10\% \Leftrightarrow P(T_9 < t) = 5\% \Leftrightarrow t = 0{,}129$.

(b) $t_o = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{48-50}{\sqrt{120/10}} = -0{,}577 . \Rightarrow P(T_9 < -0{,}577) = 0{,}289 .$

(c) $P\left(|\,\bar{X}-50\,| < 2\right) = P\left(|\,T_9\,| < \dfrac{2}{S/\sqrt{n}}\right) = P\left(|\,T_9\,| < \dfrac{2}{\sqrt{120/10}}\right) = P\left(|\,T_9\,| < 0{,}577\right) = 0{,}422 .$

Problema 22

Passo 1: $H_0 : \mu = 100$ versus $H_1 : \mu < 100$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\bar{X}-100}{S/4} \sim t(15)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$

$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \,|\, \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(T_{15} < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = -1{,}753 . \Rightarrow$

$RC = \{t : t < -1{,}753\}$

Passo 4: $t_o = -5$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhora no tempo médio de execução da tarefa.

Problema 23

(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 1229$ versus $H_1 : \mu > 1229$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\bar{X}-1229}{S/\sqrt{10}} \sim t(9)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_9 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}833 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}833\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{1350-1229}{675{,}82/\sqrt{10}} = 0{,}566$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, aceita-se H_0. Logo, não há evidências de que a média das cidades pequenas seja diferente da média do estado.

(b) Isso ocorre devido à grande variância da renda dos municípios.

Problema 24

(a) $IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_{15}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 41{,}563 \pm 2{,}131 \times \dfrac{10{,}35}{4} = 41{,}563 \pm 5{,}514 = [36{,}05;47{,}08].$

(b) Suposições: a porcentagem da receita gasta com alimentação pelos moradores dessa vila tem distribuição normal; foi feita uma amostragem aleatória simples.

Problema 25

(a) Passo 1: $H_0 : \mu \le 30$ versus $H_1 : \mu > 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;1{,}033^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\dfrac{\overline{X}_C - 30}{1{,}033} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 31{,}70 . \Rightarrow RC =]31{,}70;+\infty[$

Passo 4: $\overline{X} = 30{,}044$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a média de precipitação pluviométrica anual é maior que 30,0.

(b) Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 30}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_8 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{30{,}004 - 30}{3{,}153/3} = 0{,}042$.

Passo 5: A conclusão é a mesma do item (a).

(c)

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = \text{P}\left(\overline{\text{X}} < 31{,}70 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(33;1{,}033^2\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{31{,}70 - 33}{1{,}033}\right) = P(Z < -1{,}258) = 0{,}1042.$$

Problema 26

$\overline{X} = 50{,}4$; $S^2 = \sigma^2 = 175{,}84$; n=50

Passo 1: $H_0 : \mu = 30$ versus $H_1 : \mu \ne 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;1{,}875^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_{C1} - 30}{1{,}875} = -1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C1} = 26{,}33$; $\dfrac{\overline{X}_{C2} - 30}{1{,}875} = 1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C2} = 33{,}68$.

$$RC = \{\overline{x} : \overline{x} < 26{,}33 \textbf{ ou } \overline{x} > 33{,}68\}$$

Passo 4: $\overline{X} = 50{,}4$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que o número médio de funcionários é diferente de 30.

$$IC(\mu;95\%) = \overline{x} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50{,}4 \pm 1{,}96 \times \frac{13{,}260}{\sqrt{50}} = 50{,}4 \pm 3{,}675 = [46{,}72;54{,}08].$$

Problema 27

Passo 1: $H_0: \mu = 11$ versus $H_1: \mu > 11$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}135^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_C - 11}{0{,}135} = 1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 11{,}17 . \Rightarrow RC = \{\overline{x} : \overline{x} > 11{,}17\}$

Passo 4: $\overline{X} = 11{,}3$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, há evidências de que o consumo é maior que o anunciado pela fábrica.

Problema 28

(a) $H_0: \mu = 50$ versus $H_1: \mu \in \{45; 58\}$

(b) Erro I: Rejeitar H_0 sendo que H_0 é verdadeira, isto é, dizer que o valor real é diferente do declarado, quando na verdade o valor declarado está correto.

Erro II: Aceitar H_0 sendo que H_0 é falsa, isto é, dizer que o valor declarado está correto, quando na verdade não está.

(c)

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_{C1} \text{ ou } \overline{X} > \overline{X}_{C2} \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(50;100)) =$$

$$= \text{P}\left(Z < \frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10} \right) + \text{P}\left(Z > \frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10} \right) = 10\% \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10} = -1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C1} = 33{,}55$$

$$\frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10} = 1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C2} = 66{,}45$$

$$RC = \{\overline{x} : \overline{x} < 33{,}55 \textbf{ ou } \overline{x} > 66{,}45\}.$$

(d) Se $\mu = 45$:

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(45;100)) =$$

$$= \text{P}\left(\frac{33{,}55 - 45}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 45}{10} \right) = P(-1{,}145 < Z < 2{,}145) = 0{,}858$$

Se $\mu = 58$:

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \mid \overline{\text{X}} \sim \text{N}(58;100)) =$$

$$= \text{P}\left(\frac{33{,}55 - 58}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 58}{10} \right) = P(-2{,}445 < Z < 0{,}845) = 0{,}794$$

(e) α : probabilidade de erro tipo I, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está incorreto, quando na verdade está correto.

β: probabilidade de erro tipo II, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está correto, quando na verdade está incorreto (depende do verdadeiro valor de μ).

Problema 29

Passo 1: $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ versus $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.

Passo 2: $Var(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = Var(\overline{X}_A) + Var(\overline{X}_B) = 100/25 + 100/16 = 10,25$

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N(\mu_A - \mu_B; 10,25) \Leftrightarrow Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1)$

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$RC = \{z : |z| > 1,96\}$

Passo 4: $z_o = 1,918$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que as médias são diferentes.

Problema 30

Passo 1: $H_0 : p_S = p_N = p_0$ versus $H_1 : p_S \neq p_N$.

Passo 2: $Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N) = Var(\hat{p}_S) + Var(\hat{p}_N) = \dfrac{p_S(1-p_S)}{n_S} + \dfrac{p_N(1-p_N)}{n_N}$

$$\hat{p}_S - \hat{p}_N \sim N(p_S - p_N; Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)) \Leftrightarrow Z = \frac{(\hat{p}_S - \hat{p}_N) - (p_S - p_N)}{\sqrt{Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)}} \sim N(0,1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_S} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_N})}} \sim N(0,1)$.

É preciso estimar o denominador de Z sob H_0. Sob H_0, a estimativa de $p_S = p_N = p_0$ é dada por: $\hat{p}_0 = \dfrac{n_s \hat{p}_S + n_N \hat{p}_N}{n_s + n_N} = 0,150$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$RC = \{z : |z| > 1,96\}$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_S} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_N}})} = \dfrac{0{,}150 - 0{,}178}{\sqrt{0{,}00089}} = -0{,}932$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as proporções nas duas regiões são diferentes.

Problema 31

Passo 1: $H_0 : p_1 = p_2 = p_0$ versus $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Passo 2: Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_1} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_2}})} \sim N(0,1)$. $\Rightarrow \hat{p}_0 = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0{,}310$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1{,}96$.

$$RC = \{z : |z| > 1{,}96\}$$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_2}})} = \dfrac{0{,}330 - 0{,}290}{\sqrt{0{,}0107}} = 1{,}223$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as preferências nos dois anos sejam diferentes.

Problema 32

(a)

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\big(X \in \{0,1,2\} \mid X \sim Binomia(15;0{,}5)\big) =$$
$$= 0{,}0037$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar H}_0 \mid X \sim Binomial(15;0{,}3)) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15;0{,}3)) =$$
$$= 0{,}8732$$

(b)

$$\pi(\mu) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15;p))$$

(c)

p
0,05
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

0,6

0,8

$\pi(p)$

0,964

0,816

0,398

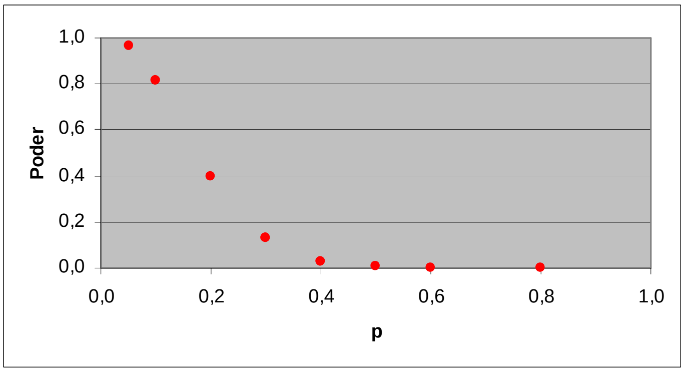
0,127

0,027

0,004

0,000

0,000



Problema 33

(a) $H_0: \mu = 200$ versus $H_1: \mu > 200$.

$$\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\overline{X} > \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(200;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n}$$

$$\beta = P(\text{aceitar H}_0 \mid \overline{X} \sim N(210;/n)) = P\left(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(210;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}}\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}} = -1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 210 - 25{,}64/\sqrt{n}$$

Logo: $200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 210 - 25{,}64/\sqrt{n} \Leftrightarrow n = 34{,}27 \cong 35$.

(b) $\overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 200 + 32{,}9/\sqrt{34{,}27} = 205{,}62$. Nesse caso, a RC é dada por:

$RC =]205{,}62;+\infty[$.

Problema 34

Teste para a variância

Passo 1: $H_0: \sigma^2 = 80^2$ versus $H_1: \sigma^2 \neq 80^2$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(24)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 5\%$.

$\chi_1^2 = 12{,}401$ e $\chi_2^2 = 39{,}364 . \Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 12{,}401 \text{ ou } \chi^2 > 39{,}364\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{24}{80^2} \times 2500 = 9{,}375$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha se alterado.

Teste para a média

Passo 1: $H_0: \mu = 250$ versus $H_1: \mu > 250$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 250}{S/5} \sim t(24)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_{24} > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}711 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}711\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{280 - 250}{50/5} = 3$.

Passo 5: Como to pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de que o número médio diário de clientes tenha aumentado.

Suposições: Amostragem aleatória simples; número diário de clientes do posto de gasolina tem distribuição normal.

Problema 35

Passo 1: $H_0: \mu = 7$ versus $H_1: \mu > 7$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 7}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_8 > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{10{,}556 - 7}{2{,}555/3} = 4{,}175$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhoria.

$$IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_8 \frac{s}{\sqrt{n}} = 10{,}556 \pm 2{,}306 \times \frac{2{,}555}{3} = 10{,}556 \pm 1{,}964 = [8{,}59;12{,}52].$$

Problema 36

$$S^2 = 6{,}528 .\Rightarrow IC(\sigma^2;90\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2};\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{8\times 6{,}528}{19{,}11};\frac{8\times 6{,}528}{3{,}37}\right] = [3{,}37;19{,}11]$$

Problema 37

(a) $\dfrac{erro}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} = 1{,}645 \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{1{,}645}{erro}\right)^2 p(1-p)$. Tomando p=0,5 (para maximizar $p(1-p)$):

$n = 270{,}6 \cong 271$.

(b) $$IC(p;0{,}95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}40 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4\times 0{,}6}{400}} = 0{,}40 \pm 0{,}048 = [0{,}352;0{,}448]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0{,}40 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 400}} = 0{,}40 \pm 0{,}049 = [0{,}351;0{,}449]$$

Problema 38

$$IC(p;0{,}90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}40 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}4\times 0{,}6}{2000}} = 0{,}40 \pm 0{,}018 = [0{,}382;0{,}418]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0{,}40 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4\times 2000}} = 0{,}40 \pm 0{,}018 = [0{,}382;0{,}418]$$

Problema 39

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 \le 25$ versus $H_1 : \sigma^2 > 5$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = 5\% .\Rightarrow \chi_2^2 = 18{,}307$.

$RC = \{\chi^2 : \chi^2 > 18{,}307\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{10}{25}\times 48 = 19{,}2$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a variância seja maior que a anunciada pelo fabricante.

Problema 40

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 25$ versus $H_1 : \sigma^2 < 25$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(7)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = 5\% \Rightarrow \chi_1^2 = 2{,}167$

$RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 2{,}167\right\}$.

Passo 4: $\chi^2_{obs} = \dfrac{7}{25} \times 1{,}351 = 0{,}378$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha diminuído.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 24$ versus $H_1 : \mu \neq 24$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 24}{S/\sqrt{8}} \sim t(7)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P\left(|T_7| > t_c\right) = 5\% \Rightarrow t_c = 2{,}365 \Rightarrow RC = \left\{t : |t| > 2{,}365\right\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{24{,}6 - 24}{1{,}162/\sqrt{8}} = 1{,}369$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, não rejeitamos H_0. Ou seja, não há evidências de que o rendimento médio seja diferente de 24%.

Problema 41

(a) X~Binomial(10;p) $\Rightarrow H_0 : p = 0{,}6 \Rightarrow \hat{\alpha} = P(X \leq 3 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}055$.

(b) $\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 3 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}110$.

Problema 42

$\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}266$.

Problema 43

Exemplo 12.7

$$\hat{\alpha} = P(\overline{X} > 314 \mid \overline{X} \sim N(300;90)) + P(\overline{X} < 300 - (314-300) \mid \overline{X} \sim N(300;90)) =$$

$$= P\left(Z > \frac{314-300}{\sqrt{90}}\right) + P\left(Z < \frac{286-300}{\sqrt{90}}\right) = 2 \times P(Z > 1{,}476) = 0{,}14$$

Problema 42

$$\hat{\alpha} = P(X \geq 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) + P(X \leq 6 - (6-6) \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) =$$

$$= 1 + P(X = 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}251$$

Capítulo 13

Problema 01

(a) $P\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} < a\right) = 95\% \Rightarrow P\big(F(9;5) < a\big) = 95\% \Rightarrow a = 4{,}772$

(b) $P\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} > b\right) = 95\% \Rightarrow P\big(F(9;5) > b\big) = 95\% \Rightarrow b = 0{,}287$

Problema 02

Porque as duas amostras são independentes.

Problema 03

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(14;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos $RC =]0;0{,}378[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = (1600/1000)^2 = 2{,}56$.

Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que a fábrica A seja mais coerente que a fábrica B na política salarial.

Problema 04

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(16;20)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}373[\cup]2{,}547;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = 0{,}1734 / 0{,}0412 = 4{,}21$.

Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que as variâncias dos comprimentos dos produtos das duas fábricas sejam diferentes.

Intervalo de confiança para o quociente das variâncias ($\gamma = 95\%$ *):*

$P(f_1 < F(20;16) < f_2) = 95\% \Rightarrow f_1 = 0{,}393$ e $f_2 = 2{,}681$.

Logo: $f_1 \dfrac{S_B^2}{S_a^2} < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < f_2 \dfrac{S_B^2}{S_a^2} \Rightarrow 0{,}393 \dfrac{0{,}1734}{0{,}0412} < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < 2{,}681 \dfrac{0{,}1734}{0{,}0412} \Rightarrow 1{,}653 < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} < 11{,}283$

Problema 05

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_H^2 = \sigma_M^2$ *versus* $H_1 : \sigma_H^2 \neq \sigma_M^2$

Estatística do teste: $W = S_M^2 / S_H^2$. Sob H_0, $W \sim F(49;49)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0,567[\cup]1,762;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_M^2 / s_H^2 = (0,9/0,8)^2 = 1,27$. Como w_0 não pertence à região crítica, aceitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_H = \mu_M$ *versus* $H_1 : \mu_H \neq \mu_M$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_H - \overline{X}_M}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_H} + \dfrac{1}{n_M}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{98}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1,984[\cup]1,984;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{3,2 - 3,7}{0,851\sqrt{\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{50}}} = -2,936$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que o tempo médio de adaptação das mulheres é maior que o dos homens.

Suposição: Os tempos de adaptação de homens e mulheres têm distribuições normais com variâncias iguais

Problema 06

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{98}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1,984[\cup]1,984;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{62 - 71}{20\sqrt{\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{50}}} = -2,250$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que os gastos médios das duas filiais não são iguais.

$$IC(\Delta;95\%) = (\overline{x}_A - \overline{x}_B) \pm t_{95\%} S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} = -9 \pm 1,984 \times 20\sqrt{\frac{2}{50}} = -9 \pm 7,938 =]-16,938;-1,062[$$

Problema 07

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(11;14)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0,298[\cup]3,095;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = (15/10)^2 = 2,25$. Como w_0 não pertence à região crítica, aceitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{25}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2,060[\cup]2,060;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{48 - 52}{12,45\sqrt{\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{12}}} = -0,830$. Como t_0 não pertence à região crítica, concluímos que os dois processos produzem resultados similares.

Problema 08

No problema 4, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0,002$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 0,010$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \frac{(0,002 + 0,010)^2}{0,002^2/20 + 0,010^2/16} \approx 22. \text{ Sob } H_0,\ T \sim t_{22}$$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2,074[\cup]2,074;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{21,15 - 21,12}{\sqrt{\dfrac{0,0412}{21} + \dfrac{0,1734}{17}}} = 0,272$. Como t_0 não pertence à região crítica, concluímos não há diferença entre as médias populacionais dos comprimentos dos produtos das duas fábricas.

Problema 09

$\bar{x}_L = 9,87$; $s_L^2 = 5,92$; $\bar{x}_A = 9,23$; $s_A^2 = 0,79$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_L^2 = \sigma_A^2$ versus $H_1 : \sigma_L^2 \neq \sigma_A^2$

Estatística do teste: $W = S_L^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(6;7)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0,176[\cup]5,119;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_l^2 / s_a^2 = 5,92/0,79 = 7,51$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_L = \mu_A$ *versus* $H_1 : \mu_L \neq \mu_A$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_L - \overline{X}_A}{\sqrt{\dfrac{S_L^2}{n_L} + \dfrac{S_A^2}{n_A}}}$. $A = \dfrac{s_L^2}{n_L} = 0,846$; $B = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0,097$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \frac{(0,846 + 0,097)^2}{0,846^2/6 + 0,097^2/7} \approx 7 .$$ Sob H_0, $T \sim t_7$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2,365[\cup]2,365;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{9,87 - 9,23}{\sqrt{\dfrac{5,92}{7} + \dfrac{0,79}{8}}} = 0,666$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que os salários médios populacionais dos dois grupos de profissionais sejam diferentes.

Problema 10

População	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Produção	6,0	6,6	6,8	6,9	7,0	7,0	7,0	7,1	7,4	8,0	6,6	6,7	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8	6,9	6,9	7,5
Postos	1	2,5	7,5	12	15	15	15	17	18	20	3	4	8	8	8	8	8	12	12	19

$W_S = 87$; $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{10 \times 21}{2} = 105$;

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{10 \times 10 \times 21}{12} - \frac{10 \times 10}{12 \times 20 \times 19} \times 264 = 169,21$$

$H_0 : \mu_T = \mu_C$ *versus* $H_1 : \mu_T > \mu_C$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1,645;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{87 - 105}{\sqrt{169,21}} = -1,384$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo fertilizante aumente a produção.

$\hat{\alpha} = P(Z > -1,384) = 0,914$

Problema 11

(a)

w	3	4	5	6	7
$P(Ws=w)$	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

(b)

w	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(Ws=w)$	1/15	1/15	2/15	2/15	1/5	2/15	2/15	1/15	1/15

(c)

w	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(Ws=w)$	1/20	1/20	1/10	3/20	3/20	3/20	3/20	1/10	1/20	1/20

Problema 12

(a) $E(W_S)=\dfrac{m(N+1)}{2}=\dfrac{6\times 14}{2}=42$; $Var(W_S)=\dfrac{nm(N+1)}{12}=\dfrac{7\times 6\times 14}{12}=49$

$P(W_S\leq 48)=P(Z\leq(48-42)/7)=P(Z\leq 0{,}857)=80{,}43\%$.

(b) $E(W_S)=\dfrac{m(N+1)}{2}=\dfrac{8\times 19}{2}=76$; $Var(W_S)=\dfrac{nm(N+1)}{12}=\dfrac{10\times 8\times 19}{12}=126{,}67$

$P(W_S\leq 95)=P(Z\leq(95-76)/\sqrt{126{,}67})=P(Z\leq 1{,}688)=95{,}43\%$.

(c) $E(W_S)=\dfrac{m(N+1)}{2}=\dfrac{10\times 21}{2}=105$; $Var(W_S)=\dfrac{nm(N+1)}{12}=\dfrac{10\times 20\times 21}{12}=175{,}00$

$P(W_S\geq 63)=P(Z\geq(63-105)/\sqrt{175})=P(Z\geq -3{,}175)=99{,}93\%$.

Problema 13

(a)

w	6,5	8,0	9,0	9,5	10,5	11,5	12,0	13,0	14,5
$P(Ws=w)$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/5	1/10	1/10	1/10	1/10

(b)

w	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5
$P(Ws=w)$	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

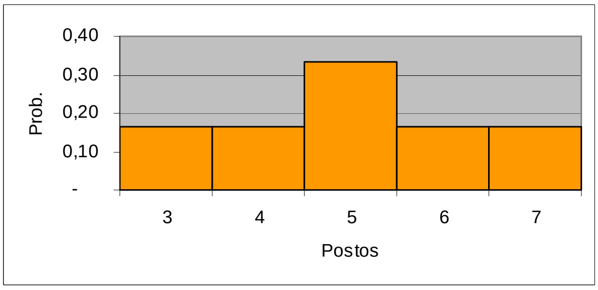
(c)

w	3	5	6	8
$P(Ws=w)$	1/10	3/10	3/10	3/10

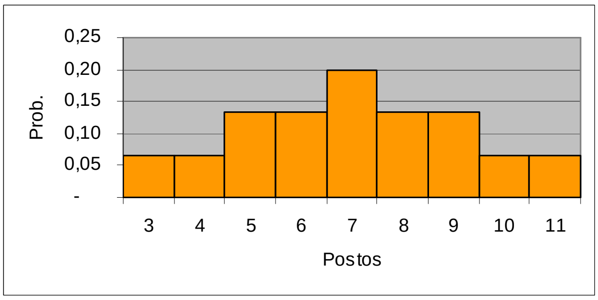
Problema 14

P11

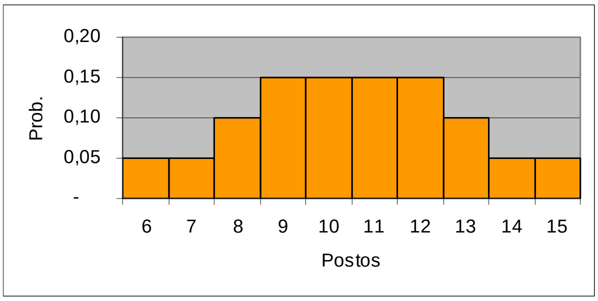
(a) m = 2; n = 2



(b) m = 2; n = 4

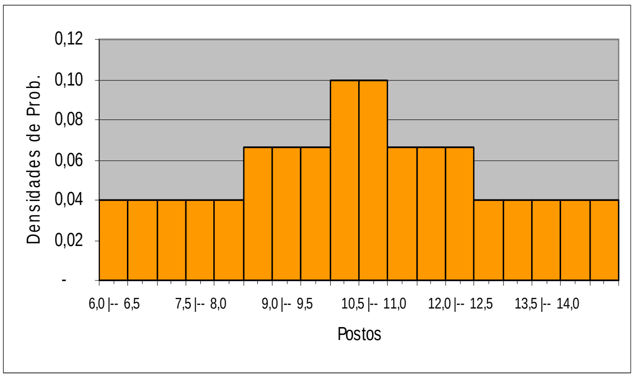


(c) m = n = 3

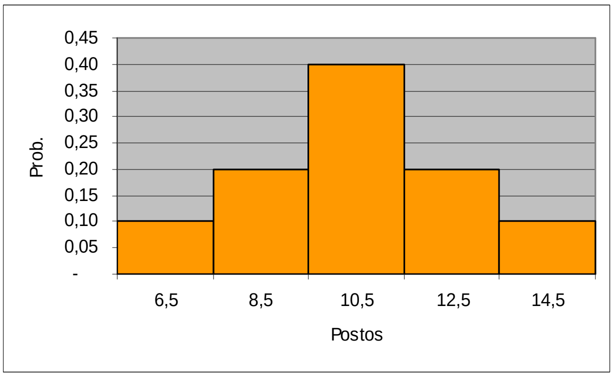


P13

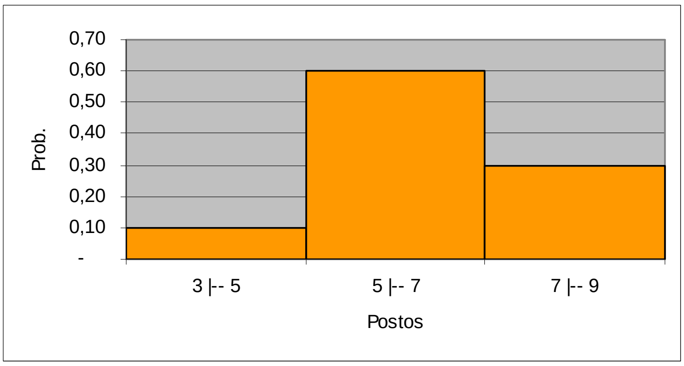
(a) $m = n = 3$; $d_1 = d_2 = 1$; $d_3 = 2$; $d_4 = d_5 = 1$



(b) $m = n = 3$; $d_1 = d_2 = d_3 = 2$



(c) $m = 2$; $n = 3$; $d_1 = d_2 = 1$; $d_3 = 3$



Problema 15

População	C	C	C	T	T	T	T
Observ.	1	4	8	3	3	5	7
Postos	1	4	7	2,5	2,5	5	6

$$W_S = 16;\ E(W_S) = \frac{m(N+1)}{2} = \frac{4\times 8}{2} = 16;$$

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{4\times 3\times 8}{12} - \frac{4\times 3}{12\times 7\times 6}\times 6 = 7{,}857$$

$$\hat{\alpha} = P(W_S \geq w) = P\left(\frac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}} > \frac{w - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}\right) \cong P\left(Z > \frac{16-16}{\sqrt{7{,}857}}\right) = P(Z > 0) = 50\%$$

Problema 16

$\bar{d} = 4{,}29;\ s_D^2 = 9{,}90$

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = 0$ *versus* $H_1 : \mu_D > 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\bar{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_6$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}943;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{7}\times 4{,}29}{\sqrt{9{,}90}} = 3{,}603$. Como t_0 pertence à região crítica, rejeitamos H_0. Ou seja, há evidências de que o cartaz produz um efeito positivo nas vendas médias.

Problema 17

Em elaboração

Problema 18

Em elaboração

Problema 19

Em elaboração

Problema 20

$\bar{d} = 1{,}50;\ s_D = 2{,}9$

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = 0$ *versus* $H_1 : \mu_D > 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\bar{D}}{S_D} = \dfrac{\sqrt{6}\bar{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_5$

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]2{,}015;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{6}\times 1{,}50}{2{,}9} = 1{,}275$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a pausa aumente a produtividade média dos trabalhadores.

Problema 21

$\bar{x}_D = 12$; $s_D^2 = 35{,}7$; $\bar{x}_N = 10$; $s_N^2 = 105{,}7$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_D^2 = \sigma_N^2$ versus $H_1 : \sigma_D^2 \neq \sigma_N^2$

Estatística do teste: $W = S_N^2 / S_D^2$. Sob H_0, $W \sim F(14;14)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}403[\cup]2{,}484;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_N^2 / s_D^2 = 105{,}7/35{,}7 = 2{,}96$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = \mu_N$ *versus* $H_1 : \mu_D \neq \mu_N$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\bar{X}_D - \bar{X}_N}{\sqrt{\dfrac{S_D^2}{n_D} + \dfrac{S_N^2}{n_N}}}$. $A = \dfrac{s_D^2}{n_D} = 2{,}381$; $B = \dfrac{s_N^2}{n_N} = 7{,}048$;

$$\nu = \frac{(A+B)^2}{A^2/(n_A-1) + B^2/(n_B-1)} = \frac{(2{,}381 + 7{,}048)^2}{2{,}381^2/15 + 7{,}048^2/15} \approx 22$$. Sob H_0, $T \sim t_{22}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}074[\cup]2{,}074;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{12-10}{\sqrt{\dfrac{35{,}7}{15} + \dfrac{105{,}7}{15}}} = 0{,}651$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as produtividades médias dos dois períodos sejam diferentes. No entanto, a produtividade do período noturno tem variância maior.

Problema 22

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_T^2 = 0{,}85^2$ versus $H_1 : \sigma_T^2 \neq 0{,}85^2$

Estatística do teste: $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S_T^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24 S_T^2}{0{,}85^2}$. Sob H_0, $W \sim \chi_{24}^2$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;12{,}401[\cup]39{,}364;+\infty[$.

Valor observado: $\chi_0^2 = \dfrac{24\times 1{,}25^2}{0{,}85^2} = 51{,}903$. Como w_0 pertence à região crítica, concluímos que a variância dos salários dos torneiros mecânicos é maior que a variância dos salários da indústria mecânica como um todo.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_T = 3{,}64$ *versus* $H_1 : \mu_T \neq 3{,}64$

Estatística do teste: $T = \dfrac{(\overline{X}_T - \mu_0)\sqrt{n}}{S_T} = \dfrac{5(\overline{X}_T - 3{,}64)}{S_T}$. Sob H_0, $T \sim t_{24}$.

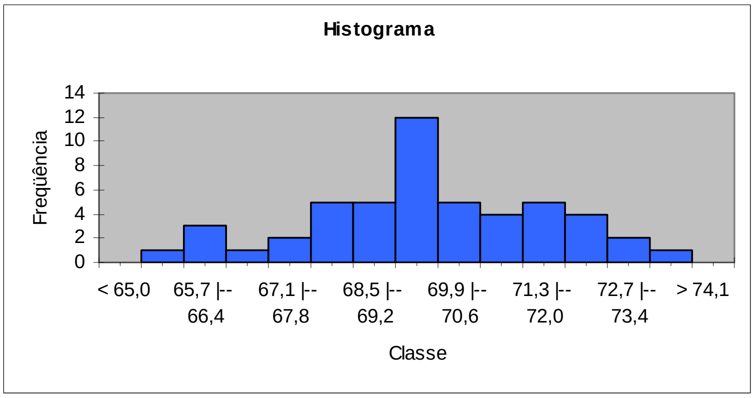
Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}064[\cup]2{,}064;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{5(4{,}22-3{,}64)}{1{,}25} = 2{,}32$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que o salário médio dos torneiros mecânicos é maior que o salário médio da indústria mecânica como um todo.

Problema 23

(a)

Média	69,8
Desvio Padrão	1,90
Mínimo	65,6
1º quartil	68,9
Mediana	69,7
3º quartil	71,0
Máximo	73,8



(b) $\hat{p} =$ proporção estimada de municípios em que o gasto com pessoal é maior que 70%;

$\hat{N}$ = número estimado de municípios em que o gasto com pessoal é maior que 70%;

Temos que: $\hat{p} = 20/50 = 0{,}4$; $\hat{N} = 200 \times \hat{p} = 200 \times 0{,}4 = 80$

Portanto, estima-se que 80 municípios tenham gasto com pessoal superior a 70% do orçamento.

(c) $H_0 : \sigma^2 = 20^2$ versus $H_1 : \sigma^2 < 20^2$

Estatística do teste: $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{49S^2}{20^2}$. Sob H_0, $W \sim \chi_{49}^2$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;33{,}93[$.

Valor observado: $\chi_0^2 = \dfrac{49 \times 1{,}90^2}{20^2} = 0{,}440$. Como w_0 pertence à região crítica, concluímos que os gastos com pessoal na primeira região são mais homogêneos, isto é, têm variância menor, que na segunda região.

Problema 24

(a)

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ versus $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística do teste: $W = S_2^2 / S_1^2$. Sob H_0, $W \sim F(49;99)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}601[\cup]1{,}597;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_2^2 / s_1^2 = 9/4 = 2{,}25$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

$$A = \frac{s_1^2}{n_1} = 4/100 = 0{,}04; \quad B = \frac{s_2^2}{n_2} = 9/50 = 0{,}18; \quad \nu = \frac{(0{,}04 + 0{,}18)^2}{0{,}04^2/99 + 0{,}18^2/49} \approx 71.$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2; 95\%) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{71;0,95}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (12 - 11) \pm 1{,}994\sqrt{0{,}04 + 0{,}18} =$$
$$= 1 \pm 0{,}935 =]0{,}065;1{,}935[$$

Como os dois extremos do intervalo são positivos, concluímos que o tempo médio gasto pelos operários da primeira fábrica para concluir a tarefa é maior que o dos operários da segunda fábrica.

(b) *Suposições:* Os tempos gastos para concluir a tarefa têm distribuição normal com variâncias desiguais e desconhecidas. As amostras são aleatórias.

Problema 25

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2$ versus $H_1 : \sigma_I^2 \neq \sigma_{II}^2$

Estatística do teste: $W = S_{II}^2 / S_I^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;11)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}256[\cup]3{,}588;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_{II}^2 / s_I^2 = 100/25 = 4$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_I = \mu_{II}$ *versus* $H_1 : \mu_I \neq \mu_{II}$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_I - \overline{X}_{II}}{\sqrt{\dfrac{S_I^2}{n_I} + \dfrac{S_{II}^2}{n_{II}}}}$. $A = \dfrac{s_I^2}{n_I} = 25/12 = 2{,}083$; $B = \dfrac{s_{II}^2}{n_{II}} = 100/10 = 10$;

$\nu = \dfrac{(A+B)^2}{A^2/(n_I - 1) + B^2/(n_{II} - 1)} = \dfrac{(2{,}083 + 10)^2}{2{,}083^2/11 + 10^2/9} \approx 13$. Sob H_0, $T \sim t_{13}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}179[\cup]2{,}179;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{75 - 74}{\sqrt{2{,}083 + 10}} = 0{,}288$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as notas médias dos dois tipos de ensino sejam diferentes. Porém, o ensino do Tipo I apresenta notas mais homogêneas.

Problema 26

(a)

Empresários: $H_0 : \mu = 7{,}6$ *versus* $H_1 : \mu \neq 7{,}6$

Estatística do teste: $T = \dfrac{(\overline{X}_E - \mu_E)\sqrt{n_E}}{S_E} = \dfrac{\sqrt{90}(\overline{X}_E - 7{,}6)}{S_E}$. Sob H_0, $T \sim t_{89}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1{,}987[\cup]1{,}987;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{90}(7{,}0 - 7{,}6)}{2{,}9} = -1{,}963$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação dos empresários seja falsa.

Operários: $H_0 : \mu = 6{,}5$ *versus* $H_1 : \mu \neq 6{,}5$

Estatística do teste: $T = \dfrac{(\overline{X}_O - \mu_O)\sqrt{n_O}}{S_O} = \dfrac{\sqrt{60}(\overline{X}_O - 6{,}5)}{S_O}$. Sob H_0, $T \sim t_{59}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}001[\cup]2{,}001;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{60}(7{,}1 - 6{,}5)}{2{,}4} = 1{,}936$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação dos operários seja falsa.

As duas amostras colhidas justificam, ao nível de significância de 5%, as afirmações dos dois grupos. Porém, se tomássemos um nível de significância um pouco maior (6%, por exemplo), concluiríamos a partir da amostra dos empresários que o salário médio é menor que 7,6 e a partir da amostra dos operários que o salário médio é maior que 6,5 (já que os valores das estatísticas t_0 das duas amostras encontram-se próximas dos extremos dos intervalos construídos). Logo, é possível que o salário médio seja um valor intermediário entre aqueles afirmados pelos operários e pelos empresários.

Problema 27

(a) Proprietário da torrefação: Bilateral.

(b) Fabricante de A: Unilateral à esquerda

(c) Fabricante de B: Unilateral à direita

Problema 28

$\bar{d} = -4{,}70$; $s_D = 4{,}5$

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_D = 0$ *versus* $H_1 : \mu_D < 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\sqrt{n}\overline{D}}{S_D} = \dfrac{\sqrt{5}\overline{D}}{S_D}$. Sob H_0, $T \sim t_4$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}132[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{\sqrt{5} \times (-4{,}70)}{4{,}5} = -2{,}090$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências, ao nível de significância de 5%, de que a droga reduz a pressão arterial média.

Suposições: As diferenças entre a pressão arterial depois de tomar a droga e antes de tomá-la têm distribuição normal.

Problema 29

$\hat{p}_H = 170/400 = 0{,}425$; $\hat{p}_M = 194/625 = 0{,}310$.

$H_0 : p_H - p_M = 0{,}10$ *versus* $H_1 : p_H - p_M \neq 0{,}10$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\hat{p}_H - \hat{p}_M - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_H(1-\hat{p}_H)}{n_H} + \dfrac{\hat{p}_M(1-\hat{p}_M)}{n_M}}}$. Sob H_0, como os tamanhos amostrais são grandes, $Z \sim N(0{,}1)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1{,}96[\cup]1{,}96;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{0{,}425 - 0{,}310 - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{0{,}425 \times 0{,}575}{400} + \dfrac{0{,}310 \times 0{,}290}{625}}} = 0{,}473$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a afirmação do partido seja falsa.

Problema 30

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 81$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 192$;

$\nu = \dfrac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \dfrac{(81+192)^2}{81^2/10 + 192^2/75} \approx 132$. Sob H_0, $T \sim t_{132}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty; -1{,}978[\cup]1{,}978; +\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{1190 - 1230}{\sqrt{81+192}} = -2{,}421$. Como t_0 pertence à região crítica, concluímos que as lâmpadas produzidas pela fábrica B têm vida média populacional maior que as produzidas pela fábrica A.

Problema 31

(a)

Procedimento 1: X_i (nota da *i*-ésima criança submetida ao método A) e Y_i (nota da *i*-ésima criança submetida ao método B), $i = 1, ..., 20$;

Procedimento 2: $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, ..., 20$, onde X_i e Y_i são as notas das crianças do *i*-ésimo par, submetidas aos métodos A e B, respectivamente.

(b)

Procedimento 1: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ *versus* $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$;

Procedimento 2: $H_0 : \mu_D = 0$ *versus* $H_1 : \mu_D \neq 0$.

(c) As estatísticas dos testes são dadas por:

Procedimento 1: $T = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{20} + \dfrac{S_Y^2}{20}}}$; ***Procedimento 2:*** $T = \dfrac{\sqrt{20}\,\overline{D}}{S_D}$.

(d) O procedimento 2, pois nesse caso controlamos um fator externo que pode interferir no aprendizado. Ou seja, se houver diferença entre os resultados dos dois métodos, essa diferença deve-se realmente aos métodos.

Problema 32

$\hat{p}_I = 300/400 = 0,75$ **;** $\hat{p}_T = 40/160 = 0,25$

(a) $H_0 : p_I = p_T$ *versus* $H_1 : p_I \neq p_T$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\hat{p}_I - \hat{p}_T}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_I(1-\hat{p}_I)}{n_I} + \dfrac{\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n_T}}}$. Sob H_0, como os tamanhos amostrais são razoavelmente grandes, $Z \sim N(0,1)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-1,96[\cup]1,96;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{0,75-0,25}{\sqrt{\dfrac{0,75\times 0,25}{400} + \dfrac{0,25\times 0,75}{160}}} = 12,344$. Como z_0 pertence à região crítica, concluímos que na cidade industrial a proporção de favoráveis ao projeto governamental é maior que na cidade turística.

(b) Seja N o número de pessoas em cada cidade e p a proporção de favoráveis ao projeto nas duas cidades.

$$p = \frac{Np_I + Np_T}{2N} = \frac{p_I + p_T}{2} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\hat{p}_I + \hat{p}_T}{2} = \frac{0,75+0,25}{2} = 0,5$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{Var(\hat{p}_I) + Var(\hat{p}_T)}{4} = \frac{1}{4}\left[\frac{p_I(1-p_I)}{n_I} + \frac{p_T(1-p_T)}{n_T}\right] \Rightarrow$$

$$\hat{V}ar(\hat{p}) = \frac{1}{4}\left[\frac{\hat{p}_I(1-\hat{p}_I)}{n_I} + \frac{\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n_T}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{0,75\times 0,25}{400} + \frac{0,25\times 0,75}{160}\right] = 0,00041$$

Logo: $IC(p;90\%) = \hat{p} \pm 1,645\sqrt{Var(\hat{p})} = 0,5 \pm 1,645\sqrt{0,00041} =]0,467;0,533[$

Problema 33

$\bar{x}_A = 17,4$; $s_A^2 = 3,6$; $\bar{x}_B = 16,0$; $s_B^2 = 18,0$.

Teste de igualdade de variâncias: $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_B^2 / S_A^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0,248[\cup]4,026;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_B^2 / s_A^2 = 18,0/3,6 = 5,0$. Como w_0 pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_A} + \dfrac{S_B^2}{n_B}}}$. $A = \dfrac{s_A^2}{n_A} = 0{,}36$; $B = \dfrac{s_B^2}{n_B} = 1{,}8$;

$\nu = \dfrac{(A+B)^2}{A^2/(n_A - 1) + B^2/(n_B - 1)} = \dfrac{(0{,}36 + 1{,}8)^2}{0{,}36^2/9 + 1{,}8^2/9} \approx 12$. Sob H_0, $T \sim t_{12}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty;-2{,}179[\cup]2{,}179;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{17{,}4 - 16{,}0}{\sqrt{0{,}36 + 1{,}8}} = 0{,}953$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que as resistências médias dos dois tipos de montagem sejam diferentes. No entanto, no tipo cruzado (A) as resistências são mais homogêneas que no tipo quadrado (B).

Problema 34

$\bar{x}_A = 14{,}2$; $s_A^2 = 6{,}17$; $\bar{x}_B = 11{,}8$; $s_B^2 = 4{,}94$.

(a)

Teste de igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ versus $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Estatística do teste: $W = S_A^2 / S_B^2$. Sob H_0, $W \sim F(5;8)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0;0{,}148[\cup]4{,}817;+\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_A^2 / s_B^2 = 6{,}17/4{,}94 = 1{,}25$. Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0: \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1: \mu_A > \mu_B$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{13}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 1\%$, temos que $RC =]2{,}650;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{14{,}2 - 11{,}8}{2{,}327\sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9}}} = 1{,}948$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a dieta A seja mais eficaz que a dieta B.

$\hat{\alpha} = P(t_{13} > 1{,}948) = 0{,}037$

(b)

Dieta	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Ganho de peso	11	12	14	15	15	18	8	10	11	11	12	12	13	13	16

Postos	4	7	11	13	13	15	1	2	4	4	7	7	9,5	9,5	14

$W_S = 62$; $E(W_S) = \frac{m(N+1)}{2} = \frac{6\times 16}{2} = 48$;

$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{6\times 9\times 16}{12} - \frac{6\times 9}{12\times 15\times 14}\times 60 = 70{,}71$

$H_0: \mu_A = \mu_B$ *versus* $H_1: \mu_A > \mu_B$

Estatística do teste: $Z = \frac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 1\%$, temos que $RC =]2{,}326; +\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \frac{62-48}{\sqrt{70{,}71}} = 1{,}665$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a dieta A seja mais eficaz que a dieta B.

$\hat{\alpha} = P(Z > 1{,}665) = 0{,}048$

Problema 35

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ *versus* $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Estatística do teste: $T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{18}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]-\infty; -1{,}704[$.

Valor observado: $t_0 = \frac{80-83}{4{,}123\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -1{,}627$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que a média da primeira população seja menor.

Problema 36

$\bar{x}_N = 8{,}15$; $s_N^2 = 1{,}34$; $\bar{x}_C = 7{,}25$; $s_C^2 = 3{,}01$.

Teste t

Teste de igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_N^2 = \sigma_C^2$ versus $H_1: \sigma_N^2 \neq \sigma_C^2$

Estatística do teste: $W = S_C^2 / S_N^2$. Sob H_0, $W \sim F(9;9)$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]0; 0{,}248[\cup]4{,}026; +\infty[$.

Valor observado: $w_0 = s_C^2 / s_N^2 = 3{,}01/1{,}34 = 2{,}26$. Como w_0 não pertence à região crítica, não rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias.

Teste de igualdade de médias: $H_0: \mu_N = \mu_C$ *versus* $H_1: \mu_N > \mu_C$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\overline{X}_N - \overline{X}_C}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_N}+\dfrac{1}{n_C}}}$. Sob H_0, $T \sim t_{18}$.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}734;+\infty[$.

Valor observado: $t_0 = \dfrac{8{,}15-7{,}25}{1{,}475\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}} = 1{,}365$. Como t_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo método tenha nota média maior.

$\hat{\alpha} = P(t_{18} > 1{,}365) = 0{,}095$.

Teste de Wilcoxon

Método	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
Notas	4,5	5,0	6,5	6,5	7,5	7,5	7,5	8,0	9,5	10,0
Postos	1	2	4	4	9,5	9,5	9,5	12,5	17,5	19,5
Método	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Notas	6,5	7,0	7,0	7,5	8,0	8,5	8,5	9,0	9,5	10,0
Postos	4	6,5	6,5	9,5	12,5	14,5	14,5	16	17,5	19,5

$W_S = 121$; $E(W_S) = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{10\times 21}{2} = 105$;

$$Var(W_S) = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)}\sum_{i=1}^{e}(d_i^3 - d_i) = \frac{10\times10\times21}{12} - \frac{10\times10}{12\times20\times19}\times114 = 172{,}50$$

$H_0: \mu_N = \mu_C$ *versus* $H_1: \mu_N > \mu_C$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{W_S - E(W_S)}{\sqrt{Var(W_S)}}$. Sob H_0, $Z \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Região crítica: Tomando $\alpha = 5\%$, temos que $RC =]1{,}96;+\infty[$.

Valor observado: $z_0 = \dfrac{121-105}{\sqrt{172{,}50}} = 1{,}218$. Como z_0 não pertence à região crítica, não há evidências de que o novo método tenha nota média maior.

$\hat{\alpha} = P(Z > 1{,}218) = 0{,}112$

Problema 37

$W_R + W_S = 1 + 2 + \cdots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

Problema 40

Em elaboração

Problema 41

Em elaboração

Capítulo 14

Problema 01

$H_0 : p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = 1/6$

Ocorrência (i)	1	2	3	4	5	6	Total
Freq. Observada (n_i)	43	49	56	45	66	41	300
Freq. Esperada (n_i^*)	50	50	50	50	50	50	300
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	0,98	0,02	0,72	0,5	5,12	1,62	**8,96**

$\chi_o^2 = 8{,}96$; s = 6; g.l. = 5.

$\hat{\alpha} = P(\chi_5^2 > 8{,}96) = 0{,}111$.

Problema 02

Exemplo 14.5:

$\chi_o^2 = 12{,}875$; s = 11; g.l. = 10.

$\hat{\alpha} = P(\chi_{10}^2 > 12{,}875) = 0{,}231$.

Exemplo 14.6:

$\chi_o^2 = 3{,}87$; s = 4; g.l. = 3.

$\hat{\alpha} = P(\chi_3^2 > 3{,}87) = 0{,}276$.

Problema 03

$H_0 : p_1 = 0{,}656;\ p_2 = 0{,}093;\ p_3 = 0{,}093;\ p_4 = 0{,}158$

Categoria (i)	C1	C2	C3	C4	Total
Freq. Observada (n_i)	125	18	20	34	197
Freq. Esperada (n_i^*)	129,232	18,321	18,321	31,126	197
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	0,139	0,006	0,154	0,265	**0,563**

$\chi_o^2 = 0{,}563$; s = 4; g.l. = 3.

$\hat{\alpha} = P(\chi_3^2 > 0{,}563) = 0{,}905$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 7{,}815$.

Não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os dados estão de acordo com o modelo genético postulado.

Problema 04

$H_0 : P = N(30;100)$

Quartis da $N(30;100)$: Q(0,25) = 23,26 ; Q(0,50) = 30 ; Q(0,75) = 36,74.

Categoria (i)	(-∞;23,26]	(23,26;30,00]	(30,00;36,74]	(36,74;+ ∞)	Total
Freq. Observada (n_i)	8	4	4	4	20
Freq. Esperada (n_i^*)	5	5	5	5	20
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	1,800	0,200	0,200	0,200	**2,400**

$\chi_o^2 = 2,400$; s = 4; g.l. = 3.

$\hat{\alpha} = P(\chi_3^2 > 2,400) = 0,494$.

Se $\alpha = 0,05$: $\chi_C^2 = 7,815$.

Não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os dados são observações de uma distribuição $N(30;100)$.

Problema 05

$H_0 : p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = 1/6$

Ocorrência	1	2	3	4	5	6	Total
Freq. Observada (n_i)	158	186	179	161	141	175	1000
Freq. Esperada (n_i^*)	166,667	166,667	166,667	166,667	166,667	166,667	1000
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	0,451	2,243	0,913	0,193	3,953	0,417	**8,168**

$\chi_o^2 = 8,168$; s = 6; g.l. = 5.

$\hat{\alpha} = P(\chi_5^2 > 8,168) = 0,147$.

Se $\alpha = 0,05$: $\chi_C^2 = 11,070$.

Não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que o dado é balanceado.

Problema 06

$H_0 : P_1 = P_2$

Freqüências observadas (n_{ij})

Escola	(0;2,5]	(2,5;5,0]	(5,0;7,5]	(7,5;10,0]	Total
Pública	15	22	18	3	58
Particular	6	10	20	6	42

Total	21	32	38	9	100

Freqüências esperadas(n_{ij}^*)

Escola	(0;2,5]	(2,5;5,0]	(5,0;7,5]	(7,5;10,0]	Total
Pública	12,18	18,56	22,04	5,22	58
Particular	8,82	13,44	15,96	3,78	42
Total	21	32	38	9	100

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Escola	(0;2,5]	(2,5;5,0]	(5,0;7,5]	(7,5;10,0]	Total
Pública	0,653	0,638	0,741	0,944	
Particular	0,902	0,880	1,023	1,304	
Total					**7,084**

$\chi_o^2 = 7{,}084$; s = 4; r = 2; g.l. = 3.

$\hat{\alpha} = P(\chi_3^2 > 7{,}084) = 0{,}069$.

Se $\alpha = 0{,}01$: $\chi_C^2 = 11{,}345$.

Como o valor observado é menor que o valor crítico, não rejeitamos H_0 ao nível de 1%, ou seja, não há evidências de que as notas obtidas por estudantes de escolas públicas sejam menores que as notas obtidas por estudantes de escolas particulares.

Problema 07

$H_0 : P_1 = P_2$

Freqüências observadas (n_{ij})

	Exercício correto	Exercício errado	Total
Mét. convencional	33	17	50
Mét. Novo	37	13	50
Total	70	30	100

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

	Exercício correto	Exercício errado	Total
Mét. Convencional	35	15	50
Mét. Novo	35	15	50
Total	70	30	100

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

	Exercício correto	Exercício errado	Total
Mét. convencional	0,114	0,267	
Mét. Novo	0,114	0,267	
Total			**0,762**

$\chi_o^2 = 0762$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 0{,}762) = 0{,}383$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 3{,}841$.

Logo, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que o novo método de ensino de Probabilidades seja superior ao método tradicional.

Problema 08

$H_0 : P_A = P_B$

Freqüências observadas (n_{ij})

	Eficaz	Não eficaz	Total
Droga A	55	25	80
Droga B	48	32	80
Total	103	57	160

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

	Eficaz	Não eficaz	Total
Droga A	51,5	28,5	80
Droga B	51,5	28,5	80
Total	103	57	160

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

	Eficaz	Não eficaz	Total
Droga A	0,238	0,430	
Droga B	0,238	0,430	
Total			**1,335**

$\chi_o^2 = 1{,}335$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 1{,}335) = 0{,}248$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 3{,}841$.

Logo, não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que as duas drogas para rinite alérgica são igualmente eficazes.

Problema 09

$H_0 : P_A = P_B$

Freqüências observadas (n_{ij})

Cidade	Gostou	Não gostou	Total
A	32	68	100
B	12	38	50
Total	44	106	150

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

Cidade	Gostou	Não gostou	Total
A	29,333	70,667	100
B	14,667	35,333	50
Total	44	106	150

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Cidade	Gostou	Não gostou	Total
A	0,242	0,101	
B	0,485	0,201	
Total			**1,029**

$\chi_o^2 = 1{,}029$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 1{,}029) = 0{,}310$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 3{,}841$.

Logo, não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que o produto seja igualmente aceito nas duas cidades.

Problema 10

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

Opinião	Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	30	35	35	100
Contra	60	25	15	100
Total	90	60	50	200

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

Opinião	Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	45	30	25	100
Contra	45	30	25	100
Total	90	60	50	200

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Opinião	Urbano	Suburbano	Rural	Total
A favor	5,000	0,833	4,000	
Contra	5,000	0,833	4,000	
Total				**19,667**

$\chi_o^2 = 19,667$; s = 3; r = 2; g.l. = 2.

$\hat{\alpha} = P(\chi_2^2 > 19,667) = 0,000$.

Se $\alpha = 0,05$: $\chi_C^2 = 5,991$.

Logo, rejeitamos H_0, ou seja, ou seja, há evidências de que a opinião depende do local de residência.

Problema 11

$H_0 : p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

	Homens	Mulheres	Total
Usaram hospital	100	150	250
Não usaram hospital	900	850	1750
Total	1000	1000	2000

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

	Homens	Mulheres	Total
Usaram hospital	125,000	125,000	250
Não usaram hospital	875,000	875,000	1750
Total	1000	1000	2000

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

	Homens	Mulheres	Total

Usaram hospital	5,000	5,000	
Não usaram hospital	0,714	0,714	
Total			**11,429**

$\chi_o^2 = 11{,}429$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 11{,}429) = 0{,}001$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 3{,}841$.

Rejeita-se H_0, ou seja, o uso de hospital depende do sexo.

Problema 12

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

Continua	Alta	Média	Baixa	Total
Sim	200	220	380	800
Não	200	280	720	1200
Total	400	500	1100	2000

Freqüências esperadas(n_{ij}^*)

Continua	Alta	Média	Baixa	Total
Sim	160	200	440	800
Não	240	300	660	1200
Total	400	500	1100	2000

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Continua	Alta	Média	Baixa	Total
Sim	10,000	2,000	8,182	
Não	6,667	1,333	5,455	
Total				**33,636**

$\chi_o^2 = 33{,}636$; s = 3; r = 2; g.l. = 2.

$\hat{\alpha} = P(\chi_2^2 > 33{,}636) = 0{,}000$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 5{,}991$.

Rejeita-se H_0, ou seja, existe dependência entre os fatores tendência a prosseguir os estudos e classe social.

Problema 13

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

	Alta fidelidade	Baixa fidelidade	Total
Homens	100	100	200
Mulheres	120	80	200
Total	220	180	400

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

	Alta fidelidade	Baixa fidelidade	Total
Homens	110,0	90,0	200
Mulheres	110,0	90,0	200
Total	220	180	400

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

	Alta fidelidade	Baixa fidelidade	Total
Homens	0,909	1,111	
Mulheres	0,909	1,111	
Total			**4,040**

$\chi_o^2 = 4{,}040$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 4{,}040) = 0{,}044$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 3{,}841$.

Rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que o grau de fidelidade ao produto depende do sexo.

Problema 14

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

Opinião	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	Total
Excelente	62	36	12	110
Satisfatório	84	42	14	140
Insatisfatório	24	22	24	70

Total	170	100	50	320

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

Opinião	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	Total
Excelente	58,44	34,38	17,19	110
Satisfatório	74,38	43,75	21,88	140
Insatisfatório	37,19	21,88	10,94	70
Total	170	100	50	320

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Opinião	1ª tentativa	2ª tentativa	3ª tentativa	Total
Excelente	0,217	0,077	1,566	
Satisfatório	1,246	0,070	2,835	
Insatisfatório	4,677	0,001	15,600	
Total				**26,288**

$\chi_o^2 = 26{,}288$; s = 3; r = 3; g.l. = 4.

$\hat{\alpha} = P(\chi_4^2 > 26{,}288) = 0{,}000$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 9{,}488$.

Rejeita-se H_0, ou seja, existe relação entre a resposta e o número de tentativas.

Problema 15

$n = 12$; r = 0,6

A. Hipóteses: $H_0 : \rho = 0$ versus $H_1 : \rho \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; g.l.=10; $t_C = 2{,}228$.

$RC = \{T : |T| > 2{,}228\}$.

D. Resultado da amostra

$$T = 0{,}6\sqrt{\frac{12-2}{1-0{,}6^2}} = 2{,}372 .$$

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0. Logo, há evidências de que a correlação entre as notas de Estatística e Metodologia da Pesquisa não seja nula

Intervalo de confiança

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 0{,}693\,;\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{n-3} = \frac{1}{9} = 0{,}111\,.$$

$$IC(\mu_\xi;95\%) = \xi_0 \pm 1{,}96\sigma_\xi = 0{,}693 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}111} = [0{,}040;1{,}346]$$

Mas: $\rho = \dfrac{e^{2\mu_\xi}-1}{e^{2\mu_\xi}+1}$.

Logo: $IC(\rho;95\%) = [0{,}040;0{,}873]$

Problema 16

$n = 9$; $r = 0{,}979$

A. Hipóteses : $H_0 : \rho = 0$ versus $H_1 : \rho \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica : $\alpha = 5\%$; g.l.=7; $t_C = 2{,}365 \Rightarrow RC = \{T : |T| > 2{,}365\}$.

D. Resultado da amostra: $T = 0{,}979\sqrt{\dfrac{9-2}{1-0{,}979^2}} = 12{,}852$.

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que existe relação entre o volume da carga e o tempo gasto para acondicioná-la

Problema 17

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$

Freqüências observadas (n_{ij})

Propriedade	Costeira	Fluvial	Internacional	Total
Estatal	5	141	51	197
Particular	92	231	48	371
Total	97	372	99	568

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

Propriedade	Costeira	Fluvial	Internacional	Total
Estatal	33,643	129,021	34,336	197
Particular	63,357	242,979	64,664	371
Total	97	372	99	568

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Propriedade	Costeira	Fluvial	Internacional	Total
Estatal	24,386	1,112	8,087	
Particular	12,949	0,591	4,294	
Total				**51,418**

$\chi_o^2 = 51{,}418$; s = 3; r = 2; g.l. = 2.

$\hat{\alpha} = P(\chi_2^2 > 51{,}418) = 0{,}000$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 5{,}991$.

propriedade das embarcações

Problema 18

$H_0 : P = Binomial(4;2/5)$

Número de caras	0	1	2	3	4	Total
Freq. Observada (n_i)	72	204	228	101	20	625
Freq. Esperada (n_i^*)	81	216	216	96	16	625
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	1,0	0,7	0,7	0,3	1,0	**3,594**

$\chi_o^2 = 3{,}594$; s = 5; g.l. = 4.

$\hat{\alpha} = P(\chi_4^2 > 3{,}594) = 0{,}464$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 9{,}488$

Logo, os dados confirmam a suposição de que a moeda favorece coroa na proporção de 2 caras para 3 coroas (P(cara)=2/5).

Problema 19

$H_0 : P_1 = P_2$

Freqüências observadas (n_{ij})

Sexo	Preferem A	Preferem B	Indecisos	Total
Feminino	50	110	40	200
Masculino	150	42	8	200
Total	200	152	48	400

Freqüências esperadas (n_{ij}^*)

Sexo	Preferem A	Preferem B	Indecisos	Total
Feminino	100	76	24	200
Masculino	100	76	24	200

Total	200	152	48	400

$(n_{ij} - n_{ij}^*)^2 / n_{ij}^*$

Sexo	Preferem A	Preferem B	Indecisos	Total
Feminino	25,0	15,2	10,7	
Masculino	25,0	15,2	10,7	
Total				**101,754**

$\chi_o^2 = 101,754$; s = 2; r = 2; g.l. = 1.

$\hat{\alpha} = P(\chi_1^2 > 101,754) = 0,0000$.

Se $\alpha = 0,05$: $\chi_C^2 = 3,841$.

Logo, rejeitamos H_0, ou seja, a distribuição de preferências com relação aos adoçantes não é a mesma nos dois sexos.

Problema 20

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^{s} \frac{O_i^2 + E_i^2 - 2O_iE_i}{E_i} = \sum_{i=1}^{s} \frac{O_i^2}{E_i} + \sum_{i=1}^{s} E_i - 2\sum_{i=1}^{s} O_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{O_i^2}{E_i} + n - 2n =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{O_i^2}{E_i} - n$$

Problema 21

$n = 8$; r = 0,866

A. Hipóteses: $H_0 : \rho = 0$ versus $H_1 : \rho \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; g.l.=6; $t_C = 2,447 . \Rightarrow RC = \{T : |T| > 2,447\}$.

D. Resultado da amostra: $T = 0,866\sqrt{\frac{8-2}{1-0,866^2}} = 4,242$.

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que a correlação entre o setor primário e o índice de analfabetismo não seja nula.

Intervalo de confiança

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1,317\,;\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{n-3} = \frac{1}{5} = 0,2\,.$$

$$IC(\mu_\xi;95\%) = \xi_0 \pm 1,96\sigma_\xi = 1,317 \pm 1,96\sqrt{0,2} = [0,440;2,193]$$

Logo: $IC(\rho;95\%) = [0,414;0,975]$

Problema 22

n = 100

Cara = 0; Coroa = 1.

X_1: resultado do cruzado; X_2: resultado do quarto de dólar.

$$r = \frac{\sum x_{1i}x_{2i} - n\bar{x}_1\bar{x}_2}{\sqrt{\sum x_{1i}^2 - n\bar{x}_1^2}\sqrt{\sum x_{2i}^2 - n\bar{x}_2^2}} = \frac{26 - 100\times 0,48\times 0,54}{\sqrt{48-100\times 0,48^2}\sqrt{54-100\times 0,54^2}} = 0,0032$$

A. Hipóteses: $H_0 : \rho = 0$ versus $H_1 : \rho \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; g.l.= 98; $t_C = 1{,}984 . \Rightarrow RC = \{T : |T| > 1{,}984\}$.

D. Resultado da amostra: $T = 0,0032\sqrt{\dfrac{100-2}{1-0,0032^2}} = 0,032$.

E. Conclusão: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que exista correlação entre o resultado do cruzado e do quarto de dólar.

Problema 23

$n = 10$; r = 0,41

A. Hipóteses: $H_0 : \rho \geq 0,60$ versus $H_1 : \rho < 0,60$

B. Estatística do teste: $\xi = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)$. Sob H_0, $\xi \sim N(\mu_\xi;\sigma_\xi^2)$, onde $\mu_\xi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1,6}{0,4} = 0,693$ e

$\sigma_\xi^2 = \dfrac{1}{7} = 0,143$.

C. Região crítica : $\alpha = 5\%$; $\xi_C = 0,693 - 1,645\sqrt{0,143} = 0,071 . \Rightarrow RC = \{\xi : \xi < 0,071\}$.

D. Resultado da amostra $\xi = 0,436$.

E. Conclusão: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0. Ou seja, não há evidências de que a correlação entre os salários de marido e mulher seja inferior a 0,6.

Problema 24

X e Y (n = 10; r = 0,949)

A. Hipóteses: $H_0 : \rho(X,Y) = 0$ versus $H_1 : \rho(X,Y) \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; g.l.= 8; $t_C = 2{,}306 . \Rightarrow RC = \{T : | T |> 2{,}306\}$.

D. Resultado da amostra $T = 8{,}514$.

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que a correlação entre X e Y não seja nula.

X e Z (n = 10; r = 0,707)

A. Hipóteses: $H_0 : \rho(X, Z) = 0$ versus $H_1 : \rho(X, Z) \neq 0$

B. Estatística do teste: $T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. Sob H_0, $T \sim t(n\text{-}2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; g.l.= 8; $t_C = 2{,}306 . \Rightarrow RC = \{T : | T |> 2{,}306\}$.

D. Resultado da amostra: $T = 2{,}828$.

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que a correlação entre X e Z não seja nula.

Problema 26

A. Hipóteses: $H_0 : \rho_1 = \rho_2$ versus $H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$, ou equivalentemente, $H_0 : \mu_D = 0$ versus $H_1 : \mu_D \neq 0$.

B. Estatística do teste: $D = Z_1 - Z_2$. Sob H_0, $D \sim N(0; \sigma_D^2)$.

C. Região crítica: $\alpha = 5\%$; $d_C = 1{,}96 \times \sigma_D = 1{,}96 \times \sqrt{0{,}060} = 0{,}482 . \Rightarrow RC = \{D : | D |> 0{,}482\}$.

D. Resultado da amostra: $Z_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right) = -0{,}576$; $Z_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right) = -1{,}157$.

$D = 0{,}580$.

E. Conclusão: Como o valor observado pertence à RC, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que o coeficiente de correlação dos homens é diferentes do das mulheres.
O coeficiente de correlação negativo indica que quanto maior o resultado no teste do curso, menor tende a ser o número de erros cometidos ao realizar a tarefa.

Problema 28

X_1: Número de trabalhadores que nunca fumaram

X_2: Número de trabalhadores que fumaram no passado

X_3: Número de trabalhadores fumantes

$$P(X_1 = 5; X_2 = 2; X_3 = 3) = \frac{10!}{5!2!3!} 0{,}52^5 0{,}12^2 0{,}36^3 = 6{,}437\% .$$

Problema 29

$H_0 : P = U(0,1)$

Solução 1: Teste de aderência (divisão pelos quartis)

Quartis da U(0,1): Q(0,25) = 0,25 ; Q(0,50) = 0,50 ; Q(0,75) = 0,75.

Categoria (i)	[0;0,25]	(0,25;0,5]	(0,5;0,75]	(0,75;1]	Total
Freq. Observada (n_i)	16	12	8	14	50
Freq. Esperada (n_i^*)	12,5	12,5	12,5	12,5	50
$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$	1,0	0,0	1,6	0,2	**2,8**

$\chi_o^2 = 2{,}800$; s = 4; g.l. = 3.

$\hat{\alpha} = P(\chi_3^2 > 2{,}800) = 0{,}423$.

Se $\alpha = 0{,}05$: $\chi_C^2 = 7{,}815$.

Logo, aceita-se H0, ou seja, há evidências de que os dados são uma amostra de uma distribuição U(0,1).

Solução 2 – Teste de Komolgorov-Smirnov

x_i	$F(x_i)$	$F_e(x_i)$	$\|F(x_i)\text{-}F_e(x_i)\|$
0,041	0,041	0,02	0,021
0,060	0,060	0,04	0,020
0,064	0,064	0,06	0,004
...	...	...	...
0,983	0,983	0,98	0,003
0,990	0,990	1,00	0,010
	Máximo: D =		**0,133**

$\alpha = 5\%$; Valor crítico (tabela): 0,192.

Como o valor observado é menor que o valor crítico, não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os dados são uma amostra de uma distribuição U(0,1).

Problema 30

$H_0 : P = Exp(0{,}5)$

Teste de Komolgorov-Smirnov

x_i	$F(x_i)$	$F_e(x_i)$	$\|F(x_i)\text{-}F_e(x_i)\|$
0,009	0,018	0,050	0,032
0,063	0,118	0,100	0,018

0,089	0,163	0,150	0,013
0,093	0,170	0,200	0,030
...	...	...	...
0,831	0,810	0,950	0,140
1,007	0,867	1,000	0,133
	Máximo: D=		**0,183**

$\alpha = 5\%$; Valor crítico (tabela): 0,294.

Como o valor observado é menor que o valor crítico, não rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os dados são uma amostra de uma distribuição exponencial com média 0,5.

Problema 31

Em elaboração

Capítulo 15

Problema 02

Exemplo 15.2: $\hat{\mu} = 3{,}16$; $\hat{\alpha}_1 = 0{,}22$; $\hat{\alpha}_2 = -0{,}93$; $\hat{\alpha}_3 = 0{,}50$.

Exemplo 15.3: $\hat{\mu} = 10{,}70$; $\hat{\alpha}_1 = 1{,}63$; $\hat{\alpha}_2 = -2{,}67$; $\hat{\alpha}_3 = 1{,}03$.

Problema 03

$$IC(\mu;95\%) = 83{,}81 \pm 2{,}086\sqrt{\frac{170{,}962}{21}} = [77{,}86;89{,}76]$$

$$IC(\sigma^2;95\%) = \left[\frac{20\times 170{,}962}{34{,}170};\frac{20\times 170{,}962}{9{,}591}\right] = [100{,}07;356{,}51]$$

Problema 04

Oficial (nível 1): $n_1 = 7$; $\bar{y}_1 = 78{,}00$; $\sum_{j=1}^{7}(y_{1j} - \bar{y}_1)^2 = 490{,}000$; $S_1^2 = 81{,}667$.

Particular (nível 2): $n_2 = 14$; $\bar{y}_2 = 86{,}71$; $\sum_{j=1}^{14}(y_{2j} - \bar{y}_2)^2 = 2574{,}857$; $S_2^2 = 198{,}066$.

$$S_e^2 = \frac{490{,}000 + 2574{,}857}{6+13} = 161{,}308$$

População única: $\bar{y} = 83{,}81$; $S^2 = 170{,}96$.

S_e^2 e S^2 são próximos. Logo, o tipo de escola parece não influir nos resultados da primeira prova.

Problema 05

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
Dia	13	2,85	0,679
Noite	8	3,66	0,257

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	3,238	1	3,238	6,183	0,022	4,381
Dentro dos grupos	9,951	19	0,524			
Total	13,190	20				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ou seja, o desempenho dos alunos é afetado pelo fato de estudar de dia (manhã ou tarde) ou à noite.

Problema 06

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
1o grau	50	2,23	0,230
2o grau	20	3,55	0,360

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	24,891	1	24,891	93,386	0,000	3,982
Dentro dos grupos	18,125	68	0,267			
Total	43,016	69	0,623			

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ou seja, existe diferença significativa entre os rendimentos das duas categorias.

Problema 07

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
1	6	12,33	2,915
2	6	8,03	1,019

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	55,470	1	55,470	28,205	0,000	4,965
Dentro dos grupos	19,667	10	1,967			
Total	75,137	11				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ou seja, existe diferença significativa entre as perdas médias de peso dos regimes 1 e 2.

Problema 08

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
M	9	82,89	186,611
T	7	89,00	115,333
N	5	78,20	220,200

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	353,549	2	176,775	1,038	0,374	3,555
Dentro dos grupos	3065,689	18	170,316			
Total	3419,238	20				

Não rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, o período não influencia o desempenho na primeira prova.

Problema 09

(a)

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
1o grau	50	2,23	0,230
2o grau	20	3,55	0,360
Superior	10	8,43	0,810

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	321,566	2	160,783	487,106	0,000	3,982
Dentro dos grupos	25,416	77	0,330			
Total	346,982	79	4,392			

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, o grau de escolaridade influencia os rendimentos.

(b) $\bar{y}_3 = 8{,}43$; $IC(\mu_3;95\%) = \bar{y}_3 \pm t_{77;0,95}\sqrt{\dfrac{QMD}{n_3}} = [8{,}068;8{,}792]$

(c) $IC(\mu_3 - \mu_1;95\%) = 8{,}43 - 2{,}23 \pm 1{,}991\sqrt{0{,}330\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{50}\right)} = [5{,}804;6{,}596]$.

$$IC(\mu_3 - \mu_2;95\%) = 8{,}43 - 3{,}55 \pm 1{,}991\sqrt{0{,}330\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20}\right)} = [4{,}437;5{,}323].$$

Ambos intervalos não contêm o zero. Logo, o rendimento médio dos assalariados com instrução universitária é maior que os rendimentos daqueles com primeiro grau e com segundo grau.

Problema 10

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
Marca A	5	85,6	19,30
MarcaB	5	90,0	5,50

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	48,4	1	48,4	3,903	0,084	5,318
Dentro dos grupos	99,2	8	12,4			
Total	147,6	9				

Não há evidências para rejeitar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Concluímos que as durabilidades médias das duas marcas de tinta são iguais.

Problema 11

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
I	5	58,4	8,3
II	5	57,2	29,7
III	5	43,6	7,8
IV	5	42,0	5,0

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	1135,000	3	378,333	29,790	0,000	3,239
Dentro dos grupos	203,200	16	12,700			
Total	1338,200	19				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, ou seja, as quantidades médias de água que passam pela laje não são as mesmas para os 4 tipos de impermeabilização.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{16;(1-0,05/6)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
I e II	58,4	57,2	3,008	5,08	-5,580	7,980
I e III	58,4	43,6	3,008	5,08	8,020	21,580
I e IV	58,4	42,0	3,008	5,08	9,620	23,180
II e III	57,2	43,6	3,008	5,08	6,820	20,380
II e IV	57,2	42,0	3,008	5,08	8,420	21,980

III e IV	43,6	42,0	3,008	5,08	-5,180	8,380

Conclusão: $\mu_1 = \mu_2 > \mu_3 = \mu_4$.

Problema 12

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
A	5	6,8	1,7
B	5	0,6	7,8
C	5	-0,2	3,7
D	5	4,8	0,7
E	5	7,6	5,3

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	253,040	4	63,260	16,474	0,000	2,866
Dentro dos grupos	76,800	20	3,840			
Total	329,840	24				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$, ou seja, os processos de estocagem não produzem todos o mesmo resultado.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{20(1-0,05/10)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
1 e 2	6,800	0,600	3,153	1,536	2,292	10,108
1 e 3	6,800	-0,200	3,153	1,536	3,092	10,908
1 e 4	6,800	4,800	3,153	1,536	-1,908	5,908
1 e 5	6,800	7,600	3,153	1,536	-4,708	3,108
2 e 3	0,600	-0,200	3,153	1,536	-3,108	4,708
2 e 4	0,600	4,800	3,153	1,536	-8,108	-0,292
2 e 5	0,600	7,600	3,153	1,536	-10,908	-3,092
3 e 4	-0,200	4,800	3,153	1,536	-8,908	-1,092
3 e 5	-0,200	7,600	3,153	1,536	-11,708	-3,892
4 e 5	4,800	7,600	3,153	1,536	-6,708	1,108

Problema 13

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
Método 1	8	4,750	6,214
Método 2	8	4,625	3,982
Método 3	8	7,750	2,214

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	50,083	2	25,042	6,053	0,008	3,467
Dentro dos grupos	86,875	21	4,137			
Total	136,958	23				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, os resultados médios dos testes não são todos iguais.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{21;(1-0,05/3)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
1 e 2	4,750	4,625	2,601	1,034	-2,520	2,770
1 e 3	4,750	7,750	2,601	1,034	-5,645	-0,355
2 e 3	4,625	7,750	2,601	1,034	-5,770	-0,480

Conclusão: $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3$.

Problema 14

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
A	4	14,0	22,000
B	4	22,0	6,667
C	4	15,0	24,667

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	152,000	2	76,000	4,275	0,0495	4,256
Dentro dos grupos	160,000	9	17,778			
Total	312	11				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, as vendas médias das 3 embalagens não são todas iguais.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 90%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{9;(1-0,1/3)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
A e B	14,0	22,0	2,510	8,889	-15,482	-0,518
A e C	14,0	15,0	2,510	8,889	-8,482	6,482
B e C	22,0	15,0	2,510	8,889	-0,482	14,482

Problema 15

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
A	6	3,833	6,167
B	6	5,833	6,167
C	6	5,333	9,067
D	6	4,000	6,800

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	17,500	3	5,833	0,827	0,494	3,098
Dentro dos grupos	141,000	20	7,050			
Total	158,500	23				

Não há evidências para rejeitar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. Assim, concluímos que as notas médias dos 4 tipos de pratos são iguais.

Problema 16

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i
Humanas	65	28,75	3,54
Exatas	12	35,21	5,46
Biológicas	8	43,90	4,93

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	1872,375	2	936,188	59,048	0,000	3,108
Dentro dos grupos	1300,084	82	15,855			
Total	1872,375	84	22,290			

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, os salários médias das 3 áreas não são todos iguais.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{82;(1-0,05/3)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
H e E	28,750	35,210	2,444	1,565	-9,518	-3,402
H e B	28,750	43,900	2,444	2,226	-18,796	-11,504
E e B	35,210	43,900	2,444	3,303	-13,132	-4,248

Conclusão: $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$.

Problema 17

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
1	7	24,71	19,905
2	5	29,80	18,700
3	8	24,75	13,071
4	7	32,86	17,143

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-value	F crítico (5%)
Entre grupos	340,081	3	113,360	6,710	0,002	3,028
Dentro dos grupos	388,586	23	16,895			
Total	728,667	26				

Rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, ou seja, a quantidade média de uso da construção sintática por página não é a mesma para todos os livros.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{23;(1-0,05/6)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
1 e 2	24,714	29,800	2,886	5,793	-12,032	1,861
1 e 3	24,714	24,750	2,886	4,525	-6,176	6,104
1 e 4	24,714	32,857	2,886	4,827	-14,484	-1,802
2 e 3	29,800	24,750	2,886	5,491	-1,713	11,813
2 e 4	29,800	32,857	2,886	5,793	-10,004	3,889
3 e 4	24,750	32,857	2,886	4,525	-14,247	-1,967

Problema 20

Exemplo 15.2

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
Manhã	7	3,386	0,548
Tarde	6	2,233	0,115
Noite	8	3,663	0,257

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	7,529	2	3,764	11,970	0,000	3,555
Dentro dos grupos	5,661	18	0,314			
Total	13,190	20				

Rejeitamos $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, as notas médias não são iguais para os 3 períodos.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{18;(1-0,05/3)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
M e T	3,386	2,233	2,639	0,097	0,329	1,976
M e N	3,386	3,663	2,639	0,084	-1,043	0,489
T e N	2,233	3,663	2,639	0,092	-2,228	-0,630

Conclusão: $\mu_1 = \mu_3 > \mu_2$.

Exemplo 15.3

Grupo *(i)*	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2
1	6	12,333	2,915
2	6	8,033	1,019
3	6	11,733	2,511

Fonte da variação	SQ	gl	QM	F	p-valor	F crítico (5%)
Entre grupos	65,080	2	32,540	15,149	0,000	3,682
Dentro dos grupos	32,220	15	2,148			
Total	97,300	17				

Rejeitamos $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, ou seja, a perda média de peso dos 3 regimes não é igual.

Intervalos de Bonferroni (coeficiente de confiança global = 95%):

Diferença *(i,j)*	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_j$	$t_{15;(1-0,05/3)}$	$QMD\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$	Limite inferior	Limite superior
1 e 2	12,333	8,033	2,694	0,716	2,021	6,579
1 e 3	12,333	11,733	2,694	0,716	-1,679	2,879
2 e 3	8,033	11,733	2,694	0,716	-5,979	-1,421

Conclusão: $\mu_1 = \mu_3 > \mu_2$.

Problema 21

Os intervalos de confiança de Bonferroni construídos no problema 20 para os dados do exemplo 15.3 nos levam a rejeitar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ com um nível de significância de 5%.

Problema 22

$$M = (18-3)\ln(2{,}148) - [5\ln(2{,}915) + 5\ln(1{,}019) + 5\ln(2{,}511)] = 1{,}424$$

$$C = 1 + \frac{1}{3\times 2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{18-3}\right) = 1{,}089$$

$$M / C = 1{,}308$$

p-value=0,520. Logo, não há evidências para rejeitar a hipótese de homocedasticidade.

Problema 23

(a) $100 \pm 1{,}96 \times 20 = [60{,}8;139{,}2]$

(b) $100 \pm 1{,}96 \times \left(\frac{20}{3}\right) = [86{,}9;113{,}1]$

(c) O intervalo para as médias de amostras com 9 observações tem amplitude menor que o intervalo para as vendas diárias.

(d) $\bar{x} = 150{,}8$

(e) $s = 20{,}38$

(f) $IC(\mu;95\%) = [135{,}1;166{,}4]$

(g) $IC(\sigma;95\%) = [13{,}76;39{,}04]$

(h) Os intervalos construídos têm uma probabilidade de 95% de conterem os verdadeiros valores da média e desvio padrão populacionais (μ e σ).

(i) $150{,}8 \pm 1{,}96 \times 20{,}38 = [110{,}84;190{,}72]$

(j) $IP(Y;95\%) = 150{,}8 \pm 2{,}306 \times 20{,}38\sqrt{1+\frac{1}{9}} = [101{,}2;200{,}3]$

Problema 25

$IP(Y(40);95\%) = [92{,}88;141{,}62]$

$IC(\mu(40);95\%) = [106{,}35;128{,}15]$

Problema 26

$IP(Y;95\%) = [16{,}41;49{,}17]$

Capítulo 16

Problema 01

(a) $\hat{z}_i = 101{,}50 - 0{,}55x_i$.

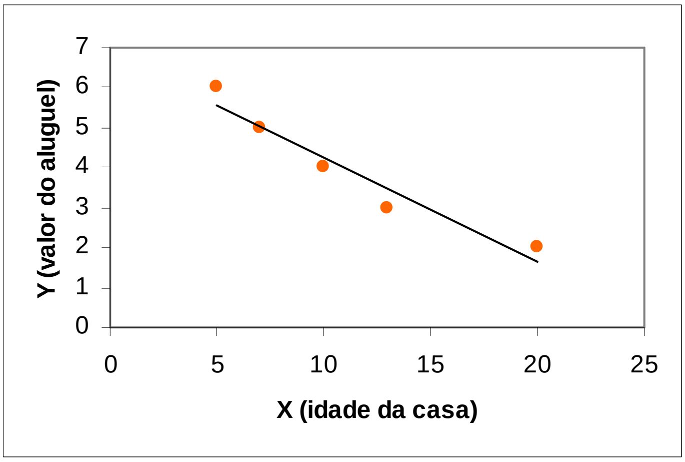
(b) $\hat{\alpha}$: a acuidade visual média estimada para recém-nascidos (zero anos de idade) é 101,50; $\hat{\beta}$: a acuidade visual média estimada diminui 0,55 a cada ano.

(c) –0,5; 9,5; -10,5; -0,5; 12,3; 2,3; etc. Ocorre desvio alto para o indivíduo 19 (-19,5).

Problema 02

(a) $\hat{y}_i = 6{,}87 - 0{,}26x_i$.

(b) Parece haver um efeito de curvatura.

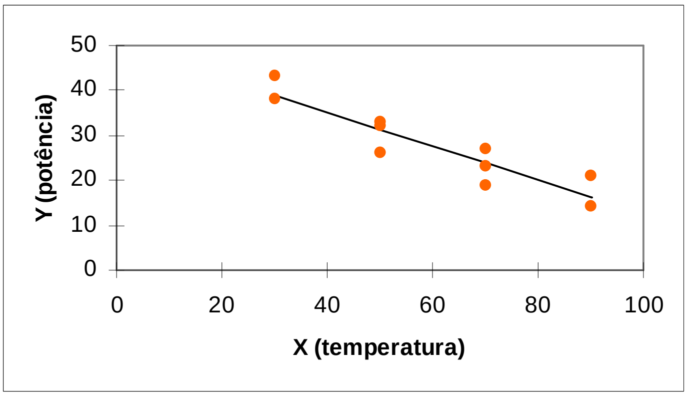


(c) O valor médio do aluguel diminui 0,26 unidades a cada ano de aumento da idade da casa.

(d) O valor médio estimado do aluguel de casas recém-construídas (idade zero) é 6,87 unidades.

Problema 03

(a)



(b) $\hat{y}_i = 50{,}457 - 0{,}381x_i$.

(c) O modelo parece adequado (valores observados próximos dos ajustados).

(d) $\hat{y}_i = 0 \Rightarrow 50{,}457 - 0{,}381x_i = 0 \Rightarrow x_i = 132{,}43^{\text{o}}$.

Problema 04

$\hat{y}_i = 162{,}079 - 0{,}642z_i$.

Problema 05

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	302,5	302,5	3,408
Resíduo	18	1597,5	88,75	
Total	19	1900,0		

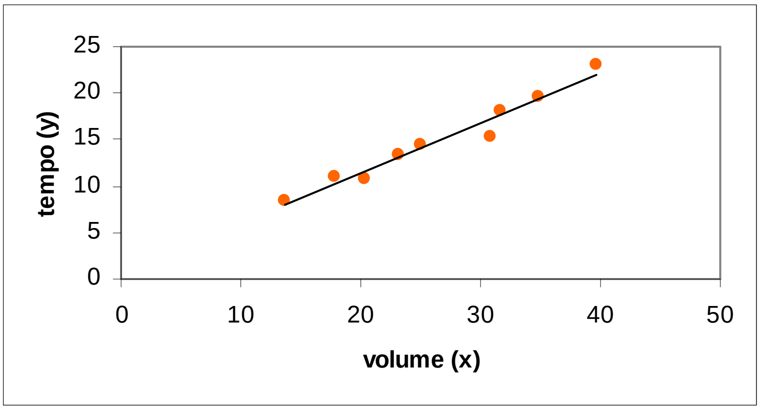
(a) $S_e^2 = SQR/(n-2) = 88{,}75$; $s_e^2 = SQTo/(n-1) = 100$.

(b) Não.

(c) $R^2 = 15{,}9\%$. Proporção da variabilidade total da acuidade visual explicada pela relação linear com a idade.

Problema 06

(a)



(b) $\hat{y}_i = 0{,}662 + 0{,}539x_i$.

(c)

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	168,939	168,939	165,129
Resíduo	7	7,161	1,023	
Total	8	176,100		

(d) $S_e^2 = SQR/(n-2) = 1{,}023$; $s_e^2 = SQTo/(n-1) = 22{,}013$. Sim, é pequeno.

(e) Sim.

Problema 07

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	9,391	9,391	46,286
Resíduo	3	0,609	0,203	
Total	4	10,000		

Rejeitamos $H_0 : \beta = 0$ (p-value=0,006). A idade das casas influencia o valor do aluguel.

Problema 08

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	609,524	609,524	43,98
Resíduo	8	110,876	13,860	
Total	9	720,400		

Rejeitamos $H_0 : \beta = 0$ (p-value=0,0002). A temperatura influencia a potência do antibiótico.

Problema 09

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	783,368	783,368	23,914
Resíduo	18	589,632	32,757	
Total	19	1373,000		

Rejeitamos $H_0 : \beta = 0$ (p-value=0,0001). A acuidade visual influencia o tempo de reação.

Problema 10

(a) $IC(\beta;95\%) = -0{,}55 \pm 2{,}101 \times \sqrt{88{,}75} \times \sqrt{\dfrac{1}{1000}} = -0{,}55 \pm 2{,}101 = [-1{,}18;0{,}08]$

(b) $IC(\alpha;95\%) = 101{,}5 \pm 2{,}101 \times \sqrt{88{,}75} \times \sqrt{\dfrac{19000}{20 \times 1000}} = [82{,}21;120{,}79]$.

(c) F=3,408 (p-value=0,081). Não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%.

(d) Em construção

(e) Em construção

Problema 11

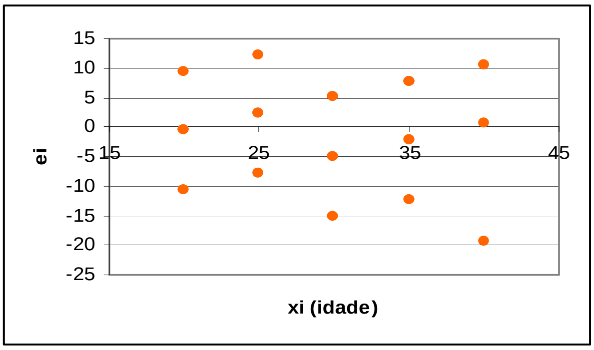
Sim. Estatística $F = QM\,\mathrm{Re}g / S_e^2 = 23{,}914$.

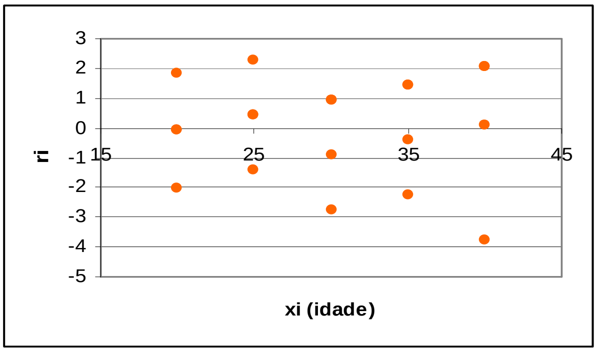
Problema 12

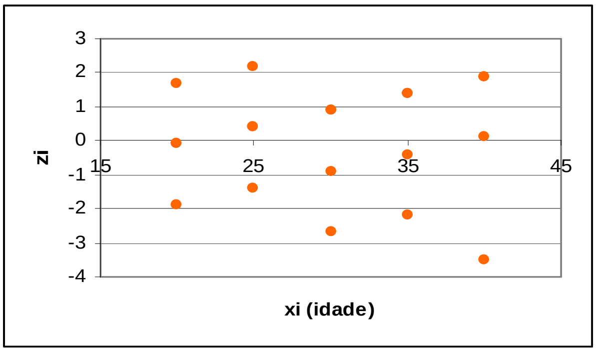
$IC(\beta;95\%) = 2{,}83 \pm 2{,}101 \times 1{,}65 = [-0{,}64;6{,}30]$. Não, pois o intervalo de confiança para β contém o zero.

Problema 13

i	x_i	z_i	e_i	z_i	r_i
1	20	90	-0,50	-0,09	100,00
2	20	100	9,50	1,70	100,00
3	20	80	-10,50	-1,88	100,00
4	20	90	-0,50	-0,09	100,00
5	25	100	12,25	2,19	25,00
6	25	90	2,25	0,40	25,00
...	...	...	...	...	...



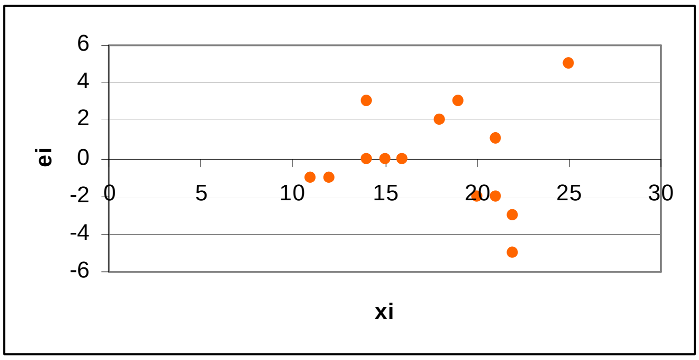




O indivíduo 19 (40 anos) tem resíduos altos, podendo ser considerado uma observação discrepante.

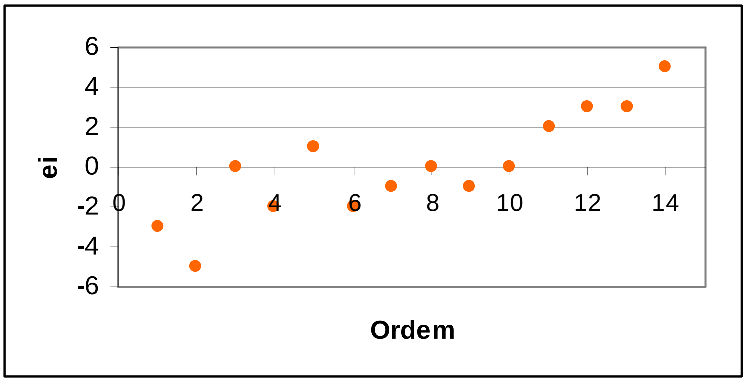
Problema 15

(a)



A variância dos erros tende a aumentar com o aumento da variável preditora *x*.

(b)



Os erros aumentam no decorrer da coleta de dados.

Problema 16

(a) $IC(E(Y \mid x=18);95\%) = 91{,}60 \pm 2{,}101 \times \sqrt{88{,}75} \times \sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{(18-30)^2}{1000}} = [82{,}84;100{,}32]$

(b) $IC(E(Y \mid x=30);95\%) = 85 \pm 2{,}101 \times \sqrt{88{,}75} \times \sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{(30-30)^2}{1000}} = [80{,}57;89{,}43]$

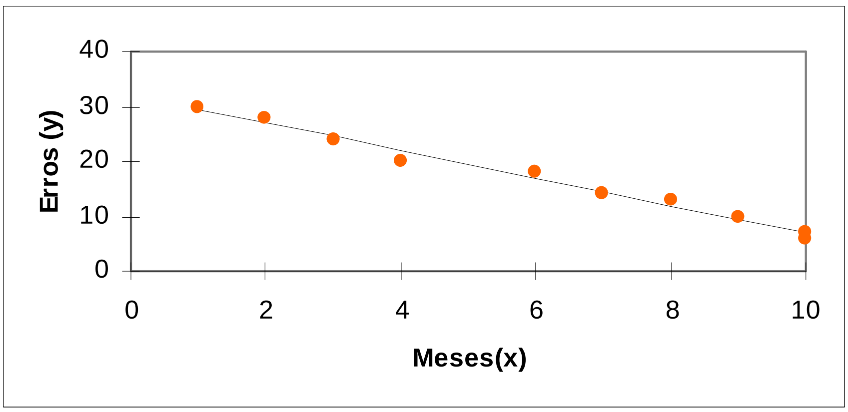
(c) em construção

Problema 17

$$IC(E(Y \mid x=30);95\%) = 16{,}832 \pm 2{,}365 \times \sqrt{1{,}023} \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{(30-26{,}338)^2}{580{,}8372}} = [15{,}96;17{,}71]$$

Problema 18

(a)



(b) $\hat{y}_i = 32{,}120 - 2{,}520 x_i$.

(c) Gráfico acima

(d) $(\bar{x}, \bar{y}) = (6;17)$. Este ponto se encontra sobre a reta de regressão ajustada.

(e) $IC(E(Y \mid x=5);95\%) = 19{,}52 \pm 2{,}306 \times \sqrt{1{,}12} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(5-6)^2}{100}} = [18{,}711;20{,}329]$.

Problema 19

$\hat{y}_i = 0{,}954 - 0{,}392 x_i$.

(a) $IC(E(Y \mid x=170);95\%) = 67{,}594 \pm 2{,}306 \times \sqrt{2{,}688} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(170-63{,}8)^2}{40629{,}6}} = [65{,}27;69{,}92]$

(b) $IC(E(Y \mid x=1000);95\%) = 392{,}95 \pm 2{,}306 \times \sqrt{2{,}688} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(1000-63{,}8)^2}{40629{,}6}} = [375{,}35;410{,}55]$

(c) Não parece razoável, pois é muito maior que os valores observados. O gasto com alimentação deve se estabilizar para rendas mais altas.

Problema 20

Em elaboração

Problema 21

Quando se publica um anúncio a mais, ocorre um aumento de 1,516 no número médio de carros vendidos.

Problema 22

(a) $\hat{y}_i = 323{,}622 + 131{,}716 x_i$.

$F_{obs} = 13{,}684$; $F_c = F(1;15;90\%) = 3{,}07$. Logo, devemos rejeitar $H_0 : \beta = 0$.

(b) $R^2 = 47{,}71\%$. Esse valor é baixo, indicando que talvez seja melhor procurar um modelo mais adequado.

(c) $IC(E(Y \mid x=5);95\%) = 982{,}2 \pm 1{,}753 \times \sqrt{80360} \times \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{(5-3{,}647)^2}{63{,}382}} = [835{,}0;1129{,}4]$

(d) $t_{obs} = \frac{323{,}622 - 300}{\sqrt{\frac{80360 \times 289{,}5}{17 \times 63{,}382}}} = 0{,}16$; $t_c = t(15;95\%) = 1{,}753$. Logo, não há evidências para rejeitar H_0.

Problema 23

$\hat{y}_i = 10{,}607 + 0{,}318 x_i$.

$\hat{\alpha}$: o diâmetro médio mínimo estimado para ervilhas filhas é de 10,607 polegadas;

$\hat{\beta}$: o diâmetro médio estimado aumenta 0,318 centésimos de polegada quando ocorre o aumento de 1 centésimo de polegada no diâmetro das ervilhas-pais.

Problema 24

$E(y_i \mid x_i) = \alpha + \beta x_i$, onde y_i é a concentração medida pelo instrumento e x_i é a concentração real de ácido lático.

Hipóteses de interesse: $H_{01}: \alpha = 0 \times H_{a1}: \alpha \neq 0$;

$H_{02}: \beta = 1 \times H_{a2}: \beta \neq 1$.

Problema 25

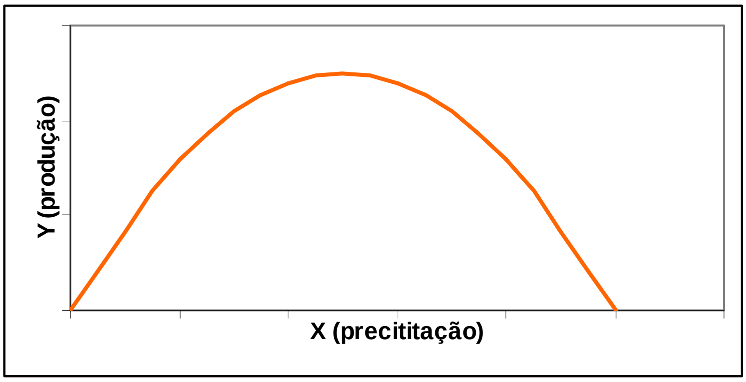
$\hat{y}_i = 0{,}159 + 1{,}228 x_i$.

$t_{obs} = \dfrac{1{,}228 - 1}{\sqrt{\dfrac{1{,}164}{526{,}2}}} = 4{,}848$; $t_c = t(18;97{,}5\%) = 2{,}101$. Devemos rejeitar H_0, ou seja, o instrumento não está bem calibrado.

Problema 26

(a) Não, pois volumes de precipitação muito altos ou muito baixos devem prejudicar a plantação, fazendo com que a produção seja baixa.

(b)



Problema 27

$\hat{y}_i = 2{,}250 + 90{,}625 x_i$.

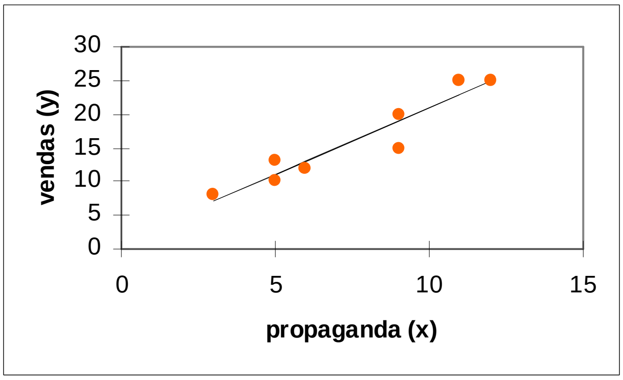
FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	2628,13	2628,13	11,599

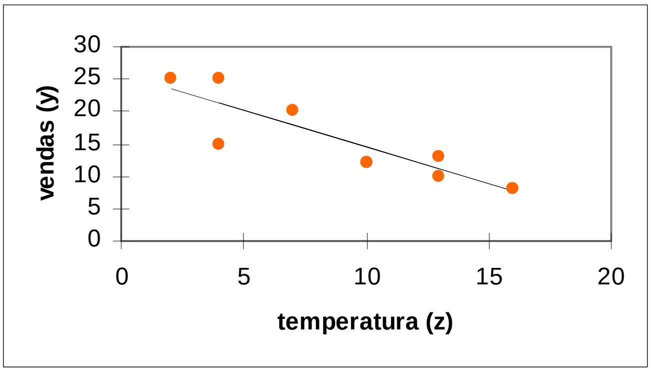
Resíduo	10	2265,88	226,59
Total	11	4894,00	

Rejeitamos $H_0 : \beta_1 = 0$ (p-value=0,007). A log-dose de insulina ajuda a prever a queda na quantidade de açúcar no sangue.

Problema 28

(a)





(b) $\hat{y}_i = 1{,}312 + 1{,}958 x_i$; $\hat{y}_i = 25{,}710 - 1{,}126 z_i$.

(c) y=f(x), pois sua estatística F é maior.

(d) $IC(E(Y \mid x = 8);95\%) = 16{,}976 \pm 2{,}447 \times \sqrt{4{,}646} \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{(8-7{,}5)^2}{72}} = [15{,}09;18{,}87]$.

Problema 29

(a) $b^2 = \frac{SQ\,\mathrm{Re}g}{(n-1)s_x^2} = \frac{SQTot \times r^2}{(n-1)s_x^2} = \frac{(n-1)s_y^2 \times r^2}{(n-1)s_x^2} = \left(0{,}92 \times \frac{13{,}84}{216{,}02}\right)^2 \Rightarrow b = 0{,}0589$.

$a = \bar{y} - b\bar{x} = 60 - 0{,}0589 \times 400 = 36{,}440$. Logo: $\hat{y}_i = 36{,}440 + 0{,}0589 x_i$.

(b)

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	972,75	972,75	27,55
Resíduo	5	176,52	35,30	
Total	6	1149,27		

(c) $F_c = F(1;5;95\%) = 6{,}61$. Devemos rejeitar H_0, ou seja, a quantidade de fertilizante usada influi na produtividade.

Problema 30

Teórico.

Problema 31

Teórico.

Problema 32

Teórico.

Problema 33

Teórico.

Problema 34

Teórico.

Problema 35

FV	g.l.	SQ	QM	F
Regressão	1	26,21	26,21	243,51
Resíduo	8	0,86	0,11	
Total	9	27,07		

$IC(\alpha^*;95\%) = [5{,}033;5{,}512]$; $IC(\beta;95\%) = [0{,}240;0{,}323]$.

Problema 36

W $IC(\alpha;95\%) = [e^{5,033};e^{5,512}] = [153{,}40;247{,}54]$

Problema 37

(a) $IC(E(Y\,|\,x=28);95\%) = 105{,}7 \pm 2{,}101 \times \sqrt{31{,}28} \times \sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{(28-30)^2}{1000}} = [102{,}98;108{,}43]$

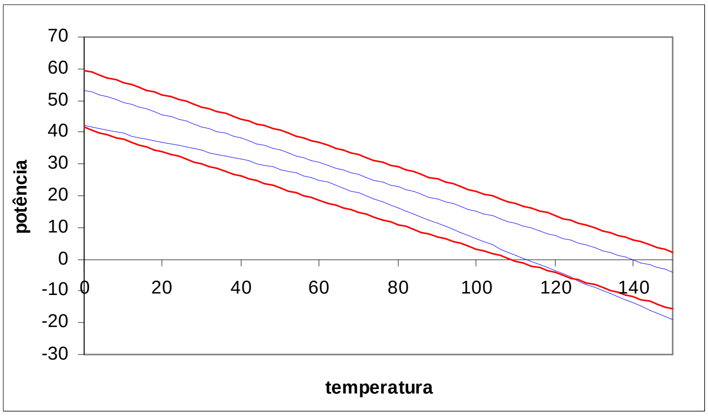
(b) $IP(Y(28);95\%) = 105{,}7 \pm 2{,}101 \times \sqrt{31{,}28} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{20} + \dfrac{(28-30)^2}{1000}} = [93{,}64;117{,}76]$.

(c) O intervalo de previsão tem amplitude maior que o intervalo de confiança.

Problema 38

$$IC(E(Y\,|\,x);95\%) = 50{,}457 - 0{,}381x \pm 2{,}306 \times \sqrt{13{,}86} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(x-60)^2}{4200}} .$$

$$IP(Y(x);95\%) = 50{,}457 - 0{,}381x \pm 2{,}306 \times \sqrt{13{,}86} \times \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(x-60)^2}{4200}} .$$



Pelo gráfico, a potência média já poderia ser zero a uma temperatura de aproximadamente 110º.

Problema 39

(a) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum x_i^{\ 2} - n\bar{x}^2} = 12$; $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 10$; $\hat{y}_i = 10 + 12x_i$.

(b) Para uma viagem com "duração zero", a despesa média é de 10 U.M. Ou seja, esta é uma despesa fixa, possivelmente relacionada com os preparativos com a viagem. Além disso, a despesa média diária é de 12 U.M.

(c) $P(Y > c) = 90\%$, onde c é o limite superior do intervalo de previsão para $Y(7)$ com coeficiente de confiança de 80%.

$c = 94 \pm 1{,}289 \times \sqrt{100} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{102} + \dfrac{(7-5)^2}{1600}} = 106{,}97$. Logo, o viajante deverá levar 106,97 U.M. para que a chance de lhe faltar dinheiro seja de uma em 10.