02. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$
Queremos testar:

$$H_0 : \mu = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu = 1.$$

Encontre n que produz o teste mais poderoso com $\alpha = \beta = 0,05$.

Solução: Notemos que para

$$X \sim N(\mu, 1)$$

sua f.d.p. é dada por:

$$f(x|\mu) = (2\pi)^{-1/2} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} \, I_A(x), A = (-\infty, \infty).$$

Note que:

$$L(\mu; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-1/2} \, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}.$$

Seja $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

$$L(\mu; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$L(\mu; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

Se a hipótese nula é verdadeira temos $\mu = 0$:

$$L_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2}}$$

Se a hipótese alternativa é verdadeira temos $\mu = 1$:

$$L_1(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-1)^2}{2}}.$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson , utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{(2\pi)^{-n/2}\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{-n/2}\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2}}}.$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2 - x_i^2\right)\right)$$

Assim

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-2x_i+1)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}\right)$$

Seja

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

De

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k$$

temos

$$\log\left(exp\left(s - \frac{n}{2}\right)\right) \geq \log(k)$$

$$s - \frac{n}{2} \geq \log(k)$$

$$s \geq \log(k) + \frac{n}{2} = c$$

A nossa região crítica é da forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c.$$

Devemos achar a distribuição amostral de

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(n\mu, n).$$

Se H_0 é verdade temos $\mu = 0$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(0, n).$$

$$Z = \frac{(S-0)}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$0,05 = P_{H_0}(S \geq c) = P\left(Z \geq \frac{c}{\sqrt{n}}\right) = P(Z \geq 1,645).$$

Assim

$$\frac{c}{\sqrt{n}} = 1,645 \tag{1}$$

Se H_1 é verdade temos $\mu = 1$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(n, n).$$

$$Z = \frac{(S-n)}{\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$0,05 = P_{H_1}(S < c) = P\left(Z < \frac{(c-n)}{\sqrt{n}}\right) = P(Z < -1,645).$$

Assim

$$\frac{c-n}{\sqrt{n}} = -1,645 \tag{2}$$

$$\frac{c}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = -1,645.$$

Levando a primeira equação na segunda:

$$1,645 - \sqrt{n} = -1,645.$$

$$\sqrt{n} = 2 \times 1,645 = 3,39.$$

$$n = (3,39)^2 = 10,82.$$

$$n = 11.$$

```
> 2*1.645
[1] 3.29
> 3.29^2
[1] 10.8241
>
> n=ceiling(3.29^2);n
[1] 11
>
c=1.645/3.29;c
[1] 0.5
>
```