2.09. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$

- i. Mostre que $\widehat{\gamma}=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ é não viciado para $g(\mu)=\mu^2.$
- ii. Existe **ENVVUM** para $g(\mu) = \mu^2$?
- iii. Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $g(\mu) = \mu^2$ e verifique se $\hat{\gamma}$ é eficiente.

Solução:

Sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right).$$

$$E(\bar{X}^2) = Var(\bar{X}) + \mu^2 = \frac{1}{n} + \mu^2.$$

$$E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}\right) = E\left(\widehat{\gamma}\right) = \mu^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Normal(n\mu, n)$$

é suficiente e completa para μ

Devemos procurar h(S) de sorte que

$$E[h(S)] = \mu^2.$$

Note que:

$$\hat{\gamma} = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} = \frac{S^2}{n^2} - \frac{1}{n} = h(S)$$

é o nosso ENVVUM procurado.

Vamos calcular a informação de Fisher para μ :

O suporte $A = (-\infty, \infty)$ independe de μ .

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$f(x,\mu) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Note que:

$$\log(f(X;\mu)) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{(X-\mu)^2}{2}$$

$$\log((f(X;\mu))) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{(X-\mu)^2}{2}.$$

$$V = \frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu} = -\frac{-2(X - \mu)}{2} = X - \mu.$$

Note que:

$$E(V) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma^2} = 0.$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\mu) = Var(X - \mu) = Var(X) = 1.$$

Seja T um estimador não viciado de $g(\mu) = \mu^2$. Sabemos que

$$Var(T) \ge \frac{(g'(\mu))^2}{n \ I_F(\mu)} = \frac{4\mu^2}{n}.$$

Vamos calcular a variância de $\widehat{\gamma}$

$$Var(\widehat{\gamma}) = Var(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}) = Var(\bar{X}^2) = E(\bar{X}^4) - E^2(\bar{X}^2).$$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

a.
$$E(X) = \mu$$
.

b.
$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

c.
$$E(X^3) = \mu^3 + 3\mu \sigma^2$$

d.
$$E(X^4) = \mu^4 + 6\mu^2 \sigma^2 + 3\sigma^4$$

Note que

$$E(\bar{X}^4) = \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$E^2(\bar{X}^2) = \left[\mu^2 + \frac{1}{n}\right]^2 = \mu^4 + \frac{2\mu^2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

$$Var(\hat{\gamma}) = Var(\bar{X}^2) = \frac{4\mu^2}{n} + \frac{2}{n^2} > \frac{4\mu^2}{n} = LICR.$$

 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/n)$

Assim o estimador não é eficiente pois supera o limite inferior de Cramer-Rao.