1 Variáveis Aleatórias Contínuas-2021.1

Um resumo preparado pelo Professor Maurício Mota para Probabilidade II ministrada em 2021.1.

1.1 Função Densidade de Probabilidade (fdp)

Seja X uma variável aleatória contínua (v.a.c) com função densidade de probabilidade dada por $f(x)$. Assim:

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Além disso seja $E \subset R$

$$P(E) = \int_E f(x)\, dx.$$

Note que

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1.2 Função de Distribuição Acumulada (fd)

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Principais Propriedades de $F(x)$.

i) $F(x)$ é uma função sempre não decrescente.

ii) $F(x)$ é uma função contínua. No caso discreto sempre contínua à direita.

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

iv. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

1.3 Função de Sobrevivência

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t)\, dt = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x).$$

Principais Propriedades de $S(x)$.

i) $S(x)$ é uma função sempre não crescente.

ii) $S(x)$ é uma função contínua. No caso discreto sempre contínua à direita.

iii) $\lim_{x \to -\infty} S(x) = 1$ e $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$.

iv. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = S(a) - S(b)$.

1.4 Quantil de Ordem p- Q(p)

$$F\left(Q(p)\right) = p \quad \text{ou} \quad S\left(Q(p)\right) = 1 - p.$$

Assim:

a. Q(0,25)=S(0,75) é o primeiro quartil;

b. Q(0,50)=S(0,50) é o segundo quartil , quinto decil ou mediana;

c. Q(0,75)=S(0,25) é o terceiro quartil;

d. Q(0,10)=S(0,90) é primeiro decil;

e. Q(0,20)=S(0,80) é segundo decil;

f. Q(0,90)=S(0,90) é o nono decil;

g. Q(0,95)=S(0,05) é o percentil de ordem 95.

1.5 Moda da Distribuição- Mo

O valor de x que maximiza $f(x)$ é chamada de moda da distribuição.

1.6 r-ésimo momento em relação à origem

$$\mu_r' = E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx$$

1.7 r-ésimo momento central de X

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f_X(x)\, dx, \quad \text{em que} \quad E(X) = \mu$$

$$\mu_2 = E\left(X-\mu\right)^2 = V\left(X\right)$$

1.8 Variância (σ^2)

$$\sigma^2 = E[X-\mu]^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

Desvio Padrão de X (σ)

$$\sigma = \sigma_X = +\sqrt{\sigma^2}$$

1.9 Desvio Médio de X

$$D_m = E\left[|X-\mu|\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |(x-\mu)|\, f_X(x)\, dx$$

1.10 Coeficiente de Assimetria

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left(X-\mu\right)^3}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

Se $\alpha_3 \neq 0$, dizemos que $f_{_X}(x)$ não é simétrica ou a distribuição não é simétrica.

Se $\alpha_3 = 0$, nada se pode concluir.

Definição: Diz-se que $f(x)$ é simétrica em torno do ponto "a"se:

$$f\left(a+x\right) = f\left(a-x\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

OBS_1: Quando $a = 0$ tem-se $f(x) = f(-x)$ e diz-se que f é simétrica em torno da origem ou f é uma função par.
Se $\alpha_3 > 0$, diz-se que f ou X é assimétrica positiva e se $\alpha_3 < 0$, diz-se que f ou X é assimétrica negativa.

1.11 Coeficiente de Curtose

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E\left(X-\mu\right)^4}{\sigma^4} = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{\mu_4}{\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$Se \quad \begin{cases} \alpha_4 < 3, & \text{a distribuição é dita platicúrtca} \\ \alpha_4 = 3, & \text{a distribuição é dita mesocúrtica} \\ \alpha_4 > 3, & \text{a distribuição é dita leptocúrtica} \end{cases}$$

1.12 Coeficiente de Variação (CV)

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

, em que σ é o desvio padrão e μ é a média $\neq 0$.
Geralmente é expresso em % , é uma medida relativa de variabilidade e é adimensional.

1.13 r-ésimo momento fatorial

$$\mu'_{[r]} = E\left[X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1)\right], \quad \text{r=1,2,3} \ldots$$

1.14 Função Geradora de Momentos (fgm)

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

Obs: $E(X) = M'(0)$, $E(X^2) = M''(0)$ e $E(X^r) = M^{(r)}(0)$.

1.15 Função Geradora de Cumulantes

$$K(t) = \ln\left[M_{_X}(t)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i!}\ t^i,$$

k_i é o coeficiente de $\dfrac{t^i}{i!}$ da expansão em uma série de Taylor de $K(t)$

a. $k_1 = E(X) = K'(0) =$

b. $k_2 = Var(X) = K''(0) = \mu_2 = \sigma^2$

c. $k_3 = E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E^3(X) = \mu_3$.

d. $k_4 = E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 12E^2(X)E(X^2) - 3E^2(X^2) - 6E^4(X) = \mu_4 - 3(k_2)^2$.

1.16 Função Característica

$$\Phi(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[cos(tX) + isen(tX)\right] = E\left[cos(tX)\right] + iE\left[sen(tX)\right]$$

Obs: $iE(X) = \Phi^{'}(0)$, $i^2E(X^2) = -E(X^2) = \Phi''(0)$ e $i^rE(X^r) = \Phi^{(r)}(0)$.

1.17 Taxa de Falhas

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

A partir de $\lambda(t)$ podemos achar a f.d.p. de X, não negativa, isto é $S(0) = 1$. Logo

$$f(x) = \lambda(x)\ exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dt\right]\ I_A(t),\quad A = (0, \infty).$$

1.18 Entropia

$$H(X) = E\left[-ln[f(X)]\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} ln\left[f(x)\right]\ \ f(x)\ dx.$$

A entropia representa a falta de informação de uma determinada distribuição de probabilidade.

1.19 Família Exponencial

Dizemos que uma variável aleatória contínua X dependendo de um único parâmetro θ com suporte A independendo de θ pertence à família exponencial se sua f.d.p. puder ser expressa como:

$$f(x) = exp\left[c(\theta)T(x) + d(\theta) + h(x)\right]\ \ I_A(x).$$

É mais operacional usar:

$$ln[f(x)] = \left[c(\theta)T(x) + d(\theta) + h(x)\right]\ \ I_A(x).$$

Seja $Y = T(X)$. Assim

$$E(Y) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}.$$

1.20 Função Escore

A variável aleatória

$$V = \frac{\partial \, ln(f(X))}{\partial \theta}$$

é chamada de função escore.

Obs1: $E(V) = 0$.

Obs2: Note que o suporte A de X não pode depender de do parâmetro θ.

1.21 Informação de Fisher

A quantidade

$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \, ln(f(X))}{\partial \theta}\right)^2\right] = E(V^2),$$

é chamada de Informação de Fisher de θ.

Ela também pode ser calculada como:

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \, ln(f(X))}{\partial \theta^2}\right] = E(V^2).$$

a.

$$I_F(\theta) = Var(V).$$