1 Introdução

Este material foi escrito para a disciplina CC0295-Inferência II, ministrado em 2017.1, pelo professor João Maurício Araújo Mota. Agora vou utilizá-lo CC0144- Complementos de Matemática Aplicada I em 2020.2.

2 Modelo de Regressão Linear Simples

Sejam

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

onde $u_i \sim N(0, \sigma^2)$, independentes.

O valor esperado de Y_i é dado por:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

O valor estimado de Y_i é dado por:

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vamos começar a notação matricial:

Sejam $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$.

Considere $\boldsymbol{Y}$ o vetor das n observações da variável resposta.

Seja $\mathbf{X}$, a matriz de planejamento de ordem $n \times 2$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_1 + u_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_2 + u_2 \\ \ldots \\ \beta_0 + \beta_1 X_n + u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\boldsymbol{Y}_{n\times 1} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} \;\; \boldsymbol{\beta}_{2\times 1} + \boldsymbol{u}_{n\times 1}.$$

O valor esperado de $\boldsymbol{Y}$ é dado por:

$$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X\beta},$$

e sua estimativa é dada por:

$$\boldsymbol{Y_{est}} = \boldsymbol{Xb}.$$

A distribuição de $\boldsymbol{Y}$ será um normal multivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{X\beta}$ e matriz de variâncias-covariâncias $\Sigma = I_n\ \sigma^2$.

2.1 Estimadores de Mínimos Quadráticos

Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - E(Y_i))^2 = [\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}]'\ \ [\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}].$$

Desenvolvendo o produto matricial temos:

$$S = \boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{Y'X\beta} - \boldsymbol{\beta'X'Y} + \boldsymbol{\beta'X'X\beta}.$$

Lembrando que $\boldsymbol{Y'X\beta}$ é um escalar e portanto é igual ao seu transposto, isto é,

$$\boldsymbol{Y'X\beta} = \boldsymbol{\beta'X'Y}.$$

Finalmente,

$$S = \boldsymbol{Y'Y} - 2\boldsymbol{\beta'X'Y} + \boldsymbol{\beta'X'X\beta}.$$

Sabemos que

$$A = \boldsymbol{\beta'X'Y} = \beta_0 \sum Y_i + \beta_1 \sum X_i Y_i,$$

e

$$B = \boldsymbol{\beta'X'X\beta} = n\beta_0^2 + 2\sum X_i\beta_0\beta_1 + \beta_1^2 \sum X_i^2.$$

A derivada parcial de A em relação a β_0 é dada por:

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_0} = \sum Y_i,$$

e a derivada parcial de A em relação a β_1 é dada por:

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_1} = \sum X_i Y_i,$$

Podemos fazer isso matricialmente

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \beta_0} \\ \\ \frac{\partial A}{\partial \beta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{X'Y}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta' X' Y}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X'Y}.$$

Vamos mostrar agora que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta' X' X \beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{X'X\beta}.$$

Sabemos que

$$\boldsymbol{\beta' X' X \beta} = g(\beta_0, \beta_1) = n\beta_0^2 + 2\sum X_i \beta_0 \beta_1 + \beta_1^2 \sum X_i^2.$$

A derivada parcial de B em relação a β_0 é dada por:

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_0} = 2n\beta_0 + 2\sum X_i \beta_1,$$

e a derivada parcial de B em relação a β_1 é dada por:

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_1} = 2\sum X_i \beta_0 + 2\sum X_i^2 \beta_1.$$

Podemos fazer isso matricialmente

$$\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \beta_0} \\ \\ \frac{\partial B}{\partial \beta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n\beta_0 + 2n\sum X_i \beta_1 \\ \\ 2\sum X_i \beta_0 + 2\sum X_i^2 \beta_1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{X'X\beta}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta' X' X \beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{X'X\beta}.$$

A derivada parcial de S em relação a β é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\boldsymbol{X'Y} + 2\boldsymbol{X'X\beta} = 0.$$

Obtemos o sistema de equações normais dado por:

$$\boldsymbol{X'X\beta} = \boldsymbol{X'Y}.$$

Daí obtemos os estimadores de mínimos quadrados:

$$b = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}.$$

Vamos estudar as propriedades de $\boldsymbol{b}$.

P1: $\boldsymbol{b}$ é um estimador não viciado de $\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{b}) &= E\big[(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}\big] \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}E\big[\boldsymbol{Y}\big] \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'X\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

P2: $Cov(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\sigma^2$.
Prova: Sabemos que $Cov(A\boldsymbol{Y}) = A\Sigma_Y A'$

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{b}) &= Cov(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y} \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\ \Sigma_Y\ (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'})' \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\ I_n\sigma^2\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1} \\ &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\sigma^2. \end{aligned}$$

P3:

$$\boldsymbol{b} \sim N_2\Big(\boldsymbol{\beta}, Cov(\boldsymbol{b})\Big)$$

.

Prova: Sabemos que se $\boldsymbol{Y}$ é normal multivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de variâncias-covariâncias Σ então $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{AY}$, com $posto(A) = m$ terá distribuição normal multivariada m variada com vetor de médias $\boldsymbol{A\mu}$ e matriz de variâncias-covariâncias $A\Sigma A'$.

Vamos desenvolver resultados matriciais do modelo de Regressão Linear Simples que serão utilizados ao longo da apresentação dos principais teoremas.

A matriz de planejamento é um resultado bastante substancial e será muito utilizado.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1' \\ \cdots \\ X' \end{bmatrix}$$

Logo,

$$X' \cdot X = \begin{bmatrix} 1' \\ \cdots \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{X}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'1 & \mathbf{1}'\mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'1 & \mathbf{X}'\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

$$X' \cdot X = \begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{bmatrix}$$

A matriz J_n é uma matriz quadrada de ordem n formada de uns. Algumas de suas propriedades nos ajudarão para uma melhor formação matricial:

Propriedades

(i) $J_n = \mathbf{1}\mathbf{1}'$, em que $\mathbf{1}$ é um vetor $n \times 1$ de uns.

(ii) $J_n = \mathbf{1}'\mathbf{1} = n$.

(iii) $J_n^2 = nJ_n$.

Prova:

$$\begin{aligned} J_n^2 &= J_nJ_n \\ &= \mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}' \\ &= \mathbf{1}n\mathbf{1}' \\ &= n\mathbf{1}\mathbf{1}' \\ &= nJ_n. \end{aligned}$$

O determinante de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é dado por:

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = n\sum X^2 - (\sum X)^2 = n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

A inversa de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é dada por:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n = \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2/n & -\bar{X} \\ -\bar{X} & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira temos:

$$V(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

e,

$$Cov(b_0, b_1) = \frac{-\bar{X}\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

e,

$$V(b_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

mas $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$,
o que acarreta:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\bar{X}^2.$$

Finalmente,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \right).$$

A distribuição de b_0 é dada por:

$$b_0 \sim N\left(\beta_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) \sigma^2 \right).$$

A distribuição de b_1 é dada por:

$$b_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right).$$

Mais adiante vamos estimar σ^2.

2.2 Estimação de $E(Y_h) = \beta_0 + \beta_1 X_h$

A média da variável resposta para um dado valor de $X = X_h$ será dada por:

$$\hat{Y}_h = b_0 + b_1 X_h.$$

A média de $\hat{Y}_h$ é dada por:

$$E(\hat{Y}_h) = E(b_0) + E(b_1)X_h = \beta_0 + \beta_1 X_h,$$

não viciado. Sua variância é dada por:

$$Var(\hat{Y}_h) = V(b_0) + Var(b_1)X_h^2 + 2X_h Cov(b_1, b_2),$$

assim,

$$Var(\hat{Y}_h) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \frac{2X_h\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{X_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right],$$

Finalmente,

$$Var(\hat{Y}_h) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right].$$

Como (b_0, b_1) tem distribuição normal bidimensional $\hat{Y}_h$ terá distribuição normal dada por:

$$\hat{Y}_h \sim N \left(\beta_0 + \beta_1 X_h \;\; , \;\; \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right] \right).$$

2.3 Previsão de Y_h

A distribuição de Y_h é normal com média $\beta_0 + \beta_1 X_h$ e variância σ^2, isto é,

$$Y_h \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_h \;\; , \;\; \sigma^2).$$

A média de $Y_h - \hat{Y}_h$ é dada por:

$$E(Y_h - \hat{Y}_h) = E(Y_h) - E(\hat{Y}_h) = \beta_0 + \beta_1 X_h - (\beta_0 + \beta_1 X_h) = 0,$$

A variância de $Y_h - \hat{Y}_h$ é dada por:

$$Var(Y_h - \hat{Y}_h) = var(Y_h) + Var(\hat{Y}_h) = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right],$$

já que Y_h e $\hat{Y}_h$ são independentes.

2.4 Soma de Quadrados Total

A soma de quadrados total é definida por:

$$\begin{aligned} SQT &= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - (\sum Y)^2/n \\ &= \mathbf{Y}' I_n \mathbf{Y} - (1/n)\mathbf{Y}' J_n \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}' \Big[I_n - (1/n)\ J_n \Big] \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}' A \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

2.5 Esperança da Soma de Quadrados Total

Para calcular a esperança do forma quadrática precisamos do seguinte fato: Se $\boldsymbol{Y}$ tem distribuição normal p-variada com vetor de médias, $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de variâncias-covariâncias Σ.

$$EY'AY = tra(A\Sigma) + \boldsymbol{\mu}' A \boldsymbol{\mu}.$$

Seja $A = I_n - (1/n)J_n$ $\Sigma = I_n\sigma^2$ e $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{X\beta}$.

Assim,

$$\begin{aligned} tra(A\Sigma) &= tra(AI_n\sigma^2) \\ &= \sigma^2 tra(A) \\ &= \sigma^2 tra(I_n - (1/n)J_n) \\ &= \sigma^2 (n - (1/n)tra(J_n)) \\ &= \sigma^2 (n - (1/n) * n \\ &= \sigma^2 (n - 1) \\ &= (n-1)\sigma^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu'} A\boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\beta' X'} A\boldsymbol{X\beta} \\
&= \boldsymbol{\beta' X'}(I_n - (1/n)J_n)\boldsymbol{X\beta} \\
&= \boldsymbol{\beta' X' X\beta} - (1/n)\boldsymbol{\beta' X'} J_n \boldsymbol{X\beta}
\end{aligned}$$

Vamos analisar $\boldsymbol{X'} J_n \boldsymbol{X}$ cuidadosamente:

$$\begin{aligned}
X'J_nX &= \begin{bmatrix} 1' \\ \cdots \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} J_n \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{1'J_n} \\ \cdots \\ \mathbf{X'J_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{1'11'} \\ \cdots \\ \mathbf{X'11'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n\mathbf{1}' \\ \cdots \\ \sum X\mathbf{1}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \vdots & \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\mathbf{1'1} & n\mathbf{1'X} \\ \sum X\mathbf{1'1} & \sum X\mathbf{1'X} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n^2 & n\sum X \\ n\sum X & (\sum X)^2 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{n}X'J_nX &= \begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \frac{(\sum X)^2}{n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
X'A\mathbf{X} &= X'X - \frac{1}{n}X'J_nX \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum X^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta\beta'} &= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^2 & \beta_0\beta_1 \\ \beta_0\beta_1 & \beta_1^2 \end{bmatrix} \\
X'A\mathbf{X}\boldsymbol{\beta\beta'} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0\beta_1\sum X^2 & \beta^2\sum X^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

traço$(X'A\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta'}) = 0 + \beta_1^2 \sum x^2 = \beta_1^2 \sum x^2$
Voltando, tem-se,

$$\mathbb{E}[SQT] = (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{1}$$

2.6 Soma de quadrados residual

SQRES$=\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e}$
Em que,
$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{Y} = \mathbf{Y} - X\hat{\beta} = \mathbf{Y} - X(X'X)^{-1}X'Y$
$\mathbf{e} = [I_n - X(X'X)^{-1}X']\mathbf{Y} = [I - H]\mathbf{Y} = H\mathbf{Y}$
Em que, $H = X(X'X)^{-1}X'$ e $M = I_n - H$
Assim

$$SQRES = \mathbf{e}'\mathbf{e} = (M\mathbf{Y})'M\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'MM\mathbf{Y}.$$

$$SQREs = \mathbf{Y}'M^2\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}'M\mathbf{Y}$$

, pois
$M^2 = [I_n - H][I_n - H] = I_n - H - H + H^2 = I_n - H = M$, pois
$H^2 = X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' = H$
Assim M e H são matrizes idempotentes
Além disso:

a) M e H são matrizes simétricas

$$\begin{aligned} H' &= [X(X'X)^{-1}X']' = (X')'[X(X'X)^{-1}X']' \\ &= X[(X'X)^{-1}]'X' = X[(X'X)']^{-1}X' = H. \end{aligned}$$

Como $H' = H$, H é uma matriz simétrica

b) $HX = X$ pois,
$HX = X(X'X)^{-1}X' = X \cdot I = X$

c) $MX = 0$ (matriz nula)
$MX = (I_n - H)X = X - HX = X - X = 0$

2.7 Esperança da Soma de Quadrados Residual

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[SQRES] &= \mathbb{E}[\mathbf{Y}'M\mathbf{Y}] = \text{tra}(M\Sigma) + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}' M \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} \\
\text{tra}(M\Sigma) &= \text{traço}(MI_n\sigma^2) = \sigma^2\text{traco}(M) \\
&= \text{traço}(I_n - H) = \sigma^2[\text{traço}(I_n) - \text{traço}(H)] \\
&= \sigma^2[n - \text{traço}[X(X'X)^{-1}X']] \\
&= \sigma^2[n - \text{traço}[(X'X)^{-1}X'X]] = \sigma^2[n - \text{traço}(I_2)] \\
&= \sigma^2[n-2] = (n-2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Por outro lado
$\mu_Y' M \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{\beta}' X' M X \beta = 0$ (escalar)
Mas, $MX = 0$ (matriz nula)
Assim,

$$\mathbb{E}[SQRES] = (n-2)\sigma^2 \tag{2}$$

E, portanto,

$$QMRES = \frac{SQRES}{n-2},$$

é um estimador não viciado de σ^2.

2.8 Soma de quadrados de regressão

$$
\begin{aligned}
\text{Como } SQREG &= SQT - SQRES \\
&= \mathbf{Y}'\left[I_n - \frac{1}{n}J_n\right]\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'[I_n - X(X'X)^{-1}X']\mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y}'\left[X(X'X)^{-1}X' - \frac{1}{n}J_n\right]\mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y}'\left[H - \frac{1}{n}J_n\right]\mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[SQREG] &= \mathbb{E}[SQT] - \mathbb{E}[SQRES] \\
&= (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2\sum x_i^2 - (n-2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}[SQREG] = \sigma^2 + \beta_1^2\sum x_i^2 \tag{3}$$

Outra maneira:

$\mathbb{E}[Y'AY] = \text{tra}(A\Sigma) + \boldsymbol{\mu_Y'} A \boldsymbol{\mu_Y}$ em que

$$
\begin{aligned}
\text{tra}(A\Sigma) = \text{tra}(AI_n\sigma^2) &= \sigma^2 \text{tra}\left[N - \frac{1}{n}J_n\right] \\
&= \sigma^2\left[\text{traço}(N) - \frac{1}{n}\text{tra}(J_n)\right] \\
&= \sigma^2\left[2 - \frac{1}{n}n\right] = \sigma^2[2-1] = \sigma^2
\end{aligned}
$$

$\text{tra}(A\Sigma) = \sigma^2$

Mas,

$\boldsymbol{\mu_Y'} A \boldsymbol{\mu_Y} = \boldsymbol{\beta'}$
$X'[N - \frac{1}{n}J_n]X\theta = \boldsymbol{\beta'}[X'NX - \frac{1}{n}X'J_nX]\boldsymbol{\theta}$

Como $NX = X \Rightarrow X' = X'N' = X'N$

Assim,
$\boldsymbol{\mu_Y'} A \boldsymbol{\mu_Y} = \boldsymbol{\beta'}[X'X - \frac{1}{n}X'J_nX]\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta'}X'AX\boldsymbol{\beta} = -\beta_1^2 \sum x_i^2$ (SQT)

2.9 Coeficiente de Determinação

O Coeficiente de Determinação da equação de Regressão Ajustada é dado por:

$$R^2 = \frac{SQREG}{SQT},$$

que

O Coeficiente Ajustado de Determinação da equação de Regressão Estimada é dado por:

$$R^2 = \frac{SQREG}{SQT},$$

2.10 Distribuição de Formas Quadráticas

Teorema 1

Seja

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} \sim N_p[\boldsymbol{\mu_Y},\Sigma]$$

Seja $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ uma forma quadrática. Assim

$$\mathbf{Y}'A\mathbf{Y} \sim \chi'^2\Big[k = r(A), \lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu_Y'}A\boldsymbol{\mu_Y}\Big]$$

Se e somente se $A\Sigma$ for idempotente. Assim $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ tem uma distribuição qui-quadrado não central com $k = r(A)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\lambda = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\mu_Y'}A\boldsymbol{\mu_Y}.$$

A f.d.p $V = Y'AY$ é dada por

$$f_V(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{1}{\Gamma(i+\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}+i}} v^{\frac{k}{2}+i-1}e^{-v} \quad I_A(v), \quad A = (0,\infty).$$

Assim, V é uma soma ponderada de qui-quadrados centrais onde os pesos são dados por uma distribuição de Poisson (λ).

$OBS_1 : \mathbb{E}(V) = k + 2\lambda$
$Var(V) = 2k + 8\lambda$

Prove! Sejam $I \sim Poisson(\lambda)$ e $V|I \sim \chi^2(k+2I)$. Assim: (i) $E(V) = E[E(V|I)] =$

$E[k + 2I] = k + 2E(I) = k + 2\lambda.$

(ii)

$Var(V) = E[Var(V|I)]+Var[E(V|I)] = E[2k+4I]+Var[k+2I] = 2k+4\lambda+4\lambda = 2k+8\lambda.$

OBS_2 : Se $\lambda = 0$, $Y'AY \sim \chi^2(k = r(A))$

(qui-quadrado central)

OBS_3 : Se uma matriz é idempotente o seu posto é igual ao seu traço.

OBS_4 : A variância de $Y'AY$ é dada por:

$$Var(Y'AY) = 2tra[(A\Sigma)^2] + 4\mu' A\Sigma A\mu.$$

2.11 Distribuição da soma de quadrados residual

Considere a forma quadrática da soma de quadrados residual:

$$SQRes = Y'MY = Y'(I_n - H)Y.$$

Vamos considerar a distribuição de $\dfrac{SQRes}{\sigma^2}$:

$$\frac{SQRes}{\sigma^2} = \mathbf{Y}'\frac{M}{\sigma^2}\mathbf{Y}$$

que é uma forma quadrática cujo núcleo é $\dfrac{M}{\sigma^2}$

Segundo o **Teorema 1** para que $\tilde{\mathbf{Y}}'\dfrac{M}{\sigma^2}\mathbf{Y}$ tenha uma distribuição de qui-quadrado com parâmetros k e λ, basta verificar se $\dfrac{M}{\sigma^2}\Sigma = \dfrac{M}{\sigma^2}I_n\sigma^2$ é uma matriz idempotente. Já foi provado que M é idempotente.

Agora, vamos analisar os parâmetros

$k = \text{Posto}\left(\dfrac{M}{\sigma^2}\right) = \text{Posto}(M) = \text{traço}(M) = n - 2$

Por outro lado, $\lambda = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}'\dfrac{M}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \dfrac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}'M\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = 0$ (Visto na pág. 3)

Assim

$$\frac{SQRes}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

2.12 Distribuição da Soma de quadrados de Regressão

Considere a forma quadrática da soma de quadrados de Regressão:

$$SQReg = Y'\left[N - \frac{1}{n}J_n\right]Y.$$

Assim

$$\frac{SQReg}{\sigma^2} = \mathbf{Y}'\frac{N - \frac{1}{n}J_n}{\sigma^2}\mathbf{Y}$$

terá distribuição de qui-quadrado não central se:

$$\frac{N - \frac{1}{n}J_n}{\sigma^2}I_n\sigma^2 = N - \frac{1}{n}J_n$$

for idempotente.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left[N - \frac{1}{n}J_n\right]^2 &= N^2 - \frac{1}{n}J_n - \frac{1}{n} - J_n + \frac{1}{n^2}J_n^2 \\
&= N^2 - \frac{1}{n}J_n - \frac{1}{n} - J_n + \frac{1}{n^2}\mathbf{11'1}1' \\
&= N^2 - \frac{2}{n}J_n + \frac{n}{n^2}11' = N^2 - \frac{2}{n}J_n + \frac{1}{n}J_n \\
&= N - \frac{1}{n}J_n
\end{aligned}$$

logo $N - \frac{1}{n}J_n$ é idempotente.

Vamos calcular os parâmetros:

$$\begin{aligned}
k &= \text{Posto}\left(\frac{N - \frac{1}{n}J_n}{\sigma^2}\right) = \text{traço}\left(N - \frac{1}{n}J_n\right) = \text{Posto}\left(N - \frac{1}{n}J_n\right) \\
&= \text{traço}(N) - \frac{1}{n}\text{tra}(J_n) = 2 - \frac{1}{n}n = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}'\left(\frac{N - \frac{1}{n}J_n}{\sigma^2}\right)\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{2\sigma^2}\beta^2\sum x_i^2$$

2.13 Independência de Formas Quadráticas

Teorema 2
Quando $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}, \Sigma)$, as formas quadráticas $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'B\mathbf{Y}$ são independentes se

e somente se $A\Sigma B = 0$ (matriz nula)

Fato 1: No modelo de Regressão Linear Simples $SQReg$ e $SQRes$ são independentes.

$$S\theta Reg = \mathbf{Y}'\left[N - \frac{1}{n}J_n\right]\mathbf{Y}$$
$$S\theta Reg = \mathbf{Y}'M\mathbf{Y}$$

Prove:

$$A = N - \frac{1}{n}J_n$$
$$B = M$$
$$\Sigma = I_n\sigma^2$$

$$A\Sigma B = \left[N - \frac{1}{n}J_n\right]I_n\sigma^2 M = \sigma^{@}\left[N - \frac{1}{n}J_n\right]M = \sigma^2\left[NM - \frac{1}{n}J_nM\right]$$
Mas $N \circ M = N\left[I - N\right] = N - N^2 = N - N = 0$
$J_n \circ M = J_n[I - N] = J_n - J_nN = J_n - J_n = 0$
Pois $J_nN = 11'X(X'X)^{-1}X' = \mathbf{11}' = J_n$

Assim, $A\Sigma B = 0$ (matriz nula).

Logo $SQReg$ e $SQRes$ são independentes. Fato 2: $\mathbf{1}'X(X'X)^{-1}X' = 1'$.

$$X'X(X'X)^{-1}X' = X'$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}' \\ \cdots \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} X(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1' \\ \cdots \\ \mathbf{X}' \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{1}'X(X'X)^{-1}X' = 1'$$

Teorema 3

Quando $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}, \Sigma)$, a forma quadrática $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ e a forma linear $B\mathbf{Y}$ são independentes se e somente se $B\Sigma A = 0$ (matriz nula).

Considere agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Mostre que $\bar{X}$ e S^2 são independentes.

Prova:

(i) $\bar{X} = \mathbf{1}'\mathbf{X}$.

(ii)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\mathbf{X}'(I_n - (1/n)J_n)\mathbf{X}}{n-1} = \mathbf{X}'B\mathbf{X}.$$

$$\begin{aligned}
B\Sigma A &= \mathbf{1}'I_n\sigma^2(1/(n-1))[I_n - (1/n)J_n] \\
&= [\sigma^2/(n-1)][\mathbf{1}' - (1/n)\mathbf{1}'J_n] \\
&= [\sigma^2/(n-1)][\mathbf{1}' - (1/n)\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'] \\
&= [\sigma^2/(n-1)][\mathbf{1}' - (1/n)n\mathbf{1}'] \\
&= [\sigma^2/(n-1)][\mathbf{1}' - \mathbf{1}'] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim a independência fica provada.

2.14 $\mathbf{H_0} : \boldsymbol{\beta_1} = 0$: Não Há Regressão.

Se H_0 é verdade

$$\left.\frac{S\theta Reg}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \quad \frac{S\theta Res}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)\right\} \text{centrais e independentes}$$

Portanto,

$$F = \frac{\left(\dfrac{SQReg}{\sigma^2}\right)/1}{\dfrac{SQRes}{\sigma^2/n-2}} = \frac{\dfrac{SQReg}{1}}{\dfrac{SQRes}{n-2}} = \frac{QMReg}{QMRes} \sim F(1, n-2).$$

Assim, fica justificada a distribuição exata do teste

$$H_0 : \beta_1 = 0.$$

OBS: Se $H_0 = \beta_1 = 0$ é verdade, $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2 \sum x_i^2 = \frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2 0 = 0$ e, portanto, $\frac{SQReg}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ (central)

Vamos apresentar os principais Intervalos de Confiança envolvidos no modelo de regressão linear simples.

2.15 Intervalo de Confiança para β_0

Sabemos que

$$\sigma_{b_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) \sigma^2,$$

que estimada por:

$$s_{b_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) QMRES = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) s^2.$$

Vamos padronizar b_0:

$$Z = \frac{b_0 - \beta_0}{\sigma_{b_0}} \sim N(0,1).$$

Por outro lado temos:

$$V = \frac{SQRES}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Como b, $b' = (b_0, b_1)$, e $SQRES$ são independentes, então b_0 e $SQRES$ são independentes.

Logo podemos usar a quantidade pivotal:

$$T = \frac{\dfrac{b_0 - \beta_0}{\sigma_{b_0}}}{\sqrt{\dfrac{SQRES}{\sigma^2}}} = \frac{b_0 - \beta_0}{s_{b_0}} \sim t(n-2).$$

Seja t_0 o percentil de ordem $(1 - \alpha/2)$ da $t(n-2)$ e o intervalo de confiança com $(1-\alpha)100\%$ para β_0 é dado por:

$$b_0 \ \mp \ t_0 \cdot s_{b_0},$$

isto é,

$$IC[\beta_0, 100(1-\alpha)] = [\ b_0 - t_0 \cdot s_{b_0}\ ,\ b_0 + t_0 \cdot s_{b_0}\ ].$$

]

2.16 Intervalo de Confiança para β_1

Sabemos que

$$\sigma^2_{b_1} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

que estimada por:

$$s^2_{b_1} = \frac{QMRES}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Vamos padronizar b_1:

$$Z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma_{b_1}} \sim N(0,1).$$

Por outro lado temos:

$$V = \frac{SQRES}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Como b, $b' = (b_0, b_1)$, e $SQRES$ são independentes, então b_1 e $SQRES$ são independentes.

Logo podemos usar a quantidade pivotal:

$$T = \frac{\dfrac{b_1 - \beta_1}{\sigma_{b_1}}}{\sqrt{\dfrac{SQRES}{\sigma^2}}} = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} \sim t(n-2).$$

Seja t_0 o percentil de ordem $(1-\alpha/2)$ da $t(n-2)$ e o intervalo de confiança com $(1-\alpha)100\%$ para β_1 é dado por:

$$b_1 \ \mp \ t_0 \cdot s_{b_1},$$

isto é,

$$IC[\beta_1, 100(1-\alpha)] = [\ b_1 - t_0 \cdot s_{b_1}\ ,\ b_1 + t_0 \cdot s_{b_1}\ ].$$

]

2.17 Intervalo de Confiança para $c'\beta = c_0\beta_0 + c_1\beta_1$

Para estimar $c'\beta$ usaremos $c'b$.

Temos que:

$$E(c'b) = c'E(b) = c'\beta$$

e

$$V(c'b) = c'Cov(b)c = c'(XX)^{-1}c\ \sigma^2,$$

que é estimada por:

$$S^2_{c'b} = c'(XX)^{-1}cQMRES = c'(XX)^{-1}c\ s^2.$$

Além disso,

$$c'b \sim N(c'\beta, V(c'b)),$$

e que padronizando fica:

$$Z = \frac{c'b - c'\beta}{\sqrt{V(c'b)}} \sim N(0,1).$$

Por outro lado temos:

$$V = \frac{SQRES}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Como b, $b' = (b_0, b_1)$, e $SQRES$ são independentes,
Logo podemos usar a quantidade pivotal:

$$T = \frac{\dfrac{c'b - c'\beta}{\sigma_{b_0}}}{\sqrt{\dfrac{SQRES}{\sigma^2}}} = \frac{c'b - c'\beta}{s_{c'b}} \sim t(n-2).$$

Seja t_0 o percentil de ordem $(1-\alpha/2)$ da $t(n-2)$ e o intervalo de confiança com $(1-\alpha)100\%$ para $c'\beta$ é dado por:

$$c'b \ \mp \ t_0 \cdot s_{c'b},$$

isto é,

2.18 Intervalo de Confiança para $E(Y_h) = \beta_0 + \beta_1 X_h$

Como $E(Y_h) = (1, X_h)\beta = c'\beta$ temos que $c_0 = 1, c_1 = X_h$.

Como,

$$Var(\hat{Y_h}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right],$$

que é estimada por:

$$S^2_{\bar{Y}h} = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right].$$

Seja t_0 o percentil de ordem $(1-\alpha/2)$ da $t(n-2)$ e o intervalo de confiança com $(1-\alpha)100\%$ para $E(Y_h)$ é dado por:

$$\hat{Y_h} \ \mp \ t_0 \cdot s_{\bar{Y}h},$$

2.19 Intervalo de Previsão Y_h

A variância de $Y_h - \hat{Y_h}$ é dada por:

$$Var(Y_h - \hat{Y_h}) = var(Y_h) + Var(\hat{Y_h}) = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right],$$

que é estimada por:

$$EP2 = QMRES \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{x_h^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right].$$

Vamos padronizar

$$Z = \frac{Y_h - \hat{Y}_h}{\sqrt{Var(Y_h - \hat{Y}_h)}} \sim N(0,1).$$

Assim,

$$T = \frac{Y_h - \hat{Y}_h}{\sqrt{EP2}} \sim t(n-2).$$

Seja t_0 o percentil de ordem $(1-\alpha/2)$ da $t(n-2)$ e assim

$$P\left(-t_0 \leq \frac{Y_h - \hat{Y}_h}{\sqrt{EP2}} \leq t_0 \right) = 1 - \alpha,$$

e que após algumas contas tem-se:

$$P(\hat{Y}_h - t_0 \cdot \sqrt{EP2} \leq Y_h \leq \hat{Y}_h + t_0 \cdot \sqrt{EP2}) = 1 - \alpha,$$

que é o nosso intervalo de previsão procurado.

2.20 Intervalo de Confiança para σ^2

Vamos usar como quantidade pivotal

$$V = \frac{SQRES}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Sejam q_1 o quantil de ordem $\alpha/2$ de V e q_2 o quantil de ordem $1-\alpha/2$ de V. Assim,

$$P\left(q_1 \leq \frac{SQRES}{\sigma^2} \leq q_2 \right) = 1 - \alpha,$$

que depois de alguma manipulação algébrica fica;

$$P\left(\frac{SQRES}{q_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{SQRES}{q_1} \right) = 1 - \alpha.$$

Assim,

$$I[\sigma^2, (1-\alpha)100\%] = \left[\frac{SQRES}{q_2} \leq \sigma^2 \ \ , \ \ \frac{SQRES}{q_1} \leq \sigma^2 \right].$$

3 Regressão Linear Múltipla

Considere o modelo de regressão linear múltipla com uma variável resposta dependente (Y) e p variáveis explicativas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ dado por:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \ldots + \beta_k X_k + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

Colocando na forma matricial:

$\mathbf{Y_{nx1}} = X\boldsymbol{\beta_{n\times(k+1)}} + \boldsymbol{\mu_{nx1}}$ e
$\beta' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$

$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta \Rightarrow \hat{\mathbf{Y}} = X\mathbf{b}$

$\mathbf{Y} \sim N_n(X\boldsymbol{\beta}, I_n\sigma^2)$

$b = (X'X)^{-1}\mathbf{X'Y}$

$X'X$ é uma matriz quadrada de ordem $p = k + 1$

$SQRES = \mathbf{e}'e$, em que

$$\begin{aligned} e &= Y - \hat{Y} = Y - X\mathbf{b} = Y - X(X'X)^{-1}X'\mathbf{Y} = [I_{(n)} - X(X'X)^{-1}X']Y \\ e &= M\mathbf{Y} \\ M_{n\times n} &= I_{(n)} - X(X'X)^{-1}X' \\ \text{traço}(M) &= \text{tra}(I_n) - \text{traço}[X(X'X)^{-1}X'] \\ &= n - \text{traço}((X'X)^{-1}X'X) \\ &= n - \text{traço}(I_{k+1}) = n - (k+1) = n - p \end{aligned}$$

Assim $SQRES = Y'MY$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[SQRES] &= \text{tra}(M\Sigma) + \boldsymbol{\mu'_Y} M \boldsymbol{\mu_Y} \\ &= \sigma^2\text{tra}(m) + \beta'X'MX\beta = \sigma^2(n-p) \end{aligned}$$

Assim $\mathbb{E}[SQRES] = \sigma^2(n-p)$ e, portanto, $QMRES = \dfrac{SQRES}{n-p}$ é um estimador não viciado de σ^2

4 Previsão e Testes de Combinações Lineares dos Parâmetros.

Queremos prever $E(Y)$ quando $X_1 = X_{1h}, X_2 = X_{2h}, \ldots, X_k = X_{kh}$. Assim,

$$E(Y_h) = \beta_0 + \beta_1 X_{1h} + \beta_2 X_{2h} + \ldots + \beta_k X_{kh} = x'\beta,$$

que é estimado por:

$$\hat{Y}_h = b_0 + b_1 X_{1h} + b_2 X_{2h} + \ldots + b_k X_{kh} = x'b,$$

onde

$$x'_h = [1, X_{1h}, X_{2h}, \ldots, X_{kh}].$$

A variância de $\hat{Y}_h$ é dada por:

$$V(\hat{Y}_h) = x'_h (X'X)^{-1} x_h \sigma^2,$$

que é estimada por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_h) = x'_h (X'X)^{-1} x_h s^2.$$

Vamos obter agora um intervalo de confiança para $E(Y_h) = x'h\beta$ com nível de confiança $\gamma = 1 - \alpha$. Seja t_0 o valor crítico de uma t-student com $glres = (n-p)$ graus de liberdade. O intervalo é dado por:

$$x1'_h b - t_0 \sqrt{\hat{V}(\hat{Y}_h)} < E(Y_h) < x1'_h b + t_0 \sqrt{\hat{V}(\hat{Y}_h)}.$$

Para avaliar a precisão de $\hat{Y}_h$ como previsão de uma nova observação Y_h vamos determinar o intervalo de previsão para $\hat{Y}_h$, Assim $IP(Y_h), (1-\alpha)100\%)$ é dado por:

$$x1'_h b - t_0 \sqrt{QMRES + \hat{V}(\hat{Y}_h)} < Y_h < x1'_h b + t_0 \sqrt{QMRES + \hat{V}(\hat{Y}_h)}.$$

5 Regressão Linear Múltipla: Testes de Hipóteses: $H_0 : C\beta = M$

Usaremos a seguinte Estatística:

$$Q = \frac{(Cb - C\beta)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(Cb - C\beta)}{ms^2},$$

onde m é o posto da matriz C e s^2 é o quadrado médio residual. Se H_0 é verdade,

$$Q = \frac{(Cb - m)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(Cb - M)}{ms^2} \sim F(m, glres).$$

O estimador não viciado de $C\beta$ é Cb pois

$$E(Cb) = CE(b) = C\beta,$$

e sua variância é dada por por:

$$Var(Cb) = Cvar(b)C' = C(X'X)^{-1}C'\sigma^2,$$

6 Exemplo: Exercício 4.15-pg194-Hoffmann

São dados os pares de valores X, Y da tabela a seguir:

X	Y
-2	0.9
-1	6.4
0	8.4
1	10.4
2	8.9

Admite-se que as variáveis estão relacionadas de acordo com o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i,$$

onde os u_j são os erros independentes com distribuição normal de média zero e variância σ^2.

a. Determine as estimativas dos parâmetros.

```
>
> ##Hoffmann-4.15
>
> Y=c(0.9,6.4,8.4,10.4,8.9)
>
> plot(X1,Y)  #####Uma parábola parece se ajustar aos dados.
>
> X1=-2:2;X1
[1] -2 -1  0  1  2
>
> X2=X1^2;X2
[1] 4 1 0 1 4
> n=length(Y);n
[1] 5
> um=matrix(1,n,1);um
[,1]
[1,]    1
[2,]    1
[3,]    1
[4,]    1
```

```
[5,]    1
>
> X=cbind(um,X1,X2);X
X1 X2
[1,] 1 -2  4
[2,] 1 -1  1
[3,] 1  0  0
[4,] 1  1  1
[5,] 1  2  4
>
> XlX=t(X)%*%X;XlX
X1 X2
5  0 10
X1  0 10  0
X2 10  0 34
> XlY=t(X)%*%Y;XlY
[,1]
35
X1   20
X2   56
>
> IXlX=solve(XlX);IXlX
X1          X2
0.4857143 0.0 -0.14285714
X1  0.0000000 0.1  0.00000000
X2 -0.1428571 0.0  0.07142857
>
> b=IXlX%*%XlY;b
[,1]
9
X1    2
X2   -1
>

>
> ##SQT=Y'AY, A=I_n -(1/n)*J_n
>
> A=diag(n)-(1/n)*matrix(1,n,n);A
[,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]  0.8 -0.2 -0.2 -0.2 -0.2
[2,] -0.2  0.8 -0.2 -0.2 -0.2
[3,] -0.2 -0.2  0.8 -0.2 -0.2
[4,] -0.2 -0.2 -0.2  0.8 -0.2
```

```
[5,] -0.2 -0.2 -0.2 -0.2  0.8
>
> SQT=t(Y)%*%A%*%Y;SQT
[,1]
[1,] 54.7
>
> ##SQRes=Y'BY, B=I_n-H
> H=X%*%IX1X%*%t(X);H
[,1]        [,2]        [,3]        [,4]        [,5]
[1,]  0.88571429  0.2571429 -0.08571429 -0.1428571  0.08571429
[2,]  0.25714286  0.3714286  0.34285714  0.1714286 -0.14285714
[3,] -0.08571429  0.3428571  0.48571429  0.3428571 -0.08571429
[4,] -0.14285714  0.1714286  0.34285714  0.3714286  0.25714286
[5,]  0.08571429 -0.1428571 -0.08571429  0.2571429  0.88571429
>  B=diag(n)-H;B
[,1]        [,2]        [,3]        [,4]        [,5]
[1,]  0.11428571 -0.2571429  0.08571429  0.1428571 -0.08571429
[2,] -0.25714286  0.6285714 -0.34285714 -0.1714286  0.14285714
[3,]  0.08571429 -0.3428571  0.51428571 -0.3428571  0.08571429
[4,]  0.14285714 -0.1714286 -0.34285714  0.6285714 -0.25714286
[5,] -0.08571429  0.1428571  0.08571429 -0.2571429  0.11428571
> SQRES=t(Y)%*%B%*%Y;SQRES
[,1]
[1,]  0.7
> p=3 ### número de parâmetros
> glres=n-p;glres
[1] 2
> QMRES=SQRES/glres;QMRES
[,1]
[1,] 0.35
> s2=QMRES #### estimativa de sigma^2.
>
```

.

b. Faça a análise de variância da regressão , testando , ao nível de significância de 5%, a hipótese:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

```
> C=H -(1/n)*matrix(1,n,n);C
[,1]         [,2]        [,3]         [,4]         [,5]
[1,]  0.68571429  0.05714286 -0.2857143 -0.34285714 -0.11428571
```

```
[2,]  0.05714286  0.17142857  0.1428571 -0.02857143 -0.34285714
[3,] -0.28571429  0.14285714  0.2857143  0.14285714 -0.28571429
[4,] -0.34285714 -0.02857143  0.1428571  0.17142857  0.05714286
[5,] -0.11428571 -0.34285714 -0.2857143  0.05714286  0.68571429
> SQREG=SQT-SQRES;SQREG; t(Y)%*%C%*%Y
[,1]
[1,]   54
[,1]
[1,]   54
> glreg=p-1
> QMREG=SQREG/glreg;QMREG
[,1]
[1,]   27
> alfa=0.05
>
> Fcal=QMREG/QMRES;Fcal
[,1]
[1,] 77.14286
> Ftab=qf(1-alfa,glreg,glres);Ftab
[1] 19
> nd=1-pf(Fcal,glreg,glres);nd
[,1]
[1,] 0.01279707
> alfa >nd ####Rejeitar H_0
[,1]
[1,] TRUE
> alfa >nd ####Rejeitar H_0
[,1]
[1,] TRUE
>
```

c. Calcule o valor do coeficiente da regressão ajustada.

```
> R2=100*(SQREG/SQT);R2
[,1]
[1,] 98.72029
>
```

d. Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese:

$$H_0 : \beta_2 = 0 \ \ versus; H_1 : \beta_2 < 0.$$

Se $H_)$ é verdade a estatística do teste é:

$$t = \frac{b_2 - 0}{s_{b_2}} \sim t(glres).$$

```
>
> b2=b[3];b2
[1] -1
>
> s2=as.numeric(s2);s2
[1] 0.35
> s2b2=s2*IX1X[3,3];s2b2
[1] 0.025
> sb2=sqrt(s2b2);sb2
[1] 0.1581139
>
> tcal=(b2-0)/sb2;tcal
[1] -6.324555
>
> alfa=0.05
>
> ttab=qt(alfa,glres);ttab
[1] -2.919986
>
> tcal <ttab #### Rejeitar H_0
[1] TRUE
>
> nd=pt(tcal,glres);nd
[1] 0.01204996
>
> alfa >nd #### Rejeitar H_0
[1] TRUE
>
```

e. Determine o valor da contribuição do termo quadrático para a soma dos quadrados de regressão. Verifique se o respectivo F é significativo ao nível de 5%(note que o valor F obtido é igual ao quadrado do valor t calculado no item anterior).

   A soma de quadrados de regressão devido ao termo linear(X) e ao quadrático (X^2) é 54. Agora vamos fazer uma regressão linear simples de Y versus $X1 = X$ para ver a contribuição do termo linear:

```
>
```

```
>
> x1=X1-mean(X1);x1
[1] -2 -1  0  1  2
>
> Sx12=sum(x1^2);Sx12
[1] 10
> y=Y-mean(Y);y
[1] -6.1 -0.6  1.4  3.4  1.9
>
> x1y=x1*y;x1y
[1] 12.2  0.6  0.0  3.4  3.8
> Sx1y=sum(x1y);Sx1y
[1] 20
> bx1=Sx1y/Sx12;bx1
[1] 2
>
> SQREG_X1=bx1*Sx1y;SQREG_X1
[1] 40
>
>
> ###A contribuição de X2=X^2 é:
>
> CX2=SQREG -SQREG_X1;CX2
[,1]
[1,]   14
>
> QMCX2=CX2/1;QMCX2 ##### tem 1 gl só uma variável
[,1]
[1,]   14
>
> Fcon=QMCX2/QMRES;Fcon
[,1]
[1,]   40
>
> sqrt(Fcon);abs(tcal)
[,1]
[1,] 6.324555
[1] 6.324555
>
```

f. Fazer tudo direto no R.

   Estudar cuidadosamente a saída:

```
>
>
>
> aux=lm(Y~X1+X2);aux

Call:
lm(formula = Y ~ X1 + X2)

Coefficients:
(Intercept)           X1           X2
9            2           -1

>
> summary(aux)

Call:
lm(formula = Y ~ X1 + X2)

Residuals:
1    2    3    4    5
-0.1  0.4 -0.6  0.4 -0.1

Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   9.0000     0.4123  21.828  0.00209 **
X1            2.0000     0.1871  10.690  0.00864 **
X2           -1.0000     0.1581  -6.325  0.02410 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.5916 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9872,    Adjusted R-squared:  0.9744
F-statistic: 77.14 on 2 and 2 DF,  p-value: 0.0128

>
> anova(aux) ####Veja a contribuição de X2=X^2 direto na tabela!!!!!
Analysis of Variance Table

Response: Y
Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
X1         1   40.0   40.00  114.29 0.008637 **
X2         1   14.0   14.00   40.00 0.024100 *
Residuals  2    0.7    0.35
```

```
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
>
>
> ###Estimativa da matriz de var-cov de b=(b_0,b_1,b_2)
>
>
>
> Sb=vcov(aux);Sb ####Vamos começar a usar!!!!!!
             (Intercept)            X1            X2
(Intercept)  1.700000e-01 -3.510833e-18 -5.000000e-02
X1          -3.510833e-18  3.500000e-02  1.755417e-18
X2          -5.000000e-02  1.755417e-18  2.500000e-02
>
>
>
> round(Sb,4) ####Cuidado com a notação científica!!!!!!
(Intercept)    X1     X2
(Intercept)        0.17 0.000 -0.050
X1                 0.00 0.035  0.000
X2                -0.05 0.000  0.025
>
>
>
>
```