Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da UFC
CC0285- Probabilidade II
Professor: Maurício
Aula:16/08/2023

1. Análise de Sobrevivência ou Análise de Confiabilidade:

   Seja X uma variável aleatória contínua não negativa com função densidade de probabilidade $f(x)$, função de distribuição acumulada $F(x)$ e função de sobrevivência $S(x)$.

   Uma das grandes aplicações desse tipo de variável é para modelar o tempo de vida (doente ou não) de uma pessoa ou de um componente eletrônico. Em Engenharia temos a Análise

   de Confiabilidade e em Medicina a Análise de Sobrevivência.

2. -Bibliografia

   1. Probabilidade-Aplicações à Estatística.. Paul L.Meyer.Capítulo 11.

   2. Probabilidade- Um Curso Moderno com Aplicações-Sheldom Ross-Editora Bookman-Oitava Edição,2010.

   3. Análise de Sobrevivência Aplicada. Enrico Antônio Colósimo e Suely Ruiz Giolo-ABE-Projeto Fisher. Editora Edgard Blücher-2006

   4. Análise de Sobrevivência- Teoria e Aplicações em Saúde. Marília Sá Carvalho, Valeska Lima Andreozzi, Cláudia Torres Codeço, Maria Tereza Serrano Barbosa e Silvia Emiko Shimakura. Editora FioCruz. Segunda Edição, 2011.

   5. Survival Analysis-Techniques for Censored and Truncated data. John P. Klein e Melvin L. Moeschberger. Editora Springer, 1997.

Vamos definir agora os principais termos usados nessas áreas.

3. Função de Sobrevivência.

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x).$$

Principais Propriedades de $S(x)$.

i) $S(x)$ é uma função sempre não crescente.

ii) $S(x)$ é uma função contínua. No caso discreto sempre contínua à direita.

iii) $\lim_{x \to -\infty} S(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} S(x) = 0.$

iv. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = S(a) - S(b).$

A função de Sobrevivência nos permitirá responder questões do tipo:

a. Qual a probabilidade do paciente sobreviver 2 anos ou mais desde o diagnóstico da doença?
b. Qual a probabilidade do paciente sobreviver 2 anos ou mais desde o diagnóstico da doença dado que ele sobreviveu ao primeiro ano?
c. Qual o tempo médio de vida do paciente desde o diagnóstico da doença?
d. Qual o tempo mediano de vida do paciente desde o diagnóstico da doença?
e. Dado que o paciente sobreviveu ao primeiro ano de tratamento, qual o tempo médio residual de vida desse paciente?
f. Encontre a taxa de falha de morte do paciente aos 3 anos depois do diagnóstico da doença? Interprete este valor.

Qualquer quantil de ordem q da distribuição de vida do paciente ou do componente eletrônico x_q pode ser dado como solução da equação :

$$S(x_q) = 1 - q.$$

4. O tempo médio de vida do paciente, $E(X)$, será dado por:

$$E(X) = \int_0^\infty x\ f(x)dx = \int_0^\infty S(x)dx.$$

Generalizando temos que $E(X^r)$ será dado por:

$$E(X^r) = \int_0^\infty t^r\ f(t)dt = \int_0^\infty S(t^{1/r})dt.$$

5. Função de Taxa de Falha ou Risco.

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ é expressa em temos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq X < t_2) = S(t_1) - S(t_2).$$

A taxa de falha no intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ é definida como a probabilidade de que a taxa ocorra nesse intervalo, dado que não ocorreu antes de t_1, dividida pelo comprimento do intervalo $t_2 - t_1$. Assim, a taxa de falha no intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ é expressa por:

$$\lambda(t) = \frac{S(t_1) - S(t_2)}{(t_2 - t_1)S(t_1)}.$$

Fazendo $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$ temos que :

$$\lambda(t) = \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t S(t)}.$$

assumindo Δt bem pequeno, $\lambda(t)$ representa a taxa de falha instantânea no tempo t condicional à sobrevivência até o tempo t. a função de falha é bastante útil para descrever a distribuição do tempo de vida do paciente ou do componente eletrônico. Ela descreve a forma em que a taxa de falha instantânea muda com o tempo.

A função de taxa de falha de X é definida como:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t | X \geq t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t)}{P(X \geq t)\Delta t}.$$

Ela pode ser posta na forma:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{S(t)\Delta t} = \frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

A partir de $\lambda(t)$ podemos achar a f.d.p. de X lembrando ainda que $S(0) = 1$. Logo

$$f(x) = \lambda(x)\ exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dt\right] I_A(t), \quad A = (0, \infty).$$

Prova:

Sabemos que

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}.$$

Integrando de 0 até $x > 0$ temos

$$\int_0^x \lambda(t)dt = -\int_0^x \frac{S'(t)}{S(t)}dt = -ln(S(t))\Big|_0^x = -ln(S(x)) + ln(S(0)) = -ln(S(x)).$$

Assim,

$$ln(S(x)) = -\int_0^x \lambda(t)dt$$

$$S(x) = exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dt\right],$$

finalmente,

$$f(x) = -S'(x) = \lambda(x)\ exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dt\right] I_A(t), \quad A = (0, \infty).$$

6. . Função de Taxa de Falha Acumulada.

Outra função útil em análise de dados de sobrevivência é a função de taxa acumulada que é definida por:

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(t)dt = -ln(S(x)).$$

Segundo, Colósimo e Giolo, página 24, a função de taxa de falha acumulada não tem uma interpretação direta, mas pode ser útil na avaliação da função de maior interesse que é a taxa de falha , $\lambda(x)$. Isto acontece essencialmente na estimação não paramétrica em que $\Lambda(x)$ apresenta um estimador com propriedades ótimas e $\lambda(x)$ é difícil de ser estimada.

7. Tempo de Vida Residual

   Vamos analisar a seguinte situação: Qual a distribuição do tempo de vida do paciente sabendo que ele já sobreviveu a t unidades de tempo, isto é, qual a distribuição de

$$Y = X|X > t?$$

   Note que é um caso de distribuição truncada e sua f.d. p. é dada por:

$$g(y) = \frac{f(y)}{S(t)}\, I_A(y), \;\; A = (t, \infty).$$

   Prova: Seja $y > t$,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y|X > t) = \frac{P(t < X \leq y)}{S(t)} = \frac{F(y) - F(t)}{S(t)}.$$

   Derivando em relação a y o resultado fica provado.

   A função de sobrevivência de Y é dada por:

$$S_Y(y) = 1 - G(y) = 1 - \frac{F(y) - F(t)}{S(t)} = \frac{S(y)}{S(t)} I_A(y), \;\; A = (t, \infty).$$

   O tempo de vida médio residual, $E(Y) = vmr(t)$, é definido por:

$$vmr(t) = E(Y) = \frac{\int_t^{\infty} S(y)dy}{S(t)} = \frac{\int_t^{\infty} (u-t)f(u)du}{S(t)}.$$

8. Resumo das Relações entre as Funções: $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$, $f(x)$, $S(x)$ e $vmr(x)$, $x \geq 0$.

   a.
$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx}\left(ln(S(x))\right).$$

   b.
$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(t)dt = -ln(S(x)).$$

   c.
$$S(x) = exp[-\Lambda(x)] = exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dt\right].$$

   d.
$$S(x) = \frac{vmr(0)}{vmr(x)} \;\; exp\left[-\int_0^x \frac{dt}{vmr(t)}\right],$$

   em que $vmr(0) = E(X)$.

e.

$$\lambda(x) = \frac{\left(\dfrac{dvmr(x)}{dx} + 1\right)}{vmr(x)}.$$

9. Principais Distribuições de Probabilidade utilizadas em Análise de Sobrevivência.

9.1 Distribuição Exponencial. Notação $X \sim Exp(\alpha)$.

a. Função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\, exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right] \;\; I_A(x), \;\; A = [0, \infty).$$

b. Função de sobrevivência.

$$S(x) = exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right] \;\; I_A(x), \;\; A = [0, \infty).$$

c. Quantil de ordem q. De $S(x_q) = 1 - q$ temos:

$$exp\left[-\frac{x_q}{\alpha}\right] = 1 - q$$

temos que:

$$x_q = -\alpha \; ln(1 - q).$$

d. Momentos.

$$E(X) = \int_0^\infty \; S(x)dx = \int_0^\infty \; exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right] \; dx = \alpha \int_0^\infty \; \frac{1}{\alpha} exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right] \; dx = \alpha.$$

Vamos calcular $E(X^2)$,

$$E(X^2) = \int_0^\infty \; S(x^{1/2})dx = \int_0^\infty \; exp\left[-\frac{x^1/2}{\alpha}\right].$$

Sabemos que :

$$\int_0^\infty \; x^a \quad e^{-b\; x^c} \; dx = \frac{\Gamma[(a+1)/c]}{c\; b^{(a+1)/c}}. \quad a > -1, b > 0, c > 0$$

Voltando ao cálculo de $E(X^2)$ temos $a = 0$, $b = \dfrac{1}{\alpha}$ e $c = 1/2$, logo

$$(a+1)/c = 2 \;\; e \;\; c\, b^{(a+1)/c} = \frac{1}{\alpha^2}$$

, assim

$$E(X^2) = 2\alpha^2.$$

E portanto

$$V(X) = \alpha^2.$$

e. Taxa de falha .

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{1}{\alpha}\, exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right]}{exp\left[-\frac{x}{\alpha}\right]} = \frac{1}{\alpha}.$$

Assim a distribuição Exponencial tem taxa de risco constante.

f. Taxa de falha Acumulada.

$$\Lambda(x) = -ln(S(x)) = \frac{x}{\alpha}.$$

A função de taxa de falha acumulada da exponencial é uma função linear.

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.
A distribuição de $Y = X|X > t$ é dada por:

$$g(y) = \frac{\frac{1}{\alpha}\, exp\left[-\frac{y}{\alpha}\right]}{exp\left[-\frac{t}{\alpha}\right]} = \frac{1}{\alpha}\, exp\left[-\frac{(y-t)}{\alpha}\right] I_A(y), \;\; A = (t, \infty),$$

que é a densidade da exponencial truncada de parâmetros α e t.
Um cálculo rápido mostra que

$$E(Y) = vmr(t) = \alpha + t, \qquad V(Y) = \alpha^2.$$

9.2 Distribuição de Weibull. Notação $X \sim Exp(\alpha, \gamma)$, $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$.

a. Função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\alpha^\gamma}\, x^{\alpha-1}\, exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right] \;\; I_A(x), \;\; A = [0, \infty).$$

b. Função de sobrevivência.

$$S(x) = exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right] \;\; I_A(x), \;\; A = [0, \infty).$$

c. Quantil de ordem q.

$$x_q = -\alpha\, [\, ln(1-q)]^{1/\gamma}\, .$$

d. Momentos.

$$E(X) = \alpha\; \Gamma(1 + \frac{1}{\gamma}),$$

$$V(X) = \alpha^2 \left[\Gamma(1 + \frac{2}{\gamma}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\gamma})\right].$$

e. Taxa de falha .

$$\lambda(x) = \frac{\gamma\; x^{\gamma-1}}{\alpha^\gamma}\; x \geq 0,\; \alpha.0\; e\; \gamma > 0.$$

A taxa de falhas da Weibull pode ser constante ($\gamma = 1$), crescente ($\gamma > 1$) ou decrescente ($\gamma < 1$). Quando $\gamma = 1$) temos a distribuição exponencial.

f. Taxa de falha Acumulada.

$$\Lambda(x) = -ln(S(x)) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma.$$

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.

9.3 Distribuição Log-Logística.

a. Função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\alpha^\gamma}\, x^{\gamma-1}\, \left(1 + (\frac{x}{\alpha})^\gamma\right)^{-2} \;\; I_A(x), \;\; A = [0, \infty),$$

sendo $\alpha > 0$ o parâmetro de forma e $\gamma > 0$ o parâmetro de escala.

b. Função de sobrevivência.

$$S(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma}.$$

c. Quantil de ordem q.

$$x_q = \alpha\; \left[\frac{q}{1-q}\right]^{1/\gamma}.$$

d. Momentos.

$$E(X) = \frac{\pi \ \alpha \ cossec(\pi/\gamma)}{\gamma}, \ \ \gamma > 1.$$

$$E(X^2) = \frac{2\pi \ \alpha^2 \ cossec(2\pi/\gamma)}{\gamma}, \ \ \gamma > 1.$$

e. Taxa de falha .

$$\lambda(x) = \frac{\gamma \ \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}}{\alpha \ \left[1 + \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]}.$$

f. Taxa de falha Acumulada.

$$\Delta(x) = ln\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right).$$

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.

9.4 Distribuição Gama.

a. Função densidade de probabilidade.

b. função de sobrevivência.

c. Quantil de ordem q.

d. Momentos.

e. Taxa de falha .

f. Taxa de falha Acumulada.

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.

9.5 Distribuição Gama Generalizada.

Outra distribuição que merece destaque em análise de sobrevivência é a distribuição gama generalizada. Stacy em 1962 a introduziu e é caracterizada por três parâmetros positivos γ ,k e α. Sua f.d.p. é dada por:

a. Função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\Gamma(k) \ \alpha^{\gamma^k}} \ x^{\gamma^k - 1} \ exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right] \ \ I_A(x), \ \ A = [0, \infty).$$

Para esta distribuição tem-se um parâmetro de escala α e dois de forma γ e k o que a torna bastante atraente e flexível.

São casos especiais da Gama Generalizada:

a. Para $\gamma = k = 1$ tem-se $X \sim Exp(\alpha)$.

b. Para $k = 1$ tem-se $X \sim Weibull(\gamma, \alpha)$.

c. Para $\gamma = 1$ tem-se $X \sim Gama(k, \alpha)$.

d. Para $k \to \infty$ tem-se a distribuição Lognormal(Lawless,1962)

b. função de sobrevivência.

c. Quantil de ordem q.

d. Momentos.

e. Taxa de falha .

f. Taxa de falha Acumulada.

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.

9.6 Distribuição Log-normal.

Ela é utilizada como modelo para o tempo de vida para diodos, semicondutores, isolação elétrica , fadiga de metal. Em Medicina ela é aplicada para descrever o tempo de vida de pacientes com leucemia.

a. Função densidade de probabilidade. Notação $X \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$ μ, real e $\sigma^2 > 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x\sigma} \ exp\left[-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad I_A(x), \ \ A = [0, \infty).$$

b. função de sobrevivência. E´ sabido que $Y = lnX \sim N(\mu, \sigma^2)$. Assim a função de sobrevivência da lognormal pode ser posta em termos da função de distribuição da normal padrão.

$$S(x) = P[X > x] = P[ln(X) > ln(x)] = P\left[Z > \frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z < \frac{-ln(x)+\mu}{\sigma}\right],$$

pela simetria da normal padrão $(P(Z > a) = P(-Z < -a) = P(Z < -a)$.
temos

$$S(x) = \Phi\left(\frac{-ln(x)+\mu}{\sigma}\right),$$

em que $\Phi(.)$ é acumulada da normal padrão.

c. Quantil de ordem q. Os quantis para a distribuição lognormal podem ser obtidos a partir tabela da Normal padrão. Considere z_q tal que $P(Z < z_q) = q$, como $Z = \dfrac{ln(X)-\mu}{\sigma}$ temos que $ln(X) = \mu + \sigma Z$ e assim

$$z_q = \frac{ln(x_q)-\mu}{\sigma}$$

d. Momentos.

$$E(X) = exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}).$$

$$V(X) = exp(2\mu + \sigma^2)\ (exp(\sigma^2) - 1).$$

e. Taxa de falha .

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

f. Taxa de falha Acumulada.

$$\Lambda(x) = -ln(S(x)).$$

g. Densidade do tempo de vida Residual e momentos.

$$g(y) = \frac{f(y)}{S(t)} \, I_A(y), \quad A = (t, \infty).$$

Vamos resolver alguns exercícios para fixar as ideias:

10. Exercícios Resolvidos:

    1 (Sheldom Ross-página 262) Sabemos que a função taxa de risco ou taxa de falhas especifica a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória.

    Se X tem uma função de risco do tipo afim dado por:

$$\lambda(t) = a + bt,$$

então especifique :

a. a função de distribuição acumulada.
b. a função de taxa de risco acumulada.
c. a função densidade de probabilidade
d. a lei quando de X quando $a = 0$.

Solução:

Sabemos que:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\, dt\right).$$

Mas

$$I = \int_0^x \lambda(t)\, dt = \int_0^x (a + bt)\, dt = (at + \frac{b\, t^2}{2})\Big|_0^x$$

$$I = ax + \frac{b\, x^2}{2}.$$

Então para $x > 0$ temos:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-ax - \frac{b\, x^2}{2}\right).$$

A função de sobrevivência de X é dada por:

$$S(x) = \exp\left(-ax - \frac{b\, x^2}{2}\right).$$

Sabemos que a função de taxa de risco acumulada é dada por:

$$\Lambda(t) = -\log(S(t)) = -\left(-at - \frac{b\, t^2}{2}\right) = at + \frac{b\, t^2}{2}.$$

A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x) = F'(x) = (a + bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b\,x^2}{2}\right)\ I_{(0,\infty)}\ (x).$$

Quando $a = 0$ temos:

$$f(x) = bx\ \exp\left(-\frac{b\,x^2}{2}\right)\ I_{(0,\infty)}\ (x),$$

que é a densidade de uma Rayleigh de parâmetro $\beta = \frac{1}{\sqrt{b}} > 0$

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2}\ e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\ \ I_{(0,\infty)}\ (x).$$

2 (Sheldom Ross-Exemplo **5f**-páginas 262 e 263.)

Ouve-se frequentemente que a taxa de mortalidade de pessoas que fumam é, em cada idade, duas vezes maior que a de um não fumante. O que significa isso? significa que um não fumante tem duas vezes mais probabilidade de viver cert número de anos do que um fumante da mesma idade?

Solução: Sejam $\lambda_1(t)$ a taxa de risco de um fumante com idade t e $\lambda_2(t)$ a taxa de risco de um não fumante com a mesma idade t, então pelo enunciado do problema temos:

$$\lambda_1(t) = 2\ \lambda_2(t).$$

Vamos calcular agora a probabilidade de que um não fumante com A anos de idade sobreviva(viva até) a idade $B > A$:

$$p_2 = P(X > B \mid X > A) = \frac{P(X > B)}{P(X > A)} = \frac{S(B)}{S(A)}$$

$$p_2 = \frac{\exp\left(-\int_0^B \lambda_2(t)\ dt\right)}{\exp\left(-\int_0^A \lambda_2(t)\ dt\right)}$$

$$p_2 = \exp\left(-\left[\int_0^B \lambda_2(t)\ dt - \int_0^A \lambda_2(t)\ dt\right]\right) =$$

$$p_2 = \exp\left(-\int_A^B \lambda_2(t)\ dt\right).$$

De maneira análoga a probabilidade de que um fumante com A anos de idade sobreviva até a idade $B > A$ é dada por:

$$p_1 = \exp\left(-\int_A^B \lambda_1(t)\,dt\right).$$

Usando a informação da relação entre as taxas de risco temos:

$$p_1 = \exp\left(-\int_A^B 2\,\lambda_2(t)\,dt\right).$$

$$p_1 = \left[\exp\left(-\int_A^B \lambda_2(t)\,d\right)t\right]^2 = p_2^2.$$

Em outras palavras, de acordo com Sheldom Ross, para duas pessoas de mesma idade, um delas fumante e outra não, a probabilidade de que um fumante viva até certa idade é o quadrado(e não a **metade**) da probabilidade correspondente para um não fumante.

Por exemplo se

$$\lambda_2 = \frac{1}{30},\ \ 50 \leq t \leq 60,$$

então a probabilidade de que um não fumante atinja um idade de 60 anos é igual a:

$$p_2 = \exp\left(-\int_A^B \lambda_2(t)\,dt\right) = \exp\left(-\int_{50}^{60} \frac{1}{30}\,dt\right).$$

$$p_2 = e^{-1/3} = 0,7165.$$

$$p_1 = [e^{-1/3}]^2 = e^{-2/3} = 0,5134.$$

```
 p_2=exp(-1/3);p_2;round(p_2,4)
[1] 0.7165313
[1] 0.7165
>
> p_1=exp(-2/3);p_1;round(p_1,4)
[1] 0.5134171
[1] 0.5134
> f <- function(x) dLaplace(x, alfa, beta)
>
> sqrt(p_1);p_1/2
```

```
[1] 0.7165313
[1] 0.2567086
>
>
```

11. Exercícios

2. (Sheldom Ross-Problemas de AutoTeste e Exercícios:Exercício 5.15-página 281)

   O número de anos que uma máquina de lavar funciona é uma variável aleatória cuja função taxa de risco é dada por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } \ 0 < t < 2; \\ 0,2 + 0,3(t-2) & \text{se } \ 2 \leq t < 5; \\ 1,1 & \text{se } t > 5.. \end{cases}$$

   a. Qual é a probabilidade de que a máquina continue a funcionar por 6 anos após a sua compra?

   b. Se ela estiver funcionando 6 anos após a sua compra, qual é a probabilidade condicional de que ela estrague nos próximos 2 anos?

3. (Sheldom Ross-Exercício 5.35-páginas 276 e 277.)

   A taxa de risco $\lambda(t)$ de câncer no pulmão de um homem fumante com idade de t anos é tal que:

$$\lambda(t) = 0,027 + 0,00025\ (t-40)^2,\ t \geq 40.$$

   Supondo que um um homem fumante com 40 anos de idade sobreviva a todos os demais riscos, qual é a probabilidade de que ele viva até as idades de :

   a. 50 anos;

   b. 60 anos

   sem desenvolver um câncer no pulmão?

4. (Sheldom Ross-Exercício 5.36-página 277.) Suponha que a distribuição da vida útil de um item tenha função taxa de risco dada por:

$$\lambda(t) = t^3,\ t > 0.$$

   Qual é a probabilidade de que:

   a. o item dure mais que 2 anos ?

   b. a vida útil do item esteja entre 0,4 e 1,4 anos?

c. um item com um ano de vida dure mais que 2 anos?

5. (Sheldom Ross-Problemas de AutoTeste e Exercícios:Exercício 5.14-página 281.) Suponha que a função de distribuição acumulada do tempo de vida de uma material é dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-x^2},\ x > 0.$$

Calcule:

a. $P(X > 2)$.

b. $P(1 < X < 3)$

c. a função taxa de risco de X.

d. o valor esperado de X utilizando:

$$E(X) = \int_0^\infty S(x)\, dx.$$

e. Calcule o valor esperado de X^2 utilizando:

$$E(X^2) = \int_0^\infty S(\sqrt{x})\, dx.$$

e também:

$$E(X^n) = \int_0^\infty n\, x^{n-1}\, S(x)\, dx.$$

Estes resultados são válidos sempre que X for um variável aleatória não negativa.

e. a variância de X.

6. (Sheldom Ross- Exercícios Teóricos- Exercício 5.16-página 278.) Calcule a função taxa de risco de X quando X é uniformemente distribuída no intervalo $(0, a)$.

7. (Sheldom Ross- Exercícios Teóricos- Exercício 5.17-página 278.)
Se X tem função taxa de risco de λ_X, calcule a função taxa de risco $Y = aX$ em que a é uma constante positiva.

8. (Sheldom Ross- Exercícios Teóricos- Exercício 5.22-página 278.)
Calcule a função taxa de risco de X quando X tem uma distribuição Gama cuja f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda\, x}\, I_{(0,\infty)}\,(x).$$

9. (Sheldom Ross- Exercícios Teóricos- Exercício 5.23-página 278.)
   Calcule a função taxa de risco de X quando X tem uma distribuição Weibull dada por:
   $$f(x) = \frac{\beta}{\alpha^\beta}\, x^{\beta-1}\, e^{-\frac{x^\beta}{\alpha^\beta}}\ \ I_{(0,\infty)}\,(x).$$
   Mostre que ela é crescente quando $\beta \geq 1$ e decrescente quando $\beta \leq 1$.

10. Suponha que que a vida média residual de T seja dada por $vmr(t) = t + 10$. Obtenha $E(T)$, $\lambda(t)$ e $S(t)$. Quem é $f(t)$?