

2.1. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim Normal(0, \sigma^2)$

- (i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viesados de σ^2 .
- (ii) Encontre uma estatística suficiente para σ^2 .
- (iii) Obtenha um estimador não viesado para σ^2 que seja função da estatística suficiente.
- (iv) Verifique se o estimador é eficiente.

Solução: A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x | \sigma^2) = (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) I_A(x), \quad A = (-\infty, \infty).$$

Vamos mostrar que esta família pertence à família exponencial.

Note que o suporte A não depende de σ^2 .

$$\log(f(x; \sigma^2)) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

$$\log(f(x|\sigma^2)) = -\frac{1}{2\sigma^2} x^2 - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

Fazendo

$$c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}; \quad T(x) = x^2; \quad d(\sigma^2) = -\frac{1}{2} \log(\sigma^2); \quad h(x) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X^2$ e

$$c'(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}; \quad d'(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

$$E(Y) = E(X^2) = -\frac{d'(\sigma^2)}{c'(\sigma^2)} = \sigma^2.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

é uma estatística suficiente e completa para σ^2 .

Seja T um estimador não viesado de $\theta = \sigma^2$. Vamos calcular a função escore:

Vamos preparar para derivar em relação a σ^2 :

$$\log(f(X; \mu, \sigma^2)) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} X^2 (\sigma^2)^{-1}.$$

Vamos derivar agora:

$$V = \frac{\partial \log f(X|\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} X^2 (-1)(\sigma^2)^{-2}.$$

$$V = -\frac{1}{2\sigma^4} [X^2 - \sigma^2] = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{X^2}{\sigma^2} - 1 \right].$$

Seja

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

$$V = -\frac{1}{2\sigma^2} (Z^2 - 1)$$

Note que:

$$Z^2 \sim \chi^2(1) \ ; \ E(Z^2) = 1 \ ; \ V(Z^2) = 2.$$

$$E(V) = -\frac{1}{2\sigma^4} [E(X^2) - \sigma^2] = 0.$$

Ou

$$E(V) = -\frac{1}{2\sigma^2} [E(Z^2) - 1] = 0.$$

$$I_F(\sigma^2) = Var(V) = V \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (Z^2 - 1) \right) = \frac{1}{4\sigma^4} V(Z^2 - 1).$$

$$I_F(\sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^4} V(Z^2) = \frac{1}{4\sigma^4} [E(Z^4) - E^2(Z^2)] = \frac{1}{4\sigma^4} (3 - 1) = \frac{1}{2\sigma^4},$$

pois $E(Z^4) = 3$ que é a curtose da normal.

Assim

$$E(Z^4) = E\left(\frac{X^4}{\sigma^4}\right) = 3$$

$$E(X^4) = 3\sigma^4.$$

E

$$V(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

Assim

$$LI(\sigma^2) = \frac{1}{n \frac{1}{2\sigma^4}} = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Já sabemos

$$S = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

é uma estatística suficiente para θ .

Note que

$$E(S) = n E(X^2) = n\sigma^2.$$

$$E\left(\frac{S}{n}\right) = \sigma^2.$$

Assim

$$T = \frac{S}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$$

é o nosso estimador procurado.

A variância de T é dada por:

$$Var(T) = \frac{1}{n^2} Var(S) = \frac{1}{n^2} n V(X^2) = \frac{2\sigma^4}{n} = LICR.$$

Assim T é eficiente.

Retire uma amostra de tamanho $n = 25$ de $X \sim Normal(0, \sigma^2 = 16)$

e estime σ^2 e seu erro padrão.

```
> set.seed(32)
>
> A=rnorm(100,0,4);round(A,2)
[1] 0.06 3.49 -4.11 2.74 1.80 1.63 1.14 -2.50 3.36 1.25
[11] 1.90 -0.40 0.81 -0.38 0.40 -1.07 5.38 -0.59 0.20 3.33
[21] -1.16 -4.34 3.76 1.44 2.96 3.53 2.11 -8.20 3.93 1.89
[31] 3.28 2.36 -3.25 4.08 6.21 3.94 -0.47 -4.85 2.64 -1.22
[41] 0.32 0.33 -3.71 -0.48 -3.50 -6.41 -4.60 -2.46 -2.57 -4.99
[51] 1.50 -0.78 -1.89 -0.25 -6.11 -2.95 3.08 -0.75 3.53 -2.40
[61] -4.07 -8.32 -1.19 0.87 0.50 -3.72 -3.14 1.63 1.57 -0.15
[71] -4.48 1.27 1.41 -2.07 -3.51 -1.43 5.56 -10.79 1.35 -1.63
[81] 5.44 -4.81 -4.77 -7.71 1.06 4.39 3.75 0.67 3.30 -3.03
[91] -2.11 0.45 5.24 5.36 2.37 0.95 -3.06 -2.06 -2.77 -0.04
> Ao=sort(A)
> round(Ao,2)
[1] -10.79 -8.32 -8.20 -7.71 -6.41 -6.11 -4.99 -4.85 -4.81 -4.77
[11] -4.60 -4.48 -4.34 -4.11 -4.07 -3.72 -3.71 -3.51 -3.50 -3.25
[21] -3.14 -3.06 -3.03 -2.95 -2.77 -2.57 -2.50 -2.46 -2.40 -2.11
[31] -2.07 -2.06 -1.89 -1.63 -1.43 -1.22 -1.19 -1.16 -1.07 -0.78
[41] -0.75 -0.59 -0.48 -0.47 -0.40 -0.38 -0.25 -0.15 -0.04 0.06
[51] 0.20 0.32 0.33 0.40 0.45 0.50 0.67 0.81 0.87 0.95
[61] 1.06 1.14 1.25 1.27 1.35 1.41 1.44 1.50 1.57 1.63
```

```
[71]  1.63  1.80  1.89  1.90  2.11  2.36  2.37  2.64  2.74  2.96
[81]  3.08  3.28  3.30  3.33  3.36  3.49  3.53  3.53  3.75  3.76
[91]  3.93  3.94  4.08  4.39  5.24  5.36  5.38  5.44  5.56  6.21
> mean(A);var(A)
[1] -0.2572461
[1] 11.89615
>
>
> S=sum(A^2);S
[1] 1184.337
> n=100
> t=S/n;t #####Estimativa de sigma^2
[1] 11.84337
>
>
> VT_est=2*t^4/n;VT_est
[1] 393.4872
>
> ep_est=sqrt(VT_est);ep_est
[1] 19.83651
>
>
```