CC0288 - Inferência Estatística I

Aula de Exercícios Intervalos de confiança - 10/05/2023.

Prof. Maurício

1. Considere a distribuição de uma população normal com σ conhecido.

   a. Qual o nível de confiança do intervalo

   $$\bar{x} \pm 2,81\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

   ?

   b. Qual o nível de confiança do intervalo

   $$\bar{x} \pm 1,44\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

   ?

   c. Que valor de $z_{tab} = z_{\alpha/2}$ na fórmula

   $$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

   resulta em um nível de confiança de 99,7%?

   d. Responda à pergunta proposta no item(c) para um nível de confiança de 75%.

Solução: Note que temos intervalos de confiança para a média populacional μ com σ conhecido.

Note que:

$$\bar{x} \pm e = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

No item **a** temos

$$z_{\alpha/2} = 2,81.$$

Sabemos que

$$P(Z > 2,81) = \frac{\alpha}{2}.$$

Para usar a tabela da Normal padrão temos que fazer a seguinte operação:

$$P(0 < Z \leq 2,81) = 0,5 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$0,49752 = 0,5 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,5 - 0,49752 = 0,00248$$

Daí

$$\alpha = 0,00496$$

e o nível de confiança é dado por:

$$\gamma = 1 - \alpha = 0,99504$$

```
> ####Valor da tabela
> round(pnorm(2.81)-pnorm(0),5)
[1] 0.49752
>

> 0.5-0.49752
[1] 0.00248
> alfa=2*(0.5-0.49752);alfa
[1] 0.00496
> gama=1-alfa;gama
[1] 0.99504
> pnorm(2.81)
[1] 0.9975229
> round(pnorm(2.81),5)
[1] 0.99752
> p=round(pnorm(2.81),5);p
[1] 0.99752
> gama=2*p-1;gama;round(gama,5)
[1] 0.99504
[1] 0.99504
```

Vamos responder ao item **b**:

$$z_{\alpha/2} = 1,44.$$

Sabemos que

$$P(Z > 1,44) = \frac{\alpha}{2}.$$

Para usar a tabela da Normal padrão temos que fazer a seguinte operação:

$$P(0 < Z \leq 1,44) = 0,5 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$0,42507 = 0,5 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,5 - 0,42507 = 0,07493$$

Daí

$$\alpha = 0.14986$$

e o nível de confiança é dado por:

$$\gamma = 1 - \alpha = 0,85014.$$

```
round(pnorm(1.44)-pnorm(0),5)
[1] 0.42507
> alfa=2*(0.5-0.42507);alfa
[1] 0.14986
> gama=1-alfa;gama
[1] 0.85014
> p=round(pnorm(1.44),5);p ####p=1-alfa/2--------2p=2-alfa--------2p-1=1-alfa=gama
[1] 0.92507
> gama=2*p-1;gama;round(gama,5)
[1] 0.85014
[1] 0.85014
>
```

Vamos responder ao item **c**:
A confiança é

$$\gamma = 1 - \alpha = 0,997.$$

$$\alpha = 1 - 0,997 = 0,003.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,0015.$$

$$P(0 < Z \leq Z_{tab}) = 0,5 - 0,0015 = 0,4985.$$

Olhando no corpo da tabela temos:

$$P(0 < Z \leq 2,96) = 0,49846.$$

$$z_{\alpha/2} = 2,96.$$

```
> gama=0.997
> alfa=1-gama;alfa
[1] 0.003
> alfa/2
[1] 0.0015
>
> z_tab=qnorm( 1- alfa/2);z_tab
[1] 2.967738
>
> pnorm(2.96);pnorm(2.97)
[1] 0.9984618
[1] 0.998511
>
```

Vamos responder ao item **d**:

A confiança é

$$\gamma = 1 - \alpha = 0,75.$$

$$\alpha = 1 - 0,75 = 0,25.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,125.$$

$$P(0 < Z \leq z_{tab}) = 0,5 - 0,125 = 0,375.$$

Olhando no corpo da tabela temos:

$$P(0 < Z \leq 1,15) = 0,375.$$

$$z_{\alpha/2} = 1,15.$$

```
> gama=0.75
> alfa=1-gama;alfa
[1] 0.25
> alfa/2
[1] 0.125
>
> z_tab=qnorm( 1- alfa/2);z_tab
[1] 1.150349
>
> pnorm(1.15)-pnorm(0);pnorm(1.16)-pnorm(0)
[1] 0.3749281
[1] 0.3769756
>
```

2. Cada um dos intervalos a seguir é um intervalo de confiança para a média μ de uma população normal X com variância conhecida σ^2.

   A variável X é a frequência de ressonância (Hz)de uma raquete de tênis de uma determinada marca.

$$I_1 = (114,4; 115,6) \quad ; \quad I_2 = (114,1; 115,9).$$

   a. Qual é o valor da frequência de ressonância da média amostral?

   b. Ambos os intervalos foram calculados a partir dos mesmos dados amostrais. O nível de confiança de um dos intervalos é 90% e do outro 99% . Qual dos intervalos possui nível de confiança de 90% e por quê?

Solução: Note que:

$$L_i = \bar{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\; e \;\; L_i = \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Note que o ponto médio do intervalo (L_i, L_s) é dado por:

$$\frac{L_i + L_s}{2} = \bar{x}.$$

Vamos responder ao item **a**:

Usando o primeiro intervalo temos:

$$\bar{x} = \frac{114,4 + 115,6}{2} = \frac{230}{2} = 115\ Hz.$$

Usando o segundo intervalo temos:

$$\bar{x} = \frac{114,1 + 115,9}{2} = \frac{230}{2} = 115\ Hz.$$

Vale calcular a média amostral desta maneira para qualquer nível de confiança.

Vamos responder ao item **b**:

O comprimento do intervalo de confiança analisado é dada por:

$$C = Ls - L_i = 2\ z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Note que:

i O comprimento aumenta a medida que o nível de confiança aumenta.

ii O comprimento aumenta a medida que o desvio padrão aumenta.

iii O comprimento diminui a media que o tamanho amostral aumenta.

Assim

$$C_1 = 115,6 - 111,4 = 1,2 \quad C_2 = 115,9 - 114,1 = 1,8.$$

Assim I_1 tem confiança de 90%.

3. Assuma que a porosidade do hélio (em porcentagem) das amostras de carvão tiradas de qualquer junta específica seja normalmente distribuída co desvio padrão real de 0,75.

   a. Calcule um **IC** de 95% da porosidade de uma junta, caso a porosidade média de 20 de seus espécimes seja 4,85.
   b. Calcule um **IC** de 98% da porosidade de uma junta, caso a porosidade média de 16 de seus espécimes seja 4,56.
   c. Quão grande o tamanho de uma amostra deve ser se a amplitude do intervalo de 95% for 0,40?
   d. Que tamanho de amostra é necessário para estimar a porosidade média real dentro de 0,2 com confiança de 99%?

Solução:

Vamos responder ao item **a**:

Temos que:

$$\bar{x} = 4,85 \ ; \ n = 20 \ ; \gamma = 0,90 \ ; \ \alpha = 0,10$$

Além disso

$$z_{tab} = z_{0,05} = 1,645.$$

Assim

$$e = z_{0,05} \times \frac{\sigma}{\sqrt{20}} = 1,65 \times \frac{0,75}{\sqrt{20}} = 0,28$$

$$IC = \bar{x} \pm e = 4,85 \pm 0,28$$

$$IC(\mu, 95\%) = (4,57; 5,13).$$

```
####item a
>
> xb=4.85
> n=20;sigma=0.75;gama=0.95;alfa=1-gama;alfa;alfa/2
[1] 0.05
[1] 0.025
>
> z_tab=qnorm(1-alfa/1);round(z_tab,3);round(z_tab,2)
[1] 1.645
[1] 1.64
>
>
> sqrt(n)
[1] 4.472136
>
> e=z_tab*sigma/sqrt(n);e
[1] 0.2758503
>
>
> IC95= xb+c(-1,1)*e;IC95
[1] 4.57415 5.12585
>
> round(IC95,2)
[1] 4.57 5.13
>
```

A resolução dos outros itens são feitos a seguir:

```
> ####Item b
>
>
>
> xb=4.56
> n=16;sigma=0.75;gama=0.98;alfa=1-gama;alfa;alfa/2
[1] 0.02
[1] 0.01
>
> z_tab=qnorm(1-alfa/1);round(z_tab,3);round(z_tab,2)
[1] 2.054
[1] 2.05
>
>
> sqrt(n)
[1] 4
>
> e=z_tab*sigma/sqrt(n);e
[1] 0.3850779
>
>
> IC95= xb+c(-1,1)*e;IC95
[1] 4.174922 4.945078
>
> round(IC95,2)
[1] 4.17 4.95
>
>
> ####alfa=0,95;z_tab=1.65 C=0,40
>
>
> z_tab=1.65; C=0.40
>
> e=C/2;e
[1] 0.2
>
>
>
> aux=z_tab*sigma/e;aux
[1] 6.1875
> n1=aux^2;n1
[1] 38.28516
>
> n=ceiling(n1);n
[1] 39
>
>
>
> ###Item d
>
> e=0.2;gama=0.99;alfa=1-gama;alfa;alfa/2
```

```
[1] 0.01
[1] 0.005
> z_tab=qnorm(1-alfa/2);z_tab
[1] 2.575829
>
>
> aux=z_tab*sigma/e;aux
[1] 9.65936
> n1=aux^2;n1
[1] 93.30323
>
> n=ceiling(n1);n
[1] 94
>
>
>
```

4. (BM-Cap 11-Exer-15) Das 50000 válvulas fabricadas or uma companhia retira-se uma amostra de 400 válvulas e obtém-se a vida média de 800 horas e o desvio padrão de 100 horas.

   a. Qual o intervalo de confiança de 99% para a vida média da população?
   b. Com que confiança é possível afirmar que a vida média é

   $$800 \pm 9,8$$

   c. Que tamanha deve ter a amostra para que seja de 95% a confiança na estimativa

   $$800 \pm 7,84.$$

Solução Seja X o tempo de vida da válvula em horas.

Nossa suposição:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

e

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Seja $N = 50000$ o tamanho da população e $n = 400$ o tamanho da amostra. A fracção amostral é dada por:

$$f = \frac{n}{N} = \frac{400}{50000} = \frac{4}{500} = 0,008 < 0,10,$$

podemos considerar a mostra com reposição.

De acordo com o enunciado temos

$$\bar{x} = 800 \ \ e \quad s = 100.$$

Como o tamanho da amostra é grande podemos usar

$$\sigma = s = 100.$$

Assim vamos construir im intervalo de confiança para μ com σ conhecido.
Como $\gamma = 0,95$ temos $\alpha = 0,05$ e

$$z_{0,05} = 1,96.$$

O erro amostral é dado por:

$$e = z_{0,05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\ \frac{100}{20} = 1,96 \times 5 = 9,8$$

O intervalo de confiança é dado por:

$$\bar{x} \pm e = 800 \pm 9,8.$$

$$IC(\mu, 95\%) = (790.2\ \ ,\ \ 809.8)$$

Vamos responder ao item **b**:
Como

$$e = 9,8$$

temos:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9,8.$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{9,8\ \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9,8\ 20}{100} = \frac{9.8}{5} = 1,96.$$

Como

$$P(Z > 1,96) = 0,025 = \frac{\alpha}{2},$$

temos

$$\alpha = 2 \times 0,025 = 0,05.$$

E a nossa confiança é

$$\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Vamos responder ao item **c**:
Como

$$e = 7,84$$

temos:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,84.$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{9,8\ \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7,84\ 20}{100} = \frac{7.84}{5} = 1,568 \approx 1,57.$$

Pela tabela da normal padrão temos:

$$P(< Z < 1,57) = 0,44179 = 0,5 - \frac{\alpha}{2}.$$

Como

$$P(Z > 1,96) = 0,025 = \frac{\alpha}{2},$$

temos

$$\alpha = 2 \times 0,025 = 0,05.$$

E a nossa confiança é

$$\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95.$$

5. A voltagem de quebra da Corrente Alternada (CA) de um líquido isolante indica sua resistência dielétrica.

   Uma amostra de 48 observações de um circuito específico forneceu:

62	50	53	57	41	53
55	61	59	64	50	53
64	62	50	68	54	55
57	50	55	50	56	55
46	55	53	54	52	47
47	55	57	48	63	57
57	55	53	59	53	52
50	55	60	50	56	58

   a. Defina a variável aleatória em estudo. Faça uma análise exploratória de dados incluindo, diagrama box-plot, histograma, qq-plot e discuta a normalidade.
   b. Faça o teste de Shapiro-Wilk. Os dados seguem normalidade?
   c. Construa um intervalo de confiança de 95% para a média populacional μ supondo $\sigma = s$.
   d. Construa um intervalo de confiança de 95% para a média populacional μ supondo σ desconhecido.
   e. Construa um intervalo de confiança de 90% para a variância populacional σ^2.