06. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu_1, 1)$ e seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim N(\mu_2, 4)$ sendo as amostras independentes.

(i) Determine o teste da **RVG** para testar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 = \mu_2 = 1.$$

(ii) Sendo

$$n = 9 \ ; \sum x_i = 3,95 \quad e \quad m = 4 \ ; \sum y_i = 2,03.$$

Qual a sua conclusão a um nível de significância de 5%? E qual o poder do teste?

(iii) Qual o nível descritivo do teste?

Solução: Temos duas hipóteses simples. Vamos aplicar o Lema de Neyman-Pearson.

Poderíamos fazer pensando em uma amostra de tamanho um de

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{4}{m}\right)$$

independentes.

Assim

$$L(\mu_1, \mu_2, \bar{x}, \bar{y}) = L_1(\mu_1; \bar{x}) \times L_2(\mu_2; \bar{y})$$

$$L_1(\mu_1; \bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{n}{2} \ (\bar{x} - \mu_1)^2\right).$$

$$L_2(\mu_2; \bar{y}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{8\pi}} \ \exp\left(-\frac{m}{8} \ (\bar{y} - \mu_2)^2\right).$$

$$L(\mu_1, \mu_2, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{8\pi}} \ \exp\left(-\frac{n}{2} \ (\bar{x} - \mu_1)^2 - \frac{m}{8} \ (\bar{y} - \mu_2)^2\right).$$

$$L(\mu_1, \mu_2, \bar{x}, \bar{y}) = K \ \exp\left(-\frac{n}{2} \ (\bar{x} - \mu_1)^2 - \frac{m}{8} \ (\bar{y} - \mu_2)^2\right).$$

Se H_1 é verdade $\mu_1 = \mu_2 = 1$ temos:

$$L_1 = L(1, 1, \bar{x}, \bar{y}) = K \ \exp\left(-\frac{n}{2} \ (\bar{x} - 1)^2 - \frac{m}{8} \ (\bar{y} - 1)^2\right).$$

Se H_0 é verdade $\mu_1 = \mu_2 = 0$ temos:

$$L_0 = L(0, 0, \bar{x}, \bar{y}) = K \ \exp\left(-\frac{n}{2} \ \bar{x}^2 - \frac{m}{8} \ (\bar{y} - 1)^2\right).$$

Logo

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\exp\left(-\frac{n}{2}\,(\bar{x}-1)^2 - \frac{m}{8}\,(\bar{y}-1)^2\right)}{K\,\exp\left(-\frac{n}{2}\,\bar{x}^2 - \frac{m}{8}\,(\bar{y}-1)^2\right)} \geq k.$$

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left[-\frac{n}{2}((\bar{x}-1)^2 - \bar{x}^2) - \frac{m}{8}((\bar{y}-1)^2 - \bar{y}^2)\right] \geq k.$$

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left[\bar{x} + \frac{\bar{y}}{4} - -\frac{n}{2} - \frac{m}{8}\right] \geq k.$$

Aplicando logaritmo temos :

$$n\bar{x} + \frac{m\bar{y}}{4} - \frac{n}{2} - \frac{m}{8} \geq log(k).$$

$$n\bar{x} + \frac{m\bar{y}}{4} \geq log(k) + \frac{n}{2} + \frac{m}{8} = c.$$

Se

$$u = n\bar{x} + \frac{m}{4}\bar{y} > c$$

rejeitar H_0. Caso contrário não rejeitar.

Vamos resolver o item **b**:

Como $n = 9$ e $m = 4$ temos:

Seja

$$U = n\bar{X} + \frac{m}{4}\,\bar{Y}.$$

$$E(U) = nE(\bar{X}) + \frac{m}{4}\,E(\bar{Y}) = n\mu_1 + \frac{m}{4}\,\mu_2.$$

$$V(U) = n^2 V(\bar{X}) + \frac{m^2}{16}\,V(\bar{Y}),$$

pois são independentes.

$$V(U) = n^2\frac{1}{n} + \frac{m^2}{16}\frac{4}{m} = n + \frac{m}{4} = 9 + \frac{4}{4} = 10.$$

Assim

$$U \sim N(n\mu_1 + \frac{m}{4}\,\mu_2\;,\;10).$$

Logo

$$Z = \frac{U - (n\mu_1 + \frac{m}{4}\,\mu_2)}{\sqrt{10}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdade

$$U \sim N(0\ ,\ 10).$$

Se H_1 é verdade

$$U \sim N(10\ ,\ 10).$$

O teste é feito com a ajuda do R. Analise com carinho:

Vamos achar a região crítica do teste:

$$\alpha = P_{H_0}(U \geq c) = P\left(Z \geq \frac{c-0}{\sqrt{10}}\right) = 0,05$$

Como

$$P(Z \geq 1,645) = 0,05.$$

$$\frac{c}{\sqrt{10}} = 1,645$$

$$c = 1,645 \times \sqrt{10} = 5,2.$$

A nossa regra de decisão fica

$$u = n\bar{x} + \frac{m}{4}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i + \ \frac{1}{4}\ \sum_{j=1}^{m} y_i \geq 5,20$$

rejeitar H_0.

$$u_{cal} = 3,95 + \frac{2,03}{4} = 4,46.$$

Como

$$4,46 < 5,20$$

não rejeitar H_0

A nossa região crítica também pode ser dada por

Se

$$z_{cal} \geq 1,645$$

rejeitar H_0.

$$z_{cal} = \frac{u_{cal} - 0}{\sqrt{10}} = \frac{4,46}{\sqrt{10}} = 1,41.$$

Como

$$1,41 < 1,645$$

não rejeitar H_0

Vamos calcular o poder do teste

Como as hipóteses são simples temos

$$poder = 1 - \beta.$$

$$\beta = P_{H_1}(U < 4,46) = P\left(\frac{4,46 - 10}{\sqrt{10}}\right) = P(Z < -1,52) = 0,0645.$$

$$poder = 1 - \beta = 1 - 0,0645 = 0,9355.$$

O nível descritivo é dado por:

$$nd = P_{H_0}(Z \geq 1,41) = 0,5 - P(0 < Z < 1,41) = 0,07927.$$

```
> ###Exercício 6.6
>
> ###X~ N(mu_1,1), Y~ N(mu_2,4), independentes
>
> mu1_0=0;mu2_0=0
>
> mu1_1=1;mu2_1=1
>
> ###Xb  ~ N(mu_1,1/n), Yb  ~ N(mu_2,4/m)
>
> n=9;m=4
>
> ######U=n *Xb+(m/4)*Yb
>
>
> VU=n+m/4;VU
[1] 10
> sigmaU=sqrt(VU);sigmaU
[1] 3.162278
>
> ###Se H_0 é verdade  U \simN(0,10)
>
> EU_0=n*mu1_0+(m/4)*mu2_0;EU_0
[1] 0
>
>
>
> ###Se H_1 é verdade  U \simN(10,10)
>
> EU_1=n*mu1_1+(m/4)*mu2_1;EU_1
[1] 10
>
```

```
> alfa=0.05;
> z_tab=qnorm(1-alfa);round(z_tab,3)
[1] 1.645
> Sx=3.95;Sy=2.03
> xb=Sx/n;xb; yb=Sy/m;yb
[1] 0.4388889
[1] 0.5075
>
>
> z_cal=(Sx+Sy/4-0)/sigmaU;z_cal
[1] 1.409585
>
> round(z_cal,2)
[1] 1.41
>
>
> c=sqrt(10)*1.645;c; round(c,2)
[1] 5.201947
[1] 5.2
>
> u_cal=Sx+Sy/4;u_cal
[1] 4.4575
>
> u_cal  <c #####Não rejeitar H_0:
[1] TRUE
>
>
> ######beta=P(U <c)=P(Z <(c-10);sqrt(10))
>
> beta=pnorm(5.2,10,sigmaU);beta
[1] 0.06452065
>
> poder=1-beta;poder
[1] 0.9354793
>
> z_1=(5.2-10)/sqrt(10);z_1
[1] -1.517893
>
> pnorm(z_1)
[1] 0.06452065
>
> #####nd=P(Z >1,41)
>
> nd=1-pnorm(1.41);nd
[1] 0.07926984
>
> alfa<nd
[1] TRUE
>
```