Modelo de Regressão Linear Múltiplo

Prof. Juvêncio Santos Nobre

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada

Universidade Federal do Ceará-Brasil

http://www.dema.ufc.br/~juvencio

DEMA-UFC

Capital do **Ceará**, outubro de 2022

Conteúdo

Modelo de regressão Linear Múltiplo - MRLM

- Na grande maioria das aplicações, necessitamos de mais de uma variável explicativa para conseguir modelar de forma adequada a variabilidade da variável resposta, surgindo assim os modelos de regressão múltipla (múltiplas variáveis explicativas).
- O modelo de regressão linear múltiplo (MRLM) admite a seguinte forma funcional

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_{p-1} x_{(p-1)i} + e_i, i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

que pode ser reescrito como

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}, \tag{2}$$

em que:

Modelo de regressão Linear Múltiplo - MRLM

- Na grande maioria das aplicações, necessitamos de mais de uma variável explicativa para conseguir modelar de forma adequada a variabilidade da variável resposta, surgindo assim os modelos de regressão múltipla (múltiplas variáveis explicativas).
- O modelo de regressão linear múltiplo (MRLM) admite a seguinte forma funcional

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_{p-1} x_{(p-1)i} + e_i, i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

que pode ser reescrito como

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \tag{2}$$

em que:

MRLM

- $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ de variáveis respostas.
- $\boldsymbol{X}$: matriz de especificação do modelo, dada por

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{(p-1)1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{(p-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{(p-1)n} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{X}_R)$$

  de dimensão $n \times p$ $(n > p)$ conhecida e assumida de posto completo.
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})^\top$: vetor $(p \times 1)$ de parâmetros de regressão.
- $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ com elementos representando a fonte de variação associada aos elementos da amostra.

MRLM

- $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ de variáveis respostas.
- $\boldsymbol{X}$: matriz de especificação do modelo, dada por

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{(p-1)1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{(p-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{(p-1)n} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{X}_R)$$

  de dimensão $n \times p$ $(n > p)$ conhecida e assumida de posto completo.
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})^\top$: vetor $(p \times 1)$ de parâmetros de regressão.
- $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ com elementos representando a fonte de variação associada aos elementos da amostra.

MRLM

- $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ de variáveis respostas.
- $\boldsymbol{X}$: matriz de especificação do modelo, dada por

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{(p-1)1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{(p-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{(p-1)n} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{X}_R)$$

de dimensão $n \times p$ $(n > p)$ conhecida e assumida de posto completo.

- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})^\top$: vetor $(p \times 1)$ de parâmetros de regressão.
- $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ com elementos representando a fonte de variação associada aos elementos da amostra.

MRLM

- $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ de variáveis respostas.
- $\boldsymbol{X}$: matriz de especificação do modelo, dada por

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{(p-1)1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{(p-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{(p-1)n} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) = (\mathbf{1}_n, \boldsymbol{X}_R)$$

  de dimensão $n \times p$ $(n > p)$ conhecida e assumida de posto completo.
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})^\top$: vetor $(p \times 1)$ de parâmetros de regressão.
- $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)^\top$: vetor $(n \times 1)$ com elementos representando a fonte de variação associada aos elementos da amostra.

MRLM

- Este modelo descreve um hiperplano $(p-1)$-dimensional no espaço gerado pelas colunas de $\boldsymbol{X}$ ($\mathbb{C}(\boldsymbol{X})$), i.e., no espaço gerado pelas variáveis explicatvas $x_1, \ldots, x_{p-1}$.
- Para exemplificar, considere o caso particular com $p = 3$ e a seguinte função de regressão

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbb{E}[y_i | x_1, x_2] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2.$$

- Na Figura 1, fixando $\beta_0 = 50, \beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 7$ mostramos os gráficos do hiperplano de regressão e o gráfico de contorno associados.

MRLM

- Este modelo descreve um hiperplano $(p-1)$-dimensional no espaço gerado pelas colunas de $\boldsymbol{X}$ ($\mathbb{C}(\boldsymbol{X})$), i.e., no espaço gerado pelas variáveis explicatvas $x_1, \ldots, x_{p-1}$.
- Para exemplificar, considere o caso particular com $p = 3$ e a seguinte função de regressão

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbb{E}[y_i | x_1, x_2] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2.$$

- Na Figura 1, fixando $\beta_0 = 50, \beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 7$ mostramos os gráficos do hiperplano de regressão e o gráfico de contorno associados.

MRLM

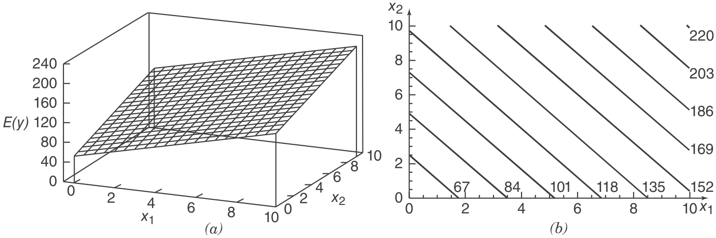
- Este modelo descreve um hiperplano $(p-1)$-dimensional no espaço gerado pelas colunas de $\boldsymbol{X}$ ($\mathbb{C}(\boldsymbol{X})$), i.e., no espaço gerado pelas variáveis explicatvas $x_1, \ldots, x_{p-1}$.
- Para exemplificar, considere o caso particular com $p = 3$ e a seguinte função de regressão

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbb{E}[y_i | x_1, x_2] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2.$$

- Na Figura 1, fixando $\beta_0 = 50, \beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 7$ mostramos os gráficos do hiperplano de regressão e o gráfico de contorno associados.

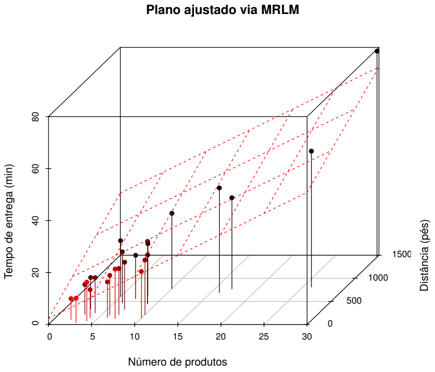
Ilustração

Figura: (a) Hiperplano de regressão e (b) gráfico de contorno para o modelo $\mu(\boldsymbol{x}_i) = 50 + 10x_1 + 7x_2$ (Montgomery et al. , 2012).



Ilustração

Figura: Hiperplano de regressão ajustado para os dados do Exemplo 3.1- The Delivery Time Data (Montgomery et al., 2012, pag. 74)



Interpretação dos parâmetros

- Considere, hipoteticamente, o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i,\ i = 1\ldots, n.$$

- O parâmetro β_0 é o intercepto do plano de regressão, i.e.,

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y_i|x_{1i} = x_{2i} = 0]$$

  e **só possui** interpretação quando a amplitude dos dados **incluir** o par $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, no modelo original, β_0 não possui interpretação física/prática.

- O parâmetro β_1 é dado por

$$\beta_1 = \mathbb{E}[y_i|x_{1i} = x+1, x_{2i} = y] - \mathbb{E}[y_i|x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- O parâmetro β_2 é dado por

$$\beta_2 = \mathbb{E}[y_i|x_{1i} = x, x_{2i} = y+1] - \mathbb{E}[y_i|x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Por essa razão, os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ também são denominados de coeficientes de regressão **parcial**.

Interpretação dos parâmetros

- Considere, hipoteticamente, o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i, \; i = 1 \ldots, n.$$

- O parâmetro β_0 é o intercepto do plano de regressão, i.e.,

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x_{2i} = 0]$$

  e **só possui** interpretação quando a amplitude dos dados **incluir** o par $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, no modelo original, β_0 não possui interpretação física/prática.

- O parâmetro β_1 é dado por

$$\beta_1 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x + 1, x_{2i} = y] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- O parâmetro β_2 é dado por

$$\beta_2 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y + 1] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Por essa razão, os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ também são denominados de coeficientes de regressão **parcial**.

Interpretação dos parâmetros

- Considere, hipoteticamente, o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i,\ \ i = 1 \dots, n.$$

- O parâmetro β_0 é o intercepto do plano de regressão, i.e.,

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x_{2i} = 0]$$

e **só possui** interpretação quando a amplitude dos dados **incluir** o par $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, no modelo original, β_0 não possui interpretação física/prática.

- O parâmetro β_1 é dado por

$$\beta_1 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x + 1, x_{2i} = y] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- O parâmetro β_2 é dado por

$$\beta_2 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y + 1] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Por essa razão, os parâmetros $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ também são denominados de coeficientes de regressão **parcial**.

Interpretação dos parâmetros

- Considere, hipoteticamente, o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i, \; i = 1 \ldots, n.$$

- O parâmetro β_0 é o intercepto do plano de regressão, i.e.,

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x_{2i} = 0]$$

e **só possui** interpretação quando a amplitude dos dados **incluir** o par $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, no modelo original, β_0 não possui interpretação física/prática.

- O parâmetro β_1 é dado por

$$\beta_1 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x + 1, x_{2i} = y] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- O parâmetro β_2 é dado por

$$\beta_2 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y + 1] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Por essa razão, os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ também são denominados de coeficientes de regressão **parcial**.

Interpretação dos parâmetros

- Considere, hipoteticamente, o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i,\ \ i = 1\ldots, n.$$

- O parâmetro β_0 é o intercepto do plano de regressão, i.e.,

$$\beta_0 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x_{2i} = 0]$$

  e **só possui** interpretação quando a amplitude dos dados **incluir** o par $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, no modelo original, β_0 não possui interpretação física/prática.

- O parâmetro β_1 é dado por

$$\beta_1 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x + 1, x_{2i} = y] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- O parâmetro β_2 é dado por

$$\beta_2 = \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y + 1] - \mathbb{E}[y_i | x_{1i} = x, x_{2i} = y], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Por essa razão, os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ também são denominados de coeficientes de regressão **parcial**.

Exercício (fazer agora)

Exercício 1: Considere o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i,\ i = 1 \ldots, n.$$

em que y_i denota o lucro do i-ésimo mês (em milhares de reais), x_{1i} e x_{2i} denotam o capital investido e o gasto em publicidade, em milhares de reais, de uma determinada empresa no i-ésimo mês. Interprete os parâmetros do modelo de regressão.

Suposições

Para ajustar o MRLM, considera-se as seguintes suposições:

i) A função de regressão $\mu(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta})$ é linear nos parâmetros.

ii) Os valores das variáveis explicativas são conhecidos e fixados, ou de uma forma geral, a matriz de especificação $\boldsymbol{X}$ $(n \times p)$ é conhecida, não estocástica e de posto completo.

iii) $\boldsymbol{e} \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$.

A suposição de homoscesdaticidade e não-correlação por parte das fontes de variação pode ser expressa somente na suposição iii). Para efeito de inferência de segunda ordem, se faz necessário alguma suposição distribucional a respeito da fonte de variação.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Comentários

- A classe de MRLM são sempre utilizados como modelos empíricos (ou aproximados), i.e., a verdadeira relação funcional entre y e $x_1, \ldots, x_{p-1}$ é **desconhecida**, todavia dentro de um certo intervalo/região a relação pode ser bem aproximada por uma função linear.
- Modelos mais complexos também podem ser expressos e analisados como um MRLM, como por exemplo:
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de duas variáveis explicativas com interação.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + e_i$ que corresponde a um modelo de segunda ordem completo com interação.
- Um detalhe pertinente, é que apesar de conseguirem ser expressos na forma (1), as interpretações dos parâmetros se **modificam**.
- Apesar da possibilidade de ajustar vários modelos na classe de MRLM, eles podem possuir comportamentos bem distintos. Para ilustrar isso considere o Exercício 2 para ser entregue na próxima aula.

Exercícios (entregar próxima aula)

Exercício 2: Para cada uma das funções de regressão abaixo, pede-se para plotar os gráficos dos hiperplanos e respectivas curvas de níveis associadas, além de interpretar os respectivos gráficos.

i) $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2$.

ii) $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$.

iii) $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2$.

Exercício 3: Mostre que os três modelos acima podem ser expressos como MRLM, i.e., reescreva-os na forma (1) especificando a matriz $\boldsymbol{X}$ e o respectivo vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$.

Exercício 4: Considere o seguinte MRLM

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Considere as suposições adequadas e determine o EMQ de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^\top$ sem usar a notação a matricial.