CC0303 Tópicos Especiais em Probabilidade

Aula - 24/10/2023

Prof. Maurício Mota

1. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 2.) Considere X e Y duas variáveis aleatórias independentes e defina $Z = X + Y$. Assuma que X possui distribuição Normal Padrão e Y tem distribuição de Poisson com média 2. A alternativa que fornece a probabilidade condicional

$$P(Z < 0|Y < 4)$$

é :

a. 0,167 b. 0,177 c. 0,117 d. 0,137.

Solução:

$$P(Z < 0|Y < 4) = \frac{P\left(X + Y < 0, Y \leq 3\right)}{P(Y \leq 3)}$$

Note que:

$$P(Y \leq 3) = \sum_{y=0}^{3} \frac{e^{-2}\,2^y}{y!} = e^{-2}\left[1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right] = \frac{19}{3}\,e^{-2}.$$

Note ainda:

$$P\left(X + Y < 0, Y \leq 3\right) = \sum_{y=0}^{3} P\left(X + Y < 0, Y = y\right)$$

$$= \sum_{y=0}^{3} P\left(X < -y, Y = y\right)$$

Com são independentes temos:

$$P\left(X + Y < 0, Y \leq 3\right) = \sum_{y=0}^{3} P(X < -y) \times P(Y = y) = \sum_{y=0}^{3} \Phi(-y) \times P(Y = y).$$

$$= \Phi(0) \times P(Y = 0) + \Phi(-1) \times P(Y = 1) + \Phi(-2) \times P(Y = 2) + \Phi(-3) \times P(Y = 3)$$

$$e^{-2}\left[\Phi(0) \times 1 + \Phi(-1) \times 2 + \Phi(-2) \times 2 + \Phi(-3) \times \frac{4}{3}\right]$$

$$\left[0,5 + 0,1587 \times 2 + 0,0228 \times 2 + 0,0013 \times \frac{4}{3}\right] e^{-2} = 0,863975 \times e^{-2}.$$

$$P(Z < 0|Y < 4) = \frac{0,863975 \times e^{-2}}{\frac{19}{3} \times e^{-2}} = 0,1365 \approx 0,137.$$

2. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 4.) Cristina, Maria e Pedro participam de um jogo lançando moedas independentemente.

   Cristina inicia o jogo arremessando uma moeda honesta (probabilidade de cara igual a 0,5).

   Se der cara, ela vence o jogo, se der coroa, ela passa a vez para Maria que jogará uma moeda viciada com probabilidade de cara igual a 0,6. Se Maria obtiver cara, vence o jogo, caso contrário passa a oportunidade para Pedro que jogará uma moeda viciada com probabilidade de cara igual a 0,7.

   Se Pedro obtiver cara, ele vencerá o jogo, caso contrário a oportunidade voltará para Cristina. O jogo continua até se ter um vencedor. A probabilidade de vitória de Pedro é:

   a. 1/7 b. 28/188 c. 2/7 d. 42/188 .

   Solução:

   Considere o evento A representando que as 3 pessoas obtém coroa no primeiro lançamento

$$P(A) = 0,5 \times 0,4 \times 0,3 = 0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}.$$

   Considere o evento B representando que Cristina obtém coroa, Maria obtém coroa e Pedro obtém cara

$$P(B) = 0,5 \times 0,4 \times 0,7 = 0,14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}.$$

   Seja E o evento Pedro ganha o jogo.

$$P(E) = P(B)+P(AB)+P(AAB)+P(AAAB)+\ldots = P(B)\left[1 + P(A) + P(A)^2 + P(A)^3 + \ldots\right]$$

$$P(E) = \frac{P(B)}{1 - P(A)} = \frac{7/50}{47/50} = \frac{7}{47} = \frac{28}{188}.$$

   Resposta correta: **B**.

3. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 8.)

   Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Normal com média μ e variância σ^2.

   O estimador de σ^2 , denotado por S^2 é dado por:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n - 1}.$$

   Definimos o estimador $\hat{\sigma} = kS$. Encontrar a forma explicita de k para que este estimador seja um estimador não viesado de σ.

   Solução:

Sabemos que

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

A f.d.p. de V é dada por:

$$f(v) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\ 2^{(n-1)/2}}\ v^{(n-1)/2-1}\ \ e^{-v/2}\ I_{(0,\infty)}(v).$$

A esperança de $\sqrt{V}$ é dada por:

$$E\left[\sqrt{V}\right] = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\ 2^{(n-1)/2}}\ \int_0^\infty\ v^{n/2-1}\ \ e^{-v/2}\ dv$$

Seja

$$I = \int_0^\infty\ v^{n/2-1}\ \ e^{-v/2}\ dv = IGG(n/2, 1/2, 1).$$

$$I = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{-n/2}} = \Gamma(\frac{n}{2})\ 2^{n/2}.$$

$$E\left[\sqrt{V}\right] = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\ 2^{(n-1)/2}}\ \times \Gamma(\frac{n}{2})\ 2^{n/2}.$$

$$E\left[\sqrt{V}\right] = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$E\left[\sqrt{V}\right] = \frac{\sqrt{(n-1)}E(S)}{\sigma}$$

Note que:

$$E(S) = \sigma \times \frac{E\left[\sqrt{V}\right]}{\sqrt{(n-1)}}$$

$$E(S) = \sigma \times \frac{1}{\sqrt{(n-1)}}\ \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$E\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\ \ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\ \ S\right] = \sigma.$$

Assim

$$k = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\ \ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

4. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 14.)

5. Um pacote com 10 componentes eletrônicos contém 2 itens defeituosos e 8 itens não defeituosos. Se X é o número de componentes eletrônicos defeituosos em uma amostra escolhida aleatoriamente e sem reposição com 3 itens, a probabilidade de ter pelo menos um item defeituoso na amostra é

a. $\frac{7}{15}$ b. $\frac{4}{60}$ c. $\frac{14}{15}$ d. $\frac{16}{30}$

Solução: Sejam $N = 10$ o número de componentes do pacote e $A = 2$ o número de itens defeituosos do pacote e $N - A = 8$ o número de itens bons,

Uma amostra aleatória de $n = 3$, sem reposição, é retirada e X é número de componentes eletrônicos defeituosos nessa amostra,

Assim

$$X \sim HG(N = 10, A = 2, n = 3).$$

Sua f.p. é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{A}{x} \times \binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}} \ I_B(x),$$

com

$$B = \{Li, \ldots, L_s\}, \quad L_i = max(0, A + n - N) \quad e \quad L_i = min(A, n).$$

Assim

$$L_i = max(0, A{+}n{-}N) = max(0, 2{+}3{-}10) = max(0, -5) = 0 \quad e \quad L_i = min(A, n) = min(2, 3) = 2.$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{2}{x} \times \binom{8}{2-x}}{\binom{10}{3}} \ I_{\{0,1,2\}}(x).$$

Assim

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{\frac{8!}{3!5!}}{\frac{10!}{3!7!}}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \frac{8!}{5!} \times \frac{7!}{10!} = 1 - \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Note que

$$P(X \geq 1) = \frac{8}{15} = \frac{16}{30},$$

respeite a pegadinha, Resposta correta é a opção **D**.

6. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 4.) A função geradora de momentos da variável aleatória X é dada por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp(2\ e^t - 2)$$

e a da variável aleatória Y é dada por

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^3.$$

Se X e Y são independentes, o valor de $E(X + Y)$ é:

a. $\frac{17}{4}$ b. $\frac{11}{4}$ c. $\frac{5}{16}$ d. $\frac{13}{16}$

Solução: Note que

$$M_X(t) = \exp(2\ e^t - 2) = \exp(2(\ e^t - 1))$$

que é a fgm de uma Poisson de parâmetro $\lambda = 2$. Logo

$$E(X) = 2.$$

A fgm de Y

$$M_Y(t) = (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^3 = p(e^t + q)^n$$

é de uma binomial com
$n = 3$ e $p = \frac{3}{4}$. Assim

$$E(Y) = np = \frac{9}{4}.$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2 + = \frac{9}{4} == \frac{17}{4}.$$

Resposta correta é a opção **A**.

Comentário 1: A resposta continua válida mesmo que X e Y sejam dependentes.

Comentário 2:
A derivada de $M_X(t)$ é:

$$M_X'(t) = 2\ e^t \times \exp(2\ e^t - 2)$$

$$E(X) = M_X'(t) = 2\ e^0 \times \exp(2\ e^0 - 2) = 2.$$

A derivada de $M_Y(t) = (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^3$ é:

$$M_Y'(t) = 3 \times (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^2\ \frac{3}{4}\ e^t$$

$$M_Y'(t) = \frac{9}{4} \times e^t \times (\frac{3}{4}\ e^t + \frac{1}{4})^2.$$

$$E(Y) = M_Y'(0) = \frac{9}{4} \times e^0 \times (\frac{3}{4}\, e^0 + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{4} \times (\frac{3}{4}\; + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{4}.$$

7. (Mestrado-UFMG-2016-2017-Questão 5) Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas independentes e k uma constante. Seja A o evento $X = k$, B o evento $Y = k$, C o evento $max(X, Y) = k$ e D o evento $min(X, Y) = k$. Se $P(A) = 0,3$,$P(B) = 0,4$, $P(C) = 0,2$, então $P(D)$ é igual a:

   a. 0,1 b. 0,3 c. 0,5 d. 0,7

   Solução: Sabemos que

$$Max(U, V) + Min(U, V) = U + V.$$

   Aplicando o operador esperança temos:

$$E\left[Max(U, V)\right] + E\left[Min(U, V)\right] = E(U) + E(V). \tag{1}$$

   Supondo

$$U = I_{\{k\}}(X) \quad \text{temos} \quad E(U) = P(X = k) = P(A) = 0,3.$$

$$V = I_{\{k\}}(Y) \quad \text{temos} \quad E(V) = P(Y = k) = P(B) = 0,4.$$

$$Max(U, V) = I_{\{k\}}(Max(X, Y)) \quad \text{temos} \quad E(Max(U, V)) = P(Max(X, Y) = k) = P(C) = 0,2.$$

$$Min(U, V) = I_{\{k\}}(Min(X, Y)) \quad \text{temos} \quad E(Min(U, V)) = P(Min(X, Y) = k) = P(D) =?.$$

   Substituindo em **1** temos:

$$P(C) + P(D) = P(A) + P(B)$$

$$P(D) = P(A) + P(B) - P(C) = 0,3 + 0,4 - 0,2 = 0.$$

   A resposta correta é o item **c**.

8. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 14) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \lambda^2 x\; e^{-\lambda x} \quad I_{(0,\infty)}\,(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   denote por LI o limite inferior de Cramer-Rao para a variância de estimadores não viciados de λ e denote por $\hat{\lambda}$ o estimador de máxima verossimilhança de λ. Seja

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

   Assinale a opção correta.

a. $LI = \frac{\lambda^2}{2n}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$.
b. $LI = \frac{\lambda^2}{2}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}^{-1}$.
c. $LI = \frac{\lambda^2}{2n}$ e $\hat{\lambda} = 2\bar{X}$.
d. $LI = \frac{\lambda^2}{2}$ e $\hat{\lambda} = \bar{X}/2$.

Solução:

Temos que

$$X \sim Gama(r = 2, \lambda)$$

$$E(X) = \frac{2}{\lambda} \quad e \quad V(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Vamos mostrar que X pertence à família exponencial:

Note que o suporte $A = (0, \infty)$ não depende de λ.

$$f(X|\lambda) = \lambda^2 \; X \;\; e^{-\lambda X}$$

Aplicando logaritmo neperiano temos:

$$log\,[f(X|\lambda)] = 2\; log(\lambda) + log(X) \; - \lambda X$$

Derivando em relação a λ temos:

$$V = \frac{\partial log\,[f(X|\lambda)]}{\partial \lambda} = \frac{2}{\lambda} - X,$$

que é a nossa famosa função escore.

Note que

$$E(V) = \frac{2}{\lambda} - E(X) = 0,$$

Além disso temos:

$$Var(V) = I_F(\lambda) = Var\left[\frac{2}{\lambda} - X\right] = Var(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

O limite inferior de Cramer-Rao de T um estimador não viciado de $g(\lambda)$ é dado por:

$$LI = \frac{(g'(\lambda))^2}{nI_F(\lambda)}.$$

Como

$$g(\lambda) = \lambda \;\text{ temos }\; g'(\lambda) = 1$$

$$Li = \frac{1}{n\frac{2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{2n}.$$

A função de verossimilhança de λ é dada por:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i \, e^{-\lambda x_i} = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i \quad e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Aplicando logaritmo neperiano temos:

$$l(\lambda) = 2n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando em relação a λ temos:

$$l'(\lambda) = 2n \, \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x = \frac{2n}{\lambda} - n\bar{x}.$$

A derivada segunda é dada por:

$$l''(\lambda) = \frac{2n}{\lambda^2} < 0.$$

De

$$l'(\lambda) = 0$$

temos:

$$\frac{2n}{\lambda} - n\bar{x} = 0.$$

Dividindo por n temos:

$$\frac{2}{\lambda} = \bar{x}.$$

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}} = 2 \ \bar{X}^{-1}.$$

A resposta correta é a opção **a**.