08. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

(i) Encontre o teste **UMP** para testar:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

(ii) Se $\alpha = 0,05$, $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$ faça o gráfico da função poder.

Solução:

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

sua f.d.p. é dada por:

$$f(x|sigma^2) = (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2)^{-1/2}\; e^{-\frac{x^2}{2}}\; I_A(x), A = (-\infty, \infty).$$

Vamos definir o teste alternativo:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2, \;\; \sigma_1^2 > \sigma_0^2.$$

Note que:

$$L(\sigma^2; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-1/2}\; (\sigma^2)^{-1/2}\; e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}.$$

$$L(\sigma^2; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\sigma^2; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2}\; e^{-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\sigma^2; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Fazendo

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

temos:

$$L(\sigma^2; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2}\; e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}.$$

Se H_0 é verdade temos $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
Assim

$$L_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_0^2)^{-n/2}\; e^{-\frac{s}{2\sigma_0^2}}.$$

Se H_1 é verdade temos $\sigma^2 = \sigma_1^2$. Assim

$$L_1(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2}(\sigma_1^2)^{-n/2}\ e^{-\frac{s}{2\sigma_1^2}}.$$

Vamos aplicar o Lema de Neyman-Pearson:

$$\frac{L_1(\mathbf{x}\ )}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\sigma_1^2)^{-n/2}\ e^{-\frac{s}{2\sigma_1^2}}}{(2\pi)^{-n/2}(\sigma_0^2)^{-n/2}\ e^{-\frac{s}{2\sigma_0^2}}}$$

$$= \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right]^{-n/2}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right]\ s\right)$$

Seja

$$b = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right] = -\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{2\sigma_0^2\sigma_1^2} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_0^2\sigma_1^2} > 0$$

por hipótese.

$$\frac{L_1(\mathbf{x}\ )}{L_0(\mathbf{x})} = \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right]^{-n/2}\ \exp(bs) \geq k$$

Aplicando logaritmo natural:

$$-\frac{n}{2}\log(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}) + bs \geq log(k)$$

$$s \geq \frac{\log(k) + \frac{n}{2}\log(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2})}{b} = c.$$

Com a região crítica não variou com σ_1^2ela é a região uniformemente mais poderosa pedida.
Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Sabemos que

$$Z = \frac{X - 0}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

$$Z = \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\ \frac{X_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} = \frac{S}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

Vamos resolver o item **b** :
Como $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$. Se H_0 é verdade:

$$V = \frac{S}{\sigma_0^2} = \frac{S}{9} \sim \chi^2(9).$$

Pela tabela temos:

$$P(V > 16,919) = 0,05,$$

$$\alpha = P_{H_0}(S \geq c) = P_{H_0}\left(\frac{S}{9} \geq \frac{c}{9}\right) = P(V > \frac{c}{9}) = 0,05$$

$$\frac{c}{9} = 16,919$$

$$c = 152,271.$$

Nossa região UMP fica:
Se

$$s = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 \geq 152,271$$

rejeitar H_0. Caso contrário não rejeitar.
A função poder do teste é dado por:

$$\pi(\sigma^2) = P(Rejeitar\ \ H_0|\sigma^2) = P(S \geq 152,271) =$$

$$= P\left(\frac{S}{\sigma^2} \geq \frac{152,271}{\sigma^2}\right) = P(V \geq \frac{152,271}{\sigma^2}).$$

com

$$V \sim \chi^2(9).$$

Vamos usar o **R**:

```
 n=9
>
> P95=qchisq(0.95,n);P95
[1] 16.91898
> round(P95,3)
[1] 16.919
>
>
> ###P(S> c)=0,05= P(S/9>c/9)=P(V > c/9)=0,05
>
> c=9*16.919;c
[1] 152.271
>
```

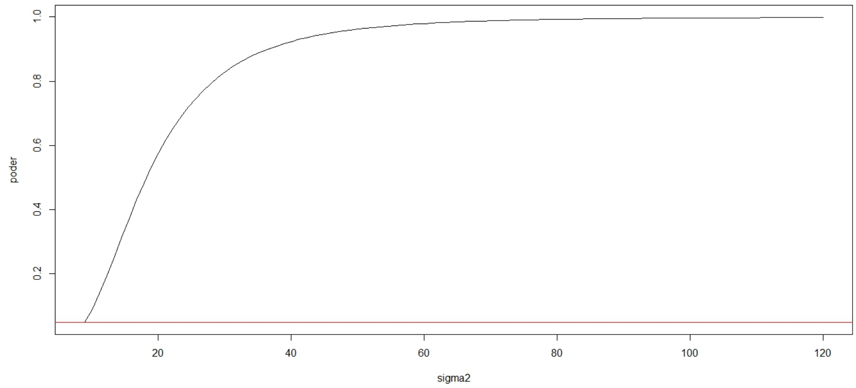

Figura 1:

```
> poder=function(sigma2) 1- pchisq(152.271/sigma2,n)
>
> poder(9)
[1] 0.04999964  ##5%
>
> plot(poder,9, 120,xlab="sigma2")
> abline(h=0.05,col="red")
>
```