1 Prof. Maurício- Função Gama-23.1

1.1 Definição

A função Gama, introduzida pelo matemático alemão, Leonard Euler, é definida por:

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^{+} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ \alpha & \rightarrow & \Gamma(\alpha) \end{array}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

A integral acima converge para $\alpha > 0$ e diverge para $\alpha \leq 0$.

Vamos provar agora a afirmação anterior.

Para $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$$

Assim $\forall\, \epsilon > 0$ existe um x_0 tal que

$$x^{\alpha+1}e^{-x} < \epsilon \quad \forall\, x > x_0.$$

Seja $a > x_0$. Assim para $\alpha > 0$

$$\int_0^a x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int_0^{x_0} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{x_0}^a x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{\mathrm{II}}$$

Mas

$$\mathrm{I} = \int_0^{x_0} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \leq \int_0^{x_0} x^{\alpha-1}dx, \text{ pois } e^{-x} < e^0 = 1$$

Assim

$$\mathrm{I} \leq \left.\frac{x^\alpha}{\alpha}\right|_0^{x_0} = \frac{x_0^\alpha}{\alpha}$$

Por outro lado note que:

$$x^{\alpha+1} = x^{\alpha-1}\, x^2.$$

$$\mathrm{II} = \int_{x_0}^{a} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx = \int_{x_0}^{a} \overbrace{x^{\alpha+1}\, e^{-x}}^{\epsilon}\, \frac{1}{x^2}\, dx < \int_{x_0}^{a} \frac{\epsilon}{x^2}\, dx = \epsilon \left[\frac{-1}{x}\right]_{x_0}^{a} = \epsilon \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{a}\right]$$

Assim

$$\int_0^a x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \le \frac{x_0^\alpha}{\alpha} + \epsilon \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{a}\right] < \frac{x_0^\alpha}{\alpha} + \frac{\epsilon}{x_0}$$

Fazendo $a \to \infty$ teremos

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \frac{x_0^\alpha}{\alpha} + \frac{\epsilon}{x_0} < \infty$$

Dessa maneira a convergência da integral é garantida se $\alpha > 0$.

Considere agora

$$\alpha \le 0.$$

então para

$$x < 1, \quad x^\alpha \ge 1$$

e

$$x^{\alpha-1} e^{-x} = \frac{x^\alpha}{x} e^{-x} \ge \frac{e^{-x}}{x} \ge \frac{e^{-1}}{x};$$

Pois se

$$x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow e^{-x} \ge e^{-1}.$$

Segue então que para $0 < a < 1$

$$\int_a^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \ge \int_a^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \ge \int_a^1 \frac{e^{-1}}{x} dx = e^{-1} \Big[\ln x\Big]_a^1 = -e^{-1} \ln a$$

Fazendo $a \to 0$ teremos

$$\int_a^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \geq \lim_{a \to 0} -e^{-1} \ln a \to \infty$$

Assim

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

não pode ser finita para $\alpha \leq 0$

1.2 Propriedades da Função Gama

(a)

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha), \quad \text{para} \quad \alpha > 0.$$

(b)

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha! \ \text{ para } \ \alpha = n.$$

(c)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(d)

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \times n!} \sqrt{\pi}.$$

Prova:

(a)

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^\alpha}_{u} \underbrace{e^{-x} dx}_{dv}$$

Fazendo

$$u = x^\alpha \Rightarrow du = \alpha x^{\alpha-1}$$

e

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

Assim

$$\Gamma(\alpha+1) = -x^\alpha\, e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha\, x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

$$\Gamma\left(\alpha+1\right) = \alpha \underbrace{\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx}_{\Gamma(\alpha)} = \alpha\ \ \Gamma\left(\alpha\right)$$

Com isso está provado que

$$\Gamma\left(\alpha+1\right) = \alpha\ \ \Gamma\left(\alpha\right), \qquad \text{para } \alpha > 0$$

(b) Seja $\alpha = n$ (inteiro positivo)

$$\Gamma\left(\alpha+1\right) = \Gamma\left(n+1\right) = n\Gamma\left(n\right) = n\left(n-1\right)\Gamma\left(n-1\right) = \ldots = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots 2\times\Gamma\left(1\right)$$

Onde

$$\Gamma\left(1\right) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Desse modo

$$\Gamma\left(n+1\right) = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots 2\times 1 = n!$$

(c)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-x}\, dx$$

Fazendo

$$x = \frac{z^2}{2} \Rightarrow dx = zdz$$

Além disso

$$x^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{z^2}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{z^{-1}}{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{z}$$

Logo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{z}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\ z\, dz=\int_0^\infty \sqrt{2}e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz=\sqrt{2}\sqrt{2\pi}\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz}_{P(Z>0)}$$

Onde $Z\sim N(0,1)$

$$2\sqrt{\pi}.P\left(Z>0\right)=2\sqrt{\pi}\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$$

Logo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Vamos provar agora usando coordenadas polares:
Note que:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\ e^{-x}\ dx\right]^2$$

Vamos fazer a substituição

$$u^2=x\ \ ;2u\ du=dx\quad u=x^{1/2}.$$

$$x^{-1/2}\ dx=u^{-1}\ 2\ u\ du=2\ du.$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[\int_0^\infty 2\ \ e^{-u^2}\ du\right]^2$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=2\int_0^\infty\ e^{-u^2}\ du\times 2\times\int_0^\infty\ e^{-v^2}\ dv.$$

Fazendo a mudança temos:

$$u=r\ sen(\theta)\ \ du=rcos(\theta).$$

$$v=r\ cos(\theta)\ \ dv=-rsen(\theta).$$

Note que:

$$u^2+v^2=r^2\ sen^2(\theta)+r^2\ cos^2(\theta)=r^2[sen^2(\theta)+cos^2(\theta)]=r^2\times 1=r^2.$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \times \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r\ e^{-r^2}\ \ dr\ d\theta =$$

$$= 4 \times \int_{r=0}^{\infty} r\ e^{-r^2}\ dr\ \int_{\theta=0}^{\pi/2}\ d\theta =$$

Mas

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{r=0}^{\infty} r\ e^{-r^2}\ dr = IGG(a=2, b=1, c=2) = \frac{1}{2},$$

pois:

$$IGG(a,b,c) = \frac{\Gamma(a/c)}{c\ b^{a/c}} = \frac{\Gamma(1)}{2\ 1^1} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente temos:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \times\ \frac{\pi}{2}\ \times \frac{1}{2} = \pi.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(d) Vamos verificar a identidade usando o **R**:

```
 [1]  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
> a_n=gamma(n+1/2);
> b_n=(factorial(2*n))/(4^n *factorial(n))*sqrt(pi)
> tab=cbind(n,a_n,b_n)
> round(tab,4)
n           a_n          b_n
[1,]  0      1.7725       1.7725
[2,]  1      0.8862       0.8862
[3,]  2      1.3293       1.3293
[4,]  3      3.3234       3.3234
[5,]  4     11.6317      11.6317
[6,]  5     52.3428      52.3428
[7,]  6    287.8853     287.8853
```

```
[8,]  7    1871.2543    1871.2543
[9,]  8   14034.4073   14034.4073
[10,]  9  119292.4620  119292.4620
[11,] 10 1133278.3889 1133278.3889
```

Vamos provar por indução:
Para $n = 0$ a igualdade se verifica pois:

$$a_0 = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad ; \quad b_0 = \frac{(0)!}{4^0 \times 0!} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}.$$

Vamos supor verdade para $n = k$. Assim

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{4^k\ k!}.$$

Vamos provar que continua valendo para $n = k + 1$:

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Usando a propriedade **(a)**:

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = (k + \frac{1}{2})\ \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = (\frac{2k + 1}{2})\ \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Usando a hipótese de indução temos:

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2k + 1}{2}\ \frac{(2k)!}{4^k\ k!}$$

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k + 1)!}{2\ 4^k\ k!}$$

Multiplicando por $(2k + 2) = 2(k + 1)$ temos:

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k + 2)(2k + 1)!}{2\ 2\ 4^k\ (k + 1)\ k!}$$

$$\Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k + 2)!}{4^{k+1}\ (k + 1)!}.$$

Assim temos que a igualdade vale para todo n.

1.3 Exercícios Resolvidos

Calcular usando as propriedades da função gama:

1. $\dfrac{\Gamma(6)}{2\times\Gamma(3)} = \dfrac{5!}{2\times 2!} = \dfrac{5\times 4\times 3\times 2}{2\times 2} = 30.$

```
> gamma(6);gamma(3);factorial(5);factorial(2)
[1] 120
[1] 2
[1] 120
[1] 2
> gamma(6)/(2*gamma(3))
[1] 30
```

2. $\dfrac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{\frac{3}{2}\times\ \Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\ \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{3}{4}.$

```
> gamma(1/2);sqrt(pi)
[1] 1.772454
[1] 1.772454
> gamma(5/2)
[1] 1.32934
> gamma(5/2)/gamma(1/2)
[1] 0.75
> fractions(gamma(5/2)/gamma(1/2))
[1] 3/4
>
```

3. $\dfrac{\Gamma(3)\,\Gamma(2,5)}{\Gamma(5,5)} = \dfrac{2!\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\ \Gamma(1/2)}{\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\ \times\Gamma(1/2)} = \dfrac{16}{315}.$

```
> gamma(3);gamma(2.5);gamma(5.5)
[1] 2
[1] 1.32934
[1] 52.34278
> fractions((gamma(3)*gamma(2.5))/gamma(5.5))
```

```
[1] 16/315
>
```

4. $\dfrac{6\ \times \Gamma(8/3)}{5 \times \Gamma(2/3)} = \dfrac{6 \times\ \dfrac{5}{3} \times \dfrac{2}{3} \times\ \Gamma(2/3)}{5\ \times \Gamma(2/3)} = \dfrac{4}{3}$

```
 > require(MASS)
  > gamma(8/3)
 [1] 1.504575
 > gamma(2/3)
 [1] 1.354118
 > num=6*gamma(8/3);num
 [1] 9.027453
 > den=5*gamma(2/3);den
 [1] 6.77059
 > num/den
 [1] 1.333333
 > num/den;fractions(num/den)
 [1] 1.333333
 [1] 4/3
 >
```

Calcular as seguintes integrais.

5. $\int_0^\infty x^6\ e^{-x} dx = \Gamma(7) = 6! = 720.$

Resolvendo no R tem-se:

```
 >
> gamma(7)###6! que pode ser calculado assim:
[1] 720
> factorial(6)
[1] 720
>
```

6. $\int_0^{\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = \Gamma(7/2) = \Gamma(5/2+1) = \dfrac{5}{2}\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = \dfrac{15\,\sqrt{\pi}}{8}$.

   Resolvendo no R tem-se:

```
      > gamma(7/2);15*sqrt(pi)/8
[1] 3.323351
[1] 3.323351
>
```

7. $\int_0^{\infty} x^6 \, e^{-2x} \, dx$

   fazendo a mudança de variável $u = 2x$ então $du = 2dx$ e $x = \dfrac{u}{2}$,a integral ficará:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \, e^{-u} \, \frac{du}{2} = \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} u^6 \, e^{-u} \, du = \frac{\Gamma(7)}{128} = \frac{720}{128} = \frac{45}{8}.$$

   Essa integral pedida pode ser calculada diretamente no R.

```
>
> f=function(x) x^6*exp(-2*x)
> I=integrate(f,0,Inf)$value;I;720/128
[1] 5.625
[1] 5.625
>
> require(MASS)
> fractions(I)
[1] 45/8
> fractions(720/128)
[1] 45/8
>
```

2 Distribuição *Gama*

2.1 Definição

Uma variável aleatória contínua X é dita possuir distribuição *Gama* de parâmetros $\alpha, \alpha > 0, \quad \beta, \quad \beta > 0$ se sua fdp é da forma:

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{_{(0,\infty)}}(x) \tag{1}$$

$$\textbf{Notação: } X \sim Gama\,(\alpha, \beta)\,.$$

Observação: Lê-se a notação acima do seguinte modo: *X segue distribuição Gama de parâmetros α e β.*

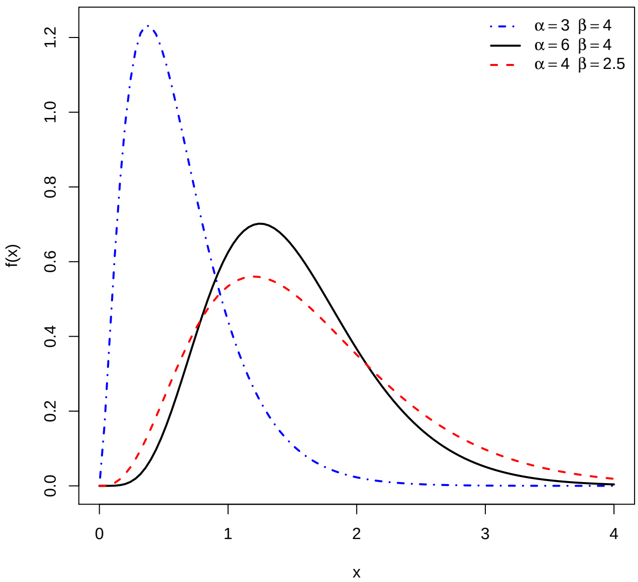

Figura 1: A f.d.p. da Distribuição Gama

2.2 Fato 1

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = 1$$

fazendo a mudança

$$u = \beta x \;\Rightarrow\; x = \frac{u}{\beta} \;\Rightarrow\; du = \beta dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{du}{\beta}$$

Assim

$$\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{du}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = 1$$

Como $f(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$, então a expressão (1) é realmente uma fdp.

2.3 Fato 2

Se $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$, então

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}, \tag{2}$$

e esse resultado pode ser utilizado para se calcular integrais desse tipo sem a necessidade da regra do produto. Por exemplo,

$$I_1 = \int_0^\infty x^2 e^{-3x} dx = \frac{\Gamma(3)}{3^3} = \frac{2!}{27} = \frac{2}{27},$$

pois $\alpha = 2 + 1$ e $\beta = 3$.

$$I_2 = \int_0^\infty x^4 e^{-x/2} dx = \frac{\Gamma(5)}{(1/2)^5} = \frac{4!}{1/32} = 32 \times 24 = 768,$$

pois $\alpha = 4 + 1$ e $\beta = 1/2$.

2.4 Fato 3: Propriedades da Distribuição Gama

a. Se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz a distribuição exponencial.

Seja $X \sim Gama(\alpha = 1, \beta)$, então

$$f(x) = \frac{\beta^1}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\beta x} I_{[0,\infty]}(x) = \beta e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x)$$

b. Se o parâmetro $\alpha = k$ for inteiro positivo a distribuição gama é chamada de distribuição de Erlang de ordem k e parâmetro β.

$$f(x) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x).$$

c. Quando $\beta = 1/2$ e $\alpha = k/2$, em que k é inteiro positivo, a distribuição gama se reduz a distribuição de qui-quadrado com k graus de liberdade.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2) 2^k} \; x^{k/2-1} e^{-x/2} I_{(0,\infty)}(x).$$

d. Quando α for inteiro, a distribuição de $Y = 2\beta X$ é $\chi^2(2\alpha)$.

Prova:

Seja $G(y) = P(Y \leq y)$, a função de distribuição de Y. Assim para $y > 0$,

$$G(y) = P(2\beta X \leq y) = P(X \leq \frac{y}{2\beta}) = F(\frac{y}{2\beta}).$$

derivando $G(y)$ obtém-se :

$$g(y) = \frac{1}{2\beta} \; f(\frac{y}{2\beta}) = \frac{1}{2\beta} \; \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; (\frac{y}{2\beta})^{\alpha-1} \; e^{-\beta \frac{y}{2\beta}} \; I_{(0,\infty)}(2/\beta y)$$

Simplificando tem-se

$$g(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \; 2^\alpha} \; y^{\alpha-1} \; e^{-y/2} I_{(0,\infty)}(y),$$

$$g(y) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha/2) \; 2^{2\alpha/2}} \; y^{2\alpha/2-1} \; e^{-y/2} \; I_{(0,\infty)}(y),$$

e portanto

$$Y = 2\beta X \sim \chi^2(2\alpha).$$

e. Se $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$,então, $Y = 1/X$ tem distribuição Gama Inversa de parâmetros α e β.

Prova:

Seja $G(y) = P(Y \leq y)$, a função de distribuição de X. Assim para $y > 0$,

$$G(y) = P(1/X \leq y) = P(X \geq 1/y) = 1 - F(1/y).$$

derivando $G(y)$ obtém-se :

$$g(y) = -(-1/y^2)f(1/y) = (1/y^2)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1/y)^{\alpha-1}e^{-\beta 1/y}I_{(0,\infty)}(1/y)$$

Simplificando tem-se

$$g(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1/y)^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta}{y}}I_{(0,\infty)}(y),$$

que é a f.d.p. da Gama Inversa de parâmetros α e β.

2.5 Função de Distribuição

Não há uma forma fechada para a função de distribuição da Gama . A função de distribuição acumulada da gama é dada por:

$$F(x) = \left[\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt\right] I_{(0,\infty)}(x).$$

Quando o parâmetro $\alpha = k$ da Gama é inteiro positivo é possível relacionar a função de distribuição da Gama com a distribuição de Poisson. Seja Y o número de ocorrências de um determinado evento A no intervalo $(0, t)$. Suponha que, em média, o evento A ocorra λ vezes durante um intervalo de tempo unitário. Assim $Y \sim Poisson(\lambda\ t)$ e sua função de probabilidade é dada por:

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda\, t}\ (\lambda\ t)^y}{y!}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(y).$$

Seja X a variável aleatória contínua X o tempo de espera para observar as k primeiras ocorrências do evento A. Seja $F(x)$ a função de distribuição de X. Assim para $x > 0$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(Y \leq k - 1),$$

pois o tempo de espera para observar as k ocorrências do evento A só é maior que x se no intervalo $(0, x)$ ocorrer no máximo $(k - 1)$ vezes o evento A. Como $Y \sim Poisson(\lambda\, x)$, tem-se

$$F(x) = 1 - P(Y \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda\, x}\ (\lambda\, x)^i}{i!} = 1 - e^{-\lambda\, x} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{-\lambda\, x}\ (\lambda\, x)^i}{i!}.$$

Derivando $F(x)$ para $x > 0$ tem-se:

$$f(x) = F'(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda^i}{i!} [e^{-\lambda\, x} x^i]' = \lambda\, e^{-\lambda\, x} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda^i}{i!} [-\lambda e^{-\lambda\, x} x^i + e^{-\lambda\, x} i x^{i-1}].$$

Assim, a f.d.p. de X fica:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda^{i+1} x^i e^{-\lambda\, x}}{i!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda^i x^{i-1} e^{-\lambda\, x}}{(i-1)!},$$

agregando o termo $\lambda\, e^{-\lambda\, x}$ ao primeiro somatório tem-se:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda^{i+1} x^i e^{-\lambda\, x}}{i!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda^i x^{i-1} e^{-\lambda\, x}}{(i-1)!},$$

fazendo a mudança de variável $j = i - 1$ no segundo somatório obtém-se:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda^{i+1} x^i e^{-\lambda\, x}}{i!} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\lambda^{j+1} x^j e^{-\lambda\, x}}{j!},$$

isolando a parcela referente a $i = k - 1$ no primeiro somatório tem-se:

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda\, x}}{(k-1)!} + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\lambda^{i+1} x^i e^{-\lambda\, x}}{i!} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\lambda^{j+1} x^j e^{-\lambda\, x}}{j!},$$

finalmente,

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda\, x}}{(k-1)!} I_{(0,\infty)}(x).$$

Portanto $X \sim gama(\alpha = k, \beta = \lambda)$. Acaba-se de perceber , na prática, o aparecimento da distribuição de Erlang. Este fato ajuda a calcular os quantis da distribuição Gama, pois

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda\, x}\, (\lambda x)^i}{i!}.$$

Exemplo. Calcule $P(X \leq 2) = F(2)$,$X \sim gama(k = 3, \lambda = 1)$, $x = 2$ e $\lambda\, x = 1.2 = 2$.

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-2}\, 2^i}{i!} = 1 - 5e^{-2}.$$

Vamos fazer esse exemplo no **R**:

```
>
> k=3;lambda=1
>
> x=2
>
> p_1=pgamma(x,k,lambda);p_1
[1] 0.3233236
>
>
>
> a=lambda*x;a
[1] 2
>

 p_2=1-ppois(k-1,a);p_2;1-5*exp(-2)
[1] 0.3233236
[1] 0.3233236
> p_1==p_2
[1] TRUE
>
>
```

Por fim, podemos mostrar na Figura 2 o gráfico da função de distribuição da Gama dada por

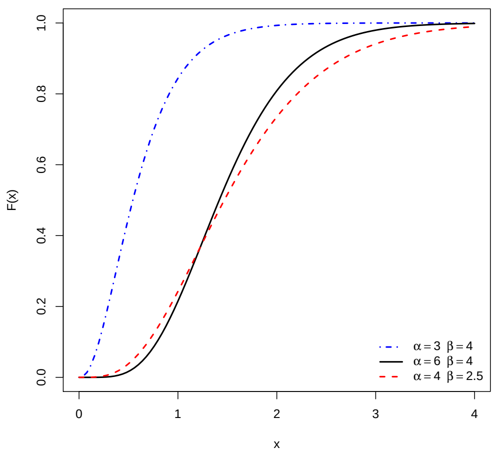

Figura 2: Função de Distribuição da Gama

Na Figura 3, apresentamos o gráfico da função de sobrevivência S de X que segue Gama para certos valores de α e β

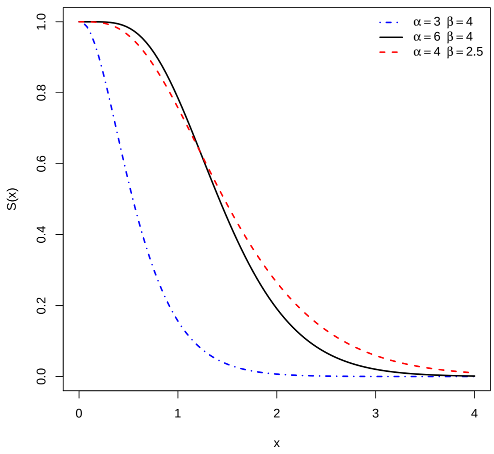

Figura 3: Função de Sobrevivência da Gama

2.6 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos de $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$ é dada por

$$M(t) = \left[\frac{\beta}{\beta - t}\right]^{\alpha}, t < \beta.$$

Prova:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx.$$

Sabe-se que para $(\beta - t) > 0$, isto é, $t < \beta$: Assim,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta - t)^{\alpha}}.$$

Logo

$$M(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta - t)^{\alpha}} = \left[\frac{\beta}{\beta - t}\right]^{\alpha}, t < \beta.$$

Vai-se calcular agora a f.g.m de $Y = 2\beta X$. Assim,

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{2t\beta X}) = M_X(2t\beta),$$

$$M_Y(t) = \frac{\beta}{(\beta - 2\beta t)^{\alpha}}, 2\beta t < \beta.$$

e

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{\alpha}} = \frac{1}{(1 - 2t)^{2\alpha/2}}, t < 1/2,$$

que é a f.g.m. da $\chi^2(2\alpha)$.
Vamos provar mais um resultado relevante:

Fato Sejam agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com

$$X_i \sim EXP(\beta).$$

Assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \beta).$$

Prova:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} [M_X(t)] = [M_X(t)]^n = \left[\frac{\beta}{\beta - t}\right]^n, t < \beta,$$

que é a f.g.m. da $Gama(n, \beta)$.

Fato Sejam agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com

$$X_i \sim Gama(\alpha, \beta).$$

Assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n\alpha, \beta)$$

Prova:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = [M_X(t)]^n = \left[\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}\right]^n = \left[\frac{\beta}{\beta - t}\right]^{n\alpha}, t < \beta,$$

que é a f.g.m. da $Gama(n\alpha, \beta)$.

Fato Sejam agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com

$$X_i \sim Gama(\alpha, \beta).$$

A distribuição de $\hat{X} = \frac{S}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é

$$\hat{X} \sim Gama(n\alpha, n\beta).$$

Prova:

$$M_{\hat{X}}(t) = M_S(t/n) = \left[\frac{\beta}{\beta - t/n}\right]^{n\alpha} = \left[\frac{n\beta}{n\beta - t}\right]^{n\alpha}, t < n\beta,$$

que é a f.g.m. da $Gama(n\alpha, n\beta)$.

Fato

Sejam agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com

$$X_i \sim Gama(\alpha_i, \beta).$$

Assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta)$$

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = [M_X(t)]^n = \left[\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_i}\right] = \left[\frac{\beta}{\beta - t}\right]^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, t < \beta,$$

que é a f.g.m. da $Gama(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta)$.

Fato

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ sabe-se que a distribuição de

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

A distribuição de S^2 é

$$Gama\left(\frac{(n-1)}{2}, \frac{(n-1)}{2\sigma^2}\right).$$

Prova. A f.g.m. de V é

$$M_V(t) = (1-2t)^{-(n-1)/2}, t < 1/2.$$

Como

$$S^2 = (\sigma^2/(n-1))V$$

tem-se

$$M_{S^2}(t) = M_V((\sigma^2/(n-1))t) = (1-2(\sigma^2/(n-1))t)^{-(n-1)/2}, (\sigma^2/(n-1))t < 1/2.$$

simplificada fica:

$$M_{S^2}(t) = \left[\frac{(n-1)/2\sigma^2}{(n-1)/2\sigma^2 - t}\right]^{-(n-1)/2}, t < (n-1)/2\sigma^2$$

que é a f.g.m. da

$$Gama\left(\frac{(n-1)}{2}, \frac{(n-1)}{2\sigma^2}\right)$$

Fato

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de X, contínua, com função de distribuição $F(x)$ e função de sobrevivência $S(x)$, então

$$Q = -\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i) \sim Gama(n, 1)$$

. Da mesma forma

$$Q = -\sum_{i=1}^{n} \ln S(X_i) \sim Gama(n, 1)$$

. Na prática usa-se

$$Q = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i) \sim \chi^2(2n)$$

ou

$$Q = -2\sum_{i=1}^{n} \ln S(X_i) \sim \chi^2(2n).$$

Elas são quantidades pivotais e usadas na construção de intervalos de confiança.

Se

$$X \sim EXP(\theta)$$

então

$$S(x) = e^{-\theta x}$$

e

$$Q = -2\sum_{i=1}^{n} \ln S(X_i) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n)$$

2.7 Momentos

O r-ésimo momemto em relação à origem de $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$ é dado por

$$E\left(X^r\right) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^r \Gamma(\alpha)}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots.$$

Prova:

$$E\left(X^r\right) = \int_0^\infty x^r \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+r-1} e^{-\beta x} dx$$

Mas

$$\int_0^\infty x^{\alpha+r-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^{\alpha+r}}$$

Assim

$$E\left(X^r\right) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^{\alpha+r}} = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^r \Gamma(\alpha)}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo,

$$E\left(X\right) = \mu = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 1)\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\beta^2}.$$

$$E\left(X^3\right) = \frac{\Gamma(\alpha + 3)}{\beta^3 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^3 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha}{\beta^3}.$$

$$E\left(X^4\right) = \frac{\Gamma(\alpha + 4)}{\beta^4 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^4 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha}{\beta^4}.$$

Vai-se calcular agora os momentos centrais:
O r-ésimo momento em relação central de $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$
é dado por

$$\mu_r = E(X - \mu)^r.$$

Dessa maneira o segundo momento central, $E(X - \mu)^2$ é dado por:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\beta^2} - \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

.

O desvio padrão de X é $\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$.

O terceiro momento central, $\mu_3 = E(X-\mu)^3$ é dado por:

$$E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3E(X^2).E(X) + 2E^3(X) = \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha}{\beta^3} - 3\frac{(\alpha^2+\alpha)}{\beta^2}\frac{\alpha}{\beta} - 2\frac{\alpha^3}{\beta^3}.$$

Simplificando tem-se:

$$E(X-\mu)^3 = \frac{\alpha}{\beta^3}\left[\alpha^2 + 3\alpha + 2 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha^2\right] = \frac{2\alpha}{\beta^3}$$

.

O coeficiente de assimetria

$$\alpha_3 = E(\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^3) = \frac{E\left(X-\mu\right)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

,

é positivo, logo a distribuição de *Gama* é assimétrica positiva.

O quarto momento central,

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = E(X^4) - 4E(X^3).E(X) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)$$

é dado por:

$$\mu_4 = \frac{\alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha}{\beta^4} - 4\,\frac{(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha)\alpha}{\beta^4} + 6\frac{(\alpha^2+\alpha)}{\beta^2}\,\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^4}{\beta^4}.$$

Simplificando tem-se:

$$\mu_4 = \frac{3(\alpha+2)\alpha}{\beta^4}$$

.

O coeficiente de curtose

$$\alpha_4 = E(\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^4) = \frac{E\left(X-\mu\right)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\alpha(\alpha+2)\beta^{-4}}{\alpha^2\beta^{-4}} = \frac{3(\alpha+2)}{\alpha}$$

,

e o coeficiente de curtose é dado por:

$$\alpha_4 = 3(1 + 2/\alpha) = 3 + \frac{6}{\alpha} > 3.$$

Portanto a distribuição de *Gama* é leptocúrtica.

2.8 Moda

Se $X \sim Gama\,(\alpha, \beta)$ então a moda de X é

$$Mo = \frac{\alpha - 1}{\beta}, \alpha > 1.$$

Prova: A moda de X é o ponto que maximiza

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}.$$

Sabe-se que o ponto que maximiza $f(x)$ é o mesmo que maximiza

$$h(x) = \ln f(x).$$

Note que:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$

é equivalente a :

$$f'(x) = 0.$$

Assim,

$$h(x) = \alpha \ln \beta - \ln\left(\Gamma(\alpha)\right) + (\alpha - 1)\ln x - \beta x.$$

Derivando $h(x)$ tem-se

$$h'(x) = \frac{\alpha - 1}{x} - \beta.$$

e a derivada segunda $h''(x)$ é dada por:

$$h''(x) = -\frac{\alpha - 1}{x^2}, < 0, \text{ desde que } \alpha > 1.$$

Logo

$$x = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

é o ponto máximo de $f(x)$ então a moda de X é $\dfrac{\alpha - 1}{\beta}$

$$\textbf{Notação: } M_o(x) = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

Quando $0 < \alpha \leq 1$ tem-se $h'(x) < 0$, assim $h(x)$ é decrescente no intervalo $(0, \infty)$ e a moda(supremo) de X será o ponto $x = 0$.

2.9 Exercícios

1. Se a renda familiar, em mil reais, em uma certa área urbana tem uma distribuição Gama de parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 1/4$. Ache a probabilidade de que uma família selecionada ao acaso dessa área tenha:

   a. Uma renda menor que 4000 reais?

   b. Uma renda entre 6 e 12 mil reais?

   c. Uma renda maior que 20000 reais?

2. A precipitação pluviométrica pentadal (5 dias consecutivos), pode ser estudada pela distribuição Gama de parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 1/7$. Determine o número esperado de pêntadas que, no próximo ano, não registrem mais de 15 mm de chuva.(O ano tem compõe-se de 73 pentadas)

3. Determine a probabilidade de trabalho sem falha de uma peça no decorrer de 1000h de operação se a confiabilidade da mesma está subordinada a distribuição Gama de parâmetros $\alpha = 4$ e $\beta = 10^{-3}$.

4. Em uma certa cidade o consumo diário de água (em milhões de litros) segue aproximadamente a distribuição Gama de parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 1/3$. Se a capacidade diária para essa cidade é de 9 milhões de litros de água, qual é a probabilidade de que em um determinado dia o fornecimento de água seja inadequado?

5. Seja $X \sim Gama(3, 1/4)$.

   a. Mostre que $Y = 2\beta X = X/2$ tem distribuição de qui-quadrado com 6 graus de liberdade.

b. Utilize o item a para calcular $P(3,28 < X < 25,2)$.

6. Seja $X \sim Gama(3,\beta)$. Se $x = 2$ é a moda de X, calcule $P(X < 9,49)$.

7. O número de automóveis que se apresentam a um guichê de recebimento de pedágio, numa rodovia, é uma variável aleatória com média de $\lambda = 1,5$ automóveis por minuto. Seja T_k o tempo transcorrido em minutos, a partir do instante inicial, até a apresentação do k-ésimo veículo($k = 1, 2, \ldots$). Qual a distribuição de T_k?

8. Seja X uma variável aleatória tal que $E(X^r) = (r+1)!2^r, r = 1, 2, 3, \ldots$. Calcule a função geradora de momentos de X e a partir dela identifique a distribuição da mesma.

9. A transformada de Laplace de uma variável aleatória X é definida como:
$$L(t) = E(e^{-tX}).$$
Calcule a transformada de Laplace de $X \sim Gama(\alpha,\beta)$.