

2.2. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim \text{Binomial}(2, \theta)$

- (i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de  $\theta$ .
- (ii) Encontre uma estatística suficiente para  $\theta$ .
- (iii) Obtenha um estimador não viciado para  $\theta$  que seja função da estatística suficiente.
- (iv) Verifique se o estimador é eficiente.

**Solução:** A função de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x} I_A(x), \quad A = \{0, 1, 2\}.$$

Note que:

$$\mu = E(X) = 2\theta \quad e \quad V(X) = \sigma^2 = 2\theta(1-\theta).$$

Para achar o limite inferior de Cramer-Rao vamos inicialmente calcular a função escore:

O suporte  $A = \{0, 1, 2\}$  não depende de  $\theta$ .

$$f(X|\theta) = \binom{2}{X} \theta^X (1-\theta)^{2-X}.$$

$$\log(f(X|\theta)) = \log\left(\binom{2}{X}\right) + X \log(\theta) + (2-X) \log((1-\theta)).$$

$$V = \frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} = \frac{X}{\theta} - \frac{2-X}{1-\theta} = \frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}.$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\theta) = \text{Var}(V) = \text{Var}\left(\frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} V(X) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} 2\theta(1-\theta)$$

$$I_F(\theta) = \frac{2}{\theta(1-\theta)}$$

Seja  $T$  um estimador não viciado de  $\theta$

Sabemos que:

$$\text{Var}(T) \geq \frac{1}{n I_F(\theta)} = LI(\theta).$$

Assim

$$\text{Var}(T) \geq \frac{\theta(1-\theta)}{2n} = LI(\theta).$$

Vamos responder ao item **ii** usando o critério da fatoração de Neyman:

A distribuição conjunta da amostra é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \binom{2}{x_i} \theta^{x_i} (1 - \theta)^{2-x_i}.$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \theta^s (1 - \theta)^{2n-s} \prod_{i=1}^n \binom{2}{x_i},$$

em que  $s = \sum_{i=1}^n x_i$ .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \left[ \frac{\theta}{1 - \theta} \right]^s (1 - \theta)^{2n} \prod_{i=1}^n \binom{2}{x_i} = g(s, \theta) h(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Assim pelo critério da fatoração temos que:

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(2n, \theta)$$

é uma estatística suficiente para  $\theta$ .

Note que

$$E(S) = 2n \theta.$$

$$E\left(\frac{S}{2n}\right) = \theta.$$

Assim

$$T = \frac{S}{2n} = \frac{\bar{X}}{2}$$

é o nosso estimador procurado.

A variância de  $T$  é dada por:

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{4n^2} \text{Var}(S) = \frac{1}{4n^2} 2n \theta (1 - \theta) = \frac{\theta(1 - \theta)}{2n} = \text{LICR}.$$

Assim  $T$  é eficiente.

Retire uma amostra de tamanho  $n = 100$  de  $X \sim \text{Binomial}(2, \theta = 0,5)$

e estime  $\theta$  e seu erro padrão.

```
set.seed(32)
>
> A=rbinom(100,2,1/2);A
[1] 1 1 2 1 0 2 2 2 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 1 1 2 2 2 1 2 1
[38] 0 2 2 1 2 0 1 2 0 1 2 2 0 2 2 1 1 0 0 2 2 1 2 2 0 1 0 0 2 2 0 2 1 2 1 1 0
[75] 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 2 0 2 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0
> table(A)
A
0  1  2
24 45 31
```

```
>
> s=sum(A);s
[1] 107
> xb=mean(A);xb
[1] 1.07
>
>
>
> ###A estimativa de teta usando o estimador T é:
>
> t=xb/2;t ####estimativa de teta!!!!
[1] 0.535
>
> ##Vamos estimar a variância de T
>
>
> ##
> n=100
> VT_est=t*(1-t)/(2*n);VT_est
[1] 0.001243875
>
> ep_est=sqrt(VT_est);ep_est
[1] 0.03526861
>
>
>
```