1 Distribuição Normal-2023.1

Notas de aula preparadas pelo Professor Maurício Mota para o semestre 2023.1 para servir de base a disciplina de Inferência.

1.1 Introdução

A distribuição Normal é a mais importante variável aleatória usada na Estatística. De Moivre foi o primeiro pesquisador a utilizar a distribuição pois ele notou que toda vida que um experimento for replicado a média dos resultados obtidos terá um histograma em forma de sino à medida que o tamanho da amostra se torne grande. Este trabalho ficou perdido por uns 100 anos até que Gauss, brilhante matemático alemão, desenvolveu uma distribuição normal que é conhecida como distribuição Gaussiana.

Ele fornece um modelo para estudos em que a variável é fruto de uma mensuração.

Várias variáveis clínicas, pelo menos aproximadamente, seguem a distribuição Normal: valores da hemoglobina em pacientes sadios, pressão arterial sistólica,temperatura corporal, alturas de crianças de mesma idade, nível de fosfatase alcalina em uma população de pessoas sadias Ela é usada para a criação de faixas de referência para várias variáveis clínicas.

Além disso é a distribuição mais usada na Teoria Assintótica devido ao Teorema do Limite Central.

1.2 Função Densidade de Probabilidade.

Definição. Dizemos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição Normal de parâmetros μ e σ^2 se sua fdp é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ I_{(-\infty,\infty)}(x),\ \mu \in I\!R \text{ e } \sigma^2 > 0.$$

Notação: $X \sim$ Normal (μ, σ^2).

Observação 1. Lê-se a notação do seguinte modo: *X segue distribuição Normal de parâmetros* μ *e* σ^2.

Vamos provar agora que $f(x)$ é realmente uma função densidade de probabilidade.

Prova: *$f(x) > 0$ para qualquer x real. Considere:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Vamos provar que

$$I = 1.$$

Fazendo a mudança

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \;\Rightarrow\; dz = \frac{dx}{\sigma}$$

, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{Função par}} \; dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Fazendo uma nova mudança

$$u = \frac{z^2}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = 2u \;\Rightarrow\; z = \sqrt{2}\sqrt{u}$$

$$du = z dz \;\Rightarrow\; dz = z^{-1} du \;\Rightarrow\; dz = \left(\sqrt{2}\sqrt{u}\right)^{-1} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \; du$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} du$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} \; e^{-u} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Observação 2.

Poderíamos usar a função Gama Generalizada:

Para $a > 0, b > 0, c > 0$.

$$IGG(a,b,c) = \int_0^{\infty} \; x^{a-1} e^{-b\,x^c} \; dx = \frac{\Gamma(a/c)}{c\, b^{a/c}}.$$

Logo,

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \, IGG(a = 1, b = 2^{-1}, c = 2$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{2 \; 2^{-1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

1.3 Padronização

Se $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, então,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N\left(0, 1\right).$$

Prova:

$$G\left(z\right) = I\!P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) = I\!P\left(X \leq \mu + \sigma z\right) = F\left(\mu + \sigma z\right)$$

$$g\left(z\right) = G'\left(z\right) = \sigma f\left(\mu + \sigma\right) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Assim $Z \sim N\left(0, 1\right)$

1.4 Transformação Afim da Normal Padrão

Se $Z \sim N\left(0, 1\right)$, então,

$$X = \mu + \sigma Z \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

Prova:

$$F\left(x\right) = I\!P\left(X \leq x\right) = I\!P\left(\mu + \sigma Z \leq x\right) = I\!P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$f\left(x\right) = F'\left(x\right) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in I\!R$$

Assim $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$

1.5 Combinação Linear $Y = aX + b$ de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *então,*

$$Y = aX + b \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right).$$

Prova:

Suponha inicialmente que $a > 0$

$$G(y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{a} g\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b-a\mu}{a\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \; e^{-\left\{\frac{1}{2}\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{a^2\sigma^2}\right\}}$$

Fazendo $\mu_1 = a\mu + b$ *e* $\sigma_1 = a\sigma \;\Rightarrow\; \sigma_1^2 = a^2\sigma^2$
Temos que

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \; e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

Assim, $Y \sim N\left(\mu_1 = a\mu + b, \sigma_1^2 = a^2\sigma^2\right).$

Suponha agora que $a < 0$

$$G(y) = \mathbb{P}(aX \leq y - b) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$g(y) = G'(y) = -\frac{1}{a}\, f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

assim

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a)\sigma} \; e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_1)^2}{a^2\sigma^2}}$$

com $\mu_1 = a\mu + b$ *e ao fazermos* $\sigma_1 = (-a)\sigma$ *também teremos* $\sigma_1^2 = a^2\sigma^2$

Deste modo também teremos $Y \sim N\left(\mu_1 = a\mu + b, \sigma_1^2 = a^2\sigma^2\right).$
Observação. O desvio-padrão de Y *será* $\sigma_Y = |a|\,\sigma.$

1.6 Média e Variância da Normal Padrão.

Se $Z \sim N(0,1)$, *então,*

$$E(Z) = 0 \;\; e \;\; V(Z) = 1.$$

Prova:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\; e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in I\!R$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\; e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(z) dz$$

Seja $h(z) = z \;\; e^{-\frac{z^2}{2}} \;\; \Rightarrow \;\; h(-z) = -z \, e^{-\frac{z^2}{2}} = -h(z)$

Portanto $h(z)$ *é uma função ímpar, logo*

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\; \times \;\; 0 = 0$$

Vamos calcular agora $E[Z^2]$

$$E\left[Z^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}}}_{par} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} z \, e^{-\frac{z^2}{2}} \; z \, dz$$

Fazendo

$$u = \frac{z^2}{2} \;\; \Rightarrow \;\; z^2 = 2\,u \;\; \Rightarrow \;\; z = \sqrt{2}\, u^{\frac{1}{2}}$$

$$du = \frac{2\; z\; dz}{2} \;\; \Rightarrow \;\; z\, dz = du$$

$$E\left[Z^2\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sqrt{2}\, u^{\frac{1}{2}} \; e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} u^{\frac{1}{2}} \; e^{-u} du$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{2\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Assim

$$V\left(Z\right)=E\left[Z^{2}\right]-E^{2}\left(Z\right)=1-0=1$$

Observação 3.

Poderíamos usar a função Gama Generalizada:

$$E\left[Z^{2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}z^{2}\,e^{-\frac{z^{2}}{2}}\,dz=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,IGG(a=3,b=2^{-1},c=2),$$

$$E\left[Z^{2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(3/2)}{2\;2^{-3/2}}=\frac{2\;\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi}}=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}=1.$$

1.7 Média e Variância da Normal Geral.

Se $X\sim N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$, *então,*

$$E\left(X\right)=\mu\quad e\quad V\left(X\right)=\sigma^{2}.$$

Prova:

Pelo Fato 3 temos que

$$X=\mu+\sigma Z,\;\; Z\sim N(0,1).$$

Assim

$$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu+\sigma\;E(Z)=\mu,$$

pois $E(Z)=0$.

A variância de X *é dada por:*

$$V(X)=V(\mu+\sigma Z)=\sigma^{2}\;V(Z)=\sigma^{2},$$

pois $V(Z)=1$.

1.8 Assimetria e Curtose da Normal Padrão

Se $Z \sim N(0,1)$, *então,*

$$E\left(Z^3\right) = 0 \ \ e \ E\left(Z^4\right) = 3.$$

Prova:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in I\!R$$

$$E\left(Z^3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} z^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\, dz$$

Seja

$$h(z) = z^3 \ e^{-\frac{z^2}{2}} \ \Rightarrow \ h(-z) = -z^3 \, e^{\frac{-z^2}{2}} = -h(z)$$

Portanto $h(z)$ *é uma função ímpar, logo*

$$E\left(Z^3\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 = 0.$$

Vamos calcular agora $E\left[Z^4\right]$

$$E\left[Z^4\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z^4 \, e^{-\frac{z^2}{2}}}_{par} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z^4 \ e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \ z^3 \ e^{-\frac{z^2}{2}} \ zdz$$

Fazendo

$$u = \frac{z^2}{2} \ \Rightarrow \ z^2 = 2u \ \Rightarrow \ z^2 = 2u \ \Rightarrow = \sqrt{2} u^{\frac{1}{2}}$$

$$du = \frac{2zdz}{2} \ \Rightarrow \ zdz = du$$

$$E\left[Z^4\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} 2\sqrt{2} u^{\frac{3}{2}} \ e^{-u} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} u^{\frac{3}{2}} \ e^{-u} du$$

$$= \frac{4\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\,\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 3.$$

Assim

$$E\left(Z^4\right) = 3.$$

Observação 3.

Poderíamos usar a função Gama Generalizada:

$$E\left[Z^4\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^4\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, IGG(a = 5, b = 2^{-1}, c = 2),$$

$$E\left[Z^4\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma(5/2)}{2\, 2^{-5/2}} = \frac{4\,\Gamma(5/2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 3.$$

1.9 Assimetria e Curtose da Normal .

Se $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$*, então:*

$$\mu_3 = 0,\ \mu_4 = 3\sigma^4,\ \alpha_3 = 0 \quad e \quad \alpha_4 = 3.$$

Prova:

Como

$$Z^3 = \frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3} \quad \longrightarrow \quad (X-\mu)^3 = \sigma^3 Z^3.$$

Assim,

$$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = \sigma^3 E(Z^3) = 0,$$

e portanto $\alpha_3 = 0$*, pois*
pois

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

O coeficiente de assimetria é nulo.

Da mesma maneira

$$Z^4 = \frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4} \quad \longrightarrow \quad (X-\mu)^4 = \sigma^4 Z^4.$$

Assim,

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = \sigma^4 E(Z^4) = 3\sigma^4,$$

e portanto $\alpha_4 = 3$,
pois

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4},$$

A distribuição Normal é mesocúrtica.

1.10 Momento de Ordem r em Relação à Origem da Normal Padrão.

Se $Z \sim N(0,1)$, *então*

$$E(Z^r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ \dfrac{r!}{2^{r/2}\,(r/2)!} & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

.

Prova:

Se r *é ímpar,*

$$\begin{aligned} E[Z^r] &= \int_{-\infty}^{\infty} z^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^r e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0, \end{aligned}$$

pois o integrando é uma função ímpar.

Se r *é par*

$$E[Z^r] = \int_{-\infty}^{\infty} z^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{r-1}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}}\, zdz,$$

pois o integrando é uma função par. Fazendo a mudança de variável

$$2u = z^2 \longrightarrow 2du = 2zdz,$$

assim,

$$du = zdz \;\; e \;\; z = \sqrt{2}\, u^{1/2}.$$

Desse modo

$$
\begin{aligned}
E\left[Z^{r}\right] &= \frac{\sqrt{2}\,2^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} u^{\frac{r-1}{2}}\, e^{-u} du, \\
&= \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma(\frac{r+1}{2}).
\end{aligned}
$$

Observação 3.

Poderíamos usar a função Gama Generalizada:

Se r é par:

$$E\left[Z^{r}\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} z^{r}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\ IGG(r+1, 2^{-1}, c=2),$$

$$E\left[Z^{r}\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\Gamma((r+1)/2)}{2\ 2^{-(r+1)/2}} = \frac{2^{r/2}\ \Gamma((r+1)/2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Sabemos que se a é um inteiro ímpar

$$\Gamma(a/2) = \frac{\sqrt{\pi}(a-1)!}{2^{a-1}[(a-1)/2]!}.$$

Como r é par temos que (r+1) é ímpar e portanto

$$E\left[Z^{r}\right] = \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\sqrt{\pi} r!}{2^{r}(r/2)!} = \frac{r!}{2^{r}(r/2)!}.$$

1.11 Momento Central de ordem r da Normal.

Se $X \sim N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$, então

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^{r}\right]| = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ \dfrac{\sigma^{r}\ r!}{2^{r/2}\ (r/2)!} & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

.

Prova:

Como

$$Z^{r} = \left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^{r} = \frac{(X-\mu)^{r}}{\sigma^{r}},$$

assim,

$$E\left[(X-\mu)^r\right] = \sigma^r\ E(Z_r).$$

Logo,

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] \mid = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ \dfrac{\sigma^r\ r!}{2^{r/2}\ (r/2)!} & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

.

1.12 Momentos em Relação à origem de ordem r=1,2,3,4.

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *então*

a. $E(X) = \mu$.

b. $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$.

c. $E(X^3) = \mu^3 + 3\mu\ \sigma^2$.

d. $E(X^4) = \mu^4 + 6\mu^2\ \sigma^2 + 3\sigma^4$.

Prova:

Sabemos que

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma^2 \\ E\left[(X-\mu)^2\right] &= \sigma^2 \\ E(X^2) - \mu^2 &= \sigma^2 \\ E(X^2) &= \mu^2 + \sigma^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E\left[(X-\mu)^3\right] &= 0 \\ E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 2\mu^3 &= 0 \\ E(X^3) - 3(\mu^2+\sigma^2)\mu + 2\mu^3 &= 0 \\ E(X^3) &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2. \end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
E\left[(X-\mu)^4\right] &= 3\sigma^4 \\
E(X^4) - 4E(X^3)\ E(X) + 6E(X^2)\ E^2(X) - 3\ E^4(X) &= 3\sigma^4 \\
E(X^4) - 4(\mu^3 + 3\mu\sigma^2)\mu + 6(\mu^2 + \sigma^2)\mu^2 - 3\mu^4 &= 3\sigma^4 \\
E(X^4) - 4\mu^4 - 12\mu^2\sigma^2 + 6\mu^2\sigma^2 + 6\mu^4 - 3\mu^4 &= 3\sigma^4 \\
E(X^4) - \mu^4 - 6\mu^2\sigma^2 &= 3\sigma^4. \\
E(X^4) = & \quad 3\sigma^4 + \mu^4 + 6\mu^2\ \sigma^2.
\end{aligned}$$

1.13 Função Geradora de Momentos da Normal Padrão.

Se $Z \sim N\,(0,1)$, então

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}, \;\; t \text{ real.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(z^2-2zt)} dz, \end{aligned}$$

Vamos completar o quadrado $z^2 - 2zt$ da seguinte maneira:

$$z^2 - 2zt = z^2 - 2zt + t^2 - t^2 = (z-t)^2 - t^2.$$

Assim,

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}((z-t)^2-t^2)} dz = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}((z-t)^2)} dz = e^{t^2/2} \times 1 = e^{t^2/2},$$

pois é a integral de uma $N(t,1)$.

1.14 Função Geradora de Momentos.

Se $X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$, então

$$M_X(t) = e^{\mu\, t + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}, \;\; t \text{ real.}$$

Prova:

Sabemos que $X = \mu + \sigma\, Z,\; Z \sim N(0,1)$.

Logo

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\
&= E\left(e^{t(\mu+\sigma\, Z)}\right) \\
&= E\left(e^{t\mu}\, e^{t\sigma Z}\right) \\
&= e^{t\mu}\, M_Z\,(t\sigma) \\
&= e^{t\mu}\, e^{\dfrac{\sigma^2 t^2}{2}} \\
&= e^{t\mu + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

1.15 Distribuição de Z^2

Se $Z \sim N\,(0,1)$, *então* $W = Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Prova:

Para $w > 0$ *a função de distribuição de* W, H, *é dada por:*

$$
\begin{aligned}
H(w) &= P(W \leq w) \\
&= P(Z^2 \leq w) \\
&= P(|Z| \leq \sqrt{w}) \\
&= P(Z \leq \sqrt{w}) - P(Z \leq -\sqrt{w}) \\
&= G(\sqrt{w}) - G(-\sqrt{w}).
\end{aligned}
$$

A função de densidade de probabilidade de W *é dada por:*

$$
\begin{aligned}
h(w) &= H'(w) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{w}}\, g(\sqrt{w}) + \frac{1}{2\sqrt{w}}\, g(-\sqrt{w}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{w}} \left[g(\sqrt{w}) + g(-\sqrt{w}) \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{w}} \left[2g(\sqrt{w}) \right] \quad , g \quad \acute{e} \ \ par. \\
&= \frac{1}{\sqrt{w}} \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \ e^{-w/2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1/2)\ 2^{1/2}}\ w^{-1/2}\ e^{-w/2}\ \ I_A(w), \quad A = (0, \infty),
\end{aligned}
$$

que é a densidade da $\chi^2(1)$.

Observação 2. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \ \ e$$

$$Z^2 = \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

Vamos voltar agora a estudar com mais detalhes a função densidade de probabilidade da $N(\mu, \sigma^2)$.

1.16 Propriedades da Densidade Normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

a. *$f(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$.*

b. *$\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão de $f(x)$.*

c. *$x = \mu$ é o ponto de simetria.*

d. *A moda é o ponto $Mo = \mu$.*

Prova:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = 0,$$

e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = 0.$$

Para achar os pontos de inflexão de $f(x)$ *vamos obter sua derivada segunda. Logo,*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
f^{'}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; \left[-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right] \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \; (x-\mu) \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
f^{''}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \; \left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&= -\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \; \left[1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] = 0
\end{aligned}$$

Logo para anular a derivada segunda devemos ter:

$$(x-\mu)^2 = \sigma^2,$$

o que acarreta

$$|x-\mu| = \sigma,$$

que nos leva a $x_1 = \mu - \sigma$ *e* $x_2 = \mu + \sigma$ *como os pontos de inflexão de* $f(x)$.

Vamos mostrar que o ponto de simetria é $x = \mu$.

Prova:

$$
\begin{aligned}
f(\mu + x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
f(\mu - x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(\mu-x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
f(\mu + x) &= f(\mu - x)\ \ \forall\, x.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $Mo = \mu$.

Prova:

$$
\begin{aligned}
Mo &= \max\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&= \max\left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&= \max\left[\frac{1}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}\right] \\
&= \min\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \min[(x-\mu)^2]
\end{aligned}
$$

$Mo = \mu.$

Observação 3. Vamos apresentar o gráfico da fdp de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mostrando os pontos de inflexão e o ponto de simetria.

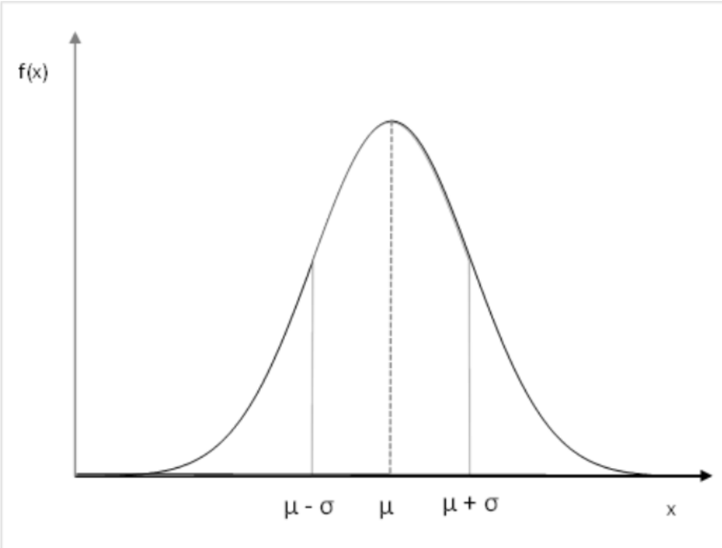

Figura 1:

1.17 Função de Distribuição de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Prova:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\; e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad fazendo\ z = (t-\mu)/\sigma, \;\; dt = \sigma dz \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

em $\Phi(z)$ é a acumulada da Normal padrão.

Observação 4 A função de distribuição da $N(\mu, \sigma^2)$ é calculada com o auxílio da acumulada da normal padrão. Esta integral não pode ser calculada diretamente e então ela só pode ser obtida usando métodos numéricos. Na próxima seção vamos aprender a usar as tabelas da Normal padrão.

1.18 Tabulação da Distribuição da Normal Padrão.

Seja $Z \sim N(0,1)$. A probabilidade $P(a < Z \leq b)$

é calculada como:

$$P(a < Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = G(b) - G(a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Esta função $\Phi(z)$ *vem tabulada nos diversos livros de Estatística e seu uso correto é a primeira coisa que um bom aluno deve conhecer. Vamos calcular algumas probabilidades usando a tabela 1 do Meyer. Para se olhar na tabela o número tem que vir com duas casas decimais. Olha-se o valor inteiro e a primeira casa decimal na linha z e a segunda casa decimal na coluna. A interseção linha com a coluna correspondente traz a probabilidade procurada.*

Exemplo 1.1 *Usando a tabela 1 do Meyer calcule:*

a. $P(Z \leq 2)$.

```
> ###item a: P(Z <=2)
>
>
> curve(dnorm(x,0,1), -3,3,xlab="z",ylab="g(z)",main=" Z~N(0,1)")
>
> polygon(c(-3.2,seq(-3.2,2,l=30),2),c(0,dnorm(seq(-3.2,2,l=30),0,1),
+ 0),density=10,col="red")
>
> round(pnorm(2),4)
[1] 0.9772
>
```

b. $P(Z \leq 1,18)$.

```
> round(pnorm(1.18),4)
[1] 0.881
>
```

c. $P(Z \leq -1)$.

Figura 2:

```
> round(pnorm(-1),4)
[1] 0.1587
>
```

d. $P(0,5 \leq Z \leq 1,42)$.

```
>
> #####P(0,5 <Z <1,42)=P(Z <1,42)-p(Z <0,5)=p2-p1
>
>
>
> curve(dnorm(x,0,1), -3,3,xlab="z",ylab="g(z)",main=" Z~N(0,1)")
>
> polygon(c(0.5,seq(0.5,1.42,l=30),1.42),c(0,dnorm(seq(0.5,1.42,l=30),0,1
+ 0),density=10,col="red")
> abline(h=0,col="blue")
>
> p2=pnorm(1.42);p2
[1] 0.9221962
> p1=pnorm(0.5);p1
[1] 0.6914625
>
> p=p2-p1;p
[1] 0.2307337
>
```

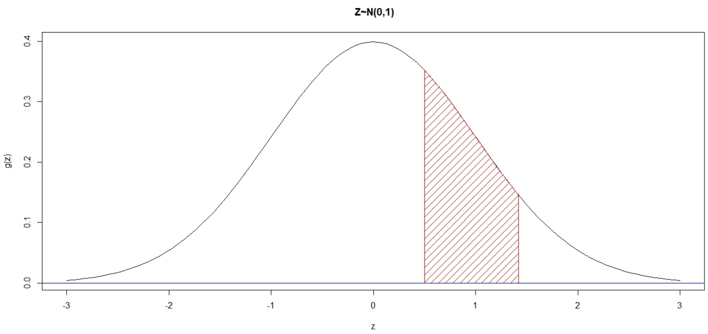

Figura 3:

e. $P(Z > 1,25)$.

```
>
> #####P(Z >1,25)
>
>
> round(1-pnorm(1.25),4)
[1] 0.1056
>
```

f. $P(Z \leq 0)$.

```
> pnorm(0)
[1] 0.5
>
```

Exemplo 1.2 *Usando a tabela do Morettin&Bussab responda ao* ***Exemplo 1.1****.*

Solução:

$$P(Z \leq 2) = P(Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 2) = 0,5 + 0,47725 = 0,97725.$$

$$P(Z \leq 1,18) = P(Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 1,18) = 0,5 + 0,381 = 0,881.$$

Sabemos que se

$$Z \sim N(0,1) \text{ , então } -Z \sim N(0,1).$$

$$P(Z \leq -1) = P(-Z \leq 1) = P(Z \leq 1) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 1) = 0,5 - 0,34134 = 0,15866.$$

$$P(0,5 < Z \leq 1,42) = P(0 < Z \leq 1,42) - P(0 < Z \leq 0,5) = 0,4220 - 0,19146 = 0,23074.$$

$$P(Z > 1,25) = P(Z > 0) - P(0 < Z \leq 1,25) = 0,5 - 0,39435 = 0,10556.$$

$$P(Z \leq 0) = P(Z > 0) = 0.5.$$

Exemplo 2. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *Mostre que:*

a. $P(X \leq \mu + \sigma) = 0,8413.$

b. $P(X \leq \mu - \sigma) = 0,1587.$

c. $P(X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9772.$

d. $P(X \leq \mu - 2\sigma) = 0,0228.$

e. $P(X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9987.$

f. $P(X \leq \mu - 3\sigma) = 0013.$

g. $P(|X - \mu| \leq \sigma) = 0,6826.$

h. $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 0,9544$

f. $P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 0,9974$

Solução: Note que:

$$P(X \leq \mu + a\sigma) = P(Z \leq a), \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

$$P(|X - \mu| \leq a\sigma) = P(|Z| \leq a), \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Assim,

$$P(X \leq \mu + \sigma) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413.$$

$$P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,9772.$$

$$P(X \leq \mu + 3\sigma) = P(Z \leq 3) = \Phi(3) = 0,9980.$$

$$P(X \leq \mu - \sigma) = P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 0,15873.$$

$$P(X \leq \mu - 2\sigma) = P(Z \leq -2) = \Phi(-2) = 0,0028.$$

$$P(X \leq \mu - 3\sigma) = P(Z \leq -3) = \Phi(-3) = 0,0020.$$

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|Z| \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826.$$

Solução no R.

```
>
> z=seq(-3,3)
>
> pz=pnorm(z)
> round(cbind(z,pz),4)
z     pz
[1,] -3 0.0013
[2,] -2 0.0228
[3,] -1 0.1587
[4,]  0 0.5000
[5,]  1 0.8413
[6,]  2 0.9772
[7,]  3 0.9987
```

```
>
>
```

Exemplo 2.2 *Usando a tabela do Morettin&Bussab responda ao* ***Exemplo 2.1****:*

Exemplo 3. *Se* $X \sim N(\mu = 100, \sigma^2 = 100)$*, Mostre que:*

a. $P(X \leq 120) = 0,9772.$

Solução

$$\begin{aligned} P(X \leq 120) &= P\left(Z \leq \frac{120-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{120-100}{10}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= \Phi(2), \quad tabela\ doMeyer \\ &= 0,9772. \end{aligned}$$

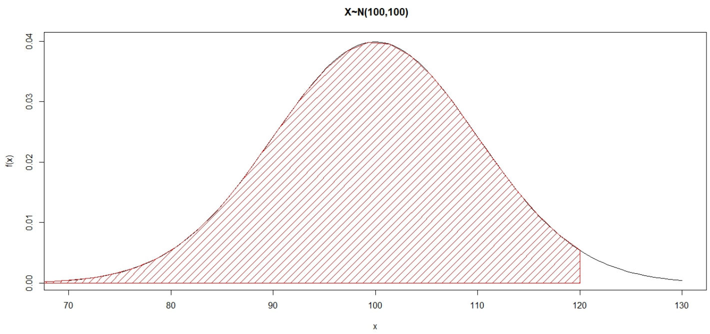

Figura 4:

b. $P(X \geq 80) = 0,1587.$

c. $P(|X - 100| \leq 10) = 0,9772.$

d. O valor de a tal $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,9544.$

Vamos agora usar o R para responder.

```
##### X~N(100,100)
mu=100;sigma=10
```

```
## item a: pa=P(X <120)=P(Z< 2)

z_a=(120-mu)/sigma;z_a

curve(dnorm(x,mu,sigma), mu-3*sigma,mu + 3*sigma,ylab="f(x)",main=" X~N(1

polygon(c(60,seq(60,120,l=30),120),c(0,dnorm(seq(60,120,l=30),mu,sigma),0
density=10,col="red")



p_a=pnorm(z_a);pnorm(115,mu,sigma);p_a;round(p_a,4)



## pb=P(X >=80)
pb=1- pnorm(80,100,10);round(pb,4)
zb=(80-100)/10;zb

1-pnorm(zb);pb




#### pc=P(|X-100|<=10)=P(|(X-100)/10 <=1)=P(|Z|<=1)=P(-1<Z<1)
#### pc=P(90<X<110)=P(X <110)-P(X<90)=pc1-pc2

pc1=pnorm(110,100,10); pc2=pnorm(90,100,10);pc1;pc2
pc=pc1-pc2;round(pc,4)

z1=(110-100)/10;z1


z2=(90-100)/10;z2

pnorm(z1)-pnorm(z2)


###### item d: P(100 -a< X < 100 +a)=P( -a< X-100 < a)=0.9544
#### 2*P( 0<  X-100 <a)=0,9544
```

```
#### P( 0<  X-100 <a)=0,4772
#### P( 0 < Z < a/10)= 0,4772, asssim P(Z < a/10)=0,9772.

### Seja z=a/10  então a=10*z

z=qnorm(0.9772,0,1);z


a=10*z;a;round(a,1)
```

1.19 Combinação Linear de Normais Independentes

Sejam

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \text{ e } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Considere a combinação linear

$$S = a_1X_1 + a_2X_2 + a_0.$$

Então S terá uma distribuição Normal com parâmetros

$$\mu_S = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_0 \;\; e \;\; \sigma_S^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2.$$

Prova:

A prova será feita através da técnica da função geradora de momentos. Assim

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] \\
&= E\left[e^{t(a_1X_1+a_2X_2+a_0)}\right] \\
&= e^{a_0t}\ E\left[e^{a_1tX_1}\ e^{a_2tX_2}\right],\ \ \textit{independentes} \\
&= e^{a_0t}E\left[e^{a_1tX_1}\right]\ E\left[e^{a_2tX_2}\right] \\
&= e^{a_0t}\ \ M_{X_1}(a_1t)\ M_{X_2}(a_2t) \\
&= e^{a_0t}\ e^{a_1\ \mu_1\ t+a_1^2\ \sigma_1^2t^2/2}\ e^{a_2\ \mu_2\ t+a_2^2\ \sigma_2^2t^2/2} \\
&= \exp\left((a_0+a_1\ \mu_1+a_2\ \mu_2)\ t+\frac{1}{2}(a_1^2\ \sigma_1^2+a_2^2\ \sigma_2^2)t^2\right),
\end{aligned}
$$

que é a f.g.m.da Normal procurada.

Algumas das transformações lineares mais usadas são:

A distribuição de

$$S = X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1\ +\mu_2\ ,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\right).$$

A distribuição de

$$D = X_1 - X_2 \sim N\left(\mu_1\ -\mu_2\ ,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\right),$$

note que , sob independência ou correlação nula,

$$V(X_1+X_2) = V(X_1-X_2),$$

A distribuição de $\bar{X} = \dfrac{X_1+X_2}{2} = (1/2)\times X_1 + (1/2)\times X_2$ *é normal com média*

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2},$$

e variância

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}.$$

Se X_1, X_2 *for uma amostra aleatória de* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *então*

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/2).$$

Este resultado das combinações lineares pode ser generalizado.

Sejam

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Então

$$Y = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i \; X_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$

onde $(a_0, a_1, , \ldots, a_n)$ *são constantes reais e*

$$\mu_Y = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i \; \mu_i,$$

e

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \; \sigma_i^2.$$

A média amostral de uma amostra aleatória de tamanho n *é uma combinação linear das* $X_{i's}$ *com* $a_i = 1/n, \; i = 1, 2, \ldots, n$ *é dada por:*

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Se a amostragem vem de população normal temos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim \; N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

Vamos fazer dois exemplos da teoria apresentada retirados do livro Curso de Estatística do Jairo Simon da Fonseca e Gilberto de Andrade Martins.

Exemplo de Aplicação 1. *Uma máquina enche latas baseada no peso bruto com média 1 kg e desvio padrão 25 g. As latas tem peso médio de 90 g com desvio padrão de 8 g. Pede-se a probabilidade de uma lata conter:*

a. *menos de 870 g de peso líquido.*

b. *mais de 900 g de peso líquido.*

Solução: *Sejam as variáveis :*

$$X_1 \sim N(1000, 625) \ \ \textit{peso bruto do produto em gramas,}$$

,

$$X_2 \sim N(90, 64) \ \ \textit{peso da lata do produto em gramas ,}$$

$$PL = X_1 - X_2 \quad \textit{peso líquido do produto.}$$

```
>
>
> ##X_1 ~N(mu1,sigma1^2), X_2 ~N(mu2,sigma2^2),PL=X_1-X_2
>
> mu1=1000;sigma1=25;mu2=90;sigma2=8
>
> muPL=mu1-mu2;muPL
[1] 910
>
> sigma2PL=sigma1^2+ sigma2^2;sigma2PL
[1] 689
>
> sigmaPL=sqrt(sigma2PL);sigmaPL
[1] 26.24881
>
>
> ####Item a:P(PL <= 870)=P(Z <=z_a)
```

```
>
>  z_a=(870-muPL)/sigmaPL;round(z_a,2)
[1] -1.52
>
> pa=pnorm(z_a);pa;pnorm(870,muPL,sigmaPL);round(pa,4)
[1] 0.06376952
[1] 0.06376952
[1] 0.0638
>
>
> ####Item b:P(PL > 900)=P(Z >=z_b)
>
>  z_b=(900-muPL)/sigmaPL;round(z_b,2)
[1] -0.38
>
> pb=pnorm(z_b,lower.tail=F);pb;pnorm(900,muPL,sigmaPL,lower.tail=F);r
[1] 0.6483871
[1] 0.6483871
[1] 0.6484
>
>
```

Exemplo de Aplicação 2: *Um produto pesa, em média, 10 g com desvio padrão de 2 g. É embalado em caixas com 50 unidades. Sabe-se que as caixas vazias pesam 500 g com desvio padrão 25 g. Admitindo-se uma distribuição normal dos pesos e independência entre as variáveis dos pesos do produto e da caixa, calcular a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais de 1050 g.*

Solução *: Sejam X_i o peso do i-ésimo produto, $i = 1, 2, \ldots N$, W , peso de uma caixa vazia, e Y, o peso de uma caixa cheia com os n=50 produtos.*

Pelo enunciado

$$W \sim N(500, 625), \quad X_i \sim N(10, 4).$$

A relação entre Y e as variáveis apresentadas é dada por:

$$Y = W + \sum_{i=1}^{50} X_i.$$

Assim,

$$E(Y) = E(W) + 50 * E(X_1) = 500 + 50.10 = 1000.$$

$$Var(Y) = Var\left(W + \sum_{i=1}^{50} X_i\right) = Var(W) + Var\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right),$$

Devido a independência entre W *e* $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ *temos que* W *e* $\sum_{i=1}^{50} X_i$
Agora devido a independência entre $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ *temos*

$$Var(Y) = Var(W) + \sum_{i=1}^{50} Var(X_i) = Var(W) + 50.Var(X_1) = 625 + 200 = 825.$$

Logo $Y \sim N(1000, 825)$.
O problema pede para calcular

$$P(Y > 1050) = P(Z > \frac{1050 - 1000}{\sqrt{825}}) = P(Z > 1,74) = 0,0409.$$

```
>
>
> #######Y ~N(mu=1000,sigma2=825)
> mu=1000;sigma=sqrt(825);mu;sigma
[1] 1000
[1] 28.72281
> curve(dnorm(x,mu,sigma), mu-3*sigma,mu + 3*sigma,xlab="y",ylab="f(y)",m
>
> polygon(c(1050,seq(1050,1100,l=30),120),c(0,dnorm(seq(1050,1100,l=30),m
+ 0),density=10,col="red")
>
> ##Vamos calcular a área hachurada.
>
> p=pnorm(1050,mu,sigma,lower.tail=F);p;round(p,4)
```

```
[1] 0.04086138
[1] 0.0409
>
> z=(1050-mu)/sigma;round(z,2)
[1] 1.74
>
>
> ####Vamos hachurar na Normal padrão!!!!P(Z >1,74)
>
> curve(dnorm(x,0,1), -3,3,xlab="z",ylab="g(z)",main=" Z~N(0,1)")
>
> polygon(c(1.74,seq(1.74,3.15,l=30),120),c(0,dnorm(seq(1.74,3.15,l=30),0
+ 0),density=10,col="red")
>
```

1.20 Quantis da Normal Geral

Seja x_p *o quantil de ordem* p,*isto é,*

$$F(x_p) = p.$$

Seja

$$z_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$$

,

assim,

$$\Phi(z_p) = p.$$

Logo,

$$x_p = \mu + \sigma z_p$$

.

Responda ao que se pede sobre os quantis da $N(\mu, \sigma^2)$ *:*

a. *Qual é a mediana? A mediana da normal padrão é o* $z_{0,5} = 0$.

$$x_{0.5} = \mu + \sigma \times 0 = \mu.$$

b. Calcule o primeiro quartil.

O primeiro quartil da Normal padrão é dado por:

```
>
> ###P(Z<=Q1)=0,25
>
> Q1=qnorm(0.25);Q1;round(Q1,2)
[1] -0.6744898
[1] -0.67
>
>
```

Assim o primeiro quartil de X será dada por:

$$Q1X = \mu - 0,67\sigma.$$

c. Calcule o terceiro quartil .

Na normal padrão por simetria $Q3 = -Q1 = 0,67$.

Logo

$$Q3X = \mu - \sigma Q1 = \mu + 0,67\sigma.$$

```
>
> ###P(Z<=Q3)=0,75
>
> Q3=qnorm(0.75);Q3;round(Q3,2)
[1] 0.6744898
[1] 0.67
>
>
```

d. Calcule os decis da Normal $(100, 100)$.

```
>
> p=seq(0.1,0.9,0.1)
>
>       DecisZ=qnorm(p)
>       DecisX=qnorm(p,100,10)
> Decis=100 +10*DecisZ
>       tab=cbind(DecisZ,DecisX,Decis )
>
>       rownames(tab)=c("D1","D2","D3","D4","D5","D6","D7","D8","D9")
>       round(tab,2)
DecisZ DecisX  Decis
D1  -1.28  87.18  87.18
D2  -0.84  91.58  91.58
D3  -0.52  94.76  94.76
D4  -0.25  97.47  97.47
D5   0.00 100.00 100.00
D6   0.25 102.53 102.53
D7   0.52 105.24 105.24
D8   0.84 108.42 108.42
D9   1.28 112.82 112.82
>
>
```

e. *Retire uma amostra aleatória de tamanho 100 da Normal(100,100).*

```
>
> set.seed(32)
>
> A=rnorm(100,100,10);A
[1] 100.14641 108.73289  89.72054 106.85665 104.49437 104.07018 102.84
[8]  93.75691 108.39656 103.11279 104.75253  98.99910 102.03513  99.05
[15] 101.00235  97.31773 113.46058  98.53566 100.49766 108.33733  97.0
[22]  89.15265 109.39330 103.60802 107.40326 108.81902 105.28659  79.4
[29] 109.82167 104.73468 108.20425 105.89988  91.88000 110.20167 115.5
[36] 109.84047  98.81486  87.87351 106.61146  96.93830 100.80163 100.8
```

```
[43]  90.72611  98.79777  91.24562  83.98198  88.50256  93.85041  93.5
[50]  87.51577 103.74994  98.05250  95.27440  99.36932  84.71834  92.6
[57] 107.70706  98.11576 108.82857  94.00594  89.82156  79.20720  97.0
[64] 102.16828 101.25908  90.69436  92.13866 104.07471 103.91922  99.6
[71]  88.79755 103.18091 103.51545  94.82933  91.22511  96.43431 113.9
[78]  73.02959 103.37454  95.92816 113.60143  87.96299  88.08005  80.7
[85] 102.63821 110.97192 109.37066 101.67742 108.25698  92.43720  94.7
[92] 101.12228 113.09834 113.40036 105.93191 102.38686  92.35817  94.8
[99]  93.06571  99.89575
>
> mean(A);var(A)
[1] 99.35688
[1] 74.35095
>
> Ao=sort(A);Ao
[1]  73.02959  79.20720  79.49687  80.72589  83.98198  84.71834  87.5
[8]  87.87351  87.96299  88.08005  88.50256  88.79755  89.15265  89.72
[15]  89.82156  90.69436  90.72611  91.22511  91.24562  91.88000  92.1
[22]  92.35817  92.43720  92.61796  93.06571  93.57315  93.75691  93.8
[29]  94.00594  94.71918  94.82933  94.85376  95.27440  95.92816  96.4
[36]  96.93830  97.01578  97.09109  97.31773  98.05250  98.11576  98.5
[43]  98.79777  98.81486  98.99910  99.05898  99.36932  99.61926  99.8
[50] 100.14641 100.49766 100.80163 100.82595 101.00235 101.12228 101.2
[57] 101.67742 102.03513 102.16828 102.38686 102.63821 102.84731 103.1
[64] 103.18091 103.37454 103.51545 103.60802 103.74994 103.91922 104.0
[71] 104.07471 104.49437 104.73468 104.75253 105.28659 105.89988 105.9
[78] 106.61146 106.85665 107.40326 107.70706 108.20425 108.25698 108.3
[85] 108.39656 108.73289 108.81902 108.82857 109.37066 109.39330 109.8
[92] 109.84047 110.20167 110.97192 113.09834 113.40036 113.46058 113.6
[99] 113.91198 115.52444
> Li=100-3*10;Li
[1] 70
> Ls=100+3*10;Ls
[1] 130
>
>
```

1.21 Distribuição Lognormal

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *então,* $Y = e^X$ *tem distribuição lognormal de parâmetros* μ *e* σ^2.

Prova: $y = e^x > 0$. *Então para* $y > 0$

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq lny) = F(lny).$$

Assim,

$$g(y) = \frac{1}{y}\ f(lny) = \frac{1}{y}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \ e^{-\frac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(y),\ \mu \in I\!R \ e\ \sigma^2 > 0.$$

1.22 Aproximação Normal Para Binomial.

Sejam $Y \sim Bin(n, p)$ *e* $X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$. *A variável aleatória* Y *é a soma de* n *variáveis aleatórias independentes* $Y_i \sim B(p), i = 1, 2, \ldots, n$. *Assim usando o teorema do limite central podemos pensar em uma aproximação da binomial pela Normal usando um fator de correção de continuidade.*

Na prática funciona assim:

a.

$$P(Y = a) \approx P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5).$$

b.

$$P(a \leq Y \leq b) \approx P(a - 0,5 \leq X \leq b + 0,5).$$

c.

$$P(Y \leq a) \approx P(X \leq a + 0,5).$$

a.

$$P(Y \geq a) \approx P(X \geq a - 0,5).$$

A aproximação é boa quando n é grande e p é próximo de $\frac{1}{2}$ por causa da simetria da binomial mas isso ocorre mesmo se n é pequeno e p não muito próximo de 0 ou 1. Na prática quando ambas $np > 5$ e $nq > 5$ a aproximação será boa.

Podemos verificar a qualidade da aproximação usando o pacote R.

Exemplo 1.

Suponha que $Y \sim (n = 15, p = 0,4)$. Calcule $P(Y = 4)$ exatamente e usando a aproximação pela Normal .

```
>
> ################# Y~Bin(n=15,p=0.4)
>
> ### pe=P(Y=4) exata
>
> n=15;p=0.4;n;p
[1] 15
[1] 0.4
>
> pe=dbinom(4,n,p);round(pe,4)
[1] 0.1268
>
> ### pa=P( 3,5 <= X <=4,5)
>
> a=4;mu=n*p;sigma2=n*p*(1-p);a;mu;sigma2
[1] 4
[1] 6
[1] 3.6
> sigma=sqrt(sigma2);round(sigma,2)
[1] 1.9
>
> ##Condições para a aproximação
>
> n*p; n*p >5 ####Verdade!!!!
[1] 6
[1] TRUE
>
> n*(1-p); n*(1-p) >5 ####Verdade!!!!
[1] 9
```

```
[1] TRUE
> z_1=(a-0.5 -mu)/sigma;z_1
[1] -1.317616
>
> p1=pnorm(z_1);p1
[1] 0.09381616
>
> z_2=(a+0.5 -mu)/sigma;z_2
[1] -0.7905694
>
> p2=pnorm(z_2);p2
[1] 0.2145977
>
>
> pa=p2-p1;pa
[1] 0.1207815
>
> pe;pa  ####### Com duas casas decimais elas batem!!!!!!!
[1] 0.1267758
[1] 0.1207815
>
>
>
```

Calcule $P(7 \leq Y \leq 9)$ exatamente e usando a aproximação pela Normal
Sabemos que

$$P(7 \leq Y \leq 9) = \sum_{y=7}^{9} \binom{15}{y} 0,4^y \, 0,6^{15-y} = 0.3563535.$$

```
>
> ######pe=P(7 <= Y<=9), pa=P(7,5<= Y<=9,5)
>
> pe=dbinom(7,n,p) +dbinom(8,n,p)+dbinom(9,n,p);pe
[1] 0.3563535
>
> pbinom(9,n,p)-pbinom(6,n,p) ###Outra maneira de calcular pe
[1] 0.3563535
>
> a=7;b=9
```

```
>
> z_1=(a-0.5 -mu)/sigma;z_1
[1] 0.2635231
>
> p1=pnorm(z_1);p1
[1] 0.6039263
>
> z_2=(b+0.5 -mu)/sigma;z_2
[1] 1.844662
>
> p2=pnorm(z_2);p2
[1] 0.9674566
>
>
> pa=p2-p1;pa
[1] 0.3635303
>
>
> pe;pa  ####### Bem próximas. Com duas casas decimais elas batem!!!!!!!
[1] 0.3563535
[1] 0.3635303
>
```

Fazer o exemplo do Bussab& Morettin- páginas:182,183

Seja $Y \sim Bin(10, 1/2)$. *Queremos calcular* $P(Y \geq 7)$.
A probabilidade exata é dada por:

$$P(Y \geq 7) = 0,171875.$$

```
>
> ################################Exemplo do Bussab&Morettin
>
> ###P(Y>=7)=1- P(Y<=6)
>
> n=10;p=1/2;n*p;n*(1-p)
[1] 5
```

```
[1] 5
> n*p >5 ;n*(1-p) >5 ### As duas condições não estão satisfeitas!!!!!
[1] FALSE
[1] FALSE
> mu=n*p;mu
[1] 5
>
> sigma2=n*p*(1-p);sigma2
[1] 2.5
> sigma=sqrt(sigma2);sigma
[1] 1.581139
>
> ##Mas assim mesmo vamos aproximar pela normal!!!!!
>
> pe=1-pbinom(6,n,p);pe;round(pe,3) ###bate com a resposta do livro.
[1] 0.171875
[1] 0.172
>
> ##Vamos aproximar? P( X>=6,5)
> a=7;a
[1] 7
>
> z=(a-0.5-mu)/sigma;z
[1] 0.9486833
>
> pa=1-pnorm(z);pa
[1] 0.1713909
>
> pe;pa  ####Bem próximas.
[1] 0.171875
[1] 0.1713909
>
```

Mostre que

$$P(3 < Y \leq 7) = P(4 \leq Y \leq 7) = 0,65625.$$

```
>
> ###P( 3 <Y<=6)=F(6)-F(3)=p2-p1
```

```
>
> p2=pbinom(6,n,p);p2
[1] 0.828125
>
> p1=pbinom(3,n,p);p1
[1] 0.171875
>
> pe=p2-p1;pe
[1] 0.65625
>
> ###P( 3 <Y<=6)=P(4<=Y<=6))---------P(3,5 <= X <= 6,5)
>
> a=4;b=6
>
> z_1=(a-0.5-mu)/sigma;z_1
[1] -0.9486833
> z_2=(b+0.5-mu)/sigma;z_2
[1] 0.9486833
>
> pa=pnorm(z_2)-pnorm(z_1);pa ###O livro traz a resposta 0,653 .Eles arredo
[1] 0.6572183
> ##0,94868 como 0,94 e não 0,95!!!
>
> pnorm(0.95)-pnorm(-0.95) #### que bate com a nossa solução!!!!!
[1] 0.6578877
>
> pe;pa  ####Bem próximas.
[1] 0.65625
[1] 0.6572183
>
```