UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada

Campus do Pici, Bloco 910, Fortaleza - Ceará, Brasil

Centro de Ciências

NOTAS DE CURSO

Disciplina: Teoria das Matrizes

Introdução à Teoria de Matrizes

Professor

RAFAEL CASTRO DE ANDRADE

Semestre 2007.2

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Este manuscrito apresenta um estudo sobre Teoria de Matrizes com enfoque para alunos de Estatística. Inicialmente introduzimos conceitos básicos sobre o assunto, desde os mais simples, de forma que o aluno tenha em seu poder um material auto-contido[1] para posterior consulta. Procuramos apresentar exemplos que facilitem o aprendizado do leitor, ilustrando as operações, suas propriedades e resultados teóricos constituindo o assunto em estudo. Ao final de cada seção ou capítulo propomos alguns exercícios que ajudam a fixar as idéias nele introduzidas.

Este texto está em fase de preparação. Logo, não hesite a sinalizar erros (ou sugerir melhoras) no (para o) mesmo. Participe.

1.1 Conceitos preliminares

Definimos **matriz** como sendo um arranjo de elementos (valores) dispostos em forma retangular, por linhas e colunas. Dessa forma, cada elemento de uma matriz é identificado por dois atributos: um indicando a linha e o outro, a coluna à qual pertence esse elemento. Trata-se de uma representação tabular de elementos ou objetos que podem ser de vários tipos (booleanos, complexos, nomes, símbolos, funções, etc.). Nosso interesse é por matrizes com as quais poderemos realizar algumas operações matemáticas, como veremos adiante.

[1] Pesquisar em outros livros é essencial para um aprendizado mais completo.

1.1.1 Notação matricial

Empregamos letras maiúsculas (romanas, gregas, etc.) para dar nome a uma matriz. Por exemplo, seja a matriz P abaixo:

$$P = \begin{pmatrix} 55.0 & 57.6 & 57.2 \\ 70.3 & 74.0 & 72.7 \end{pmatrix}$$

Perceba que os elementos de P estão organizados por linhas e colunas e cercados por *parênteses*. No lugar dos parênteses poderíamos ter usado colchetes. Um elemento que se encontra na linha i e coluna j de P é representado por uma letra minúscula, a mesma que dá nome à matriz, juntamente com os sub-índices indicando a linha e a coluna a que pertence, ou seja p_{ij}. Assim, o elemento p_{23} (elemento da linha 2 e coluna 3 de P) é igual a 72.7. Uma outra forma de representar a matriz P acima é:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$$

Denominamos de **dimensão ou ordem** de uma matriz o seu número de linhas e de colunas. Para o exemplo acima, a dimensão da matriz pode ser representada por $P_{2\times 3}$. A dimensão de uma matriz nos permite fazer a seguinte distinção:

Matriz retangular de ordem $n \times m$

É uma matriz $A_{n\times m}$ que possui n linhas e m colunas, com n e m naturais não nulos, representada por:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ou $A = (a_{ij})$, onde $i = 1, 2, \cdots, n$ é o índice da linha e $j = 1, 2, \cdots, m$, o da coluna. Uma matriz $A_{n\times m}$ tem $n * m$ elementos.

Matriz quadrada de ordem n

É toda matriz $A_{n\times m}$ cujo número de linhas n é igual ao número de colunas m, i.e. $m = n$. É denotada por $A_{n\times n}$ (ou simplesmente A_n):

$$A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Um exemplo de matriz quadrada de ordem dois (duas linhas e duas colunas) é:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ podemos distinguir sua **diagonal principal**, denotada por $Diag(A)$ e formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$, $i = 1, \cdots, n$, ou seja, $Diag(A) = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$. Por exemplo, a diagonal da matriz C do exemplo anterior é dada por $Diag(C) = \{1, -3\}$.

Denominamos de **diagonal secundária** de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, denotada por $Sec(A)$, ao conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$, ou seja, $Sec(A) = \{a_{1,n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n,1}\}$[2].

Definimos **traço** de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, denotado por $tr(A)$, como sendo a soma dos elementos de sua diagonal principal, i.e. $tr(A) = \sum a_{ii}$, $\forall\ i = 1, \cdots, n$.

A seguir apresentamos algumas matrizes notáveis.

1.1.2 Matrizes comuns

Definição 1 *Uma* ***matriz linha*** *é uma matriz cuja dimensão é do tipo $1 \times m$, ou seja, tem uma única linha.*

É também conhecida como *vetor linha*. Por exemplo:

$$A_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Definição 2 *Uma* ***matriz coluna*** *é uma matriz cuja dimensão é do tipo $m \times 1$, ou seja, tem uma única coluna.*

É também conhecida como *vetor coluna*. Por exemplo:

$$A_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Definição 3 *Uma* ***matriz diagonal*** *é uma matriz quadrada $D_{n\times n} = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, cujos elementos que não pertencem à sua diagonal principal são todos iguais a zero.*

Ou seja:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \alpha \neq 0 & \text{para algum par (i,j), com i=j} \end{cases}$$

[2]Nesse caso separamos a linha e a coluna de cada elemento por uma vírgula para evitar confusão.

que em notação matricial equivale a:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definição 4 *Uma **matriz identidade (ou unidade)** de ordem n é uma matriz diagonal denotada por I_n, cujos elementos que não pertencem à sua diagonal principal são todos iguais a zero e cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 (um).*

Ou seja:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 5 *Uma **matriz triangular** é uma matriz quadrada $D_n = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, cujos elementos que se localizam abaixo ou acima de sua diagonal principal são todos nulos.*

Por exemplo, uma **matriz triangular inferior** (elementos nulos acima da diagonal principal) é representada como:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

enquanto **uma matriz triangular superior** (elementos nulos abaixo da diagonal principal) é representada por:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz D abaixo é triangular inferior, enquanto que a matriz $\tilde{D}$ é triangular superior:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Definição 6 *Uma* ***matriz nula*** *é uma matriz denotada por $\emptyset$, cujos elementos são todos iguais a zero.*

Um exemplo de matriz nula:

$$\emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 7 *Uma* ***matriz de elementos unitários*** *é uma matriz representada usualmente pela letra J, ou seja $J_{n\times m} = (j_{ik})$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, $k \in \{1, \cdots, m\}$, cujos elementos são todos iguais a um.*

Ou seja:

$$J_{n\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$J_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 8 *Uma* ***matriz simétrica*** *é uma matriz quadrada $D_n = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, cujos elementos satisfazem à propriedade de simetria, isto é, $d_{ij} = d_{ji}$, $\forall\ (i, j)$.*

Em notação matricial temos:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 11 \\ 4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Definição 9 *Uma **matriz anti-simétrica** é uma matriz quadrada $D_n = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, cujos elementos satisfazem à propriedade de anti-simetria, isto é:*

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & se\ i = j \\ -d_{ji} & se\ i \neq j \end{cases}$$

Em notação matricial temos:

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ -d_{12} & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{1n} & -d_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 11 \\ -4 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 10 *Uma **matriz uniforme** é uma matriz quadrada $D_n = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, cujos elementos são tais que:*

$$d_{ij} = \begin{cases} C_1 & se\ i = j \\ C_2 & se\ i \neq j \end{cases}$$

onde C_1, C_2 são constantes.

Um exemplo de matriz uniforme de ordem três, com $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$ é:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 11 *Uma matriz, denotada por D^t ou $D^{'}$, é chamada de **matriz transposta** de uma dada matriz $D_{n\times m} = (d_{ij})$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$ se $d^t_{ij} = d_{ji}$, $\forall\ (i, j)$.*

Observe que a primeira linha de D corresponde à primeira coluna de D^t, a segunda linha de D corresponde à segunda coluna de D^t, e assim por diante. Por exemplo, seja a matriz:

$$D_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

sua transposta é dada por:

$$D^t_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Definição 12 *Uma matriz $A_{n\times m}$ é igual a uma matriz $B_{q\times p}$ quando tiverem a mesma dimensão, $n = q$ e $m = p$, e $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ (i, j)$.*

1.2 Operações básicas

1.2.1 Transposição

A transposição de uma dada matriz D equivale a determinar uma matriz D^t que seja a transposta de D (veja definição **??**).

Propriedade 1 *A operação de transposição é reflexiva, i.e.* $(A')' = A$. *Formalmente,*

$$(A')' = (a_{ij}^{'})' = (a_{ji}^{'}) = (a_{ij}) = A.$$

1.2.2 Particionamento

O particionamento de uma matriz $A_{n\times m}$ em submatrizes consiste em dividir A em blocos por linhas horizontais imaginárias que cortam todas as m colunas de A, ou por linhas verticais imaginárias que cortam todas as n linhas de A. Por exemplo, seja a matriz

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se passarmos uma linha vertical imaginária entre a segunda e terceira colunas, obtemos o seguinte particionamento

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \\ -5 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \end{array}\right)$$

que corresponde a dividir A em dois blocos (submatrizes) A_1 e A_2, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 8 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga, se passarmos uma linha horizontal imaginária entre a primeira e segunda linhas, juntamente com a linha vertical anterior, obtemos um novo particionamento

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 9 \\ \hdashline 5 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \\ -5 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

que corresponde a dividir A em quatro blocos (submatrizes) A_1, A_2, A_3 e A_4, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 8 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Adição

A operação de adição de duas matrizes $A_{n\times m} = (a_{ij})$, $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$ e $B_{n\times m} = (b_{ij})$, $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$, obrigatoriamente de mesma ordem (conformáveis para a adição), denotada por $C = A+B$, é definida de forma que os elementos da matriz resultante C sejam dados por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall\ (i,j).$$

Por exemplo, sejam

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

então

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+0 \\ 5+2 & 0+1 \\ 1+0 & 8+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriedade 2 *A operação de adição de matrizes é comutativa.*

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A.$$

Propriedade 3 *A operação de adição de matrizes é associativa.*

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C).$$

Na adição de matrizes existe a figura do **elemento neutro** (matriz nula) tal que:

$$A + \emptyset = \emptyset + A = A.$$

e existe a **matriz oposta** de A, denotada por $-A$, tal que $A + (-A) = \emptyset$.

1.2.4 Subtração

A subtração de duas matrizes $A_{n\times m} = (a_{ij})$, $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$ e $B_{n\times m} = (b_{ij})$, $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$, obrigatoriamente de mesma ordem (conformáveis para a subtração), é uma matriz C denotada por $C = A - B$, cujos elementos são definidos por:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall\ (i,j).$$

Por exemplo, para as matrizes A e B do exemplo anterior, temos

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 3-0 \\ 5-2 & 0-1 \\ 1-0 & 8-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Multiplicação por escalar

A operação de multiplicação de uma matriz $A_{n\times m}$ por um escalar λ consiste em multiplicar todos os elementos de A por λ, obtendo-se assim uma nova matriz $B = \lambda A = A\lambda = (b_{ij})$, cujos elementos de B são tais que:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},\ \forall\ (i, j).$$

Por exemplo, seja $\lambda = 2$ e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

então temos

$$B = \lambda A = 2A = \begin{pmatrix} 2*1 & 2*3 \\ 2*3 & 2*(-1) \\ 2*1 & 2*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.6 Multiplicação de matrizes

A operação de multiplicação de matrizes ($A_{n\times m} * B_{p\times q}$, nessa ordem) só é possível se as mesmas forem conformáveis para a multiplicação, ou seja, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de B, nesse caso, $m = p$. Caso contrário, se $m \neq p$, o produto não existe. Isso ocorre devido ao fato de o produto $C = A_{n\times m} * B_{m\times q}$ de duas matrizes ser visto (definido) como uma matriz formada a partir do produto interno dos vetores linhas da primeira matriz A com os vetores colunas da segunda matriz B. Sendo assim, cada linha i de A pode ser multiplicada por cada coluna j de B. Para cada produto interno do i-ésimo *vetor linha* de A, denotado por $A(i, .)$, com o j-ésimo *vetor coluna* de B, denotado por $B(., j)$, ou em notação vetorial $< A(i, .), B(., j) >$, definimos um elemento da matriz produto C. Logo, podemos notar que a matriz $C = (c_{ij})$ será uma matriz de dimensão $n \times q$ cujo elemento c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} =< A(i, .), B(., j) >= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Por exemplo, para

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

teremos o seguinte produto $C = AB$:

$$C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < A(1, .), B(., 1) > & < A(1, .), B(., 2) > \\ < A(2, .), B(., 1) > & < A(2, .), B(., 2) > \end{pmatrix}$$

logo

$$C = \begin{pmatrix} 2*3+3*1+0*1 & 2*5+3*(-1)+0*0 \\ 5*3+0*1+1*1 & 5*5+0*(-1)+1*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 16 & 25 \end{pmatrix}$$

No produto AB diremos que B pós-multiplica A ou A é multiplicada à direita por B. Ou então, A pré-multiplica B ou B é multiplicada à esquerda por A.

As principais propriedades de multiplicação de matrizes são relatadas a seguir.

Propriedade 4 *A operação de multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa.*

$$AB \neq BA.$$

Por exemplo, dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

observamos que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quando ocorre dos produtos AB e BA existirem e se $AB = BA$, diremos que A e B comutam.

Propriedade 5 *A operação de multiplicação de matrizes é associativa.*

$$ABC = A(BC) = (AB)C.$$

Por exemplo [**?**], dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificamos que

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad (AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedade 6 *A operação de multiplicação de matrizes é distributiva.*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Exemplo: Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Então observamos que:

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e que

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

1.2.7 Potência de matrizes quadradas

Dada uma matriz A_n, define-se a p-ésima (p inteiro positivo) potência de A de forma recursiva como sendo:

$$A^p = \begin{cases} I_n & \text{se } p = 0 \\ A^{p-1} * A & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

Por exemplo, dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, então

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \ e \quad A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos definir os seguintes tipos de matrizes quadradas quanto à sua segunda potência.

Definição 13 *Uma matriz quadrada será **idempotente** quando $A^2 = A$.*

Por exemplo [**?**]:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Definição 14 *Uma matriz quadrada será **nilpotente** quando $A^2 = \emptyset$.*

Por exemplo [**?**]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 14 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Definição 15 *Uma matriz quadrada será **unipotente** ou **involutiva** quando $A^2 = I$.*

Por exemplo [**?**]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2.8 Outros produtos de matrizes

Definição 16 *Dadas duas matrizes quadradas $A_{n\times m}$ e $B_{p\times q}$, definimos o produto direto **(Produto de Kronecker)** de A por B como sendo a matriz $C_{np\times mq}$, denotado por $C = A \otimes B$, dada por:*

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

Por exemplo, sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 17 *Dadas duas matrizes $A_{n\times m}$ e $B_{n\times m}$, de mesma ordem, definimos o **produto de Hadamard** de A por B como sendo a matric $R_{n\times m}$, denotado por $R = A \odot B$, dada por:*

$$C = A \odot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2m}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$C = A \odot B = \begin{pmatrix} 1*2 & 3*0 \\ 0*1 & 1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 18 *Dada uma matriz quadrada B_n e um polinômio $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r$, com $x^0 = I_n$, definimos **matriz polinomial** $P(B)$ a matriz que se obtém a partir de $p(x)$ quando $x = B$; ou seja $p(B) = a_0I + a_1B + a_2B^2 + \cdots + a_rB^r$.*

Por exemplo [**?**], para $p(x) = 5x^0 + 3x^1 + 2x^2$ e dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos $p(A) = 5I + 3A + 2A^2$; como

$$5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

então

$$P(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

1.3 Matrizes especiais

1.3.1 Produto de matrizes simétricas

O produto de matrizes simétricas não é, em geral, simétrico. Pois, dadas duas matrizes simétricas A e B, se existir o produto AB, então:

$$(AB)' = B'A' = BA$$

como em geral $BA \neq AB$, logo AB é geralmente não simétrica. Por exemplo [**?**], sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

então

$$(AB)' = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 27 & 32 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 17 & 27 \\ 19 & 32 \end{pmatrix} = BA \neq AB.$$

1.3.2 Propriedades de AA' e A'A

O produto de uma matriz por sua transposta é simétrico. Pois:

$$(AA')' = (A')'A' = AA' \quad e \quad (A'A)' = A'(A')' = A'A.$$

porém, AA' e $A'A$ não são necessariamente iguais (basta que A não seja quadrada para ver isso e, quando o for, *pode* ocorrer de ser verdade, mas não quer dizer que deva ser). Por exemplo [**?**], seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$AA' = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad e \quad A'A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Perceba que

$$AA' = \{< A(i,.), A(j,.) >\}, \ \forall (i,j) \tag{1.1}$$

Ou seja, é uma matriz cujos elementos são produto internos de linhas de $A_{n\times m}$. É importante ver que o i-ésimo elemento da diagonal principal de AA' é dado por $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$. Logo, todos os elementos dessa diagonal são não-negativos quando A for uma matriz real.

$$A'A = \{< A(.,j), A(.,t) >\},\ \forall(j,t) \tag{1.2}$$

Ou seja, é uma matriz cujos elementos são produto internos de colunas de $A_{n\times m}$. Note que o j-ésimo elemento da diagonal principal de $A'A$ é dado por $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2$. Logo temos os seguintes resultados (demonstre-os):

$$A'A = 0 \longrightarrow A = 0, \tag{1.3}$$

$$tr(A'A) = 0 \longrightarrow A = 0. \tag{1.4}$$

Usando os resultados em **??** e **??** podemos mostrar que, dadas as matrizes reais P, Q e X:

$$PXX' = QXX' \longrightarrow PX = QX, \tag{1.5}$$

Prova: $(PXX' - QXX')(P' - Q') = (PX - QX)X'(P' - Q') = (PX - QX)(X'P' - X'Q') = (PX - QX)(PX - QX)'$. Como $(PXX' - QXX') = 0$, vem que $PX = QX$.

1.3.3 Produto de matrizes como produto externo de vetores

O produto de duas matrizes AB pode ser obtido usando-se o particionamento dessas matrizes, ou seja, empregando o produto externo dos vetores colunas de A pelos vetores linhas de B. Para tanto, basta representar:

$$A = \begin{pmatrix} A(.,1) & A(.,2) & \cdots & A(.,n) \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} B(1,.) \\ B(2,.) \\ \vdots \\ B(n,.) \end{pmatrix}.$$

Isso nos permite escrever AB como:

$$AB = \big(A(.,1)B(1,.) + A(.,2)B(2,.) + \cdots + A(.,n)B(n,.)\big)$$

Por exemplo [**?**]:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*7+4*9 & 1*8+4*10 \\ 2*7+5*9 & 2*8+5*10 \\ 3*7+6*9 & 3*8+6*10 \end{pmatrix},$$

logo verificamos que

$$AB = \begin{pmatrix} 1*7 & 1*8 \\ 2*7 & 2*8 \\ 3*7 & 3*8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4*9 & 4*10 \\ 5*9 & 5*10 \\ 6*9 & 6*10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Operando com matrizes de elementos iguais a um

Sejam $\mathbf{1}_n$ um vetor coluna de 1's e J uma matriz de 1's. Note que

$$\mathbf{1}_r'\mathbf{1}_r = r \tag{1.6}$$

$$\mathbf{1}_r\mathbf{1}_s' = J_{r\times s} \tag{1.7}$$

$$J_{r\times s}J_{s\times t} = sJ_{r\times t} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{1}_r'J_{r\times s} = r\mathbf{1}_s' \tag{1.9}$$

$$J_{r\times s}\mathbf{1}_s = s\mathbf{1}_r. \tag{1.10}$$

Em particular, temos que $J = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'$, donde concluímos que $J_n^2 = nJ_n$. Fazendo

$$\bar{J}_n = \frac{1}{n}J_n \tag{1.11}$$

com $\bar{J}_n^2 = \bar{J}_n$, podemos definir a **matriz de centragem** C como sendo

$$C_n = I_n - \bar{J}_n = I_n - \frac{1}{n}J_n. \tag{1.12}$$

Podemos observar (como exercício) que $C = C' = C^2$, $C\mathbf{1} = 0$ e $CJ = JC = 0$. Uma aplicação para a matriz de centragem é a representação de um vetor $x'C$ onde cada componente é expressa em função de seu desvio em relação à média dos dados de x. Isto é, seja $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, então a média dos elementos de x é dada por

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = \frac{1}{n}x'\mathbf{1} = \frac{1}{n}\mathbf{1}'x,$$

e, usando a matriz de centragem,

$$x'C = x' - x'\bar{J} = x' - \frac{1}{n}x'\mathbf{1}\mathbf{1}' = x' - \bar{x}\mathbf{1}'.$$

Observe que

$$x'Cx = (x' - \bar{x}\mathbf{1}')x = x'x - \bar{x}(\mathbf{1}'x) = x'x - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

aparece em cálculos de variância em Estatística.

1.3.5 Matrizes ortogonais, normais e ortonormais

Definição 19 *Uma matriz A é dita **ortogonal** quando $AA' = A'A = I$.*

Por exemplo [**?**], verifique que a matriz abaixo é ortogonal.

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplos clássicos de matrizes ortogonais são as matrizes de Helmert, de Givens e de Householder. Veja [**?**] para mais detalhes sobre elas.

Quando uma matriz A apenas comuta com sua transposta, ou seja, $AA' = A'A$, não necessariamente igual à matriz identidade, ela será denominada de **matriz normal**.

Note a diferença dessa definição de ortogonalidade para matrizes para aquela de **vetores ortogonais**. Dois vetores x e y são ortogonais quando $x'y = y'x = 0$.

Um **vetor é normal** quando sua norma for igual a um, i.e. $||x|| = \sqrt{x'x} = 1$. Para se normalizar um vetor x, basta multiplicá-lo por $\frac{1}{||x||}$.

Diremos que um conjunto $\{x^1, x^2, \cdots, x^p\}$ de vetores é **ortonormal** quando os vetores desse conjunto forem normais, $||x^i|| = (x^i)'(x^i) = 1$, e ortogonais entre si, $(x^i)'x^j = 0$, para todo $i \neq j$.

Definição 20 *Uma matriz $A_{n\times m}$ tem um conjunto de linhas (equiv. colunas)* ***ortonormal*** *quando $AA' = I_n$ (equiv. $A'A = I_m$).*

1.4 Operações elementares com linhas ou colunas de uma matriz

Agora vejamos como representar de forma matricial operações como adicionar um múltiplo de uma linha (coluna) a uma outra; multiplicar uma linha (coluna) por um escalar e trocar duas linhas (colunas) de posição.

1.4.1 Operação elementar $P_{ij}(\lambda)$: combinação linear de linhas/colunas

A operação de **combinação linear de linhas** consiste em adicionar um múltiplo λ de uma linha j a uma linha i de uma matriz A. Por exemplo, seja B a matriz obtida de A (abaixo) adicionando-se à primeira linha de A, sua segunda linha multiplicada por 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 11 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

A operação para obtenção de B pode ser vista como uma **pré-multiplicação** da matriz A pela matriz $P_{12}(5)$ abaixo, ou seja, $B = P_{12}(5)A$:

$$P_{12}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Perceba que a matriz $P_{ij}(\lambda)$ é obtida a partir da matriz identidade (com mesma ordem de A), trocando-se o elemento na posição (i, j) por λ. Se quiséssemos adicionar à primeira linha de A, além da sua segunda linha multiplicada por 5, sua terceira linha multiplicada por 2, bastaria tomar $B = P_{12}(5)P_{13}(2)A$ (comprove como exercício).

De forma análoga, a operação de **combinação linear de colunas** consiste em adicionar um múltiplo λ de uma coluna j a uma coluna i de uma matriz A. Por exemplo, seja C a matriz obtida de A acima adicionando-se à segunda coluna de A, sua terceira coluna multiplicada por 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & -1 \\ 9 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 18 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Quanto à operação para obtenção de C, essa pode ser vista como uma **pós-multiplicação** da matriz A pela matriz $P_{32}(2)$ abaixo, ou seja, $C = AP_{32}(2)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad com \quad P_{32}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Operação elementar E_{ij}: troca de linhas/colunas

A operação elementar de **troca de linhas** consiste em trocar duas linhas i e j de posição de uma matriz A. Por exemplo, seja B a matriz obtida de A (abaixo) trocando-se a primeira linha de A pela segunda linha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa operação pode ser vista como uma pré-multiplicação da matriz A pela matriz E_{12} abaixo, i.e. $B = E_{12}A$:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz E_{ij} é obtida a partir da matriz identidade I (com mesma ordem de A), trocando-se de posição as linhas i e j de I.

A operação de **troca de colunas** consiste em trocar duas colunas i e j de posição de uma matriz A. Por exemplo, seja C a matriz obtida de A (abaixo) trocando-se a primeira coluna de A pela segunda coluna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa operação pode ser vista como uma pós-multiplicação da matriz A pela matriz E_{12} abaixo, i.e. $C = AE_{12}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad com \quad E_{12} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.3 Operação elementar $R_{ii}(\lambda)$: multiplicar linha/coluna por um escalar

Essa operação consiste em multiplicar uma linha i (coluna j) de uma matriz A por um escalar λ. Por exemplo, seja B a matriz obtida de A (abaixo) multiplicando-se a primeira linha de A por 5 e C a matriz obtida de A multiplicando-se a terceira coluna de A por 10:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 4 & 3 & 20 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Essas operações para obtenção de B e C podem ser vistas, respectivamente, como uma pré-multiplicação da matriz A pela matriz $R_{33}(10)$ e como uma pós-multiplicação de A por $R_{11}(5)$ abaixo:

$$\begin{aligned} R_{11}(5) \quad &= \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ R_{33}(10) \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz $R_{ii}(\lambda)$ é obtida a partir da matriz identidade I (com mesma ordem de A), trocando-se o i-ésimo elemento da diagonal de I por λ.

Definição 21 *Uma matriz B é **equivalente** a uma matriz A quando B puder ser obtida de A por uma seqüência finita de operações com matrizes elementares. B será **equivalente por coluna** a A se existir uma matriz Q tal que $B = AQ$; e B será **equivalente por linha** a A se existir uma matriz P tal que $B = PA$.*

Da definição acima, podemos verificar que uma matriz B é equivalente por linha e coluna a uma matriz A, se existirem matrizes P e Q tais que $B = PAQ$. Se existir uma matriz P tal que $B = P'AP$, diremos que B é **congruente** a A.

1.5 Exercícios

1. Mostre que:

   (a) A transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna e vice-versa;

   (b) O *traço* da transposta de uma matriz A_n é igual ao traço de A_n, i.e.

   $$tr(A') = tr(A).$$

2. Mostre que a matriz transposta de uma matriz particionada $A = (X\ Y)$, com X e Y submatrizes de A, é dada por:

   $$A' = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

3. Particione de dois modos distintos a matriz A abaixo e verifique a validade do exercício anterior para cada particionamento.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Mostre e dê exemplos das propriedades abaixo:

   (a) $(A + B)' = A' + B'$, com A e B matrizes de mesma ordem.

   (b) $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$, com A e B matrizes quadradas de mesma ordem.

5. Mostre com um contra-exemplo que a operação de subtração não é comutativa.

6. Demonstre as seguintes propriedades do produto por escalar:

   (a) $1 * A_{n\times m} = A_{n\times m}$.

(b) $(-1) * A_{n\times m} = -A_{n\times m}$.

(c) $0 * A_{n\times m} = 0_{n\times m}$.

(d) $\alpha * 0_{n\times m} = 0_{n\times m}$.

(e) $\alpha * (A_{n\times m} + B_{n\times m}) = \alpha * A_{n\times m} + \alpha * B_{n\times m}$.

(f) $(\alpha + \beta) * A_{n\times m} = \alpha * A_{n\times m} + \beta * A_{n\times m}$.

(g) $\alpha * (\beta * A_{n\times m}) = (\alpha * \beta) * A_{n\times m}$.

7. Dada as matrizes $A_{n\times m}$ e $B_{p\times q}$, que condições devem existir para que existam os produtos AB e BA?

8. Seja $A_{n\times m}$. Que é necessário ocorrer para que A^2 exista?

9. Caso existam, determine os produto AB e BA das matrizes abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Mostre, e forneça um exemplo, que:

(a) Um vetor linha pós-multiplicado por um vetor coluna é um escalar.

(b) Um vetor coluna pós-multiplicado por um vetor linha é uma matriz.

(c) Uma matriz pós-multiplicada por um vetor coluna é um vetor coluna.

(d) Um vetor linha pós-multiplicado por uma matriz é um vetor linha.

11. Existe alguma diferença entre a matriz nula $0_{1\times 2}$ e a matriz nula resultante do produto dessa matriz pela matriz A abaixo? Se sim, qual?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

12. O que podemos observar em um produto de uma matriz diagonal D_n por uma matriz $A_{n\times m}$? E se a matriz diagonal for uma matriz identidade de ordem n? Forneça um exemplo para cada caso.

13. Demonstre as propriedades **??** e **??**.

14. Dada as matrizes $A_{n\times m}$ e $B_{m\times q}$ e um real α, mostre que $(\alpha A)B = \alpha(AB)$.

15. Mostre que $A_{n\times m} I_m = I_n A_{n\times m} = A_{n\times m}$

16. Dada duas matrizes A e B conformáveis para o produto, se $AB = 0$, podemos afirmar que $A = 0$ ou $B = 0$? Teste para as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

17. Dada as matrizes A, B e C conformáveis para o produto. Se $AB = AC$ ou $BA = CA$, podemos afirmar que $B = C$? Teste para as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Dada duas matrizes A e B conformáveis para o produto, prove que $(AB)' = B'A'$.

19. Seja A_n e B_n duas matrizes quadradas de ordem n. Mostre que $tr(AB) = tr(BA)$.

20. Se A e B comutam, então $A * A - B * B = (A - B)(A + B)$?

21. Dizemos que duas matrizes A e B são **anticomutativas** quando $AB = -BA$. Mostre que se A e B são anticomutativas então $(A+B)*(A+B) = A*A+B*B$.

22. Sejam A e B duas matrizes simétricas. Mostre que

    (a) A' é simétrica.

    (b) $A * A$ é simétrica.

    (c) Se A e B comutam, então AB é simétrica.

23. Dadas seis matrizes cujas dimensões são dadas na tabela abaixo:

matriz	dimensão
A1	30×35
A2	35×15
A3	15×5
A4	5×10
A5	10×20
A6	20×25

    (a) Encontre o menor número de operações escalares necessário para calcular o produto $A1 * A2 * A3 * A4 * A5 * A6$.

    (b) De quantos modos podemos realizar o produto dessas matrizes nessa mesma ordem?

24. Dê exemplos de matrizes diagonais de ordem 2 que sejam involutivas.

25. Mostre por indução matemática que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Seja J a matriz abaixo, mostre que $J^p = 2^p J$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Mostre por indução matemática que:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} cos(n\theta) & sen(n\theta) \\ -sen(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

28. Encontre uma forma eficiente de calcular A^n realizando o menor número de operações escalares possível.

29. Seja P_n é uma matriz idempotente e I_n uma matriz identidade de ordem n. Prove que a matriz $I - P$ é idempotente.

30. Prove que $T_n + T_n'$ é simétrica. O que podemos dizer de $T - T'$?

31. Prove que se o produto de duas matrizes simétricas é simétrico, então as matrizes comutam na multiplicação.

32. Prove que se $X'X = X$, então $X = X' = X^2$.

33. Explique por que $X'XGX'X = X'X$ implica $XGX'X = X$.

34. Prove que o produto de matrizes ortogonais é ortogonal.

35. A matriz de Helmert de ordem n é uma matriz que tem $[n^{-\frac{1}{2}} 1_n']$ como primeira linha; $((n-1)n)^{-\frac{1}{2}}[1_{n-1}' | -(n-1)]$ como última linha; e as demais linhas, para $i = 1, ..., n-2$, são dadas por $(i(i+1))^{-\frac{1}{2}}[1_i' | -i | 0_{n-i-1}]$, ou seja:

$$H_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{1*2}} & \frac{-1}{\sqrt{1*2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2*3}} & \frac{1}{\sqrt{2*3}} & \frac{-2}{\sqrt{2*3}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)*n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)*n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)*n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)*n}} & \cdots & \frac{-(n-1)}{\sqrt{(n-1)*n}} \end{pmatrix}$$

Forneça H_2, H_3 e H_4. Mostre que a matriz de Helmert é ortogonal.

36. A matriz de Givens $G_{rs} = G_{sr}$ de ordem n é uma matriz obtida da matriz identidade, redefinindo-se apenas os quatro elementos $g_{rr} = g_{ss} = cos\theta$ e $-g_{rs} = g_{sr} = sen\theta$. Forneça todas as matrizes de Givens de ordem 2 e 3 e mostre que esse tipo de matriz é ortogonal.

37. A matriz de Householder H de ordem n é uma matriz da forma $H = I - 2hh'$, com $h'h = 1$, h sendo um vetor coluna não nulo. Mostre que esse tipo de matriz é ortogonal e simétrica.

Capítulo 2

Determinante

O conceito de determinante está associado à uma medida (um valor escalar real), ou característica, de uma matriz quadrada. Dizemos que uma matriz quadrada A é **singular** se seu determinante for nulo e, caso contrário, A é **não singular**. Essa medida tem importância prática na resolução de sistemas de equações lineares. Neste capítulo vamos descobrir como se calcula o determinante de uma matriz e estudar algumas propriedades dos mesmos. Inicialmente, vamos introduzir o conceito de ordem de uma permutação.

2.1 Ordem de uma permutação

Uma permutação σ dos números $\{1, 2, 3, 4\}$ pode ser $\sigma = \{3142\}$. Se percorrermos essa permutação da esquerda para a direita, observamos que existem dois números menores que o 3 à sua direita. Nesse caso, dizemos que houve inversão do 3 em relação ao 1 e em relação ao 2. Já em relação ao número 1, não existe nenhuma inversão com nenhum outro número à sua direita. Quanto ao número 4, existe uma inversão em relação ao 2. Finalmente, quanto ao número 2, como não existe nenhum número à sua direita, não existe inversão associada a ele. Observe que no total temos $2 + 0 + 1 + 0 = 3$ inversões nessa permutação. Quando o número de inversões em uma permutação for um número par, diremos que a mesma é uma **permutação de ordem par**. Caso contrário, a mesma será de **ordem ímpar**.

Uma aplicação de permutação com elementos de uma matriz $A_n = (a_{ij})$, $\forall\ (i, j)$, é determinar o número de modos de escolhermos n elementos de A de forma que entre eles apareça exatamente um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna. Esse total é conhecido e igual a $n!$. Uma maneira de ver isso é fixar os índices das linhas de 1 a n dos elementos da matriz e calcular todas as permutações σ de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Ou seja, se $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, então cada escolha do tipo $(a_{1,\sigma_1}, a_{2,\sigma_2}, \cdots, a_{n,\sigma_n})$ garante a condição de que apenas um elemento de cada linha e de cada coluna será escolhido por vez em cada permutação. Observe que o mesmo poderia ser feito fixando-se o índice da coluna de cada elemento de A e permutando-se os índices das linhas, i.e. cada escolha seria do tipo $(a_{\sigma_1,1}, a_{\sigma_2,2}, \cdots, a_{\sigma_n,n})$. Por exemplo, para uma matriz de ordem 2, as possíveis escolhas são (a_{11}, a_{22}) e (a_{12}, a_{21}), onde cada uma corresponde a uma permutação σ de $\{1, 2\}$ referente a uma escolha do tipo $(a_{1,\sigma_1}, a_{2,\sigma_2})$. Note que na permutação (1,2) não há inversões; enquanto que em (2,1) há uma inversão.

Definição 22 *Dada uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, definimos* ***determinante*** *de A, denotado por $|A|$ ou $det(A)$, como sendo o valor:*

$$|A| = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} * a_{2,\sigma_2} * \cdots * a_{n,\sigma_n} = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{\sigma_1,1} * a_{\sigma_2,2} * \cdots * a_{\sigma_n,n},$$

para toda permutação σ de $\{1, 2, \cdots, n\}$, onde k_σ é o número de inversões de σ.

Usando essa definição, é fácil ver que o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^0 1 * 6 + (-1)^1 2 * 5 = -4.$$

Quanto ao cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, temos um total de 3! permutações de $\{1, 2, 3\}$. Elas são fornecidas na tabela seguinte com seus respectivos números de inversões:

Permutação (σ)	Inversões (k_σ)
123	0
132	1
213	1
231	2
312	2
321	3

Logo o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} a_{3,\sigma_3} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1*3*1 - 1*2*1 - 2*4*1 + 2*2*0 + 1*4*1 - 1*3*0 = -3.$$

Existe uma maneira que facilita o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2. Note na figura abaixo que o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para o cálculo de determinante de uma matriz de ordem 3, aplicamos a regra de Sarrus abaixo que consiste em repetir as duas primeiras colunas da matriz logo após a terceira coluna (ver figura abaixo) e tomar os produtos dos elementos da matriz no sentido da diagonal principal com sinais positivos e os produtos no sentido da diagonal secundária com sinais negativos; depois, soma-se os resultados obtidos:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Agora vejamos algumas propriedades envolvendo inversões de uma permutação.

Propriedade 7 *Uma permutação muda de ordem quando dois elementos dessa permutação trocam de posição.*

Prova: Seja $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ uma permutação qualquer. Seja $\sigma' = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_j, \sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_i, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ a permutação obtida de σ trocando-se de posição σ_i com σ_j. Seja k o número de inversões de σ. Observe que em σ' o número de inversões referentes aos elementos das posições de 1 a $i-1$ e aos elementos das posições de $j+1$ a n não se alteram. Considerando que existem r_1 elementos menores que σ_i e r_2 elementos maiores que σ_i, no intervalo entre os elementos das posições i a j, e que dentre esses elementos existem s_1 elementos menores que σ_j e s_2 elementos maiores que σ_j, com $r_1 + r_2 = s_1 + s_2$, então quando

σ_i passa a ocupar a posição de σ_j, o número de inversões nesse intervalo aumenta de r_2 e diminui de r_1 (referentes a σ_i) e aumenta de s_1 e diminui de s_2 (referentes a σ_j); e em relação a σ_i e σ_j, aumenta ou diminui de uma unidade, dependendo de quem for o maior dos dois. Logo, o número de inversões k' de σ', com relação ao de σ, é $k' = k + (-r_1 + r_2) + (s_1 - s_2) \pm 1 = k + (r_2 - s_2) + (s_1 - r_1) \pm 1$. Como $r_1 + r_2 = s_1 + s_2$, então $r_2 - s_2 = s_1 - r_1$; logo $k' = k + 2(s_1 - r_1) \pm 1$. Portanto, $(-1)^{k'} = (-1)^k(\pm 1)$, ou seja, há uma mudança de ordem. $\square$

Exemplo: Em $\sigma = (5, 3, 4, 1, 2)$ temos oito inversões: quatro em relação ao 5, duas em relação ao 3, duas em relação ao 4, zero em relação ao 1 e zero em relação ao 2. Trocando de posição o 5 com o 2, obtemos uma nova permutação $\sigma' = (2, 3, 4, 1, 5)$. O número de inversões de σ' é três: uma em relação ao 2, uma em relação ao 3, uma em relação ao 4, zero em relação ao 1 e zero em relação ao 5. Percebemos que σ é de ordem par, enquanto σ' é de ordem ímpar. Veja que em σ, no intervalo entre o 5 e o 2, existem $r_1 = 3$ elementos menores que 5 e $r_2 = 0$ elementos maiores que 5 e também $s_1 = 1$ elementos menores que 2 e $s_2 = 2$ elementos maiores que 2; logo verificamos que o número de inversões k' de σ' em função do de inversões k de σ é: $k' = k + 2(s_1 - r_1) - 1 = 8 + 2(1 - 3) - 1 = 3$.

Propriedade 8 *Seja* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ *uma permutação de* $\{1, 2, \cdots, n\}$ *e* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ *uma permutação de* $\{n+1, n+2, \cdots, n+m\}$*. Seja* k_σ *o número de inversões de* σ *e* k_β *o número de inversões de* β*. Então:*

1. *Toda permutação composta do tipo* $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$*, para todo par* (σ, β)*, tem* $k_\sigma + k_\beta$ *inversões.*

2. *Toda permutação composta do tipo* $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$*, para todo par* (β, σ)*, tem* $k_\sigma + k_\beta + mn$ *inversões.*

Prova: A do primeiro ítem é evidente, pois não ocorre inversões entre os elementos σ_i e β_j, para todo par (i, j). Quanto ao segundo ítem, além das inversões de σ e de β, como os m elementos de β são maiores que os n elementos de σ, teremos mn inversões a mais. Logo o resultado segue. $\square$

2.2 Menor e Cofator

A partir da definição **??** podemos observar algumas particularidades. Na expressão do determinante de uma matriz A_n:

$$|A| = \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} * a_{2,\sigma_2} * \cdots * a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma)$$

observamos que cada elemento a_{ij} aparece $(n-1)!$ vezes e que se colocarmos os elementos de uma linha i em evidência, os coeficientes que multiplicam cada elemento a_{ij}, $j = 1, \cdots, n$, estão relacionados a determinantes de menor ordem de submatrizes de A. Por exemplo, para uma matriz quadrada A de ordem 3:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(+1)(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(+1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}(+1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(+1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Perceba que na expressão acima aparecem três determinantes de menor ordem (de matrizes de ordem 2). Cada coeficiente associado ao elemento a_{ij} é o determinante da matriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna j de A com um sinal (+) ou (-). Isso nos permite introduzir as seguintes definições:

Definição 23 *Chama-se **menor** do elemento a_{ij} de uma matriz A, denotado por M_{ij}, o determinante da submatriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna j de A.*

Definição 24 *Chama-se **cofator** do elemento a_{ij} de uma matriz A, denotado por c_{ij}, o valor*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

O determinante de uma matriz A_n pode ser definido em função dos (ou expansão por) cofatores dos elementos de uma linha i ou coluna j da matriz.

Definição 25 *O **desenvolvimento de Laplace** para o cálculo de determinante é dado por:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}, \ \forall i. \quad ou \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}, \ \forall j.$$

Calcular o determinante de uma matriz A_n usando expansão por cofatores é interessante quando a matriz tem uma linha ou coluna com muitos elementos nulos como no exemplo que segue.

Exemplo:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{4} a_{i2}c_{i2} = a_{22}c_{22} \\ &= 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 3(446) = 1338. \end{aligned}$$

Uma propriedade envolvendo cofatores é que multiplicando os elementos de uma linha (ou coluna) pelos cofatores correspondentes de outra linha (coluna), e somando esses produtos, tem-se como resultado o valor zero. Ou seja:

Propriedade 9

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

Observação: a demonstração deste resultado fica como desafio para o leitor.

2.3 Matriz adjunta

Definição 26 *Matriz* ***adjunta*** *é a matriz transposta da matriz dos cofatores, denotada por* $adj(A)$ *ou* A^*. *Seja a matriz* $A_n = (a_{ij})$ *e os cofatores* c_{ij} *associados aos elementos* a_{ij} *de* A*, então:*

$$A^* = adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo: seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$A^* = adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -9 & -2 & 16 \\ -12 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Propriedade 10 *O produto de uma matriz A por sua adjunta é uma matriz diagonal cujos elementos são todos iguais ao determinante de A:*

$$A_n A_n^* = A_n^* A_n = |A| I_n.$$

Prova: Seja $D = (d_{ij})$ a matriz resultante do produto em questão. Veja que, por definição de determinante e usando a propriedade **??**:

$$\begin{cases} d_{ij} = 0, & i \neq j \\ d_{ij} = |A|, & i = j \end{cases}$$

logo o resultado segue. □

Exemplo: seja A a matriz do exemplo anterior e dado que $|A| = -15$, então verificamos que:

$$AA^* = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -10 \\ -9 & -2 & 16 \\ -12 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

2.4 Propriedades de determinantes

Propriedade 11 *Os determinantes de uma matriz quadrada A e de sua transposta são iguais:*

$$det(A) = det(A').$$

Prova: Seja $k_\sigma = invers(\sigma)$ o número de inversões de uma permutação σ. Pela definição **??**,

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_\sigma (-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} * a_{2,\sigma_2} * \cdots * a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma) \\ &= \sum_\sigma (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma_1,1} * a_{\sigma_2,2} * \cdots * a_{\sigma_n,n} \\ &= \sum_\sigma (-1)^{k_\sigma} a'_{1,\sigma_1} * a'_{2,\sigma_2} * \cdots * a'_{n,\sigma_n} = det(A'). \end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 * 3 - 4 * 2 = -5. \\
|A'| &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 * 3 - 2 * 4 = -5 = |A|.
\end{aligned}
$$

Propriedade 12 *O determinante de uma matriz quadrada A que possui uma linha (ou coluna) de elementos todos nulos é zero.*

Prova: Pela definição **??**, cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e de cada coluna, logo todos os termos da soma são nulos e o determinante é zero. □

Exemplo:

$$
|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 * 3 - 4 * 0 = 0.
$$

Propriedade 13 *O determinante de uma matriz quadrada A que possui duas linhas (ou colunas) iguais é zero.*

Prova: Suponha que as linhas i e j de uma matriz A_n sejam iguais. Seja B a matriz obtida pela troca das linhas i e j de A. Da definição **??**, temos

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{i,\sigma_i} \cdots a_{j,\sigma_j} \cdots a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma) \\
det(B) &= \sum_{\sigma'} (-1)^{k'_\sigma} b_{1,\sigma'_1} b_{2,\sigma'_2} \cdots b_{i,\sigma'_i} \cdots b_{j,\sigma'_j} \cdots b_{n,\sigma'_n}, \quad k'_\sigma = invers(\sigma')
\end{aligned}
$$

como $a_{i,k} = b_{j,k}$, para todo $k = 1, \cdots, n$, se tomarmos σ' tal que $\sigma'_j = \sigma_i$ e $\sigma'_i = \sigma_j$, com $\sigma'_f = \sigma_f$ para todo $f \neq i, j$, então

$$
\begin{aligned}
det(B) &= \sum_{\sigma'} (-1)^{k'_\sigma} b_{1,\sigma'_1} b_{2,\sigma'_2} \cdots b_{i,\sigma'_i} \cdots b_{j,\sigma'_j} \cdots b_{n,\sigma'_n} \\
&= \sum_{\sigma'} (-1)^{k'_\sigma} a_{1,\sigma'_1} a_{2,\sigma'_2} \cdots a_{i,\sigma_j} \cdots a_{j,\sigma_i} \cdots a_{n,\sigma'_n} \\
&= \sum_{\sigma'} (-1)^{k'_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{i,\sigma_j} \cdots a_{i,\sigma_i} \cdots a_{n,\sigma_n},
\end{aligned}
$$

com $\sigma' = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_j, \sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_i, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$; ou seja, σ' difere de σ apenas pela troca de σ_i com σ_j. Pela propriedade **??**, cada termo desse último somatório corresponde a um termo do somatório de $det(A)$ com o sinal trocado. Logo $|B| = -|A|$. Mas $B = A$, então vale que $|B| = |A|$; isso implica que $|B| = |A| = 0$. □

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1*3*1+2*2*1+1*4*2-1*3*1-2*2*1-1*4*2 = 0.$$

Propriedade 14 *O determinante de uma matriz B obtida de uma matriz quadrada A pela troca de duas linhas (ou colunas) é igual ao determinante de A com sinal trocado.*

$$|B| = -|A|.$$

Prova: Veja a demonstração da propriedade **??**.

Exemplo:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1*3-4*2 = -5. \\ |B| &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4*2-1*3 = 5 = -|A|. \end{aligned}$$

Propriedade 15 *O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) A_n é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.*

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Prova: Faremos a prova para uma matriz triangular inferior. O outro caso é análogo. Seja A uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$, $\forall\, i > j$. Podemos escrever $|A|$, a partir da definição **??**, como

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma) \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + \sum_{\sigma \neq (1,2,\cdots,n)} (-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n}. \end{aligned}$$

como em cada termo no somatório da última linha acima sempre existe a_{j,σ_j} com $j > \sigma_j$ que, por ser triangular inferior, é igual a zero; então o resultado segue. □

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1*3*1+2*2*0+1*0*0-0*3*1-0*2*1-1*0*2 = 1*3*1 = 3.$$

Propriedade 16 *O determinante de uma matriz B obtida de uma matriz quadrada A multiplicando-se a linha (ou coluna) i por um $\lambda \in \mathbb{R}$ é igual ao determinante de A multiplicado por λ.*

$$|B| = \lambda|A|.$$

Prova:

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{i,\sigma_i} \cdots a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma) \\ det(B) &= \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots (\lambda a_{i,\sigma_i}) \cdots a_{n,\sigma_n} \\ &= \lambda \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{i,\sigma_i} \cdots a_{n,\sigma_n} \\ &= \lambda|A|. \end{aligned}$$

Exemplo: multiplicando a segunda linha de A por 2.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1*3 - 4*2 = -5. \\ |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2*4 & 2*3 \end{vmatrix} = 1*(3*2) - (2*4)*2 = 2(1*3 - 4*2) = 2|A|. \end{aligned}$$

Propriedade 17 *O determinante de uma matriz B obtida de uma matriz quadrada A somando-se à linha (ou coluna) i de A um múltiplo $\lambda \in \mathbb{R}$ de uma linha (ou coluna) j é igual ao próprio determinante de A.*

$$|B| = |A|.$$

Prova: Aplicando a definição **??** e a propriedade **??**, o resultado segue de imediato. Uma demonstração mais elegante é a que segue. Considere que cada elemento da linha i e coluna k de B seja igual a $b_{ik} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$, ou seja, a linha i de B é uma combinação linear das linhas i e j de A. Tomando

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{i,\sigma_i} \cdots a_{j,\sigma_j} \cdots a_{n,\sigma_n}, \quad k_\sigma = invers(\sigma); \\ det(B) &= \sum_{\beta}(-1)^{k_\beta} b_{1,\beta_1} b_{2,\beta_2} \cdots b_{i,\beta_i} \cdots b_{j,\beta_j} \cdots b_{n,\beta_n}, \quad k_\beta = invers(\beta); \end{aligned}$$

e levando-se em conta que $b_{ik} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$, para $k = 1, \cdots, n$, e $b_{fk} = a_{fk}$, para as demais linhas $f \neq i$, temos:

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{\beta}(-1)^{k_\beta} a_{1,\beta_1} a_{2,\beta_2} \cdots (a_{i,\beta_i} + \lambda a_{j,\beta_i}) \cdots a_{j,\beta_j} \cdots a_{n,\beta_n} \\ &= |A| + \lambda \sum_{\beta}(-1)^{k_\beta} a_{1,\beta_1} a_{2,\beta_2} \cdots a_{j,\beta_i} \cdots a_{j,\beta_j} \cdots a_{n,\beta_n}. \end{aligned}$$

Agora definamos uma matriz $\hat{B}$ cujas linhas i e j sejam ambas iguais à linha j de A; e faça as demais linhas de $\hat{B}$ (diferentes de i e j) corresponderem às demais linhas de A. O determinante de $\hat{B}$ pode ser dado por:

$$det(\hat{B}) = \sum_{\beta}(-1)^{k_\beta}\hat{b}_{1,\beta_1}\hat{b}_{2,\beta_2}\cdots\hat{b}_{i,\beta_i}\cdots\hat{b}_{j,\beta_j}\cdots\hat{b}_{n,\beta_n}, \quad k_\beta = invers(\beta).$$

Como já foi provado anteriormente, esse determinante é nulo por se tratar de uma matriz com duas linhas iguais conforme a propriedade **??**. Como conseqüência, observando a relação dos elementos de $\hat{B}$ e A nessa última igualdade, temos que:

$$det(\hat{B}) = \sum_{\beta}(-1)^{k_\beta}a_{1,\beta_1}a_{2,\beta_2}\cdots a_{j,\beta_i}\cdots a_{j,\beta_j}\cdots a_{n,\beta_n}, \quad k_\beta = invers(\beta).$$

Então, $det(B) = |A| + \lambda\ det(\hat{B}) = |A| + \lambda 0 = |A|$. □

Exemplo: multiplicando a segunda linha de A por 2 e somando o resultado à primeira.

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1*3-4*2=-5. \\
|B| &= \begin{vmatrix} 1+2*4 & 2+2*3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (1+2*4)*3-4(2+2*3) = 1*3+2(4*3)-4*2-2(4*3) \\
&= [1*3-4*2]+2[(4*3)-(4*3)] \\
&= |A|+2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = |A|+2*0=|A|.
\end{aligned}$$

Propriedade 18 *O determinante da matriz quadrada M_{r+m} abaixo definido pela partição de M em quatro submatrizes A_r, B_m, $C_{r\times m}$ e a matriz nula $0_{m\times r}$ é:*

$$|M| = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

Prova: Note que $m_{i,\sigma_i} = 0$ para $i \geq r+1$ e $\sigma_i \leq r$. Então em

$$|M| = \sum_{\sigma}(-1)^{k_\sigma}m_{1,\sigma_1}m_{2,\sigma_2}\cdots m_{r,\sigma_r}m_{r+1,\sigma_{r+1}}\cdots m_{r+m,\sigma_{r+m}}, \quad k_\sigma = invers(\sigma),$$

sobram apenas os termos do somatório para os quais há permutações σ^A do intervalo $\{1,\cdots,r\}$ seguidas de permutações σ^B do intervalo $\{r+1,\cdots,r+m\}$. Logo, usando a propriedade **??**,

$$
\begin{aligned}
|M| &= \sum_{\sigma^A,\sigma^B} (-1)^{k_A+k_B} m_{1,\sigma_1^A} m_{2,\sigma_2^A} \cdots m_{r,\sigma_r^A} m_{r+1,\sigma_{r+1}^B} \cdots m_{r+m,\sigma_{r+m}^B} \\
&= (\sum_{\sigma^A} (-1)^{k_A} m_{1,\sigma_1^A} m_{2,\sigma_2^A} \cdots m_{r,\sigma_r^B})(\sum_{\sigma^B} (-1)^{k_B} m_{r+1,\sigma_{r+1}^B} \cdots m_{r+m,\sigma_{r+m}^B}) \\
&= |A||B|.
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -37. \\
|M| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 185 = (-5)(-37) = |A||B|.
\end{aligned}
$$

Propriedade 19 *O determinante da matriz quadrada M_n triangular em blocos (inferior ou superior) definido pela partição de M em submatrizes quadradas $A^i_{n_i}$, $i = 1, \cdots, p$, com $\sum_i n_i = n$, é:*

$$
|M| = \begin{vmatrix} A^1 & & & \\ & A^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} |A^i|.
$$

Prova: Fica como exercício.

Propriedade 20 *O determinante da matriz quadrada M_{r+m} abaixo definido pela partição de M em quatro submatrizes A_m, B_r, $C_{r\times m}$ e a matriz nula $0_{m\times r}$ é:*

$$
|M| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mr}|A||B|.
$$

Prova: Note que $m_{\sigma_i,i} = 0$ para $i \le r$ e $\sigma_i \le m$. Então em

$$
|M| = \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} m_{\sigma_1,1} m_{\sigma_2,2} \cdots m_{\sigma_r,r} m_{\sigma_{r+1},r+1} \cdots m_{\sigma_{r+m},r+m}, \quad k_\sigma = invers(\sigma),
$$

sobram apenas os termos do somatório para os quais há permutações σ^B do intervalo $\{m+1, \cdots, m+r\}$ seguidas de permutações σ^A do intervalo $\{1, \cdots, m\}$. Logo, usando a propriedade **??**,

$$
\begin{aligned}
|M| &= \sum_{\sigma^A,\sigma^B} (-1)^{mr+k_A+k_B} m_{\sigma_{m+1}^B,1} m_{\sigma_{m+2}^B,2} \cdots m_{\sigma_{m+r}^B,r} m_{\sigma_1^A,r+1} m_{\sigma_2^A,r+2} \cdots m_{\sigma_m^A,r+m} \\
&= (-1)^{mr} (\sum_{\sigma^B} (-1)^{k_B} m_{\sigma_{m+1}^B,1} \cdots m_{\sigma_{m+r}^B,r})(\sum_{\sigma^A} (-1)^{k_A} m_{\sigma_1^A,r+1} \cdots m_{\sigma_m^A,r+m}) \\
&= (-1)^{mr}|A||B|.
\end{aligned}
$$

Exemplo: Nesse exemplo considere B uma matriz quadrada de ordem $n_B = 1$ e A, de ordem $n_A = 2$.

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5. \\
|M| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 = (5)(-3)(-1)^{2*1} = |B||A|(-1)^{n_A n_B}.
\end{aligned}$$

Uma conseqüência da propriedade **??** é que:

$$\begin{vmatrix} 0_n & A_n \\ -I_n & C_n \end{vmatrix} = |-I||A|(-1)^{n*n} = (-1)^n|A|(-1)^{n*n} = |A|(-1)^{n(n+1)} = |A|.$$

Propriedade 21 *O determinante do produto de duas matrizes A e B quadradas de mesma ordem, $|AB|$, é igual ao produto dos determinantes de A e de B:*

$$|AB| = |A||B|.$$

Prova: Sejam as matrizes A_n, B_n, 0_n e I_n. Então, efetuando o produto das matrizes particionadas abaixo e aplicando a propriedade **??**,

$$\left| \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{vmatrix} = |AB|.$$

Observe que o determinante mais a esquerda das igualdades acima é o determinante de uma combinação linear das linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix}.$$

Logo, aplicando as propriedades **??** e **??**, vem que:

$$\left| \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = |A||B|;$$

por conseqüente, $|AB| = |A||B|$. □

Exemplo:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -37. \\
|M| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 19 & 21 \\ 31 & 44 \end{vmatrix} = 185 = (-5)(-37) = |A||B|.
\end{aligned}$$

2.5 Reduzindo a ordem de um determinante

As operações elementares, quando empregadas com a expansão de Laplace para determinantes, podem facilitar o cálculo do mesmo. Abaixo apresentamos um procedimento [?] para reduzir o cálculo de um determinante de ordem n de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ ao cálculo de um determinante de ordem $n - 1$.

Passos para a redução da ordem de um determinante

1. Escolha um elemento $a_{ij} = 1$ ou, na falta deste, um $a_{ij} \neq 0$ como pivot.
2. Aplique operações elementares para reduzir a zero todos os demais elementos da linha (coluna) contendo a_{ij}.
3. Expanda o determinante da matriz (usando cofatores) segundo a linha (coluna) cujo único elemento diferente de zero é o pivot a_{ij}.

Quando o pivot a ser escolhido for o elemento da posição (1,1) do determinante, e o mesmo for igual a um (isso pode ser obtido por operações elementares ou por transposição), temos a conhecida regra de Chió.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\left| P_{21}(-3) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -13 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-13)1 - (-7)4 = 15.$$

2.6 Exercícios

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}$$

2. Encontre uma expressão geral para $|aI_n + bJ_n|$, com I_n e J_n definidas como no capítulo anterior.

3. Calcule o determinante de

$$\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix}$$

4. Será verdade que $|A \pm B| = |A| \pm |B|$?

5. Encontre uma expressão para o determinante da uma matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dica: Inicialmente adicione à uma dada linha (exceto à primeira), sua anterior multiplicada por $-x_1$. O determinante procurado é dado por:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

6. Seja A uma matriz anti-simétrica. Calcule $|A|$ e mostre que

$$|I + A| = 1 + \sum_{i<j} a_{ij}^2 + |A|.$$

7. Encontre o valor de x nas expressões abaixo:

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

8. Seja D uma matriz diagonal, com $D = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e a matriz J_n. Prove que

$$|J + D| = (\prod_{i=1}^{n} x_i)(1 + \sum_{i=1}^{n} 1/x_i).$$

9. Prove que para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\lambda I + \mathbf{1}x'| = \lambda^n + \lambda(x'\mathbf{1}).$$

10. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Dica: multiplique as colunas 1, 2 e 3 da matriz do lado esquerdo da igualdade por a, b e c respectivamente. Veja o que se obtém e depois use propriedades dos determinantes para chegar ao resultado desejado.

11. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Capítulo 3

Inversa de matriz

Neste capítulo apresentamos a operação *inversa* da multiplicação de matrizes. Guarde logo em mente que, por não existir a operação de divisão de matrizes, a **inversa** não funciona como a operação de divisão algébrica clássica que conhecemos para, por exemplo, os números reais.

3.1 Matriz inversa

Definição 27 *Inversa à esquerda.*

*Diremos que uma matriz $A_{m\times n}$ tem **inversa à esquerda**, denotada por L (uma matriz de ordem $n \times m$), se:*

$$LA = I_n.$$

Exemplo [?]: seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, observamos que $L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ é uma inversa à esquerda de A, pois:

$$LA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Observe que uma condição necessária para a existência de matriz inversa à esquerda de uma matriz $A_{m\times n}$ é que o número de linhas de A seja maior ou igual ao de colunas.

Propriedade 22 *Se $n > m$, então a matriz $A_{m\times n}$ não tem inversa à esquerda.*

Prova: Se $n > m$, podemos particionar a matriz $A_{m\times n}$ em $A = [X_m \; Y_{m\,\times\,n-m}]$, com X quadrada. Supondo que A tenha inversa à esquerda, digamos $L_{n\times m}$, então devemos ter $LA = I_n$. Particionando L como $L = \begin{bmatrix} M_m \\ N_{n-m\,\times\,m} \end{bmatrix}$, com M quadrada, temos:

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} [X \; Y] = \begin{bmatrix} MX & MY \\ NX & NY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

portanto $MX = I$, $NX = 0$ e $NY = I$. Como M e X são quadradas, $|MX| = |M||X| = |I| = 1$, logo $|M| \neq 0$ e $|X| \neq 0$. De $NY = I$, vem que $N \neq 0$. Logo, de $NX = 0$, vem que existe uma linha/coluna de X que é combinação linear das outras. Portanto seu determinante deveria ser nulo, $|X| = 0$, que é uma contradição. □

Definição 28 *Inversa à direita.*

*Uma matriz $A_{m\times n}$ tem **inversa à direita**, denotada por R (uma matriz de ordem $n \times m$), se:*

$$AR = I_m.$$

Exemplo [?]: seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, observamos que $R = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ é uma inversa à direita de A, pois:

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = I_2.$$

Uma condição necessária para a existência de matriz inversa à direita de uma matriz $A_{m\times n}$ é que o número de linhas de A seja menor ou igual ao de colunas.

Propriedade 23 *Se $n > m$, então a matriz $A_{m\times n}$ não tem inversa à direita.*

Prova: exercício.

Definição 29 *Matriz inversível.*

*Diremos que uma matriz $A_{m\times n}$ **é inversível**, ou **tem inversa**, se A tem inversa à direita e à esquerda simultaneamente.*

Da definição de matriz inversa, podemos concluir que:

Propriedade 24 *Propriedades da matriz inversível:*

1. *Toda matriz inversível é quadrada.*

2. *A inversa à esquerda e a inversa à direita de uma matriz inversível são iguais e denotadas por A^{-1}.*

Prova: O primeiro item é evidente pelas condições de existência das inversas à esquerda e à direita. Quanto ao segundo, sejam L e R as respectivas inversas à esquerda e à direita de uma matriz A quadrada. Então $LA = I$ e $I = AR$. Pós multiplicando a primeira igualdade por R e pré-multiplicando a segunda igualdade por L, vem que $LAR = R$ e $L = LAR$, logo $L = R$.

Exemplo [?]: sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, então:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = I_2.$$

enquanto

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = I_2.$$

3.1.1 Propriedades da inversa

No capítulo **??**, (propriedade **??**), vimos que a matriz adjunta A_n^* de uma dada matriz A_n é tal que $A_n A_n^* = A_n^* A_n = |A| I_n$. Logo $A_n^*/|A|$, quando $|A| \neq 0$, é uma inversa de A por definição e, mais ainda, mostraremos que ela é única.

Propriedade 25 *Propriedades da inversa A^{-1} de uma matriz não singular A.*

1. *$A^{-1} = A_n^*/|A|$ é única e não singular, com $|A^{-1}| = 1/|A|$.*
2. *$(A^{-1})^{-1} = A$, a inversa da inversa de A é ela própria.*
3. *A inversa da transposta é a transposta da inversa: $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.*
4. *Se a matriz A for simétrica, então o será A^{-1}: se $A = A'$ então $A^{-1} = (A^{-1})'$.*
5. *A inversa do produto AB de duas matrizes inversíveis A e B é o produto das inversas tomados na ordem reversa: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Prova: (1) Sejam por hipótese A e B duas inversas distintas de uma matriz C, i.e. $A \neq B$ e $AC = CA = I = BC = CB$. Veja que dessas igualdades, temos $ACB = IB = B$ e $A = AI = ACB$, logo $A = B = ACB$, contradizendo a hipótese que A e B são distintas; logo devemos ter $A = B$. Como $A^*/|A|$ satisfaz à definição de inversa, então por ser única ela é a inversa de A. Do fato que $AA^{-1} = I$ decorre que $|AA^{-1}| = 1 = |A||A^{-1}|$; logo, por A ser não singular, vem que A^{-1} também o é. (2) Seja L a inversa de A^{-1}. Logo $LA^{-1} = I$ e portanto pós-multiplicando ambos os lados da igualdade por A, temos $LA^{-1}A = IA$. Dessa última igualdade, usando o fato de que $A^{-1}A = I$, obtemos $LI = L = IA = A$. (3) Tomando a transposta dos dois lados de $A^{-1}A = I$, vem que

$A'(A^{-1})' = I$ e pré-multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $(A')^{-1}$, vem que $(A')^{-1}A'(A^{-1})' = (A')^{-1}I$; logo $(A^{-1})' = (A')^{-1}$. (4) Usando o item anterior e o fato de que $A = A'$, então de $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ vem que $(A^{-1})' = (A)^{-1}$. (5) Seja X a inversa de AB. Logo $X(AB) = I$. Pós multiplicando ambos os lados dessa igualdade por B^{-1}, caso exista, então $XABB^{-1} = IB^{-1} = B^{-1}$ e pós multiplicando agora ambos os lados dessa igualdade por A^{-1}, caso exista, vem que $XAA^{-1} = X = B^{-1}A^{-1}$.

Então podemos determinar a inversa de uma matriz A não singular através de sua adjunta. Por exemplo, seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad e \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0,$$

então

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Inversa de casos especiais de matrizes

Matriz diagonal

$$(Diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\})^{-1} = Diag\{1/d_1, 1/d_2, \cdots, 1/d_n\}, \; d_i \neq 0, \; \forall\, i.$$

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, então:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Matriz $E(v_k) = (e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, v_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$

A inversa da matriz $E(v_k)$ obtida da matriz identidade de ordem n substituindo-se o vetor coluna e_k por v_k é dada por:

$$E^{-1}(v_k) = (e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, y_k, e_{k+1}, \cdots, e_n),$$

onde o vetor coluna y_k é dado por:

$$y_k' = (-y_{1k}/y_{kk}, -y_{2k}/y_{kk}, \cdots, -y_{k-1,k}/y_{kk}, +1/y_{kk}, -y_{k+1,k}/y_{kk}, \cdots, -y_{nk}/y_{kk}).$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a/d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e/d & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz $A = aI_n + bJ_n$

Sejam I a matriz identidade e J a matriz com todos os elementos iguais a um. Então para $a \neq 0$ e $a + nb \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{a}(I_n - \frac{b}{a+nb}J_n).$$

Matriz ortogonal

Seja P ortogonal. Então, por definição, temos $PP' = P'P = I$. Logo $P' = P^{-1}$ pela definição de inversa.

3.1.3 Simplificações algébricas envolvendo matrizes não singulares

Algumas simplificações envolvendo matrizes só podem ser realizadas sob certas condições, como descrevemos abaixo.

1. $PK = QK \rightarrow P = Q$, somente se existe K^{-1}.

2. $R + RST = R(I + ST) = R(T^{-1} + S)T$, somente se existe T^{-1}.

3. $I + X + X^2 + \cdots X^{n-1} = (X^n - I)(X - I)^{-1}$, somente se existe $(X - I)^{-1}$. Pois $(I + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})(X - I) = X^n - I$.

4. $(I + M^{-1})^{-1} = M(M + I)^{-1}$.

3.1.4 Método de Gauss para obtenção da inversa

Seja A uma matriz equivalente por linhas à uma matriz B, ou seja $A = E_nE_{n-1}\cdots E_2E_1B$, com E_n, E_{n-1}, $\cdots$, E_2, E_1 sendo matrizes elementares de operações com linhas aplicadas à matriz B. Se essa transformação leva B na matriz identidade I, i.e. $I = E_nE_{n-1}\cdots E_2E_1B$, então a mesma transformação leva I em B^{-1}; ou seja, $B^{-1} = E_nE_{n-1}\cdots E_2E_1I$. Essa é a base do método de Gauss para a obtenção da inversa de uma matriz B que exemplificamos no diagrama a seguir.

$$\left(B \,\vdots\, I \right) \sim \left(E_1B \,\vdots\, E_1I \right) \sim \left(E_2E_1B \,\vdots\, E_2E_1I \right) \sim \cdots \sim$$

$$\left(E_nE_{n-1}\cdots E_2E_1B \,\vdots\, E_nE_{n-1}\cdots E_2E_1I \right) = \left(I \,\vdots\, B^{-1} \right).$$

No diagrama acima, cada operação com as linhas de B também é realizada com as linhas de I. Assim, o método funciona como se fizéssemos operações com as linhas da matriz particionada $A = \left(B \,\vdots\, I \right)$ até obtermos a matriz $\tilde{A} = \left(I \,\vdots\, B^{-1} \right)$ equivalente a A por linhas.

No exemplo seguinte usaremos a notação: (i) $L_i \leftarrow kL_i$ para indicar que a linha i da matriz deve ser substituída pela linha kL_i, com $k \neq 0$; $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ para indicar que a linha i deve ser substituída pela linha $L_i + kL_j$, com $k \neq 0$; $L_i \leftrightarrow L_j$ para indicar que as linhas i e j devem trocar de posição.

Exemplo: Cálculo da inversa de $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Para tanto, seja a matriz $A = \left(B \,\vdots\, I \right) = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Vamos realizar operações elementares com as linhas de A até obtermos $\tilde{A} = \left(I \,\vdots\, B^{-1} \right)$. Então:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 \end{array}\right), \quad logo \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Sistemas lineares: uma visão geométrica inicial

É interessante que o aluno compreenda o que seja um sistema linear a partir de uma visão geométrica do mesmo.

Inicialmente, lembre-se que em Geometria um **ponto** é um ente abstrato que não tem medidas físicas (massa, peso, volume, etc.), identificado apenas por sua localização (coordenada(s)) no *espaço* ao qual pertence. Por exemplo, no $\mathbb{R}^2$ (plano Euclidiano), um ponto é identificado por um par ordenado (abscissa, ordenada) nos eixos perpendiculares (x_1, x_2). No $\mathbb{R}^3$, um ponto é representado por três coordenadas (x_1, x_2, x_3) em relação aos eixos perpendiculares x_1, x_2 e x_3. Outra noção fundamental é a de **reta**, lugar geométrico, que é um conjunto infinito de pontos colineares (que se encontram sobre uma linha reta). Uma reta fica bem definida se conhecermos dois pontos distintos da mesma. No plano Euclidiano, definimos uma reta r como sendo o conjunto $r = \{(x_1, x_2) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = a_0\}$, com a_0, a_1, a_2 constantes conhecidas. Na figura **??** mostramos algumas posições relativas entre retas. Por exemplo, no item (i) temos uma reta que passa por dois pontos dados.

No item (ii) verificamos a intersecção de duas retas em um único ponto. Em linguagem analítica, saber se existe intersecção da reta $r = \{(x_1, x_2) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = a_0\}$, com a reta $s = \{(x_1, x_2) \mid b_1x_1 + b_2x_2 = b_0\}$, equivale a verificar se existe um ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ que satisfaça às duas equações dessas retas simultaneamente.

No item (iii) verificamos que as retas r e s não se interceptam, ou melhor, que elas são paralelas. Isso equivale a saber se existe um ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ que satisfaça às equações das retas $r = \{(x_1, x_2) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = a_0\}$ e da reta $s = \{(x_1, x_2) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = a_0 + c\}$ simultaneamente, com $c \neq 0$ sendo uma constante conhecida. Nesse caso é evidente que não é possível essas retas se interceptarem.

No item (iv) temos três retas que se interceptam em um único ponto. Um exemplo dessa situação são as retas $r = \{(x_1, x_2) \mid -x_1 + x_2 = 0\}$, $s = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 2\}$ e $t = \{(x_1, x_2) \mid 0x_1 + x_2 = 1\}$, que se interceptam no ponto $(1, 1)$. Veja que a reta t pode ser vista como a soma das equações das retas r e s, logo é evidente que se um ponto satisfizer r e s separadamente, vai automaticamente satisfazer t; ou seja, ela pode ser desprezada ou descartada face às duas outras. Dizemos nessa situação que a reta t é redundante.

Já em relação ao item (v) observamos que as retas r, s e t são distintas e se interceptam duas a duas; porém elas não se interceptem em um único ponto. Em termos geométricos, não há relação direta (um combinação linear) de uma reta com as duas outras.

No item (vi) temos três retas coincidentes. Um exemplo dessa situação são as retas $r = \{(x_1, x_2) \mid -x_1 + x_2 = 1\}$, $s = \{(x_1, x_2) \mid -2x_1 + 2x_2 = 2\}$ e $t = \{(x_1, x_2) \mid -4x_1 + 4x_2 = 4\}$. Fica claro que tanto s quanto t são obtidas de r pela multiplicação de sua equação por 2 e 4 respectivamente, portanto as duas retas s e t são redundantes. Nesse caso dizemos que a intersecção das três retas é a própria reta r. Então todos os pontos de r satisfazem também as equações de s e t.

Tenha em mente que para existir um ponto como intersecção de retas, é suficiente a existência de apenas duas retas distintas que se interceptem entre elas. Se mais de duas retas se interceptam em um mesmo ponto, duas delas devem ser levadas em conta e as demais, descartadas.

O mesmo raciocínio pode ser empregado para planos. Um **plano** no $\mathbb{R}^3$ é definido

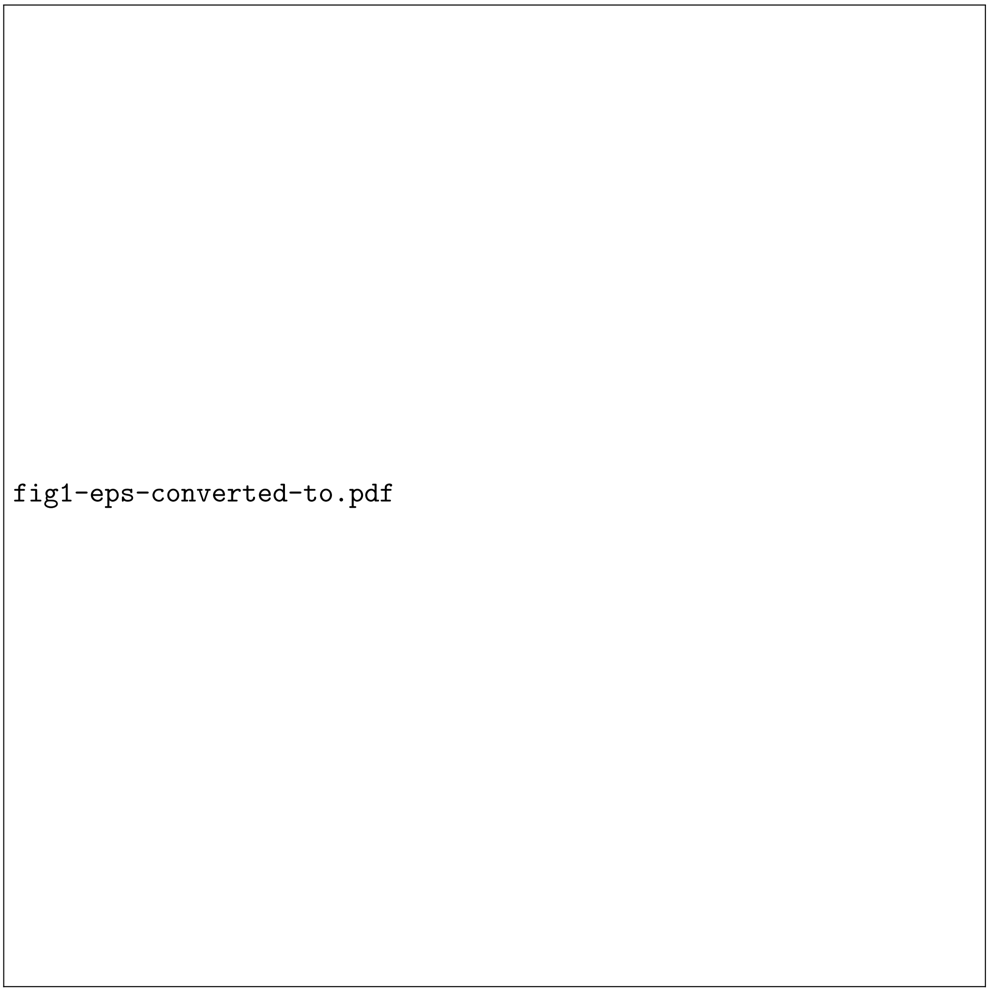

Figura 3.1: Posições relativas entre retas.

como sendo o conjunto $\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0\}$, com a_0, a_1, a_2, a_3 constantes conhecidas. Na figura **??** mostramos algumas posições relativas entre planos. Por exemplo, no item (i) da figura **??** temos dois planos π e λ paralelos: $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0\}$ e $\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 + c\}$, com $c \neq 0$ constante. Não há nenhum ponto que possa satisfazer às duas equações simultaneamente. No item (ii) da figura mostramos dois planos π e λ que se interceptam em uma reta r (imagine um folha de papel atravessando uma outra). No item (iii) da figura temos uma visão de quatro planos π, λ, κ e χ. Os planos π, λ e κ podem ser vistos como as três faces de um cubo que se interceptam no ponto (vértice) P. O plano χ corta esse cubo em uma pirâmide de base triangular (parte tracejada da figura) e vértice P.

Observe que para determinarmos um ponto no $\mathbb{R}^3$, como intersecção de planos, são necessários três planos distintos que se interceptem em um único ponto. Se mais que três planos se interceptem em um único ponto, então alguns deles são combinações lineares dos três que determinam o ponto.

No espaço de dimensão n, os conjuntos definidos por equações lineares do tipo $\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = a_0\}$, com $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ constantes são chamados **hiperplanos**. Para determinar um ponto no $\mathbb{R}^n$ precisamos da intersecção de exatamente n hiperplanos distintos que se interceptam nesse ponto.

Essas idéias refletem de forma geométrica o que ocorre na resolução de sistemas de equações lineares. O método que vamos ver nada mais é que eliminar aquilo que for redundante em um sistema de equações lineares (hiperplanos redundantes).

3.3 Resolução de sistemas lineares

Um sistema linear com n incógnitas e p equações é representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases}$$

As matrizes

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

fig2-eps-converted-to.pdf

Figura 3.2: Posições relativas entre planos.

são denominadas de matriz completa e matriz incompleta do sistema, respectivamente. O sistema acima pode ser escrito em notação matricial como $Ax = b$, onde $x' = (x_1, \cdots, x_n)$ e $b' = (b_1, \cdots, b_p)$. Uma n-upla $s = (s_1, \cdots, s_n)$ é uma solução para esse sistema se $As = b$.

3.3.1 Sistemas equivalentes

Diremos que um sistema S' é equivalente a um sistema S se toda solução de um for solução do outro e vice-versa. Podemos verificar (a demonstração fica como exercício) que S' e S são equivalentes quando S' for obtido de S através das seguintes operações:

1. Troca de posição de duas linhas. Por exemplo:
$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad S' = \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \end{cases}$$

2. Troca de posição de duas colunas. Por exemplo:
$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad S' = \begin{cases} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 &= b_2 \end{cases}$$

3. Multiplicação (ou divisão) de uma linha por uma constante $k \neq 0$. Por exemplo:
$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad S' = \begin{cases} \frac{1}{k}a_{11}x_1 + \frac{1}{k}a_{12}x_2 &= \frac{1}{k}b_1 \\ ka_{21}x_1 + ka_{22}x_2 &= kb_2 \end{cases}$$

4. Adicionar a uma linha uma combinação linear de outras linhas do sistema. Por exemplo, o sistema
$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$$
equivale ao sistema
$$S' = \begin{cases} (a_{11} + ka_{21})x_1 + (a_{12} + ka_{22})x_2 &= (b_1 + kb_2) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

Observamos que quando os sistemas S' e S são equivalentes por transformações elementares, como as vistas acima, as matrizes completas dos dois sistemas também são equivalentes. Por exemplo, dado o sistema:
$$S = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{cases}$$
de matriz completa dada por
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
verificamos que ela é equivalente à matriz
$$\begin{pmatrix} 2*2 & 3*2 & 5*2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Método de Gauss

Podemos aplicar a técnica de Gauss para o cálculo da inversa de uma matriz na resolução de sistemas de equações lineares. A idéia do método é eliminar todas as restrições (hiperplanos) redundantes do sistema, obtendo um sistema equivalente de *fácil resolução*. Lembre-se que uma solução de um sistema é a intersecção de um certo número de hiperplanos. Se o número de variáveis do sistema (dimensão dos hiperplanos) for n, então o sistema equivalente resultante, obtido por operações elementares com as linhas da matriz completa do sistema original, deverá ter no máximo n linhas não nulas. Após eliminar (zerar) as linhas redundantes de um sistema linear, pode ocorrer três situações:

1. O sistema não tem solução (é impossível). Nesse caso, a matriz completa do sistema equivalente terá no máximo n linhas e apresenta uma linha (k-ésima linha) do tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & s_k \end{pmatrix},$$

com $s_k \neq 0$, o que equivale à equação $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = s_k$ que é um absurdo, pois o lado esquerdo dessa equação é zero, enquanto o lado direito não o é.

Exemplo: dado o sistema

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 & = & 1 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & 3 \\ x_1 - x_2 & = & 4 \end{cases}$$

obtemos a matriz completa abaixo, para a qual aplicamos as seguintes operações elementares:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo o sistema é impossível, pois a restrição $0x_1 + 0x_2 = 1$ não pode ser satisfeita.

2. O sistema tem solução única (determinado). Nesse caso, a matriz completa do sistema equivalente terá exatamente n linhas não nulas e poderá ser colocada na forma particionada $(I_n \ s)$. Logo o sistema equivalente é dado por $Ix = s$, que é de fácil resolução; ou seja, sua solução é $x = s$.

Exemplo: dado o sistema

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 & = & 1 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & 2 \\ x_1 + x_2 & = & 3 \end{cases}$$

obtemos a representação matricial abaixo com as seguintes operações elementares:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

logo o sistema tem duas restrições não nulas e sua solução é $(x_1, x_2) = (2, 1)$.

3. O sistema tem infinitas soluções (indeterminado). Nesse caso, a matriz completa do sistema equivalente terá $p < n$ linhas e poderá ser colocada na forma particionada $(I_p \ N_{n-p} \ s)$. Logo, fazendo $x' = (x'_I \ x'_N)$, o sistema equivalente será dado por $Ix_I + Nx_N = s$ ou, equivalentemente, $x_I = s - Nx_N$. Então, para cada atribuição de valores arbitrários às variáveis x_N, o que pode ser feito de infinitas maneiras distintas, teremos um conjunto de valores para às variáveis x_I. Por isso o sistema tem infinitas soluções.

   Exemplo: dado o sistema

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 5\\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 8\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 10\\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 & = & 13 \end{cases}$$

   obtemos a representação matricial abaixo com as seguintes operações elementares:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 3 & 8\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 10\\ 3 & 2 & 0 & 4 & 13\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 10\\ 3 & 2 & 0 & 4 & 13\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 4 & 13\end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

então temos o sistema equivalente

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix};$$

logo, para cada valor atribuído a (x_3, x_4), teremos um valor para (x_1, x_2), ou seja, o sistema tem infinitas soluções.

3.3.3 Regra de Cramer

Quando um sistema linear tiver n equações e n incógnitas poderemos saber se o mesmo tem solução única a partir do determinante da matriz incompleta do sistema.

Propriedade 26 *O sistema $Ax = b$ dado por:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

terá solução única se det$(A) \neq 0$, onde A é a matriz incompleta do sistema. Além disso, temos:

$$x_i = \frac{|A(i)|}{|A|}, \quad onde \quad A(i) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

ou seja, $A(i)$ é a matriz obtida de A trocando-se a coluna i de A pelo vetor coluna b.

Prova: faremos a demonstração [?] para o caso $n = 3$. O caso geral segue a mesma idéia. Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_n & = & b_3 \end{cases}$$

multiplicando a primeira equação pelo cofator do elemento a_{11}, a segunda pelo cofator do elemento a_{21} e a terceira equação pelo cofator do elemento a_{31}, obtemos:

$$\begin{cases} c_{11}a_{11}x_1 + c_{11}a_{12}x_2 + c_{11}a_{13}x_3 & = & c_{11}b_1 \\ c_{21}a_{21}x_1 + c_{21}a_{22}x_2 + c_{21}a_{23}x_3 & = & c_{21}b_2 \\ c_{31}a_{31}x_1 + c_{31}a_{32}x_2 + c_{31}a_{33}x_n & = & c_{21}b_2 \end{cases}$$

e somando as três equações, obtemos

$(c_{11}a_{11} + c_{21}a_{21} + c_{31}a_{31})x_1 + (c_{11}a_{12} + c_{21}a_{22} + c_{31}a_{32})x_2 + (c_{11}a_{13} + c_{21}a_{23} + c_{31}a_{33})x_3 = c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + c_{21}b_2$. Como $(c_{11}a_{12} + c_{21}a_{22} + c_{31}a_{32}) = 0$ e $(c_{11}a_{13} + c_{21}a_{23} + c_{31}a_{33}) = 0$, pois ambos os termos correspondem a soma do produto dos elementos de uma coluna de A pelos cofatores correspondentes de outra coluna, então obtemos:

$(c_{11}a_{11} + c_{21}a_{21} + c_{31}a_{31})x_1 = c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + c_{21}b_2$.

Como $(c_{11}a_{11} + c_{21}a_{21} + c_{31}a_{31}) = |A|$ e $c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + c_{21}b_2$ corresponde ao determinante de $A(1)$, então:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio, usando os cofatores associados às colunas 2 e 3 de A, respectivamente, podemos mostrar que

$$x_2 = \frac{|A(2)|}{|A|}, \quad e \quad x_3 = \frac{|A(3)|}{|A|}.$$

$\square$

Exemplo: seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 5 \\ 2x_1 - x_2 & = & 1 \end{cases}$$

temos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

com $|A| = -3$, $|A(1)| = -6$, $|A(2)| = -9$. Logo a solução do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{-6}{-3} = 2 \quad e \quad x_2 = \frac{-9}{-3} = 3.$$

3.4 Exercícios

1. Determine, se existir, a inversa das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2. Mostre como encontrar a inversa da matriz $aI_n + bJ_n$.

3. Será verdade que vale a igualdade $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$?

4. Será verdade que $I + A$ é não singular se $|A| > 0$?

5. Calcule a inversa da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}.$$

6. Seja A_n uma matriz quadrada e x uma variável desconhecida. O determinante da matriz $A - xI$ é um polinômio (*equação característica*) $p(x)$ em x de grau n dado por uma expressão do tipo $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_nx^0$. Mostre que toda matriz quadrada A satisfaz sua própria equação característica e explique como ela pode ser usada para determinar a inversa de A. Aplique à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Mostre que se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são todas matrizes inversíveis de mesma ordem, então $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

8. Seja S uma matriz cujos todos elementos não pertencentes à sua diagonal secundária são nulos. Seja $Sec(S) = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ sua diagonal secundária. Encontre a inversa de S e diga o que é necessário ocorrer para que ela exista.

9. Desenvolva um método para encontrar a inversa de uma matriz A_n triangular inferior ou superior. Aplique à matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

10. Dado o sistema
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \end{cases}$$
forneça sua representação matricial e verifique se $s = (3, -1, 1)$ e $t = (3, 1, 2)$ são soluções do mesmo. Se o forem, o que podemos dizer de $u = \lambda s + (1-\lambda)t$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$?

11. Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2/x_1 - 4/x_2 + 9/x_3 & = & 28 \\ 7/x_1 + 3/x_2 - 6/x_3 & = & -1 \\ 7/x_1 + 9/x_2 - 9/x_3 & = & 5 \end{cases}$$
e diga se o mesmo é linear. Calcule a inversa da matriz incompleta desse sistema, se existir, e multiplique-a pelo vetor coluna do lado direito da equação do sistema. Existe relação entre o resultado obtido e a solução do sistema?

12. Suponha que o sistema linear $Ax = b$, com $n \geq m$ e $A_{m\times n}$ sendo uma matriz sem linhas redundantes, tenha infinitas soluções. Seja B uma matriz inversível formada por m colunas de A. Descreva uma maneira simples de obter algumas dessas soluções em função de B.

13. Seja o sistema linear $Ax = 0$, com $n \geq m$ e $A_{m\times n}$ sendo uma matriz real qualquer. Veja que sistemas desse tipo, denominados homogêneos, têm sempre uma solução trivial, a nula. O que deve ocorrer para que um sistema homogêneo tenha (i) uma única solução? (ii) infinitas soluções? Mostre um exemplo de cada caso.

14. Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 1/5 \end{cases}$$

Capítulo 4

Posto de uma matriz

Antes de introduzir o conceito de posto de uma matriz, faremos uma breve revisão de conceitos de álgebra linear.

4.1 Combinação linear

Dados n vetores de mesma ordem $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ e escalares $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, denominamos de combinação linear desses vetores ao vetor:

$$x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Por exemplo, sejam:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};$$

então uma combinação linear desses três vetores é $x = 2x^1 + 3x^2 - x^3$:

$$x = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Observe que qualquer combinação desses vetores é dada por $x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$, que em notação matricial é representada por:

$$x = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_1 + 0a_2 + 4a_3 \\ 2a_1 + 1a_2 + 2a_3 \\ 3a_1 - 1a_2 - 3a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = Xa,$$

onde X é a matriz formada pelos vetores coluna x^i e a é o vetor coluna formado pelos a_i, ou seja:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}, \quad a' = (a_1, a_2, a_3).$$

Logo toda combinação linear $x = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ de n vetores pode ser escrita como:

$$x = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i = Xa.$$

Note que:

1. o vetor coluna Xa é uma combinação linear das colunas de X.
2. o vetor linha $a'X$ é uma combinação linear das linhas de X.
3. a matriz AB é tal que:
   - suas linhas são combinações lineares das linhas de B;
   - suas colunas são combinações lineares das colunas de A;

4.2 Dependência e independência linear

Dado o conjunto de vetores $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$, com $x^i \neq \mathbf{0}$ para todo i, diremos que o vetor $\bar{x}$ é **linearmente dependente (LD)** (desses vetores) se existirem escalares $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, nem todos nulos, tais que:

$$\bar{x} = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = Xa.$$

Por exemplo, sejam os vetores:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix};$$

observamos que o vetor $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ é linearmente dependente de x^1 e x^2, pois podemos montar o sistema

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 \\ 2a_1 - 6a_2 \end{pmatrix},$$

que tem por solução $(a_1, a_2) = (1, 1/2)$. Alternativamente, se existir um vetor não nulo a tal que $Xa = \mathbf{0}$, diremos que as colunas de X são linearmente dependentes. Observe que não faz sentido trabalhar com o vetor nulo como membro de um conjunto de vetores quando pretendermos saber se esse conjunto é formado de vetores linearmente dependentes [Por quê?].

Quando não existir um vetor não nulo a tal que $Xa = \mathbf{0}$, diremos que as colunas de X são **linearmente independentes (LI)**. Por exemplo, seja o conjunto de vetores:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

observamos que não existe $a' = (a_1, a_2) \neq \mathbf{0}$ tal que $a_1x^1 + a_2x^2 = \mathbf{0}$; ou seja, a única solução para o sistema linear resultante:

$$a_1x^1 + a_2x^2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

é a solução $(a_1, a_2) = (0, 0)$. Nesse caso, diremos que o conjunto de vetores formado pelas colunas da matriz $X = (x^1\ x^2)$ é LI.

Existe uma maneira simples de saber se um conjunto de n vetores $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ de ordem n é LD ou LI. Basta calcular o determinante da matriz $X_n = (x^1\ x^2\ \cdots\ x^n)$:

- Se $|X| = 0$, então o conjunto $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ é LD;
- Se $|X| \neq 0$, então $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ é LI;

Por exemplo, sejam as matrizes:

$$X1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad |X1| = 0; \quad X2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad |X2| = -7;$$

temos que $X1$ tem vetores colunas LD, enquanto $X2$ tem vetores colunas LI. Veja que uma matriz singular X tem seu conjunto de vetores colunas LD; enquanto que se X for não singular (inversível), então X tem seu conjunto de vetores colunas LI.

Propriedade 27 *Seja $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ um conjunto de vetores LI de ordem n. Então qualquer outro vetor v de ordem n é uma combinação linear desses vetores, ou seja, existe um vetor $a' = (a_1, \cdots, a_n)$ tal que:*

$$v = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = Xa.$$

Prova: Como $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ é LI, então existe X^{-1}. Logo basta tomar $a = X^{-1}v$.

Propriedade 28 *Todo conjunto de vetores LI de ordem n não pode conter mais que n desses vetores.*

Prova: Seja $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ um conjunto de n vetores LI de ordem n. Logo $|X_n| = |(x^1\ x^2\ \cdots\ x^n)| \neq 0$ e existe X^{-1}. Seja x^{n+1} um vetor não nulo qualquer de ordem n. Vamos mostrar que o conjunto $\{x^1, x^2, \cdots, x^n, x^{n+1}\}$ é LD; ou seja, que existem

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$, nem todos nulos, tais que $\mathbf{0} = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$. Para tanto, basta fazer $a_{n+1}x^{n+1} = -(a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = -Xa$, com $a' = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Logo, basta atribuir um valor não nulo para a_{n+1} e tomar os demais coeficientes da combinação linear, representados pelo vetor a, como sendo $a = -a_{n+1}X^{-1}x^{n+1}$. $\square$

Exemplo: Os vetores $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são LI; porém, os três vetores x^1, x^2 e $x^3 = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ não nulo são LD; pois existem a_1, a_2 e a_3 nem todos nulos tais que $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = \mathbf{0}$. Basta tomar $(a_1, a_2, a_3) = (b, c, -1)$.

Uma questão interessante é saber quantas linhas/colunas de uma matriz singular são LI. O resultado que segue responde a essa pergunta.

Propriedade 29 *O número de vetores linha LI em uma matriz $A_{p\times q}$ é igual ao número de vetores colunas LI dessa matriz.*

Prova [?]: Suponha que $A_{p\times q}$ tenha k linhas LI e m colunas LI. Vamos mostrar que $k = m$. Sem perda de generalidade, assuma que as primeiras k linhas de A são LI e que as primeiras m colunas de A são LI. Então A pode ser particionada em:

$$A_{p\times q} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{k\times m} & Y_{k\times q-m} \\ Z_{p-k\times m} & W_{p-k\times q-m} \end{pmatrix}.$$

Logo as k linhas da submatriz $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ e as m colunas da submatriz $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ são LI. Então as linhas da submatriz $\begin{pmatrix} Z & W \end{pmatrix}$ são combinações lineares das primeiras k linhas de A.

Em particular, as linhas de Z são combinações lineares das linhas de X; logo existe uma matriz T tal que $Z = TX$. Note que as colunas de X não podem ser LD. Pois, se o fossem, existiria um vetor a não nulo tal que $Xa = \mathbf{0}$. Então, de $Z = TX$, teríamos $Za = TXa = \mathbf{0}$. Isso implicaria que $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} a = \mathbf{0}$, para algum $a \neq 0$. Por conseqüente, as colunas de $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ seriam LD, contradizendo a suposição de que as primeiras m colunas de A são LI. Concluímos que as m colunas de X, de ordem k, são LI. Logo, pela propriedade **??**, $m \leq k$. Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio para a matriz A', podemos mostrar que $k \leq m$, concluindo a prova de que $m = k$. $\square$

4.3 Posto

Definição 30 *Dada uma matriz $A_{m\times n}$, definimos* ***posto ou característica*** *de A, de-*

notado por $r(A)$ ou r_A, como sendo o número de linhas/colunas linearmente independentes dessa matriz.

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

tem posto $r(A) = 2$, pois as duas primeiras linhas são LI, enquanto a terceira é múltiplo da primeira.

Definição 31 *Dada uma matriz $A_{m\times n}$, diremos que A é* ***posto coluna completo*** *se $r(A_{m\times n}) = n < m$. Por outro lado, se $r(A_{m\times n}) = m < n$, então A é uma matriz de* ***posto linha completo****. Se a matriz A for quadrada de ordem n e se $r(A_n) = n$, então A é* ***posto completo****.*

Perceba que se o posto de uma matriz é k, então existe um subconjunto de k linhas que são LI. Esse subconjunto de linhas pode não ser único.

Uma convenção sobre posto é que para a matriz nula, seu posto é definido como sendo igual a zero e em todos os outros casos o posto é um inteiro positivo.

4.3.1 Propriedades de posto

Algumas observações sobre posto são importantes, tais como:

1. O posto de uma matriz $A_{m\times n}$ é igual à ordem da maior submatriz de A de determinante não nulo.

2. $r(A_{m\times n}) \leq min\{m, n\}$.

3. Se $r_A = r > 0$, então existe (pela propriedade **??**) uma matriz $\tilde{A}$ equivalente a A que pode ser particionada como:

$$\tilde{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times n-r} \\ Z_{m-r\times r} & W_{m-r\times n-r} \end{pmatrix},$$

com X inversível. Como conseqüência, se $r(A_n) < n$, então a matriz A não tem inversa.

4. O posto de uma matriz não se altera se permutarmos duas linhas/colunas dessa matriz. Como conseqüência, multiplicando uma matriz A por uma matriz permutacional (matrizes do tipo E_{ij}) Q ou P não altera seu posto, i.e. $r(AQ) = r(PA) = r(A)$.

Propriedade 30 *O posto do produto AB.*

$$r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}.$$

Prova: Para $r(A) = r$, existem P e Q matrizes não singulares tais que:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C;$$

logo $PA = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$. Pós-multiplicando ambos os lados por B e particionando $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$, teremos

$$PAB = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então $r(AB) = r(PAB) = r \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} \leq r = r(A)$, pois T tem r linhas. De forma semelhante, podemos mostrar que $r(AB) \leq r(B)$, logo o resultado segue. □

Propriedade 31 *Se $AGA = A$, então $r(GA) = r(A)$.*

Prova: $r((AGA)) = r(A) = r((A)(GA)) \leq r(GA)$ pela propriedade **??**; ou seja $r(A) \leq r(GA)$. Como $G(AGA) = G(A) = (GA)(GA)$, então $r((GA)(GA)) = r(G(AGA)) = r(GA) \leq r(AGA) = r(A)$. Logo $r(GA) \leq r(A)$, levando à igualdade $r(GA) = r(A)$. □

Propriedade 32 $r\begin{pmatrix} G & A \end{pmatrix} \leq r(G) + r(A)$.

Prova: evidente.

Propriedade 33 $r(G + A) \leq r(G) + r(A)$.

Prova: $r(G + A) = r[\begin{pmatrix} G & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}] \leq r\begin{pmatrix} G & A \end{pmatrix} \leq r(G) + r(A)$. □

Propriedade 34 *Dada uma matriz quadrada A_n:*

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

Prova: veja que

$$r\left(\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} 0_n & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix},$$

e que a matriz $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ do lado esquerdo dessa igualdade é inversível e reflete operações com as linhas da matriz $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix}$. Além disso, o posto da matriz $\begin{pmatrix} 0_n & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix}$ é menor ou igual a $n + r(AB)$ pela propriedade **??**. Note também que o posto da matriz $\begin{pmatrix} A_n & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix}$ é sempre maior ou igual ao posto da matriz $\begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ que é igual $r(A)+r(B)$ [Por quê?]. Logo, segue que $r(A) + r(B) \leq n + r(AB)$. □

Propriedade 35 *Dada uma matriz idempotente M_n:*

$$r(I - M) = n - r(M).$$

Prova: Fazendo $I = (I - M) + M$, pela propriedade **??** temos $n = r(I) \leq r(I - M) + r(M)$. Por outro lado, por ser idempotente, $M(I - M) = 0$; logo pela propriedade **??** temos $r(0) \geq r(I - M) + r(M) - n$. Combinando essas duas desigualdades, obtém-se o resultado esperado. □

4.3.2 Procedimento para determinar o posto

Anteriormente mencionamos que quando trocamos duas linhas/colunas de posição, não alteramos o posto de uma matriz; o que é válido para qualquer operação elementar que fizermos com ela através de matrizes do tipo E_{ij}, $R_{ii}(\lambda)$, e $P_{ij}(\lambda)$, todas não singulares, introduzidas no capítulo **??**. Dessa forma, quando uma matriz A é multiplicada por matrizes de operadores elementares, por exemplo $B = PAQ$, com P e Q sendo matrizes elementares, obtemos uma matriz B cujo posto é igual ao posto de A.

Uma forma de encontrar o posto $r(A) = r$ de uma matriz A é fazer operações elementares com as linhas/colunas dessa matriz de forma que as primeiras r linhas/colunas da matriz equivalente a A sejam LI; e tornar nulas as demais linhas/colunas linearmente dependentes da matriz equivalente.

O **procedimento para calcular o posto** de uma matriz A retangular ou quadrada é feito do seguinte modo. Defina os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$ como diagonais e o procedimento a ser feito é, a partir de operações elementares com linhas de A, reduzir a zero todos os elementos sub-diagonais da primeira coluna (baseando-se no elemento $a_{11} \neq 0$ da primeira linha); depois reduzimos a zero todos os elementos sub-diagonais da segunda coluna (baseando-se no elemento $a_{22} \neq 0$ da segunda linha); e seguimos dessa forma até que todos os elementos abaixo dos elementos diagonais se tornem iguais a zero. O posto da matriz é igual ao número de linhas não nulas que sobram ao final do procedimento.

Por exemplo, seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, percebemos que a segunda linha é o dobro da primeira. Logo, a matriz:

$$P_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

tem o mesmo posto de A. Se trocarmos de posição a segunda com a terceira linhas dessa nova matriz, realizando a operação $E_{23}(P_{21}(-2)A)$, obtemos a matriz equivalente

$$E_{23}P_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz se encontra na forma desejada, pois as duas primeiras linhas/colunas são LI e todas as demais linhas abaixo delas são nulas. Logo seu posto é igual a dois.

4.4 Decomposição em posto completo

Seja A uma matriz de posto r na forma $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$, com X_r inversível. Fatorar A em posto completo é expressar a matriz A como sendo o produto de uma matriz K de posto coluna completo por uma matriz L de posto linha completo, ou seja, encontrar K e L tais que $A = KL$. Para tanto, procederemos como segue.

Considerando que as primeiras r linhas representadas pela submatriz $(X\ Y)$ são as linhas LI de A, então existe uma matriz F tal que:

$$(Z\ W) = F(X\ Y).$$

Pelo mesmo raciocínio, agora aplicado às colunas de A, deve existir uma matriz H tal que:

$$\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} H.$$

Das expressões acima, concluímos que $Z = FX$, $W = FY$ e $Y = XH$. Portanto, $W = FY = FXH$ e então:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & XH \\ FX & FXH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ FX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & XH \end{pmatrix}.$$

Como X é inversível, podemos determinar as matrizes F e H como sendo $F = ZX^{-1}$ e $H = X^{-1}Y$. Observe que na expressão anterior, os produtos:

$$\begin{pmatrix} X \\ FX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & XH \end{pmatrix}$$

são do tipo KL, com K sendo uma matriz de posto coluna completo e L, de posto linha completo. Esse produto é chamado **fatoração em posto completo** da matriz A.

Exemplo: A matriz do exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

de posto $r(A) = 2$, pode ser fatorada da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} I_2 \\ (2\ 4) * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{pmatrix}$$

logo a fatoração em posto completo é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nem sempre a matriz que queremos fatorar em posto completo se encontra na forma desejada acima, ou seja, no formato $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. Nesse caso, podemos encontrar uma matriz equivalente a A, digamos PAQ, com P e Q matrizes permutacionais, tal que $PAQ = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. Assim, podemos determinar a fatoração em posto completo de PAQ, ou seja, encontrando uma matriz posto coluna completo K e uma matriz posto linha completo L, tal que $PAQ = KL$. Portanto, para encontrar a fatoração em posto completo de A basta notar que:

$$PAQ = KL \to A = (P^{-1}K)(LQ^{-1}) = \hat{K}\hat{L},$$

com $\hat{K} = P^{-1}K$ e $\hat{L} = LQ^{-1}$.

4.5 Forma canônica

Assim como fizemos operações elementares com linhas de uma matriz A para reduzir a zero os elementos abaixo da "diagonal" a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \cdots$, podemos fazer operações elementares com colunas dessa matriz para reduzir a zero os elementos acima dessa diagonal. Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, temos que a matriz obtida de A da seguinte maneira

$$E_{23}P_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tem o mesmo posto da matriz $E_{23}P_{21}(-2)AP_{12}(-2)P_{13}(-3)$, que equivale a adicionar à segunda e terceira colunas dessa matriz, a primeira coluna multiplicada respectivamente por (-2) e (-3), ou seja:

$$E_{23}P_{21}(-2)AP_{12}(-2)P_{13}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, adicionando-se à terceira coluna a segunda coluna dessa matriz multiplicada por $(-6/5)$, o que equivale a pós multiplicá-la por $P_{23}(-6/5)$, obtemos:

$$E_{23}P_{21}(-2)AP_{12}(-2)P_{13}(-3)P_{23}(-6/5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

finalmente, multiplicando a segunda coluna por $(1/5)$, o que equivale a pós multiplicar a matriz anterior por $R_{22}(1/5)$, obtemos a matriz C equivalente a A por linhas/colunas:

$$E_{23}P_{21}(-2)AP_{12}(-2)P_{13}(-3)P_{23}(-6/5)R_{22}(1/5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que após realizar as operações acima, a matriz equivalente obtida C, digamos $PAQ = C$, com $P = E_{23}P_{21}(-2)$ e $Q = P_{12}(-2)P_{13}(-3)P_{23}(-6/5)R_{22}(1/5)$ não singulares, ficou particionada na forma:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C,$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem r, igual ao posto de A, e as submatrizes nulas são de ordem apropriada de forma a tornar C de mesma ordem de A. A expressão acima é denominada **forma canônica equivalente** de uma matriz.

Então, para obter a forma canônica equivalente de uma matriz, basta realizar operações elementares com linhas/colunas de uma matriz a fim de encontrar uma matriz equivalente que tenha a forma particionada acima. Perceba que dependendo da maneira como as operações elementares sejam feitas, podemos obter diferentes matrizes P e Q tais que $C = PAQ$.

4.5.1 Forma canônica de matrizes simétricas

Inicialmente, lembre-se que quando pré-multiplicamos uma matriz A por uma matriz de operadores elementares E, estamos realizando um conjunto de operações elementares com as linhas dessa matriz. Em se tratando de uma matriz simétrica, quando pós-multiplicamos A por E', a transposta de E, estamos fazendo o mesmo conjunto de operações elementares com as colunas dessa matriz.

Essa observação é importante para diagonalizar uma matriz simétrica, que constitui o primeiro passo para encontrar sua forma canônica equivalente. Para tanto, aplicaremos as mesmas operações P que fizermos às linhas da matriz A, às suas colunas, de forma que a matriz equivalente resultante possa ser expressa como PAP', que é uma matriz diagonal do tipo:

$$PAP' = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $r = r(A)$ e D_r sendo uma matriz diagonal de r elementos não nulos. A expressão acima é chamada de **forma diagonal** de uma matriz simétrica. Podemos mostrar que para qualquer matriz simétrica existe uma matriz não singular P que verifica a igualdade acima. Observe que a matriz D da forma diagonal não precisar ser igual à matriz identidade. Lembre-se que para determinar a matriz P, as mesmas operações que devem ser realizadas com as linhas de A, também devem ser realizadas obrigatoriamente com suas colunas.

Exemplo: Para diagonalizar a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, inicialmente vamos zerar os elementos abaixo do primeiro elemento da diagonal principal realizando a seguinte seqüência de operações: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, o que equivale a pré-multiplicar a matriz A por uma matriz P equivalente à matriz identidade, onde efetuamos exatamente as mesmas operações elementares que para a matriz A, ou seja, pré-multiplicamos A pela matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para obter a matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

e empregando as mesmas operações nas colunas dessa última matriz, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

perceba que a matriz obtida é sempre simétrica. Agora, em busca de zerar os elementos abaixo da diagonal principal, temos a tendência de trocar de posição a segunda e terceira linhas dessa última matriz; porém, para restabelecer a simetria, devemos trocar de posição a segunda e terceira colunas da matriz resultante, obtendo assim a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

que continua com elementos não nulos abaixo da diagonal principal. Devemos zerar os elementos abaixo do segundo elemento dessa diagonal, logo vamos multiplicar a segunda linha por $(-1/2)$ e adicioná-la à terceira, sendo que o mesmo deve ser feito com as colunas da matriz obtida, ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

que é a forma diagonal procurada.

Uma vez obtida essa forma diagonal PAP', para obtermos **a forma canônica de uma matriz simétrica** basta definir a matriz

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{D_r^{-1}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P,$$

com $\sqrt{D_r^{-1}}$ sendo uma matriz diagonal de elementos iguais aos inversos das raízes quadradas dos elementos não nulos de D_r, digamos $1/\sqrt{d_{ii}}$, e I sendo uma matriz identidade de ordem adequada para que a pós-multiplicação por P possa ser efetuada. Note que

$$RAR' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o exemplo anterior, teríamos

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz complexa. Note também que a **decomposição em posto completo de matrizes simétricas** é obtida diretamente da expressão $RAR' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; pois, nesse caso, temos que

$$A = R^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R^{-1})'.$$

Como podemos particionar $R^{-1} = \begin{pmatrix} K & W \end{pmatrix}$, com K sendo uma matriz posto coluna completo (possuindo r colunas LI). Isso fornece a decomposição $A = KK'$.

4.6 Exercícios

1. Diga se os seguintes conjuntos de vetores são LI ou LD:

   (a) $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

   (b) $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix};$

2. Determine o posto das matrizes abaixo e determine sua decomposição em posto completo KL:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

3. Encontre a forma canônica da matriz $aI_n + bJ_n$.

4. Colocar na forma canônica $PAQ = C$ as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Encontre a forma canônica $PAP' = C$ para cada matriz simétrica A abaixo e determine a decomposição em posto completo KK' de cada uma:

$$(-2), \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Inversa Generalizada

Neste capítulo apresentamos conceitos e propriedades de inversa generalizada de uma matriz $A_{n\times m}$. Lembre-se que em capítulos anteriores introduzimos os conceitos de inversa à direita, à esquerda e inversa de uma matriz quadrada não-singular. O conceito de inversa generalizada é mais geral e tem como principal aplicação a resolução de sistemas lineares gerais do tipo $Ax = b$, onde A não tem inversa clássica.

5.1 Inversa de Moore-Penrose

Definimos inversa de Moore-Penrose de uma dada matriz $A_{n\times m}$ como sendo a matriz $M_{m\times n}$, única, também denotada por A^+ ou $A^\dagger$, que satisfaz às seguintes condições:

1. $AMA = A$.
2. $MAM = M$.
3. AM e MA são simétricas.

Para descobrir quem é M, recorremos à fatoração posto completo da matriz A, ou seja, $A = KL$, com K posto coluna completo e L posto linha completo.

Propriedade 36 *A inversa de Moore-Penrose M de uma matriz A é dada por:*

$$M = L'(K'AL')^{-1}K'.$$

Prova: Inicialmente, perceba que os produtos LL' e $K'K$ são inversíveis, pois $r(LL') = r_L$ e $r(K'K) = r_K$. Da igualdade $A = KL = KIIL$, que por sua vez pode ser determinada como $K[(LL')(LL')^{-1}][(K'K)^{-1}(K'K)]L$, podemos obter que

$(KL)L'(K'(KL)L')^{-1}K'(KL) = AL'(K'AL')^{-1}K'A$. Faça $M = L'(K'AL')^{-1}K'$ e verifique (como exercício) que as demais condições acima são satisfeitas.

Exemplo: Calcular a inversa de Moore-Penrose para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
Solução: Verificamos facilmente que o posto da matriz é $r_A = 1$ e que sua fatoração posto completo é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = KL,$$

de onde obtemos

$$K'AL' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (55)$$

então M é dada por

$$M = L'(K'AL')^{-1}K' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (\frac{1}{55}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.2 Inversa generalizada

Definimos inversa generalizada de uma dada matriz $A_{n\times m}$ como sendo a matriz $G_{m\times n}$, também denotada por A^-, que satisfaz à primeira condição de Moore-Penrose, ou seja, $AGA = A$. Esse é o tipo de inversa mais estudado devido sua importância para a resolução de equações lineares como veremos mais adiante. Uma observação é que pode existir mais de uma inversa generalizada para uma matriz A.

5.2.1 Obtenção usando operações com linhas/colunas

Suponha que após realizar algumas operações com as linhas/colunas de uma matriz A tenhamos obtido a matriz

$$PAQ = \begin{pmatrix} T & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a matriz não singular T tem posto igual ao de A. Então uma inversa generalizada de A é dada por:

$$G = Q \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$

Exemplo: Encontrar uma inversa generalizada para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução: Verificamos que o posto da matriz é $r_A = 2$ e que:

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

logo uma inversa generalizada de A é dada por

$$G = Q \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar (faça como exercício) que $AGA = A$.

5.2.2 Obtenção usando a forma diagonal

Seja a matriz A e considere P e Q tais que $PAQ = \Delta$ seja a forma diagonal de A, i.e.

$$PAQ = \Delta = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a matriz D_r tem posto $r = r_A$. Então uma inversa generalizada de Δ é dada por:

$$\Delta^- = \begin{pmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

enquanto uma inversa generalizada de A é dada por:

$$G = Q \begin{pmatrix} D_r^{-1} & X \\ Y & Z \end{pmatrix} P,$$

onde X, Y e Z são matrizes quaisquer cujas ordens são tais que a matriz do lado direito da igualdade tenha a mesma ordem de G.

Exemplo [?]: Uma inversa generalizada para a matriz A abaixo:

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta,$$

é dada por (verifique como exercício):

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & \frac{1}{2} & x_2 \\ y_{11} & y_{12} & z_1 \\ y_{21} & y_{22} & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

para quaisquer valores atribuídos a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. A possibilidade de atribuir uma infinidade de valores a X, Y e Z ilustra bem que existem infinitas inversas generalizadas para a matriz A. Obviamente, a maneira mais fácil de se obter uma tal inversa é fazer X, Y e Z nulas.

Para o caso onde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

com A_{11} tendo posto igual ao de A, uma inversa generalizada de A é dada por:

$$G = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.3 Algoritmo geral para obter a inversa generalizada

Vimos anteriormente que se uma matriz A está particionada de forma que a submatriz A_{11}, de mesmo posto que A, seja inversível, então encontrar uma inversa generalizada é tarefa fácil. Quando isso não for o caso, vamos supor que existem duas matrizes permutacionais R e S tais que:

$$RAS = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

com B_{11} inversível e $r(B_{11}) = r_A$. Sabemos que uma inversa generalizada para B é dada por $F = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e que (verifique) uma inversa generalizada de A é dada por $G = SFR$. Da igualdade $RAS = B$ e da ortogonalidade das matrizes S e R, temos que:

$$A = R'BS' = R' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} S'. \tag{5.1}$$

Por outro, perceba que na igualdade

$$G = SFR = (R'F'S')' \rightarrow G' = R' \begin{pmatrix} (B_{11}^{-1})' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S', \tag{5.2}$$

existe algo em comum com a igualdade (**??**). Ou seja, as operações R' e S' em (**??**) retornam os elementos de B_{11} a seus lugares de origem em A, enquanto em **??**, essas mesmas operações colocam os elementos de $(B_{11}^{-1})'$ nas posições de G' correspondentes às que os elementos de B_{11} ocupavam em A. Essa é a idéia do algoritmo para se obter uma inversa generalizada de uma matriz qualquer:

1. Escolha em A uma submatriz B_{11} inversível de mesmo posto que A. Os elementos de B_{11} podem ser escolhidos de linhas e colunas não adjacentes em A.

2. Encontre $(B_{11}^{-1})'$.

3. Em A, substitua os elementos nas posições de B_{11} pelos elementos de $(B_{11}^{-1})'$; e os demais elementos por zero.

4. A transposta da matriz obtida no item anterior é uma inversa generalizada de A.

Exemplo [?]: Determine uma inversa generalizada para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solução: Verificamos que o posto da matriz é $r_A = 2$. Logo, vamos escolher B_{11}, inversível e de posto 2, como sendo a matriz formada pelos elementos nas intersecções das colunas 1 e 4 com as linhas 1 e 3, ou seja:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

cuja inversa é dada por

$$B_{11}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad com \quad (B_{11}^{-1})' = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/20 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix};$$

Agora vamos substituir os elementos que compõem B_{11}, em A, pelos elementos correspondentes de $(B_{11}^{-1})'$ e zerar os demais elementos de A:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ \boxed{3} & 1 & 3 & \boxed{5} \end{pmatrix} \longrightarrow G' = \begin{pmatrix} \boxed{1/4} & 0 & 0 & \boxed{-3/20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{1/5} \end{pmatrix}.$$

O passo final do algoritmo é obter a transposta da matriz acima e com isso encontramos a matriz desejada. Como exercício, determine a inversa generalizada para a matriz A do exemplo anterior escolhendo:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

5.3 Resolução de sistemas lineares usando inversa generalizada

O conceito de inversa generalizada é de grande utilidade para a resolução de sistemas lineares. Lembre-se de que um sistema linear só pode ser resolvido (tem solução) se o mesmo for consistente (ver definição **??**).

Definição 32 *Sistema consistente.*

O sistema linear $Ax = y$ é consistente se as relações lineares existentes entre as linhas de A for a mesma entre os elementos de y.

Exemplo: o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 10 \end{cases}$$

é consistente, pois em sua representação matricial $Ax = y$:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = y,$$

verificamos que a segunda linha de A é o dobro da primeira. Essa mesma relação se verifica para os elementos de y, ou seja, $y_2 = 2y_1$. Já o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 11 \end{cases}$$

não é consistente, confere?

Uma forma de saber se o sistema é ou não consistente é verificando o posto da matriz completa do sistema, digamos $r([A\ y])$; pois um sistema é consistente se e somente se $r([A\ y]) = r(A)$. A prova dessa propriedade fica como exercício.

O seguinte resultado permite obter uma solução para um sistema consistente.

Propriedade 37 *O sistema consistente $Ax = y$, com $y \neq 0$, tem uma solução $x = Gy$ se e somente se $AGA = A$, ou seja, G é inversa generalizada de A.*

Prova: (i) Suponha que $x = Gy$ é solução do sistema. Nesse caso, $Ax = AGy = y$. Tomando $y = a_j$, para toda coluna j de A, vem que $AGa_j = a_j$ e daí, agrupando todos esses vetores colunas em uma matriz, vem que $AGA = A$. (ii) Suponha que $AGA = A$. Nesse caso, $AGAx = Ax = y$, e como $Ax = y$, temos $AGy = y$. Logo $x = Gy$ é solução do sistema. □

Exemplo [?]: Uma solução $\hat{x}$ para o sistema $Ax = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix},$$

pode ser obtida a partir da inversa generalizada G de A como segue:

$$\hat{x} = Gy = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma análise detalhada do sistema anterior, verificamos que o mesmo têm infinitas soluções. Uma questão que surge é como determinar todas essas soluções? O resultado seguinte permite obter todas as soluções de um sistema consistente dada uma inversa generalizada da matriz incompleta do mesmo.

Propriedade 38 *Todas as soluções $\hat{x}$ do sistema consistente $Ax = y$, com $y \neq 0$, são dadas por:*

$$\hat{x} = Gy + (GA - I)z,$$

onde G é uma inversa generalizada de A e z é um vetor arbitrário.

Prova: Fica como exercício.

Exemplo [?]: Todas as soluções $\hat{x}$ para o sistema do exemplo anterior são dadas por:

$$\hat{x} = Gy + (GA - I)z = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

o que, realizando as contas, fornece:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 4 + 2z_3 + 3z_4 \\ 2 - z_3 - z_4 \\ -z_3 \\ -z_4 \end{pmatrix},$$

para quaisquer valores que atribuamos a z_3 e z_4. Por exemplo, a solução anterior pode ser obtida fazendo-se $z_3 = z_4 = 0$. Já a solução $\bar{x}' = (1, 3, 0, 1)$ pode ser obtida fazendo-se $z_3 = 0$ e $z_4 = -1$.

Uma questão interessante é determinar quantas, entre a infinidade de soluções do sistema acima, são linearmente independentes? O resultado que segue fornece a resposta.

Propriedade 39 *O sistema consistente $Ax = y$, com $y \neq 0$ e A sendo uma matriz de ordem $n \times m$, tem $m - r_A + 1$ soluções LI's.*

Prova: Fica como exercício. Um conjunto possível para tais soluções é dado por $\{Gy, x^1, \cdots, x^{m-r_A}\}$, onde $x^i = Gy + (GA - I)z^i$, $i = 1, \cdots, m - r_A$, com cada z^i escolhido arbitrariamente, mas de forma que os vetores $(GA - I)z^i$ sejam LI's. Guarde bem esse resultado para quando formos estudar autovalores e autovetores de uma matriz, ocasião em que estaremos trabalhando com sistemas do tipo $Ax = \mathbf{0}$.

5.4 Exercícios

1. Chamamos de inversa generalizada reflexiva de uma matriz A, denotada por A_r^-, a matriz que satisfaz às duas primeiras condições de Penrose, i.e. $AA_r^-A = A$ e $A_r^-AA_r^- = A_r^-$. Mostre que se A^- é uma inversa generalizada de A, então $A_r^- = A^-AA^-$.

2. Mostre que quando G é uma inversa generalizada de uma matriz A, então para matrizes arbitrárias T e S de ordem apropriada, também o é a matriz
$$G^* = GAG + (I - GA)T + S(I - AG).$$

3. Mostre que quando G é uma inversa generalizada da matriz $X'X$, dada X, temos:
   (a) G' é uma inversa generalizada de $X'X$.
   (b) $XGX'X = X$; i.e. GX' é uma inversa generalizada de X.
   (c) XGX' é simétrica.

4. Prove que a inversa de Moore-Penrose é única.

5. Quem é a inversa de Moore-Penrose de uma matriz A não singular?

6. Encontre a inversa de Moore-Penrose e uma inversa generalizada para as matrizes:
   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
   (c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Encontre uma expressão geral para as soluções do sistema:
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. Encontre um conjunto de soluções LI's com o maior número possível de elementos para o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 6

Raízes e vetores característicos de uma matriz

Neste capítulo apresentamos o conceito de autovalores e autovetores, incluindo métodos para sua obtenção e algumas propriedades envolvendo os mesmos.

6.1 Autovalores

Autovalores são escalares associados à resolução de um sistema de equações lineares na forma $Au = \lambda u$. Sistemas lineares desse tipo surgem, por exemplo, em situações de transição de estado de um processo estocástico. Dada uma matriz A com as probabilidades de um sistema mudar de um estado $u(t)$ no tempo t para o estado $u(t+1)$ no tempo $t+1$, podemos descrever essa mudança por $u(t+1) = Au(t)$. A questão que surge é saber, após um número muito grande de transições de estado, se o sistema (processo) se estabiliza (converge para um estado u^*). Matematicamente falando, queremos saber se existe uma constante λ tal que a partir de um determinado tempo t, teremos $u(t+1) = \lambda u(t)$. Se isso ocorrer, como $u(t+1) = Au(t)$, obtemos o sistema $Au(t) = \lambda u(t)$, ou equivalentemente $(A - \lambda I)u(t) = \mathbf{0}$ que é sempre consistente. Quando a matriz $(A - \lambda I)$ for não singular, $u(t) = \mathbf{0}$ é solução única.

Perceba que esse sistema terá soluções não nulas se a matriz $(A - \lambda I)$ for singular, ou seja, se seu determinante for nulo, i.e. $|A - \lambda I| = 0$. Nesse caso, todas as soluções do sistema $(A - \lambda I)u(t) = \mathbf{0}$ poderiam ser obtidas a partir de uma inversa generalizada $(A - \lambda I)^-$ da matriz $(A - \lambda I)$ como foi visto no capítulo anterior. As soluções seriam então dadas por $u(t) = [(A - \lambda I)^-(A - \lambda I)^- I]z$, com z arbitrário.

Assim, dada uma matriz quadrada A_n, de ordem n, diremos que λ é um autovalor de A_n, se for solução da equação $|A - \lambda I| = 0$ que é um polinômio conforme a definição **??**

que segue.

Definição 33 *O* ***polinômio característico p(λ)*** *de uma matriz A_n é o polinômio em λ de grau n que se obtém a partir da expressão:*

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|. \tag{6.1}$$

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Seu polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Nesse caso, para determinar um autovalor da matriz A, basta encontrar as raízes desse polinômio, que são $\lambda_1 = (1 + i\sqrt{3})/2$ e $\lambda_2 = (1 - i\sqrt{3})/2$.

Uma maneira de desenvolver o determinante em (**??**) é usando a propriedade que segue.

Propriedade 40 *A expansão diagonal do determinante $|A_n - \lambda I_n|$ é dada por:*

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + S_{n-1}(-\lambda)^1 + S_n. \tag{6.2}$$

onde S_i representa a soma de todos os ***menores principais***[1] *de ordem $i \times i$.*

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Então, para calcularmos o determinante $|A - \lambda I|$, veja que os menores principais de A são:

- De ordem um: $|2|, |1|, |6|$;
- De ordem dois: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$;
- De ordem três: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

consequentemente $|A - \lambda I| = (-\lambda)^3 + S_1(-\lambda)^2 + S_2(-\lambda)^1 + S_3$, com $S_1 = |2| + |1| + |6|$; $S_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ e $S_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. Desenvolvendo todos esses determinantes chegamos a uma expressão final para $|A - \lambda I|$.

[1] Menores cujos elementos diagonais coincidem com os elementos da diagonal de A.

Vale ressaltar que, por se tratar de um polinômio de grau n em λ, o polinômio característico p(λ) de uma matriz A_n pode ser expresso em função de suas n raízes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ como:

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}s_{n-1}\lambda^1 + (-1)^n s_n, \quad (6.3)$$

onde, pela relação de Girard para polinômios, s_i é a soma dos produtos das raízes de $p(\lambda)$ tomadas (combinadas) a ordem i. Ou seja:

$$s_1 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k, \quad s_2 = \sum_{1\leq k<j\leq n}\lambda_k\lambda_j, \quad s_3 = \sum_{1\leq k<j<p\leq n}\lambda_k\lambda_j\lambda_p, \quad \cdots \quad s_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

Observando as equações (**??**) e (**??**), para $p(\lambda) = 0$, podemos inferir que:

1. A soma das raízes características de uma matriz A_n é igual ao traço dessa matriz; i.e. $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = tr(A)$.
2. O produto das raízes características de uma matriz A_n é igual ao determinante dessa matriz; i.e. $\prod_{k=1}^{n}\lambda_k = |A|$.

Exemplo: Seja a matriz A do exemplo anterior. Seu traço é igual a $S_1 = 9$ e a soma dos menores principais de ordem dois é igual a $S_2 = -3$, enquanto seu determinante é igual a $S_3 = |A| = -46$. Logo seu polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda^1 - s_3$, ou seja, $p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 3\lambda + 46$. As raízes de $p(\lambda)$, os autovalores de A, são obtidas resolvendo a equação $p(\lambda) = 0$. Para esse exemplo precisaríamos de um software matemático para nos auxiliar em sua determinação.

6.2 Propriedades elementares de autovalores

Propriedade 41 *Seja λ um autovalor de A_n e c um escalar. Então:*

1. *λ^k é um autovalor de A^k.*
2. *λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} se A for não singular.*
3. *$c\lambda$ é um autovalor de cA.*
4. *$c + \lambda$ é um autovalor de $cI + A$.*
5. *$(c + \lambda)^{-1}$ é um autovalor de $(cI + A)^{-1}$.*

6. *O polinômio em A de grau p, $f(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$, com a_i sendo um escalar, para $i = 0, \cdots, p$, tem autovalor $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{p} a_i \lambda^i$.*

Prova: Faça como exercício.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculando seus autovalores encontraremos $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$. Isso pode ser comprovado considerando conhecidos dois autovetores (associados a esses autovalores) dados por $u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $u^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Pela propriedade acima podemos afirmar, por exemplo, que:

1. 5^2 e $(-1)^2$ são os autovalores de $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$.

2. 5^{-1} e $(-1)^{-1}$ são os autovalores de $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & -2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

3. $3(5)$ e $3(-1)$ são os autovalores de $3(A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$.

4. $1 + (5)$ e $1 + (-1)$ são os autovalores de $I + A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

5. A matriz $f(A) = A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, tem $f(5) = 5^2 - 3(5)$ e $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1)$ como autovalores.

6.3 Autovetores

O cálculo de autovetores se dá pela resolução de um sistema linear obtido da definição de autovalor; ou seja, se λ_k é um autovalor de A_n, então devemos ter que $Au^k = \lambda_k u^k$, ou equivalentemente,

$$(A - \lambda_k I)u^k = \mathbf{0}.$$

Não esqueça que $(A - \lambda_k I)$ é singular. Logo o sistema tem infinitas soluções, das quais podemos determinar, no máximo, $n - r(A - \lambda_k I)$ delas que são LI's. Como visto no capítulo anterior, todas as soluções desse sistema linear podem ser obtidas pela expressão:

$$u^k = [(A - \lambda_k I)^{-}(A - \lambda_k I) - I]z,$$

com $(A - \lambda_k I)^{-}$ sendo uma inversa generalizada de $(A - \lambda_k I)$ e z sendo um vetor arbitrário.

Para obter uma inversa generalizada de $(A - \lambda_k I)$, proceda como visto no capítulo anterior. Por exemplo, se $(A - \lambda_k I)$ estiver particionada na forma:

$$(A - \lambda_k I) = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

com B não singular de posto igual ao de $(A - \lambda_k I)$, então $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma inversa generalizada de $(A - \lambda_k I)$. Assim, empregando a partição $z = \begin{pmatrix} -v \\ -w \end{pmatrix}$, obtemos:

$$u^k = \left[\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} - I \right] z = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1}C \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1}Cw \\ w \end{pmatrix},$$

com w sendo um vetor de dimensão $n - r(A - \lambda_k I)$.

Exemplo [?]: Os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ são $\lambda_1 = 1$ (de multiplicidade $m_1 = 2$) e $\lambda_2 = -1$ (de multiplicidade $m_2 = 1$). Para determinar um autovetor associado a λ_1, tomemos a matriz $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, que tem posto igual a $r(A - \lambda_1 I) = 1$. Logo, tomando $B = (-2)$, com $B^{-1} = (-1/2)$, $C = (-2 \ \ -2)$ e o vetor w de dimensão $3 - r(A - \lambda_1 I) = 2$, ou seja $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, temos:

$$u^1 = \begin{pmatrix} -B^{-1}Cw \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1/2)(-2 \ \ -2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 - w_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Para explicitar um autovetor para A associado a λ_1, basta atribuir valores a w_1 e w_2. Por exemplo, se fizermos $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$, obtemos $\bar{u}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por outro lado, se fizermos $w_1 = 0$ e $w_2 = 1$, obtemos $\tilde{u}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Não esqueça que existem no máximo $3 - r(A - \lambda_1 I) = 2$ soluções LI's para o sistema linear associado a λ_1.

Quanto a um autovetor associado a λ_2, seja a matriz $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que tem posto igual a $r(A - \lambda_2 I) = 2$. Logo, tomando $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, com $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o vetor w de dimensão $3 - r(A - \lambda_2 I) = 1$, ou seja $w = (w_1)$, temos:

$$u^2 = \begin{pmatrix} -B^{-1}Cw \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} (w_1) \\ -(w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w_1 \\ -w_1 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Logo, para explicitar um autovetor para A associado a λ_2, basta atribuir um valor a w_1. Por exemplo, se fizermos $w_1 = 1$, obtemos $\bar{u}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Fica claro que para λ_2 existe apenas uma solução LI, ou seja, apenas um $(3 - r(A - \lambda_2 I) = 1)$ autovetor LI associado ao sistema linear $(A - \lambda_2 I)u^2 = \mathbf{0}$.

6.4 Diagonalização de uma matriz

Considere inicialmente uma matriz A_n cujos autovalores são representados por $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Seja u^i, $i = 1, \cdots, n$, um autovetor associado a λ_i. Ou seja:

$$Au^i = \lambda_i u^i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Agrupando os vetores-coluna Au^i, $i = 1, \cdots, n$, podemos formar a matriz:

$$[Au^1\ Au^2\ \cdots Au^n] = [\lambda_1 u^1\ \lambda_2 u^2\ \cdots \lambda_n u^n] = [u^1\ u^2\ \cdots\ u^n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

que pode ser também escrita na forma $AU = UD$, com $U = [u^1\ \ u^2\ \ \cdots\ \ u^n]$ e $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. A matriz D é conhecida como **forma canônica similar** da matriz A.

É interessante notar que quando um autovalor λ_i for raiz múltipla do polinômio característico de uma matriz A, então a matriz U poderá ter tantas colunas repetidas quanto for a multiplicidade dessa raiz. O mesmo vale para o número de vezes que esse autovalor figura como elemento diagonal da matriz D. Por exemplo, para a matriz do exemplo anterior, podemos ter:

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad com \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou alternativamente, para esse mesmo exemplo, podemos obter uma matriz $\hat{U}$ cujas colunas associadas ao autovalor $\lambda_1 = 1$ (de multiplicidade igual a dois) e ao autovalor $\lambda_2 = -1$ (de multiplicidade igual a um) são todas linearmente independentes. Um exemplo seria:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A nós nos interessa saber em que situações podemos encontrar uma matriz U formada por autovetores LI's. Pois, nesse caso, a matriz A poderá ser diagonalizada da forma:

$$U^{-1}AU = D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

Em seguida apresentamos uma propriedade que permite identificar se uma matriz pode ou não ser diagonalizada. Para tanto, precisamos da seguinte definição:

Definição 34 *Seja uma matriz A_n de autovalores dados por $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, cujas multiplicidades são dadas por $m_1, m_2, \cdots, m_s$, respectivamente, com $\sum_{k=1}^{s} m_k = n$. A matriz A_n será uma* ***matriz regular*** *se todos seus s autovalores distintos forem regulares, ou seja:*

$$r(A - \lambda_i I) \quad = \quad n - m_k, \quad k = 1, \cdots, s. \tag{6.4}$$

Propriedade 42 *Uma matriz é diagonalizável se e somente se for regular (nesse caso, pode ser formada de n autovetores LI's).*

Exemplo [?]: A matriz do exemplo anterior possui dois autovalores regulares, pois $r(A - \lambda_1 I) = 1 = 3 - 2$ e $r(A - \lambda_2 I) = 2 = 3 - 1$. Logo, podemos diagonalizá-la empregando, por exemplo, a matriz $\hat{U}$ mencionada anteriormente.

A diagonalização de uma matriz A_n é importante em aplicações onde precisamos calcular sua potência A^k. Caso a matriz A possa ser expressa como $A = U^{-1}DU$, então é fácil perceber que:

$$A^k = (U^{-1}DU)^k = U^{-1}D^kU.$$

6.5 Matrizes simétricas

O uso freqüente de matrizes simétricas em Estatística nos faz apresentar algumas propriedades [?] desse tipo de matriz envolvendo seus autovalores e autovetores. Em particular, iremos tratar exclusivamente de matrizes simétricas reais.

Propriedade 43 *Os autovalores de toda matriz simétrica real são reais.*

Prova [?]: Seja M_n uma matriz real tal que $M = M'$. Considere que M tenha um autovalor complexo, ou seja, da forma $\lambda = \alpha + \beta i$. Nesse caso, $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ também é autovalor de M. Considere $u = a + bi$ e $\bar{u} = a - bi$ os autovetores associados a λ e $\bar{\lambda}$, respectivamente (mostre isso como exercício). Da definição de autovalor vem que: (i) $Mu = \lambda u$ e (ii) $M\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$. Pré-multiplicando a igualdade (i) por $\bar{u}'$ obtemos $\bar{u}'Mu = \bar{u}'\lambda u = \lambda\bar{u}'u$. Note que $\bar{u}'Mu = (M\bar{u})'u$; logo, usando a igualdade (ii), concluímos que $(M\bar{u})'u = (\bar{\lambda}\bar{u})'u$. Então, as duas expressões para $\bar{u}'Mu$ fornecem $\lambda\bar{u}'u = (\bar{\lambda}\bar{u})'u$. Como $\bar{u}'u > 0$, por ser uma soma de quadrados de números reais, então vem que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, λ é real.

Propriedade 44 *Toda matriz simétrica é diagonalizável; ou seja, se $A = A'$, então existe U não singular e ortonormal tal que $A = UDU^{-1}$.*

Prova: Ver [**?**].

Propriedade 45 *Autovetores de uma matriz simétrica são ortogonais.*

Prova: Ver [**?**].

Vale lembrar que quando λ_k for um autovalor de multiplicidade m_k de uma matriz simétrica A, se $r(A - \lambda_k I) = n - m_k$, então podemos determinar m_k autovetores de A de forma que eles sejam ortonormais (e LI's entre si) associados a λ_k. Uma forma de obter uma matriz U ortonormal tal que $D = U'AU$ (denominada de **forma canônica sob similaridade ortogonal**) é normalizando o conjunto de autovetores *ortogonais* da matriz U, trocando-se cada autovetor (coluna) u de U por $(u/\sqrt{u'u})$. Não esqueça que o conjunto LI de autovetores de U deve ser determinado de forma que eles sejam ortogonais uns aos outros. Nesse caso, obtemos:

$$U'AU = D \quad com \quad UU' = I.$$

Exemplo [?]: Vamos colocar a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que tem equação característica $(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$, em sua forma canônica sob similaridade ortogonal. Inicialmente, calculando um autovetor para $\lambda_1 = 5$, obtemos: $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, de onde derivamos à expressão $u^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$. E um autovetor para $\lambda_2 = -1$ é obtido usando a matriz $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de onde podemos obter à expressão $u^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(w_1+w_2)\\w_1\\w_2\end{pmatrix}$. Atribuindo, por exemplo, o valor $w_1 = 1$ em u^1, obtemos $u^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Tenha em mente que associado a λ_1 só existe um autovetor LI. Independentemente dos valores que possamos atribuir a w_1 e a w_2 em u^2, perceba que $(1\ 1\ 1)u^2 = 0$, ou seja, são ortogonais somente por serem provenientes de autovalores distintos. Tomemos então um dos autovetores associados a λ_2 como sendo igual a $(u^2)' = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Como podemos obter até dois autovetores LI's para λ_2, o segundo deles deve ser ortogonal ao autovetor $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}'$; ou seja, $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\hat{u}^2 = 0$. Como essa última igualdade se reduz a $2(w_1+w_2)+w_1+w_2 = 0$, vem que $w_1 = -1$ e $w_2 = 1$ é uma solução para essa equação. Logo, o outro autovetor associado a u^2 pode ser dado por $\hat{u}^2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}'$. O próximo passo é normalizar os autovetores $u^1,\ u^2,\ \hat{u}^2$, o que nos fornece:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Então a matriz U procurada pode ser dada por:

$$U = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

e podemos verificar que $U'AU = D = Diag(5,-1,-1)$, com $UU' = I$.

Propriedade 46 *O posto $r(A)$ de uma matriz simétrica A_n é igual ao número z_A de autovalores não nulos de A.*

Prova [?]: Por ser simétrica, existe U tal que $A = UDU'$ para alguma matriz ortogonal U. Veja que o posto de A e D são iguais. Porém, os únicos elementos não nulos em D são os autovalores de A, logo seu posto corresponde ao número de tais elementos diferentes de zero. Esse resultado é válido para toda matriz diagonalizável.

6.5.1 Decomposição espectral

Em algumas situações em Estatística estaremos interessados em avaliar expressões do tipo $P^k t$, com P sendo uma matriz (possivelmente simétrica) de transição de probabilidade e t um dado vetor. Uma forma de avaliá-la seria via decomposição espectral da matriz A.

Seja A_n uma dada matriz simétrica e $\lambda_1, \cdots, \lambda_1$ seus autovalores. Suponha que u^i seja um autovetor associado a λ_i, $i = 1, \cdots, n$. Representando a matriz UU' como produto externo de vetores, com $U = \begin{pmatrix} u^1 & \cdots & u^n \end{pmatrix}$, obtemos $UU' = \sum_{i=1}^n u^i(u^i)'$. Caso U seja ortogonal, i.e. $UU' = I$, então $AUU' = AI = A$. Ou ainda:

$$A = AUU' = A(\sum_{i=1}^n u^i(u^i)') = \sum_{i=1}^n Au^i(u^i)' = \sum_{i=1}^n \lambda_i u^i(u^i)'.$$

A expressão acima é denominada de **decomposição espectral** da matriz A.

Exemplo [**?**]: Empregando a matriz U do exemplo anterior, a matriz A pode ser decomposta usando seu espectro em:

$$A = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A decomposição espectral também se aplica ao cálculo de potências de uma matriz A_n. Podemos mostrar que:

$$A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u^i(u^i)'.$$

6.6 Exercícios

1. Forneça um exemplo prático de aplicação de autovalores para a Estatística.

2. Determine os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

   (a) $aI + bJ$, com I e J matrizes de ordem n, com a e b escalares. Proponha um método para diagonalizar uma matriz uniforme.

   (b) A matriz diagonal $D_n = \{d_{11}, \cdots, d_{nn}\}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Prove os resultados apresentados na propriedade **??**.

4. Prove que e^λ é um autovalor de $e^A = \sum_{i \geq 0} A^i/i!$.

5. Explique por que o sistema $(A - \lambda_k I)u^k = \mathbf{0}$ tem no máximo $n - r(A - \lambda_k I)$ soluções LI's, uma a menos do que o informado pela propriedade **??**.

6. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo. Diagonalize-as e encontre suas formas canônicas sob similaridade ortogonal quando possível.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 3 \\ 6 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Coloque a matriz triangular inferior $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}$ na forma $A = UDU^{-1}$.

8. Encontre os autovalores de $I - xx'$, com $x \in \mathbb{R}^n$.

9. Prove que os autovalores de $A + A^{-1}$ são maiores ou iguais a dois quando os autovalores de A são positivos.

10. Seja A_n uma matriz simétrica de autovalores denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Prove que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

11. Mostre que toda matriz A_n satisfaz sua própria equação característica e deduza como obter a inversa de uma matriz usando essa equação.

Capítulo 7

Formas quadráticas

7.1 Introdução

Uma forma quadrática $f(x)$ é toda expressão (polinômio em $x \in \mathbf{R}^n$) do tipo

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,\, j>i}^{n} x_i x_j (a_{ij} + a_{ji}),$$

onde A_n é uma dada matriz real quadrada de ordem n e x é um vetor real arbitrário.

Exemplos de formas quadráticas são:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 7x_1x_2 - x_2x_3, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2.$$

Toda forma quadrática, em representação explícita, pode ser expressa de várias formas matriciais. Para os exemplos acima, com $x' = (x_1, x_2, x_3)$, algumas representações para f_1 são:

$$f_1(x) = x' \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \\ -9 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = x' \begin{pmatrix} 2 & 100 & -\sqrt{2} \\ -93 & 5 & 2 \\ \sqrt{2} & -3 & -1 \end{pmatrix} x = x' \begin{pmatrix} 2 & 7/2 & 0 \\ 7/2 & 5 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} x.$$

enquanto que f_2 pode ser matricialmente representada por:

$$f_2(x) = x' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x = x' \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} x = x' \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} x.$$

Observe que para uma mesma forma quadrática $x'Ax$ sempre os elementos diagonais a_{ii} da representação matricial são iguais ao coeficiente de x_i^2, enquanto a soma dos elementos $a_{ij} + a_{ji}$ é constante e igual ao coeficiente de $x_i x_j$.

Note que existe, para cada forma quadrática $x'Ax$, uma única matriz simétrica S para a qual $x'Ax = x'Sx$. Para o caso onde A não é simétrica, basta fazer $S = \frac{1}{2}(A' + A)$.

Algumas formas quadráticas são bastante conhecidas em Estatística. Abaixo citamos alguns exemplos:

- Soma de quadrados: se $A = I_n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$;
- Quadrado da soma. Se $A = J_n$, $f(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$;
- Soma de quadrados total. Se $A = I_n - \frac{1}{n}J_n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$;
- Variância das medidas $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Se $A = \dfrac{I_n - \frac{1}{n}J_n}{n}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$;

7.2 Classificação de formas quadráticas

Adotaremos aqui a classificação encontrada em Harville [**?**]. A classificação de uma forma quadrática $f(x)$ é a mesma da matriz A de sua representação matricial $f(x) = x'Ax$.

Definição 35 *Uma matriz A é definida positiva (DP) se*

$$x'Ax > 0, \ \forall \ x \neq 0.$$

Por exemplo [**?**], sendo $x' = (x_1, x_2, x_3)$, temos

$$f(x) = x' \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = (x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2,$$

logo percebemos que, para todo $x \neq 0$, teremos $x'Ax > 0$. Para ver isso, basta resolver o sistema linear que resulta se igualarmos a zero cada termo da soma acima:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é única [por quê?] e igual ao vetor nulo.

Definição 36 *Uma matriz A é semi-definida positiva se*

$$x'Ax \geq 0, \ \forall \ x,$$

e existe $x \neq 0$ para o qual $x'Ax = 0$.

Por exemplo [**?**], para $x' = (x_1, x_2, x_3)$,

$$f(x) = x' \begin{pmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{pmatrix} x = (x_1 - 2x_2)^2 + (6x_1 - 4x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2,$$

podemos comprovar que $f(2,1,3) = 0$. Para se obter outras soluções não nulas que tornem $f(x) = 0$, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ 6x_1 - 4x_3 & = & 0 \\ 3x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução genérica, obtida usando inversa generalizada da matriz incompleta desse sistema, é dada por $x' = (-2\alpha/3, -\alpha/3, -\alpha)$, com α arbitrário.

Matrizes DP e SDP são chamadas também de definidas não negativas. Quando trocamos linhas/colunas de uma matriz definida não negativa, a matriz resultante mantém essa propriedade.

Podemos também mostrar que:

1. se A é PD, então $a_{ii} > 0$ e $|A| > 0$.

2. se A é SPD, então $a_{ii} \geq 0$ e $|A| = 0$.

3. Se A é uma matriz definida não negativa, então seus menores principais são todos positivos ou nulos.

Uma matriz ser definida não negativa é uma condição suficiente para que seus menores principais sejam positivos ou nulos. O contrário não é válido. Por exemplo, se todos os menores principais de uma matriz forem positivos ou nulos, será que ela é não negativa? Teste para a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ com $x' = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$.

Definição 37 *Uma matriz A é definida negativa (DN) se*

$$x'Ax < 0, \ \forall \ x \neq 0.$$

Por exemplo, para $x' = (x_1, x_2, x_3)$, temos

$$f(x) = x' \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2,$$

e percebemos claramente que, para todo $x \neq 0$, $x'Ax < 0$.

Definição 38 *Matriz semi-definida negativa (SDN).*

Uma matriz A é semi-definida negativa se

$$x'Ax \leq 0, \ \forall \ x,$$

e existe $x \neq 0$ para o qual $x'Ax = 0$.

Por exemplo, $f(x) = -(x_1 - 2x_2)^2 - (6x_1 - 4x_3)^2 - (3x_2 - x_3)^2$, que é a função do exemplo de matriz SDP com o sinal trocado.

Matrizes DN e SDN são chamadas também de definidas não positivas.

Se $f(x) = x'Ax$ troca de sinal conforme a escolha de $x \neq \mathbf{0}$, então f não é definida. Por exemplo, para $x' = (x_1, x_2)$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, temos $f(1,1) = 8$ e $f(1,-1) = -4$.

A classificação de formas quadráticas através da definição é pouco operacional. Como já mencionado anteriormente, existe uma única matriz simétrica $S = 1/2(A + A')$ tal que $x'Sx = x'Ax$, assim como existe uma matriz não singular P tal que PSP' é uma matriz diagonal $D = \{d_{11}, \cdots, d_{nn}\}$. Logo, uma alternativa é diagonalizar a matriz S através de operações elementares antes de proceder à sua classificação.

Propriedade 47 *A classificação de uma forma quadrática não se altera por transformação não singular.*

Prova: Seja $f(x) = x'Ax$ e a transformação não singular $x = P'y$. Então $f(x) = x'Ax = y'PAP'y = y'Dy = f(y)$, onde A e $PAP' = D$ são congruentes (com D sendo uma matriz diagonal), tendo portanto a mesma classificação e o mesmo acontecendo com $f(x)$ e $f(y)$.

Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado:

Propriedade 48 *Dada a forma quadrática $f(x) = x'Ax$. Sejam as matrizes S (simétrica, com $S = 1/2(A + A')$) e P tal que $PSP' = D$, com D sendo uma matriz diagonal. Seja d_{ii} o i-ésimo elemento da diagonal principal de D, então:*

- *Se $d_{ii} > 0$, então A é PD;*
- *Se $d_{ii} \geq 0$ e existe pelo menos um elemento não nulo na diagonal principal, A é SDP;*
- *Se $d_{ii} < 0$, A é ND;*
- *Se $d_{ii} \leq 0$ e existe pelo menos um elemento não nulo na diagonal principal, A é SDN;*
- *Se d_{ii} troca de sinal , então A não é definida.*

Quando a matriz A da forma quadrática f for simétrica, ela pode ser diagonalizável usando seus autovalores e autovetores. Isso permite escrever f em função dos autovalores de A como segue.

Propriedade 49 *Seja A_n uma matriz simétrica de posto $k \leq n$, então a forma quadrática $f(x) = x'Ax$ pode ser escrita na forma:*

$$f(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2, \tag{7.1}$$

com $y_i \in \mathbb{R}$ e onde λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, são as k raízes características não nulas de A.

Prova: Seja A_n uma matriz simétrica e $D = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ uma matriz diagonal formada pelos n autovalores de A. Seja U uma matriz não singular ortonormal formada por autovetores de A (ver proposição **??**). Então, podemos escrever $A = AI = A(UU') = AUU' = UDU'$, logo $f(x) = x'Ax = x'UDU'x$. Fazendo $y' = x'U$, vem que $x'Ax = y'Dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

Segue um exemplo de aplicação da proposição acima para classificar a forma quadrática $f(x) = x'Ax$, com $x' = (x_1, x_2, x_3)$ e A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

As raízes características de A são: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$. Assim, a matriz D é positiva definida e portanto a forma quadrática também o é.

O fato de uma matriz A, de uma forma quadrática $f(x) = x'Ax$, ser simétrica nos permite estabelecer uma condição necessária e suficiente para a não negatividade dessa matriz.

Propriedade 50 *Seja A_n uma matriz simétrica. Defina A_k, para $k = 1, \cdots, n$, como sendo a submatriz:*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Então: (i) A é definida positiva se e somente se $|A_k| > 0$, para todo $k = 1, \cdots, n$; (ii) A é semi definida positiva se e somente se $|A_k| \geq 0$, para todo $k = 1, \cdots, n$;

Prova: Ver Harville [**?**]. Consulte essa referência para muitas outras propriedades sobre formas quadráticas.

7.3 Decomposição em posto completo de matrizes simétricas DP ou SDP

A forma diagonal de uma matriz A não negativa é constituída somente por elementos não negativos. Pelo fato de matrizes definidas não negativas serem simétricas, então sua decomposição em posto completo KL existe e é igual a $A = KK'$, com K real e de posto coluna completo. Veja que, quando A é DP, a matriz K é inversível. Além do mais, para matrizes reais X, o produto $X'X$ é sempre não negativo e, se X tiver posto coluna completo, então $X'X$ é DP; caso contrário, $X'X$ é SDP.

Além disso, por se tratar de um produto simétrico $X'X$, matrizes definidas não negativas têm as seguintes propriedades:

1. Todos seus autovalores são reais.

2. Os autovalores de uma matriz simétrica são todos não negativos se e somente se a matriz for definida não negativa. Conseqüentemente, serão todos positivos se e somente se a matriz for definida positiva.

3. São matrizes diagonalizáveis.

7.4 Exercícios

1. Identifique quais das expressões abaixo são formas quadráticas:

   (a) $4x_1^2x_2 - 3x_2^2 + x_2x_3$

   (b) $-x_1^{1/2}x_2^{3/2} - 2x_2^2$

   (c) $x_1^2 + x_2 - 10x_2^2$

   (d) $x_1^2 + 2x_1 + 1$

2. Coloque em forma matricial as formas quadráticas:

   (a) $7x_1^2 + 28x_1x_2 + 4x_2^2$

   (b) $(2x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (4x_1 - 12x_3)^2$

3. Seja A uma matriz anti-simétrica. Prove que $I + A$ é definida positiva.

4. Seja A uma matriz real. Prove que $I + AA'$ é definida positiva.

5. Dado um escalar $k > 0$, mostre que se A é DP, então também o é kA.

6. Mostre que se $A_1, \cdots, A_n$ são n matrizes definidas não negativas (de mesma ordem), então também o será a soma $\sum_i A_i$.

7. Mostre que toda matriz definida positiva (DP) é não singular e sua inversa é DP.

8. Prove que dada qualquer matriz $B_{m\times n}$, a matriz $B'B$ é definida não negativa e, se $r(B'B) = n$, então $B'B$ é DP; caso contrário, será SDP.

9. Classifique as matrizes abaixo em DP, SDP, DN, SDN ou indefinida:

   (a) I_n, J_n, $I_n - J_n/n$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 12 & 45 & 78 \\ 20 & 78 & 136 \end{pmatrix}$

Bibliografia

[1] CASTRUCCI, B., DONATTO, W., PERRELLA, L.A., -*Somatórios, Produtórios, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares*, segunda edição, Livraria Nobel S.A., São Paulo, 1975.

[2] DOSTOR, G., - *Eléments de la théorie des déterminants*, 3a edição, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1921.

[3] GRAYBILL, F.A. - *Introduction to matrices with application in statistics*, Colorado State University, Vol II - 2a edição, 2002.

[4] HARVILLE, D. A. - *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer, New York, 1997.

[5] IEMMA, F. A. - *Álgebra de matrizes (Apostila)*, Universidade de São Paulo, 1996.

[6] IEMMA, F. A. - *Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária*, Universidade de São Paulo, 1987.

[7] LIPSCHUTZ, S. - *Álgebra Linear: teoria e problemas*, Ed. McGraw-Hill, 3a edição, São Paulo, 1994.

[8] NETO, A. A. et al. - *Combinatória, Matrizes e Determinantes: Noções de Matemática*, Ed. Moderna, 1a edição, Vol. 4, São Paulo, 1979.

[9] MORRISON, D. F. - *Multivariate statistical methods*, Ed. McGraw-Hill, 2a edição, Tokyo, 1976.

[10] PEASE, M. C. III, - *Methods of matrix algebra*, Ed. Academic Press, New York, 1965.

[11] SEARLE, S. R. - *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1982.

[12] SEARLE, S. R. - *Linear Models*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1971.

[13] WEISSTEIN, E., *Math World (Mundo da Matemática)*, Website http://mathworld.wolfram.com/