0.1 Motivação

Seja $Y_t \sim Poi(\lambda t)$ o número de eventos que ocorrem em um intervalo de tempo de t em que λ é o numero médio de eventos em tempo unitário. Logo

$$P(Y_t = y) = \frac{e^{-\lambda\, t}\, (\lambda t)^y}{y!}\, I_A(y), \quad A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Seja X a variável que representa o tempo de espera até o primeiro evento de interesse ocorra. Assim X é uma variável aleatória contínua positiva cuja função de sobrevivência é dada por:

$$S(x) = P(X > x) = P(Y_x = 0) = e^{-\lambda\, x},$$

isto é, o tempo de espera é maior do que x se no intervalo $[0, x]$ o evento de interesse não ocorrer. A função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = -S'(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x).$$

0.2 Definição

Dizemos que uma varável aleatória contínua X tem distribuição Exponencial de parâmetro λ, $\forall \lambda > 0$ se sua fdp é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

Notação: $X \sim$ Exponencial (λ)

Observação. Lê-se a notação acima do seguinte modo: *X segue distribuição Exponencial de parâmetro λ*

A fdp de X possui o seguinte gráfico para $\lambda = 2; 2,5; 3$

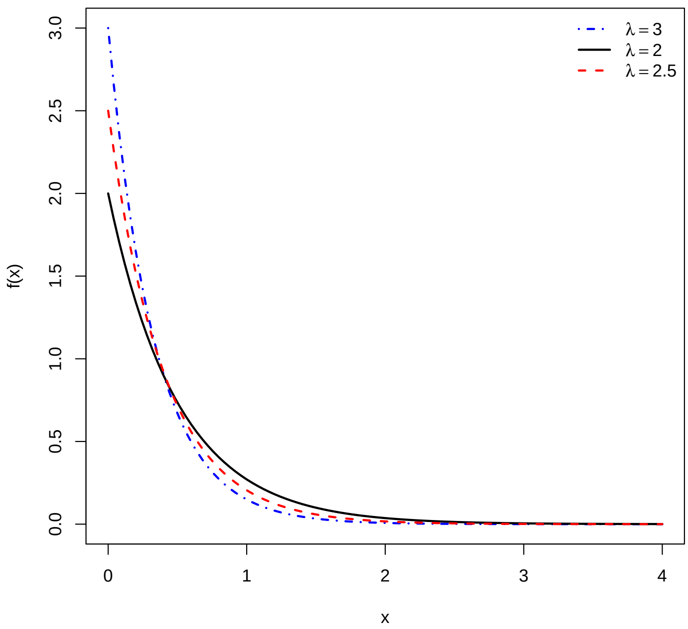

Figura 1:

0.3 Função Densidade de Probabilidade

Vamos mostrar que a expressão dada é realmente uma função densidade de probabilidade.

No suporte $A = (0, \infty)$ *temos* $f(x) > 0$ *e assim a primeira condição é satisfeita.*

Para a segunda condição temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = \lambda x \ \ e \ \ du = \lambda dx.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_9^\infty e^{-u}\,du \\
&= \lim_{c\to\infty} e^{-u}\Big|_0^c \\
&= 1 - \lim_{c\to\infty} e^{-u} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

0.4 Função de Distribuição e Função de Sobrevivência

A Função de Distribuição Acumulada (fd) da Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ é dada por

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & se \quad x > 0 \end{cases}
$$

ou

$$
F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) I_{(0,\infty)}(x).
$$

Prova:
Para $x \leq 0$ temos $F(x) = 0$.
Para $x > 0$ temos:

$$
F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt\,dt
$$

$$
F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.
$$

A fda de X possui o seguinte gráfico para $\lambda = 2; 2,5; 3$

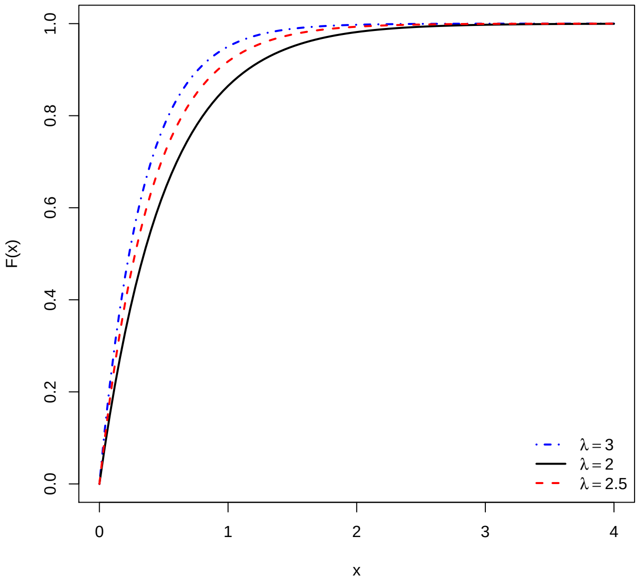

Figura 2: Função de Distribuição da Exponencial

A Função de Sobrevivência é dada por:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

ou

$$S(x) = I_{(-\infty,0]}(x) + e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x).$$

A função de sobrevivência S de X possui o seguinte gráfico para $\lambda = 2; 2,5; 3$

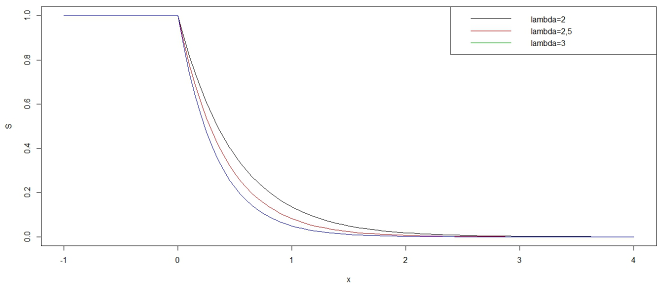

Figura 3: Função de Sobrevivência da Exponencial

0.5 Quantis da Distribuição Exponencial

Seja x_q o q-ésimo quantil, assim

$$F(x_q) = q \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x_q} = q \Rightarrow e^{-\lambda x_q} = 1 - q$$

$$\Rightarrow -\lambda x_q = \ln(1-q) \Rightarrow x_q = -\frac{\ln(1-q)}{\lambda}$$

Desse modo, a mediana de X será

$$x_{0,5} = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

O sexto decil será dado por:

$$D_6 = x_{0,6} = -\frac{\ln 0,6}{\lambda}.$$

O percentil 95 será dado por:

$$P95 = x_{0,95} = -\frac{\ln 0,95}{\lambda}.$$

```
> log(2)
[1] 0.6931472
> log(0.6)
[1] -0.5108256
> log(0.95)
[1] -0.05129329
> log(1/2)
[1] -0.6931472
>
```

0.6 Propriedade da Falta de Memória

Sejam $a > 0$ e $b > 0$*, então*

$$\mathbb{P}\left(X > (b+a)\,\middle|\,X > a\right) = \mathbb{P}\left(X > b\right)$$

Prova:

$$\mathbb{P}\left(X > (b+a)\,\middle|\,X > a\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X > (b+a) \text{ e } X > a\right)}{\mathbb{P}\left(X > a\right)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(X > (a+b)\right)}{\mathbb{P}\left(X > a\right)} = \frac{S\left(a+b\right)}{S\left(a\right)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}$$
$$e^{-\lambda b} = S(b) = \mathbb{P}\left(X > b\right)$$

Comentário 1. *A propriedade acima provada afirma que a Distribuição Exponencial não possui memória no seguinte sentido: Suponha que* X *represente o tempo de vida de algum componente. Suponha que o componente tenha sobrevivido a* a *unidades de tempo de operação. A probabilidade que o componente sobreviva a mais* b *unidades de tempo de operação será a mesma que o componente tenha sobrevivido inicialmente a* b *unidades de tempo de operação. Simplesmente a informação adicional é esquecida.*

Comentário 2. *A propriedade da falta de memória é também caracterizada por*

$$\mathbb{P}\left(X > (a+b)\right) = \mathbb{P}\left(X > a\right)\mathbb{P}\left(X > b\right)$$

ou

$$S(a+b) = S(a)S(b), \quad \forall\, a, b > 0$$

Ela (a Distribuição Exponencial) é a única variável aleatória contínua não negativa que satisfaz a propriedade da falta de memória.

Teorema 0.1 *Seja X uma variável aleatória não negativa de sorte que*

$$S(x+y) = S(x)\, S(y)\,, \quad \forall\, x, y > 0$$

onde $S\,(x)$ é a função de sobrevivência de X, então X tem Distribuição Exponencial

Seja c, m, n inteiros positivos, então

a. $S\,(nc) = [S\,(c)]^n$

b. $S\,(c) = \left[S\left(\frac{c}{m}\right)\right]^m$

pois

$$S\,(\underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ vezes}}) = [S\,(c)]^n$$

além disso

$$c = \underbrace{\frac{c}{m} + \frac{c}{m} + \ldots + \frac{c}{m}}_{m \text{ vezes}}$$

assim

$$S\,(c) = S\left(\frac{c}{m} + \frac{c}{m} + \ldots + \frac{c}{m}\right) = \left[S\left(\frac{c}{m}\right)\right]^m$$

afirmamos agora que $S\,(1) = \mathbb{P}\,(X > 1)$ varia no intervalo $(0, 1)$.

Prova:

Suponha que $S\,(1) = 1$, então

$$S\,(n) = [S\,(1)]^n = 1$$

e portanto

$$\lim_{n \to \infty} S\,(n) = S\,(\infty) = 1$$

absurdo, pois $S\,(\infty) = 0$

Suponha agora que $S\,(1) = 0$, assim

$$\left[S\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m = S\,(1) = 0$$

e portanto $S\left(\frac{1}{m}\right) = 0$

$$\lim_{m\to\infty} S\left(\frac{1}{m}\right) = S(0) = 0$$

absurdo, pois $S(0) = 1$

Assim $0 < S(1) < 1$.

Como $0 < S(1) < 1$, podemos escrever $S(1) = e^{-\lambda}$, onde $\lambda > 0$, e consequentemente, $S(n) = e^{-n\lambda}$.

Desse modo

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \left[S\left(\frac{1}{m}\right)\right]^{\frac{1}{m}} = \left[e^{-\lambda}\right]^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{-\lambda}{m}}$$

Sejam agora m e n inteiros positivos

$$S\left(\frac{n}{m}\right) = S\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right) = S\left[\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = \left[e^{\frac{-\lambda}{m}}\right]^n$$

assim

$$S\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{-\lambda}{m}n} = e^{\frac{-n}{m}\lambda}$$

em outras palavras

$$S(x) = e^{-\lambda x}$$

Isto é válido para todo inteiro racional positivo x.

Pela continuidade da Função de Sobrevivência segue-se que

$$S(x) = e^{-\lambda x},\ \forall x \in I\!R^+$$

Assim

$$X \sim Exp(\lambda)$$

0.7 Momentos

O r-ésimo momento em relação à origem da Distribuição Exponencial é dado por

$$E\left[X^r\right] = \frac{r!}{\lambda^r},\ r = 1, 2, \ldots$$

Prova:

$$E\left[X^r\right] = \int_0^{\infty} x^r \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$u = \lambda x \ \Rightarrow \ x = \dfrac{u}{\lambda}$
$du = \lambda dx$
Assim

$$E\left[X^r\right] = \int_0^{\infty} \frac{u^r}{\lambda^r} e^{-u} du = \frac{1}{\lambda^r} \int_0^{\infty} u^r e^{-u} du$$
$$= \frac{1}{\lambda^r} \int_0^{\infty} u^{r+1-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma\left(r+1\right)}{\lambda^r} = \frac{r!}{\lambda}$$

Logo

$$E\left(X\right) = \frac{1!}{\lambda^1} = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad E\left[X^2\right] = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$E\left[X^3\right] = \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3} \quad ; \quad E\left[X^4\right] = \frac{4!}{\lambda^4}$$

Vamos calcular agora os momentos centrais. Seja $\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$ o r-ésimo momento central.

Usando Binômio de Newton, fazemos

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = E\left[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(-\mu\right)^i X^{r-i}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(-1\right)^i \mu^i E\left[X^{r-i}\right] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(-1\right)^i \frac{1}{\lambda^i} \frac{(r-i)!}{\lambda^{r-i}}$$

$$= \frac{1}{\lambda^r} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i (r-i)! = \frac{1}{\lambda^r} \sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{i!\,(r-i)!} (-1)^i (r-i)!$$

$$= \frac{r!}{\lambda^r} \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^i}{i!}, \qquad r = 2, 3, \ldots$$

Assim

$$\mu_2 = \frac{2!}{\lambda^2} \sum_{i=0}^{2} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{2}{\lambda^2} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{\lambda^2}$$

desse modo

$$\mu_2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Observação. Para o cálculo da variância de X também poderíamos ter usado um outro método:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

O Desvio-Padrão de X será

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

O 3º momento central será

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = \frac{3!}{\lambda^3} \sum_{i=0}^{3} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{6}{\lambda^3} \left[\sum_{i=0}^{2} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^3}{3!} \right]$$

$$= \frac{6}{\lambda^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{\lambda^3} [3 - 1] = \frac{2}{\lambda^3}$$

O coeficiente de assimetria será

$$\alpha_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = 2 > 0$$

Assim, a Distribuição Exponencial é assimétrica à direita

O 4º momento central será

$$\mu_4 = E\left(X-\mu\right)^4 = \frac{4!}{\lambda^4}\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= \frac{24}{\lambda^4}\left[1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right] = \frac{1}{\lambda^4}\left[12-4+1\right] = \frac{9}{\lambda^4}$$

O coeficiente de curtose será

$$\alpha_4 = \frac{E\left(X-\mu\right)^4}{\sigma^4} = \frac{\frac{9}{\lambda^4}}{\frac{1}{\lambda^4}} = 9 > 3$$

Assim, a Distribuição Exponencial é leptocúrtica.

Uma outra medida de variabilidade é o coeficiente de variação que é definido por $CV = \dfrac{\sigma}{\mu}$*. Assim,* $X \sim Exp\left(\lambda\right)$*, terá o seguinte coeficiente de variação*

$$CV = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

O desvio médio da exponencial de parâmetro λ *é dado por:*

$$DM = \frac{2e^{-1}}{\lambda}.$$

Prova:

$$\begin{aligned} DM &= E\left[|X - E(X)|\right] \\ &= E\left[|X - \frac{1}{\lambda}|\right] \\ &= \int_0^{\infty} |x - \frac{1}{\lambda}|\ \lambda\ e^{-\lambda x}\ dx \end{aligned}$$

Obtemos

$$u = \lambda\ x,$$

temos

$$x = \frac{u}{\lambda} \ \ e \quad dx = \frac{du}{\lambda}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
DM &= \int_0^\infty |\frac{u}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}| \ \lambda \ e^{-u} \ \frac{du}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty |\frac{u-1}{\lambda}| \ \lambda \ e^{-u} \ du \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{|u-1|}{\lambda} \ \lambda \ e^{-u} \ du \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty |u-1| \ e^{-u} \ du \\
&= \frac{1}{\lambda} \ I_1.
\end{aligned}$$

Seja $I_1 = \int_0^\infty |u-1| \ e^{-u} \ du.$
Vamos resolver esta integral inicialmente no R

```
> h=function(u) abs(u-1)*exp(-u)
> I=integrate(h,0,Inf)$value;I
[1] 0.7357589
> 2*exp(-1)
[1] 0.7357589
>
```

Vamos fazer o passo a passo:
Fazendo a mudança de variável em I_1, $s = u - 1$, *temos:*

$$u = s + 1 \ \ e \ \ ds = du,$$

$$I_1 = \int_{-1}^\infty |s| \ e^{-(s+1)} \ ds = e^{-1} \int_{-1}^\infty |s| \ e^{-s} \, ds = e^{-1} \ I_2.$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{\infty} |s| \; e^{-s} \, ds \\
&= \int_{-1}^{0} |s| \; e^{-s} \, ds + \int_{0}^{\infty} |s| \; e^{-s} \, ds \\
&= \int_{-1}^{0} (-s) \; e^{-s} \, ds + \int_{0}^{\infty} s \; e^{-s} \, ds \\
&= \int_{0}^{1} s \, e^{s} \, ds + \Gamma(2) \\
&= I_3 + 1.
\end{aligned}
$$

Fazendo em I_3, $u = s$ e $dv = e^s \, ds$ temos:

$$du = ds \;\; e \; v = e^s.$$

Assim,

$$I_3 = uv \,|_0^1 - \int_0^1 v \, du \; = \; s \, e^s \,|_0^1 - \int_0^1 e^s \, ds.$$

Logo,

$$I_3 = e + e^s \,|_0^1 = e + e - 1 = 2e - 1.$$

Logo,

$$I_2 = I_3 + 1 = 2e - 1 + 1 = 2e.$$

E

$$I_1 = e^{-1} \; I_2 = 2e^{-1}.$$

Finalmente,

$$DM = \frac{2e^{-1}}{\lambda} \; .$$

0.8 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ *é definida por*

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \; t < \lambda$$

Prova:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x}dx$$

fazendo $\alpha = \lambda - t$

$$M_X(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{\infty} \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{Exp(\alpha)}dx$$

Nesse caso $\alpha > 0$. *Como* $(\lambda - t) = \alpha > 0$, *então* $\lambda - t > 0$, *e para que isso ocorra* $t < \lambda$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\alpha}.1$$

logo

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \; t < \lambda$$

A função geradora de cumulantes de X *é dada por:*

$$K(t) = \log\left(M_X(t)\right) = \log(\lambda) - \log(\lambda - t), \;\; t < \lambda.$$

0.9 Função Característica

A função característica da exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ *é definida por*

$$C_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\,i.$$

Prova:

Sabemos que

$$C_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = M_X(it) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Multiplicando a fração por $(\lambda + it)$ *e lembrando que:*

$$(\lambda - it)(\lambda + it) = (\lambda^2 - i^2 t^2) = (\lambda^2 + t^2).$$

Temos então

$$C_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda(\lambda + it)}{(\lambda - it)(\lambda + it)} = \frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2},$$

assim,

$$C_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2}\, i = E\left[cos(tX)\right] + E\left[sent(tX)\right]\, i.$$

Vamos mostrar que

$$E\left[cos(tX)\right] = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.$$

Inicialmente vai-se mostrar que a integral

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx)\ f(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} cos(tx)\ \lambda e^{-\lambda x}\ dx,$$

existe.

Seja

$$\begin{aligned} E\left[|cos(tX)|\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} |cos(tx)|\ f(x)\ dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

pois $|cos(tx)| \leq 1$. *De maneira similar se mostra a existência de:*

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} sent(tx)\ f(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} sen(tx)\ \lambda e^{-\lambda x}\ dx.$$

Logo fazendo em I_1 *para* $t \neq 0$

$$u = cos(tx) \quad e \;\; du = -\frac{1}{t}\; sen(tx),$$

$$dv = \lambda e^{-\lambda x} \;\; e \;\; v = -\; e^{-\lambda x}.$$

Mas,

$$I_1 = \int_0^\infty \; cos(tx)\; \lambda e^{-\lambda x}\; dx = \lim_{c \to \infty} \left(\int_0^c \; u\; dv = uv \;\Big|_0^c - \int_0^c \;\; v\; du \right).$$

Logo

$$uv \;\Big|_0^c = -cos(tx) e^{-\lambda x} = -\frac{cos(tx)}{e^{\lambda x}}\Big|_0^c = 1 - \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}}.$$

Dessa maneira,

$$\lim_{c \to \infty} \; 1 - \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}} = 1 - \lim_{c \to \infty} \; \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}} = 1,$$

pois

$$-\frac{1}{e^{\lambda c}} \le \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}} \le \frac{1}{e^{\lambda c}}.$$

pois

$$0 = -\lim_{c \to \infty} \; \frac{1}{e^{\lambda c}} \le \lim_{c \to \infty} \; \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}} \le \lim_{c \to \infty} \; \frac{1}{e^{\lambda c}} = 0,$$

provando que:

$$\lim_{c \to \infty} \; \frac{cos(tc)}{e^{\lambda c}} = 0.$$

E

$$\int_0^c \;\; v\; du = \int_0^c \;\; (-e^{-\lambda x})\; \frac{(-sen(tx))}{t}\; dx = \frac{1}{t} \int_0^c \;\; sen(tx)\; e^{-\lambda x} \;\; dx.$$

Finalmente,

$$\lim_{c \to \infty} \int_0^c \;\; v\; du = \frac{1}{t} \lim_{c \to \infty} \int_0^c sen(tx)\; e^{-\lambda x} \;\; dx = \frac{1}{t} \int_0^\infty sen(tx)\; e^{-\lambda x} \;\; dx,$$

e

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \ v\ du = \frac{1}{t} \ \int_0^\infty sen(tx)\ e^{-\lambda x} \ \ dx = \frac{1}{\lambda t} \ \int_0^\infty sen(tx)\ \lambda\ e^{-\lambda x} \ \ dx = \frac{1}{\lambda t}\ I_2.$$

Assim

$$I_1 = 1 - \frac{1}{\lambda t}\ I_2. \tag{1}$$

Vamos agora agora:

$$I_2 = \int_0^\infty \ sen(tx)\ \lambda\ e^{-\lambda x}\ dx.$$

Logo fazendo em I_2 *para* $t \neq 0$

$$u = sen(tx) \quad e \ \ du = \frac{1}{t}\ cos(tx),$$

$$dv = \lambda e^{-\lambda x} \ \ e \ \ v = -\ e^{-\lambda x}.$$

Mas,

$$I_2 = \int_0^\infty \ sen(tx)\ \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \lim_{c\to\infty} \left(\int_0^c \ u\ dv = uv\ \Big|_0^c - \int_0^c \ \ v\ du \right).$$

Logo

$$uv\ \Big|_0^c = sen(tx)e^{-\lambda x} = -\frac{sen(tx)}{e^{\lambda x}}\Big|_0^c = -\frac{sen(tc)}{e^{\lambda c}}.$$

Dessa maneira,

$$\lim_{c\to\infty}\ \frac{sent(tc)}{e^{\lambda c}} = 0,$$

pois

$$-\frac{1}{e^{\lambda c}} \leq \frac{sen(tc)}{e^{\lambda c}} \leq \frac{1}{e^{\lambda c}}.$$

$$\int_0^c \ \ v\ du = -\int_0^c \ (-e^{-\lambda x})\ \frac{(cos(tx)}{t}\ dx = -\frac{1}{t}\ \int_0^c \ \ cos(tx)\ e^{-\lambda x} \ \ dx.$$

Finalmente,

$$- \lim_{c \to \infty} \int_0^c \; v \; du = \frac{1}{t} \; \lim_{c \to \infty} \int_0^c cos(tx) \; e^{-\lambda x} \;\; dx = \frac{1}{t} \; \int_0^\infty cos(tx) \; e^{-\lambda x} \;\; dx,$$

e

$$- \lim_{c \to \infty} \int_0^c \; v \; du = \frac{1}{t} \; \int_0^\infty cos(tx) \; e^{-\lambda x} \;\; dx = \frac{1}{\lambda t} \; \int_0^\infty cos(tx) \; \lambda \; e^{-\lambda x} \;\; dx = \frac{1}{\lambda t} \; I_1.$$

Assim

$$I_2 = \frac{1}{\lambda t} \; I_1. \tag{2}$$

De (1) e (2) temos:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 1 - \frac{1}{\lambda t} \; I_2 \\
&= 1 - \frac{1}{\lambda t} \; \frac{1}{\lambda t} \; I_1. \\
&= 1 - \frac{1}{\lambda^2 t^2} \; I_1 \\
(1 + \frac{1}{\lambda^2 t^2}) \; I_1 &= 1 \\
I_1 &= \frac{\lambda^2 t^2}{1 + \lambda^2 t^2} \\
E(cos(tX)) &= \frac{\lambda^2 t^2}{1 + \lambda^2 t^2}.
\end{aligned}$$

De (2) temos :

$$E(sen(tX)) = I_2 = \frac{1}{\lambda t} \; I_1 = \frac{\lambda t}{1 + \lambda^2 t^2}.$$

0.10 Entropia

A Entropia da distribuição exponencial de parâmetro λ é dada por:

$$H = 1 - ln(\lambda).$$

Prova:

$$\begin{aligned} H &= E\left[-ln(f(X))\right] \\ &= E\left[-ln(\lambda\, e^{-\lambda X}))\right] \\ &= E[-ln(\lambda)] + \lambda\, E(X) \\ &= -ln(\lambda) + \lambda\, \frac{1}{\lambda} \\ &= 1 - ln(\lambda). \end{aligned}$$

0.11 Função Escore

A Função Escore associada a distribuição Exponencial de parâmetro λ é dada por:

$$V = \frac{\partial\, ln(f(X))}{\partial \lambda} = -\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Prova:

Sabemos que:

$$f(X) = \lambda\ \ e^{-\lambda X},$$

aplicando logaritmo neperiano temos:

$$ln\left[f(X)\right] = ln(\lambda) - \lambda X,$$

Derivando parcialmente em relação a λ temos:

$$V = \frac{\partial\, ln(f(X))}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - X = -\left(X - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Obs: Perceba que:

$$E(V) = E\left[-\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)\right] = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = 0.$$

0.12 Informação de Fisher

A informação de Fisher relativa à distribuição Exponencial de parâmetro λ é dada por:

$$I_F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Prova:

A informação de Fisher é a variância da função escore. Assim,

$$I_F(\lambda) = Var(V) = E(V^2),$$

pois $E(V) = 0$ sempre.
Logo,

$$I_F(\lambda) = Var\left(-\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)\right) = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

0.13 Limite Inferior de Cramer Rao

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$. Seja $T = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ um estimador não viciado de $g(\lambda)$. Então a variância de T satisfaz:

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\lambda)]^2}{n\ I_F(\lambda)} = LICR,$$

em que $LICR$ é conhecido como limite inferior de Cramer-Rao.

Exemplo 1: *Seja T_1 um estimador não viciado de $g(\lambda) = \lambda$ baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Qual a sua variância mínima ?*
temos que:

$$g'(\lambda) = 1.$$

Seja T_1 um estimador não viciado de $g(\lambda) = \lambda$ baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Qual a sua variância mínima ?

temos que:

$$LICR = \frac{[g'(\lambda)]^2}{n\ I_F(\lambda)} = \frac{1}{n\ \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Exemplo 2: *Seja T_2 um estimador não viciado de $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Qual a sua variância mínima ?*

temos que:

$$g'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

Seja T_2 um estimador não viciado de $g(\lambda) = \lambda$ baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Qual a sua variância mínima ?

temos que:

$$LICR = \frac{[g'(\lambda)]^2}{n\ I_F(\lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda^4}}{n\ \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{n\ \lambda^2} = Var(\bar{X}).$$

0.14 Uso do R:

Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através da distribuição Exponencial com parâmetro $1/800$*. Determine a proporção de trocas por defeito de fabricação.*

Considere X *o tempo de vida da lâmpada especial em horas.*

Vamos esboçar o gráfico da f.d.p. de X*:*

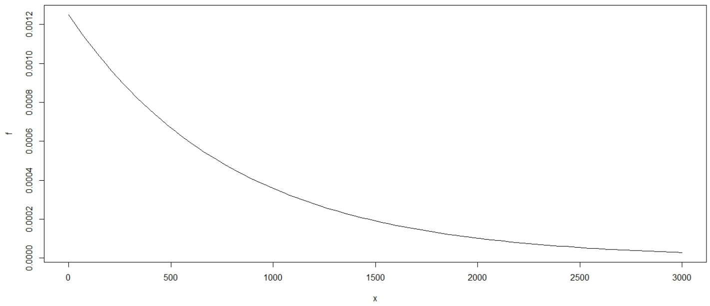

Figura 4:

Este gráfico foi gerado com os seguintes comandos:

```
lambda=1/800
>
> f=function(x) dexp(x,lambda)
>
> plot(f,0,3000)
>
```

Seja

$p = P(X < 50)$ *a proporção de lâmpadas trocadas*

```
> p=pexp(50,lambda);p
[1] 0.06058694
>
```

Assim 6% *delas são trocadas.*

Qual o percentil 95 dessa distribuição?

```
> lambda=1/800
 P95=qexp(0.95,lambda);P95
[1] 2396.586
```

Simule uma amostra de tamanho 100 de X:

```
>set.seed(32)

>A=rexp(100,lambda)
> sort(round(A,2))
[1]     9.34   10.42   16.81   30.28   31.75   51.11   51.78   52.66   56.39
[10]   61.47   63.57   77.09   80.15   80.16  137.33  151.69  163.86  167.77
[19]  178.75  179.32  193.53  195.53  219.86  233.87  243.91  244.98  252.80
[28]  256.47  277.51  355.84  362.88  366.11  378.21  378.57  398.08  417.85
[37]  429.22  432.72  436.22  466.58  470.42  476.45  479.12  494.00  497.74
[46]  519.38  521.95  539.19  539.93  567.68  570.38  589.58  606.40  616.25
[55]  617.01  631.46  658.61  660.25  772.96  782.90  807.40  848.71  947.40
[64]  969.68  973.64  979.13  993.32 1004.42 1016.16 1096.83 1109.83 1149.39
[73] 1157.71 1173.15 1182.34 1258.58 1261.22 1281.76 1297.04 1339.08 1386.55
[82] 1435.69 1440.95 1464.41 1525.74 1547.39 1622.78 1642.77 1667.43 1728.23
[91] 1740.27 1995.08 2022.54 2276.82 2564.53 3005.14 3160.55 3350.45 4786.66
[100] 5527.86
> quantile(A,6)
> quantile(A,0.06)
6%
51.74338
>
```

Estime o parâmetro λ:

```
 fitdistr(A,"exponential")
rate
0.00114230
(0.00011423)
> lambda_est=1/mean(A);lambda_est
[1] 0.0011423
```

0.15 Exercícios

1. *Sendo $X \sim Exp(1)$, determine:*

    a. $P(0 < X < 2)$.
    b. $P(X \geq 2)$.
    c. $P(1 < X < 4)$.
    d. $P(X > 3)$.
    e. $P(X < 2 \mid X > 1)$.

2. *Um banco faz operações via Internet e, após um estudo sobre o serviço prestado, concluiu o seguinte modelo teórico para o tempo de conexão (em minutos):*

$$f(x) = \frac{k}{4}\ e^{-\dfrac{kx}{4}}\ I_{(0\,,\,\infty)}(x),$$

com k sendo 1 ou 2, dependendo do cliente ser pessoa física ou jurídica. Dentre os clientes que se utilizam da Internet, a porcentagem dos que são classificados como pessoa física é estimada em 20%.

    a. *Sendo pessoa física, qual a probabilidade de mais de 2 minutos de conexão?*
    b. *Sendo pessoa jurídica, qual a probabilidade de ficar conectado menos de 6 minutos ?*
    c. *Determine a probabilidade de um cliente ficar mais de 2 minutos conectado?*
    d. *Se um cliente fica mais de 5 minutos conectado, qual a probabilidade dele ser pessoa jurídica?*

3. *O intervalo de tempo T, em minutos, entre emissões consecutivas de um fonte radioativa é uma variável aleatória contínua com distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 0,2$ Pede-se:*

    a. *A probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos. E de ser no mínimo 2 minutos?*
    b. *A probabilidade do intervalo ser superior ou igual a 7 sabendo que ele é superior ou igual a 5 minutos?*

c. *No item a você calculou* $P(T \geq 2)$ *e no item b você calculou* $P(T \geq 7 \mid 5)$. *Alguma coisa chamou a sua atenção. Comente.*

4. *(IBGE-1999-Prova Objetiva- Questão 27) Os tempos de vida de lâmpadas de um certo tipo podem ser descritos por uma distribuição exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. O tempo de vida mediano dessas lâmpadas é então, em horas, de (Use log 0,5=-0,69)*

   (A) 69 (B) 88 (C) 100 (D) 112 (E) 125

5. *(Prova IBA 2010- Questão 30)*

   Considere uma variável aleatória X *com distribuição exponencial de parâmetro 1/3. A densidade da distribuição exponencial é dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, e^{-x/3} & , \quad x > 0 \\ \\ 0 & , \quad \textit{caso contrario} \end{cases}$$

   A esperança condicional $E(X - 5|X > 5)$ *é igual a:*

   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

6. *(Prova IBA 2009- Questão 33)*

   Um atuário está precificando um seguro para uma máquina industrial de grande porte. Sabe-se que o tempo de vida X *da máquina possui um desgaste tal que* $P(X > x+t|X > x) = P(X > t)$ *para x e t positivos e reais. A distribuição que o atuário deve usar para* X, *dentre as listadas a seguir, é a:*

   (A) Normal; (B) Exponencial; (C) Gama; (D) Poisson; (E) Weibul.

7. *(Prova IBA 2008- Questão 31)*

   Um método para gerar valores da distribuição exponencial com média α *envolve gerar um valor* r *da distribuição Uniforme em* $(0, 1)$ *e obter como valor de* X:

   (A) $\alpha \; ln(r)$

   (B) $-\alpha \; ln(1 - r)$

   (C) $-\frac{1}{\alpha} \; ln(r)$

   (D) $\frac{1}{\alpha} \; ln(1 - r)$

   (E) $1 - e^{\alpha/r}$

8. *(Prova IBA 2005- Questão 27-Prova IBA 2006- Questão 28)*

   O tempo (em horas) necessário para reparar uma máquina é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com parâmetro $\lambda = 1/8$. *Qual a probabilidade de que um reparo leve pelo menos 10 horas, sabendo que sua duração excede a 9 horas?*

   (A) 0,0358; (B) 0,1103; (C) 0,1175; (D) 0,7788; (E) 0,8825.

9. *(Prova IBA 2005- Questão 31)*

   A função densidade de probabilidade $f(x) = 2\ e^{-2x}$, *se* $x > 0$, *representa a distribuição do índice de acidez de um determinado produto alimentício. O produto é consumível se este índice for menor que 2. Pergunta-se qual a probabilidade de um produto escolhido ao acaso ser consumível.*

   (A) 0,018; (B) 0,037; (C) 0,482; (D) 0,982; (E) 1.

10. *(IBGE-Questão 39) Considere uma variável aleatória* X *com função de distribuição dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ \\ 1 - e^{-2x} & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

   A função de densidade que representa esta variável é

   (A)$f(x) = x\ e^{-2x},\ \ x \geq 0$

   (B)$f(x) = 2\ e^{-x},\ \ x \geq 0$

   (C)$f(x) = 2\ e^{-2x},\ \ x \geq 0$

   (D)$f(x) = 0,5\ e^{-2x},\ \ x \geq 0$

   (E)$f(x) = 2\ e^{-2x},\ \ x \geq 0$

11. *(IBGE-Questão 42)*

   O intervalo de tempo entre a chegada de dois navios a um porto, em horas, segue distribuição exponencial com média 1. Se acaba de chegar um navio, qual a probabilidade aproximada de que leve mais de uma hora até a chegada do próximo?

   (A) 0,37 (B) 0,5 (C) 0,63 (D) 0,75 (E) 0,9

12. *(TRT-Sexta Região Analista Judiciário- Maio de 2012-Questão 52) Se a funcao geratriz de momentos da variável aleatória* X *é dada por*

$$M(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^8, \quad t < 1/2$$

então a média da variável aleatória $Y = 0,5X - 6$ é igual a

(A) 2. (B) 1. (C) 0,5. (D) 0. (E) 0.1.

13. *(TRT-Sexta Região-Analista Judiciário-Maio de 2012-Questão 54)*

    O tempo de vida de um aparelho eletrônico tem distribuição exponencial com média igual a 1000 horas. O custo de fabricação do aparelho é de R$ 200,00 e o de venda é de R$ 500,00. O fabricante garante a devolução do aparelho caso ele dure menos do que 300 horas. O lucro esperado por aparelho, em reais, é igual a

    (A) 274. (B) 260. (C) 223. (D) 212. (E) 170.

    Dados: $e^{-0,3} = 0,74$ e $e^{-0,5} = 0,61$

14. *Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial de parâmetro 1.*
    Responda ao que se pede:

    a. *Mostre que essa lei é realmente uma f.d.p. e esboce seu gráfico.*
    b. *Calcule a função de distribuição acumulada e esboce seu gráfico.*
    c. *Calcule a função de sobrevivência e esboce seu gráfico.*
    d. *Mostre que a função geradora de momentos de X é dada por $M_X(t) = (1-t)^{-1}, \ t < 1$.*
    e. *Mostre que a função geradora de cumulantes de X é dada por $K_X(t) = -ln(1-t), \ t < 1$.*
    f. *Mostre que o p-ésimo quantil de p é dado por $Q_p = -ln(1-p), \ 0 < p < 1$. Quanto vale a mediana, o primeiro quartil, o terceiro quartil, o sexto decil e o nonagésimo quinto percentil.*
    g. *Mostre que o r-ésimo momento em relação a origem é dado por: $E(X^r) = r!$. Especifique os quatro primeiros momentos.*
    h. *Calcule a variância , o desvio padrão e o coeficiente de variação de X.*
    i. *Calcule o terceiro momento central de X bem como seu coeficiente de Assimetria. Classifique a distribuição.*
    j. *Calcule o quarto momento central de X bem como seu coeficiente de Curtose. Classifique a distribuição. Qual o excesso de curtose?*

k. Mostre que $\mu_n = E[(X-\mu)^n] = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

l. Mostre que os momentos centrais , μ_n, satisfazem a seguinte equação de recorrência

$$\mu_{n+1} = (n+1)\ \mu_n + (-1)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \mu_1 = 0.$$

m. Mostre que $Y = F(X) = 1 - e^{-X} \sim U(0,1)$.

n. Mostre que $Y = S(X) = e^{-X} \sim U(0,1)$.

o. Mostre que essa distribuição é um caso particular da gama identificando seus parâmetros.

p. Mostre que a distribuição de $V = [X]$, maior inteiro que não ultrapassa X é geométrica de parâmetro $p = 1 - e^{-1}$.

q. Calcule o desvio médio de X.

15. Considere a variável aleatória cuja f.d.p é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \ \ I_{(a\ ,\ ,\infty)}(x) \ \ \lambda > 0; \ a > 0.$$

a. Mostre que a expressão dada é um legítima f.d.p.

b. Mostre que $E(X) = 1/\lambda + a$ e $V(X) = 1/\lambda^2$.

c. Mostre que $M(t) = \dfrac{\lambda\ e^{at}}{\lambda - t},\ t < 1/\lambda$.

d. Qual a distribuição de $Y = X - a$ usando o teorema da transformação ?

e. Qual a distribuição de $Y = X - a$ usando a técnica da função geradora de momentos?

16. O tempo entre a chegada de mensagens eletrônicas em seu computador é distribuído , exponencialmente, com média de duas horas.

a. Calcule a função de distribuição da variável aleatória e esboce seu gráfico.

b. Qual é a probabilidade de você não receber uma mensagem no período de duas horas?

c. Se você não tiver recebido mensagem alguma nas últimas quatro horas, qual será a a probabilidade de você não receber mensagens nas próximas duas horas?

d. *Esboce o gráfico da f.d.p. e da F.d.a. do tempo de chegada usando o pacote R.*

17. *As falhas das unidades de um processador central de grandes sistemas computacionais são frequentemente modeladas por um processo de Poisson. Tipicamente, falhas não são causadas por componentes desgastados, mas por falhas aleatórias devido ao número grande de circuitos de semicondutores nas unidades. Suponha que as unidades que falhem sejam reparadas imediatamente e considere que o número médio de falhas seja 0,0001. Seja X o tempo de espera até que quatro falhas ocorram no sistema.*

    a. *Seja N o número de falhas em 40000 horas de operação. Qual a distribuição de N, sua média, variância e função geradora de momentos.*

    b. *Identifique a distribuição de X. Dê sua média, variância e função geradora de momentos.*

    c. *Qual é a probabilidade do tempo de espera exceder 40000 horas?*

    d. *Qual é a probabilidade de que nas 40000 horas de operação aconteçam , no máximo, 3 falhas?*

    e. *Compare os resultados obtidos nos itens* **c** *e* **d**.

    f. *Esboce o gráfico da f.d.p. e da F.d.a. do tempo de vida usando o pacote R.*

    g. *Qual o tempo de vida modal? E o mediano?*

18. *Em um sistema de comunicação de dados várias mensagens que chegam a um nó são agrupadas em um pacote, antes de serem transmitidas ao longo da rede. Suponha que as mensagens cheguem ao nó de acordo com um processo de Poisson com taxa $\theta = 30$ mensagens por minuto. Cinco mensagens são usadas para formar um pacote.*

    a. *Qual é o tempo médio até que um pacote seja formado, isto é, cinco mensagens cheguem no nó?*

    b. *Qual é o desvio padrão do tempo até que um pacote seja formado?*

    c. *Qual é a probabilidade de um pacote ser formado em menos de 10 segundos?*

    d. *Qual é a probabilidade de um pacote ser formado em menos de 5 segundos?*

e. *Esboce o gráfico da f.d.p. e da F.d.a. do tempo de espera usando o pacote R.*

19. *Panes em equipamento numa grande indústria seguem a um processo de Poisson, sendo o número de panes por hora dado pelo parâmetro* $\lambda = 0,5$. *Se a indústria reinicia os trabalhos às 7 horas da manhã de segunda-feira, pede-se para determinar:*

    a. *A função densidade da variável aleatória* T*=tempo transcorrido até se verificar a primeira pane.*

    b. $E(T)$ *e* $Var(T)$.

    c. *Probabilidade de não ocorrer pane alguma entre as 7 e as 11horas.*

    d. *Probabilidade da primeira pane ocorrer antes de transcorridas 2 horas de trabalho.*

20. *O tempo de falha de uma equipamento é uma variável aleatória* T *com distribuição exponencial. Determinar a probabilidade do equipamento funcionar mais 1200 horas , sem falha, supondo que foi utilizado durante as primeiras 1200 horas e* $P(T > 600) = a$.

21. *As chegadas de automóveis a um posto de gasolina, para abastecimento, entre as 10 horas e 16 horas do dia, de acordo com os postulados de Poisson. No transcurso daquele período apresentam por hora uma média de 30 automóveis. Qual a probabilidade de nenhum se apresentar num dado intervalo de 5 minutos?*

22. *O tempo de vida de um certo componente eletrônico tem distribuição exponencial com vida média de 100 horas.*

    a. *Qual o valor do parâmetro* λ *da distribuição ?*

    b. *Calcular a proporção de componentes que falham antes de 50 horas de funcionamento.*

23. *Os tempos entre solicitações a um servidor web tem distribuição exponencial com média 0,5 segundos.*

    a. *Qual o valor do parâmetro* λ *da distribuição ?*

    b. *Qual é a mediana do tempo entre solicitações ?*

    c. *Qual é o desvio padrão?*

    d. *Qual é o* 80^o *percentil?*

e. *Determine a probabilidade de decorrer mais de um segundo entre solicitações ?*

f. *Se não houver solicitações nos últimos 2 segundos, qual é a probabilidade de decorrer mais de um segundo antes da próxima solicitação ?*

g. *Retire uma amostra aleatória de tamanho $n = 200$ dessa distribuição . Estime, usando o pacote R, os itens anteriores e compare com os populacionais.*

24. *Um determinado tipo de componente pode ser comprado novo ou usado. Cinquenta por cento de todos os componentes novos duram mais do que 5 anos, mas apenas 30% dos componentes usados duram mais do que 5 anos. É possível que os tempos de vida dos componentes novos seja uma distribuição exponencial? Explique.*

25. *O tempo de vida de um certo componente eletrônico produzido por uma fábrica tem distribuição exponencial com vida média de 800 horas de uso contínuo.*

    a. *Qual a probabilidade de que a fábrica tenha de substituir gratuitamente um componente se oferece uma garantia de uso de 300 horas ?*

    b. *Querendo reduzir a probabilidade do item a para $0,05$ que garantia a fábrica pode oferecer?*

26. *Seja $X \sim Exp(\lambda)$. Qual a probabilidade que X ultrapasse seu valor esperado $E(X)$? Compare $E(X)$ com $med(X)$.*

27. *A vida média de um satélite é 4 anos, seguindo o modelo exponencial. Seja Y o tempo de vida do satélite. Mostre que:*

    a. $P(Y > 4) = 0,3678$.

    b. $P(5 \leq Y \leq 6) = 0,0634$.

    c. *Quatro desses satélites foram lançados no mesmo instante. Seja S o número de satélites que estarão funcionando após 5 anos. Mostre que:*

        c1. $P(S = 4) = 0,00674$.

        c2. $P(S = 2) = 0,2507$.

28. *Suponhamos que T, o período para a quebra de um componente, seja distribuído exponencialmente. Se n desses componentes forem instalados, qual a probabilidade de que pelo menos a metade ainda esteja funcionando ao fim de t horas?*

29. *Suponha que um fusível tenha uma duração de vida X, a qual pode ser considerada uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial. Existem dois processos pelos quais o fusível pode ser fabricado, O processo I apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas, enquanto o processo II apresenta uma duração de vida esperada de 150 horas. Suponha que o processo II seja duas vezes mais caro do que o processo I, que custa C dólares por fusível. Admite-se, além disso, que se um fusível durar menos do que 200 horas, uma multa de K dólares seja lançada sobre o fabricante. Que processo deve ser empregado?*

    Para resolver esta questão siga os passos:

    Sejam $X_1 \sim Exp(1/100)=$ *tempo de vida do fusível fabricado pelo processo I e*
    $X_2 \sim Exp(1/150)=$ *tempo de vida do fusível fabricado pelo processo II.*

    a. *Seja* C_1, *o custo por fusível usando o processo I. Assim*

    $$C_1 = \begin{cases} C & \text{se } X_1 > 200 \\ C+K & \text{se } X_1 \leq 200. \end{cases}$$

    b. *Seja* C_2, *o custo por fusível usando o processo II. Assim*

    $$C_2 = \begin{cases} C & \text{se } X_2 > 200 \\ C+K & \text{se } X_2 \leq 200. \end{cases}$$

    c. *Mostre que* $E(C_1) = K(1-e^{-2})+C$ *e* $E(C_2) = K(1-e^{-4/3})+2C$.

    d. *Quando* $E(C_2)$ *é maior que* $E(C_1)$*?*