UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - PET

PET - ESTATÍSTICA
UFC

PROBABILIDADE: PROGRAMANDO E SIMULANDO USANDO R

FORTALEZA, CE
AGOSTO, 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - PET

Tutor:
Prof. Dr. Julio Francisco Barros Neto
Cotutora:
Profa. Dra. Maria Jacqueline Batista
Petianos:
Adriane de Oliveira Silva
Allyson Garreto da Costa
Amanda Merian Freitas Mendes
Ana Alice Ximenes Mota
Anny Suellen Gomes da Silva
Artur Rodrigues Bastos Barros
Débora Ferreira de Assis
Fernando Henrique Sousa Barreto
Jônatas de Oliveira Alves
Julio Francisco Barros Neto
Lucas Martins do Santos
Ozias *********************
Rebecca Dieb Holanda Silva
Raquel Alexandre Lima
Adriane de Oliveira Silva
Victor Barros *************

O PET-Estatística agradece ao Prof. Dr. João Maurício de Araújo Mota pela sua dedicação e contribuição.

Feito de aluno para aluno

FORTALEZA, CE
AGOSTO, 2015

Lista de Figuras

Sumário

1 PREFÁCIO

1.1 História

Este material complementar foi criado pelos membros do grupo PET-Estatística UFC (Programa de Educação Tutorial). O projeto PROB+R foi elaborado em agosto de 2015 com principal objetivo: proporcionar um material robusto que aborde a Probabilidade computacionalmente. Nesse texto, optamos por dividir o conteúdo em quatro grandes partes: estatística básica, caso discreto, caso contínuo e complementares. O texto espera que o leitor tenha consigo noções básicas. Alguns exemplos do que chamamos de noções básicas são: estatística básica, análise combinatória,variável aleatória, evento, espaço amostral, ponto amostral, independência, entre outros. Porém, sempre que necessário, fragmentamos o conteúdo como é o caso da primeira grande parte do material. Caso o leitor sinta-se familiarizado o suficientemente com a primeira parte, sinta-se a vontade em avançar. Todo material é apoiado no uso do *software* R disponível gratuitamente no sítio https://www.r-project.org/ na janela CRAN.

Nos casos discreto e contínuo, aborda-se algumas das mais clássicas distribuições estatísticas e suas características pormenorizadas com foco na parte de programação dos resultados teóricos que serão usados para resolver problemas práticos que serão propostos ao longo do texto. Na última grande parte, os complementares, aborda-se alguns tópicos extensivos para cada caso anterior ou qualquer tópico não linear aos casos. Exemplos de tópicos que não assumem não linearidade são: método da máxima verossimilhança, método de Newton-Raphson, método de Monte Carlo, Bootstrap, Jacknife, cadeias de Markov, Teoria das Filas, entre outros. A maioria dos exercícios propostos e resolvidos serão retirados da literatura clássica sempre mencionando a origem.

O PET-Estatística tem algumas orientações a dizer:

- O material sempre estará disponível gratuitamente, então não comercialize;
- Em caso de impressão do material, utilize frente e verso. Pense na sustentabilidade;
- Envie susgestões e críticas ao e-mail: petestatistica@ufc.br.

2 INTRODUÇÃO

3 PASSOS INICIAIS

4 ESTATÍSTICA BÁSICA

5 DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

5.1 Distribuição Bernoulli

5.1.1 Introdução

A distribuição Bernoulli, que possui esse nome em homenagem ao cientista suíço Jacob Bernoulli (1654 ? 1705), é uma distribuição discreta que admite apenas dois resultados à variável aleatória, podendo ser representados genericamente por sucesso, com valor 1, ou fracasso, com valor 0. A probabilidade do sucesso é dada por p e a de fracasso é 1 ? p. Um dos casos famosos da distribuição de Bernoulli é o da face da moeda, que pode ser cara ou coroa.
A função de probabilidade é dada por:

$$f_x(x) = P(X = x) = p^x(p - 1)^{1-x} \qquad I_{\{0,1\}}(x)$$

Notação: $X \sim Ber(p)$

5.1.2 Função Distribuição Acumulada

Para o cálculo da FDA de uma variável aleatória discreta utilizamos:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} F(x) = 0, & se \quad x < 0 \\ F(x) = \frac{1}{2}, & se \quad 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 1, & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5.1.3 Esperança

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{1} xp^x q^{1-x} = 0 + p = p$$

6 Variância

Encontraremos a $E(X^2)$ para obtermos a $Var(X)$:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 P(X = x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x q^{1-x} = 0 + p = p$$

Portanto,

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

6.0.4 Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} P(X = x) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x q^{1-x} = q + pe^t$$

6.0.5 R-ésimo Momento

$$M_x^{(r)}(t) = \frac{dM_x(t)^r}{d^r t} = E[x^r] = \sum_x x^r P(X = x)$$

Logo:

$$\sum_{x=0}^{1} x^r p^x (1-p)^{1-x}$$

$$0^r p^0 (1-p)^{1-0} + 1^r p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$0 + p$$

$$p$$

6.0.6 Moda

$$\text{Mo=} \begin{cases} 0, & se \quad x < \dfrac{1}{2} \\ 1, & se \quad x > \dfrac{1}{2} \\ \nexists, & se \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

6.0.7 Mediana

$$M=\begin{cases} 0, & se \quad 0 < p < 1-p \\ \\ 1, & se \quad \frac{1}{2} < p < 1 \\ \end{cases}$$

6.0.8 Coeficiente de Assimetria e Curtose

Assimetria

$$\begin{aligned}
\gamma^3 &= \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3} \\
&= p.(\frac{q}{\sqrt{pq}})^3 + q.(-\frac{p}{\sqrt{pq}})^3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{pq^3}}(pq^3 - qp^3) \\
&= \frac{pq}{\sqrt{pq^3}}(q-p) \\
&= \frac{q-p}{\sqrt{pq}}
\end{aligned}$$

Curtose

Utiliza-se a fórmula abaixo para o cálculo da Curtose de uma distribuição:

$$\gamma^4 = \frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

Sendo $\mu = E(x)$ e $\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Assim, para calcularmos a curtose da Distribuição Bernoulli, adotaremos:

$$\begin{aligned}
M_x^{(r)}(t) &= E(x) = \mu = p \\
Var(x) &= p(1-p)
\end{aligned}$$

Começaremos desenvolvendo $E[(x-\mu)^4]$:

$$\begin{aligned}
E[(x-\mu)^4] &= E(x^4) - 4E(X^3)\mu + 6\ddot{E}(x^2)\mu^2 - 4E(x)\mu^3 + \mu^4 \\
&= p - 4p^2 + 6p^3 - 4p^4 + p^4 \\
&= -p(p-1)(3p^2 - 3p + 1)
\end{aligned}$$

Aplicando na fórmula geral:

$$
\begin{aligned}
\gamma^4 &= \frac{-p(p-1)(3p^2-3p+1)}{[\sqrt{p(1-p)}]^4} \\
&= \frac{-p(p-1)(3p^2-3p+1)}{[p(1-p)]^2} \\
&= \frac{(-p^2+p)(3p^2-3p+1)}{p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{p(1-p)(-3p^2+3p-1)}{p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{(3p^2-3p+1)}{p(1-p)} \\
&= \frac{-3p(1-p)+1}{p(1-p)} \\
&= \frac{-3p(1-p)}{p(1-p)} - \frac{1}{p(1-p)} \\
&= -3 - \frac{1}{p(1-p)} \\
&= \frac{-3p(1-p)-1}{p(1-p)} \\
&= -\frac{(1+3pq)}{pq} - 3 \\
&= \frac{-3pq-1-3pq}{pq} \\
&= -\frac{(1+6pq)}{pq}
\end{aligned}
$$

6.0.9 Comandos no R

Pacote

É necessário instalar o pacote Rlab:
¿ install.packages(”Rlab”)
Use a função library para rodar o pacote:
¿ library(Rlab)

Comandos

Densidade:
dbern(x, prob, log = FALSE)
Função de distribuição Acumulada:
pbern(q, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
Gerar valores aleatórios:
rbern(n, prob)

OBS: Se o elemento de X não for 0 ou 1, o resultado de dbern é zero.

Argumentos

x, q = Vetor de quantis
p = Vetor de probabilidades
n = Número de observações. Se length(n)¿ 1, o comprimento é considerado como sendo o número necessário.
prov = probabilidade de sucesso em cada tentativa.
log, log.p = lógico; Se TRUE, as probabilidades p são dadas como log (p).
lower.tail = lógico; Se TRUE(padrão), as probabilidades são P (X $\leq$ x), caso contrário, P (X¿ x).

Aplicação

¿ dbern(1, 0.7, log=FALSE)

6.0.10 Exemplos

Exemplo 01: Qual é a probabilidade de obter face 5 em uma única tentativa do arremesso de um dado?

Solução:

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)$$

Sendo:
x=1, p= 1/6, q= 5/6

Exemplo 02: Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = ?o número de circuitos rejeitados em um teste?. Determine a distribuição de X.

Solução:

$$F(x)=P(X=x)=\begin{cases} 0,9 \quad se \quad x=0 \\ \\ 0,1 \quad se \quad x=1 \\ \end{cases}$$

6.1 Distribuição Binomial

6.1.1 Definição

Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória que conta o número total de sucessos segue uma binomial com parâmetros n e p e, considerando $q = 1 - p$, sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,2,..,n\}}(X)$$

Com $\binom{n}{x}$ representando o coeficiente binomial calculado por:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Prova

Recordamos que se $(x_1, x_2 ...) \in 0, 1^n$ com $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ (ou seja, uma sequência de tamanho n com 1 ocorrência em exatamente x vezes) seguida pela independência,

$$\mathbb{P}[(X_1, X_2, ..., X_n) = (x_1, x_1, ..., x_n)] = p^y q^{n-x}$$

Além disso, o número da sequência de tamanho n com 1 ocorrência em exatamente x vezes é um coeficiente binomial $\binom{n}{x}$. Pela propriedade aditiva de probabilidade

$$\mathbb{P}(X_i = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x \in 0, 1, ..., n$$

A distribuição recebe esse nome porque apresenta o desenvolvimento de um binômio de Newton do tipo

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

Utilizando essa expressão, verificamos que a função de probabilidade de X é uma legítima função de distribuição de probabilidade, visto que:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = (1)^n = 1$$

6.1.2 Dados históricos

A distribuição binomial é uma das mais antigas a ter sido objeto de estudo. A distribuição foi derivada por James Bernoulli (em seu tratado Ars Conjectandi, publicado em 1713), para o caso $p = r/(r+s)$, onde r e s são números inteiros positivos. Mais cedo Pascal tinha considerado o caso $p = 1/2$. Em seu ensaio, publicado postumamente em 1764, Bayes removeu a restrição racional sobre p considerando a posição relativa entre uma bola que rolou aleatoriamente a uma segunda bola que rolou n vezes de forma aleatória. O início da história da distribuição é discutida, entre outros aspectos, por Boyer (1950), Stigler (1986), Edwards (1987), e Hald (1990).

Uma nova derivação notável como a solução do processo de nascimento e emigração simples foi dada por McKendrick (1914). A distribuição pode também ser considerada a distribuição estacionária para o modelo Ehrenfest (Feller, 1957), Haight (1957) mostrou que a fila M/M/1 dá origem a distribuição, desde que a taxa de chegada dos clientes quando existem n clientes na fila é $\lambda = (N-n)^{N-1}(n+1)^{-1}$ para $n < N$ e zero para $n \geq N$ (N é o tamanho máximo da fila).

6.1.3 Medidas

6.1.4 Função de probabilidade acumulada

A função de distribuição acumulada não tem uma fórmula fechada, mas pode ser expressada por:

$$F(k;n,p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Tabela 1: Distribuição Binomial

Média	np
Moda	$p(n+1)-1 \leq x \leq p(n+1)$
Mediana	$\lfloor np \rfloor ou \lceil np \rceil$
Variância	npq
Desvio padrão	$\sqrt{npq}$
Coef. de variação	$\sqrt{\frac{q}{np}}$
Assimetria	$\frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$
Curtose	$3-\frac{6}{n}+\frac{1}{npq}$

onde $\lfloor k \rfloor$ é o ”andar”abaixo de k, ou seja, o maior número inferior ou igual a k.

6.1.5 Esperança

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\
&= np \sum_{x=0}^{n} x \frac{n-1!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \\
&= np \sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{(x-1)} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} = np
\end{aligned}
$$

6.1.6 Moda

Normalmente, a moda de uma distribuição binomial com parâmetros n, p é igual ao ”chão”da função. No entanto, quando $(n+1)p$ é inteiro e p não é 0 nem 1, então a distribuição tem duas modas:$(n+1)p$ e $(n+1)p1$. Quando p é igual a 0 ou 1, a moda deverá ser 0 e n, respectivamente. Esses casos podem ser resumidos a seguir:

- $\lfloor (n+1)p \rfloor \Rightarrow (n+1)p$ é 0 ou não inteiro,
- $(n+1)p$ e $(n+1)p-1 \Rightarrow (n+1)p \in \{1, ..., n\}$,
- $n \Rightarrow (n+1)p = n+1$

6.1.7 Mediana

Em geral, não existe uma fórmula única para encontrar a mediana de uma distribuição binomial. Contudo, alguns resultados foram estabelecidos:

- Se np é um inteiro, então a média, mediana e moda coincidem e são iguais a np.

- Qualquer mediana m deve estar situada no intervalo $\lfloor np \rfloor \leq$ m $\leq \lceil np \rceil$

- A mediana m não pode está muito longe da média $|mnp| \leq minln2, max(p, 1-p)$

- A mediana é única e igual a $m = round(np)$ em casos em que seja $p \leq 1ln2$ ou $p \geq ln2$ ou $|mnp| \leq min(p, 1p)$(exceto para casos onde $p = \frac{1}{2}$ e n é ímpar)

- Quando $p = \frac{1}{2}$ e n é ímpar, algum número m no intervalo $\frac{1}{2}(n_1) \leq m \leq \frac{1}{2}(n+1)$ é a mediana da distribuição binomial. Se $p = \frac{1}{2}$ e n é par, então $m = \frac{n}{2}$ é a única mediana.

6.1.8 Variância

Prova da propriedade da variância:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 P_x(x_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(x_i^2 - 2x_i\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}^2(X))P_x(x_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_x(x_i) - 2x_i\mathbb{E}(X)P_x(x_i) + \mathbb{E}^2(X)P_x(x_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_x(x_i) - \sum_{i=1}^{\infty} 2x_i\mathbb{E}(X)P_x(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}^2(X)P_x(x_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P_x(x_i) - 2\mathbb{E}(X)\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_x(x_i) + \mathbb{E}^2(X\sum_{i=1}^{\infty})P_x(x_i) = \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)
\end{aligned}
$$

Prova da variância:

Precisamos encontrar primeiro a $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}[X(X-1)+X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[X(X-1)] + np$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n}[x(x-1)]P(X=x) = \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \\
&= \sum_{x=1}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!}p^x q^{n-x} = \\
&= \sum_{x=1}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!}p^x q^{n-x} = \\
&= \sum_{x=2}^{n} n(n-1)\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^{x-2}p^2 q^{n-x} = n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{n-x}
\end{aligned}$$

Aqui, repetimos um procedimento análogo ao realizado para calcular a $E(X)$, porém, dessa vez utilizamos $y = x-2$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{n-2}\binom{n-2}{y}p^{y}q^{n-2-x} \\
&= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Voltando para expressão $\mathbb{E}(X^2)$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}[X(X-1)] + np = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$$

Com o resultado de $\mathbb{E}(X^2)$ podemos calcular a $Var(X)$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

6.1.9 Função Geradora de Momentos

$$
\begin{aligned}
M_x(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} P(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} \\
&= (pe^t + q)^n
\end{aligned}
$$

1. **1º momento E(X)**

   $$\frac{dM_x(t)}{dt} = n(q+pe^t)^{n-1}pe^t = npe^t(q+pe^t)^{n-1}$$

   Considerando t=0,

   $$\mathbb{E}(X) = np(q+p)^{n-1} = np$$

2. **2º momento E(X^2)**

   Levando em conta a regra do produto: $\dfrac{duv}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

   $$
   \begin{aligned}
   \frac{d^2M_x(t)}{dt^2} &= npe^t\left\{(n-1)(q+pe^t)^{n-2}pe^t\right\} + (q+pe^t)^{n-1}\left\{npe^t\right\} \\
   &= npe^t(q+pe^t)^{n-2}\left\{(n-1)pe^t + (q+pe^t)\right\} \\
   &= npe^t(q+pe^t)^{n-2}\left\{q+npe^t\right\}
   \end{aligned}
   $$

   Agora, considerando t=0,

   $$
   \begin{aligned}
   \mathbb{E}(X^2) &= np(q+p)^{n-2}(q+np) \\
   &= np(q+np) \\
   &= npq + n^2p^2
   \end{aligned}
   $$

1. $\mathbb{E}(X^3) = n^{(3)}p^3 + 3_n^{(2)}p^2 + np$

2. $\mathbb{E}(X^4) = n^{(4)}p^4 + 6_n^{(3)}p^3 + 7_n^{(2)}p^2 + np$

6.1.10 r-ésimo momento fatorial

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x(x-1)(x-2)...(x-k+1)] &= \mathbb{E}\left[\frac{x!}{(x-k)!}\right] \\
&= \sum \frac{x!p(x)}{(x-k)!} \\
&= \sum \frac{x!n!}{x!(x-k)!(n-x)!}p^x q^{n-x} \\
&= \frac{n!}{(n-k!)}p^k \sum \frac{(n-k)!}{(x-k)!(n-x)!}p^{x-k}q^{n-x} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}p^k
\end{aligned}$$

6.1.11 Coeficiente de assimetria e curtose

1. Assimetria

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$$

   - $\gamma_1 > 0$ se $p < \frac{1}{2}, \gamma_1 < 0$ se $p > \frac{1}{2}$ e $\gamma_1 = 0$ se $p = \frac{1}{2}$
   - Para n fixo,$\gamma_1 \to \infty$ com $p \downarrow 0$ e com $p \uparrow 1$
   - Para n fixo,$\gamma_1 \to 0$ com $n \to \infty$

2. Curtose

$$\gamma_2 = 3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{npq}$$

   - Para n fixo, γ_2 aumenta e diminui como uma função p, com valor mínimo $3 - \frac{2}{n}$ no ponto de simetria $p = \frac{1}{2}$
   - Para n fixo, $\gamma_2 \to \infty$ com $p \downarrow 0$ e com $p \uparrow 1$
   - Para p fixo, $\gamma_2 \to 3$ com $n \to \infty$

6.1.12 Função Geradora de Probabilidade

$$
\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} t^x P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} t^x \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pt)^x q^{n-x} \\
&= (pt + q)^n
\end{aligned}
$$

onde $-1 \leq t \leq 1$

6.1.13 Binomial no R

```
#Considerando uma ninhada de
cinco filhotes, se a definição do sexo é independente
para cada um e as chances de nascerem
machos e fêmeas são iguais, qual a probabilidade de nascer um macho?

> dbinom(x=1,size=5,prob=0.5)
[1] 0.15625

#Diminuindo a chance de nascer machos, temos:

> dbinom(x=1,size=5,prob=1/3)
[1] 0.08670765

#E agora aumentando o tamanho da amostra:

> dbinom(x=1,size=10,prob=0.5)
[1] 0.009765625

#Plotando o gráfico para os 5 resultados possíveis

> p1<- dbinom(x=0:5, size=5, prob=0.5)# Ver gráfico 1
> names(p1) <- 0:5

> plot(0:5,p1,type="h",lwd=5,col="blue",xlab="N de filhotes machos",y

#Gráfico da acumulada
> plot(0:5,pbinom(0:5,5,0.5))# Ver gráfico 2

#Primeiros valores sorteados dentre amostra e média
```

```
> sim1 <- rbinom(n=1000,size=5,prob=0.5)
> head(sim1)
[1] 2 2 3 3 2 1
> mean(sim1)
[1] 2.493

#Indicando a esperança no gráfico:

> esper <- sum(0:5*p1)
> mtext(at=esper,text="^",side=1,line=0.5,cex=2,col="red")

#Analisando mudanças de comportamento do gráfico através de alteraçõe
> p2 <- dbinom(0:5,size=5,prob=1/3)
> p3 <- dbinom(0:10,size=10,prob=0.5)
> p4 <- dbinom(0:10,size=10,prob=1/3)

> maxp <- max(c(p1,p2,p3,p4))
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(0:5,p1,main="n=5, p=0.5",  xlim=c(0,10), ylim=c(0,maxp),type="
> plot(0:5,p2,main="n=5, p=1/3",  xlim=c(0,10),ylim=c(0,maxp),type="h
> plot(0:10,p3,main="n=10, p=0.5",xlim=c(0,10),ylim=c(0,maxp),type="h
> plot(0:10,p4,main="n=10, p=1/3",xlim=c(0,10),ylim=c(0,maxp),type="h
> par(mfrow=c(1,1))#Ver gráfico 3
```

6.1.14 Simulação

```
> p<- 0.5;n<-9;
> q<- 1-p
> x<-0;
> for(j in 1:2000){
> u<- runif(1)
> c<-p/q
> pr<-q^n;
> fc<-pr;
> h=0;i=0;
> while(h<1){
> if(u<fc){
> x[j]<-i
> h<-1
> }else{
> pr<-((c*(n-i))/(i+1))*pr;
> fc<-fc+pr;
> i<-i+1
> }
> }
> }
> table(x)/2000
```

```
> a=round(dbinom(0:9,size=9,prob=0.5),4)
> length(a)
> barplot(table(x)/2000,col='gold',xlab="n",ylab="Probabilidade")# Ve
```

6.1.15 Gráficos

Figura 1: Gráfico

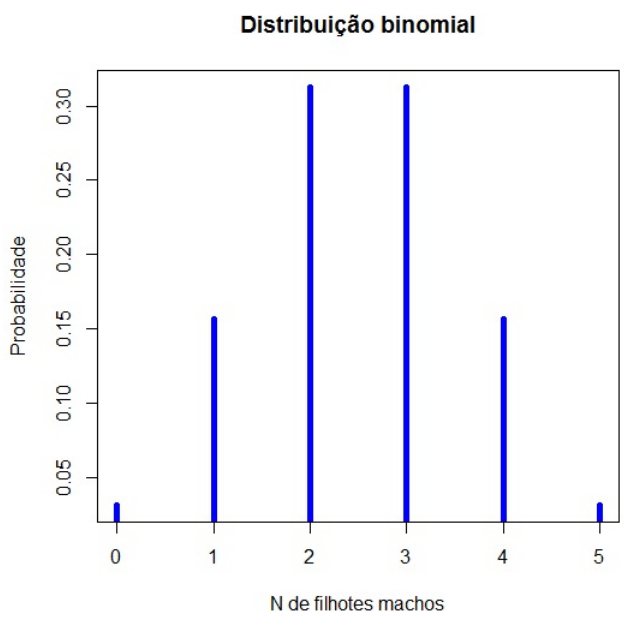


Figura 2: Gráfico

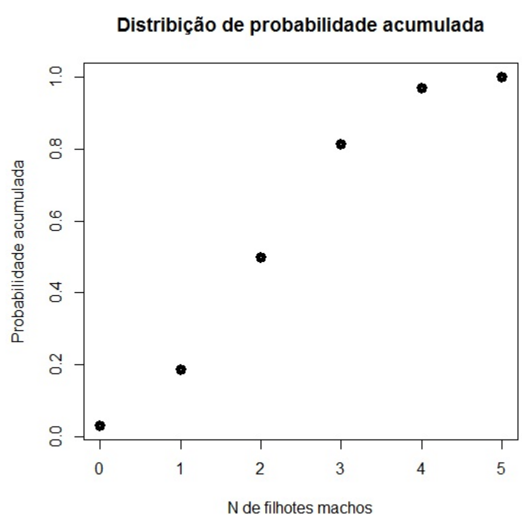


Figura 3: Gráfico

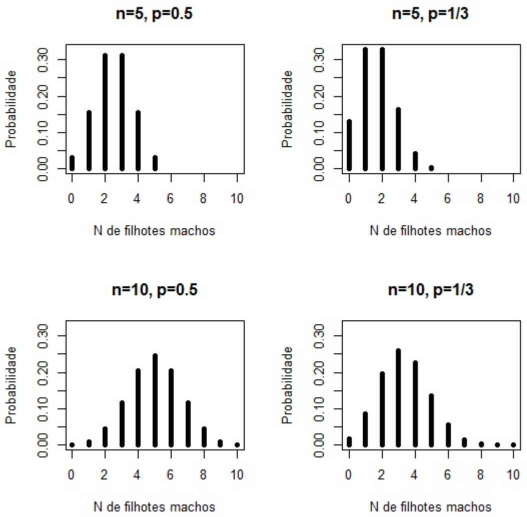
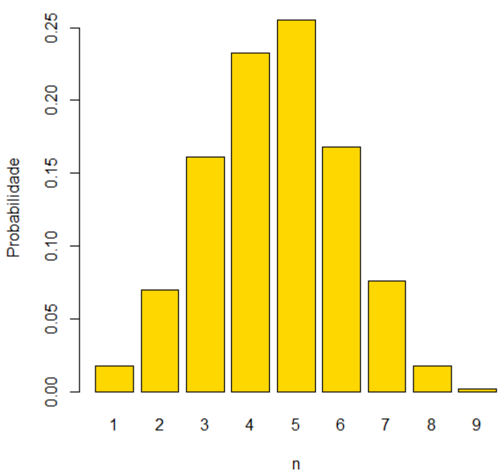


Figura 4: Gráfico



6.2 Distribuição de Poisson

6.2.1 Dados Históricos

Nascido em 21 de julho de 1781 na cidade de Pithiviers, Siméon Denis Poisson foi um Matemático e Físico francês que teve várias contribuições para o mundo científico. Dentre elas então: as teorias da eletricidade e do magnetismo, desenvolveu pesquisas sobre mecânica, criou constante para a eletricidade (Constante de poisson), para a elasticidade criou a razão de poisson. Contribuiu também nas áreas de calor, som, estudos matemáticos (criando integral de Poisson na teoria do potencial e o colchete de Poisson nas equações diferenciais), dentre outras contribuições. Em 1837 publicou o livro Recherches sur la probabilité des jugements (em português, A investigação sobre a probabilidade de julgamentos), onde apareceu a famosa distribuição de poisson também conhecida como distribuição de eventos raros, que foi descoberta por poisson como sendo uma forma limitada da distribuição binomial que posteriormente recebeu seu nome e hoje é considerada uma das mais importantes distribuições na probabilidade . Poisson publicou cerca de 400 trabalhos e morreu em Paris em 25 de abril de 1840.

6.2.2 Definição

É uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de eventos ocorrerem em um certo período de tempo se estes eventos ocorrerem independentemente de quando ocorreu o último evento.

Na distribuição de poisson a Variável X pode tomar valores de x=0,1,2,... . Então, a probabilidade de obter-se exatamente x ocorrências é:

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad I_{\{0,1,2,...\}}x$$

Onde:
λ=Média aritmética de ocorrências por intervalo de tempo;
Utilizamos a notação: $X \sim$ Poisson(λ)
OBS: É impossível contar o número de insucessos utilizando a distribuição de Poisson.

6.2.3 Características da Distribuição

-Possui apenas um parâmetro,ou seja, a taxa do evento. Convencionalmente essa taxa é chamada de Lambda ou λ.

-A taxa de ocorrência por período de tempo é conhecida.
-A distribuição de Poisson não é simétrica; ela é desviada para o infinito.
-A Média da distribuiçãode Poisson é o seu próprio valor esperado que é igual a sua variância e ambas são iguais a sua taxa (λ).
-O evento tem que ser contado em números inteiros.
-Ocorrências são independentes, de modo que uma ocorrência não diminua ou aumente a probabilidade de ocorrência da outra.

6.2.4 Prova da Função distribuição de probabilidade

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Pordefinição das séries de Taylor:
$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^a$

Então

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

Prova da distribuição de probabilidade de Poisson partindo da Binomial:

$$P(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \frac{n^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(np)^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k}$$

Tomando: $\lambda = np$
Se somente se $n \to \infty$ e $P \to 0$

$$P(X=k) = \frac{n(n-1)...(n-n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

6.2.5 Função distribuição acumulada de Poisson

Dado as propriedades da distribuição acumulada:
Propriedade 1:

$$F_X(x) = \sum_{x=0}^{n} F_X(x)$$

Então:

$$\lim_{X\to\infty} F_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$\lim_{X\to\infty} F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Por definição:
$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^a$
então

$$e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Propriedade 2:

$$\lim_{X\to-\infty} F_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Se o indicador de $X, I_{0,1,2,...}x$
então $P_X(x) = 0$.

Logo a acumulada da Poisson:

$$F_X(x) = \sum_{X=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!}$$

OBS: A Poisson não possui uma fórmula fechada para sua acumulada.

6.2.6 Valor Esperado

Na distribuição de Poisson a Média é igual ao Valor esperado, e ambos são iguais ao parâmetro λ.
Por Definição, a esperança de uma variável aleatória X é igual á soma de cada uma das suas possíveis ocorrências ponderadas pela probabilidade de que estas ocorrências aconteçam.

$$E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} kP\left[X = k\right]$$

$$E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} =$$

$$= E\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda^{k}}{k!}\right] = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

6.2.7 Variância

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Ja sabemos $E(X)$ agora precisamos saber a $E(X^2)$.

$$E(X^2) = E(X(X-1)+X) = E(X(X-1) + E(X)$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}\lambda^{2}}{x!} = e^{-\lambda}\lambda^{2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^{2}\sum_{x-2=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

Se $y = x - 2$

$$= e^{-\lambda}\lambda^{2}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^{2}e^{\lambda} + \lambda = \lambda^{2} + \lambda.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

6.2.8 Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right] =$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

Por definição: $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{F(x)^x}{x!} = e^{F(x)}$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{e^{t-\lambda}\lambda} = e^{\lambda\left[e^t - 1\right]}$$

6.2.9 Prova da geradora

Dado:

$$F(x) = \sum_{xi}^{x} p(xi)$$

$$F_x(x) = \sum_{x_i}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Dado:
$M(t) = \sum e^{tx} p(x)$

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}\lambda^x}{x!}$$

Por definição:

$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{F(x)^x}{x!} = e^{F(x)}$

Então:

$$e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda e^t - \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

6.2.10 Utilizando a Geradora de Momentos para calcular o valor esperado

$$M'(t) = \frac{d}{dt}e(\lambda(e(t) - 1)) = \lambda e(\lambda(e^t - 1) + t)$$

e então

$$E[X] = M'(0) = \lambda e(1 - 1 + 0) = \lambda$$

6.2.11 Calculando a Variância através da função geradora de momentos

$$E\left[X^2\right] = M''(0), \text{Assim}$$

$$M''(t) = \lambda(e^{\lambda}(e^t - 1) + t(\lambda e^t + 1))$$

e então

$$E\left[X^2\right] = M''(0) = \lambda(\lambda + 1)$$

de onde segue que

$$\text{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Isso Prova que na distribuição de Poisson:
Média=Esperança=Variância=λ

6.2.12 Moda

Para encontrar a moda da distribuição de Poisson para $X > 0$, considere a relação

$$\frac{P(X = x)}{P(X = x - 1)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{X!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}} = \frac{\lambda}{x}$$

Que é maior que 1 se $X < \lambda$ e menor que 1 se $X > \lambda$.

- E se $\lambda < 1$,então $P\{X = 0\} > P\{X = 1\} > P\{X = 2\}$ De modo que a moda é 0.

- E se $\lambda > 1$ não é um número inteiro então a moda será $\lfloor X \rfloor$ desde que $P\{X = \lceil X \rceil\} > P\{X = \lfloor X \rfloor\}$

- E se λ for um número inteiro Z ,então $P\{X = Z\} = P\{X = Z - 1\}$ e por isso Z ou Z-1 pode ser considerado a moda da distribuição de Poisson.

6.2.13 Exemplos

1- Considere um processo que têm uma taxa de 0.2 defeitos por unidade.Qual a probabilidade de uma unidade qualquer apresentar:

a) Dois defeitos?
$\lambda = 0.2$
$P(X = 2) = \frac{e^{-0.2}0.2^2}{2!} = 0.0164$

b) Um defeito?
$\lambda = 0.2$
$P(X = 1) = \frac{e^{-0.2}(0.2)^1}{1!} = 0.1637$

c) Zero defeito?
$\lambda = 0.2$
$P(X = 0) = \frac{e^{-0.2}(0.2)^0}{0!} = 0.8187$

Falta mais exemplos

6.2.14 Poisson no Software R

6.2.15 Comandos

No Software R tem alguns comandos específicos para a distribuição de Poisson que precisamos conhecer como:

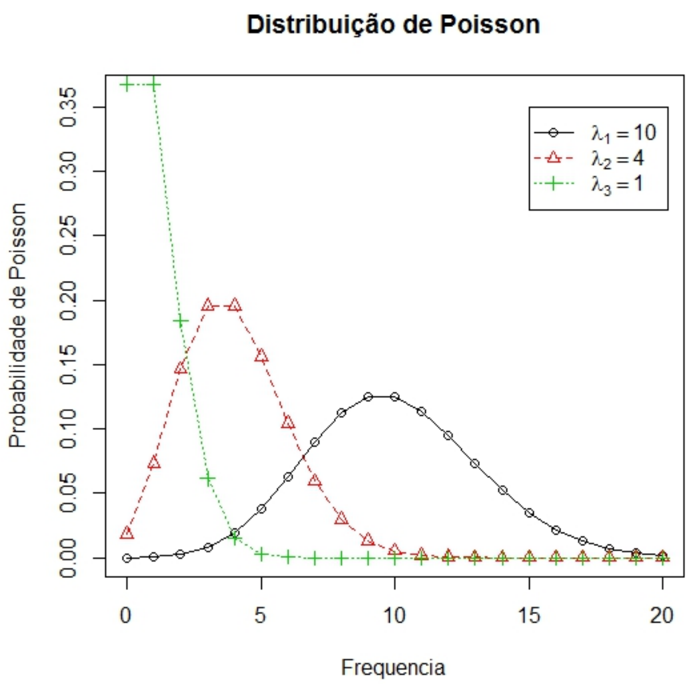
- dpois$\Rightarrow$ [Dá a densidade da distribuição]
  Maneira de usar no R:
  dpois(x, lambda, log = FALSE)
  X é o vetor do tamanho da amostra e lambda é o valor da taxa de poisson (λ)
- ppois$\Rightarrow$ [Dá o valor da função de distribuição de Poisson]
  Maneira de usar no R:
  ppois (p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
  P é o vetor do tamanho da amostra e lambda é a taxa de poisson (λ)
- qpois$\Rightarrow$ [Dá o valor da função quantil da distribuição de Poisson]
  Maneira de usar no R:
  qpois (q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

- rpois$\Rightarrow$ [gera valores aleátorios para lambda]
  Maneira de usar no R:
  rpois (n, lambda)

6.2.16 Função Distribuição de Probabilidade de Poisson no R

Comando para gerar a distribuição de probabilidade de Poisson com a variação de λ:

```
x <- 0:20
poisson <- dpois(x, 10)
poisson[1]
plot(x,poisson, xlab= "Frequencia",lty=1,ylim=c(0,0.36),
     ylab="Probabilidade de Poisson",main="Distribuição de Poisson
lines(x,poisson)
y <- 0:20
poisson <- dpois(x, 4)
lines(y,poisson,type="o",lty=2,col=2,pch=2)
z <- 0:20
poisson <- dpois(z, 1)
lines(z,poisson,type="o",lty=3,col=3,pch=3)
e1<-expression(lambda[1] == 10, lambda[2] == 4, lambda[3] == 1)
utils::str(legend(15,0.35, e1,pch=1:3, col = 1:3, lty = 1:3, lwd =
```

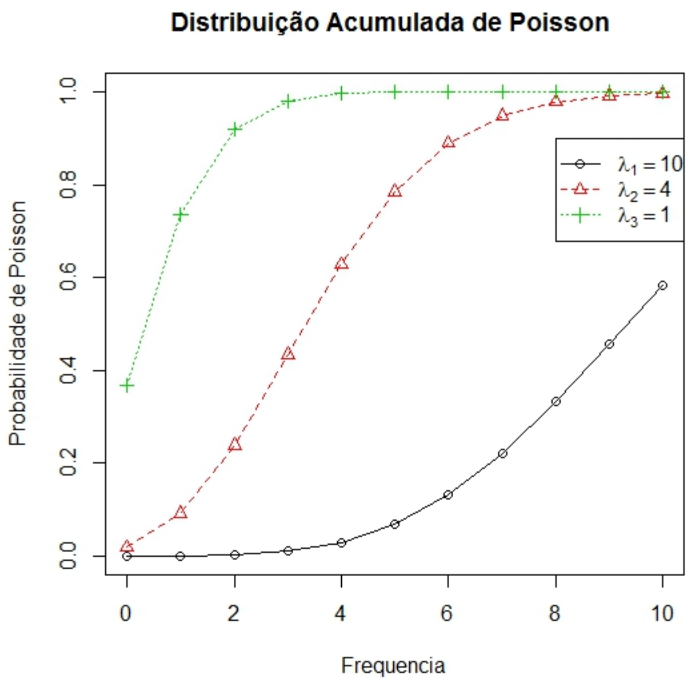


6.2.17 Distribuição Acumulada de Poisson no R

Comando para gerar a distribuição acumulada no R com variação de λ:

```
x <- 0:10
poisson <- ppois(x, 10)
```

```
poisson[1]
plot(x,poisson, xlab= "Frequencia",lty=1,ylim=c(0,1),
     ylab="Probabilidade de Poisson",main="Distribuição Acumulada
lines(x,poisson)
y <- 0:10
poisson <- ppois(y, 4)
lines(y,poisson,type="o",lty=2,col=2,pch=2)
z <- 0:10
poisson <- ppois(z, 1)
lines(z,poisson,type="o",lty=3,col=3,pch=3)
e1<-expression(lambda[1] == 10, lambda[2] == 4, lambda[3] == 1)
utils::str(legend(15,0.35, e1,pch=1:3, col = 1:3, lty = 1:3, lwd =
```



6.2.18 Simulação da distribuição de Poisson com Parâmetros theta

Para simular uma variável aleatória de poisson com média λ, geraremos variavéis aleatórias U_1,U_2,... independentes e uniformes no intervalo de (0,1) e parar quando

$$N = min\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\right\}$$

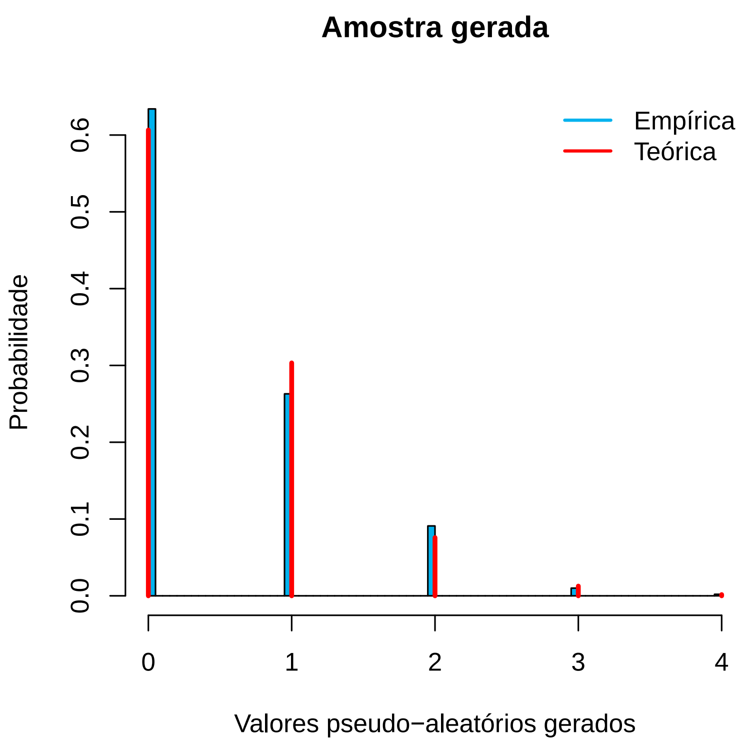
A variável aleatória $X \equiv N - 1$ possui a distribuição desejada. Em outras palavras,se gerarmos números aleatórios continuamente até que seu produto seja menor que $e^{-\lambda}$,então o número necessário,menos 1,é Poisson

com médiaλ.
Que $X \equiv N - 1$ édefato uma variável aleatória de Poisson com média λ talvez possa ser visto mais facilmente se observamos que

$$X + 1 = min\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\right\}$$

é equivalente a
$X = max\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda}\right\}$ onde $\prod_{i=1}^{0} U_i \equiv 1$

```
n<-1000 #tamanho da amostra
z<-0; #Variavel aleatória
x<-0;#Variavel aleatória
theta<-0.5 #Parametro
for(z in 1:n){ # é necessário o for pois queremos gerar uma amostr

# step 1: gere um valor aleatório entre 0 e 1
u<-runif(1)#gera um valor aleatório entre 0 e 1
# step 2: faça
i<-0; p<-exp(-theta);f<-p
# step 3:
h<-0
while(h<1){
if(u<f){
x[z]<-i
h<-1 # stop: processo de parada do algoritmo
}else{
p<-(theta*p)/(i+1);
f<-f+p;
i<-i+1;
}
}
}
table(x)
gg<-hist(x,plot=F,breaks=100)
gg$counts<-gg$counts/1000
plot(gg,col='deepskyblue2',border='black',
main='Amostra gerada',
xlab='Valores pseudo-aleatórios gerados',
ylab='Probabilidade')
teorico<-dpois(0:4,0.5)
lines(0:4,teorico,type='h',lwd=3,col='red')
legend('topright',legend=c('Empírica','Teórica'),
col=c('deepskyblue2','red'),lwd=2,bt='n')
```



6.2.19 Poisson Truncada no 0

Utilizada para medir o parâmetro de Poisson quando os zero valores das frequências da distribuição não são observados na amostra ou na variável em questão.
Partimos de uma v.a $X \epsilon P(\lambda)$

Se Y é uma v.a definida como $X \mid X > 0$,neste caso $Y = \{1, 2, 3, ...\}$.Sua função distribuição de probabilidade é dada por:
$P(Y = k) = P(X = k \mid X > 0) = \frac{P(X=k \cap X>0)}{x>0} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!(1-e^{-\lambda})}$,onde $k \geq 1$.

6.2.20 Poisson Truncada pela direita

Se Y é uma v.a definida como $X \mid X \leq l$ neste caso $Y = \{0, 2, 3, ..., l-1, l\}$,sua função distribuição de probabilidade é dada por:
$P(Y = k) = P(X = k \mid X \leq l) = \frac{P(X=k \cap X \leq l)}{P(X \leq l)} = \frac{\lambda^k}{k! \sum_{j=0}^{l} \frac{\lambda^j}{j!}}$
onde $0 \leq k \leq l$

6.2.21 Truncada pela esquerda

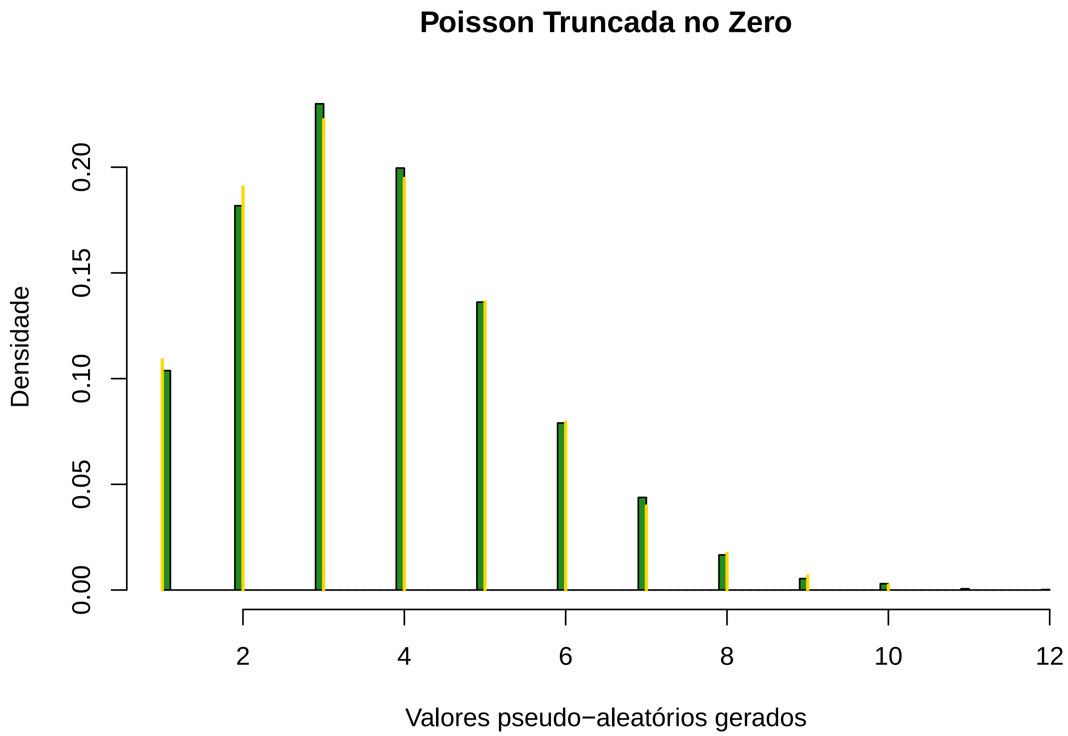
Se Y é uma v.a definida como $X \mid X \geq s$. neste caso $Y = \{s, s+1, s+2, s+3, ...\}$,sua função distribuição de é dada por:
$P(Y = k) = P(X = k \mid X \geq s) = \frac{P(X=k \cap X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{\lambda^k}{k! \sum_{j=s}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}$
onde $s \leq k$.

6.2.22 Duplamente truncada

Se Y é uma v.a definida como $X \mid s \leq X \leq l$. Neste caso $Y = \{s, s+1, s+2, s+3, ..., l-1, l\}$, sua função distribuição de probabilidade é dada por:
$P(Y = k) = P(X = k \mid s \leq X \leq) = \frac{P(X=k \cap s \leq X \leq l)}{P(s \leq X \leq l)} = \frac{\lambda^k}{k! \sum_{j=s}^{l} \frac{\lambda^j}{j!}}$
onde $s \leq k \leq l$.

6.2.23 Simulação da poisson truncada no 0

```
n<-5000 # tamanho da amostra
T_esao<-3.5 # média da Poisson-truncada
u<-runif(n) #
t = -log(1 - u*(1 - exp(-T_esao))) # o primeiro evento
t1<-(T_esao - t)
X <- rpois(n,t1)+1 # amostra final da poisson truncada
k<-hist(X,breaks=100);
k$counts<-k$counts/n
plot(k,col='forestgreen',border='black',
main='Poisson Truncada no Zero',ylab="Densidade",
xlab='Valores pseudo-aleatórios gerados')
table(X)
round(table(X)/n,3)
d<-function(j) return((T_esao^j/((exp(T_esao)-1)*factorial(j))))
round(d(1:10),3)
lines(1:10,d(1:10),type='h',col='gold',lwd=2)
```



6.3 Distribuição Geométrica

6.3.1 Definição

Realizemos, então, um experimento, repetidamente, onde estejamos interessados apenas na ocorrência ou não de algum evento A. Admitamos que tais repetições sejam independentes, e que em cada repetição a $P(A) = p$ e a $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ permaneçam as mesmas. Por último, a repetição do experimento se dará até que o evento A ocorra.

A variável aleatória X como o número de repetições necessárias para obter a primeira ocorrência do evento A, nela se incluindo este último evento, e com X tomando os valores possíveis 1, 2, ..., define-se como uma Distribuição Geométrica.

Como X só será igual a x se, e somente se, nas primeiras $(x-1)$ repetições do experimento ocorrerem o resultado $\overline{A}$, enquanto que a k-ésima repetição dê o resultado A, temos

$$P(X = x) = q^{x-1}p, \qquad I_{\{1,2,\ldots\}}(X) \tag{2}$$

Notação: $X \sim Geo(p)$

Uma forma simples e direta de demonstrar que a Eq.2 é uma distribuição de probabilidade legítima é a seguinte:

Temos, obviamente, que $P(X = x) \geq 0$, e

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}p \overset{\textbf{(*1)}}{\quad} &= p + pq + pq^2 + ... = \\
&= p(1 + q + q^2 + ...) = \\
= p\left[\frac{1}{1-q}\right] &= \frac{p}{1-(1-p)} = \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

*1 - Uma série geométrica convergente de razão q. A soma dos infinitos termos de uma série geométrica que converge se resume em $\frac{a}{1-r}$, sendo **a** o primeiro termo e **r** a razão.

Além disso, se X tiver uma distribuição geométrica como a descrita pela Eq.2, e se fizermos $Z = X - 1$, poderemos interpretar Z como o número de falhas que precedem o primeiro sucesso.

Teremos, assim: $P(Z = k) = pq^k$, com $k = 0, 1, 2, ...$, onde $p = P(sucesso)$ e $q = P(falha)$.

A distribuição geométrica apresenta um propriedade interessante:

Teorema. Suponha-se que X tenha uma distribuição geométrica dada pela Eq.2. Então, para dois quaisquer inteiros positivos s e t,

$$P(X \geq s + t | X > s) = P(X > t) \tag{4}$$

O teorema acima afirma que a distribuição geométrica "não possui"memória, no sentido seguinte: Suponha que o evento A **não** tenha ocorrido durante as primeiras repetições do experimento. Então a probabilidade de que ele não ocorra nas **próximas** t repetições será a mesma probabilidade de que não tivesse ocorrido durante as suas primeiras t repetições.

6.3.2 Esperança

Poderemos obter a Esperança, ou valor esperado, de X da seguinte maneira:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1}$$

Sendo $f(q) = q^n + k$, k uma constante real, então $f'(q) = n.q^{n-1}$.

Por conveniência, $k = 1 = q^0$, logo, $f(q) = q^n + q^0$. Substituindo na expressão,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} f'(q) = \\ &= p\left[\sum_{x=1}^{\infty} f(q)\right]' = p\left[\sum_{x=0}^{\infty} q^n\right]' = \\ &= p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \\ &= p.\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned} \tag{5}$$

- A derivação do somatório é válida aqui, pois a série converge quando $|q| < 1$.
- O fato de $E(X)$ ser igual ao inverso de p é aceito intuitivamente, pois pequenos valores de $p = P(A)$ exigem muitas repetições a fim de permitir que A ocorra.

6.3.3 Variância

Para a Variância podemos prosseguir da seguinte forma:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Já possuímos o valor da esperança: $E(X) = \frac{1}{p}$

Já o valor de $E(X^2)$ é:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p q^{x-1} = \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1} = p.\frac{1+q}{(1-q)^3} \overset{\textbf{(*2)}}{=} p.\frac{1+(1-p)}{[1-(1-p)]^3} = \\
&= p.\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

*2 - A soma de uma série geométrica ponderada pelo quadrado de números naturais, quando $|r| < 1$, é igual a $\frac{1+r}{(1-r)^3}$

Por fim:

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
V(X) &= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
V(X) &= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

6.3.4 Função da Distribuição Acumulada

A função da distribuição acumulada de uma variável aleatória X geométrica é:

$$P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

Para calcular $P(X > k)$:

$$
\begin{aligned}
P(X > x) = P(X \geq x+1) = \sum_{k=x+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
P(X > x) = p[(1-p)^{x} + (1-p)^{x+1} + (1-p)^{x+2} + ...] \\
P(X > x) = p\left[\frac{(1-p)^{x}}{1-(1-p)}\right] = (1-p)^{x}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Dessa forma,

$$
P(X \leq x) = 1 - (1-p)^{x}
$$

6.3.5 Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição geométrica de parâmetro p. Assim, a função geradora de momentos é dada por:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = pe^{t}\sum_{x=0}^{\infty}(e^{t})^{x-1}(1-p)^{x-1} = \\
= pe^{t}\sum_{x=0}^{\infty}[e^{t}(1-p)]^{x-1} = \frac{pe^{t}}{1-(1-p)e^{t}}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

6.3.6 K-ésimo Momento

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{k}) &= \sum_{n=k}^{\infty} n^{k}p(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} n^{k}p(1-p)^{n-k}(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)^{k-1}\sum_{n=k}^{\infty} n^{k}(1-p)^{n-k} \\
&= p(1-p)^{k-1}(-1)^{k}\frac{d^{k}}{dp^{k}}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n} \\
&= p(1-p)^{k-1}(-1)^{k}\frac{d^{k}}{dp^{k}}\frac{1}{p} \\
&= \frac{k!(1-p)^{k-1}}{p^{k}}
\end{aligned}
$$

6.3.7 Assimetria

Fonte:http://www.math.uah.edu/stat/expect/Skew.html

$$
\begin{aligned}
Assimetria(X) &= E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \\
&= \frac{E(X^3) - 3.\mu.E(X^2) + 2.\mu^3}{\sigma^3} = \\
&= \frac{E(X^3) - 3.\mu.\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$Assimetria(X) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] =$$

$$= E\left(\frac{X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3}{\sigma^3}\right) =$$

$$= \frac{E(X^3) - 3E(X^2).E(X) + 3E(X).[E(X)]^2 - [E(X)]^3}{\sqrt{Var^3}} =$$

Para organização, façamos a demonstração por partes:

$$\sqrt{Var^3} = (Var^{1/2})^3 = Var^{3/2} = Var^{2/2}.Var^{1/2} =$$

$$= Var\sqrt{Var} = \frac{1-p}{p^2}.\sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \frac{1-p}{p^2}.\left(\frac{1^2}{p^2}.\ 1-p\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1-p}{p^2}.\frac{1}{p}.\sqrt{1-p} = \frac{1-p}{p^3}.\sqrt{1-p}$$

$$E(X^3) = \frac{3!(1-p)^2}{p^3}$$

$$E(X^2) = \frac{2!(1-p)}{p^2}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Aplicando na fórmula:

$$Assimetria(X) = \frac{E(X^3) - 3E(X^2).E(X) + 3E(X).[E(X)]^2 - [E(X)]^3}{\sqrt{Var^3}} =$$

$$= \frac{\frac{3!(1-p)^2}{p^3} - \frac{3.2!(1-p)}{p^2}.\frac{1}{p} + 3.\frac{1}{p}.\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}}{\frac{1-p}{p^3}.\sqrt{1-p}} = \frac{\frac{6(1-p)^2}{p^3} - \frac{6(1-p)}{p^3} + \frac{3}{p^3} - \frac{1}{p^3}}{\frac{1-p}{p^3}.\sqrt{1-p}}$$

$$= \frac{\frac{6(1-p)^2 - 6(1-p) + 2}{p^3}}{\frac{1-p\sqrt{1-p}}{p^3}} = \frac{6(1-p)^2 - 6(1-p) + 2}{1-p\sqrt{1-p}}$$

$$Formulafinal : \frac{2-}{\sqrt{1-}}$$

6.3.8 Curtose

Fonte:http://www.math.uah.edu/stat/expect/Skew.html

$$\begin{aligned}Curtose(X) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \\ = \frac{E(X^4) - 4.\mu.E(X^3) + 6.\mu^2.E(X^2) - 3.\mu^4}{\sigma^4} = \\ = \frac{E(X^4) - 4.\mu.E(X^3) + 6.\mu^2\sigma + 3.\mu^4}{\sigma^4}\end{aligned} \tag{12}$$

————-

$$Curtose(X) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = E\left(\frac{X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4}{\sigma^4}\right) =$$

$$= \frac{E(X^4) - 4E(X^3).E(X) + 6.[E(X)]^2.E(X^2) - 4.E(X).[E(X)]^3 + [E(X)]^4}{\sqrt{Var^4}}$$

Para organização, façamos a demonstração por partes:

$$\sqrt{Var^4} = Var^2 = \frac{(1-p)^2}{p^4}$$

$$E(X^4) = \frac{4!(1-p)^3}{p^4}$$

Aplicando na fórmula:

$$Curtose(X) = \frac{E(X^4) - 4E(X^3).E(X) + 6.[E(X)]^2.E(X^2) - 4.E(X).[E(X)]^3 + [E(X)]^4}{\sqrt{Var^4}} =$$

$$= \frac{\frac{24(1-p)^3}{p^4} - \frac{4.6(1-p)^2}{p^3}.\frac{1}{p} + \frac{6.2(1-p)}{p^2}.\frac{1}{p^2} - 4.\frac{1}{p}.\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4}}{Var^2} =$$

$$= \frac{\frac{24(1-p)^3 - 24(1-p)^2 + 12(1-p) - 3}{p^4}}{\frac{(1-p)^2}{p^4}} = \frac{24(1-p)^3 - 24(1-p)^2 + 12(1-p) - 3}{(1-p)^2}$$

$$Formulafinal : \frac{p^2}{1-p}$$

6.3.9 Aplicação no R

A Distribuição Geométrica no R conta o número de falhas que precedem o primeiro sucesso, ou seja, a função de probabilidade Geométrica no R segue a seguinte fórmula:

$$P(X = x) = p(1 - p)^x \tag{13}$$

Existem alguns comandos específicos para a distribuição Geométrica no Software R:

• **dgeom(x,p)** - Retorna a função de probabilidade da distribuição, onde *x* é o número de falhas até o primeiro sucesso e *p* é a probabilidade.

Exemplo: A probabilidade de que uma impressora produza uma imagem defeituosa é de 0,1. Seja *X* a variável aleatória que conta o número de impressões bem sucedidas, ou seja, a quantidade de impressões anteriores à obtenção da primeira falha, qual a probabilidade de $P(X = 2)$?

```
impressão <- dgeom(2,0.1);impressão
[1] 0.081
```

• **pgeom(x,p,lower.tail)** - Retorna a função distribuição acumulada, onde x é o número de falhas até o primeiro sucesso, p é a sua probabilidade e lower.tail=TRUE ou FALSE faz a soma das probabilidades.

Exemplo: Forneça a FDA do exemplo anterior.

```
impressãoFDA <- pgeom(2,0.1,lower.tail=TRUE);impressãoFDA
[1] 0.271
```

• **rgeom(n,p)** - Retorna valores aleatórios da distribuição, onde n é o número de observações e p a sua probabilidade.

Exemplo: Gere 10 observações do exemplo anterior.

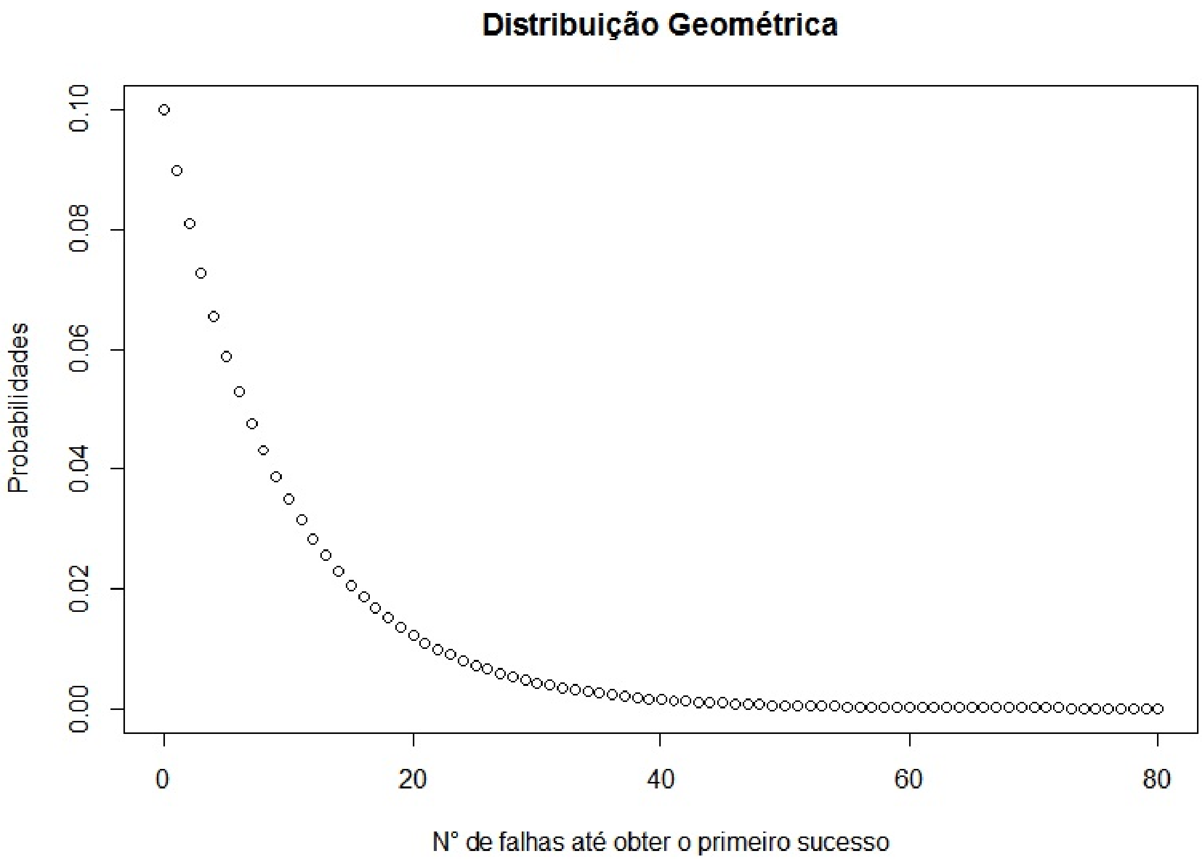
```
v.a <- rgeom(10,0.1);v.a
[1]  5  1  5 13  0 13 25 13 13  4
```

Gerando gráficos

Uma forma de gerar o gráfico da função de probabilidade da distribuição geométrica, para ter-se a ideia de como esta se comporta, é a seguinte:

```
x=0:80;x
plot(x,dgeom(x,0.1),ylab="Probabilidades", xlab="N de falhas até obte
```

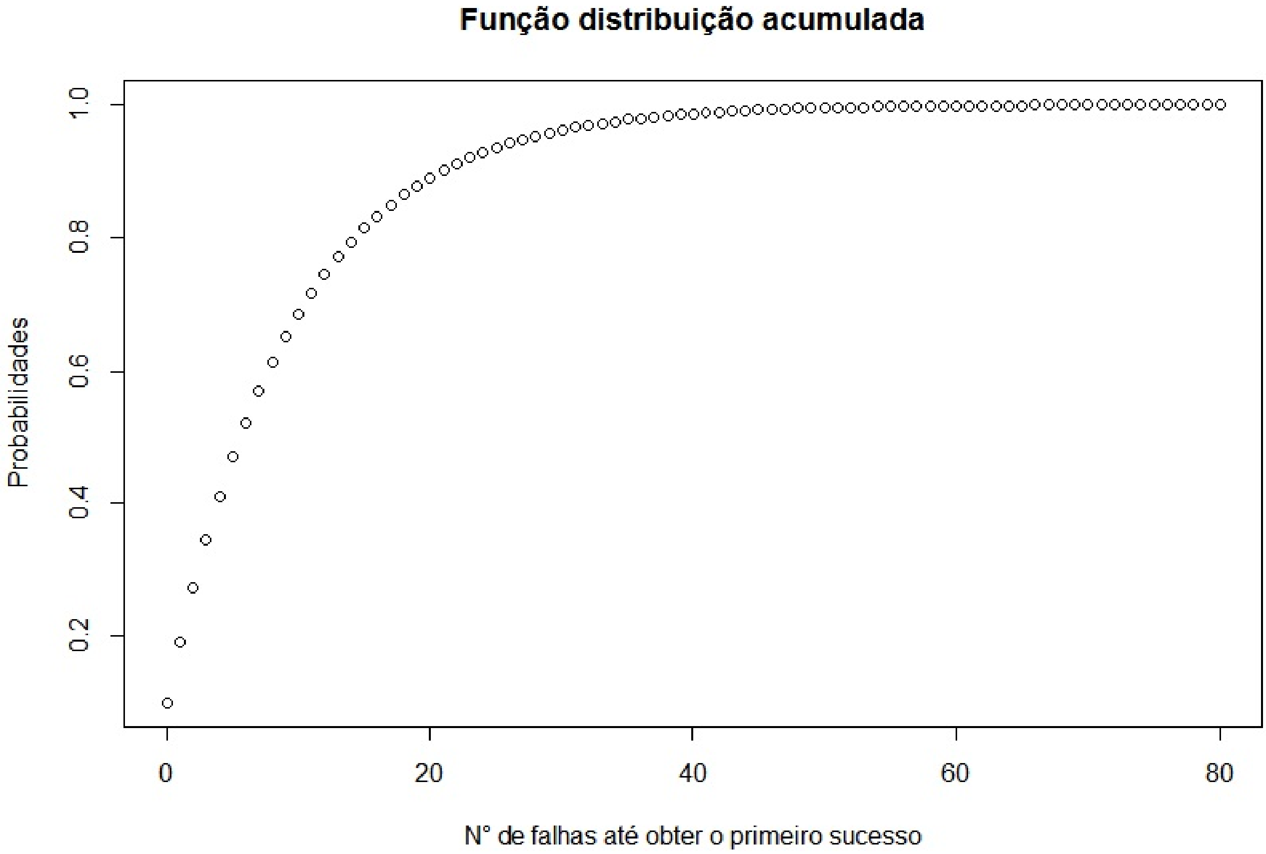
Onde o x é o número de falhas até o primeiro sucesso onde, nesta amostra, está indo de 0 a 80 falhas, e a probabilidade é de 0.1.



Para gerar o gráfico da função distriuição acumulada basta incluir o seguinte código:

```
y=0:...;y
plot(y,pgeom(y,p),ylab="Probabilidades", xlab="N de falhas até obter
```

Onde x é o número de falhas até o primeiro sucesso onde, nesta amostra, está indo de 0 a 80 falhas, e a probabilidade é de 0.1



6.3.10 Simulação

Sabemos que há dois casos para a Distribuição Geométrica: o caso em que ela conta o numero de falhas que precedem o primeiro sucesso, e o caso em que ela conta o numero de repetições necessárias para obter o primeiro sucesso.

Para isso faremos duas funções para os dois casos.

Primeiro caso

```
p=0.6
q=1-p
x<-0
for(i in 1:1000){
u<-runif(1)
x[i]<-floor(log(u)/log(q))+1
}
table(x)/1000

## P[X=x] = p * q^(x-1), x = 1,2,3,...
prob.t<-function(x,p){
if(min(x)<1){
warning('x must be greater than or equal to 1')
}else{
```

```
q<-1-p
return(p*q^(x-1))
}
}
```

Para testar a função:

```
prob.t(1,0.4)
teorica<-prob.t(1:10,0.6);teorica
```

Segundo caso

```
z<-0
for(i in 1:1000){
u<-runif(1)
z[i]<-floor(log(u)/log(q))
}
table(z)/1000
prob.z<-function(z,p){
if(min(x)<=1){
q<-1-p
return(p*q^x)
}
}
```

Para testar a função:

```
prob.z(0,0.4)
```

6.4 Distribuição Hipergeométrica

6.4.1 Introdução

A clássica distribuição hipergeométrica foi primeiramente De Moiver desenvolvida por (1711,p.236), quando foi considerada uma generalização para um problema posto por Huggens. A versão multivariada do problema foi exposta por Simpson em 1740, mas uma pequena atenção foi dada para a distribuição univariada por Cournot.

Uma função hipergeométrica é uma distribuição de probabilidade discreta que se retirar x elementos do tipo A numa sequência de n extrações de uma população finita de tamanho N, com M elementos com a característica A e $N - M$ elementos com a caracteristica B, sem reposição.

Modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de Bernoulli dependentes,refere-se a experimentos que se caracterizam por retiradas sem reposição, onde a probabilidade de sucesso se altera a cada retirada. Essa distruibuição é extremamente importante no contexto de amostragem sem reposição.

Função de Probabilidade da Hipergeométrica

Dizemos que uma variável aleatória X segue uma distribuição hipergeométrica de parâmetros M, N e n se sua função de probabilidade for dada da maneira abaixo. Onde esta função é denotada por $X \sim$ Hgeo(M, N, n). A função de probabilidade de X é:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} I_{\{max(0,n-(N-M)),\dots,min(M,n)\}}(x)$$

Prova:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\left(\begin{array}{c} M \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} N-M \\ n-k \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)} = \frac{M!}{k!(M-k)!}\frac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}$$

Lembrando que $\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right)$, é o número de a combinações, b a b. Ou ainda, $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)\dots(a-b+1)}{b!}$

Uma variável aleatória X cuja função de probabilidade é dada pela equação para alguns valores de n,N,M é chamada de variável aleatória hipergeométrica.
N: número de objetos de uma população.
A população divide-se em M(objetos do tipo A) e N-M(objetos do tipo B)
k: número de falhas(B) em uma população finita.
x: número de falhas na amostra.

6.4.2 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória *X* é uma função que a cada número real x associa o valor:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

A notação $[X \leq x]$ é usada para designar o conjunto $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}$, isto é, denota a imagem inversa do intervalo $(-\infty, x]$ pela variável aleatória *X*.

O conhecimento da função de distribuição acumulada é suficiente para entendermos o comportamento de uma variável aleatória. Mesmo que a variável assuma valores apenas num subconjunto dos reais, a função de distribuição é definida em toda a reta. Ela é chamada de função de distribuição acumulada, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a x. Então:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Portanto como a função de probabilidade é a hipergeométrica, temos a seguinte função acumulada:

$$\sum \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Exemplo: Uma população contém 2000 objetos das quais 500 com uma certa caracterítica. Em uma amostra de tamanho 200. Quantos indivíduos devem ter essa característica?

6.4.3 Função Geradora de Momentos

As funções geratrizes de momentos, as quais, como o próprio nome revela, podem ser utilizadas para determinar os momentos μ_k, $k = 1, 2, ...$ de uma variável aleatória.

Utizando a f.g.m(função geradora de momentos) para determinar o k-ésimo momento de uma variável aleatória X, $\mu_k = [E^k]$. Observamos:

$$M_X^k(t) = \frac{d^{(k)}}{dt^k} M_X(t) = \frac{d^{(k)}}{dt^k} E[e^{tX}] = E\left[\frac{d^{(k)}}{dt^k} e^{tX}\right] = E[X^k e^{tX}]$$

Onde, $k = 1, 2, ...$

Na teoria das probabilidades temos a função geradora de momentos (f.g.m) de uma variável aleatória, definida como uma especificação alternativa de sua distribuição de probabilidade, devido a sua propriedade de unicidade. Porém nem todas as variáveis aleatórias têm f.g.m., mesmo para valores reais. Mesmo com isso, admitiremos que ela sempre exista. A (f.g.m) da hipergeométrica é dada por:

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{ti} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-M}{n} F(-n, -M, N-M-n+1, e^t)}{\binom{N}{n}}. \tag{14}$$

6.4.4 Valor Esperado

O valor esperado de uma variável aleatória X com distribuição hipergeométrica com parâmetros N, M e n é dado por

$$\mathbb{E}\,(X) = \sum_{k=0}^{n} kP[X = k] = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{kM!}{k!(M-k)!} \frac{n!(N-n)!}{N!} \binom{N-M}{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{N-M}{n-k} \frac{M(M-1)!}{(k-1)!(M-k)!} \frac{n(n-1)!(N-n)!}{N(N-1)!} = \frac{nM}{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{N-M}{n-k}\binom{M-1}{k-1}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\,(X) = \frac{nM}{N} \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{N-k}{n-k}\binom{M-1}{k-1}$$

e, assim,

$$\mathbb{E}\,(X) = \frac{nM}{N} \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-k}{n-k-1}\binom{M-1}{k}$$

$$= \frac{nM}{N} \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} = n\frac{M}{N}.$$

6.4.5 Variância

Se $\mu = E(X)$ é o valor esperado da variável aleatória *X*, então a variância, Var(*X*) ou σ^2, é:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

ou

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Isto é, é o valor esperado do quadrado do desvio de X da sua própria média. Em linguagem comum isto pode ser expresso como ”A média do quadrado da distância de cada ponto até a média”. A variância da função de probabilidade hipergeométrica é dada por:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}\left(X = k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [k(k-1) + k] \mathbb{P}\left(X = k\right) = \sum_{k=0}^{n} x(x-1) \mathbb{P}\left(X = k\right) + \sum_{k=0}^{n} x \mathbb{P}\left(X = k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x(x-1) \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-k \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} + \mathbb{E}\left(X\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{M(M-1)(M-2)!}{k(k-1)(k-2)!(M-k)!} \begin{pmatrix} N-M \\ n-x \end{pmatrix} \frac{n(n-1)(n-2)!(N-n)!}{N(N-1)(N-2)!} + \mathbb{E}\left(X\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \frac{\begin{pmatrix} M-2 \\ k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-k \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}} + \mathbb{E}\left(X\right)$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \frac{1}{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}} \sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} M-2 \\ k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-k \\ n-k \end{pmatrix} + \mathbb{E}\left(X\right)$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \frac{1}{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}} \sum_{k=0}^{n-2} \begin{pmatrix} M-2 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-k \\ n-k-2 \end{pmatrix} + \mathbb{E}\left(X\right)$$

$$= \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} \frac{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}} + \mathbb{E}(X) = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \mathbb{E}(X) = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} +$$

Portanto,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nM}{N} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = n\frac{M}{N}\frac{(N-M)}{N}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

6.4.6 Desvio Padrão

O desvio padrão é a medida mais comum da dispersão estatística (representado pelo símbolo sigma, σ). Ele mostra o quanto de variação ou "dispersão"existe em relação à média (ou valor esperado). Um baixo desvio padrão indica que os dados tendem a estar próximos da média; um desvio padrão alto indica que os dados estão espalhados por uma gama de valores. O desvio padrão define-se como a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Uma vez que σ^2 é a variância da distribuição.

6.4.7 Assimetria

A assimetria (também conhecida como obliquidade) é uma medida de simetria de distribuições de probabilidade. Ela costuma ser percebida através de uma representação gráfica ou do cálculo das medidas de posição de uma variável aleatória. É fácil perceber a obliquidade pela diferença nos valores da média, mediana e moda. Numa distribuição simétrica, por exemplo, esses valores são iguais. Resumindo, assimetria é o grau de desvio ou afastamento da simetria de uma distribuição.

$$\frac{(N-2M)(N-1)^{\frac{1}{2}}(N-2n)}{[nM(N-M)(N-n)]^{\frac{1}{2}}(N-2)}$$

6.4.8 Curtose

A curtose é uma medida de dispersão das distribuições de probabilidade, normalmente associada ao grau de dispersão. Ela é percebida por valores como a variância e o desvio padrão. Ou seja, curtose indica o grau de achatamento de uma distribuição, tomando-se com referência a curva normal.

A curtose se assemelha em vários aspectos com a assimetria. Ambas são definidas a partir de momentos e podem ser percebidas através da visualização de gráficos (entretanto, a curtose pode ser percebida de maneira errada, visto que ela depende da escala usada para as medidas empregadas).

$$\frac{(N-1)N^2(N(N+1)) - 6r(N-M) - 6n(N-n) + 6nr(N-M)(N-n)(5N-6)}{nM(N-M)(N-n)(N-2)(N-3)}$$

6.4.9 Moda

$$Mo(X) = \frac{(n+1)(M+1)}{N+2}$$

6.4.10 Comandos no R

6.4.11 Hipergeométrica

Função Densidade (ou Probabilidade:) Calcula a probabilidade P(X=x), no caso de distribuições discretas, para cada elemento do vetor x. No R o nome dessa função é iniciado pela letra **d** mais o nome da distribuição (ex: dbinom, dpois, etc.).

Função Distribuição: Calcula a distribuição acumulada $P(X \leq x)$. O nome da função é iniciado pela letra **p** mais o nome da distribuição(ex:pnorm, pexp etc.).

Função Probabilidade: Calcula o valor de x correspondente a probabilidade p acumulada. É o inverso da função Distribuição. O nome da função é iniciado pela letra **q** mais o nome da distribuição (ex:qbeta, qcauchy etc.).

Gerador aleatório: Gera números aleatórios baseados na distribuição definida. O nome da função é iniciado pela letra **r** mais o nome da distribuição (ex: rnorm, rbinom etc.).

Exemplos:

dhyper(x, m, n, k, opções)
phyper(q, m, n, k, opções)
qhyper(p, m, n, k, opções)
rhyper(nn, m, n, k)

x: vetor contendo o número de elementos com a característica A extraídos sem reposição de uma urna que contém elementos com características A e B.
m: número de elementos com a característica A.
n: número de elementos com a característica B.
k: número de elementos extraídos da urna.
q: vetor contendo os quantis.
p: vetor contendo as probabilidades.
nn: número de observações.

6.5 Distribuição Pascal ou Binomial Negativa

6.5.1 Descrição

A distribuição Binomial Negativa é um modelo probabilistico discreto, que é caracterizado por um experimento aleatório composto por repetidos experimentos de Bernoulli independentes, que só para após o evento esperado ocorrer pela r-ésima vez.

6.5.2 Histórico

As primeiras formas da distribuição Binomial Negativa foram discutidas por Pascal(1679). Galloway(1839) encontrou uma interpretação para a função de probabilidade da Binomial Negativa enquanto estudava o problema dos pontos.

6.5.3 Definição

Dizemos que $X \sim BN(r,p)$ se sua função massa de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \left(\begin{array}{c} x-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r (1-p)^{x-r} I_{r,\infty}(x) \tag{15}$$

Onde p é a probabilidade de sucesso e r é o número de sucessos esperados.
Prova:

- Para $0 < p < 1$:

  $f_X(x) = \left(\begin{array}{c} x-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r (1-p)^{x-r} > 0$

- Provar que:

  $\sum_{x=r}^{\infty} \left(\begin{array}{c} x-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r (1-p)^{x-r} = 1$

Utilizando k=x-r e x=k+r

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} k+r-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r (1-p) \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} k+r-1 \\ r-1 \end{array} \right) (1-p)^k \end{aligned}$$

Utilizando a soma de uma série de binomial negativa,
onde: $(1-w)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix} w^k$

$$\begin{aligned} &= p^r(1-(1-p)^{-r}) \\ &= p^r(p^{-r}) = 1 \end{aligned}$$

6.5.4 Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada da Binomial negativa é dada pela seguinte função beta regularizada:

$$F_X(x) = I(p; r, x+1) \tag{16}$$

6.5.5 Moda

A moda da distribuição é dada por:

$$\begin{cases} \lfloor \frac{(1-p)(r-1)}{p} \rfloor & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } r \leq 1 \end{cases} \tag{17}$$

6.5.6 Função Geradora de Momentos

A FGM da Binomial Negativa pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r (1-p)^{x-r} e^{tx} \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{x=r}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} (e^t(1-p))^x \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^r (e^t(1-p))^r \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(r+x)!}{x!r!} ((1-p)e^t)^x \\ &= \frac{(pe^t)^r}{[1-(1-p)e^t]^r} \\ &= \frac{p^r}{[e^{-t}+p-1]^r} \end{aligned} \tag{18}$$

Assim, $M_X(t) = \frac{p^r}{[e^{-t}+p-1]^r}$ quando $(1-p)e^t < 1$.

6.5.7 Esperança

O valor esperado da distribuição Binomial Negativa pode ser obtido por diferentes métodos, como:

- **Definição**

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Usando $x\binom{x-1}{r-1} = r\binom{x}{r}$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} r \binom{x}{r} p^r (1-p)^{x-r}$$

Utilizando $x = r + j$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} r \binom{j+r}{r} p^r (1-p)^j \\
&= rp^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r}{r} (1-p)^j \\
&= rp^r p^{-r-1} \\
&= \frac{r}{p}
\end{aligned}$$

- **Somátorio de Geométricas**

Uma Binomial Negativa pode ser definida como a soma de varías distribuições Geométricas. Definindo $Y_i \sim Geo(p)$ e:
Y_1= Numero de repetições até o primeiro sucesso.
Y_2= Numero de repetições até o segundo sucesso.
Y_r= Numero de repetições até o r-ésimo sucesso.

Sendo os eventos Y_i independentes, $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_r$.

Utilizando-se do conhecimento prévio da esperança da distribuição Geométrica pode-se dizer que:

$$Y_i \sim Geo(p) \Rightarrow E(Y_i) = \frac{1}{p}$$

Assim,

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_r) = E(Y_1) + E(Y_2) + ... + E(Y_r) = \frac{r}{p}$$

– Pela FGM

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{p^r}{[e^{-t} + p - 1]^r} \\
M_X^{(1)}(t) &= \frac{rp^r}{e^t(p + e{-}t) - 1)^{k+1}} \\
M_X^{(1)}(0) &= E(X) = \frac{rp^r}{e^0(p + e^0 - 1)} = \frac{r}{p}
\end{aligned}$$

6.5.8 Variância

A variância da distribuição Binomial Negativa pode ser obtida por diferentes métodos, como:

– Definição

A Variância pode ser obtida pela seguinte formula: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x \cdot x^2 \\
&= 0 + \sum_{x=1}^{\infty} \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x x^2 \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x + r - 1)!}{(r - 1)!x!} p^r (1 - p)^x x^2 \\
&= \frac{rp}{1 - p} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x + r - 1)!}{r!(x - 1)!} p^{r+1} (1 - p)^{x-1} x
\end{aligned} \tag{19}$$

utilizando $s = r+1$ e $w = x-1$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{rp}{1-p}\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(w+s-1)!}{(s-1)!w!}p^s(1-p)^w(w+1) \\
&= \frac{rp}{1-p}\sum_{w=0}^{\infty}\binom{w+s-1}{s-1}p^s(1-p)^w(w+1) \\
&= \frac{rp}{1-p}\left[\sum_{w=0}^{\infty}\binom{w+s-1}{s-1}p^s(1-p)^w w+\sum_{w=0}^{\infty}\binom{w+s-1}{s-1}p^s(1-p)^w\right] \\
&= \frac{r(1-p)}{p}\left[\frac{s(1-p)}{p}+1\right] \\
&= \frac{r(1-p)(1+r(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

Assim, aplicando na formula da variância:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \frac{r(1-p)(1+r(1-p)}{p^2}-\left(\frac{r(1-p)}{p}\right)^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

- **Pela FGM**

$$\begin{aligned}
M_X^{(1)}(t) &= \frac{rp^r}{e^t(p+e^{-t}-1)^{k+1}} \\
M_X^{(2)}(t) &= \frac{rp^r(r-(p-1)e^t)(p+e^{-t}-1)^{-r}}{((p-1)e^t+1)^2} \\
M_X^{(2)}(0) &= E(X^2) = \frac{r(r-p+1)}{p^2}
\end{aligned}$$

Como $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$,

$$Var(X) = \frac{r(r-p+1)}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- **Pelo somatório de Geométricas**

Utilizando do mesmo pensamento da esperança e do conhecimento prévio sobre a distribuição Geométrica:

$$Var(X) = Var(Y_1+Y_2+...+Y_r) = Var(Y_1)+Var(Y_2)+...+Var(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

6.5.9 Função Característica

A função característica da Binomial Negativa é dada por:

$$\phi(t) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p}e^{it}\right)^{-r} \tag{20}$$

6.5.10 Assimetria

A assimetria da distribuição Binomial Negativa é dada por:

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}} \tag{21}$$

6.5.11 Curtose

A curtose da distribuição Binomial negativa é dada pro:

$$\gamma_2 = \frac{p^2 - 6p + 6}{r(1-p)} \tag{22}$$

6.5.12 Binomial Negativa no R

– **Comandos**

dnbinom(x, size, prob) ⇒ Retorna a função de probabilidade da distribuição.

pnbinom(p, size, prob) ⇒ Retorna a distribuição acumulada da distribuição.

qnbinom(q, size, prob) ⇒ Retorna os quantils da distribuição.

rnbinom(n, size, prob) ⇒ Retorna valores aleatórios da distribuição.

x ⇒ Vetor com o numero esperado de falhas.

p ⇒ Vetor de probabilidadas.

q ⇒ Vetor de quantis

n ⇒ Número de observações a serem retornadas.

size ⇒ Numero de sucessos.

prob ⇒ Probabilidade de sucesso.

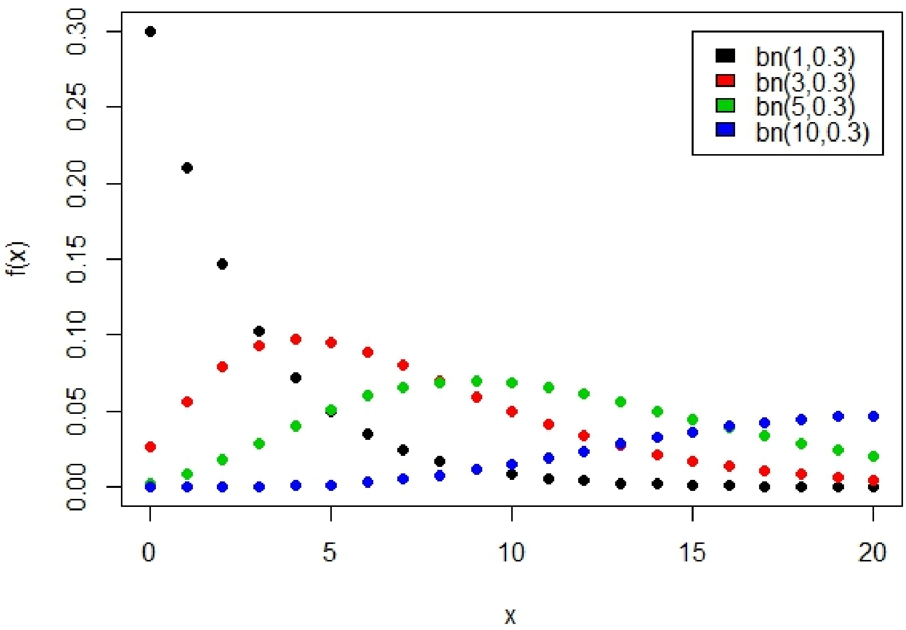
– **Gráfico da função de distribuição**

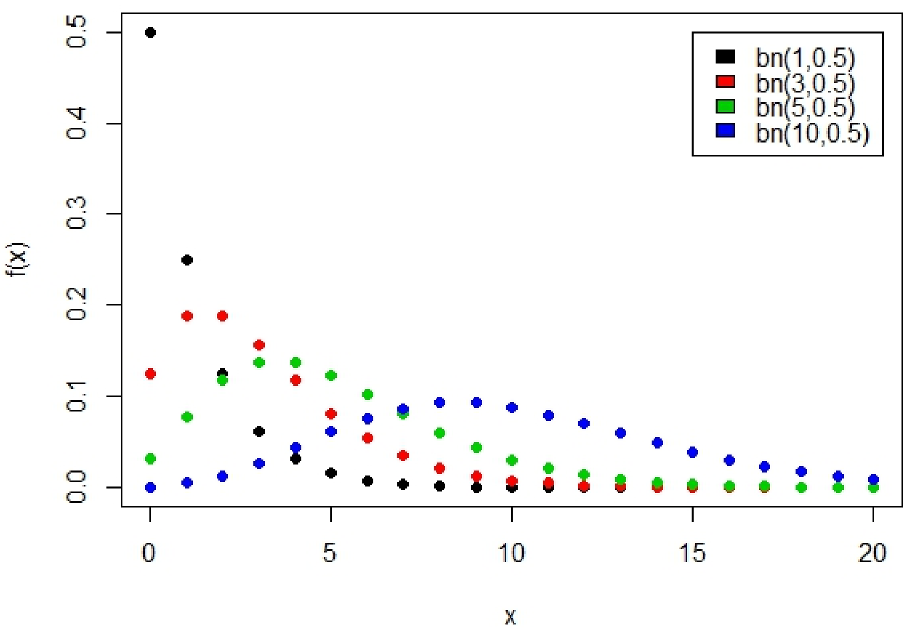
Para construir o gráfico utilizaremos a função dnbinom, onde colocaremos diferentes size(número de sucessos) e prob(probabilidade de cada sucesso). Para a construção desse gráfico utilizaremos size=(1,3,5,10) e prob=(0.3,0.5,0.7).

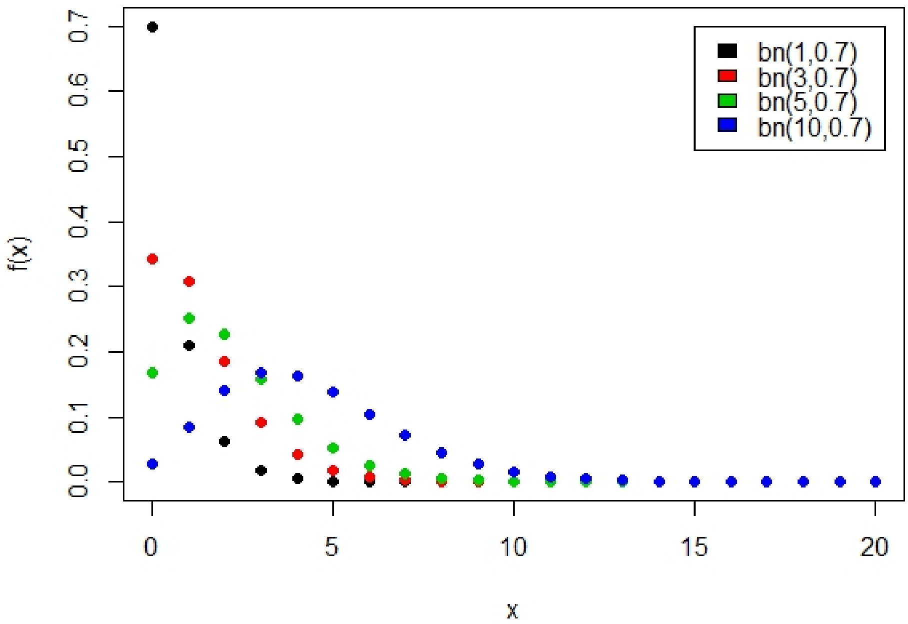
Código:

```
x=0:20

#Para probabilidade de sucesso 0,3:
#1 sucesso
plot(x, dnbinom(x, size=1, prob= 0.3), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=3, prob=0.3), pch=19, type="p",col=2)
#5 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=5, prob=0.3), pch=19, type="p",col=3)
#10 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=10, prob=0.3), pch=19, type="p", col=4)
legend(15, 0.30, c("bn(1,0.3)","bn(3,0.3)","bn(5,0.3)","bn(10,0.3)
 fill=1:4)

#Para probabilidade de sucesso 0,5:
#1 sucesso
plot(x, dnbinom(x, size=1, prob= 0.5), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=3, prob=0.5), pch=19, type="p",col=2)
#5 sucesso
lines(x, dnbinom(x, size=5, prob=0.5), pch=19, type="p",col=3)
#10 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=10, prob=0.5), pch=19, type="p", col=4)
legend(15, 0.50, c("bn(1,0.5)","bn(3,0.5)","bn(5,0.5)","bn(10,0.5)
 fill=1:4)

#Para probabilidade de sucesso 0,7:
#1 sucesso
plot(x, dnbinom(x, size=1, prob= 0.7), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=3, prob=0.7), pch=19, type="p",col=2)
#5 sucessos
lines(x, dnbinom(x, size=5, prob=0.7), pch=19, type="p",col=3)
lines(x, dnbinom(x, size=10, prob=0.7), pch=19, type="p", col=4)
#10 sucessos
legend(15, 0.70, c("bn(1,0.7)","bn(3,0.7)","bn(5,0.7)","bn(10,0.7)
 fill=1:4)
```

Gráficos:


bn(1,0.3)
bn(3,0.3)
bn(5,0.3)
bn(10,0.3)
f(x)
x


bn(1,0.5)
bn(3,0.5)
bn(5,0.5)
bn(10,0.5)
f(x)
x



– Gráfico da distribuição acumulada

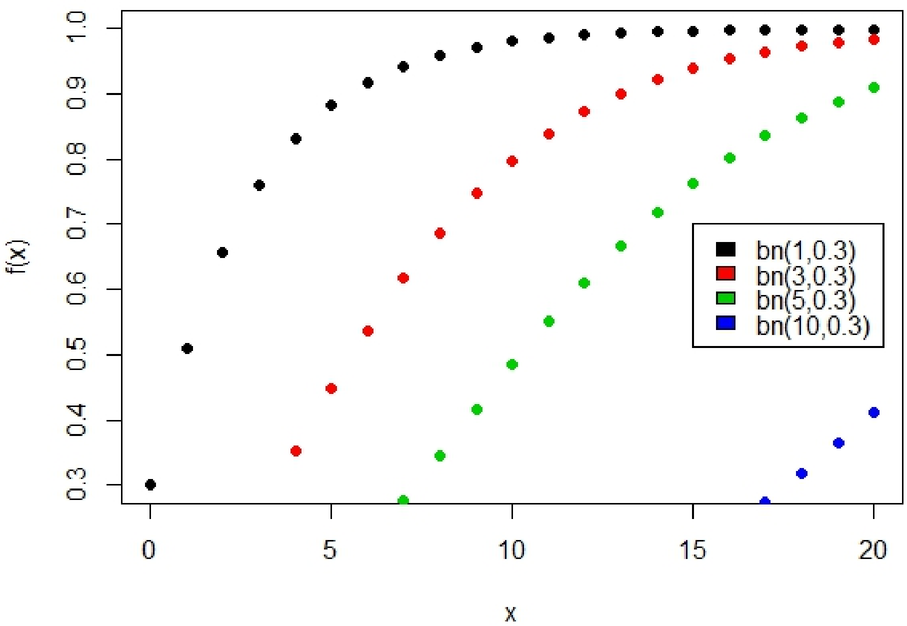
Assim como na função de probabilidade, na distribuição acumulada iremos fazer os gráficos para diferentes valores de size e prob. Utilizaremos os mesmos valores utilizados na questão anterior.

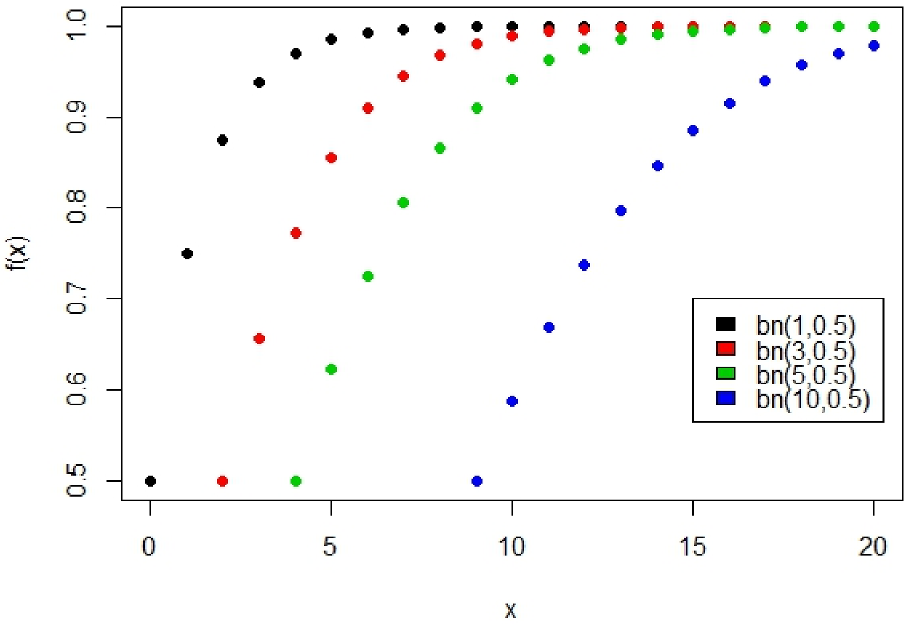
Código:

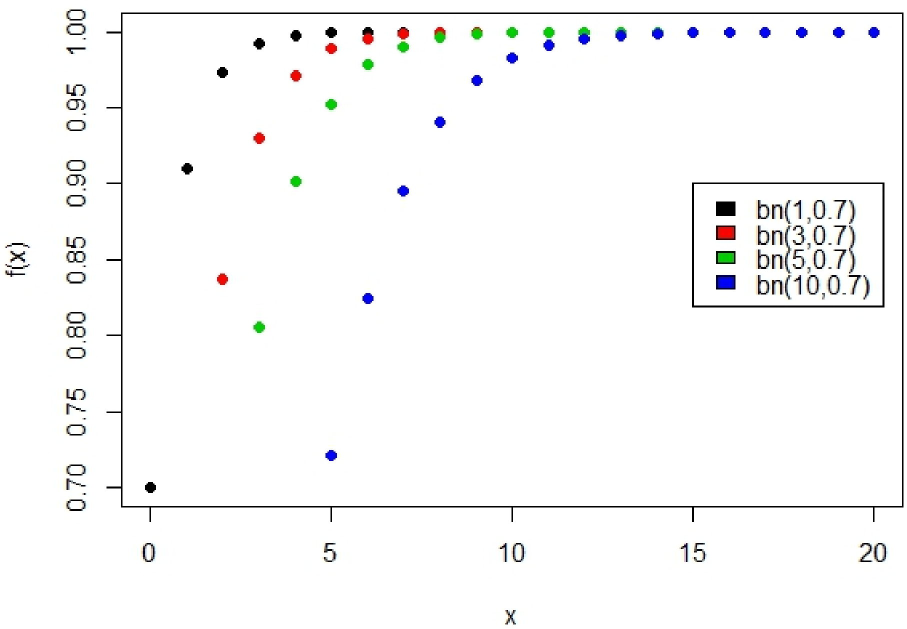
```
x=0:20
#Para probabilidade de sucesso 0,3:
#1 sucesso
plot(x, pnbinom(x, size=1, prob= 0.3), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=3, prob=0.3), pch=19, type="p",col=2)
#5 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=5, prob=0.3), pch=19, type="p",col=3)
#10 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=10, prob=0.3), pch=19, type="p", col=4)
legend(15, 0.70, c("bn(1,0.3)","bn(3,0.3)","bn(5,0.3)","bn(10,0.3)
 fill=1:4)

#Para probabilidade de sucesso 0,5:
#1 sucesso
plot(x, pnbinom(x, size=1, prob= 0.5), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=3, prob=0.5), pch=19, type="p",col=2)
```

```
#5 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=5, prob=0.5), pch=19, type="p",col=3)
#10 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=10, prob=0.5), pch=19, type="p", col=4)
legend(15, 0.70, c("bn(1,0.5)","bn(3,0.5)","bn(5,0.5)","bn(10,0.5)
 fill=1:4)

#Para probabilidade de sucesso 0,7:
#1 sucesso
plot(x, pnbinom(x, size=1, prob= 0.7), pch=19,  ylab='f(x)')
#3 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=3, prob=0.7), pch=19, type="p",col=2)
#5 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=5, prob=0.7), pch=19, type="p",col=3)
#10 sucessos
lines(x, pnbinom(x, size=10, prob=0.7), pch=19, type="p", col=4)
legend(15, 0.90, c("bn(1,0.7)","bn(3,0.7)","bn(5,0.7)","bn(10,0.7)
 fill=1:4)
```

Gráficos:




bn(1,0.5)
bn(3,0.5)
bn(5,0.5)
bn(10,0.5)
f(x)
x


bn(1,0.7)
bn(3,0.7)
bn(5,0.7)
bn(10,0.7)
f(x)
x

- **Utilizando o R para resolver questões de Binomial Negativa**

  Questão: Um jogador de futebol está treinando cobranças de penalti, sabendo que ele acerta a cobrança em 60% das vezes, responda: **a)** Qual é a probabilidade dele acertar 2 cobranças em 5 tentativas? **b)** Qual a probabilidade dele acertar 2 cobranças em 5 tentativas ou menos? **c)** Quantas cobranças são necessárias para que ele acerte 2 cobranças com probabilidade de 0,9?

  a) Para descobrir a probabilidade dele acertar 2 cobranças em 5 tentativas iremos utilizar a função do R "dnbinom", com parâmetros: x=5-3, size=2 e prob=0.6.

```
dnbinom(3, size=2, prob=0.6)
[1] 0.0221184
```

  b) Para saber a probabilidade dele acertar 2 cobranças em 5 tentativas ou menos iremos utilizar a função do R "pnbinom", com os parâmetros: p=5-3, size=2 e prob=0.6.

```
pnbinom(3, size=2, prob=0.6)
[1] 0.91296
```

  c) Para descobrir quantas cobranças são necessárias para ele acertar 2 cobranças com probabilidade de 0.9 iremos utilizar a função do R "qnbinom", com os parâmetros: q=0.9, size=2 e prob=0.6.

```
qnbinom(0.9, size=2, prob=0.6)
[1] 3 #Como o valor retornado é o numero de erros antes
 #do r-ésimo acerto, então faz-se necessário somar o
 #numero de acertos, resultando em 5 tentativas.
```

- **Utilizando o R para simular uma Binomial Negativa**

  Para simular valores aleatórios seguindo a distribuição Binomial Negativa, podemos utilizar o comando do R "rnbinom", mas aqui iremos fazer a nossa própia função.

  Utilizando os conhecimentos prévios que a Binomial Negativa é um somatório de Geométricas, podemos utilizar um método parecido com o utilizado na distribuição Geométrica para simular os valores da Binomial Negativa:

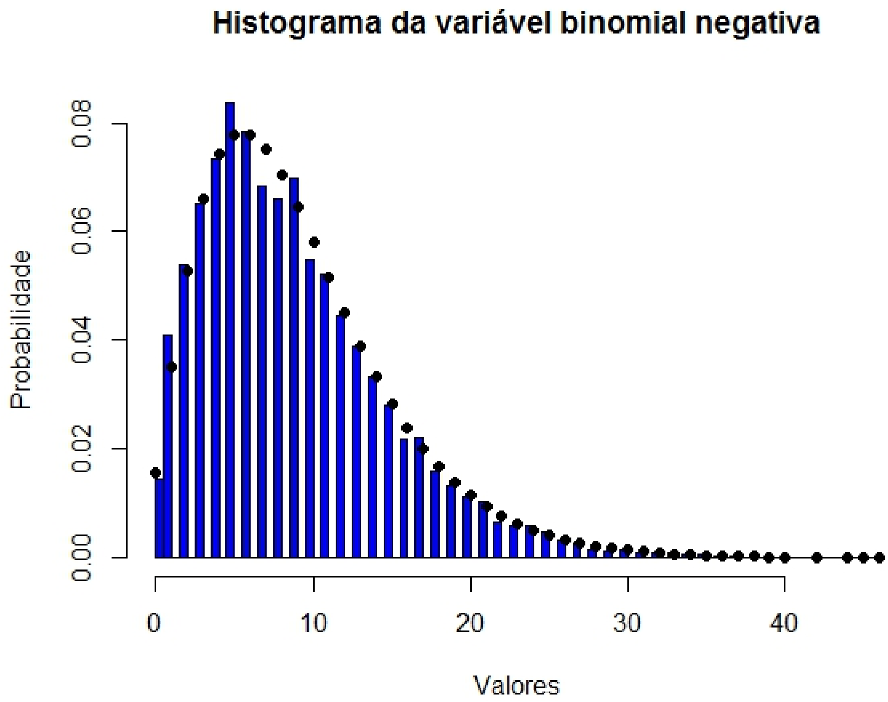
```
binomN= function(n,r,p){ #n: amostra,
#r: numero de sucessos,
#p:prob sucesso
  geo<-0
```

```
  x<-0
  for(a in 1:n){
   #Somatório das Geométricas
    for(g in 1:r){
      u=runif(1)
      geo[g]=floor((log(u)/log(1-p)))
    }
    x[a]=sum(geo)
  }
  #Mostrando os valores aleatórios gerados:
  show(table(x))
  #Construindo um histograma com esses valores:
  save=hist(x,plot=F,breaks=100)
  save$counts<-save$counts/n
  plot(save,main="Histograma da variável binomial negativa",
       col="blue",col.main="black",xlab='Valores',
       ylab='Probabilidade')
  #Para comparar com a real "curva" da distribuição faremos:
  lines(x,dnbinom(x,size=r,prob=p),pch=19,type = "p")
}
```

Para testar essa nossa função utilizaremos ela para os parâmentros: n=10000, r=3 e p=0.25.

```
binomN(10000,3,0.25)
x
 0   1   2   3   4   5   6   7   8   9
 148 360 529 678 735 759 753 740 702 681
 10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20
 536 524 442 383 314 284 261 201 178 142 120
 21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31
 102  90  66  58  39  23  37  34  11  17  16
 32  33  34  35  36  37  38  39  40  44
 14   5   5   1   4   4   1   1   1   1
```

E o gráfico gerado por essa função é:



6.6 Distribuição Uniforme Discreta

6.6.1 Introdução

É a mais simples de todas as distribuições discretas de probabilidade. Dizemos que X segue o modelo Uniforme Discreto quando todos os resultados de um experimento aleatório são equiprováveis, ou seja, os eventos possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

A função de probabilidade desta distribuição é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{n} \qquad I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x)$$

Notação: $X \sim UD(n)$.

6.6.2 Função Distribuição Acumulada

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

FDA da Uniforme Discreta é:

$$\sum_{x=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

6.6.3 Esperança

A esperança de qualquer variável aleatória discreta é dada por:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} xP(X = x)$$

Como $P(X = x)$ de $X \sim UD(n)$ é $\frac{1}{n}$, Então temos:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x$$

O desenvolvimento desse somatório resulta em uma soma de uma progressão aritmética(P.A.):

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Então,

$$\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

Assim,

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

6.6.4 Variância

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Já conhecemos a $E(X)$, agora encontraremos a $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 P(X = x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2$$

Aplicando a seguinte propriedade do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Temos que,

$$\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Então,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{4n^2 + 6n + 4 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \\ &= \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

6.6.5 Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} e^{tx_i}$$

Utilizando a fórmula da soma de uma P.G.(Progressão Geométrica), que é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

onde:

a_1 é o primeiro termo da P.G.

q é a razão da P.G.

n é o número de termos da P.G.

Assim, temos:

$q = e^x$

$n = k$

$a_1 = e^t$

Voltando a equação:

$$\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k}(e^t)^x = \frac{1}{k}\frac{e^x(1-e^{xk})(-1)}{(1-e^x)(-1)} = \frac{e^{xk}-1}{k(e^x-1)}$$

Logo,

$$M_X(t) = \frac{e^{xk}-1}{k(e^x-1)}$$

6.6.6 R-ésimo Momento*

Para calcular o R-ésimo momento utilizamos:

$$E[x^r] = \sum_{x=1}^{n} x^r P(X = k)$$

Sendo assim,

$$\sum_{x=1}^{n} x^r \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^r = \frac{1}{n}(1 + 2^r + 3^r + ... + n^r)$$

Calculamos esse somatório segundo a fórmula de Faulhaber:

$$\sum_{x=1}^{n} x^r = \frac{1}{r+1}(B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(1))$$

Onde $B_{r+1}(n+1)$ e $B_{r+1}(1)$ são números de Bernoulli, que podem ser calculados com a seguinte fórmula:

$$B_p(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{p-k} B_k n^{p-k}$$

Primeiramente, resolvendo $B_{r+1}(n+1)$:

$$B_{r+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{r+1-k} B_k n + 1^{r+1-k}$$

6.6.7 Moda

A distribuição Uniforme Discreta é considerada amodal, pois os resultados são equiprováveis, ou seja, toda a variável associada à essa distribuição tem a mesma probabilidade de ocorrência(1/n), sem variações.

6.6.8 Mediana

A mediana da Uniforme Discreta é igual ao valor esperado:

$$\frac{a+b}{2}$$

6.6.9 Coeficiente de Assimetria e Curtose

6.6.10 Assimetria

6.6.11 Curtose

$$-\frac{6(n^2+1)}{5(n^2+1)}$$

6.6.12 Comando no R

¿ ceiling(runif(1000, min=0, max=100))

6.6.13 Exemplos

Exemplo: Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado, e estamos interessados na v.a. X: número da face obtida. Neste caso todos os possíveis resultados ocorrem com a mesma probabilidade e, assim, podemos dizer que a probabilidade se distribui uniformemente entre os diversos resultados, ou seja:

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

6.7 DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

6.8 Distribuição Uniforme contínua

6.9 Distribuição Triangular

6.9.1 História

Registros escritos sobre a distribuição triangular parecem originar-se em meados do século XVIII, quando os problemas de probabilidade combinatória estavam no auge.Uma das primeiras menções da distribuição triangular está em Simpson (1755, 1757).

6.9.2 Distribuição Triangular

A distribuição Triangular tem um uso bastante difundido , principalmente quando os dados disponíveis são poucos ou mesmo inexistentes. Sua forma permite que dados não conclusivos sejam a ela adaptados, e seus limites,ou seja A (limite inferior), C (moda) e B (limite superior) sejam interpretados como os parâmetros mais otimista (A), mais provável (C) e mais pessimista (B) de uma determinada variável. A distribuição começa no limite inferior , cresce linearmente para a moda, e depois descresce para o limite superior, formando um triangulo (Origem do nome da distribuição) que pode ser simétrico ou assimétrico.

6.9.3 Valor Esperado

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3}$$

Prova:

$$E(X) \;=\; \int f(x)$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^c x\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}dx + \int_c^b x\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\int_a^c (x^2-ax)dx + \frac{2}{(b-a)(b-c)} + \int_c^b (bx-x^2)dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_a^c - \frac{ax^2}{2}\Big|_a^c\right) + \frac{2}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{bx^2}{2}\Big|_c^b - \frac{x^3}{3}\Big|_c^b\right) \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{c^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^3}{2}\right) + \frac{2}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{b^3}{2} - \frac{bc^2}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3}\right) \\
&= \frac{2}{6(b-a)(c-a)}\left(2c^3 - 2a^3 - 3ac^2 + 3a^3\right) + \frac{2}{6(b-a)(b-c)}\left(3b^3 - 3c^2 - 2b^3 + 2c^3\right) \\
&= \frac{1}{3(b-a)(c-a)}\left(2c^3 - 3ac^2 + a^3\right) + \frac{1}{3(b-a)(b-c)}\left(b^3 - 3bc^2 + 2c^3\right) \\
&= \frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{1}{c-a}(2c^3 - 3ac^2 + a^3) + \frac{1}{(b-c)}(b^3 - 3bc^2 + 2c^3)\right] \\
&= \frac{1}{3(b-a)}\left\{\frac{1}{(c-a)}[(2c^2 - a^2 - ca)(c-a)] + \frac{1}{b-c}[(-2c^2 + b(b+c))(b-c)]\right\} \\
&= \frac{1}{3(b-a)}(2c^2 - a^2 - ca - 2c^2 + b^2 + bc) \\
&= \frac{1}{3(b-a)}(-a^2 - ca + bc + b^2) \\
&= \frac{1}{3(b-a)}[c(b-a) + b^2 - a^2] \\
&= \frac{1}{3(b-a)}[c(b-a) + (a-b)(a+b)] \\
&= \frac{c+a+b}{3}
\end{aligned}$$

$$E(X) \;=\; \frac{a+b+c}{3}$$

6.9.4 Variância

$$Var = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

Prova: $V(X) = E(X-E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_a^c x^2 \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}dx + \int_c^b x^2 \frac{2(b-x)}{(b-a)(c-a)}dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\int_a^c (x^3-ax^2)dx + \frac{2}{(b-a)(c-a)}\int_c^b (bx^2-x^3)dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{x^4}{4}|_a^c - \frac{ax^3}{3}|_a^c\right) + \frac{2}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{bx^3}{3}|_c^b - \frac{x^4}{4}|_c^b\right) \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{c^4}{4} - \frac{a^4}{4} - \frac{ac^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right) + \frac{2}{(b-a)(b-c)}\left(\frac{b^4}{3} - \frac{c^3b}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{c^4}{4}\right) \\
&= \frac{2}{12(b-a)(b-c)}(3c^4-3a^4-4ac^3+4a^4) + \frac{2}{12(b-a)(b-c)}(4b^4-4bc^3-3b^4+3c^4) \\
&= \frac{1}{6(b-a)}\left[\frac{1}{c-a}(3c^4+a^4-4ac^3) + \frac{1}{(b-c)}(b^4+3c^4-4bc^3)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{1}{6(b-c)}\left[\frac{1}{c-a}(3c^3+a^3+ac(a+c))(c-a) + \frac{1}{(b-c)}(b^3-3c^3+bc(b+c))(b-c)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a)}(3c^3-a^3+a^2c+ac^2+b^3-3c^3+b^2c+bc^2) \\
&= \frac{1}{6(b-a)}(b^3-a^3+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) \\
&= \frac{1}{6(b-a)}[(b-a)(b^2-ab+a^2)+c^2(a+b)+c(a^2+b^2)] \\
&= \frac{1}{6(b-a)}(b-c)(b^2+ab+a^2)+c^2(b-a)+2c^2a+c(b-a)^2+2a
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$V(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

6.9.5 Geradora de Momentos

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = 2\frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
E[e^{tX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \int_a^c \frac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a)e^{tx}dx + \int_c^b \frac{2}{(b-a)(c-a)}(b-x)e^{tx}dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_a^c (x-a)e^{tx}dx + \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_c^b (b-x)e^{tx}dx
\end{aligned}$$

– usando a propriedades das integrais onde a integral da diferença é a diferença das integrais, temos:

$$E[e^{tX}] = \tfrac{2}{(b-a)(c-a)} \int_a^c x\, e^{tx}dx - \int_a^c a\, e^{tx} + \tfrac{2}{(b-a)(b-c)} \int_c^b b\, e^{tx}dx - \int_c^b x\, e^{tx}$$

– aplicando a Integração por partes e considerando: $u = x$, $du = dx$, $v = \dfrac{e^{tx}}{t}$ e $dv = e^{tx}dx$, temos:

$$\begin{aligned}
\int udv &= uv - \int vdu \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left\{ \left[x\frac{e^{tx}}{t}\Big|_a^c - \int_a^c \frac{e^{tx}}{t}dx \right] - \frac{xe^{tx}}{t}\Big|_a^c \right\} \\
&+ \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left\{ b\frac{e^{tx}}{t}\Big|_c^b - \left[x\frac{e^{tx}}{t}\Big|_c^b - \int_c^b \frac{e^{tx}}{t}dx \right] \right\} \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left(c\frac{e^{ct}}{t} - a\frac{e^{at}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2}\Big|_a^c \right) + \left(-a\frac{e^{ct}}{t} + a\frac{e^{at}}{t} \right) \\
&+ \frac{2}{(b-a)(b-c)} (b\frac{e^{bt}}{t} - b\frac{e^{ct}}{t} - b\frac{e^{bt}}{t} + c\frac{e^{c}t}{t} + \frac{e^{tx}}{t^2}\Big|_c^b \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left(c\frac{e^{ct}}{t} - a\frac{e^{at}}{t} - \frac{e^{ct}}{t^2} + \frac{e^{at}}{t^2} - \frac{ae^{ct}}{t} + \frac{ae^{at}}{t} \right) \\
&+ \frac{2}{(b-a)(b-c)} (b\frac{e^{bt}}{t} - c\frac{e^{ct}}{t} - b\frac{e^{bt}}{t} + c\frac{e^{ct}}{t} + \frac{e^{bt}}{t^2} - a\frac{e^{ct}}{t} + ac
\end{aligned}$$

Assim,

$$M(t) = 2\left[\frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2} \right]$$

6.9.6 Função Densidade de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{para } a \leq x < c \\ \\ \dfrac{2}{(b-a)} & \text{para } x = c \\ \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{para } c < x \leq b \end{cases}$$

Sendo:
a: a $\in$ (-∞,∞);
b: a $<$ b;
c: a $\leq$ c $\leq$ b.

Prova:
i) f(x) ≥ 0
$a \leq x \Rightarrow (x-a) \geq 0$
$a < b \Rightarrow (b-a) > 0$
$a < c \Rightarrow (c-a) > 0$
logo $\frac{2(x-a)}{(b-c)(c-a)}$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_a^c \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} + \int_c^b \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_a^c (x-a)dx + \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_c^b (b-x)dx \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} (\frac{x^2}{2} - ax)|_a^c + \frac{2}{(b-a)(b-c)} (bx - \frac{x^2}{2})|_c^b \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} (\frac{c^2}{2} - ac - (\frac{a^2}{2} - a^2)] + \frac{2}{(b-a)(b-c)} (b^2 - \frac{b^2}{2}) - (bc - \frac{c^2}{2}) \\
&= \frac{2}{(b-a)(c-a)} [\frac{c}{2}(c-2a) + \frac{a^2}{2}] + \frac{2}{(b-a)(b-c)} [\frac{b^2}{2} + \frac{c}{2}(c-2b)] \\
&= \frac{1}{(b-a)(c-a)} [c(c-2a) + a^2] + \frac{1}{(b-a)(b-c)} [b^2 + c(c-2b)] \\
&= \frac{1}{(b-a)} [\frac{1}{c-a} [c^2 - 2ac + a^2] + \frac{1}{(b-c)} [b^2 - 2bc + c^2]] \\
&= \frac{1}{(b-a)} [\frac{1}{c-a} (c-a)^2 + \frac{1}{(b-c)} (b-c)^2] \\
&= \frac{1}{(b-a)} (c - a + b - c) \\
&= \frac{1}{(b-a)} (b-a) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= 1
\end{aligned}
$$

6.9.7 Função de Distribuição Acumulada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & \text{para } a < x \leq c \\ \\ \dfrac{c-a}{b-a} & \text{para } x = c \\ \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & \text{para } c < x < b. \end{cases}$$

Prova:
para $a \leq x \leq c$

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{2(y-c)}{(b-a)(c-a)} dy &= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_0^x (y-a) dy \\ &= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \frac{(y-a)^2}{2} \Big|_a^x \\ &= \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \end{aligned}$$

para $c \leq x \leq b$

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{2(b-y)}{(b-a)(b-c)} dy + \frac{(c-a)}{(b-a)} &= \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_c^x (b-y) dy \\ &= \frac{2}{(b-a)(b-c)} - \frac{(b-y)^2}{2} \Big|_c^x + \frac{(c-a)}{(b-a)} \\ &= -\frac{(b-y)^2}{(b-a)(b-c)} \Big|_c^x + \frac{(c-a)}{(b-a)} \\ &= -\frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(b-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-a)}{(b-a)} \\ &= -\frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(b-c)}{(b-a)} + \frac{(c-a)}{(b-a)} \\ &= 1 - \frac{(1-x^2)}{(b-a)(b-c)} \end{aligned}$$

6.9.8 Exemplo

Se X $\sim$ T(0,4,2), Calcule:

a) Calcule o Valor Esperado.

b) Calcule a Variância

Solução:

Se X $\sim$ T(0,4,2), temos:
a=0;
b=4;
c=2.

a) calculamos E[X] atrás da Formula: $E(X) = \frac{a+b+c}{3}$, logo $E(X) = \frac{0+4+2}{3}$, portanto:

$$E(X) = 2$$

b) Para calcularmos a variância usamos a formula $Var = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$, substituindo os valores temos:

$$Var = \frac{0^2+4^2+2^2-0*4-0*2-4*2}{18} = \frac{3}{2}$$

6.9.9 Comandos no R

Para aplicarmos as funções da distribuição triangular no R, devemos fazer o download do pacote 'Triangle' e carrega-lo. Os comandos da distribuição triangular são:

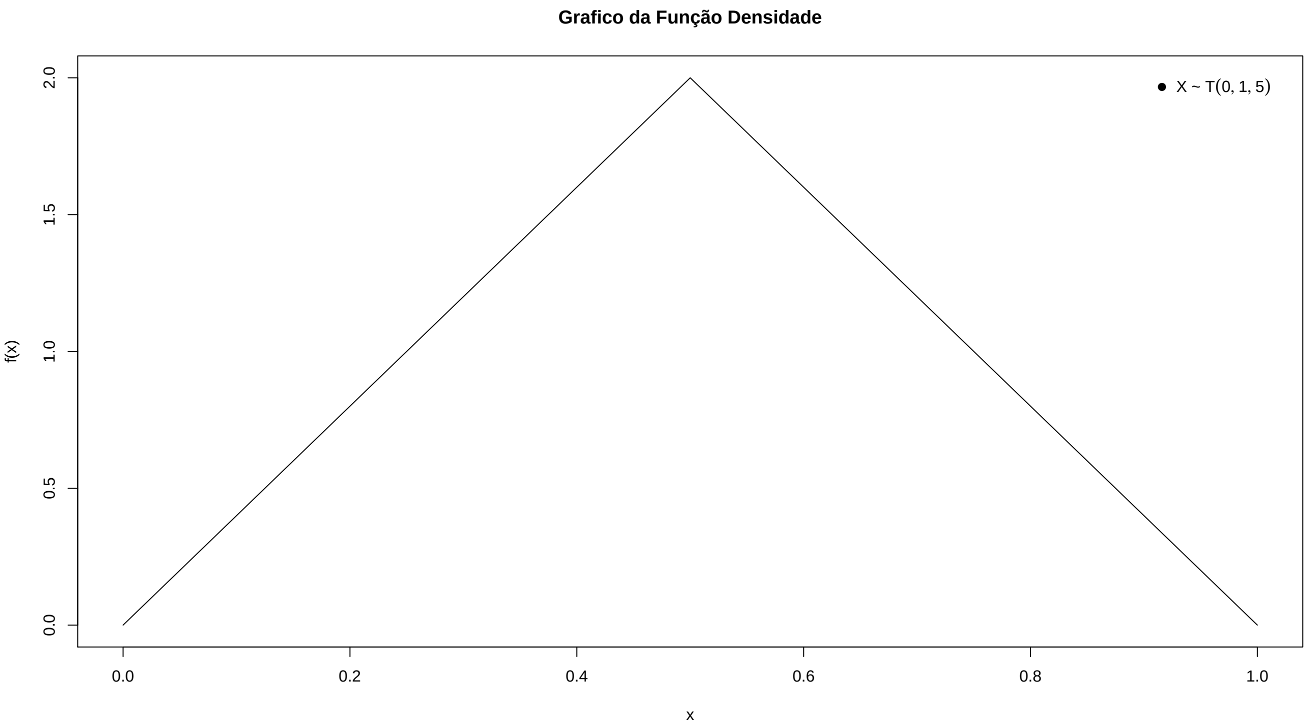
- Para calcular a desidade da distribuição:
  dtriangle(x, a= Valor Mínimo, b=Valor Máximo, c=(a+b)/2)
- Para calcular a função de distribuicão:
  ptriangle(q, a=Valor Mínimo, b=Valor Máximo, c=(a+b)/2)
- Para calcular o quantil da distribuição:
  qtriangle(p, a=Valor Mínimo, b=Valor Máximo, c=(a+b)/2)
- Para calcular os valores aleatórios para a função:
  rtriangle(n, a=Valor Mínimo, b=Valor Máximo, c=(a+b)/2)

Argumentos

x,q	vetor de quantils.
p	vetor de probabilidades.
a	limite inferior da distribuição.
b	limite superior da distribuição.
c	moda da distribuição.
n	número de observações. tamanho(n) $>$ 1.
logbase	a base do logaritmo a ser usado.

6.9.10 Gráficos

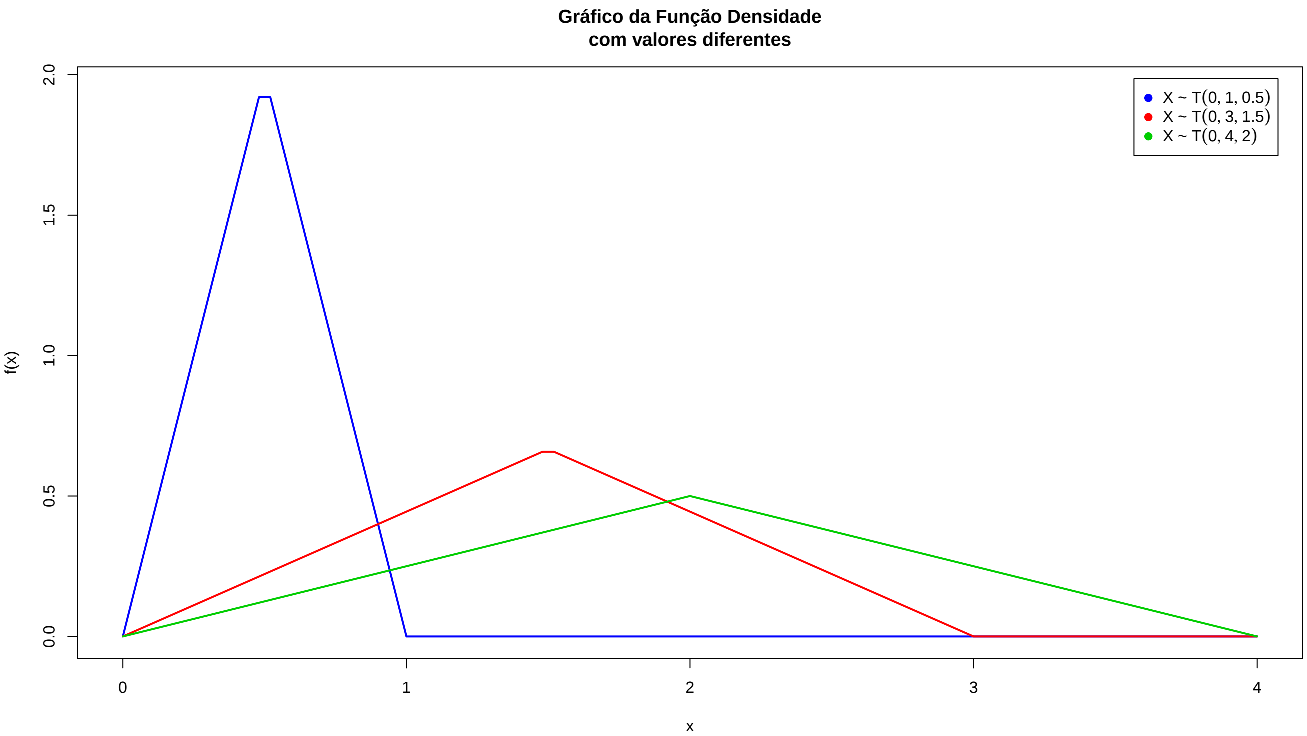
Gráficos da Função Densidade



– Código usado para criar o gráfico:

```
x={curve(dtriangle(x,0,1,0.5),main="Grafico da Função Densidade",
 xlab="x", ylab="f(x)")ex0 <- expression("X ~ T"(0,1.0,5))
legend("topright", ex0,pch=19,bty='n',inset = .02)
}

plot(x)
```

Gráficos da Função Densidade com valores diferentes



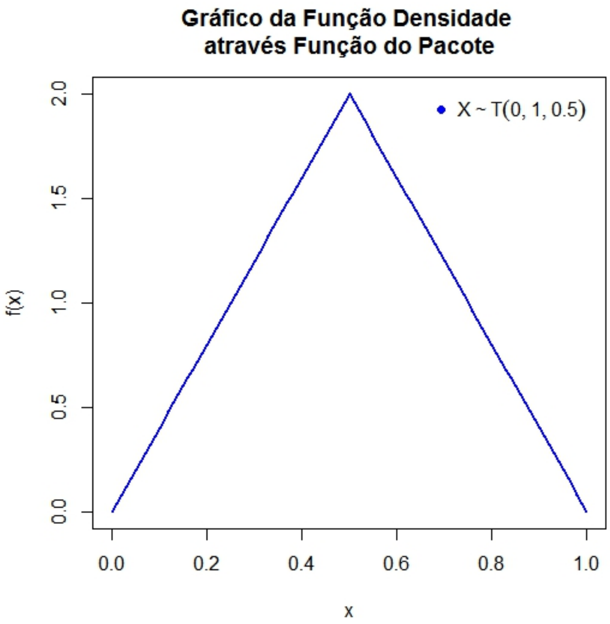
– Código usado para criar o gráfico:

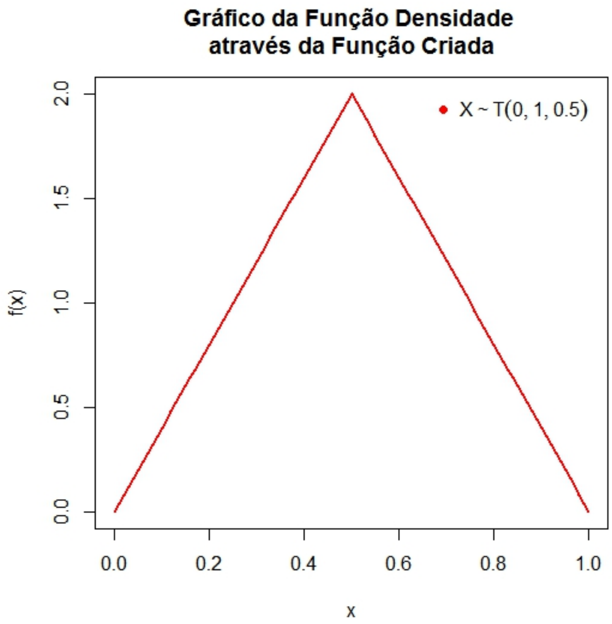
```
curve(dtriangle(x,0,1,0.5),xlab="x",ylab="f(x)",xlim=c(0,4),col=4,
 lwd=2,
ylim=c(0,1.95),main="Gráfico da Função Densidade com valores
 diferentes")
curve(dtriangle(x,0,3,1.5),xlab="x",ylab="f(x)", add=T,col=2,
 lwd=2)
curve(dtriangle(x,0,4,2),xlab="x",ylab="f(x)", add=T,col=3,lwd=2)
ex0 $<$- expression("X ˜ T"(0,1,0.5), "X ˜ T"(0,3,1.5),"X ˜ T"(0,4,2)
legend("topright", ex0,pch= 19 ,col=c(4,2,3),bty='l',inset = .02)
```

Criando algoritmo que calcula a função de densidade triangular

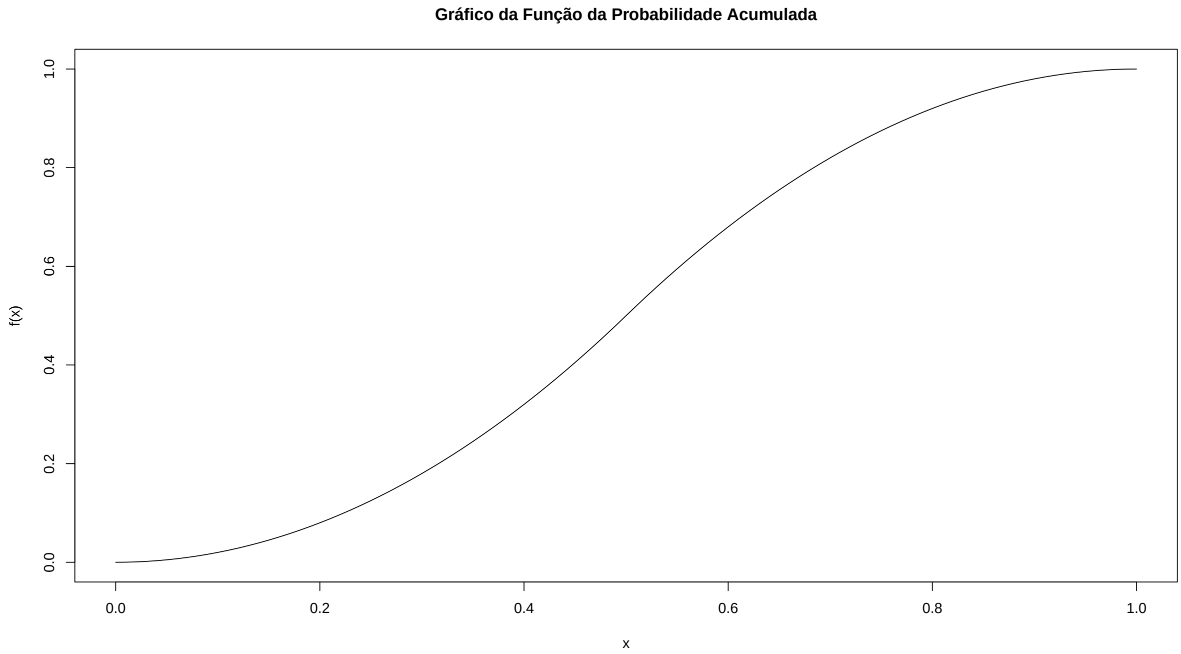
```
den=function(x,a,b,c){ \# a,b e c são os valores da função
den<-numeric(length(x))
den[a<=x & x<c]<-2*(x[a<=x \& x<c] - a)/((b-a)*(c-a))
den[x==c]<-2/(b-a)
den[c<x & x<=b]<-2*(b-x[c<x & x<=b])/((b-a)*(b-c))
return(den) }
curve(den(x,0,1,0.5),xlim=c(0,1),col="red",lwd=2,main="Grafico da
Função Densidade através da Função criada",
xlab="x",ylab="f(x)")
ex0 <- expression(a == 0, b==1,c==0.5)
legend("topright", ex0,pch=19,col=c(1,2,3),bty='n', inset = .02)
```

– Comparação dos gráficos





Função Probabilidade Acumulada



- Código usado para criar o gráfico:

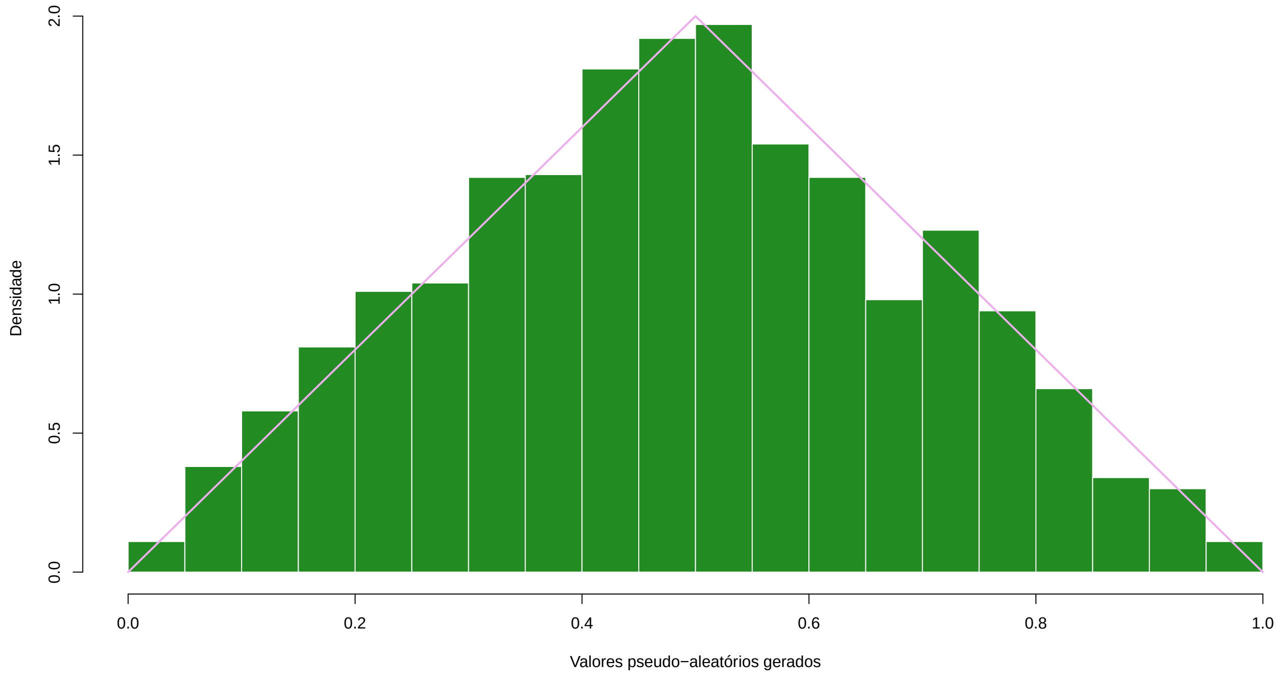
```
x=curve(ptriangle(x,0,1,0.5),main="Gráfico da probabilidade
 acumulada",ylab="f(x)")
```

6.9.11 Simulando

```
# Simulando uma Distribuição triangular de parâmetros a,c,b.
a=0;c=.5;b=1
t<-0
fc<- (c-a)/(b-a)
for(i in 1:1000){
u<-runif(1)
if(0 < u && u < fc){
t[i]<-a+sqrt(u*(b-a)*(c-a))
}else{
t[i]<- b - sqrt((1-u)*(b-a)*(b-c))
}
}
hist(t,prob=T,col = 'darkolivegreen2',border='white',
main=NULL,xlab='Valores pseudo-aleatórios gerados',
ylab='Densidade',breaks=25)

# comparando o  nosso algoritmo com a função do pacote
 da distribuição
```

```
curve(dtriangle(x,a=a,b=b,c=c),xlim=c(0,1),col='darkmagenta',
add=TRUE,lwd=2)
amostra<-rtriangle(2000,a=a,b=b,c=c)
hist(amostra,prob=T,col='forestgreen',border='white',
main=NULL,xlab='Valores pseudo-aleatórios gerados',
ylab='Densidade',breaks=25)
curve(dtriangle(x,a=a,b=b,c=c),xlim=c(0,1),col='plum2',
add=TRUE,lwd=2)
```

Gráfico do exemplo acima:



6.10 Distribuição Exponencial

6.10.1 Função Densidade de Probabilidade

Uma variável aleatória contínua X segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ se sua f.d.p é da forma:

$$f(x) = \lambda e^{-x\lambda} I(x)_{(0,\infty)}, \text{ com } \lambda > 0. \tag{23}$$

Comandos importantes da Distribuição Exponencial no R:

```
#No R:
dexp(x,lambda) # Retorna a fdp da Distribuição
pexp(q,lambda) # Retorna a fda da Distribuição
qexp(p,lambda) # Retorna o quantil da Distribuição
rexp(n,lambda) # Retorna uma amostra de tamanho n da Distribuição
```

Prova:

1. $f(x) \geq 0$

   Como,

$$e^{-x\lambda} \geq 0 \Longrightarrow \lambda e^{-x\lambda} \geq 0 \Longrightarrow f(x) \geq 0 \ \forall_x \in \mathbb{R} \tag{24}$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Resolvendo a integral obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-x\lambda}dx = \lambda \frac{-e^{-x\lambda}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{-1}{e^{x\lambda}}\Bigg|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Pelo R:

Podemos visualizar no R que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Segue a baixo a linha de código:

```
integrate( function(x) dexp(x,1),0,Inf)$value
```

Logo, como as proposições 1 e 2 são verdadeiras, a função(23) se trata de uma legítima f.d.p .

A seguir está o gráfico de uma variável aleatória X que segue Distribuição Exponencial. O gráfico possui três curvas cada uma formada por um parâmetro λ diferente.

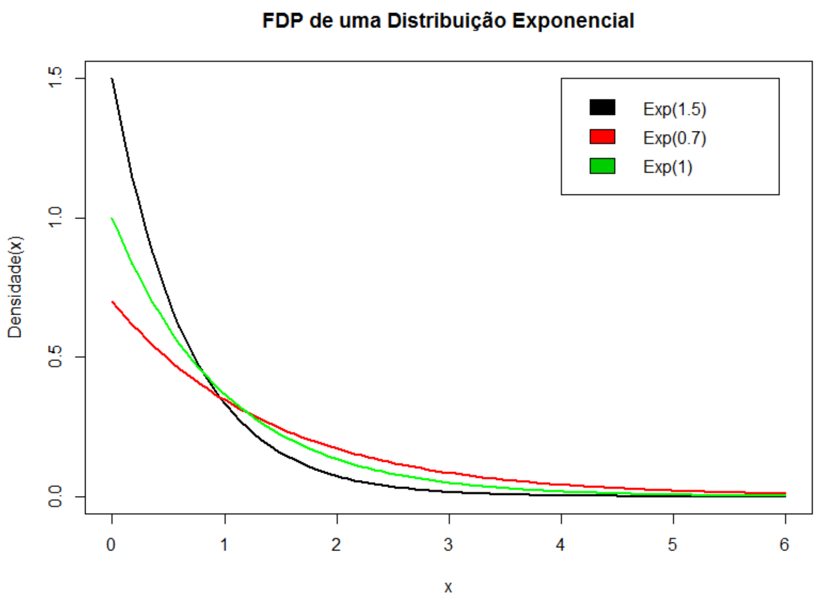


Figura 5: Funções Densidade de Probabilidade da Distribuição Exponencial.

A seguir está indicado o código utilizado para a criação do gráfico anterior.

```
plot(function(x) dexp(x,1.5),0,6,ylab="Densidade(x)",lwd=2)
plot(function(x) dexp(x,0.7),0,6,col="red",add=T,lwd=2)
plot(function(x) dexp(x,1),0,6,col="green",add=T,lwd=2)
legend(4,1.5,c("Exp(1.5)","Exp(0.7)","Exp(1)"),fill=1:3)
```

6.10.2 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X que segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ é dada logo abaixo.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se x} \leq 0\,; \\ 1 - e^{-x\lambda} & \text{se x} > 0\,. \end{cases}$$

Sendo (25), sempre não decrescente.

Prova:

Como $\int_0^x f(t)dt = F(x)$

$$F(x) = \lambda \frac{-e^{-t\lambda}}{\lambda}\bigg|_0^x = -e^{-x\lambda} + 1 = 1 - e^{-x\lambda} \tag{25}$$

Abaixo foi representado graficamente a forma da Função de Distribuição Acumulada para cada respectivo parâmetro λ.

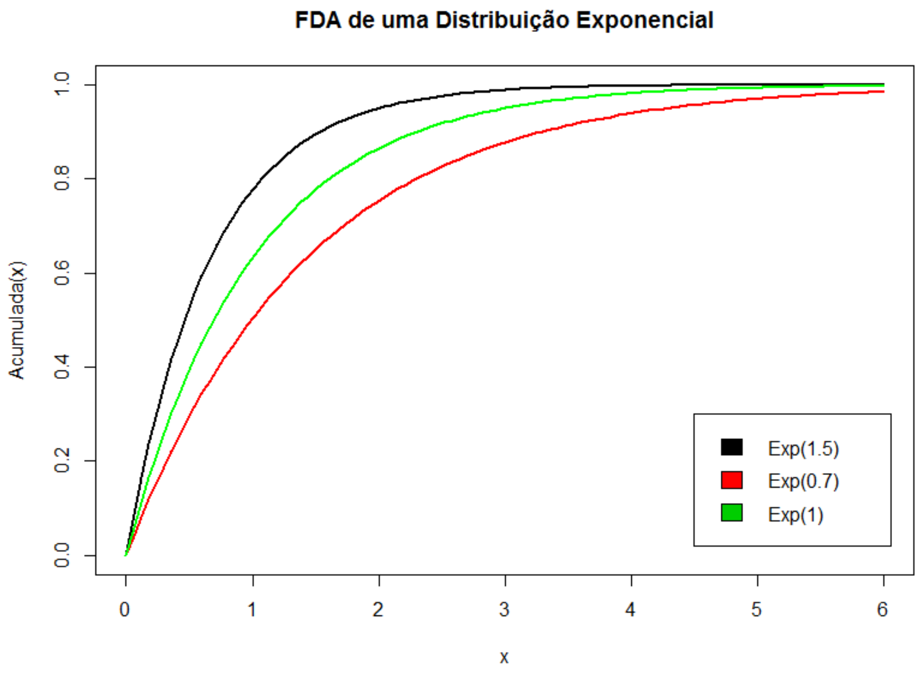


Figura 6: Funções de Distribuição Acumulada da Distribuição Exponencial.

A seguir o código utilizado no gráfico anterior:

```
plot(function(x) pexp(x,1.5),0,6,lwd=2,
     main="FDA de uma Distribuição Exponencial",ylab="Acumulada")
plot(function(x) pexp(x,0.7),0,6,add=T,col="red",lwd=2)
plot(function(x) pexp(x,1),0,6,add=T,col="green",lwd=2)
legend(4.5,0.3,c("Exp(1.5)","Exp(0.7)","Exp(1)"),fill=1:3)
```

6.10.3 R-ésimo momento em relação a origem

O r-ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição exponencial é dado a seguir:

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r} \tag{26}$$

Prova:

$$\mathbb{E}(X^r) = \lambda \int_0^\infty x^r e^{-x\lambda} dx = \lambda \frac{\Gamma(\frac{r+1}{1})}{\lambda^{r+1}} = \lambda \frac{(r+1-1)!}{\lambda^r \lambda^1} = \frac{r!}{\lambda^r}$$

6.10.4 R-ésimo momento central

O r-ésimo momento central na média é definido assim:

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^r] = \frac{r!}{\lambda^r}\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^i}{i!} \tag{27}$$

Prova:
Nomeando $\mathbb{E}(X) = \mu$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mu)^r] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-\mu)^i x^{r-i}\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-\mu)^i\mathbb{E}[x^{r-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i(\mu)^i\mathbb{E}[x^{r-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i\frac{1}{\lambda^i}\frac{(r-i)!}{\lambda^{r-i}} \\
&= \frac{1}{\lambda^r}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i)!i!}(-1)^i(r-i)! \\
&= \frac{r!}{\lambda^r}\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

6.10.5 Função geradora de momento

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \tag{28}$$

Prova:

$M_x(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \lambda\int_0^\infty e^{tx}e^{-x\lambda}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}dx =$

Sendo $\alpha = \lambda - t$

$M_x(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx$ e sabendo que $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx \sim Exp(\alpha)$

assim $\lambda - t > 0 \Longrightarrow t < \lambda$

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\alpha} * 1 = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

6.10.6 Esperança

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial, sua esperança é igual a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (29)$$

Prova:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \int_0^\infty xe^{-x\lambda}dx = \lambda\frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = \frac{(2-1)!}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Outra forma de provar é utilizando os conceitos do R-ésimo momento em relação a origem.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^1) = \frac{1!}{\lambda^1} = \frac{1}{\lambda}$$

6.10.7 Variância

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial, sua variância é igual a

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (30)$$

Prova:

Como: $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

E sabendo que,

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda \int_0^\infty x^2e^{-x\lambda}dx = \lambda\frac{\Gamma(3)}{\lambda^3} = \frac{(3-1)!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Assim,

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Outra forma de provar é utilizando os conceitos do R-ésimo momento em relação a origem.

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

6.10.8 Assimetria

A assimetria de uma distribuição pode ser encontrada calculando a razão entre o terceiro momento central e o segundo momento central elevado a três meios. O coeficiente de assimetria de uma variável aleatória exponencial é indicado logo abaixo:

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^3]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^{\frac{3}{2}}}=2 \tag{31}$$

Prova:

1. $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^3]=\frac{3!}{\lambda^3}\sum_{i=0}^{3}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{6}{\lambda^3}\left[1+\frac{(-1)}{1}+\frac{1}{2}+\frac{(-1)}{6}\right]=\frac{6}{\lambda^3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]=\frac{2}{\lambda^3}$
2. $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]=\frac{2!}{\lambda^2}\sum_{i=0}^{2}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{2}{\lambda^2}\left[1+\frac{(-1)}{1}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{\lambda^2}$
3. $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\lambda^3}$

Assim,

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^3]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\lambda^3}*\frac{\lambda^3}{1}=2$$

Como $2>0$, a Distribuição Exponencial é assimétrica a direita.

6.10.9 Curtose

A curtose de uma distribuição pode ser encontrada calculando a razão entre o quarto momento central e o quadrado do segundo momento central. O coeficiente de curtose de uma variável aleatória exponencial é indicado logo abaixo:

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^4]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^2}=9 \tag{32}$$

Prova:

1. $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^4]=\frac{4!}{\lambda^4}\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{24}{\lambda^4}\left[\frac{12-4+1}{24}\right]=\frac{9}{\lambda^4}$
2. $\left(\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]\right)^2=\frac{1}{\lambda^4}$

Assim,

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^4]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^2}=\frac{9}{\lambda^4}*\frac{\lambda^4}{1}=9$$

Como $9>3$, a Distribuição Exponencial é leptocúrtica.

6.10.10 Simulação

No código abaixo foi usado o método da Transformação inversa para a geração de valores pseudo-aleatórios referentes a Distribuição Exponencial.

```
N=10000 # Tamanho da minha amostra desejada
vetor=0 # Vetor que irá guardar minha amostra gerada
for(i in 1:N){
  u=runif(1)
  vetor[i]=-log(u) #Método da Transformação Inversa
                 #para uma Distribuição Exponencial com lambda=1
}

#Criação do Gráfico
hist(vetor,prob=T,ylab="Densidade(x)",
     main="Valores pseudo-aleatórios de uma \n Distribuição Exponenci
     col="purple")
plot(function(x) dexp(x,1),0,6,add=T,col="orange",lwd=2)
```

O histograma a seguir se refere aos valores pseudo-aleatórios e a linha laranja se refere aos valores reais de uma Distribuição Exponencial com λ igual a 1.

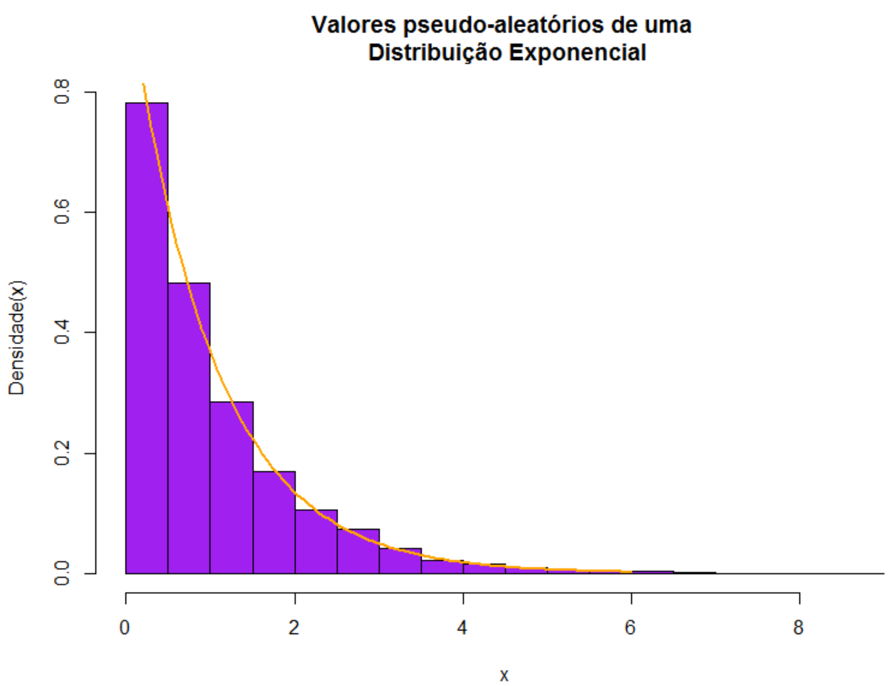


Figura 7: Comparação entre valores pseudo-aleatórios e reais da Distribuição Exponencial.

6.11 Distribuição Weibull

Seja X uma v.a, em que $X \sim$ Weibull(a, b), então diremos que sua f.d.p pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_X(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \tag{33}$$

A distribuição Weibull pode ser definida ainda de uma outra forma, fazendo apenas uma reparametrização. No entanto, no software R, a definição usada é a apresentada neste trabalho. Por esse motivo estudaremos essa parametrização.

No R:

```
# Comandos importantes da distribuição Weibull no R:
#
# dweibull(x,a,b)
# Expressão que retorna a f.d.p. da distribuição.
# pweibull(x,a,b,lower.tail=T)
# Expressão que retorna a f.d.a. da distribuição.
# qweibull(q,a,b)
# Expressão que retorna o quantil de ordem q da distribuição.
# rweibull(k,a,b)
# Expressão que retorna uma amostra de tamanho k da distribuição.
```

Observe o seu gráfico:

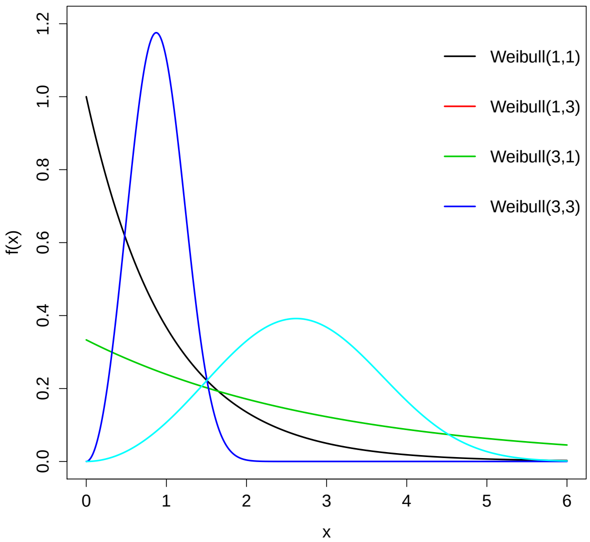


Figura 8: Weibull para $v = 1$, $v = 4$ e $v = 30$.

Podemos confirmar que f_X é uma legítima f.d.p., pois obedece as condições necessárias, veja:

I) $\exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} \Rightarrow f_X(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

II) $\displaystyle\int_0^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} dx = -\exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\}\Bigg|_0^{\infty}$

$= 0 + \exp\left\{-\left(\frac{0}{b}\right)^a\right\} = 1$

No R:

```
# Usaremos valores para a e b aleatórios,
  para podermos calcular:
a=1/runif(1)-1 # O valor de a será um número aleatoriamente
 escolhindo maior que 0.
b=1/runif(1)-1 # O valor de a será um número aleatoriamente
 escolhindo maior que 0.

integrate(function(x) dweibull(x,a,b),0,Inf)
# Se não quisermos ver o cálculo do erro basta fazermos:
integrate(function(x) dweibull(x,a,b),0,Inf)$value
```

6.11.1 Função de distribuição acumulada (f.d.a.)

Com base na definição (33), temos que sua f.d.a é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \leq 0; \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} & \text{, caso contrário.} \end{cases} \tag{34}$$

Demonstração:

Por definição:

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Para $x \leq 0$,

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \; dt = 0$

Para $x > 0$,

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \; dt + \displaystyle\int_0^x \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{b}\right)^a\right\} dt$

Fazendo a substituição:

$y = \left(\frac{t}{b}\right)^a \Rightarrow dy = \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}$

Temos que:

$F_X(x) = \int_0^{\left(\frac{x}{b}\right)^a} e^{-y} dy = -e^{-y}\Big|_0^{\left(\frac{x}{b}\right)^a} = 1 - \exp\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\}$

No R:

```
# Como já vimos antes a f.d.a. pode ser falcilmente obtida
 usando o comando
# pweibull(x,a,b). Porém, iremos implementar a nossa função
 obtida neste tópico.
#
F<- function(x,a,b){
if(a<=0 || b<=0){
return("Valore de parâmentros não aceitos. Insira valores de a e b
  maiores que 0.")
}else{
if(x<=0){
return(0)
} else{
return(1-exp(-(x/b)^a))
}
}
}
# Como a f.d.a. da Weibull é de certo modo simples, então o
# resultado que obtemos não difere quase em nada do proposto
 pelo r-cran.
pweibull(1/2,2,3)
F(1/2,2,3)
```

6.11.2 Quantis

Seja $X \sim$ Weibull(a, b), então o quantil de ordem $q \in (0, 1)$ é dado por:

$$Q_X(q) = b(-\ln(1-q))^{\frac{1}{a}} \tag{35}$$

Demonstração:

Temos que $q = F_X(x)$. Então, para $x > 0$:

$q = 1 - \exp\left\{-\left(\dfrac{x}{b}\right)^a\right\} \Leftrightarrow -\left(\dfrac{x}{b}\right)^a = \ln(1-q) \Leftrightarrow x = b(-\ln(1-q))^{\frac{1}{a}}$

No R:

```
# Usando o comando visto no início deste tópico, podemos obter
# o quantil de ordem q de uma Weibull(a,b) usando o comando
# qweibull(q,a,b).
```

```
# Porém, iremos implementar o resultados que obtemos e compararemos.
Q<- function(q,a,b){
if(a<=0 || b<=0){
return("Valore de parâmentros não aceitos. Insira valores de
 a e b maiores que 0.")
}else{
if(q<=0 || q>=1){
return("Valor do quantil não aceito. Insira um novo valor
 no itervalo (0,1).")
}else{
return(b*(-log(1-q))^(1/a))
}
}
}
#
# Agora vamos compar um exemplo usando tanto o método proposto pelo
# r-cran e um pelo método que implementamos.
qweibull(0.5,2,3)
Q(0.5,2,3)
# Obtemos o mesmo resultado.
```

6.11.3 Momentos

A f.g.m, como o nome já propõe é usada principalmente para a obtenção dos momentos de uma distribuição. No entanto, na weibull é mais vantajoso obtermos o r-ésimo momento diretamente.

Assim, o r-ésimo momento de uma v.a $X \sim$ Weibull(a, b) é:

$$E[X^r] = b^r \Gamma\left(\frac{r}{a} + 1\right) \ , r > 0 \tag{36}$$

onde $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty x^{\delta-1} e^{-x} dx$, $\delta > 0$.

Demonstração, para $r > 0$:

$$E[X^r] = \int_0^\infty x^r f_X(x) dx = \int_0^\infty b^r \left(\frac{x}{b}\right)^r \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} dx$$

Fazendo a substituição:

$$y = \left(\frac{x}{b}\right)^a \Rightarrow dy = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} dx$$

Temos que:

$$E[X^r] = b^r \int_0^\infty y^{\left(\frac{r}{a}+1\right)-1} e^{-y} dy = b^r \Gamma\left(\frac{r}{a} + 1\right)$$

Esperança

Usando (36) obtemos que: $E[X] = b\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)$.

Variância

Var$(X) = b^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)\right)^2\right]$

Esse resultado pode ser facilmente obtido fazendo uso de (36) e da propriedade que diz que: Var$(X) = E[X^2] - [E[X]]^2$.

6.11.4 Moda

Seja X uma v.a. tal que $X \sim$ Weibull(a,b), então sua moda é:

$$\text{Mo}(X) = b\left(\frac{a-1}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \tag{37}$$

Demonstração:

A f.d.p. de X é:

$f_X(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$

$\Rightarrow \ln(f_X(x)) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (a-1)(\ln(x) - ln(b)) - \left(\frac{x}{b}\right)^a$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}ln(f_X(x)) = \frac{a-1}{x} - \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} = \frac{a-1}{x} - \frac{a}{b^a}x^{a-1}$

$\frac{d}{dx}ln(f_X(x)) = 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{x} - \frac{a}{b^a}x^{a-1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b^a}x^{a-1} = \frac{a-1}{x} \Leftrightarrow x^a = \frac{(a-1)}{a}b^a$

$x = b\left(\frac{a-1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$

6.11.5 Simulação

Para simularmos uma amostra de tamanho k de uma Weibull(a,b) podemos usar o comando rweibull. Mas iremos implementar nossa própria função usando os resultados até aqui obtidos. Neste caso, usaremos o método da transformação inversa.

$F(X,a,b)\ U(0,1)$

Usando a função runif que nos retorna uma amostra aleatória de um tamanho qualquer de uma U$(0,1)$, temos que:

A relação de u (um valor simulado de uma U$(0,1)$) e x (um valor simulado de uma Weibull(a,b)) é dado por:

$u = 1 - \exp(-(x/b)^(1/b)) \Rightarrow x = Q(u,a,b)$

Exemplo **no R**:

```
k=10000 # Tamanho da amostra
a=2; b=2
x=0 # Vetor da amostra.
for(i in 1:k){
u=runif(1)
x[i]=Q(u,a,b)
}
hist(x, prob=T) # Este comando nos permitirá ver o histograma da amos
# geramos com frequência relativa, ou seja, que soma 1.
plot(function(x) dweibull(x,a,b),0,max(x),add=T ) # Comparando com o
# O resultado é satisfatório.
```

Observe o resultado em gráfico da amostra que geramos:

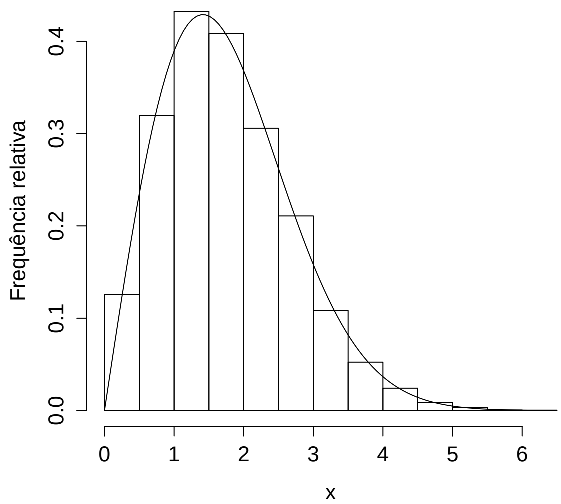


Figura 9: Pseudo amostra de tamanho 10000 de uma Weibull(2,2).

6.12 Distribuição Beta

Definição. Seja X uma variável aleatória. Se sua função densidade de probabilidade f for escrita como

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x), \quad a, b > 0 \tag{38}$$

onde

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

então escrevemos que $X \sim \text{Beta}(a,b)$. Apresentamos o gráfico de f para certos valores dos parâmetros.

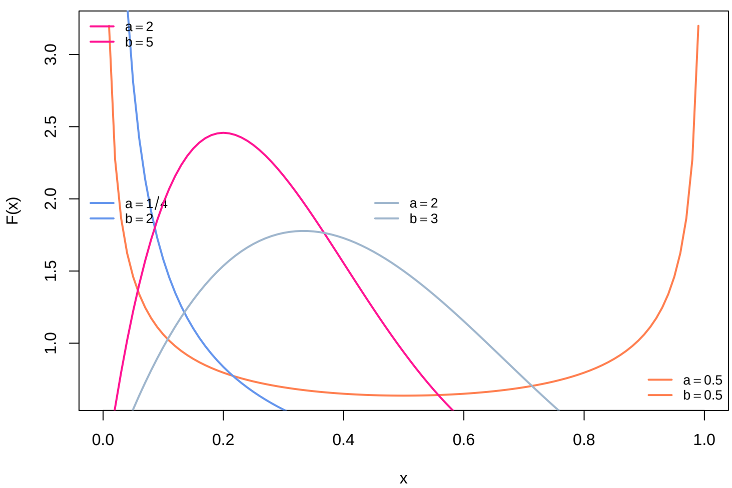


Figura 10: Gráfico da densidade

Fato 1. Verificar que f é realmente uma densidade.

PROVA:

i. $f(x) \geq 0$;

   Solução:

   Se $x \in (0,1)$ e $a > 0$ e $b > 0$, então é verdade que x^{a-1} é positivo assim como $(1-x)^{b-1}$ e $B(a,b)$ logo o produto será positivo.

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx &= \frac{1}{B(a,b)} \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{B(a,b)}{B(a,b)} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{39}$$

Fato 2. O r-ésimo momento de $X \sim$ Beta(a, b) é dado por

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{B(r+a, b)}{B(a, b)} \tag{40}$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^r] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{1} x^r\, \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \int_{0}^{1} x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{B(a+r,b)}{B(a,\,b)}
\end{aligned} \tag{41}$$

ainda podemos reescrever 41 como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^r] &= \frac{\Gamma(r+a)\Gamma(b)}{\Gamma(r+a+b)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\
&= \frac{\Gamma(r+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(r+a+b)\Gamma(a)}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Mas

$$\Gamma(r+a) = \Gamma(a) \prod_{i=1}^{r} (a+r-i)$$

e

$$\Gamma(a+b+r) = \Gamma(a+b) \prod_{i=1}^{r} (a+b+r-i)$$

Substituindo em 42 obtemos uma expressão alternativa

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdots(a+1)a}{(a+b+r-1)(a+b+r-2)\cdots(a+b+1)(a+b)} \tag{43}$$

Luke et al (ano) introduziu uma notação conveniente que melhorará esteticamente a expressão fechada para o r-ésimo momento.

$$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1), \quad (a)_0 = 1. \tag{44}$$

Portanto,

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}. \tag{45}$$

usando 45 em 42, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^r] &= \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+r)} \\ &= (a)_r \left[\frac{\Gamma(a+b+r)}{\Gamma(a+b)}\right]^{-1} \\ &= (a)_r (a+b)_r^{-1}. \end{aligned} \tag{46}$$

De imediato temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{B(a+1,b)}{B(a,\, b)} \\ &= \frac{a}{a+b} \\ &= (a)_1 (a+b)_1^{-1} \end{aligned} \tag{47}$$

como também

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \frac{B(a+2,b)}{B(a,\, b)} \\ &= \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)} \\ &= (a)_2 (a+b)_2^{-1} \end{aligned} \tag{48}$$

portanto a variância é

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \\ &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \end{aligned} \tag{49}$$

O terceiro momento em relação a origem é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^3] &= \frac{B(a+3,\,b)}{B(a,\,b)} \\ &= \frac{(a+2)(a+1)a}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)} \\ &= (a)_3(a+b)_3^{-1}. \end{aligned} \tag{50}$$

O quarto momento em relação a origem é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^4] &= \frac{B(a+4,\,b)}{B(a,\,b)} \\ &= \frac{(a+3)(a+2)(a+1)a}{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)} \\ &= (a)_4(a+b)_4^{-1}. \end{aligned} \tag{51}$$

Fato 3. A função de distribuição de $X \sim$ Beta(a, b) é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt & \text{, se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{, se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Note que a distribuição Beta não possui uma expressão “fechada” para a função de distribuição acumulada F. Contudo, apresentamos no próximo fato uma relação fundamental entre as distribuições Beta e Binomial.

Fato 4. (Extraído das notas de aula do prof. Maurício) Sejam $X \sim$ Beta$(j, n-j-1)$ com $j = 1, ..., n$ e $Y \sim$ Binomial(n, p), então

$$P[X \leq p] = P[Y \geq j].$$

A seguir, um exemplo implementado no software R.

```
> ### Relação entre a beta e binomial
> #Exemplo: Sejam X~Beta(3,2) e Y~Binomial(5,0.25), então
> j<-3
> n<-5
> p<-0.25
> prob.y<-pbinom(q=j,size=n,prob=p,lower.tail=FALSE)
> prob.y #P[Y >= j]
[1] 0.015625
> prob.x<-pbeta(q = p,shape1 = j, shape2 = (n-j-1))
> prob.x #P[X <= p]
[1] 0.015625
```

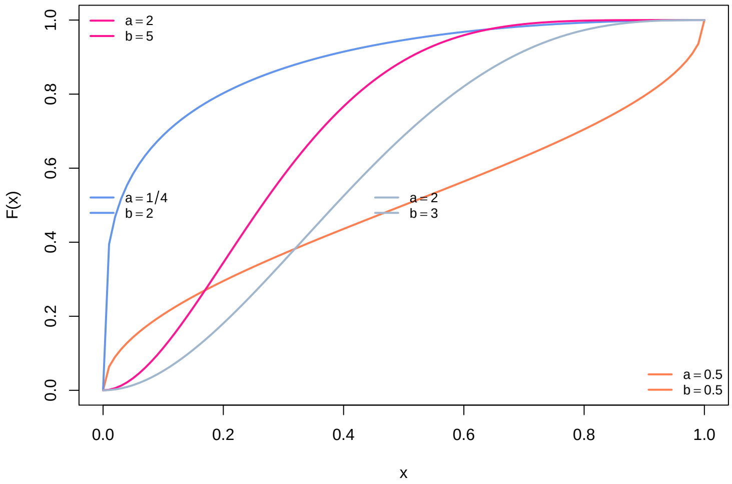


Figura 11: Função de distribuição acumulada para certos valores a e b.

```
pdf("Beta_Acumulada",width=8,height=6,paper='special')
curve(pbeta(x,shape1=0.5,shape2=0.5),xlim=c(0,1),col='coral',lwd=2,
ylab='F(x)')
legend('bottomright',legend=expression(a==0.5,b==0.5),
col='coral',lwd=2,bt='n',cex=0.8)
curve(pbeta(x,shape1=1/4,shape2=2),xlim=c(0,1),col='cornflowerblue',
add=TRUE,lwd=2)
legend('left',legend=expression(a==1/4,b==2),
col='cornflowerblue',lwd=2,bt='n',cex=0.8)
curve(pbeta(x,shape1=2,shape2=5),xlim=c(0,1),col='deeppink',
add=TRUE,lwd=2)
legend('topleft',legend=expression(a==2,b==5),
col='deeppink',lwd=2,bt='n',cex=0.8)
curve(pbeta(x,shape1=2,shape2=3),xlim=c(0,1),col='slategray3',
add=TRUE,lwd=2)
legend('center',legend=expression(a==2,b==3),
col='slategray3',lwd=2,bt='n',cex=0.8)
dev.off()
```

Fato 5. A função geradora de momentos de $X \sim \text{Beta}(a,b)$ é

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\, t^k}{(a+b)_k\, k!}. \tag{52}$$

PROVA:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^1 e^{xt} f(x;\, a,b)\, dx \\
&= {}_1F_1(a, a+b;\, t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\, t^k}{(a+b)_k\, k!}.
\end{aligned} \tag{53}
$$

Fato 6. O coeficiente de assimetria α_3 de $X \sim$ Beta(a,b) é

$$
\alpha_3 = \frac{2(b-a)(a+b+1)^{1/2}}{(a+b+2)(ab)^{1/2}}. \tag{54}
$$

PROVA: Note que

$$
\begin{aligned}
\sigma^3\alpha_3 &= \mathbb{E}[(X-\mu)^3] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{3} X^k(-\mu)^{3-k}\Big] \\
&= 2\mu^3 - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X^3],
\end{aligned} \tag{55}
$$

mas

$$
\mathbb{E}[X^2] = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)},
$$

$$
\mathbb{E}[X^3] = \frac{(a+2)(a+1)a}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)},
$$

e

$$
\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}.
$$

Substituindo em (55)

$$
\begin{aligned}
\sigma^3\alpha_3 &= \frac{2a^3}{(a+b)^3} - \frac{3(a+1)a^2}{(a+b+1)(a+b)^2} + \frac{(a+2)(a+1)a}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)} \\
&= \frac{a}{(a+b)}\Big[\frac{2a^2}{(a+b)^2} - \frac{3(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)} + \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+2)(a+b+1)}\Big] \\
&= \frac{a}{(a+b)}\Big\{\frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{a+1}{(a+b+1)}\Big[\frac{(a+2)}{(a+b+2)} - \frac{3a}{(a+b)}\Big]\Big\} \\
&= \frac{a}{(a+b)}\Big[\frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{a+1}{(a+b+1)}\frac{(-2a^2-2ab-4a+2b)}{(a+b+2)(a+b)}\Big] \\
&= \frac{2a}{(a+b)}\Big[\frac{(a+1)(a+b)(-2a^2-2ab-4a+2b)+a^2(a+b+2)(a+b+1)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}\Big] \\
&= \frac{2a(-2a^2-2ab+ab+b^2+2a^2)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)^3} \\
&= \frac{2ab(b-a)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)^3} \qquad (56)
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{2ab(b-a)}{(\sigma^2)^{3/2}(a+b+2)(a+b+1)(a+b)^3} \\
&= \frac{2ab(b-a)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)^3}\Big[\frac{(a+b)(a+b+1)}{ab}\Big]^{3/2} \\
&= \frac{2ab(b-a)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)^3}\frac{(a+b)^{3/2}(a+b+1)^{3/2}}{a^{3/2}}b^{2/3} \\
&= \frac{2(b-a)(a+b+1)^{1/2}}{(a+b+2)(ab)^{1/2}}. \qquad (57)
\end{aligned}
$$

Note que se $a > b$ então $X \sim$ Beta(a, b) tem assimetria negativa e positiva caso contrário. Observe, também, que se $a = b$ então $\alpha_3 = 0$.

Fato 7. (Extraído das notas de aula do prof. Maurício) Se $X \sim$ Beta(a, b) e $a = b$, então a distribuição é simétrica em torno do ponto $x = 1/2$.

PROVA:

$$f(x) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}[x(1-x)]^{a-1}I_{(0,1)}(x) \qquad (58)$$

Assim,

$$f\Big(\frac{1}{2}+x\Big) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}\Big[\Big(\frac{1}{2}+x\Big)\Big(\frac{1}{2}-x\Big)\Big]^{a-1}I_{(0,1)}\Big(\frac{1}{2}+x\Big) \qquad (59)$$

e

$$f\Big(\frac{1}{2}-x\Big)=\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}\Big[\Big(\frac{1}{2}-x\Big)\Big(\frac{1}{2}+x\Big)\Big]^{a-1}I_{(0,1)}\Big(\frac{1}{2}-x\Big) \tag{60}$$

daí

$$\frac{f\Big(\frac{1}{2}+x\Big)}{f\Big(\frac{1}{2}-x\Big)}=\frac{I_{(0,1)}\Big(\frac{1}{2}+x\Big)}{I_{(0,1)}\Big(\frac{1}{2}-x\Big)}=\frac{I_{(-1/2,1/2)}(x)}{I_{(-1/2,1/2)}(x)}=1.$$

Se $x>1/2$

$$f\Big(\frac{1}{2}+x\Big)=0 \quad \text{e} \quad f\Big(\frac{1}{2}-x\Big)=0,$$

assim

$$f\Big(\frac{1}{2}+x\Big)=f\Big(\frac{1}{2}-x\Big)$$

equivalentemente para o caso $x<-1/2, \forall x$. Portanto

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}. \tag{61}$$

Fato 8. Se $X\sim$ Beta(a,b), então $Y=1-X\sim$ Beta(b,a).

PROVA:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y\leq y]\\ &= P[1-X\leq y]\\ &= P[X\geq 1-y]\\ &= 1-P[X\leq 1-y] \end{aligned} \tag{62}$$

derivando (62) em relação a y, obtemos a densidade

$$f(y;a,b)=\frac{1}{B(a,b)}y^{b-1}(1-y)^{a-1}I_{(0,1)}(y)$$

logo $Y=1-X\sim$ Beta(b,a).

Fato 9.Sejam r e s números positivos e $X\sim$ Beta(a,b). Então

$$\mathbb{E}[X^r(1-X)^s]=\frac{B(a+r,b+s)}{B(a,b)}. \tag{63}$$

PROVA:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^r(1-X)^s] &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^r(1-x)^s x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^{a+r-1}(1-x)^{b+s-1}\,dx\\ &= \frac{B(a+r,b+s)}{B(a,b)}. \qquad (64)\end{aligned}$$

Podemos reduzir a expressão (64)

$$\frac{B(a+r,b+s)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(b+s)}{\Gamma(a+r+b+s)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \qquad (65)$$

sabemos que

$$\Gamma(a+r) = \Gamma(a)\prod_{i=1}^{r}(a+r-i),$$

$$\Gamma(b+s) = \Gamma(b)\prod_{j=1}^{s}(b+s-j)$$

e

$$\Gamma(a+b+r+s) = \Gamma(a+b)\prod_{k=1}^{r+s}(a+b+r+s-k).$$

Substituindo as expressões anteriores em (64), obtemos

$$\mathbb{E}[X^r(1-X)^s] = \frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdots a\,(b+s-1)(b+s-2)\cdots b}{(a+b+r+s-1)(a+b+r+s-2)\cdots(a+b)}. \qquad (66)$$

ou usando a notação em (45), concluímos que

$$\mathbb{E}[X^r(1-X)^s] = (a)_r(b)_s(a+b)_{r+s}^{-1}. \qquad (67)$$

Fato 10. (Omitimos a demonstração)

6.12.1 Simulação

Ross[1] (2014) comenta que uma aproximação para gerar valores aleatórios (amostra) da distribuição Beta de parâmetros m e n seria considerar um processo

[1]Introduction Probability Models, 685-686. Vale mencionar que Ross propôs três alternativas para gerar uma amostra. Contudo, optamos pelo segundo método pois é mais eficiente para m e n suficientemente grandes.

de Poisson de parâmetro igual 1. Seja S_{m+n} o tempo de ocorrência do $(m+n)$-ésimo evento. O conjunto dos $m+n-1$ primeiros eventos de tempo de ocorrência é distribuído independentemente e uniformamente entre $(0, S_{m+n})$. Portanto, dados S_{m+n}, o n-ésimo menor dos $n+m-1$ primeiros eventos de tempo de ocorrência (escrevemos S_n). Dito isso, a razão S_n/S_{m+n} tem distribuição Beta de parâmetros m e n. Logo

$$\frac{-\log\prod_{i=1}^{n} U_i}{-\log\prod_{j=1}^{n+m} U_j} \sim \text{Beta}(n, m), \tag{68}$$

onde $U_1, U_2, ..., U_{m+n}$ são i.i.d. $(0, 1)$.

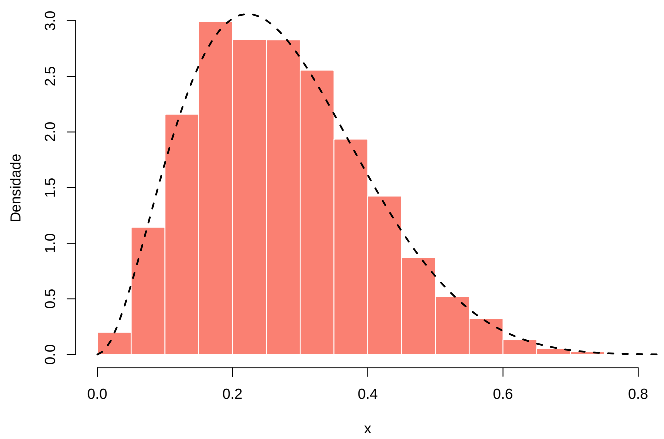


Figura 12: Amostra gerada de tamanho 5000 de Beta$(n = 3, m = 8)$

6.13 Distribuição Gama

6.13.1 Introdução

Em 1836, o modelo Gama de explicação probabilística foi obtido por Laplace que estudava a distribuição do estimador, denotado por ele, constante de precisão

$$h = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

A distribuição Gama depende de dois parâmetros reais positivos, a de formato e b de dispersão.

Definição. Seja X uma variável aleatória contínua. X segue distribuição Gama de parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} I_{(0,\infty)}(x).$$

Notação: $X \sim$ Gama(a, b)

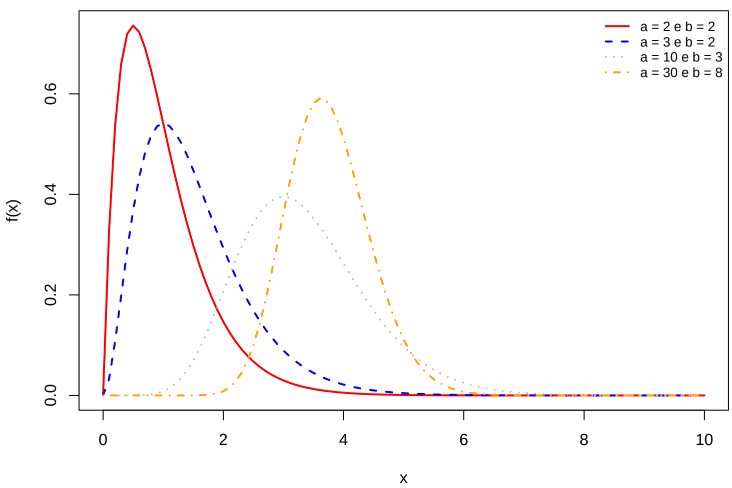


Figura 13: Densidade para certos valores de a e b

```
pdf("densidadegamma.pdf",width=8,height=6,paper='special')
curve(dgamma(x,shape=2,rate=2),xlim=c(0,10),col='red',lwd=2,
ylab='f(x)')
curve(dgamma(x,shape=3,rate=2),xlim=c(0,10),col='blue',lwd=2,
lty=2,add=T)
curve(dgamma(x,shape=10,rate=3),xlim=c(0,10),col='gray',lwd=2,
```

```
lty=3,add=T)
curve(dgamma(x,shape=30,rate=8),xlim=c(0,10),col='orange',lwd=2,
lty=4,add=T)
legend('topright',legend=c("a = 2 e b = 2","a = 3 e b = 2",
"a = 10 e b = 3","a = 30 e b = 8"),lty=1:4,lwd=2,
col=c('red','blue','gray','orange'),bt='n',cex=0.8)
dev.off()
```

Para afirmar que esta realmente é um função densidade de probabilidade, precisamos provar que (I) $f(x) > 0$ e (II)$\int f(x)dx = 1$. Assim,

I) Como os parâmetros a e b são positivos, então

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} > 0$$
$$x^{a-1} > 0 \text{ e}$$
$$e^{-bx} > 0$$

Assim é possível dizer que a $f(x) > 0$, ou seja, a função é positiva.

II) $\int f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(\frac{a}{1})}{1b^{\frac{a}{1}}} \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{b^a} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por **(I)** e **(II)** provamos que f é legítima função densidade de probabilidade.

6.13.2 Características

A Distribuição Gama possui densidade positiva, com formato tendendo para a distribuição Normal quando esta é muito grande, suas funções acumulada e de sobrevivência não possuem uma forma fechada, podendo ser obtida através do processo de Poisson no seu n-ésimo de tempo de falha.

A função de distribuição acumulada da gama é dada por:

$$F(x) = \left[\int_0^x \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} dt\right] I_{(0,\infty)}(x)$$

É possível relacionar a Distribuição Gama e a Distribuição de Poisson quando o parâmetro $b = r$ da distribuição Gama é um número inteiro positivo. Assim definimos

$$X \sim \text{Gamma}(a, b) \equiv X \sim \text{Erlang}(a, r)$$

e a propriedade é

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{e^{-bx}(bx)^i}{i!}.$$

6.13.3 Distribuições Relacionadas

Essa distribuição estar relacionada com outras distribuições estatísticas.

1. Se b é um número inteiro positivo com $a = k$ onde k é inteiro, a distribuição Gama é conhecida como Distribuição Erlang em homenagem ao matemático Agner Erlang (1878-1929), sendo a distribuição de probabilidade do tempo de espera até a ocorrência de um determinado evento em um processo Poisson.

$$f(x) = \frac{b^k}{(b-1)!} x^{k-1} e^{-bk} I_{(0,\infty)}(x)$$

2. Quando o parâmetro da distribuição gama é $a = 1$, então a distribuição equivale a Distribuição Exponencial com parâmetro igual ao valor b.

$$X \sim Gama(1, b) = X \sim Exp(b)$$

cuja densidade é

$$f(x) = be^{-bx} I_{(0,\infty)}(x).$$

3. Quando $a = n/2$ e $b = 1/2$, então é equivalente a Distribuição Qui Quadrado com n graus de liberdade.

$$X \sim Gama\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = X \sim \chi^2(n)$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} I_{(0,\infty)}(x)$$

4. Se x for um distribuição Maxuell então:

$$X^2 \sim Gama\left(\frac{3}{2}, 2a^2\right) = X \sim Maxuell(a)$$

$$f(x) = \frac{(2a^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-x}{2a^2}} I_{(0,\infty)}(x)$$

5. Se x segue uma Distribuição Gama então $\frac{1}{x}$ segue uma gama inversa, da seguinte maneira:

$$X \sim Gama(a, b) = \frac{1}{X} \sim Inv - Gamma(a, b - 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} x^{-(a+1)} e^{-\frac{b}{x}} I_{(0,\infty)}(x)$$

6. Se x e y são variáveis independentes e seguem uma Distribuição Gama , então:

$$X \sim Gama(a, c) \quad e \quad Y \sim Gama(b, c) = \frac{x}{x+y} \sim Beta(a, b)$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1 - a)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$$

6.13.4 Função Geradora de Momentos

Seja x uma variável aleátoria contínua com Distribuição Gama ($X \sim$ Gama(a, b)), então sua função geradora de momentos é dada por $M(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^2, t < b$
Prova:

$$\begin{aligned} M_x(t) = E(e^{tx}) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x(b-t)} dx \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(b-t)^a} \\ &= \frac{b^a}{(b-t)^a} \end{aligned}$$

Assim,

$$M(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a, t < b$$

6.13.5 Momentos

A partir da fórmula do r-ésimo momento será possível encontrarmos as características da distribuição Gama como sua média, variância, assimetria e curtose. A seguir será econtrado a fórumla dos momentos e logo após encontrado cada momento para resultar nas características que se quer analisar. Seja $X \sim$ Gama(a, b), então

$$\mathbb{E}(x^r) = \frac{\Gamma(a + r)}{b^r \Gamma(a)}, r = 1, 2, ...$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(x^r) &= \int_0^\infty x^r \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a+r-1} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+r)}{b^{a+r}} \\
&= \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a) b^r}
\end{aligned}
$$

Encontrando a fórmula de x no r-ésimo momento

$$\mathbb{E}(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)b} = \frac{a\Gamma(a)}{\Gamma(a)b} = \frac{a}{b} \tag{69}$$

$$\mathbb{E}(x^2) = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)b^2} = \frac{a(a+1)\Gamma(a)}{\Gamma(a)b^2} = \frac{a(a+1)}{b^2} \tag{70}$$

$$\mathbb{E}(x^3) = \frac{\Gamma(a+3)}{\Gamma(a)b^3} = \frac{a(a+1)(a+2)\Gamma(a)}{\Gamma(a)b^3} = \frac{a(a+1)(a+2)}{b^3} \tag{71}$$

$$\mathbb{E}(x^4) = \frac{\Gamma(a+4)}{\Gamma(a)b^4} = \frac{(a+3)(a+2)(a+1)a\Gamma(a)}{\Gamma(a)b^4} = \frac{(a+3)(a+2)(a+1)a}{b^4} \tag{72}$$

Média

A média da distribuição é dada pelo primeiro momento encontrado, ou seja, quando o r é igual ao valor 1, então como ja foi calculado, a média da distribuição Gama é:

$$\mathbb{E}(x) = \frac{a}{b}$$

Variância

A variância é calculada pela diferença entre o segundo momento e o quadrado da esperança, então pode-se concluir que a variância da Distribuição é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \mathbb{E}(x-\mu)^2 \\
&= \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 \\
&= \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \\
V(x) &= \frac{a}{b^2}
\end{aligned}
$$

Assimetria

Para encontrar o coeficiênte de assimetria, iremos calcular, primeiramente, o terceiro momento central:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(x-\mu)^3 &= \mathbb{E}(x^3) - 3\mathbb{E}(x^2)\mathbb{E}(x) + 2[\mathbb{E}(x)]^3 \\
\mathbb{E}(x-\mu)^3 &= \frac{a(a+1)(a+2)}{b^3} - 3\frac{a(a+1)}{b^2}\frac{a}{b} + 2\frac{a^3}{b^3} \\
&= \frac{a}{b^3}[(a+2)(a+1) - 3a(a+1) + 2a^2] \\
&= \frac{a}{b^3}[a^2 + 3a + 2 - 3a^2 - 3a + 2a^2] \\
&= \frac{2a}{b^3}
\end{aligned}
$$

O Coeficiente de assimetria é dado pela divisão entre o terceiro momento central e o desvio padrão elevado ao cubo:

$$\alpha_3 = \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\frac{2a}{b^3}}{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^3}} = \frac{2}{\sqrt{a}} > 0$$

Curtose

Para encontrar o coeficiente de curtose, iremos calcular, primeiramente, o quarto momento central:

$$
\begin{aligned}
E(x-\mu)^4 &= E(x^4) - 4E(x^3)\mu + 6E(x^2)\mu^2 - 3\mu^4 \\
E(x-\mu)^4 &= \frac{(a+3)(a+2)(a+1)a}{b^4} - \frac{4(a+2)(a+1)a^2}{b^4} + 6\frac{(a+1)a^3}{b^4} - \frac{3a^4}{b^4} \\
&= \frac{a}{b^4}[(a+3)(a+2)(a+1) - 4(a+2)(a+1)a + 6a+1)a^3 - 3a^3] \\
&= \frac{a}{b^4}[(a+2)(a+1)(3-3a) + 6a^2 + 3a^3] \\
&= \frac{a3(a+2)}{b^4}[(a+1)(1-a) + 3a^2] \\
&= \frac{a3(a+2)}{b^4}[1 - a^2 + a^2] \\
&= \frac{a3(a+2)}{b^4}
\end{aligned}
$$

$$E(x-\mu)^4 = \frac{3a(a+2)}{b^4}$$

o coeficiente de curtose é dado pela divisão entre o quarto momento central e o desvio padrão elevado a quarta:

$$\alpha_4 = \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\frac{3a(a+2)}{b^4}}{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{3a(a+2)}{a^2} = \frac{3(a+2)}{a} = 3\left(1+\frac{2}{a}\right) > 3$$

Pelo coeficiente de curtose, concluímos que a Distribuição Gama é leptocúrtica para qualquer valor de **a** maior que 0.

Média: $\frac{a}{b}$
Variância: $\frac{a}{b^2}$
Assimetria: $\frac{2}{\sqrt{a}}$
Curtose: $3\left(1+\frac{2}{a}\right)$

6.13.6 Moda

Na estatística a moda é o valor que ocorre com maior frequência, a moda de um distribuição é o ponto que maximiza a função, para encontrar deve calcular o logarítmo natural da função:

$$h(x) = \ln f(x)$$

Assim na Distribuição Gama:

$$h(x) = \ln \frac{b^a}{\Gamma(a)} + (a+1)\ln(x) - bx$$

Derivamos o resultado obtido e igualamos a zero para encontrar o ponto de máximo.

$$h'(x) = \frac{a-1}{x} - b$$

$$\frac{a-1}{x} - b = 0$$

$$\frac{a-1}{x} = b$$

$$x = \frac{a-1}{b}$$

$a > 1$

Agora,será estimada a derivada segunda, para saber se a funçao é crescente ou decrescente, se a segunda derivada der negativo então é ponto de máximo caso contrário é ponto de mínimo.

$$h''(x) = \frac{-(a-1)}{x^2} < 0$$

Conclui-se que a função é crescente e possiu ponto de máximo, pois a sua derivada segunda resultou em um número menor que zero.

Analisando o caso $0 < a < 1, x > 0$

$$h'(x) = \frac{a-1}{x} - b < 0, \qquad 0 < a < 1$$

Assim $h(x)$ é decrescente no intervalo $(0, \infty)$. A moda de x será o ponto $x = 0$.

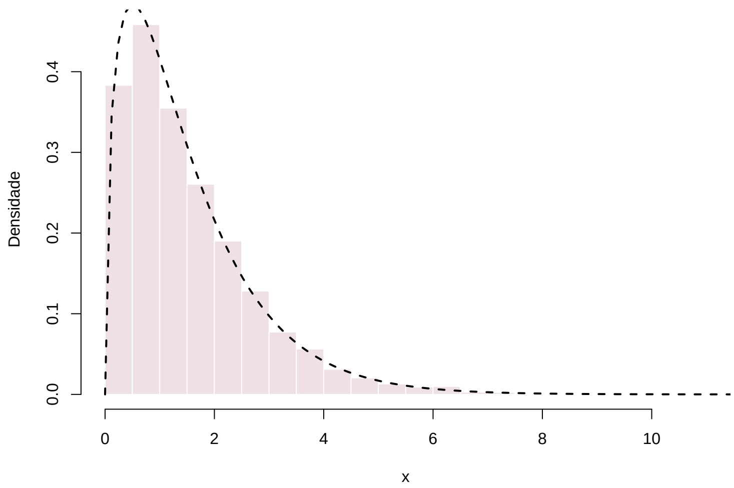
6.13.7 Simulação

Vamos simular uma amostra de uma população que segue Gama(3/2,1). Esse exemplo foi retirado do livro Simulation (ROSS, ano).

- Gere um número aleatório U_1 e faça $Y = -\frac{3}{2}\log U_1$;
- Gere um número aleatório U_2;
- Se $U_2 < (2eY/3)^{1/2}e^{-Y/3}$, faça $X = Y$. Caso contrário, retorne ao primeiro passo.

Assim,

```
pdf('simulacaogama.pdf',width=8,height=6,paper='special')
###gerar gama(3/2,1)
rm(list=ls())
y=0
x=0
t=0
i=1
j=1
r=1
while(r<=10000){
u1=runif(1)
y[i]=-(3/2)*log(u1)
u2=runif(1)
if(u2< (2*exp(1)*y[i]/3)^(1/2)*exp(-y[i]/3)){
x[i]=y[i]
i=i+1
}else{
t[j]=y[j]
j=j+1
}
r=r+1
}

hist(x,prob=T,col="lavenderblush2",border='white',breaks=20,
main=NULL,ylab="Densidade")
curve(dgamma(x,3/2,1),add=T,xlim=c(0,12),lty=2,lwd=2)
dev.off()
```



6.13.8 Aplicações

Essa distribuição é usada em econometria e em outros campos, principalmente, para estimar tempos de espera, quando o modelo Poisson for considerável no evento, por exemplo: teste de vida, estimando o tempo de vida que resta para uma pessoa com determinada doença, em tempo em linha de espera e tempo de serviço. Para esboçar erros em modelos de regressão devido a combinação da Distribuição Poisson com a distribuição Gama ser uma Distribuição Binomial. Também se adequa em processos estocásticos associados com o tempo, como estudos envolvendo tempo de vida de um componente.

A Distribuição Gama tem sido usada para fazer ajustes realísticos para Distribuições Exponenciais na representação do tempo de vida, bem como na análise de precipitação de chuvas (DAS, 1955; KOTZ e NEUMANN, 1963).

Thom (1958) e Cunha et al. (1996) consideram que, dentre os modelos probabilísticos avaliados por meio de análises em histogramas de frequência, o modelo da distribuição Gama é o que tem apresentado melhores resultados, em estimativa de probabilidades e na simulação de dados climáticos diários.

6.14 Distribuição t-Student

Dizemos que $T \sim t_v$ (lê-se: T segue uma distribuição t) se sua função densidade de probabilidade (f.d.p) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(t) \tag{73}$$

No R:

```
# Comandos importantes da distribuição t de Student no R:
#
# dt(t,v)
# Expressão que retorna a f.d.p. da distribuição.
# pt(t,v,lower.tail=T)
# Expressão que retorna a f.d.a. da distribuição.
# qt(q,v)
# Expressão que retorna o quantil de ordem q da distribuição.
# rt(k,v)
# Expressão que retorna uma amostra de tamanho k da distribuição.
```

Observe o seu gráfico:

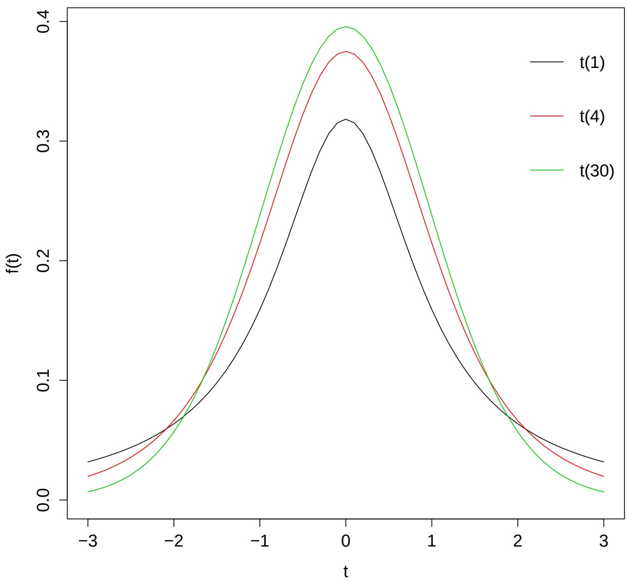


Figura 14: t de Student para $v = 1$, $v = 4$ e $v = 30$.

Dizemos que f_T é uma f.d.p., pois apresenta essas duas características:

I) $t \in \mathbb{R} \Rightarrow t^2 \geq 0 \Rightarrow \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} > 0 \Rightarrow f_T(t) > 0.$

II) $L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})} \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$

Note que $f_T(-t) = f_T(t)$, então f_T é uma função par, assim:

$$L = 2\int_{0}^{\infty} \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})} \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$$

Faremos a seguinte substituição:

$$y = \frac{t^2}{v} \Rightarrow t = \sqrt{v}y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{v}}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

Com essa substituição temos que:

$$L = \frac{2v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})}\int_{0}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt = \frac{2v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})}\int_{0}^{\infty}(1+y)^{-\frac{v+1}{2}}\,\frac{\sqrt{v}}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})}\int_{0}^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{2}\frac{v}{2}}}dy = \frac{B(\frac{1}{2},\frac{v}{2})}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})} = 1$$

No R:

```
# Usaremos um valor para v aleatório, para podermos calcular:
v=1/runif(1)-1
#O valor de v será um número aleatoriamente escolhindo
 maior que 0.
integrate(function(t) dt(t,v),-Inf,Inf)
# Se não quisermos ver o cálculo do erro basta fazermos:
integrate(function(t) dt(t,v),-Inf,Inf)$value
```

6.14.1 Caracterização

Essa distribuição tem vários casos particulares que são muito interessantes de serem observados. Podemos citar dois casos (propriedades):

Caso 1

Se $T \sim t_{v=1}$, então $T \sim Cauchy(0,1)$.

Caso 2

Se $T \sim t_{v=k}$ quando $k \to \infty$, então $T \sim N(0,1)$.

Existe uma relação muito importante envolvendo a distribuição t de Student, muito usada na Inferência Estatística. Essa relação se da da seguinte forma:

Seja Z e V v.a.s independentes, tal que $Z \sim N(0,1)$ e $V \sim \chi^2(v)$. Assim, podemos afirmar que:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{v}}} \sim t_v \tag{74}$$

Demonstração:

$\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$

$f_V(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$

A distribuição conjunta de (Z, V) é dado por:

$$f_{(Z,V)}(z,x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}\sqrt{2\pi}} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(z^2+x)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

Façamos agora $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{v}}}$ e $A = V$.

Ora, se fizermos essa substituição obteremos que o Jacobiano dessa transformação é $J = \dfrac{a^{1/2}}{\sqrt{v}}$. Logo,

$$f_{(T,A)}(t,a) = f_{(Z,V)}\left(\frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{v}}, a\right)\left|\frac{a^{1/2}}{\sqrt{v}}\right| = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v+1}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{v}} a^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{(1+t^2/a)}{2}a} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(a)\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(t)$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v+1}{2}}\sqrt{v\pi}} \int_0^\infty a^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{(1+t^2/a)}{2}a}\, da\ \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(t)$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v+1}{2}}\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}} \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(t)$$

Com isso, podemos concluir que $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{v}}} \sim t_v$.

6.14.2 Função de distribuição acumulada (f.d.a.)

Seja T uma v.a. tal que $T \sim t_v$, então sua f.d.a. é dada por:

$$F_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2B\left(\frac{v}{2},\frac{1}{2}\right)} B\left(\frac{t^2}{v+t^2}; \frac{1}{2}, \frac{v}{2}+2\right) & \text{, se } t \leq 0; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2B\left(\frac{v}{2},\frac{1}{2}\right)} B\left(\frac{t^2}{v+t^2}; \frac{1}{2}, \frac{v}{2}+2\right) & \text{, se } t > 0. \end{cases} \tag{75}$$

em que $B(x;a,b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$, $a,b \in \mathbb{R}$ e $x \in (0,1)$. Essa expressão denota a função beta incompleta.

Demonstração:

Por definição sabemos que:

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(y)dy$$

Para solucionarmos esse problema, basta conseguirmos calcular o seguinte, assumindo $t > 0$:

$$G(t) = \int_0^t f_T(y)dy = \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{y^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dy$$

Faremos agora a seguinte substituição:

$$z = \frac{y^2}{v} \Rightarrow y = \sqrt{v}z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = \frac{\sqrt{v}}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$$

Usando essa substituição temos:

$$G(t) = \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{t^2}{v}} (1+z)^{-\frac{v+1}{2}} \frac{\sqrt{v}}{2} z^{-\frac{1}{2}}dz$$

Será necessário fazermos mais uma substituição dada logo abaixo:

$$w = \frac{z}{1+z} \Rightarrow z = \frac{w}{1-w} \Rightarrow dz = (1-w)^{-2}dw$$

Mais uma vez reescrevendo a função G temos:

$$G(t) = \frac{1}{2B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{t^2}{v+t^2}} w^{\frac{1}{2}-1}(1-w)^{\frac{v}{2}+2-1}dw$$

$$\Leftrightarrow G(t) = \frac{1}{2B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} B\left(\tfrac{t^2}{v+t^2}; \tfrac{1}{2}, \tfrac{v}{2}+2\right)$$

onde $B(x;a,b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$, $a,b \in \mathbb{R}$ e $x \in (0,1)$.

Para $t \leq 0$, vale que:

$$F_T(t) = \frac{1}{2} - G(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} B\left(\tfrac{t^2}{v+t^2}; \tfrac{1}{2}, \tfrac{v}{2}+2\right)$$

Para $t > 0$, vale que:

$$F_T(t) = \frac{1}{2} + G(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} B\left(\frac{t^2}{v+t^2}; \frac{1}{2}, \frac{v}{2}+2\right)$$

No R:

```
# Como já vimos antes a f.d.a. pode ser falcilmente obtida usando
 o comando pt(t,v).
# Porém, iremos implementar a nossa função obtida neste tópico.
# A função beta incompleta e dada por:

F<- function(t,v){
if(v<=0){
return("Valor de parâmentro não aceito. Insira graus de liberdade
 maiores que 0.")
}else{
a=1/2
b=v/2+2
x=t^2/(v+t^2)
if(x==0){
# Usamos este artifício, pois a integral não irá conseguir calcular
x=10^{-7}   # para x==0.
}
ibeta<- integrate(function(y) y^(a-1)*(1-y)^(b-1),0,x)$value
if(t<=0){
return(1/2-ibeta/(2*beta(v/2,1/2)))
} else{
return(1/2+ibeta/(2*beta(v/2,1/2)))
}
}
}
# Note no exemplo abaixo que o valor não é igual, porém se aproxima
 bastante.
pt(1/2,2)
F(1/2,2)
```

6.14.3 Momentos

Seja T uma v.a. tal que $T \sim t_v$, então o r-ésimo momento, $r \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$E[T^r] = \begin{cases} 0 & \text{, se r for ímpar;} \\ \dfrac{v^{\frac{r}{2}}}{B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{v-r}{2}\right) & \text{, se r for par.} \end{cases} \quad (76)$$

Demonstração:

No estudo dessa distribuição nos é necessário saber apenas os quatro primeiros momentos. Por esse motivo usamos $r \in \mathbb{N}$. Seja $g = \int_0^{\infty} f_T(t)dt$, então:

$$g = \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} t^r \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$$

Faremos a seguinte substituição:

$$y = \frac{t^2}{v} \Rightarrow t = \sqrt{v} y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{v}}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\Rightarrow g = \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} v^{\frac{r}{2}} y^{\frac{r}{2}} (1+y)^{-\frac{v+1}{2}} \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} y^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{v^{\frac{r}{2}}}{2B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{r+1}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{r+1}{2}+\frac{v-r}{2}}} dy$$

$$\Rightarrow g = \frac{v^{\frac{r}{2}}}{2B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} B\left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{v-r}{2}\right) \ \exists \Leftrightarrow v > r.$$

Para r ímpar, $t^r f_T(t)$ é função ímpar, logo:

$$E[T^r] = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} t^r f_T(t)dt = 0 \ \exists \Leftrightarrow g \ \exists \Leftrightarrow v > r.$$

Para r par, $t^r f_T(t)$ é função par, logo:

$$E[T^r] = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} t^r f_T(t)dt = 2\int_0^{\infty} t^r f_T(t)dt = 2g = \displaystyle\frac{v^{\frac{r}{2}}}{B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})} B\left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{v-r}{2}\right) \ \exists \Leftrightarrow v > r.$$

Usando o resultado (76), podemos concluir os seguintes resultados.

Esperança

Se $v > 1$, então $E[T] = 0$, caso contrário $E[T] \nexists$.

Variância

Se $v > 2$, então Var$[T] = \dfrac{v}{v-2}$, caso contrário Var$[T] \nexists$.

Demonstração:

Para $v > 2$, temos que:

$$\text{Var}[T] = E[T^2] - E^2[T] = \frac{vB\left(\frac{2+1}{2}, \frac{v-2}{2}\right)}{B\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right)} - 0 = v\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{v}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}-1\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{v}{v-2}$$

6.14.4 Coeficiente de assimetria

Seja γ_1 o coeficiente de assimetria, temos que: se $v > 3$, então $\gamma_1 = 0$, caso contrário $\gamma_1 \nexists$.

6.14.5 Coeficiente de curtose

Seja γ_2 o coeficiente de curtose, temos que: se $v > 4$, então $\gamma_2 = 3\left(\frac{v-2}{v-4}\right)$, caso contrário $\gamma_2 \nexists$.

Demonstração:

Para $v > 4$, temos que:

$$\gamma_2 = \frac{E[T-E[T]]^4}{\text{Var}^2[T]} = \frac{E[T]^4}{\text{Var}^2[T]} = \frac{v^2}{B(\frac{v}{2},\frac{1}{2})}B\left(\tfrac{1}{2}+2,\tfrac{v-4}{2}\right)\left(\frac{v-2}{v}\right)^2$$
$$= (v-2)^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-4}{2}\right)}{\left(\frac{v-2}{2}\right)\left(\frac{v-4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(v-2)^2 3}{4\frac{(v-2)(v-4)}{4}}$$
$$\Rightarrow \gamma_2 = 3\left(\frac{v-2}{v-4}\right)$$

6.14.6 Moda

Seja T uma v.a. tal que $T \sim t_v$, então:

$$\text{Mo}(T) = 0 \tag{77}$$

Demonstração:

Se $f_T(t)$ é a f.d.p. de T, então sua moda é:

$$\frac{d}{dt}f_T(t) = \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{B\left(\frac{v}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{v+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}\frac{2}{v}t$$
$$\frac{d}{dt}f_T(t) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Logo, $t = 0$ é a moda da distribuição t de Student.

6.14.7 Simulação

Para simularmos uma amostra de tamanho k de uma t_v podemos usar o comando rt. Mas iremos implementar nossa própria função usando os resultados até aqui obtidos. Neste caso, usaremos algumas transformações para obtermos nosso resultado. Seja Y_i ∼N$(0,1)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, então sabemos que:

$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$

Assim, temos que, se X ∼N$(0,1)$, então:

$$T \sim \frac{X}{\sqrt{\left(\frac{Z}{n}\right)}} \sim t_n$$

Com esses resultados, vemos que precisamos apenas saber gerar uma $N(0,1)$ para conseguirmos gerar uma $t(v)$. Primeiramente, iremos fazer uma função que retorne uma amostra de tamanho k de uma $N(0,1)$.

```
k=10000 # Tamanho da amostra.
amostranorm<- function(k){
x=0 # Vetor da amostra que será gerada.
c=sqrt(2/pi)*exp(1/2)
for(i in 1:k){
acabou="F"
while(acabou=="F"){
u=runif(1)
y=-log(u) # y é uma amostra de tamanho 1 de uma Exp(1).
u=runif(1)
if(u<=2*dnorm(y)/(c*dexp(y))){
u=runif(1)
if(u<0.5){
x[i]=-y
}else{
x[i]=y
}
acabou="T"
}
}
}
return(x)
}
hist(amostranorm(k),prob=T)
plot(function(x) dnorm(x),-3,3,add=T)
```

Agora, para gerarmos uma amostra de tamanho k de uma t_v, faremos o seguinte no r-cran:

```
k=10000 # Tamanho da amotra.
t=0 # Vetor da amostra.
v=15 # Graus de liberdade. Não esqueça que v>0, e nesse algorítimo v
# que ser inteiro.
for(i in 1:k){
aux=0
for(j in 1:v){
aux[j]=amostranorm(1)^2
}
t[i]=amostranorm(1)/sqrt(sum(aux)/v)
}
plot(function(x) dt(x,v),-5,5,ylab="Frequência relativa")
hist(t,prob=T,add=T,breaks=30,ylab="") # O comando breaks permítinos
# de intervalos do histograma de acordo com o
# necessário.
```

Observe o resultado em gráfico da amostra que geramos:

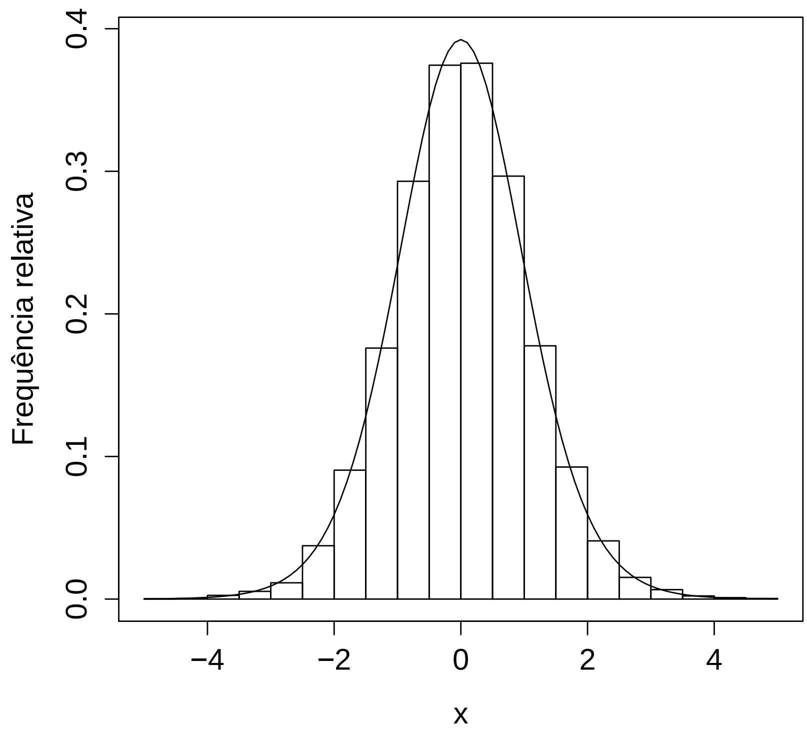


Figura 15: Pseudo amostra de tamanho 10000 de uma Weibull(2,2).

6.15 Distribuição Qui Quadrado

6.15.1 Introdução

A distribuição Chi-Quadrado (lê-se qui-quadrado) foi desenvolvida pelo alemão Friedrich Robert Helmert (1875-1876), onde ele calculou a variação da amostra de uma população Normal. Era tradicionalmente conhecida como Distribuição Helmert. Em 1900, a distribuição foi redescoberta pelo Inglês Karl Pearson o qual desenvolveu e publicou seu teste do Chi-Quadrado de Pearson. No entanto, foi em meados de 1920 que Fisher desenvolveu maiores ligações entre algumas distribuições e a Distribuição Chi-Quadrado.

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua, considera-se que X segue distribuição Chi-Quadrado de parâmetro $k > 0$, chamado número de graus de liberdade, se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} I_{(0,\infty)}(x) \qquad (78)$$

Notação: $X \sim \chi^2(k)$.

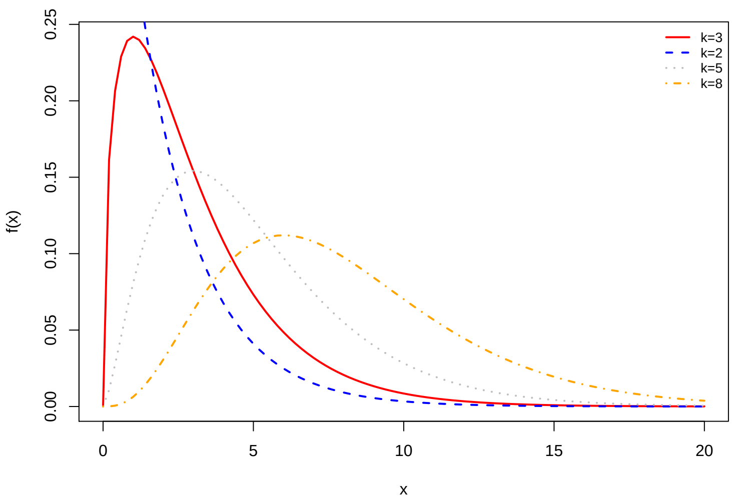


Figura 16: Densidade para certos valores de k

```
pdf('densidadechisquare.pdf',width=8,height=6,paper='special')
curve(dchisq(x,3),xlim=c(0,20),col='red',lwd=2,ylab='f(x)')
curve(dchisq(x,2),add=T,col='blue',lwd=2,lty=2)
```

```
curve(dchisq(x,5),add=T,col='gray',lwd=2,lty=3)
curve(dchisq(x,8),add=T,col='orange',lwd=2,lty=4)
legend('topright',legend=c('k=3','k=2','k=5','k=8'),
lty=1:4,col=c('red','blue','gray','orange'),lwd=2,
cex=0.8,bt='n')
dev.off()
```

Prova que é uma fdp:

I) Sabendo que k é positivo

$$2^{\frac{k}{2}} > 0 \text{ e } \Gamma(\tfrac{k}{2})2^{\frac{k}{2}} > 0$$

Então

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} > 0$$
$$x^{\frac{k}{2}-1} > 0$$
$$e^{\frac{-x}{2}} > 0$$

Assim podemos afirmar que que $f(x) > 0$, ou seja, a função é positiva.

II) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Usando a função gama generalizada foi possível encontrar com maior facilidade o resultado da integral.
Assim, por **(I)** e **(II)** provamos que a função f é uma função densidade de probabilidade.

6.15.2 Características

A Distribuição Chi-Quadrado com $k > 0$ graus de liberdade e assimétrica, surge pela soma de quadrados de variáveis com Distribuição Normal independentes, a soma dos graus de liberdade corresponde a soma da quantidade de quadrado da Distribuição Normal Padrão.
Seja Z uma variável que segue uma Distribuição Normal Padrão, então:

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2(1)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 = \chi^2(n)$$

Uma propriedade interessante dessa distribuição é sua aditividade, em que a soma de Chi-Quadrado resulta em uma Chi-Quadrado com a soma dos seus graus de liberdade.

$${\chi^2}_1(n_1) + {\chi^2}_2(n_2) + {\chi^2}_3(n_3) + \cdots + {\chi^2}_n(n_n) = \chi^2(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n).$$

6.15.3 Distribuições Relacionadas

Essa distribuição possui semelhanças com outras distribuições, como:

1. Sendo X uma variável aleatória com Distibuição Rayleigh com 1 grau de liberdade, então X^2 é um Distribuição Chi-Quadrado com 2 graus de liberdade.

   $$X \sim \text{Rayleigh}(1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2(2)$$

   $$f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}} I_{(0,\infty)}(x)$$

2. Se X segue uma Distribuição Exponencial com $\lambda = \frac{1}{2}$, então equivale a Distribuição Chi-Quadrado com 2 graus de liberdade.

   $$X \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right) \equiv X \sim \chi^2(2)$$

   cuja densidade

   $$f(x) = 2e^{2x} I_{(0,\infty)}(x).$$

3. Se X segue uma Distribuição Maxuell com 1 grau de liberdade, então X^2 segue uma distribuição Chi-Quadrado com 3 graus de liberdade.

   $$X \sim \text{Maxuell}(1) \equiv X^2 \sim \chi^2(3).$$

4. Se X segue uma Distribuição Chi-Quadrado com n graus de liberdade, então $\frac{1}{X}$ segue uma uma Distribuição Qui-Quadrado inversa.

$$X \sim \chi^2(n) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim Inv - \chi^2(n).$$

5. Se X e Y seguem Distribuição Chi-Quadrado independentes com n_1 e n_2 graus de liberdade, respectivamente, então $\frac{X}{X+Y}$ segue uma Distribuição Beta com parâmetros $a = \frac{n_1}{2}$ e $b = \frac{n_2}{2}$

$$X \sim \chi^2(n_1) \quad \text{e} \quad Y \sim \chi^2(n_2) \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right).$$

6. A divisão de duas Chi-Quadrado independentes é uma Distribuição F com seus respectivos graus de liberdade. Se X e Y seguem Distribuição Chi-Quadrado independentes, então:

$$X \sim \chi^2(n_1) \quad \text{e} \quad Y \sim \chi^2(n_2) \Rightarrow \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}} \sim F(n_1, n_2).$$

cuja densidade

$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{mx}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} I_{(0,\infty)}(x).$$

7. A Distribuição t-Student pode ser identificada a partir da Distribuição Normal e Chi-Quadrado. Se Z segue uma Distribuição Normal Padrão e X segue uma Distribuição Chi-Quadrado, então $\dfrac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$ segue uma Distribuição t-Student com n graus de liberdade.

$$X \sim \chi^2(n) \quad e \quad Z \sim N(0,1) = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}} \sim t(n).$$

8. Se X segue uma Distribuição Gama com parâmetros $a = \frac{n}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, então equivale a Chi-Quadrado com n graus de liberdade, sendo bastante utilizada em inferência para testes de hipótese ou na construção de intervalos de confiança.

$$X \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv X \sim \chi^2(n)$$

cuja densidade

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} I_{(0,\infty)}(x).$$

9. Se X segue uma Distribuição Uniforme com parâmetros 0 e 1, entao $-2log(X)$ segue uma Distribuição Chi-Quadrado com 2 graus de liberdade.

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow -2log(X) \sim \chi^2(2)$$

cuja densidade

$$f(x) = 2e^{-x} I_{(0,\infty)}(x).$$

10. Como essa distribuição é a soma S de n variáveis aleatórias independentes com média e variância finita, pelo Teorema Central do Limite, quando n for suficientemente grande, então S converge à Distribuição Normal Padrão.

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$Z \sim N(0,1) = Z^2 \sim \chi^2(1)$$

6.15.4 Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória contínua com Distribuição Chi-Quadrado $X \sim \chi^2(k)$, sua função geradora de momentos é dada por $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{k}{2}}$
Prova:

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{\frac{k}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{k}{2}}, t > 1/2. \end{aligned}$$

6.15.5 Momentos

Os momentos são importantes para caracterizar uma distribuição. A partir da fórmula do r-ésimo momento possibilitará encontrar, com maior facilidade, a média, variância, assimetria e curtose da distribuição. A seguir será econtrado a fórmula dos momentos da distribuição Chi-Quadrado e logo após encontrado cada momento para resultar nas características que se quer analisar.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^r) &= \int_0^\infty x^r \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1+r} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+r)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{r+\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+r)2^r}{\Gamma(\frac{k}{2})}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+r)2^r}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

Encontrando a fórmula de x no r-ésimo momento

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)2^1}{\Gamma(\frac{k}{2})} = \frac{\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})2}{\Gamma(\frac{k}{2})} = 2\frac{k}{2} = k \\
\mathbb{E}(x^2) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+2)2^2}{\Gamma(\frac{k}{2})} = \frac{\left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})4}{\Gamma(\frac{k}{2})} = 2k + k^2 \\
\mathbb{E}(x^3) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+3)2^3}{\Gamma(\frac{k}{2})} = \frac{\left(2+\frac{k}{2}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})8}{\Gamma(\frac{k}{2})} = 8\left(k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{8}\right) = k(4+k)(2+k) \\
\mathbb{E}(x^4) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+4)2^4}{\Gamma(\frac{k}{2})} = \frac{\left(3+\frac{k}{2}\right)\left(2+\frac{k}{2}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})16}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
\mathbb{E}(x^4) &= (6+k)(4+k)(2+k) - 4k^2(4+k)(2+k)
\end{aligned}$$

Média

A média da distribuição é dada pelo primeiro momento, então so precisa substituir o r por 1.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1+1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)2}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
&= \frac{\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2})2}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
&= 2\frac{k}{2} \\
&= k
\end{aligned}
$$

Assim foi provado que o valor esperado da Distriquição Chi-Quadrado é k.

Variância

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}+1} e^{\frac{-x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+2)4}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
&= \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{k}{2})4}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\
&= 2k^2 + 2k
\end{aligned}
$$

Sabendo o resultado desses valores e que a variância é calculada pela diferença entre o valor esperado em X^2 e o quadrado da esperança, então pode-se concluir que a variância da Distribuição é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \mathbb{E}(x-\mu)^2 \\
&= \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 \\
&= (2k+k^2) - k^2 \\
V(X) &= 2k
\end{aligned}
$$

Assimetria

Para encontrar o coeficiênte de assimetria, será calculado o terceiro momento central:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-\mu)^3 &= \mathbb{E}(x^3) - 3\mathbb{E}(x^2)\mathbb{E}(x) + 2[\mathbb{E}(x)]^3 \\
\mathbb{E}(X-\mu)^3 &= (4+k)(2+k)k - 3k(2+k) + 2k^3 \\
&= k(8+6k+k^2-6k-3k^2+2k^2) \\
&= 8k
\end{aligned}
$$

O Coeficiente de assimetria é dado pela esperança da divisão entre o terceiro momento central e o desvio padrão elevado ao cubo:

$$\frac{\mathbb{E}(x-\mu)^3}{\sigma^3}$$

$$\alpha_3 = \frac{8k}{(\sqrt{2k})^3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} > 0$$

Curtose

Para encontrar o coeficiente de curtose, iremos calcular o quarto momento central:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-\mu)^4 &= E(x^4) - 4E(x^3)\mu + 6\mathbb{E}(x^2)\mu^2 - 3\mu^4 \\
\mathbb{E}(X-\mu)^4 &= (6+k)(4+k)(2+k) - 4k^2(4+k)(2+k) + 6k^3(2+k) - 3k^4 \\
&= 3k(4+k)(2+k)(2-k) + 3k^3(4+k) \\
&= 3k(4+k)(4-k^2+k^2) \\
&= 12k(4+k)
\end{aligned}
$$

O coeficiente de curtose é dado pela esperança da divisão entre o quarto momento central e o desvio padrão elevado a quarta:

$$\frac{\mathbb{E}(x-\mu)^4}{\sigma^4}$$

$$\alpha_4 = \frac{12k(4+k)}{(4k^2} = \frac{3(4+k)}{x} = 3\left(1+\frac{4}{k}\right) > 3$$

Pelo coeficiente de curtose, concluímos que a Distribuição Qui Quadrado é leptocúrtica.

6.15.6 Função Geradora de Cumulantes

Essa função é dada a partir do logaritmo natural da função geradora de momentos, é dada da seguinte maneira:

$$K_X(t) = \ln M_X(t)$$

$$\begin{aligned}
K_X(t) &= \left(\frac{1}{(1-2t)^{\frac{k}{2}}}\right) \\
K_X(t) &= \ln 1 - \frac{k}{2}\ln(1-2t) \\
K_X(t) &= -\frac{k}{2}\ln(1-2t)
\end{aligned}$$

6.15.7 Moda

Em estatística a moda é o valor mais frequente, ou é aquele onde a distribuição atinge o maior ponto no gráfico, a moda da Distribuição Chi-Quadrado existe apenas a partir de 3 graus de liberdade. Para estimar a moda deve-se calcular o logaritmo natural da função densidade, é dada por:

$$h(x) = \ln f(x)$$

$$h(x) = -\ln\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}\right] + \left(\frac{k}{2}-1\right)\ln x - \frac{x}{2}$$

Derivamos o resultado obtido e igualamos a zero para encontrar o ponto de máximo.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{k}{2}-1\right)\frac{1}{x^2} = 0 \\
&= \left(\frac{k}{2}-1\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\
&= (k-2)\frac{1}{x} = 1 \\
&= x = \frac{k}{2}, k > 2
\end{aligned}$$

Agora,será estimada a derivada segunda, para saber se a função é crescente ou decrescente, se a segunda derivada der negativo então é ponto de máximo caso contrário é ponto de mínimo.

$$h''(x) = -\left(\frac{k}{2}-1\right)\frac{1}{x^2} < 0$$

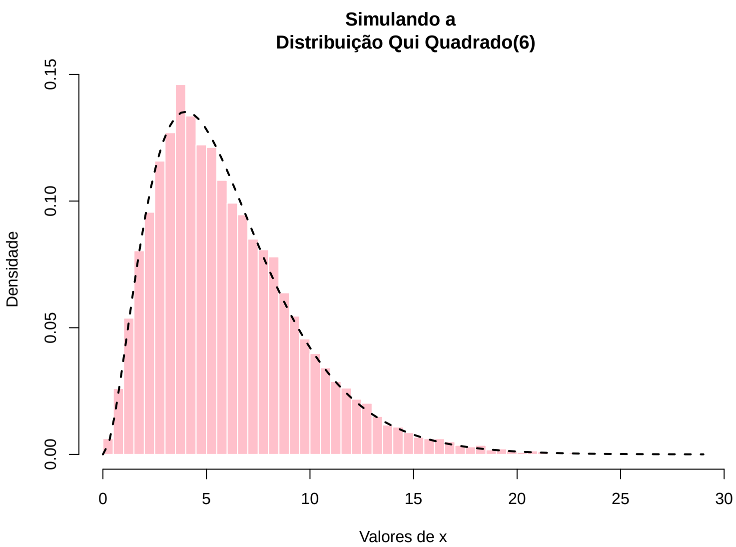
Conclui-se que a função é crescente e possui ponto de máximo, pois a sua derivada segunda resultou em um número menor que zero.

6.15.8 Aplicações

Essa distribuição possui diversas aplicações em inferência estatística. Como o teste qui-quadrado: para analisar a compatibilidade entre um conjunto de medidas e a relação esperada, e na análise de tabela de contingência. Na estimação da variância, problemas na analise de variância através da Distribuição F, verificação da qualidade de ajustamento aos dados estatísticos, e para obter outras distribuições importantes como a Distribuição T, obtida através das distribuições Normal Padrão, Qui Quadrado e a F. Utiliza-se também o Teste log-rank em análise de sobrevivência e o Teste de Cochran-Mantel-Haenszel para tabelas de contingência estratificados.

6.15.9 Simulação

```
#Simular A Distrição Qui Quadrado no R
k=6
v=0
for(i in 1:1000){
u=runif(k/2,min=0,max=1)
v[i]=-2*log(prod(u))
}
hist(v,prob=T,col="pink",border="white",breaks=100,
ylab="Densidade",
main="Simulando a \n Distribuição Qui Quadrado(6)",
xlab="Valores de x")
den=function(x,k){return(
(1/((gamma(k/2))*2^(k/2)))*(x^((k/2)-1))*exp(-x/2)
)}
curve(den(x,k=k),add=T,col="black",lty=2,lwd=2)
```



6.16 Distribuição Logística

6.16.1 Introdução

A função logística foi proposta por Verhulst entre 1838 e 1945 em estudos demográficos. Usados para estimar crescimento da população, em 1920, por Pearl e Reed, e o mais recente estudo foi em 1982 por Oliver. A partir da função logística foi desenvolvida a distribuição logística, onde sua função acumulada é a função logística, presente na regressão logística e em redes neurais. A distribuição Logística está definida nos números reais e possui um parâmetro de formato e outro de escala (locação).

Definição: Seja x uma variável aleatória contínua, considera que apresenta uma distribuição Logística com parâmetro a e b se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{b[1+exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^2} \quad I_{\mathbb{R}}(x)$$

Notação: X ~Logística(a,b)

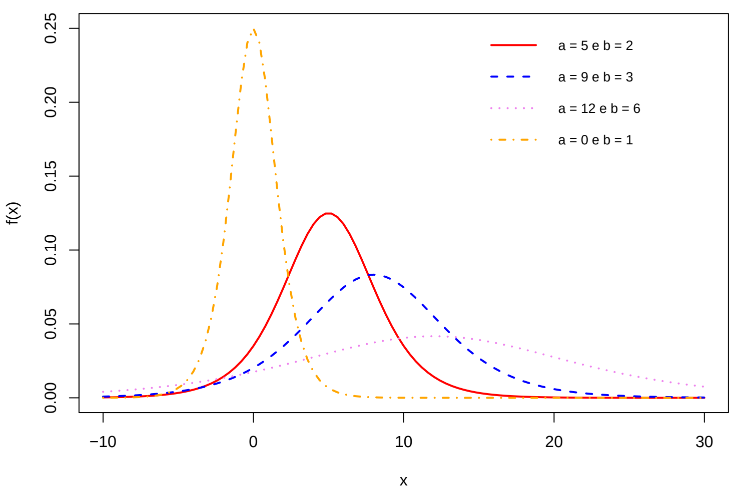


Figura 17: Função Densidade de Probabilidade - Logística

```
pdf("densidadelog",width=8,height=6,paper='special')
curve(dlogis(x,location=5,scale=2),ylim=c(0,0.25),
xlim=c(-10,30),col='red',lwd=2,ylab='f(x)')
curve(dlogis(x,location=8,scale=3),col='blue',lwd=2,
      lty=2,add=T)
```

```
curve(dlogis(x,location=12,scale=6),col='violet',lwd=2,
      lty=3,add=T)
curve(dlogis(x,location=0,scale=1),col='orange',lwd=2,
      lty=4,add=T)
legend('topright',legend=c("a = 5 e b = 2","a = 9 e b = 3",
 "a = 12 e b = 6","a = 0 e b = 1"),lty=1:4,lwd=2,
       col=c('red','blue','violet','orange'),bt='n',cex=0.8)
dev.off()
```

Para provar que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade:

I) $f(x) > 0$
Como $b > 0$, então:

$$exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) > 0$$
$$[1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)]^2 > 0$$
$$b[1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)]^2$$

Implica dizer que a função é positiva, então a condição $f(x) > 0$ é satisfeita.
II)$\int_b f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{b[1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)]^2} dx$$

Faremos uma substuição, chamando
$u = 1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)$ e
$du = -\dfrac{1}{b} exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) dx$
Como mudamos a variável, então é necessário adaptar os limites de integração.

$\lim_{x\to\infty} 1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) = 1$
$\lim_{x\to-\infty} 1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) = \infty$

Resolvendo a equação,

$$\int_{\infty}^{1} -\frac{1}{u^2} du = \int_{1}^{\infty} du = -\frac{1}{u} = 1$$

Assim, por **(I)** e **(II)** provamos que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

Outra forma para definir a distribuição logística é usando a conceito da secante hiperbólica.

$$f(x) = \frac{1}{4b} sech^2\left(\frac{x-a}{2b}\right) I_{\mathbb{R}}(x)$$

Sabendo que:

$$sech(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}},\, t \in \mathbb{R}$$
$$sech^2(t) = \frac{4}{[e^t(1+e^{-2t})]^2} = \frac{4}{e^2t(1+e^{-2t})^2} = \frac{4e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2}$$

Temos que $t = \dfrac{x-a}{2b}$, então:
$$sech^2\left(\frac{x-a}{2b}\right) = \frac{4e^{-2\frac{x-a}{2b}}}{(1+e^{-2\frac{x-a}{2b}})^2}$$
Multiplicando por $\dfrac{1}{4b}$, temos:
$$\frac{1}{4b}\frac{4e^{-\frac{x-a}{b}}}{(1+e^{-\frac{x-a}{b}})^2} = \frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{b[1+exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)]^2} = f(x)$$

Provar que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade usando o conceito da secante.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4b} sech^2\left(\frac{x-a}{2b}\right) dx$$
faremos uma substituição para facilitar os cálculos.

$$u = \frac{x-a}{2b}$$
$$du = \frac{1}{2b}dx$$

Assim,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sech^2(u)}{2} du = \frac{1}{2}tgh(u) = \frac{1}{2}[1-(-1)] = 1$$

$tgh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}(e^{2t}-1)}{e^{-t}(e^{2t}+1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{2t}}}{1+\dfrac{1}{e^{2t}}} = 1$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t(e^{2t}-1)}{e^t(e^{2t}+1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = -1$$

Assim, pelo conceito da secante provamos que é uma função densidade de probabilidade.

6.16.2 Características

A distribuição logística é uma distribuição contínua definida nos números reais, com caudas pesadas assemelhando-se a distribuição normal, no seu formato, o parâmetro de formato deve ser maior que 0. Quando a distribuição apresenta $x = 0$ o gráfico comporta-se de forma simétrica. Alguns autores argumentam que a distribuição logística não se adequa para modelagem de dados de vida. No entanto, desde que a média da distribuição Logística seja elevada e que apresente valores pequenos no parâmetro de localização, essa distribuição pode ser utilizada para modelagem de dados de vida, sem haver problemas com o tempo de falha negativo.

A função de distribuição acumulada da Logística é um exemplo de famílias de funções logísticas. Pode ser escrita de duas formas, sendo a primeira

$$F(x) = \frac{1}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)} \quad I(x)_R$$

ou usando funções trigonométricas hiperbólicas

$$\frac{1}{2}\left[1 + tgh\left(\frac{-(x-a)}{b}\right)\right] \quad I(x)_R$$

Prova:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{-(t-a)}{b}}}{b[1+e^{\frac{-(t-a)}{b}}]^2}dt$$

para facilitar os calculos faremos substituições

$u = 1 + e\dfrac{-(t-a)}{b}$
$du = \dfrac{-1}{b}e^{\frac{-(t-a)}{b}}dx$

Agora, mudaremos os limites de integração para que seja possível realizar os cálculos corretamente.

$\lim_{t\to x} 1 + e^{\frac{-(t-a)}{b}} = 1 + e^{\frac{-(x-a)}{b}}$
$\lim_{t\to -\infty} 1 + e^{\frac{-(t-a)}{b}} = \infty$

Temos

$$\int_{\infty}^{1+e^{\frac{-(x-a)}{b}}} \frac{-1}{u^2}du = \int_{1+e^{\frac{-(x-a)}{b}}}^{\infty} \frac{1}{u^2}du = \frac{-1}{u} = \frac{1}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}$$

logo,

$$F(x) = \frac{1}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}$$

Sabendo que

$tgh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$, então

$$1+tgh(t)=1+\frac{e^t-e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\frac{e^t+e^{-t}+e^t-e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\frac{2e^t}{e^t(1+e^{-2t})}=\frac{2}{1+e^{-2t}},$$

tomando $t=\dfrac{x-a}{b}$, temos

$$tgh(t)\left(\frac{x-a}{b}\right)=\frac{2}{1+exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}$$

Assim, concluímos que

$$\frac{1}{2}\left[1+tgh\left(\frac{-(x-a)}{b}\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{2}{1+exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}=\frac{1}{1+exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}=F(x)$$

Prova

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{4b}sech^2\left(\dfrac{x-a}{2b}\right)dt$

$u=\dfrac{t-a}{2b}$

$du=\dfrac{1}{2b}$

Encontrando os novos limites de integração.

$lim_{t\to x}\dfrac{t-a}{2b}=\frac{x-a}{2b}$

$lim_{t\to -\infty}\dfrac{t-a}{2b}=-\infty$

Então,

$$\begin{aligned}
& -\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{2b}}\frac{1}{2}sech^2(u)du\\
= & \int_{\frac{x-a}{2b}}^{\infty}\frac{1}{2}sech^2(u)du\\
= & \frac{1}{2}tgh(u)\\
= & \frac{1}{2}\left(tgh\left(\frac{x-a}{2b}\right)+1\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to-\infty}tgh(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}(e^{2t-1})}{e^{-t}(e^{2t+1})}=-1$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[1+tgh\left(\frac{x-a}{2b}\right)\right]$$

Outro fato interessante é que a função densidade de probabilidade da distribuição logística pode ser reescrita usando sua função acumulada e sua função de sobrevivência.
Sabendo que $S(x) = 1 - F(x)$, então temos que $S(x)$ é

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 - \frac{1}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)} \\
&= \frac{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a-1}{b}\right)\right)}{b} 1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) \\
&= \frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}
\end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade da distribuição logística pode ser reescrita pelo produto de sua função acumulada pela função de sobrevivência, dividido por b.

$$f(x) = \frac{F(x)S(x)}{b}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b}F(x)S(x) \\
&= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}\right]\left[\frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}\right] \\
&= \frac{exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)}{b[1 + exp\left(-2\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)]^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

6.16.3 Distribuições Relacionadas

Essa distribuição possui semelhanças com outras distribuições, como:

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição Uniforme nos pontos 0 e 1, se fizermos $\alpha + \beta(log(X) - log(1 - X))$ então seguirá uma distribuição Logística com parâmetros α e β,respectivamente.
   $X \sim U(0, 1)$,

   $$\alpha + \beta(log(X) - log(1 - X)) \sim Logistica(\alpha, \beta)$$

2. Suponha que $X, Y \sim Gumbel(\alpha, \beta)$, então:

   $$X - Y \sim Logistica(0, \beta)$$

3. Se $X \sim Exp(1)$,então

$$\alpha + \beta \log\left(e^X - 1\right) \sim Logistica(\alpha, \beta).$$

E se $X, Y \sim Exp(1)$, então,

$$\alpha - \beta log\left(\frac{x}{Y}\right) \sim Logistica(\alpha, \beta).$$

6.16.4 Propriedades

6.16.5 Quantis

Os quantis são encontrados a partir de um conjunto de dados distribuidos de forma crescente, dispersos em quantidades iguais. O calculo dos quantis é feito a partir da distribuição acumulada da função, a seguir encontraremos uma função que calcula os quantis da distribuição Logística.

$$\begin{aligned}
F(x_q) &= q \\
\frac{1}{1 + e^{\frac{-(x_q - a)}{b}}} &= q \\
1 + e^{\frac{-(x_q - a)}{b}} &= \frac{1}{q} \\
\frac{-(x_q - a)}{b} &= \ln(\frac{1}{q} - 1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_q = a - b\ln(\frac{1}{q} - 1)}$$

Os quartis são valores que dividem o conjunto de dados em quatro partes iguais, sendo o primeiro quartil 25% dos valores observado, o segundo quartil é 50% dos valores observados, ou seja, a mediana, o ponto em que a distribuição é divida em duas partes iguais, e o terceiro quartil é 75% dos valores observados. Encontrando os quartis:

- Primeiro Quartil:

$$x_{q1} = a - b\ln\left(\frac{1}{0.25} - 1\right) = a - b\ln(3)$$

- Segundo Quartil ou Mediana:

$$x_{q2} = a - b\ln\left(\frac{1}{0.5} - 1\right) = a - b\ln(1) = a$$

- Terceiro Quartil:

$$x_{q3} = a - b\ln\left(\frac{1}{0.75} - 1\right) = a - b\ln(0.3) = a + b\ln(3)$$

6.16.6 Moda

A moda de uma distribuição é ponto onde apresenta o maior número de observações, ou seja, o valor máximo da distribuição. A moda é calculada através do logaritmo natural da sua função densidade $\ln f(x)$. Como $f(x) = \frac{1}{b}F(x)S(x)$, então

$$g(x) = \ln f(x) + \ln S(x) - \ln b$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{F(x)}F'(x) + \frac{1}{S(x)}S'(x) \\
&= \frac{f(x)}{F(x)} + \frac{[1 - F(x)]'}{1 - f(x)} \\
&= \frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{f(x)[1 - F(x)]}{F(x)[1 - F(x)]} - \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{f(x)[1 - F(x)] - f(x)F(x)}{F(x)[1 - F(x)]} \\
g'(x) &= \frac{f(x)[1 - 2F(x)]}{F(x)[1 - F(x)]}
\end{aligned}$$

Derivamos a função e igualamos a zero $g'(x) = 0$, fazemos isto para encontrar o ponto de máximo.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)[1 - 2F(x)]}{F(x)[1 - F(x)]} &= 0 \\
1 - 2F(x) &= 0 \\
F(x) &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1 + e^{-\frac{x-a}{b}}} &= \frac{1}{2} \\
1 + e^{-\frac{x-a}{b}} &= 2 \\
e^{-\frac{x-a}{b}} &= 1 \\
\frac{-(x - a)}{b} &= \ln(1) \\
x &= a
\end{aligned}$$

Concluímos que a mediana é o ponto máximo na distribuição logística.

Agora, iremos derivar outra vez, derivada segunda, para saber se a funçao é crescente ou decrescente, se a segunda derivada der negativo então é ponto de máximo caso contrário é ponto de mínimo.

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \left[\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x)}{[1-F(x)]}\right] \\
&= \left[\frac{f'(x)F(x) - f(x)F'(x)}{F(x)^2} - \frac{f'(x)[1-F(x)] - f(x)[1-F(x)]'}{[1-F(x)]^2}\right] \\
&= \left[\frac{f'(x)F(x) - f(x)^2}{F(x)^2} - \frac{f'(x) - f'(x)F(x) + f(x)^2}{[F(x)]^2}\right]
\end{aligned}$$

$F(x)$	=	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	=	$\frac{1}{b}F(x)S(x) = \frac{1}{b}$
$0.5[1-0.5]$	=	$\frac{0.25}{b} = \frac{1}{4b}$
$f'(x)$	=	0

Substituindo os valores na $g''(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \left[0 * \frac{1}{4b} - f^{(}x)\frac{1}{4} - 0 * \frac{1}{2} + f^2(x)\frac{1}{[1-a.5]^2}\right] \\
&= -4f^{(}x) - 4f^2(x) = -8f^{(}x) < 0 \\
g''(x) &< 0
\end{aligned}$$

Assim concluímos que a função é crescente e apresenta ponto de máximo.

6.16.7 Função Geradora de Momentos

Seja x uma variável aleátoria contínua com Distribuição Logística $X \sim$ Logística(a, b), sua função geradora de momentos é dada por

$$M_x(t) = e^{at}\pi bt \csc(\pi bt)$$

Prova:

$X \sim$ Logística(a, b)
$f(x) = \frac{e^{-x}}{[1+e^{-x}]^2}$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-x}}{[1+e^{-x}]^2}dx$$

$u = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
$du = -\frac{e^{-x}}{[1+e^{-x}]^2}$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
u + ue^{-x} &= e^{-x} \\
u &= e^{-x}(1-u) \\
e^{-x} &= \frac{u}{1+u}
\end{aligned}$$

Encontrando os novos limites de integração:

$\lim \to \infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} =$
$\lim \to -\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{-x}}+1} = 1$

Temos:

$$\int_1^0 \left(\frac{1+u}{u}\right)^t du = \int_0^1 (u+1)^t u^{-t} du = b(1-t, 1+t)$$

$$= \frac{\Gamma(1-t)\Gamma(1+t)}{\Gamma(1-t+1+t)} = t\Gamma(1-t)\Gamma(1+t)$$

De acordo com .... (preciso lembrar)

$$\Gamma(1-t)\Gamma(1+t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

Sabendo isso, tem-se:

$$t\Gamma(1-t)\Gamma(1+t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t}$$

6.16.8 Aplicações

Uma das aplicações dessa distribuição é em regressão logística, amplamente utilizada em ciências médicas e sociais. Essa distribuição apresenta semelhança com a distribuição Normal, porém possui caudas mais pesadas que é mais propício no uso de alguns modelos. Essa distribuição é utilizada, também, em hidrologia na análise de dados de precipitação de um rio.

6.16.9 Simulação

Para simular a Distribuição Logística utilizamos o Método da Transformação Inversa,que consiste em encontrar o função do quartil e simular uma distribuição a partir de uma distribuição Uniforme.

```
a=5
b=2
v=0
for(i in 1:10000){

  u=runif(1)
  v[i]=a+b*log(prod(u/(1-u)))
```

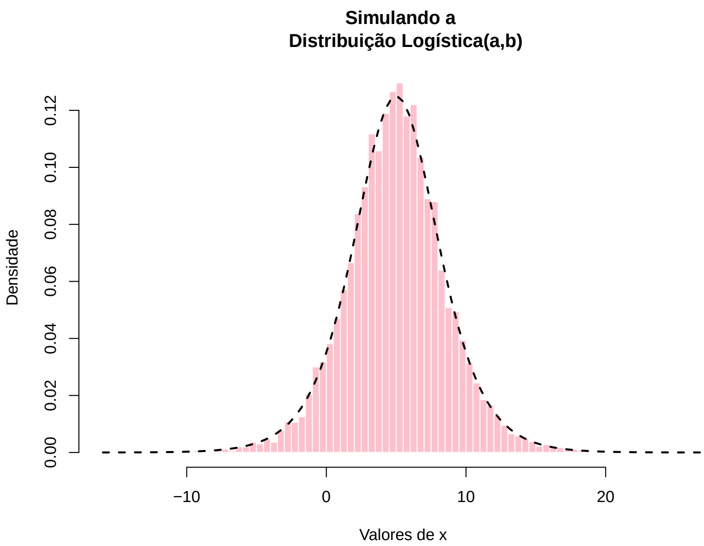


Figura 18: Simulação - Logística

```
}

hist(v,prob=T,col="pink",border="white",breaks=100,ylab="Densidade",
     main="Simulando a \n Distribuição Logística(a,b)",
     xlab="Valores de x")
curve(dlogis(x,5,2),add=T,col="black",lty=2,lwd=2)
```

6.17 Distribuição Pareto

6.17.1 Função desidade de Probabilidade

A f.d.p. da distribuição Pareto é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} I_{[a,\infty)}(x) \tag{79}$$

Para que (79) seja uma legítima f.d.p., deve atender as seguintes condições:

1. $f_X(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Demonstração. Como $\theta > 0$, $x \geq a$ e $a > 0$, e $f_X(x) \geq 0$. □

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

   Demonstração. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}dx = \theta a^\theta \int_a^{+\infty} x^{-(\theta+1)}dx = \theta a^\theta \frac{1}{x^\theta(-\theta)}\Bigg|_a^\infty =$
   $\displaystyle -0 - \left(-\frac{a^\theta}{a^\theta}\right) = 1$ □

Abaixo os gráficos da f.d.p. da distribuição Pareto:

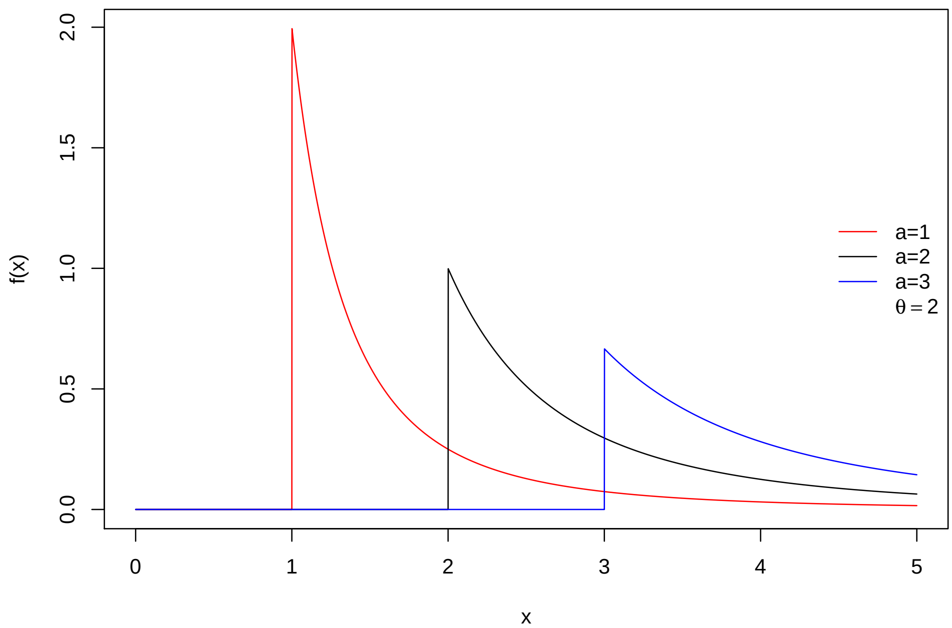


Figura 19: f.d.p. da distribuição Pareto variando o parametro a

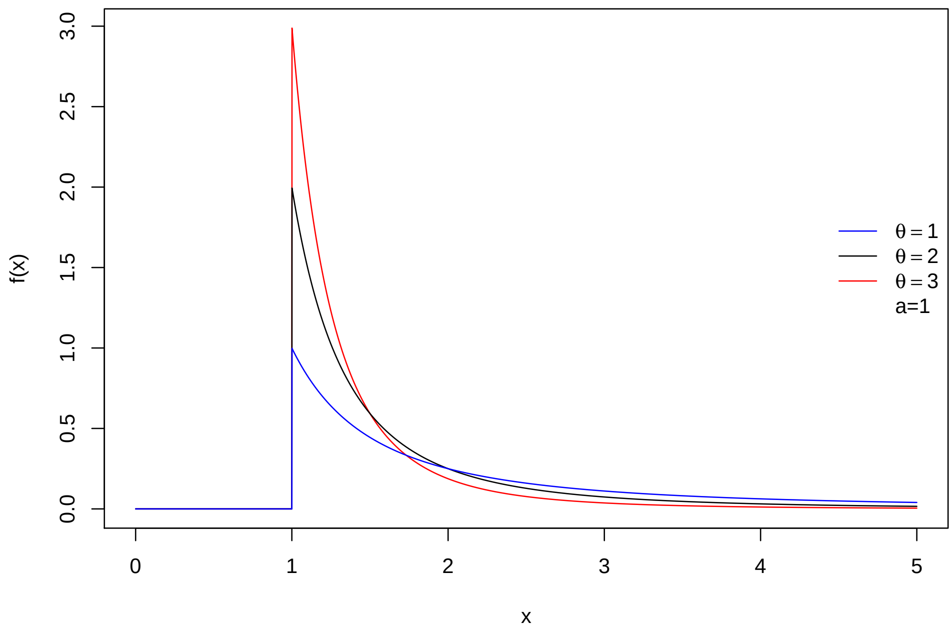


Figura 20: f.d.p. da distribuição Pareto variando o parametro θ

6.17.2 Função de distribuição Acumulada

A f.d.a. da distribuição Pareto é dada por:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\theta} \tag{80}$$

Demonstração. $F_X(x) = \int_a^x \frac{\theta a^\theta}{y^{\theta+1}} dy = \frac{\theta a^\theta}{y^\theta(-\theta)}\bigg|_a^x = -\frac{a^\theta}{x^\theta} + \frac{a^\theta}{a^\theta} = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\theta$ □

Na próxima página, os gráficos da f.d.a. da distribuição Pareto:

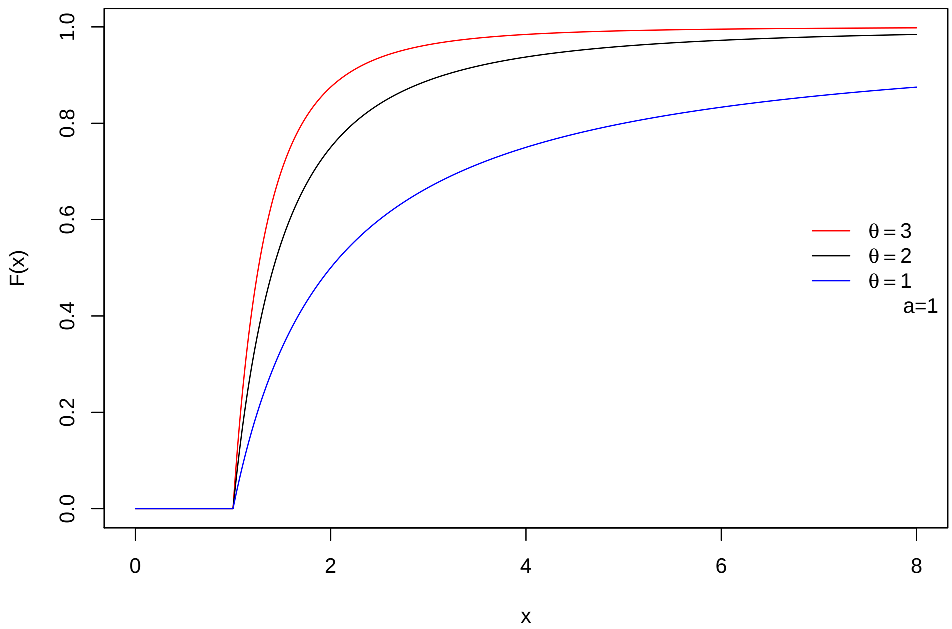


Figura 21: f.d.a. da distribuição Pareto variando o parametro θ

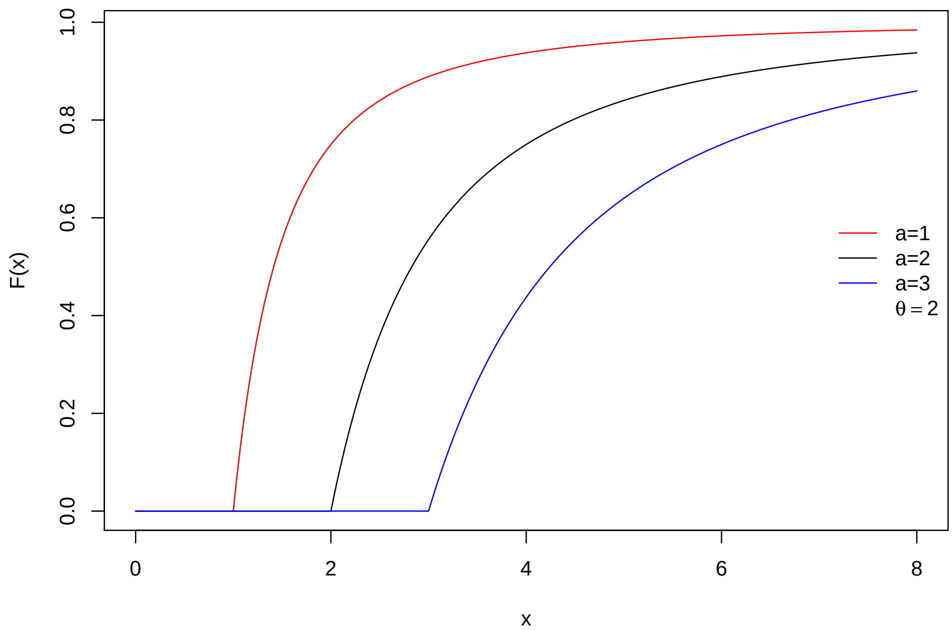


Figura 22: f.d.a. da distribuição Pareto variando o parametro a

6.17.3 Esperança e Variância

A esperança da distribuição Pareto é dada por:

$$E[X] = \int_a^{+\infty} x\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}dx = \int_a^{+\infty} \frac{\theta a^\theta}{x^\theta}dx = \left.\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta-1}(1-\theta)}\right|_a^{+\infty} = -\frac{\theta a^\theta}{a^{\theta-1}(1-\theta)} = \frac{\theta a}{\theta-1}$$

Para o cálculo da variância utilizaremos: $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.
$E[X^2] = \int_a^{+\infty} x^2\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}dx = \int_a^{+\infty} \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta-1}}dx = \left.\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta-2}(2-\theta)}\right|_a^{+\infty} = \frac{\theta a^2}{\theta-2}$ Portanto:

$$V[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = \frac{\theta a^2}{\theta-2}-\left(\frac{\theta a}{\theta-1}\right)^2 = \frac{a^2[\theta(\theta-1)^2-\theta^2(\theta-2)]}{(\theta-2)(\theta-1)^2} = \frac{\theta a^2}{(\theta-2)(\theta-1)^2}$$

6.17.4 Mediana

A mediana da distribuição Pareto é:

$$m = a\sqrt[\theta]{2}$$

Demonstração. $F(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{a}{m}\right)^\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^\theta = 2a^\theta \Leftrightarrow m = a\sqrt[\theta]{2}$ □

6.17.5 Moda

A moda é o valor de x que maximiza a f.d.p.. Dessa forma, a moda da distribuição Pareto é:
$max\left(\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}\right) = min\left(x^{\theta+1}\right) = min\left(x\right) = a$

6.17.6 O r-ésimo momento

$$E[X^r] = \int_a^{\infty} x^r\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}dx = \theta a^\theta \left.\frac{1}{(r-\theta)x^{\theta-r}}\right|_a^{+\infty} = -\frac{\theta a^\theta}{(r-\theta)a^{\theta-r}} = \frac{\theta a^r}{\theta-r}$$

6.17.7 Coeficiente de Assimetria

A assimetria da distribuição Pareto é:

$$\frac{2(1+\theta)}{\theta-3}\sqrt{\frac{\theta+2}{\theta}} \text{ para } \theta > 3.$$

Demonstração. Com $\mu = E[X]$ e $\sigma = V[X]^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3\right] &= \frac{E[X^3] - 3E[X]E[X^2] + 2(E[X])^3}{(V[X])^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\theta a^3}{\theta-3} - 3\frac{\theta a}{\theta-1}\frac{\theta a^2}{\theta-2} + 2\frac{\theta^3 a^3}{(\theta-1)^3}}{\left(\frac{\theta a^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{2a^3\theta(\theta+1)}{(\theta-1)^3(\theta-2)(\theta-3)} \frac{((\theta-1)^2(\theta-2))^{\frac{2}{3}}}{(a^2\theta)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(\theta+1)}{\theta-3}\sqrt{\frac{\theta-2}{\theta}}
\end{aligned}
$$

□

6.17.8 Coeficiente de Custose

$$\frac{6(\theta^3 - \theta^2 - 6\theta - 2)}{\theta(\theta-3)(\theta-4)} \text{ para } \theta > 4.$$

Demonstração. Com $\mu = E[X]$ e $\sigma = V[X]^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4\right] &= \frac{E[X^4] - 4E[X]E[X^3] + 6(E[X])^2E[X^2] - 3E([X])^4}{(V[X])^2} \\
&= \frac{\frac{\theta a^4}{\theta-4} - 4\frac{\theta a}{\theta-1}\frac{\theta a^3}{\theta-3} + 6\frac{\theta^2 a^2}{(\theta-1)^2}\frac{\theta a^2}{\theta-2} - 3\frac{\theta^4 a^4}{(\theta-1)^4}}{\left(\frac{\theta a^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}\right)^2} \\
&= \frac{3a^4\theta(3\theta^2+\theta+2)}{(\theta-1)^4(\theta-2)(\theta-3)(\theta-4)} \frac{(\theta-1)^4(\theta-2)^2}{a^4\theta^2} \\
&= \frac{3(3\theta^2+\theta+2)(\theta-2)}{\theta(\theta-3)(\theta-4)}
\end{aligned}
$$

□

6.17.9 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da distribuição pareto é dada por:

$$M_X(t) = E[E^{tx}] = \int_a^\infty e^{tx}\frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}dx$$

Fazendo a substituição $u = -tx$ e $du = -tdx$, para $t < 0$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \theta a^\theta \int_{-at}^\infty e^{-u}\frac{1}{\left(\frac{u}{-t}\right)^{\theta+1}}\frac{du}{-t} = \theta a^\theta \int_{-at}^\infty e^{-u}\frac{1}{u^{\theta+1}}\frac{(-t)^{\theta+1}}{-t}du \\
&= \theta(-at)^\theta \int_{-at}^\infty e^{-u}u^{-\theta-1}du = \theta(-at)^\theta\Gamma(-\theta,-at)
\end{aligned}
$$

$\Gamma(-\theta, -at)$ é uma integral que não pode ser resolvida. Porém, para obter a fgm da distribuição pareto computacionalmente é possível utilizando uma definição alternativa:

$$M_x(t) = \left(e^{tx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^{k+1}} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right) \Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty} \tag{81}$$

em que X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ é sua f.d.p.. Na ditribuição de Pareto, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^1 f(x)}{dx^1} &= -a^\theta \theta(\theta+1)x^{-(\theta+2)} \\
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= +a^\theta \theta(\theta+1)(\theta+2)x^{-(\theta+3)} \\
&\vdots \\
\frac{d^k f(x)}{dx^k} &= (-1)^k a^\theta \theta(\theta+1)(\theta+2)\ldots(\theta+k)x^{-(\theta+k+1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(\theta+k+1)}{\Gamma(\theta)} \frac{a^\theta}{x^{\theta+k+1}}, k = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Substituindo em (81):

$$M_x(t) = \left(e^{tx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{t^{k+1}} \frac{\Gamma(\theta+k+1)}{\Gamma(\theta)} \frac{a^\theta}{x^{\theta+k+1}} \right) \Bigg|_{x=a}^{x=+\infty} = -e^{at} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\theta+k+1)}{\Gamma(\theta)(ta)^{k+1}}$$

6.17.10 Função Característica

A função característica da distribuição pareto é dada por:

$$\phi_X(t) = E[E^{itx}] = \int_a^\infty e^{itx} \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} dx$$

Fazendo a substituição $u = -itx$ e $du = -itdx$, para $t < 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \theta a^\theta \int_{-ait}^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\left(\frac{u}{-it}\right)^{\theta+1}} \frac{du}{-it} = \theta a^\theta \int_{-ait}^{\infty} e^{-u} \frac{1}{u^{\theta+1}} \frac{(-it)^{\theta+1}}{-it} du \\
&= \theta(-ait)^\theta \int_{-ait}^{\infty} e^{-u} u^{-\theta-1} du = \theta(-ait)^\theta \Gamma(-\theta, -ait)
\end{aligned}$$

6.17.11 Códigos no R

Códigos dos gráficos da f.d.p.

```
#Declarando a f.d.p.
densidade = function(x,a,theta){
  densidade=0
  n=length(x)
  for(i in 1:n){
  densidade[i]=0
  if(x[i]>a){
```

```
    densidade[i] = (theta*a^(theta))/(x[i]^(theta+1))
  }
  }
  return(densidade)
}

# Gráficos
# 1° gráfico
x=seq(0,5,0.001)
plot(x,densidade(x,1,2), type = "l", col = "red", ylab = "f(x)",
 xlab = "x")
lines(x,densidade(x,2,2), col = "black",type='l')
lines(x,densidade(x,3,2), col = "blue",type='l')
legend("right",c("a=1","a=2","a=3",expression(theta==2)), bt="n",
 lty = 1,
col = c("red","black","blue","white"))

# 2° gráfico
plot(x,densidade(x,1,3), type = "l", col = "red", ylab = "f(x)",
 xlab = "x")
lines(x,densidade(x,1,2), col = "black")
lines(x,densidade(x,1,1), col = "blue")
legend("right",c(expression(theta==1),expression(theta==2),expression
 lty = 1,
col = c("blue","black","red","white"))
```

Código dos gráficos da f.d.a.:

```
# Declarando a f.d.a.
fda = function(x,a,theta){
  fda=0
  n=length(x)
  for(i in 1:n){
    fda[i]=0
    if(x[i]>a){
      aux=fda[i]
      fda[i] = 1-(a/x[i])^(theta)
      fda[i]=fda[i]+aux
    }
  }
  return(fda)
}
# 1° Gráfico
x=seq(0,5,0.01)
plot(x,fda(x,1,3), type = "l", col = "red", ylab = "F(x)",
 xlab = "x")
lines(x,fda(x,1,2), col = "black")
lines(x,fda(x,1,1), col = "blue")
legend("right",c(expression(theta==3),
```

```
 expression(theta==2),expression(theta==1),"a=1"),
  bt="n", lty = 1, col = c("red","black","blue","white"))

# 2° Gráfico
x=seq(0,8,0.01)
plot(x,fda(x,1,2), type = "l", col = "red", ylab = "F(x)",
 xlab = "x")
lines(x,fda(x,2,2), col = "black")
lines(x,fda(x,3,2), col = "blue")
legend("right",c("a=1","a=2","a=3",expression(theta==2)), bt="n",
 lty = 1, col = c("red","black","blue","white"))
```

6.17.12 Simulação

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X que segue uma distribuição Pareto de parametros a e θ. Para gerar esses valores utilizando o software R, o código abaixo utiliza o método da transformação inversa. Esse método consiste em gerar valores de uma variável aleatória utilizando a inversa da função densidade de probabilidade e valores aleatórios de uma uma distribuição uniforme no interlavo (0,1).
Nesse contexto, dada a f.d.a. da distribuição Pareto, tem-se que $F_X^{-1}(x) = \dfrac{a}{x^{\theta}}$ é a inversa da F_X.

```
a=3; theta=4 #Especificando os valores do parametro
n=1000 #Tamanho da amostra
u=runif(n) #Gerando n números aleatórios de uma uniforme no
 intervalo (0,1)
x=a/(u)^(1/theta) #Utilizando a inversa da f.d.a. para
 encontrar os valores aleatórios da variável de interesse
#Retirando os x<a, já que a distribuição pareto é definida para x>a
for(i in 1:n){
if(x[i]<a){
  x[i]=0
}}
#Gerando um histograma desses valores
hist(x,prob=T,col='deeppink',border='white',breaks=seq(0,20),
 main = NULL)
#Observando o comportamento da f.d.p.
lines(sort(x),densidade(sort(x),a,theta), col= "darkblue")
```

Dessa forma, obtemos:

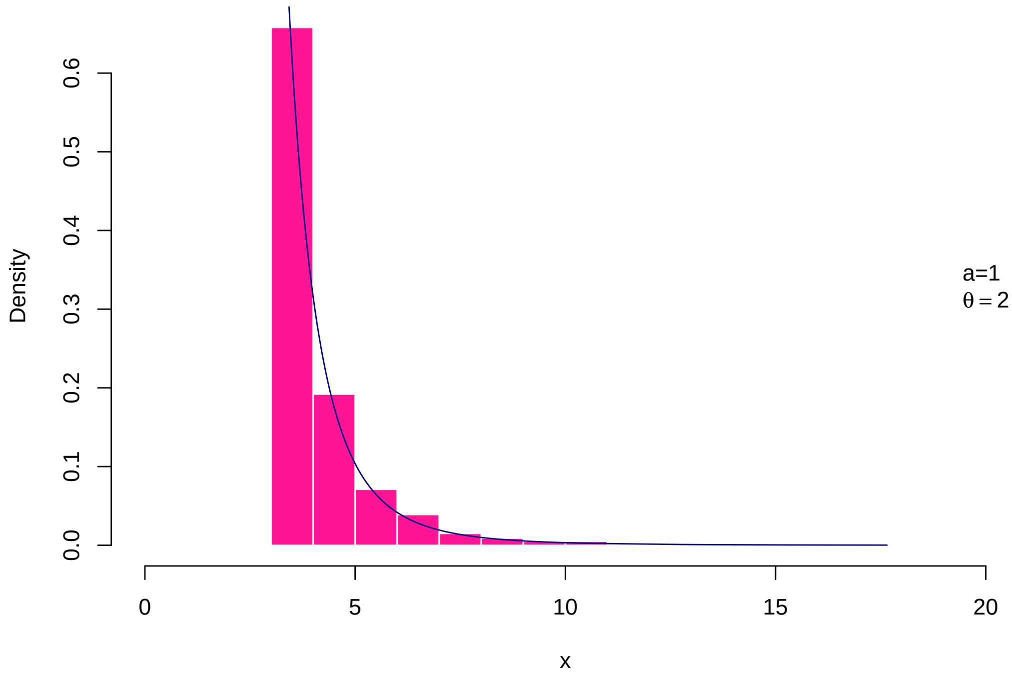


Figura 23: Histograma dos valores aleatórios e a curva da densidade

6.18 Distribuição Normal

6.18.1 História

A curva normal, também conhecida como a curva em forma de sino, tem uma história bastante longa e está ligada à história da descoberta das probabilidades em matemática, no século XVII, que surgiram para resolver inicialmente questões de apostas de jogos de azar. O responsável mais direto da curva normal foi Abraham de Moivre, matemático francês exilado na Inglaterra, que a definiu em 1730, dando sequência aos trabalhos de Jacob Bernoulli (teorema ou lei dos grandes números) e de seu sobrinho Nicolaus Bernoulli, matemáticos suíços. Moivre publicou seus trabalhos em 1733 na obra The doctrine of the chances. O sucesso da descoberta foi rápido e grandes nomes passaram a trabalhar sobre a curva normal, tais como Laplace, que em 1783 a utilizou para descrever a distribuição dos erros, e Gauss, que em 1809 a empregou para analisar dados astronômicos. Inclusive, a curva normal é chamada de distribuição de Gauss. Uma vez usada a distribuição normal os dados ficam mais fáceis de ser tratados, pois essa tem propriedades muito interessantes. Se duas variáveis aleatórias têm distribuição normal, sua soma também terá. Em geral, todo tipo de soma ou diferença de normais tem distribuição normal. Outro ponto que ressalta a importância da Distribuição Normal é que utilizando o teorema do limite central qualquer que seja a distribuição dos seus dados, se você tiver um número grande de observações, você pode utilizar a curva normal como uma aproximação adequada para a análise dos seus dados. Atualmente, a curva normal é de grande importância na ciência, porque a normalidade está presente em muitas, senão todas as medidas de situações físicas, biológicas e sociais, e é fundamental para a inferência estatística.

6.18.2 Função Densidade de Probabilidade

Uma variável aleatória contínua X segue uma distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua f.d.p é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big] I(x)_{(-\infty,\infty)},\ \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 > 0 \tag{82}$$

Comandos importantes da Distribuição Normal no R:

```
dnorm(x,media,desvio padrão) # Retorna a fdp da Distribuição
pnorm(q,media,desvio padrão) # Retorna a fda da Distribuição
qnorm(p,media,desvio padrão) # Retorna o quantil da Distribuição
rnorm(n,media,desvio padrão) # Retorna uma amostra de tamanho n
da Distribuição
```

Prova:

1. $f(x) \geq 0$

   Como,

$$exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big] \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big] \geq 0 \Longrightarrow f(x) \geq 0\ \forall_x \in \mathbb{N} \tag{83}$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Usando a transformação $z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Longrightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\big[-\frac{z^2}{2}\big]dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} exp\big[-\frac{z^2}{2}\big]dz$$

   Fazendo uma nova transformação:

$$u = \frac{z^2}{2} \Longrightarrow z = \sqrt{2u} \Longrightarrow du = zdz \Longrightarrow dz = z^{-1}du \Longrightarrow dz = (\sqrt{2}\sqrt{u})^{-1}du = \frac{u^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{2}}du$$

   Obtemos,

$$f(u) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} exp[-u]\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} exp[-u]du = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Nessa caso, como as proposições 1 e 2 são verdadeiras, a função(82) se trata de uma legítima f.d.p .

O gráfico a seguir retrata graficamente a aparência da Função Densidade de Probabilidade em uma variável aleatória X que segue a Distribuição Normal. Cada curva com sua respectiva média e variância.

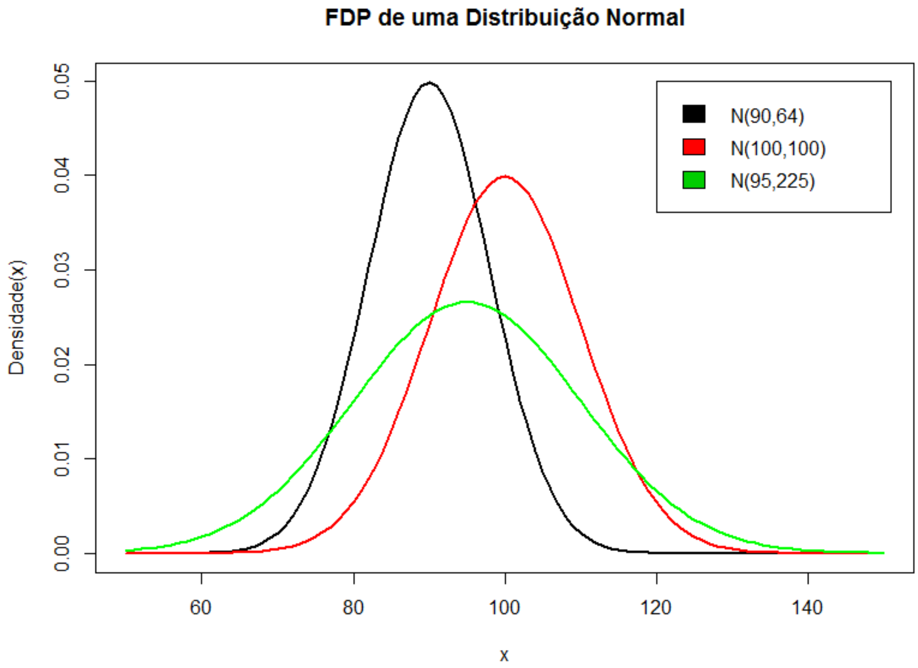


Figura 24: Funções Densidade de Probabilidade de uma Distribuição Normal.

Abaixo está indicado o código utilizado para a criação do gráfico anterior.

```
plot(function(x) dnorm(x,90,8),50,150,ylab="Densidade(x)",lwd=2,
     main="FDP de dados com Distribuição Normal")
plot(function(x) dnorm(x,100,10),50,150,add=T,col="red",lwd=2)
plot(function(x) dnorm(x,95,15),50,150,add=T,col="green",lwd=2)
legend(120,0.05,c("N(90,64)","N(100,100)","N(95,225)"),fill=1:3)
```

6.18.3 Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} exp\Big[- \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big] dt$$

Usanda a transformação $z = \frac{t-u}{\sigma} \Longrightarrow dz = \frac{dt}{\sigma}$

Logo,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-u}{\sigma}} exp\Big[\frac{-z^2}{2}\Big]dt$$

Nota: A integral acima não pode ser calculada exatamente e a probabilidade indicada só pode ser obtida aproximadamente por métodos numéricos.

É possível utilizando o Software R visualizar o comportamento e formato da curva dessa função com diferentes médias e variâncias.

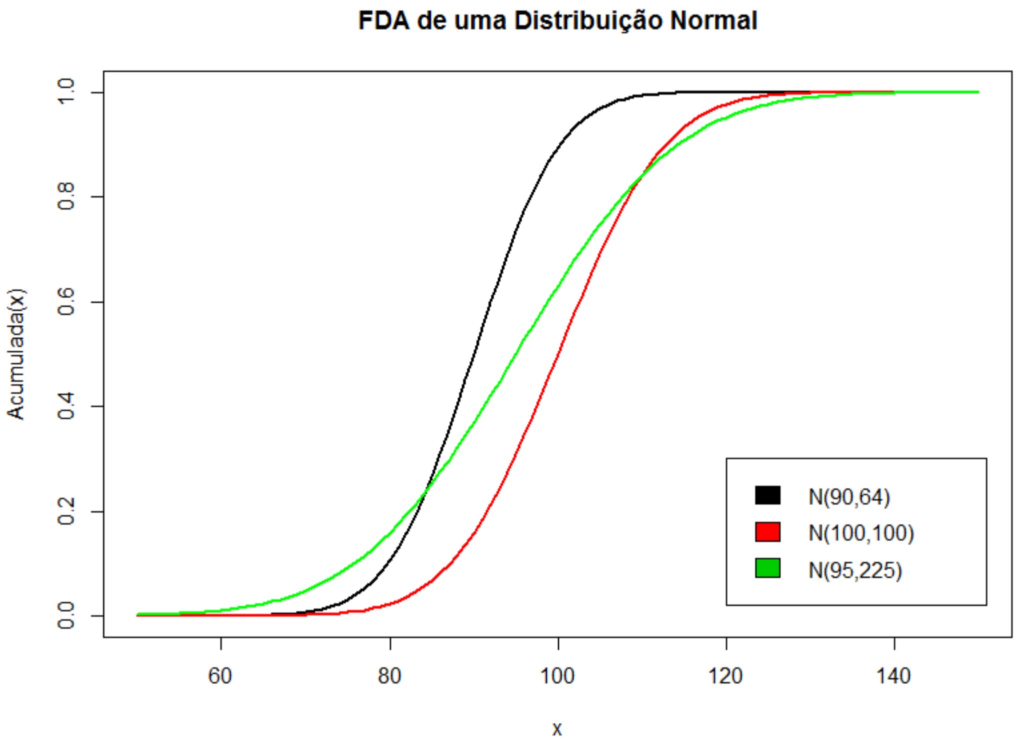


Figura 25: Funções de Distribuição Acumulada de uma Distribuição Normal.

O código a seguir foi o utilizado para a criação do gráfico anterior.

```
plot(function(x) pnorm(x,90,8),50,150,lwd=2, ylab="Acumulada(x)",
     main="FDA de dados com Distribuição Normal")
plot(function(x) pnorm(x,100,10),50,150,add=T,col="red",lwd=2)
plot(function(x) pnorm(x,95,15),50,150,add=T,col="green",lwd=2)
legend(120,0.3,c("N(90,64)","N(100,100)","N(95,225)"),fill=1:3)
```

6.18.4 Distribuição Normal Padronizada

Uma variável aleatória contínua Z segue uma distribuição normal padronizada com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ se sua f.d.p é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big[-\frac{x^2}{2}\Big] I(x)_{(-\infty,\infty)} \qquad (84)$$

Para obter tal distribuição quando se tem uma Normal diferente de $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, usa-se a transformação $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Prova:

$G_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z) = P(X \leq \mu + \sigma z) = F_X(\mu + \sigma z) \Longrightarrow$

$g(z) = G'_Z(z) = \sigma * f(\mu + \sigma z) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\Big[-\frac{z^2}{2}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big[-\frac{z^2}{2}\Big] I(z)_{(-\infty,\infty)}$

Assim, $Z \sim N(0,1)$.

No R:

Podemos visualizar no R que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Segue a baixo a linha de código:

```
integrate( function(x) dnorm(x,0,1),-Inf,Inf)$value
```

O gráfico a seguir retrata a aparência da Função Densidade de Probabilidade de uma variável aleatória X com Distribuição Normal Padrão.

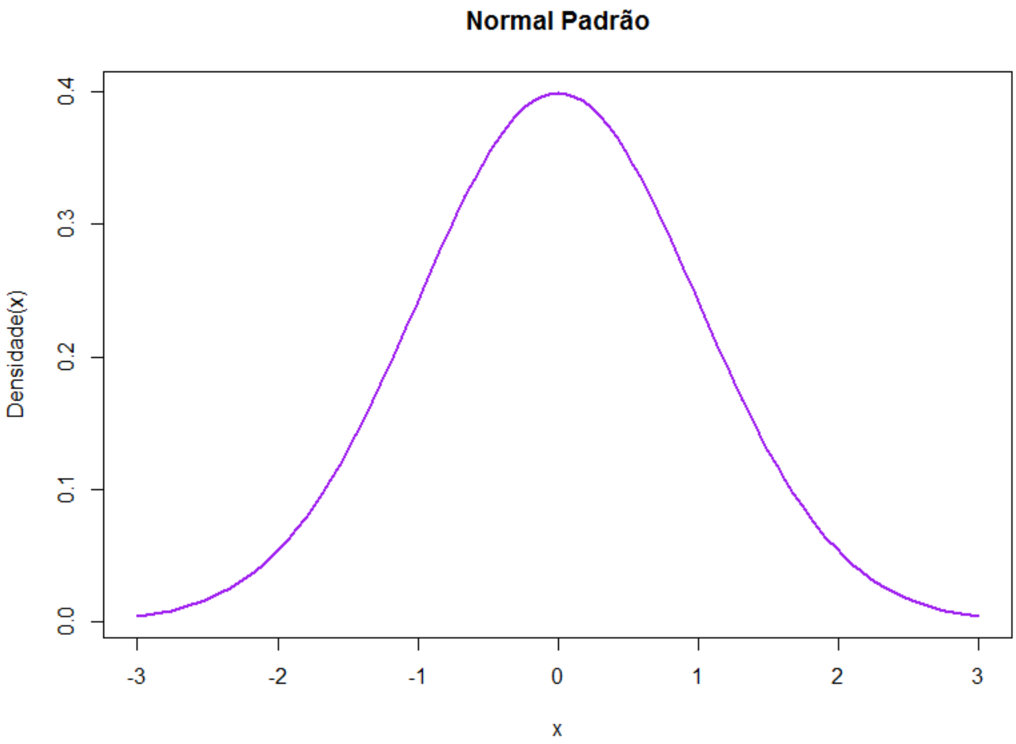


Figura 26: Função Densidade de Probabilidade padronizada.

Segue o código para a criação do gráfico de uma Normal Padronizada.

```
plot(dnorm,-3,3,ylab="Densidade(x)",main="Normal Padrão",col="purple"
,lwd=2)
```

6.18.5 R-ésimo momento central

O R-ésimo momento central é definido assim:

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^r] = \begin{cases} 0 & \text{se r é ímpar ;} \\ \frac{r!}{(\frac{r}{2})!}\frac{\sigma^r}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{se r é par .} \end{cases}$$

Prova: ...

6.18.6 Função geradora de momento

$$M_X(t) = exp\Big[t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\Big] \tag{85}$$

Prova:

Usando a substituição $X = \mu - Z\sigma$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(exp[Xt]) &= \mathbb{E}(exp[t\mu - tZ\sigma]) \\
&= \mathbb{E}(exp[t\mu]exp[tZ\sigma]) \\
&= \mathbb{E}(exp[t\mu])\mathbb{E}(exp[tZ\sigma]) \\
&= exp[t\mu]\mathbb{E}(exp[tZ\sigma]) \\
&= exp[t\mu]M_Z(t\sigma) \\
&= exp[t\mu]exp[\frac{t^2\sigma^2}{t^2}] \\
&= exp\Big[t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\Big].
\end{aligned}
$$

6.18.7 Esperança

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, sua esperança é igual a μ.

Prova:

Usanda a função geradora de momentos e sabendo que $\mathbb{E}(X) = M'_X(0)$:

$$M'_X(t) = (\mu + t\sigma^2)exp\Big[t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\Big]$$

Aplicando no ponto t=0, temos:

$$M'_X(0) = (\mu + 0\sigma^2)exp\Big[0\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 0^2\Big] = \mu \tag{86}$$

6.18.8 Variância

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, sua variância é igual a σ^2.

Prova:

Sabendo que a variância de uma distribuição é o segundo momento central.

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \Big(\frac{2!}{1}\Big)!\frac{\sigma^2}{2^1} \Longrightarrow Var(X) = \sigma^2 \tag{87}$$

6.18.9 Assimetria

A assimetria de uma distribuição pode ser encontrada calculando a razão entre o terceiro momento central e o segundo momento central elevado a três meios. Pelas características da distribuição normal, ela é uma distribuição simétrica, ou seja, seu coeficiente de assimetria é igual a 0. Com isso a média, moda e mediana da Normal são iguais.

Prova:

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^3]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^{\frac{3}{2}}}=0 \tag{88}$$

Pois no r-ésimo momento central do numerador r=3, sendo ímpar. Logo pela fórmula $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^3]=0$.

6.18.10 Curtose

A curtose de uma distribuição pode ser encontrada calculando a razão entre o quarto momento central e o quadrado do segundo momento central. Considerando a distribuição normal, o valor de sua curtose é 3, sendo denominada mesocúrtica.

Prova:

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^4]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]^2}=\frac{4!}{(\frac{4}{2})!}\frac{\sigma^4}{2^{\frac{4}{2}}}*\left(\frac{(\frac{2}{2})!}{2!}\frac{2^{\frac{2}{2}}}{\sigma^2}\right)^2=(4*3)\frac{\sigma^4}{4}*\left(\frac{1}{2}\frac{2}{\sigma^2}\right)^2=3\sigma^4*\frac{1}{\sigma^4}=3 \tag{89}$$

6.18.11 Simulação

No código abaixo foi usado o método da Aceitação-Rejeição para a geração de valores pseudo-aleatórios referentes a Distribuição Normal. Foi usada a Distribuição Half-Normal para a execução desse método.

```
N=10000 # Tamanho da minha amostra desejada
vetor=0 # Vetor que irá guardar minha amostra gerada

  c=sqrt(2/pi)*exp(1/2) # Máximo entre a razão das densidades
  for(i in 1:N){
    teste=F
    while(teste==F){
      u=runif(1)
      y=-log(u) # Amostra de tamanho 1 de uma Exp(1).
      u=runif(1)
```

```
      if(u <= 2*dnorm(y)/(c*dexp(y))){
        u=runif(1)
        if(u < 0.5){
          vetor[i]=-y
        }else{
          vetor[i]=y
        }
        teste=T
      }
    }
  }

hist(vetor,prob=T,main="Valores pseudo-aleatórios de uma \n
Distribuição Normal",
     col="violet",ylab="Densidade(x)")
plot(function(x) dnorm(x),-3,3,add=T,col="blue",lwd=2)
```

O histograma a seguir se refere aos valores pseudo-aleatórios e a linha azul se refere aos valores reais de uma Distribuição Normal Padrão.

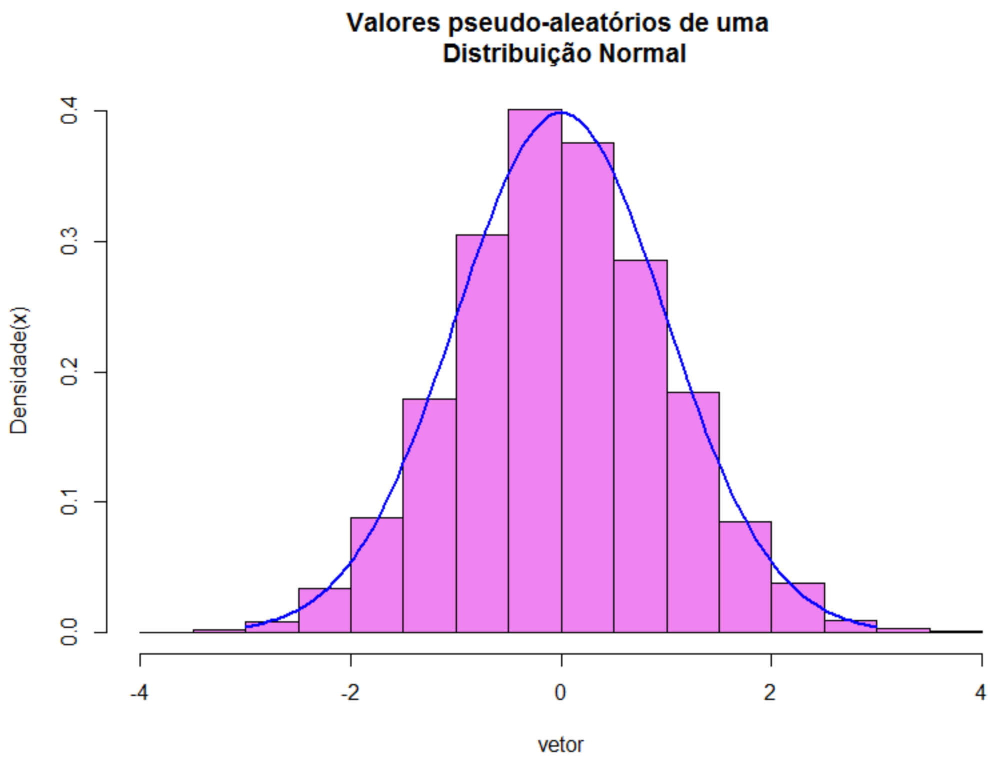


Figura 27: Comparação entre valores pseudo-aleatórios e reais de uma Distribuição Normal.

6.19 Distribuição LogNormal

6.19.1 Historico

A distrubuição Lognormal, também ocasionalmente chamada como a distribuição de Galton, após Fracis Galton, pode ser definida como a distribuição de uma variável aleatória cujos logaritmos são normalmente distribuidos, ou seja obdecem a distribuição normal. Uma variável aleátoria é lognormalmente distribuida toma apenas valores reais positivos. A distribuição tem sido associada a outros nomes, como McAlister, Gibrat e Codd-Douglas.

McAlister a apareceu como o primeiro a explicitar com mais detalhes a teoria da distribuição Lognormal.

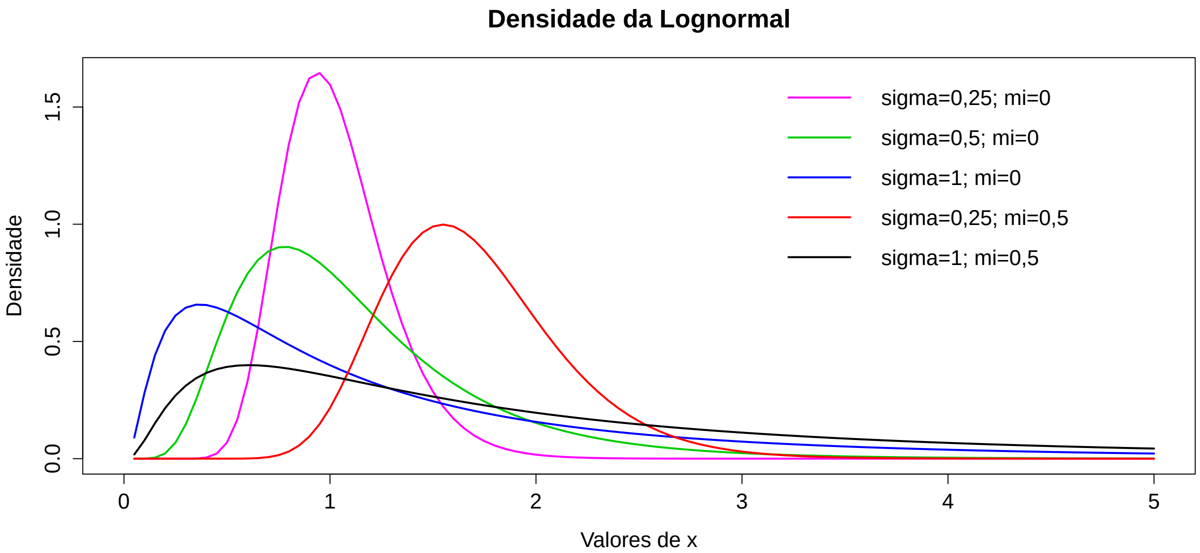
6.19.2 Parâmetros

Uma variável aleátoria , que segue uma distribuição lognormal possue parametros μ e σ^2, sendo μ a média e σ o desvio padrão.

6.19.3 Notação

Sendo Xuma variável aleátoria lognormalmente distribuida, nota-se que $X \sim$ lnN(μ, σ^2).

6.19.4 Função de Densidade de Probabilidade



Uma variável aleátoria continua X tem uma distribuição lognormal, se sua f.d.p. é da forma

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\dfrac{-(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, I_{(0,\infty)}(x) \tag{90}$$

Para que a função a função seja uma legitma f.d.p precisamos demonstra

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\dfrac{-(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1$$

Fazendo a transformação $Y = \text{ln}(x)$

Então se aplicarmos a transformação $y = ln(x)$
$x = e^y$
$dx = e^y\ dy$
$dx = x\ dy$
$dy = \dfrac{dx}{x}$

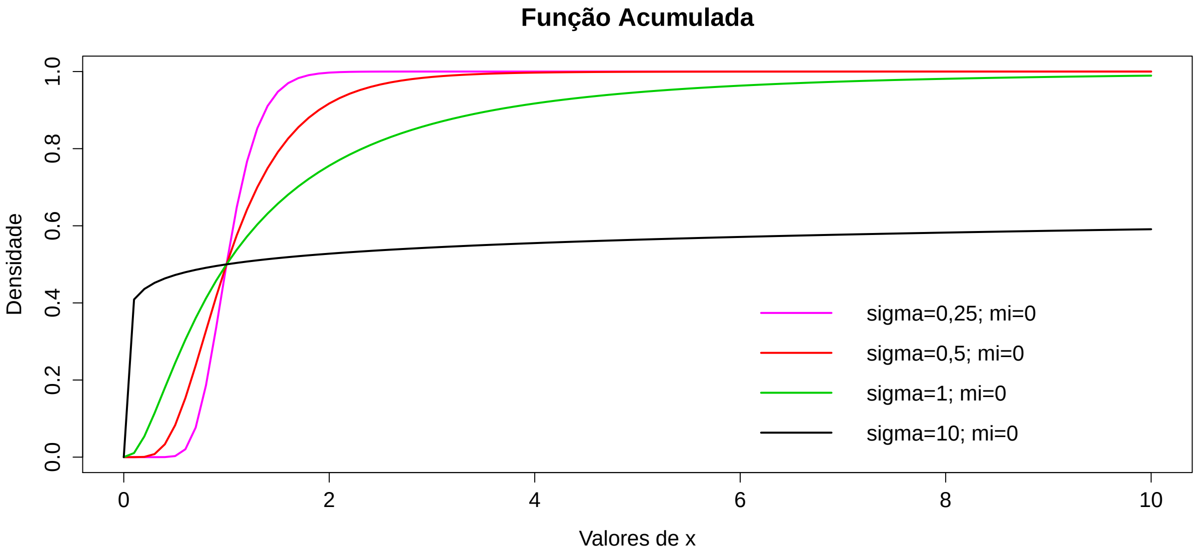
Quando realizamos a transformação de variável também é necessário modificar o suporte da função, sendo assim:

$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \text{ln}(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \text{ln}(x) = -\infty$

Sendo assim,
$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$
$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(y-\mu)}{2\sigma^2}} dy = 1$

então $Y \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$

6.19.5 Função de Distribuição Acumulada



$$F_x(x) = \phi[\frac{\text{ln}(x) - \mu}{\sigma}] \tag{91}$$

Demonstramos a função da seguinte forma

$x > 0$
$F(x) = P(X \leq x) = P(\text{ln}X \leq \text{ln}x) = P(Y \leq \text{ln}x)$

onde $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$F(x) = P(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{\text{ln}(x) - \mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{\text{ln}x - \mu}{\sigma})$

$F_x(x) = \phi[\frac{\text{ln}(x) - \mu}{\sigma}]$

6.19.6 R-ésimo momento em relação a origem

O cálculo do r-ésimo momento em relação a origem será de grande utilidade no cálculo da média, variancia, do coeficiente de assimetria e de curtose.

O r-ésimo momento em relação a origem da distribuição Lognormal tem a seguinte função

$$\mu_r' = E(x^r) = e^{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2}, \; r = 1, 2, 3... \tag{92}$$

Provamos a função da seguinte maneira

$E(x^r) = \int_0^\infty x^r \, \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{\frac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma}} dx$

Usando a mesma transformação de variáveis utilizadas para a f.d.p. assumimos $Y = \ln(x)$. Temos então,

$E(x^r) = \int_-^\infty \infty(e^y)^r \, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{\frac{-(y-\mu)^2}{\sigma}} dy$

assim, $E[e^y r]$ onde $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Então, $E(x^r) = M_y(r) = e^{r \ \mu \ +\frac{1}{2} \ r^2 \ \sigma^2}, r = 1, 2, 3...$

6.19.7 Média

Vamos particulariza $r = 1$ na função calculada anteriormente $E(x^r)$.

Substituindo,

$$E(x) = e^{\mu+\frac{1}{2}r^2\sigma^2} \qquad (93)$$

Assim obtemos a média de x.

Entretanto com intuito de facilitar posteriores cálculos
$E(x) = e^\mu e^{\frac{\sigma^2}{2}} = e^\mu\sqrt{e^{\sigma^2}} = e^\mu\sqrt{m}, \ \ m = e^{\sigma^2}$

Então em cálculos seguintes
$E(x) = e^\mu\sqrt{m}$

6.19.8 Variância

A variância da distribuição lognormal é definida por:

$$Var(x) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2} \qquad (94)$$

Demonstrando,
$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$
$Var(x) = e^{2\mu+2\sigma} - (e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2})^2$
$Var(x) = e^2\mu e^{2\sigma^2}$

com $m = e^{\sigma^2}$
$Var(x) = m^2e^{2\mu} - e^{2\mu}m = m(m-1)e^{2\mu}$

6.19.9 Função Geradora de Momentos

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} e^{\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}} \tag{95}$$

6.19.10 Moda

A moda é o valor máximo global da função geradora de probabilidade.

Nesta distribuição temos que a moda é

$$M_o = e^{\mu - \sigma^2} \tag{96}$$

Provamos a moda pelo seguinte processo

$f(x) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Estabeleço $g(x) = ln(f(x))$

$g(x) = -\sigma ln(\sqrt{2\pi}) - lnx - \dfrac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma}$

Derivando $g(x)$

$$\begin{gathered}
g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2(lnx-\mu)}{2x\sigma^2} = 0 \\
-\frac{1}{x} = \frac{2(lnx-\mu)}{2x\sigma^2} \\
\frac{lnx-\mu}{\sigma^2} = -1 \\
lnx - \mu = -\sigma \\
lnx = \mu - \sigma \\
x = e^{\mu-\sigma^2}
\end{gathered}$$

6.19.11 Assimetria

$$\alpha_3 = (m-1)^{\frac{1}{2}}(m+2), m = e^{\sigma^2} \tag{97}$$

Para calcularmos a assimetria é necessário calcular primeiramente o terceiro momento em relação a origem.

Agora utilizando a fórmula de calculada no r-ésimo momento, aplicado a r=3. Então,

$$E(x^3) = e^{3\mu+\frac{9\sigma^2}{2}} = e^3\mu e^{\frac{9\sigma}{2}} = e^{3\mu}(e^{\sigma^2})^{\frac{9}{2}} = m^{\frac{9}{2}}e^{3\mu} \qquad (98)$$

Calculando a assimetria

$$\mu_3 = E[x-E(x)]^3 = E(x^3) - 3E(x^2)E(x) + 3E(x)E^2(x) - E^3(x)$$
$$= E(x^3) - 3E(x^2)E(x) + 2E^3(x)$$
$$= m^{\frac{9}{2}}e^{3\mu} - 3(m^2e^{2\mu})(\sqrt{m}e^{\mu}) + 2m^{\frac{3}{2}}e^{3\mu}$$
$$= m^{\frac{3}{2}}(m^3 - 3m + 2)e^{3\mu}$$
$$ou$$
$$\mu_3 = m^{\frac{3}{2}}(m-1)^2(m+2)e^{3\mu}$$

Sendo assim,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$\alpha_3 = \frac{m^{\frac{3}{2}}(m-1)^2(m+2)e^{3\mu}}{m^{\frac{3}{2}}(m-1^{\frac{3}{2}}e^{3\mu})}$$
$$\alpha_3 = \frac{(m-1)^2(m+2)}{(m-1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\alpha_3 = (m-1)^{\frac{1}{2}}(m+2), m = e^{\sigma^2}$$

6.19.12 Curtose

$$\alpha_4 = (m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 3), m = e^{\sigma^2} \qquad (99)$$

Para calcularmos a assimetria é necessário calcular primeiramente o quarto momento em relação a origem.

Agora utilizando a fórmula de calculada no r-ésimo momento, aplicado a r=4. Então,

$$E(x^4) = e^{4\mu+8\sigma^2} = e^{4\mu}(e^{\sigma^2})^8 = m^8e^{4\mu}$$

Calculamos a curtose da seguinte maneira

$$\mu_4 = E(x - E(x))^4$$
$$= E(x^4) - 4E(x^3)E(x) + 6E(x^2)E^2(x) - 4E(x)E^3(x) + E^4(x)$$
$$= E(x^4) - 4E(x^3)E(x) + 6E(x^2)E^2(x) - 3E^4(x)$$
$$= m^8e^{4\mu} - 4m^{\frac{9}{2}}m^{\frac{1}{2}}e^{4\mu} + 6m^2me^{4\mu} - 3m^{\frac{4}{2}}e^{4\mu}$$
$$= (m^8 - 4m^5 + 6m^3 - 3m^2)e^{4\mu}$$
$$= m^2(m^6 - 4m^2 + 6m - 3)e^{4\mu}$$

ou

$$\mu_4 = m^2(m-1)^2(m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 3)e^{4\mu}$$

Sendo assim,

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$
$$\alpha_4 = \frac{m^2(m-1)^2(m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 3)e^{4\mu}}{m^2(m-1)^2e^{4\mu}}$$
$$\alpha_4 = (m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 3), m = e^{\sigma^2}$$

6.19.13 Comando no R

Comandos básicos

Para a distribuição lognormal no R temos os seguintes comandos básicos:

- Para calcular a densidade:

  dlnorm(x, meanlog = 0, sdlog = 1, log = FALSE)
- Para calcula a distribuição acumulada:

  plnorm(q, meanlog = 0, sdlog = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
- Para calcular a função de probabilidade:

  qlnorm(p, meanlog = 0, sdlog = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
- Para gerar valores aleátorios:

  rlnorm(n, meanlog = 0, sdlog = 1)

Onde,

- x,q são vetores dos quantis;
- p é o vetor das probabilidades;
- n número de valores aleátorios a serem gerados;
- log, log.p se TRUE as probabilidades p são dadas por log(p);
- lower.tail se TRUE, as probabilidades são $P[X \leq x]$, caso contrário, $P[X > x]$

Escrevendo comandos no R

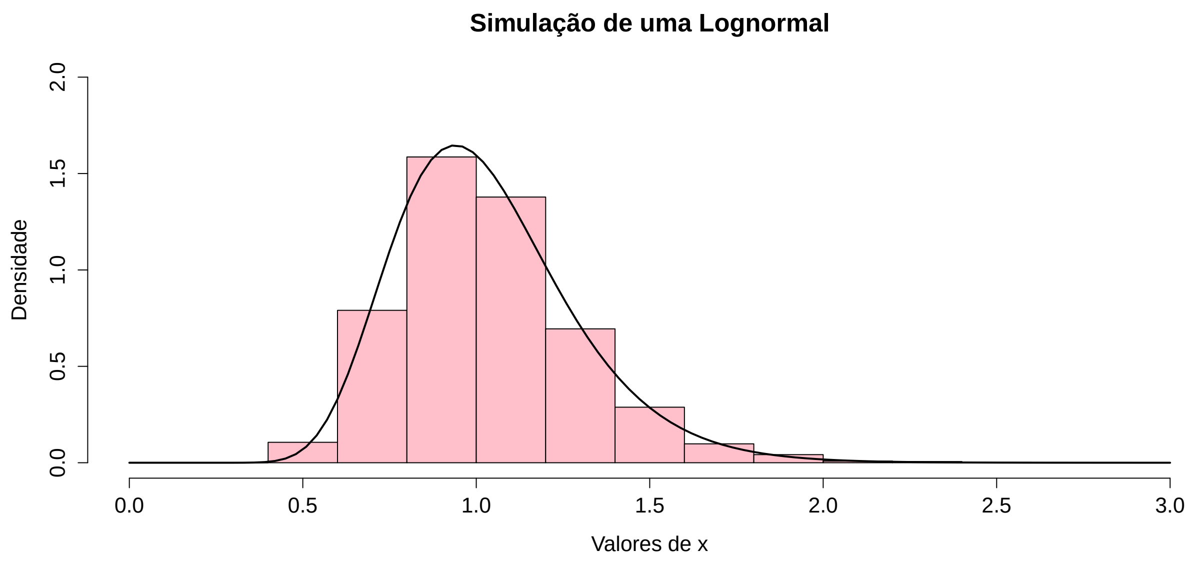
```
rm(list=ls())#comando para limpeza de objetos
f=function(x,sigma,mi){
  return((1/(x*sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-(log(x)-mi)^2)/(2*sigma^2)))
}
#Gráfico da densidade de uma Lognormal
sigma=0.25
mi=0
curve(f(x,sigma,mi),col=6,lwd=2,main="Densidade da Lognormal",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,5))

sigma=0.5
mi=0
curve(f(x,sigma,mi),col=3,lwd=2, add=TRUE)

sigma=1
mi=0
curve(f(x,sigma,mi),col=4,lwd=2, add=TRUE)

sigma=0.25
mi=0.5
curve(f(x,sigma,mi),col=2,lwd=2, add=TRUE)

sigma=1
mi=0.5
curve(f(x,sigma,mi),col=9,lwd=2, add=TRUE)

legend("topright", legend=c("sigma=0,25; mi=0","sigma=0,5; mi=0",
          "sigma=1; mi=0","sigma=0,25; mi=0,5", "sigma=1; mi=0,5"),
           col=c(6,3,4,2,9),lwd=2, bty='n')

#Função acumulada
F=function(x,sigma,mi){
  Z=(log(x)-mi)/sigma
  return(pnorm(Z))
}

#Gráfico da função acumulada
sigma=0.25
mi=0
curve(F(x,sigma,mi),col=6,lwd=2,main="Função Acumulada",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10))

sigma=0.5
mi=0
curve(F(x,sigma,mi),col=2,lwd=2,main="Função Acumulada",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10), add = TRUE)
```

```
sigma=1
mi=0
curve(F(x,sigma,mi),col=3,lwd=2,main="Função Acumulada",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10), add = TRUE)

sigma=10
mi=0
curve(F(x,sigma,mi),col=9,lwd=2,main="Função Acumulada",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10), add = TRUE)

legend("bottomright", legend=c("sigma=0,25; mi=0","sigma=0,5; mi=0",
                            "sigma=1; mi=0", "sigma=10; mi=0"),
                             col=c(6,2,3,9),lwd=2, bty='n')


#Gráfico Função de sobrevivencia
sigma=1
mi=0
curve(1-F(x,sigma,mi),col=6,lwd=2,main="Função de Sobrevivência",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10))

#Média
media=function(x,sigma,mi){
  return(exp(mi+(1/2)*sigma^2))
}
media(1,1,0)

#Variancia
Var=function(x,sigma,mi){
  return((exp(sigma^2)-1)*exp((2*mi)+(sigma^2)))
}
Var(1,1,0)

#Moda
moda=function(x,sigma,mi){
  return(exp(mi-(sigma^2)))
}
moda(1,1,0)
```

6.19.14 Simulação

```
l=10000 #tamanho da amostra
x=0
```

```
sigma=0.5
mi=0
i=1
for(i in 1:l){
  u=rnorm(1,mi, sigma)
  x[i]=exp(u)
}
x
hist(x,prob=T,main="Simulação de uma Lognormal",xlim=c(0,5),
 ylim=c(0,1),col="pink",xlab="Valores de x",ylab="Densidade")
s=function(x){dlnorm(x,mi,sigma)}
curve(s(x),lwd=2,add=T)
```



6.20 Distribuição F

6.20.1 Histórico

Sendo U uma chi-quadrado com n graus de liberdade e V uma chi-quadrado com d graus de liberdades, onde $n, d \in (0, \infty)$. Então,assumindo que U e V são independentes. Desta forma a distribuição de

$$X = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{d}}$$

é uma F com n graus de liberdade no numerador e d graus de liberdade no denominador.

A distribuição F foi obtida pela primeira vez por George Snedecor, e foi nomeada em homenagem a Sir Ronald Fisher.

6.20.2 Parâmetros

Uma variavel aleátoria, que segue a distribuição F possue parâmetro n e d postivos.

6.20.3 Notação

Sendo X uma variável aleátoria que segue a distribuição F, nota-se que $XF(n, d)$.

6.20.4 Função de Densidade de Probabilidade

Uma variável aleátoria continua X tem distribuição F, se sua f.d.p é da forma

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{n}{d} \frac{\left[\left(\frac{n}{d}\right) x\right]^{\frac{n}{2}-1}}{\left[1 + \left(\frac{n}{d}\right) x\right]^{\frac{n}{2}+\frac{d}{2}}} I_{(0,\infty)}(x) \tag{100}$$

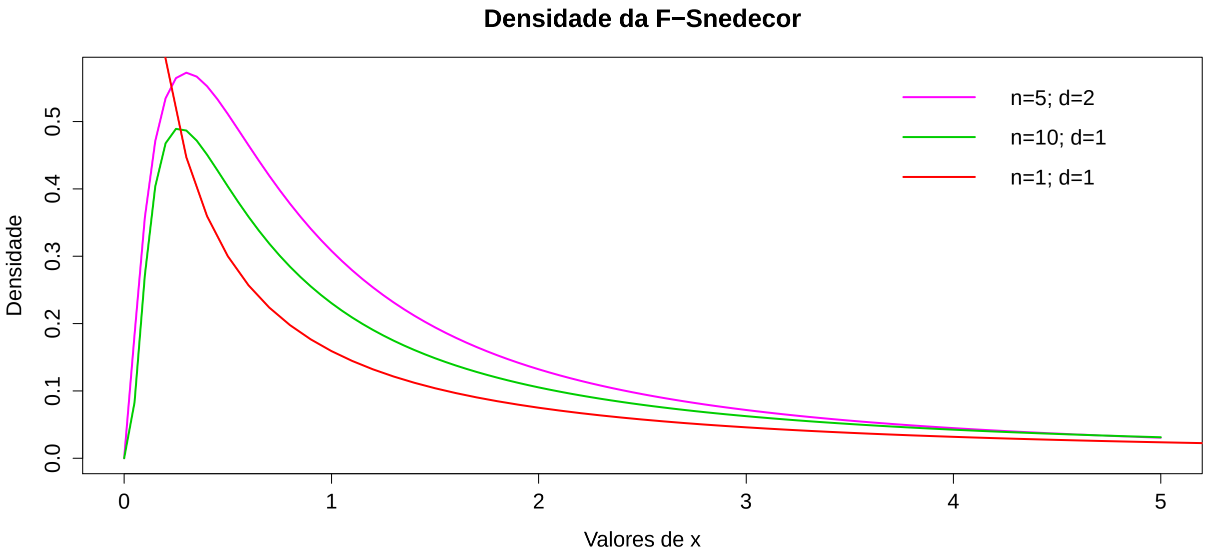
Onde Γ é a função gama.

Podemos escrevê-la também utilizando a função beta, apresentada em termos da função gama, desta forma

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}, a, b \in (0, \infty)$$

Sendo assim, a f.d.p é apresentada da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{d}{2})} \frac{n}{d} \frac{\left[\left(\frac{n}{d}\right) x\right]^{\frac{n}{2}-1}}{\left[1 + \left(\frac{n}{d}\right) x\right]^{\frac{n}{2}+\frac{d}{2}}} I_{(0,\infty)}(x) \tag{101}$$



6.20.5 Função de Distribuição acomulada

A função de distribuição de uma variável aleátoria X com distribuição F é

$$F_X(x) = \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{d}{2})} \int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} s^{\frac{n}{2}-1}(1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds \tag{102}$$

Onde a integral

$$\int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} s^{\frac{n}{2}-1}(1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds$$

sabemos que é a função Beta incompleta.

Prova:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

substituindo,$s = \frac{n}{d}t$

$$F_X(x) = c\int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} \left(\frac{d}{n}s\right)^{\frac{n}{2}-1} (1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds$$

$$F_X(x) = c\left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} s^{\frac{n}{2}-1}(1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds$$

temos que $c = \frac{(\frac{n}{d})^{\frac{n}{2}}}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{d}{2})}$. Substituindo,

$$F_X(x) = \frac{(\frac{n}{d})^{\frac{n}{2}}}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{d}{2})} \left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} s^{\frac{n}{2}-1}(1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{d}{2})} \int_{-\infty}^{\frac{nx}{d}} s^{\frac{n}{2}-1}(1+s)^{\frac{-n}{2}\frac{-d}{2}} ds$$

6.20.6 R-ésimo momento em relação a origem

O cálculo do r-ésimo momento em relação a origem será de grande utilidade no cálculo da média, variancia, do coeficiente de assimetria e de curtose.

É relevante apresentar os seguintes pontos

I. $r > 0$
II. $E(x^r) = \infty$ se $0 < d < 2r$
III. Se $d > 2r$, então o r-ésimo momento em relação a origem da distribuição F tem a seguinte função

$$\mu'_r = E(x^r) = \left(\frac{d}{n}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+r)\Gamma(\frac{d}{2}-r)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{d}{2})} \tag{103}$$

Prova:

Usando a formação da distribuição F, sendo U e V Chi-quadrados independentes, com n e d graus de liberdades respectivamente. Pela independência, faremos da seguinte forma

$$\mu'_r = E(x^r) = \left(\frac{d}{n}\right)^r E(U^r)E(V^{-r})$$

Recordamos que

$$E(U^r) = \frac{2^r\Gamma(\frac{n}{2}+r)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Por outro lado, $E(V^{-r}) = \infty$ se $\dfrac{d}{2} \leq r$ enquanto $\dfrac{d}{2} > r$,

$$E(V^{-r}) = \frac{2^{-r}\Gamma(\frac{d}{2}-r)}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

Então, substituindo temos

$$E(X^r) = \left(\frac{d}{n}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+r)\Gamma(\frac{d}{2}-r)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}$$

6.20.7 Função Geradora de Momentos

Uma variável aleatória X com distribuição F não possue função geradora de momentos. Isso é explicado porque quando uma variável aleatoria X possue função geradora de momentos então o r-ésimo momento de X existe e é finita para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Mas provamos no r-ésimo momento que só existe e é finito para $r < \frac{d}{2}$, então X não possui função geradora de momentos.

6.20.8 Média

A média de uma variável aleátoria X que possue uma distribução F é dada da seguinte forma

I. $E(X) = \infty$ se $0 < d \leq 2$

II. Se $d > 2$, então

$$E(x) = \frac{d}{d-2} \tag{104}$$

Prova:

Pelo mesmo principio que usamos para prova o r-ésimo momento, faremos também da seguinte forma. Sendo U e V Chi-quadrado independente, então

$$E(X) = \frac{d}{n}E(U)E(V^{-1})$$

Sendo, $E(U) = n$. De forma similar se $d \leq 2$, $E(V^{-1}) = \infty$ enquanto se $d > 2$,

$$E(V^{-1}) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{1}{d-2}$$

Então, para $d > 2$ substituindo,

$$E(X) = \frac{d}{n}n\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{1}{d-2} = \frac{d}{d-2}$$

6.20.9 Variância

A variâcia de uma variável aleátoria X que possue uma distribução F é dada da seguinte forma

I. $var(X)$ não está definida se $0 < d < 2$.

II. $var(X) = \infty$ se $2 < d \leq 4$

III. Se $d > 4$ então,

$$var(X) = 2\left(\frac{d}{d-2}\right)^2 \frac{n+d-2}{n(d-4)} \tag{105}$$

Prova:

Provaremos de maneira similar ao r-ésimo momento. Recordando que U e V são Chi-quadrados independentes. Então,

$$E(X^2) = \left(\frac{d}{n}\right)^2 E(U^2)E(V^{-2})$$

Sendo,

$$E(U^2) = 4\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = (n+2)n$$

De forma similar $d \leq 4$, $E(V^{-2}) = \infty$ enquanto se $d > 4$,

$$E(V^{-2}) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-2)}{4\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{1}{(d-2)(d-4)}$$

Então para $d > 4$

$$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$var(X) = \frac{(n+2)d^2}{n(d-2)(d-4)} - \left(\frac{d}{d-2}\right)^2$$

$$var(X) = 2\left(\frac{d}{d-2}\right)^2 \frac{n+d-2}{n(d-4)}$$

6.20.10 Assimetria

A assimetria de uma variável aleátoria X com distribuição F tem a seguinte função

Se $d > 6$,

$$\alpha_3 = \frac{(2n+d-2)\sqrt{8(d-4)}}{(d-6)\sqrt{n(n+d-2)}} \tag{106}$$

6.20.11 Curtose

A curtose de uma variável aleátoria X com distribuição F tem a seguinte função

Se $d > 8$,

$$\alpha_4 = 3 + 12\frac{n(5d-22)(n+d-2)+(d-4)(d-2)^2}{n(d-6)(d-8)(n+d-2)} \tag{107}$$

6.20.12 Comandos no R

Comandos básicos

Para a distribuição F no R temos os seguintes comandos básicos:

- Para calcular a densidade:

  df(x, df1, df2, ncp, log = FALSE)

- Para calcula a distribuição acumulada:

  pf(q, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

- Para calcular a função de probabilidade:

  qf(p, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

- Para gerar valores aleátorios:

  rf(n, df1, df2, ncp)

Onde,

- x,q são vetores dos quantis;
- p é o vetor das probabilidades;
- n número de valores aleátorios a serem gerados;
- df1,df2 são os grau de liberdade;
- ncp é o parâmetro de não centralidade. Se for omitido o centro F é assumido;
- log, log.p se TRUE as probabilidades p são dadas por log(p);
- lower.tail se TRUE, as probabilidades são $P[X \leq x]$, caso contrário, $P[X > x]$.

Escrevendo comandos no R

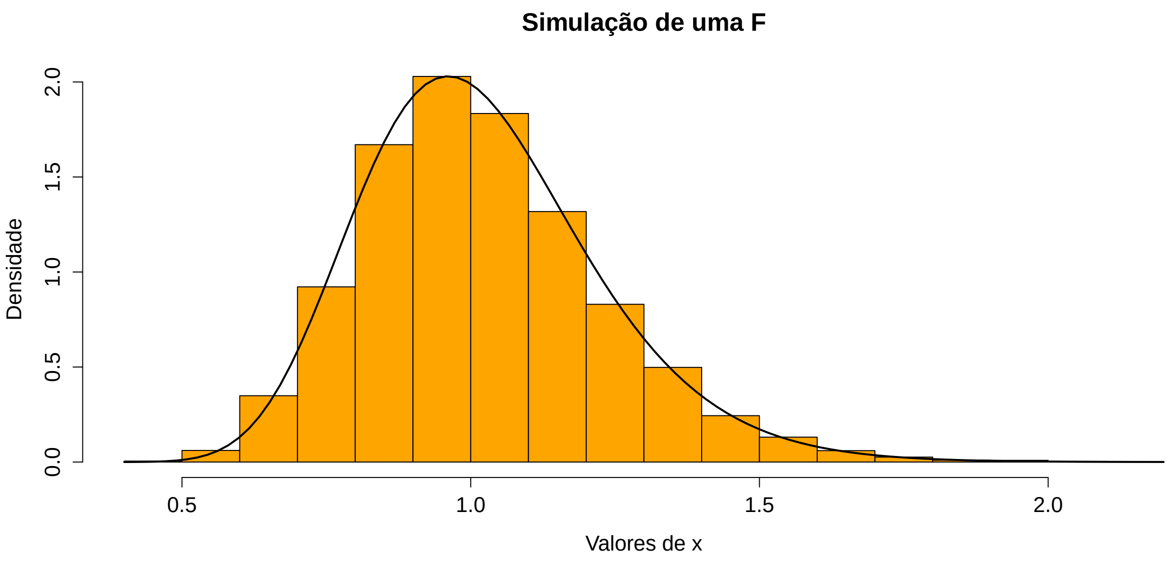
```
rm(list=ls())#comando para limpeza de objetos
#Função de Densidade de uma F

f=function(x,n,d){
  return((gamma((n/2)+(d/2))/(gamma(n/2)*gamma(d/2)))*(n/d)
        *((((n/d)*x)^((n/2)-1))/((1+(n/d)*x)^((n/2)+(d/2)))))
}
```

```
n=5
d=2
curve(f(x,n,d),col=6,lwd=2,main="Densidade da F-Snedecor",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,5))

n=10
d=1
curve(f(x,n,d),col=3,lwd=2,main="Densidade da F-Snedecor",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,5),add=TRUE)
n=1
d=1
curve(f(x,n,d),col=2,lwd=2,main="Densidade da F-Snedecor",
      xlab="Valores de x",ylab="Densidade",xlim=c(0,10),add=TRUE)

legend("topright", legend=c("n=5; d=2","n=10; d=1","n=1; d=1"
                           ) ,col=c(6,3,2),lwd=2, bty='n')

#Média
#d > 2

media=function(d){
d/(d-2)
  }
media(5)

#Variância
#d > 4
variancia=function(d,n){
   2*((d/d-2)^2) *(n+d-2/
  n*(d-4))

}
variancia(4,2)
```

6.20.13 Simulação

```
l=10000 #tamanho da amostra
x=0
n=100
d=100
i=1
for(i in 1:l){
  u=rchisq(1,n)
  v=rchisq(1,d)
  x[i]=(u/n)/(v/d)
}
```

```
x
hist(x,prob=T,main="Simulação de uma F",col="orange",
 xlab="Valores de x",ylab="Densidade")
s=function(x){df(x,n,d)}
curve(s(x),lwd=2,add=T)
```



6.21 Distribuição Cauchy

Definição. Seja X uma variável aleatória. Se sua função densidade de probabilidade f for escrita como

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\{1 + [(x-\alpha)/\beta]^2\}} I_{(-\infty,\infty)}(x) \tag{108}$$

com $-\infty < \alpha < \infty$ e $\beta > 0$ então $X \sim$ Cauchy(α, β).

Fato 1. Se $X \sim$ Cauchy(α, β), então f é legítima função densidade de probabilidade.

Prova:

(*i*) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}
-\infty < x < \infty \quad &\Leftrightarrow \quad -\infty < x - \alpha < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad -\infty < \frac{x-\alpha}{\beta} < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2 < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 + \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2 < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq \pi\beta\Big[1 + \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2\Big] < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \infty > \frac{1}{\pi\beta\Big[1 + \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2\Big]} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{\pi\beta\Big[1 + \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2\Big]} < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq f(x) < \infty
\end{aligned} \tag{109}$$

(*ii*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Faça

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\beta\Big[1 + \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)^2\Big]}\,dx \tag{110}$$

e agora faça a transformação $u = (x-\alpha)/\beta$, então

$$u = (x-\alpha)/\beta \Rightarrow du = dx/\beta$$

e

$$\begin{cases} \text{se} \quad x \to -\infty & \text{, então} \quad u \to -\infty \\ \text{se} \quad x \to +\infty & \text{, então} \quad u \to +\infty \end{cases}$$

substituindo em I

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \frac{2}{\pi} \text{arc tan}(\infty) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{111}$$

Apresentamos na figura o gráfico da densidade para certos valores dos parâmetros de locação *a* e escala *b*.

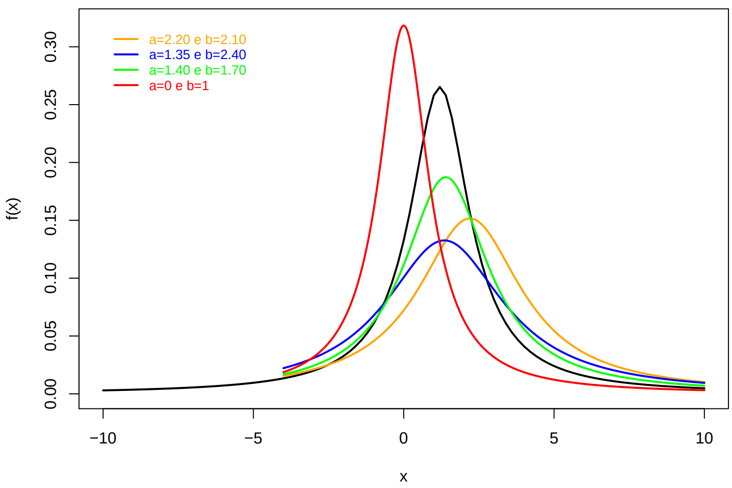


Figura 28: Densidade de Cauchy

Usa-se os seguintes comandos para obter a figura NUMERO DA FIGURA.

```
pdf('densidadecauchy.pdf',width=8,height=6,paper='special')
a=1.2;b=1.2 #inserir valores dos parˆametros
curve(dcauchy(x,location=a,scale=b),lwd=2,
main=NULL,
xlab="x",ylab="f(x)",xlim=c(-10,10),ylim=c(0,0.32))
a=c(2.2,1.35,1.4,0)
b=c(2.1,2.40,1.7,1)
cor=c("orange","blue","green","red")
```

```
for(i in 1:4){
x=seq(-4,10,0.01)
lines(x,dcauchy(x,location=a[i],scale=b[i]),
col=cor[i],lwd=2)
}
legend(-10, 0.32, c("a=2.20 e b=2.10", "a=1.35 e b=2.40",
"a=1.40 e b=1.70","a=0 e b=1"),
col =c("orange","blue","green","red"),
lty = c(1, 1, 1,1),lwd=c(2,2,2,2),
text.col =c("orange","blue","green","red"),bt='n',cex=0.8)

dev.off()
```

Fato 2. Se $X \sim$ Cauchy(α, β), então a função de distribuição acumulada F_X é

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\beta\Big[1+\Big(\dfrac{t-\alpha}{\beta}\Big)^2\Big]}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{|(x-\alpha)/\beta|} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du \quad \text{(Por que?)} \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du + \int_{0}^{|(x-\alpha)/\beta|} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du \\
&= \frac{1}{2} + \int_{0}^{|(x-\alpha)/\beta|} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du \quad \text{(Por que?)} \\
&= \frac{1}{2} + \int_{0}^{(x-\alpha)/\beta} \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arc tan}\Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big) \qquad (112)
\end{aligned}$$

Fato 3. Se $X \sim$ Cauchy $(0,1)$, então $Y = 1/X \sim$ Cauchy $(0,1)$.
Prova:

$$\begin{aligned}
G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\
&= P[1/X \geq y] \\
&= 1 - F_X(1/y) \qquad (113)
\end{aligned}$$

Derivando $G_Y(y)$ em relação a y, obtemos

$$\begin{aligned}
G'_Y(y) &= [1 - F_X(1/y)]' \\
&= \frac{1}{y^2}\,\frac{1}{\pi[1+(1/y)^2]} \\
&= \frac{1}{y^2\pi}\,\frac{y^2}{1+y^2} \\
&= \frac{1}{\pi(1+y^2)} \qquad (114)
\end{aligned}$$

Assim, provamos que $Y \sim$ Cauchy$(0, 1)$. A seguir um gráfico para a função de distribuição acumulada para certos valores dos parâmetros *a* e *b*.

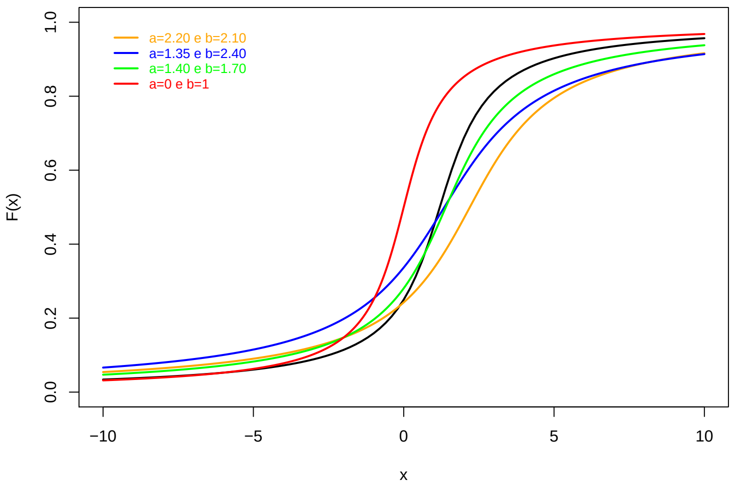


Figura 29: Gráfico da função de distribuição acumulada para alguns valores dos parâmetros

A distribuição Cauchy é um importante exemplo devido sua patologia se comparada com a distribuição normal como exemplo. Graficamente, é perceptível uma semelhança com a distribuição normal padrão e a cauchy padrão mas o detalhe está em suas caudas mais pesadas. Na distribuição Cauchy, são indefinidas as características como média, variância, k-ésimo momento e os coeficientes de curtose e assimetria. O significado prático disso é que se recolhermos 10000 amostra ou 5 amostras, as estimativas para média e variância não são significativas quanto ao número de amostras recolhido.

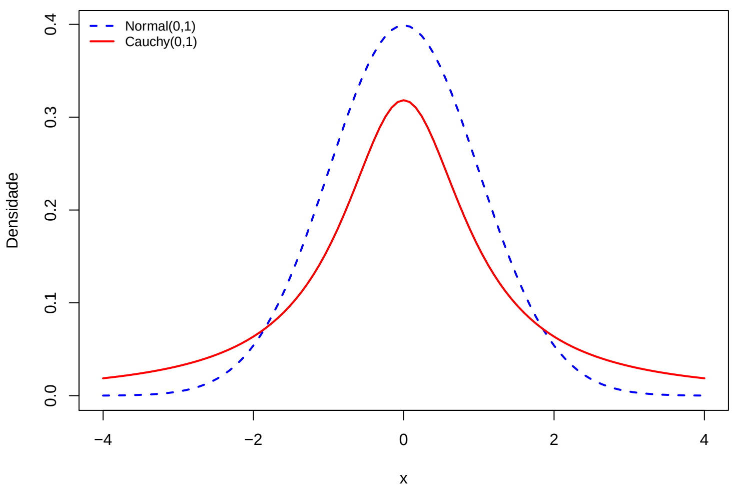


Figura 30: Comparação das densidades

```
pdf('acumuladacauchy.pdf',width=8,height=6,paper='special')
a=1.2;b=1.2 #inserir valores dos parâmetros
curve(pcauchy(x,location=a,scale=b),
xlim=c(-10,10),lwd=2,
main=NULL,
xla="x",ylab="F(x)",ylim=c(0,1))
a=c(2.2,1.35,1.4,0)
b=c(2.1,2.40,1.7,1)
cor=c("orange","blue","green","red")
for(i in 1:4){
x=seq(-10,10,0.01)
lines(x,pcauchy(x,location=a[i],scale=b[i]),
col=cor[i],lwd=2)
}
legend(-10, 1, c("a=2.20 e b=2.10", "a=1.35 e b=2.40",
"a=1.40 e b=1.70","a=0 e b=1"),
col =c("orange","blue","green","red")
,lty = c(1, 1, 1,1),lwd=c(2,2,2,2),
text.col = c("orange","blue","green","red"),
bt='n',cex=0.8)
dev.off()
```

Fato 4. Se $X \sim$ Cauchy$(0, \beta)$, então $Y = 1/X \sim$ Cauchy$(0, 1/\beta)$.

Prova: Usando o resultado anterior (numero do resultado) podemos derivar $G_Y(y)$ em relação a y, para obter

$$\begin{aligned} G'_Y(y) &= [1 - F_X(1/y)]' \\ &= \frac{1}{y^2}\frac{1}{\pi\beta[1 + (1/y\beta)^2]} \\ &= \frac{1}{y^2\pi\beta}\frac{y^2\beta^2}{1 + y^2\beta^2} \\ &= \frac{\beta}{\pi(1 + y^2\beta^2)} \end{aligned} \tag{115}$$

Assim provamos que se $X \sim$ Cauchy$(0, \beta)$, então $Y = 1/X \sim$ Cauchy$(0, 1/\beta)$.

Fato 5. Se $X \sim$ Cauchy(α, β), então o q-ésimo quantil é

$$x_q = \alpha + \beta \tan \pi(q - 0.5), \quad \text{onde} \quad q = F(x_q). \tag{116}$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
F(x_q) = q \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arc tan}\Big(\frac{x_q - \alpha}{\beta}\Big) = q \\
&\Leftrightarrow \quad \text{arc tan}\Big(\frac{x_q - \alpha}{\beta}\Big) = \pi(q - 0.5) \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\frac{x_q - \alpha}{\beta}\Big) = \tan \pi(q - 0.5) \\
&\Leftrightarrow \quad x_q = \alpha + \beta \tan \pi(q - 0.5) \qquad (117)
\end{aligned}
$$

Fato 6. Se $X \sim$ Cauchy(α, β), então $m = med = \alpha$, onde m é a moda e med é a mediana.

Prova:

(i) mediana $med = x_{0.5}$

$$
\begin{aligned}
F(x_{0.5}) = 0.5 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arc tan}\Big(\frac{x_{0.5} - \alpha}{\beta}\Big) = 0.5 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\,\text{arc tan}\Big(\frac{x_{0.5} - \alpha}{\beta}\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{arc tan}\Big(\frac{x_{0.5} - \alpha}{\beta}\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\frac{x_{0.5} - \alpha}{\beta}\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_{0.5} = \alpha \qquad (118)
\end{aligned}
$$

(ii) valor modal $m = x_{max}$
Primeiramente, note que $g(x) = \log f(x)$ tem ponto de máximo igual a f, pois,

$$
g(x) = \log f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.
$$

Portanto,

$$
g(x) = \log f(x) = -\log\{1 + [(x - \alpha)/\beta)]^2\}
$$

então

$$
g'(x) = \frac{-2\Big(\frac{x - \alpha}{\beta^2}\Big)}{1 + \Big(\frac{x - \alpha}{\beta^2}\Big)^2}.
$$

Para encontrar o valor que maximiza basta igualar a zero g', daí obtemos

$$
\begin{aligned}
-2\Big(\frac{x_{max} - \alpha}{\beta^2}\Big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{max} - \alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_{max} = \alpha \qquad (119)
\end{aligned}
$$

De (estrela) e (estrela) provamos que $m = med = \alpha$.

Fato 7. Se $X \sim$ Cauchy$(0,1)$, então $Y = \alpha + \beta X \sim$ Cauchy(α, β).
Prova:

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[\alpha + \beta X \leq y] \\ &= P[X \leq (y-\alpha)/\beta] \\ &= F_X((y-\alpha)/\beta) \end{aligned} \tag{120}$$

Derivando em relação a y obtemos

$$\begin{aligned} G'_Y(y) &= \Big(\frac{y-\alpha}{\beta}\Big)' f_X\Big(\frac{y-\alpha}{\beta}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi\beta\{1 + [(y-\alpha)/\beta]^2\}} \end{aligned} \tag{121}$$

Fato 8. Se $X \sim$ Cauchy(α, β), então $Y = (X-\alpha)/\beta \sim$ Cauchy$(0,1)$.
Prova:

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[(X-\alpha)/\beta \leq y] \\ &= P[X \leq \beta y + \alpha] \\ &= F_X(\beta y + \alpha) \end{aligned} \tag{122}$$

Derivando em relação a y obtemos

$$\begin{aligned} G'_Y(y) &= (\beta y + \alpha)' f_X(\beta y + \alpha) \\ &= \frac{1}{\pi(1+y^2)} \end{aligned} \tag{123}$$

6.21.1 Simulação

Vimos anteriormente algumas técnicas de simulação para variáveis aleatórias. Vamos simular a Cauchy usando o método da transformação inversa. Logo em seguida apresentamos um alternativo modo de simular uma cauchy padrão e o uso direto no R.

Algoritmo 1.
1º passo: Gere U, com U um número entre 0 e 1;
2º passo: Faça $X = \alpha + \beta \tan \pi(U - 0.5)$

Algoritmo 2.
1º passo: Gere n_1 e n_2 duas amostras aleatórias de $X \sim$ N(0,1);
2º passo: Faça $Y = \dfrac{n_1}{n_2}$.

No R, podemos gerar amostras da Cauchy de parâmetros α e β simplesmente usando a função "rcauchy". Você pode ler mais sobre a função usando o help(rcauchy).

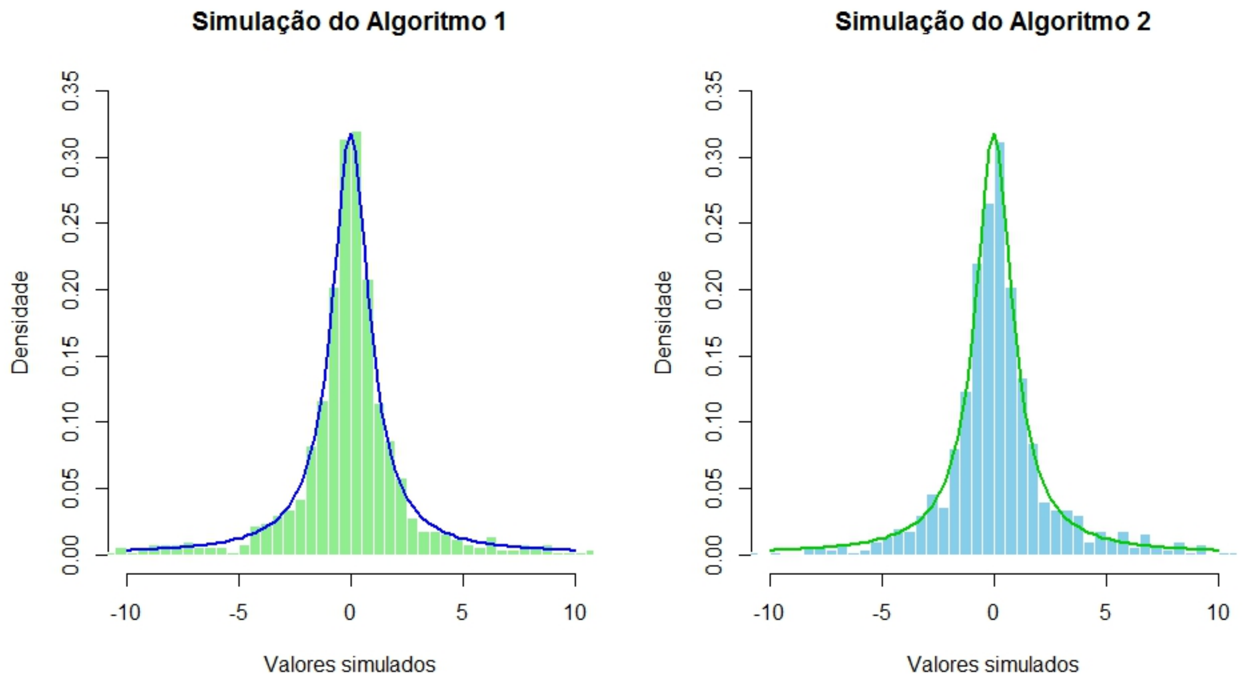


Figura 31: Algoritmo 1 vs Algoritmo 2

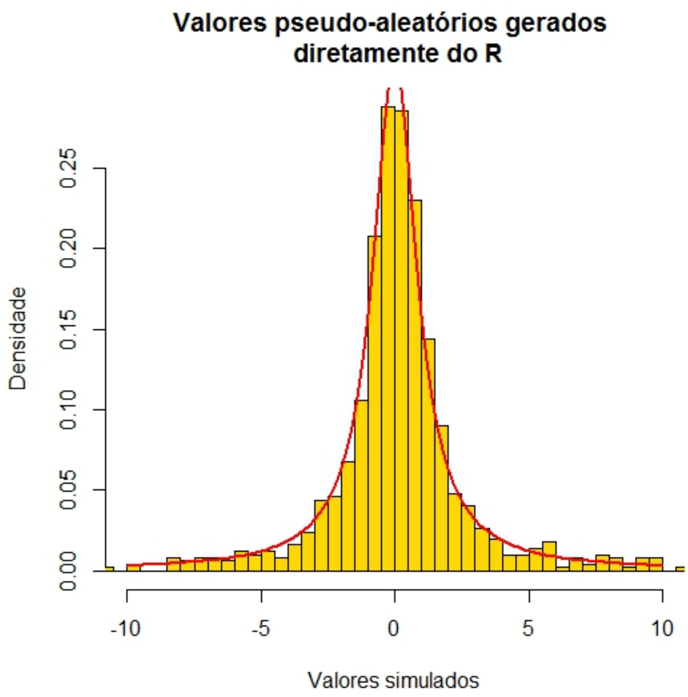


Figura 32: Usando a função rcauchy

6.21.2 *Complementar: Função Característica*

Definição. Seja X uma variável aletória. A função característica de X é a função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(t) = \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \tag{124}$$

6.22 Distribuição Gumbel

Seja X uma variável aleatória contínua. Seja f sua função densidade de probabilidade. Escrevemos

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\, exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\, exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}\, I_{\mathbb{R}}(x) \tag{125}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$ assim X é dita possuir distribuição Gumbel, com parâmetros α e β, e denotamos $X \sim$ Gumbel(α, β). Nas figuras 7 e 8, esboçamos para alguns valores de α e β a densidade.

Fato 1: f é legítima densidade.

PROVA:

Note que

$$\begin{aligned}
-\infty < x < +\infty &\Leftrightarrow -\infty < \frac{x-\alpha}{\beta} < +\infty \\
&\Leftrightarrow +\infty > -\frac{x-\alpha}{\beta} > -\infty \\
&\Leftrightarrow -\infty < -\frac{x-\alpha}{\beta} < +\infty \\
&\Leftrightarrow 0 < exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} < +\infty \\
&\Leftrightarrow 0 > -exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} > -\infty \\
&\Leftrightarrow 0 < exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\, exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} < exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\beta}\, exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\, exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} < \frac{1}{\beta}\, exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} \\
&\Leftrightarrow 0 < f(x) < +\infty
\end{aligned} \tag{126}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta}\, exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\, exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}\, dx = 1 \tag{127}$$

Faça a transformação $u = exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}$, então

$$du = -\frac{1}{\beta}\, exp\Big\{ -\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\, dx$$

e

$$\begin{cases} \text{se} \quad x \longrightarrow +\infty \quad \text{, então} \quad u \longrightarrow 0 \\ \text{se} \quad x \longrightarrow -\infty \quad \text{, então} \quad u \longrightarrow \infty \end{cases}$$

agora, vamos substituir em (NÚMERO)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= -\int_{+\infty}^{0} exp\{-u\}\, du \\ &= \int_{0}^{+\infty} exp\{-u\}\, du \\ &= 1 \end{aligned} \tag{128}$$

Fato 2. Função de Distribuição Acumulada F
Sabemos que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

logo,

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta}\, exp\Big\{ -\frac{t-\alpha}{\beta}\Big\}\, exp\Big\{ -exp\Big\{ -\frac{t-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}\, dt \tag{129}$$

Aplique, novamente, a transformação anterior $u = exp\Big\{ -\frac{t-\alpha}{\beta}\Big\}$, então

$$\begin{cases} \text{se} \quad t \longrightarrow x \quad \text{, então} \quad u \longrightarrow exp\Big\{ -\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} \\ \text{se} \quad x \longrightarrow -\infty \quad \text{, então} \quad u \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_{+\infty}^{exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}} exp\{-u\}\, du \\ &= exp\Big\{ -exp\Big\{ -\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} \end{aligned} \tag{130}$$

Portanto, escrevemos

$$F(x) = exp\Big\{ -exp\Big\{ -\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}\, I_{\mathbb{R}}(x) \tag{131}$$

Fato 3. $\mathbb{E}[X] = \alpha + \beta\gamma$, onde γ é a constante de Euler.

PROVA:

Faça a transformação $z = exp\Big\{ -\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}$, com $x = \alpha - \beta \ln z$ e

$$\begin{cases} \text{se} \quad x \longrightarrow +\infty & \text{, então} \quad z \longrightarrow 0 \\ \text{se} \quad x \longrightarrow -\infty & \text{, então} \quad z \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \\ &= -\int_{+\infty}^{0} (\alpha - \beta \ln z)\, e^{-z}\, dz \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-z}\, dz - \beta \int_0^{\infty} e^{-z}\, \ln z\, dz \\ &= \alpha + \beta\gamma \end{aligned} \tag{132}$$

pois,

$$\left.\frac{d\,\Gamma(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = \int_0^{\infty} e^{-x}\, \ln x\, dx = -\gamma,\ \gamma \approx 0.577216.$$

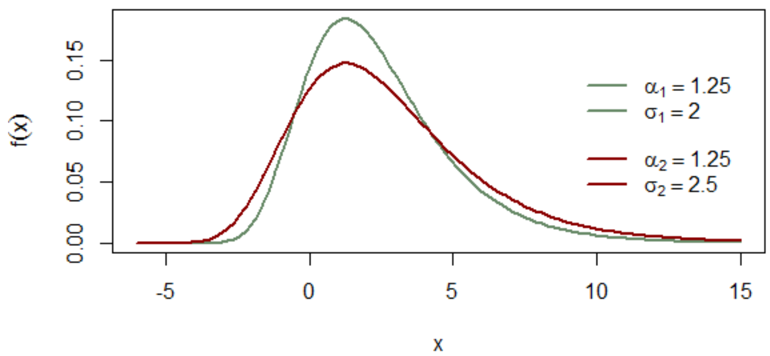


Figura 33: Primeiro exemplo de densidade para alguns valores de α e β

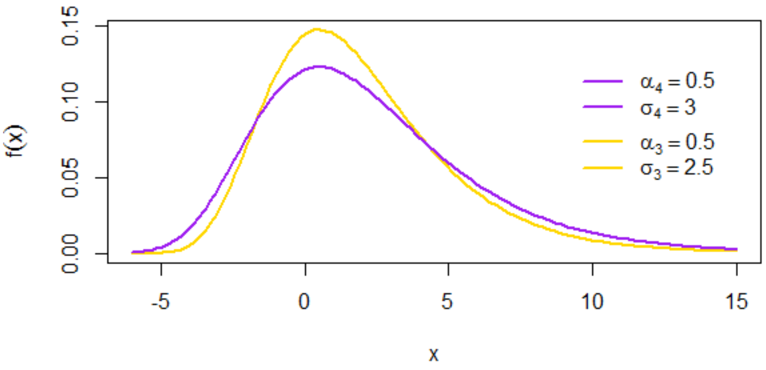


Figura 34: Segundo exemplo de densidade para alguns valores de α e β

```
install.packages('QRM')
require('QRM')
?dGumbel
#Exemplo

curve(dGumbel(x,mu = 1.25,sigma = 2),
xlim = c(-6,15),col='darkseagreen4',lwd=2,
ylab = expression(f(x)),xlab=expression(x))
ex1 = expression(alpha[1] == 1.25,sigma[1] == 2)
legend(9,0.15,legend=ex1,lty=1,col='darkseagreen4',lwd=2,bt='n')
#Vamos escrever a densidade

dGum <- function(x,mu,sigma){
part1 = (1/sigma)*exp(-(x-mu)/sigma)
part2 = exp(-exp(-(x-mu)/sigma))
return(part1*part2)
}
curve(dGum(x,mu = 1.25,sigma = 2.50),
xlim = c(-6,15),col='darkred',lwd=2,add=TRUE)
ex2 = expression(alpha[2]==1.25,sigma[2]==2.50)
legend(9,0.09,legend=ex2,bt='n',lty=1,col='darkred',lwd=2)

curve(dGum(x,mu = -1/2,sigma = 2.50),
xlim = c(-6,15),col='gold',lwd=2,
ylab=expression(f(x)))
ex2 = expression(alpha[3]==0.5,sigma[3]==2.50)
legend(9,0.09,legend=ex2,bt='n',lty=1,col='gold',lwd=2)

curve(dGumbel(x,mu = -1/2,sigma = 3),
xlim = c(-6,15),col='purple',lwd=2,add=TRUE,
ylab = expression(f(x)),xlab=expression(x))
ex1 = expression(alpha[4] == 0.5,sigma[4] == 3)
```

```
legend(9,0.13,legend=ex1,bt='n',lty=1,col='purple',lwd=2)

#Função de Distribuição Acumulada
aGum <- function(x,mu,sigma){return(exp(-exp(-(x-mu)/sigma)))}
curve(aGum(x,mu = 2,sigma = 2.5),xlim=c(-6,15))

#Brincando com derivadas
#sabemos que a derivada de qualquer função de distribuição F
#resulta na própria densidade. Toda derivada é limite. Portanto

dev <- function(x,mu,sigma){
h <- 1e-6
return((aGum(x+h,mu=mu,sigma=sigma)-aGum(x,mu=mu,sigma=sigma))/h)
}

#A função 'dev' equivale a função 'dGum'. Legal, né?!
```

Fato 4. $Var[X] = \dfrac{\pi^2}{6}\beta^2$

PROVA: Vamos expressar a solução partindo da identidade $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$. Portanto, precisamos expor a expressão do segundo momento.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} (\alpha - \beta \ln z)^2\, e^{-z}\, dz \\
&= \alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-z}\, dz - 2\alpha\beta \int_0^{\infty} \ln z\, e^{-z}\, dz + \beta^2 \int_0^{\infty} (\ln z)^2\, e^{-z}\, dz \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma + \beta^2 \left.\frac{d^2\,\Gamma(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=1} \qquad (133)
\end{aligned}
$$

Vamos expressar a derivada de segunda ordem no ponto $\alpha = 1$. Para isso, faça a transformação de variável $z = ct$ onde c é constante positiva. Daí,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2\,\Gamma(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=1} &= \int_0^{\infty} (\ln z)^2\, e^{-z}\, dz \\
&= c \int_0^{\infty} (\ln c + \ln t)^2\, e^{-ct}\, dt \\
&= \ln^2 c + 2c \ln c \int_0^{\infty} \ln t\, e^{-ct}\, dt + c \int_0^{\infty} \ln^2 t\, e^{-ct}\, dt \qquad (134)
\end{aligned}
$$

As duas últimas integrais são conhecidas como as transformadas de Laplace para as funções $\ln t$ e $\ln^2 t$ e seu valores são tabelados na coleção Schaum (página 169). Assim

$$\int_0^\infty \ln t \, e^{-ct} \, dt = -\frac{\gamma + \ln c}{c}$$

e

$$\int_0^\infty \ln^2 t \, e^{-ct} \, dt = \frac{\pi^2}{6c} + \frac{(\gamma + \ln c)^2}{c}$$

substituindo os dois últimos resultados na expressão (NUMERO), obtemos

$$\left.\frac{d^2\,\Gamma(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=1} = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \tag{135}$$

substituindo o resultado (NUMERO) em (NUMERO)
obtemos

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma + \frac{\beta^2\pi^2}{6} + \gamma^2\beta^2 \tag{136}$$

portanto,

$$\begin{aligned} Var[X] &= \alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma + \frac{\beta^2\pi^2}{6} + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta\gamma - \gamma^2\beta^2 \\ &= \frac{\beta^2\pi^2}{6}. \end{aligned} \tag{137}$$

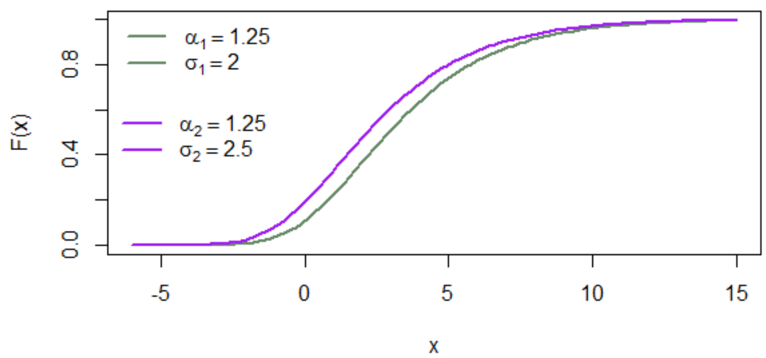


Figura 35: Função de distribuição para certos valores de α e β

```
curve(aGum(x,mu = 2,sigma = 2.5),xlim=c(-6,15),
ylab = 'F(x)',col = 'darkseagreen4',lwd=2)
legend('topleft',legend = ex1, lty =1,col  = 'darkseagreen4',
```

```
bt = 'n',lwd=2)

curve(aGum(x,mu = 1.25,sigma = 2.5),xlim=c(-6,15),
ylab = 'F(x)',col = 'purple',lwd=2,add=TRUE)
legend(-7,0.65,legend = ex2, lty =1,col  = 'purple',
bt = 'n',lwd=2)
```

Fato 5. Se $X \sim$ Gumbel$(0,1)$, então $Y = \alpha + \beta X \sim$ Gumbel(α, β).

PROVA: Sejam G função de distribuição e g densidade de Y. Então é verdade que

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P[Y \le y] \\ &= P\Big[\alpha + \beta X \le y\Big] \\ &= P\Big[X \le \frac{y-\alpha}{\beta}\Big] \\ &= F_X\Big(\frac{y-\alpha}{\beta}\Big) \end{aligned} \tag{138}$$

mas

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= F_X'\Big(\frac{y-\alpha}{\beta}\Big) \\ &= \frac{1}{\beta} exp\Big\{-\frac{y-\alpha}{\beta}\Big\} exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{y-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} \end{aligned} \tag{139}$$

portanto $Y \sim$ Gumbel(α, β).

Fato 6. O q-ésimo quantil é $x_q = \alpha - \beta \ln(-\ln q)$.

PROVA:

$$\begin{aligned} F(x_q) = q &\Leftrightarrow exp\Big\{-exp\Big\{-\frac{x_q-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\} = q \\ &\Leftrightarrow exp\Big\{-\frac{x_q-\alpha}{\beta}\Big\} = -\ln q \\ &\Leftrightarrow -\frac{x_q-\alpha}{\beta} = \ln(-\ln q) \\ &\Leftrightarrow x_q = \alpha - \beta \ln(-\ln q) \end{aligned} \tag{140}$$

Uma consequência desse fato é o valor da mediana ser $x_{0.5} \approx \alpha + 0.367\beta$.

Fato 7. Se $X \sim$ Gumbel$(0,1)$, então

$$\mathbb{E}[X^s] = (-1)^s\,\Gamma^{(s)}(1)$$

onde $\Gamma^{(s)}(1)$ é a s-ésima derivada da função gama no ponto $\alpha = 1$.

PROVA: a densidade de X é

$$f_X(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}\,I_{\mathbb{R}}(x)$$

portanto, fazendo a transformação $u = e^{-x}$, fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^s] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\,e^{-x}e^{-e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} (-\ln u)^s\,e^{-u}\,du \\
&= (-1)^s \int_0^{+\infty} \ln^s u\,e^{-u}\,du \\
&= (-1)^s\Gamma^{(s)}(1) \qquad (141)
\end{aligned}$$

Fato 8. Se $X \sim$ Gumbel(α, β), então $M_X(t) = e^{\alpha\,t}\Gamma(1-\beta\,t),\, \forall t < 1/\beta$ onde M_X é a função geradora de momentos de X.

PROVA: Faça a transformação $z = exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}$. Segue-se

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{Xt}] \\
&= \int e^{tx}\,f(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(\alpha-\beta\ln z)}\,e^{-z}\,dz \\
&= e^{\alpha\,t}\int_0^{+\infty} e^{-t\beta\ln z}\,e^{-z}\,dz \\
&= e^{\alpha\,t}\int_0^{+\infty} z^{-t\beta}\,e^{-z}\,dz \\
&= e^{\alpha\,t}\Gamma(1-\beta\,t), \forall t < 1/\beta. \qquad (142)
\end{aligned}$$

Fato 9. A moda $x_m = \alpha$

PROVA:Procuramos o x que maximiza a curva da densidade f. Vamos utilizar um artifício para facilitar o cálculo usando uma função g tal que

$$g(x) = \ln f(x)$$

portanto

$$g(x) = -\ln\beta - \frac{x-\alpha}{\beta} - exp\Big\{\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} \tag{143}$$

para encontrar o valor que maximiza g basta derivar e igualar a zero. Daí

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}exp\Big\{\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad exp\Big\{\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{x-\alpha}{\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \alpha \end{aligned} \tag{144}$$

Fato 10 (Notas de aula do prof. Maurício). Se $X \sim$ Gumbel(α, β), então $Y = exp\Big\{-\frac{X-\alpha}{\beta}\Big\}$ tem distribuição Gama de parâmetros $r = 2$ e $\lambda = 1$.

PROVA: Seja G função de distribuição de Y, então

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P\Big[exp\Big\{-\frac{X-\alpha}{\beta}\Big\} \leq y\Big] \\ &= P\Big[-\frac{X-\alpha}{\beta} \leq \ln y\Big] \\ &= P\Big[\frac{X-\alpha}{\beta} \geq -\ln y\Big] \\ &= 1 - F_X(\alpha - \beta\ln y) \end{aligned} \tag{145}$$

derivando G em relação a y, obtemos a densidade g que segue

$$g_Y(y) = y\, e^{-y} I_{(0,\infty)}(y) \tag{146}$$

logo $Y \sim$ Gama$(r = 2, \lambda = 1)$.

6.22.1 Simulação

Pelo Método da Transformação Inversa, vamos simular valores de X que segue Gumbel com parâmetros α e β. Na figura 10 mostramos simulações para certos valores dos parâmetros.

Algoritmo
1º passo: gere um número aleatório U entre 0 e 1
2º passo: faça $X = \alpha - \beta\ln(-\ln U)$

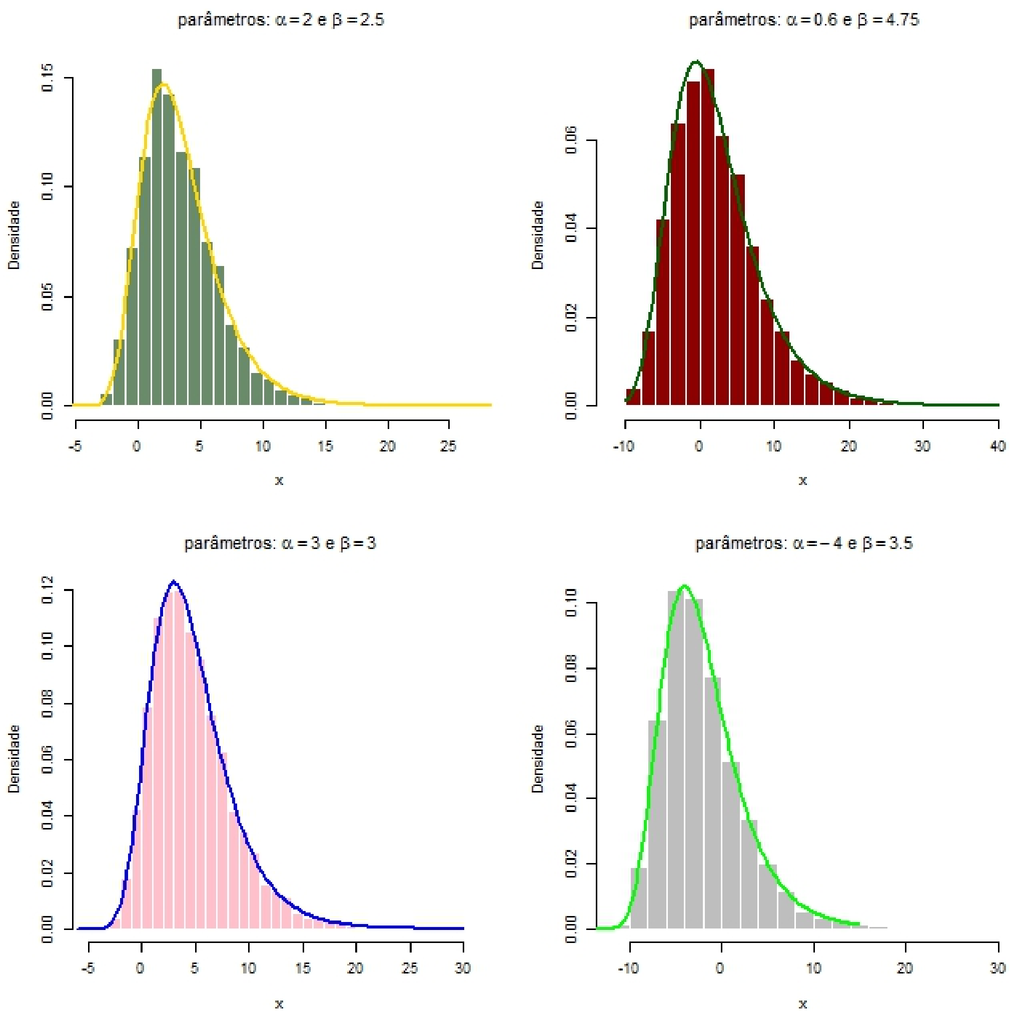


Figura 36: Amostras simuladas para diversos valores dos parâmetros

```
rGum <- function(n,mu,sigma){
x<-0
for(i in 1:n){
u=runif(1)
x[i]<-mu - sigma*log(-log(u))
}
return(x)
}
win.graph(width=10, height=10,pointsize=8)
par(mfrow=c(2,2))
x=rGum(5000,2,2.5)
hist(x,prob=T,border = 'white',col='darkseagreen4',
main=expression(paste('parâmetros: ', alpha == 2,' e ',
 beta ==2.5)),
ylab = 'Densidade',breaks=25)
curve(dev(x,mu=2,sigma=2.5),xlim=c(-6,30),add=T,col='gold',lwd=2)

x=rGum(5000,-3/5,19/4)
hist(x,prob=T,border = 'white',col='darkred',
main=expression(paste('parâmetros: ', alpha == 0.6,' e ',
 beta ==4.75)),
ylab = 'Densidade',breaks=25)
curve(dGum(x,mu = -3/5,sigma = 19/4),
xlim = c(-10,40),col='darkgreen',lwd=2,add=T)

x=rGum(5000,3,3)
hist(x,prob=T,border = 'white',col='pink',
main=expression(paste('parâmetros: ', alpha == 3,' e ',
 beta == 3)),
ylab = 'Densidade',breaks=25)
curve(dev(x,mu=3,sigma=3),xlim=c(-6,30),add=T,col='blue',lwd=2)

x=rGum(5000,-4,3.5)
hist(x,prob=T,border = 'white',col='gray',
main=expression(paste('parâmetros: ', alpha == -4,' e ',
 beta ==3.5)),
ylab = 'Densidade',breaks=25)
curve(dGum(x,mu = -4,sigma = 3.5),
xlim = c(-15,15),col='green',lwd=2,add=T)
```

Fato 11. Se $X \sim$ Exponencial(1), então $Y = -\ln X \sim$ Gumbel$(0, 1)$.

PROVA: Seja G função de distribuição de Y, então

$$\begin{aligned}
G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\
&= P[-\ln X \leq y] \\
&= P[\ln X \geq -y] \\
&= P[X \geq e^{-y}] \\
&= 1 - F_X(e^{-y}) \qquad (147)
\end{aligned}$$

derivando em relação a y obtemos a densidade g

$$g_Y(y) = e^{-y}\, e^{-e^{-y}} \qquad (148)$$

portanto $Y \sim$ Gumbel$(0,1)$.

Fato 12. A função de sobrevivência S é definida como

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (149)$$

Fato 13. A função de Hazard (taxa de falhas) λ é

$$\lambda(t) = \frac{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}}{\beta\Big[exp\Big\{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}-1\Big]} \qquad (150)$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\beta}exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}exp\Big\{-exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}}{1-exp\Big\{-exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}} \\
&= \frac{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}exp\Big\{-exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}}{exp\Big\{-exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}\beta\Big[exp\Big\{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}-1\Big]} \\
&= \frac{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}}{\beta\Big[exp\Big\{exp\Big\{-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big\}\Big\}-1\Big]} \qquad (151)
\end{aligned}$$

Fato 14. A função de taxa de falha acumulada Λ é definida como

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du \tag{152}$$

Prove que

$$\Lambda(t) = -\ln S(t) \tag{153}$$

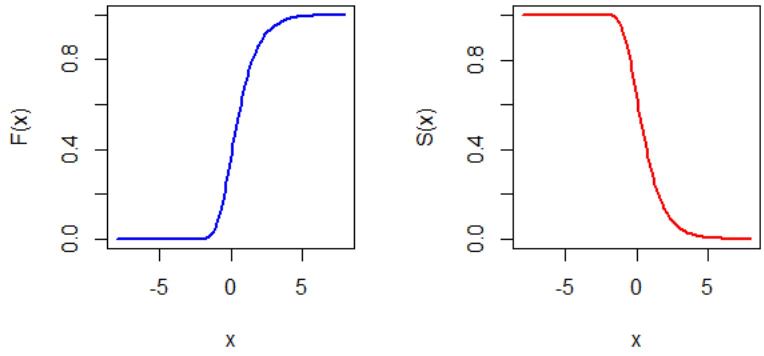


Figura 37: Funções de distribuição e sobrevivência com parâmetros $\alpha = 0$ e $\beta = 1$

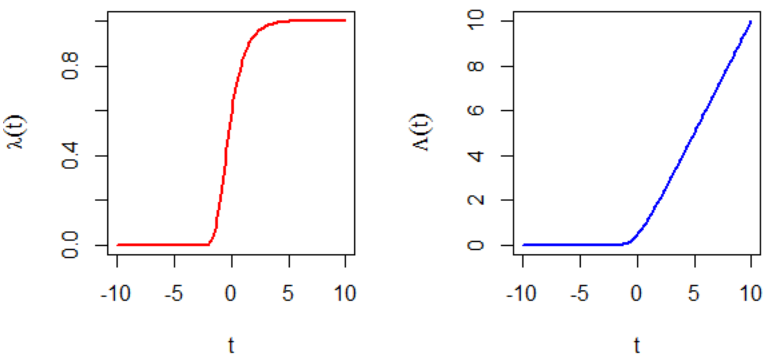


Figura 38: Funções de Hazard e taxa acumulada com parâmetros $\alpha = 0$ e $\beta = 1$

Fato 15 Definimos a Entropia H de Shannon para uma variável aleatória contínua X como

$$H(X) = -\int_{\mathcal{A}} f(x)\, \ln f(x)\, dx \tag{154}$$

onde $\mathcal{A}$ é suporte, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$. Seja $X \sim$ Gumbel(α, β), então

$$H(X) = \ln \beta + \gamma + 1,\ \gamma \approx 0.577216 \tag{155}$$

PROVA: Note que

$$\ln f(x) = -\ln \beta - \frac{x-\alpha}{\beta} - exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\}$$

assim

$$
\begin{aligned}
H(X) &= \ln\beta \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big) f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} f(x)\,dx \\
&= \ln\beta + \mathbb{E}\Big[\frac{X-\alpha}{\beta}\Big] + \int_{\mathbb{R}} exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} f(x)\,dx \\
&= \ln\beta + \gamma + \int_{\mathbb{R}} exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} f(x)\,dx \qquad (156)
\end{aligned}
$$

mas

$$\int_{\mathbb{R}} exp\Big\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} f(x)\,dx = \Gamma(2) = 1 \qquad \text{(Verifique!)}$$

portanto

$$H(X) = \ln\beta + \gamma + 1 \qquad (157)$$

```
 #Função de distribuição acumulada 2
 #Vamos reescrever a função 'aGum' agora incluindo
 #a função de sobrevivência
 aGum2 <- function(x,mu,sigma,survival=1){
  #se survival = 0 então calculamos a sobrevivência no ponto x
  if(survival==0){
  return(1-exp(-exp(-(x-mu)/sigma)))
  #caso contrário, calculamos a função acumulada no ponto x
  }else{
  return(exp(-exp(-(x-mu)/sigma)))
 }
}
par(mfrow=c(1,2))
curve(aGum2(x,mu=0,sigma=1,survival=1),xlim=c(-8,8),
ylab="F(x)",col='blue',lwd=2)
curve(aGum2(x,mu=0,sigma=1,survival=0),xlim=c(-8,8),
ylab="S(x)",col="red",lwd=2)

#Função de Hazard
hGum <- function(x,mu,sigma){
return(dGum(x,mu=mu,sigma=sigma)
/(aGum2(x,mu=mu,sigma=sigma,survival=0)))
}

par(mfrow=c(1,2))
curve(hGum(x,mu=0,sigma=1),xlim=c(-10,10),xlab='t',
ylab=expression(lambda(t)),col='red',lwd=2)
```

```
#Função de taxa de falha acumulada

AGum <- function(x,mu,sigma){
return(-log(aGum2(x,mu=mu,sigma=sigma,survival=0)))
}
curve(AGum(x,mu=0,sigma=1),xlim=c(-10,10),xlab='t',
ylab=expression(Lambda(t)),col='blue',lwd=2)
```

Fato 16. Seja $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ a função característica de $X \sim$ Gumbel(α, β), então

$$\phi_X(t) = e^{it\alpha}\Gamma(1 - it\beta) \tag{158}$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, f(x)\, dx \qquad \text{, faça} \qquad z = exp\Big\{ -\frac{x-\alpha}{\beta}\Big\} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{it\alpha}\, e^{-it\beta \ln z}\, e^{-z}\, dz \\
&= e^{it\alpha} \int_0^{+\infty} e^{\ln z - it\beta}\, e^{-z}\, dz \\
&= e^{it\alpha} \int_0^{+\infty} z^{-it\beta}\, e^{-z}\, dz \\
&= e^{it\alpha}\Gamma(1 - it\beta)
\end{aligned} \tag{159}$$

6.22.2 Método da Máxima Verossimilhança (MLE)

Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população X segue Gumbel de parâmetros α e β. Sejam L função de verossimilhança e $f(x_i\,|\,\underset{\sim}{\theta})$ densidade, onde $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta$ espaço paramétrico. Daí,

$$L(\underset{\sim}{\theta}\,; \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\underset{\sim}{\theta})$$

então a log-verossimilhança l é

$$l(\theta\,; \boldsymbol{x}) = -n\ln\beta - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} exp\Big\{ -\frac{x_i - \alpha}{\beta}\Big\} \tag{160}$$

como $\underset{\sim}{\theta} = (\alpha, \beta)$, admite as derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial l(\underset{\sim}{\theta}\,; \boldsymbol{x})}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta}\Big[n - \sum_{i=1}^{n} exp\Big\{-\frac{x_i-\alpha}{\beta}\Big\}\Big] \tag{161}$$

$$\frac{\partial l(\underset{\sim}{\theta}\,; \boldsymbol{x})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\beta^2} - \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\beta^2}\, exp\Big\{-\frac{x_i-\alpha}{\beta}\Big\} \tag{162}$$

queremos as estimativas de $\underset{\sim}{\theta}$ que maximizam, logo obtemos as duas igualdade

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}\Big[\ln n - \ln \sum_{i=1}^{n} exp\Big\{\frac{x_i}{\hat{\beta}}\Big\}\Big] \tag{163}$$

$$\bar{X} = \hat{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, exp\Big\{\frac{x_i}{\hat{\beta}}\Big\}}{\sum_{i=1}^{n} exp\Big\{\frac{x_i}{\hat{\beta}}\Big\}} \tag{164}$$

a estimativa requer de métodos numéricos, discutiremos alguns pacotes (e funções) disponíveis para estimar.

6.22.3 Estimar os parâmetros usando métodos numéricos

Primeiramente, precisamos declarar a função de log-verossimilhança no R. Esboçamos uma função genérica apropriada

```
nome <- function(parametros,dados){
#declarar parametros aqui
logl <- função de log-verossimilhança
return(-logl)
}
```

onde “nome” é, obviamente, o nome da função (seja criativo!), “parâmetros ” é $\underset{\sim}{\theta}$, isto é, os parâmetros da função e o retorno negativo da função deve-se ao motivo que a maioria das funções que otimizam funções no R são feitas para minimizar e não maximizar. Portanto, a modificação é multiplicar por -1 a função. Sempre evite declarar objetos com nomes de funções pré-estabelecidas no R e usar acentuação em seu script. Agora, vamos declarar a função de log-verossimilhança para Gumbel de parâmetros μ e σ

```
#Função de log-verossimilhança
logl.0 <- function(teta,dados){
#declarando os parametros
n<-length(dados)
```

```
mu<-teta[1]
sigma<-teta[2]
logl<--n*log(sigma)-sum((dados-mu)/sigma)-sum(exp(-(dados-mu)/sigma))
return(-logl)
}
```

após declaramos a função de log-verossimilhança, usaremos a função *optim* do pacote *stats* para estimar. Vamos explicar essa função utilizando sua declaração

optim(par=valores iniciais,fn=log-vero, dados, method=método)

os "valores iniciais" representam o argumento *par* da função que se insere os chutes iniciais, isto é, um objeto em forma de vetor. A "log-vero" é a função declarada (no argumento *fn*) como função de log-verossimilhança. Os "dados" representam as observações e o "método" é o tipo de procedimento a ser adotado na maximização. Para mais detalhes use o comando *help(optim)* para ler sobre os métodos. Vamos agora estimar e entender o *output* (saída) do comando *optim* no exemplo a seguir

Exemplo. Suponha que temos uma amostra com parâmetros desconhecidos, para estimar usamos o script

```
fit<-optim(par=c(0,1),fn=logl.0,
dados=amostra,method='L-BFGS-B')
fit$par #retornar os valores estimados de mu e sigma
```

note que o chute é realmente importante, isto é, para observações reais, um chute ruim pode fazer o algoritmo da função não convergir. Portanto é importante buscar alternativas para um bom chute. É comum nesses casos usar o método dos momentos como escolha do chute. Sem demonstração, as estimativas para os parâmetros da Gumbel pelo método dos momento são

$$\hat{\sigma} = \frac{s\sqrt{6}}{\pi} \tag{165}$$

e

$$\hat{\mu} = \bar{X} + 0.577216\,\hat{\sigma}. \tag{166}$$

6.22.4 Série Temporal nasdaq

O conjunto de dados *nasdaq* fornece o valor de fecho diário do índice NASDAQ entre janeiro de 1994 a março de 2004. Esse conjunto está disponível no pacote *QRM*.

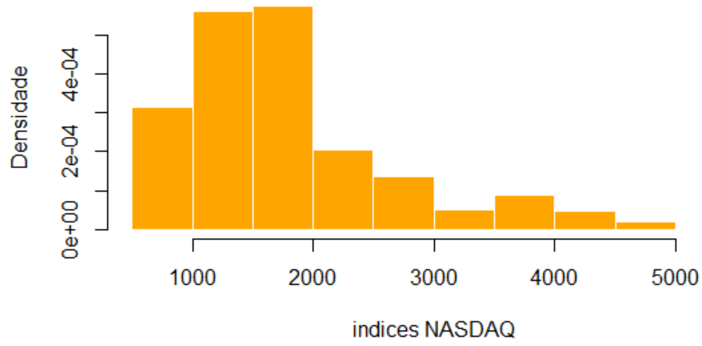


Figura 39: Índice de NASDAQ

Estatísticas						
Max	Min	Média	Variância	Assimetria	Curtose	Excesso
5048.62	693.79	1788.812	793218.049	1.277	4.373	1.373

Tabela 2: Algumas estatísticas sobre os índices de NASDAQ

Estimando os parâmetros do conjunto de dados ajustando a Gumbel de parâmetros μ e σ, obtivemos as estimativas $\hat{\mu} = 1402.4661$ e $\hat{\sigma} = 625.5623$ com o script abaixo e na figura esboçamos o ajuste sobre o histograma

```
require('RQM')
help('nasdaq')
x=nasdaq$NASDAQ
hist(x,prob=T,col='orange',border='white',main=NULL,
ylab='Densidade',xlab='indices NASDAQ')
chute=0
chute[1]<-sd(x)*sqrt(6)/pi
chute[2]<-mean(x) - 0.577216*chute[1]
chute
fit<-optim(par=c(chute[2],chute[1]),fn=logl.0,
dados=x,method='L-BFGS-B')
par=fit$par
par
x=sort(x) #help(sort) ok?
hist(x,prob=T,col='orange',border='white',main=NULL,
ylab="Densidade",xlab = índice NASDAQ)
curve(dGum(x,mu=par[1],sigma=par[2]),xlim=c(500,5500),
col='purple',pch=13,add=T)
```

Uma informação importante é apresentar a matriz de variâncias e covariâncias H. Para isso, basta adicionar na função o comando *hessian = TRUE* com seguese

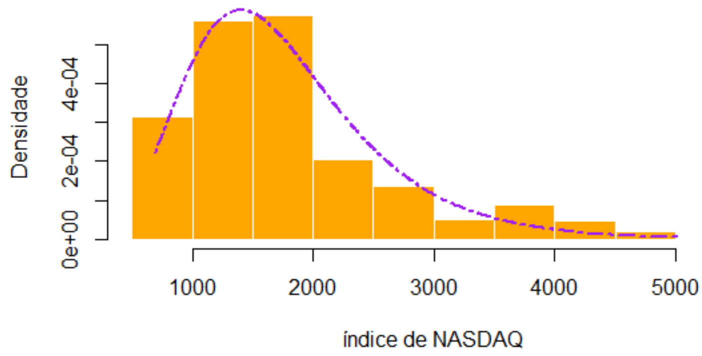


Figura 40: Curva ajustada

```
fit<-optim(par=c(chute[2],chute[1]),fn=logl.0,
dados=x,method='L-BFGS-B',hessian=TRUE)
H=fit$hessian
```

que resulta em (arredondada em quatro casas decimais)

$$H = \begin{pmatrix} 0.0066 & -0.0025 \\ -0.0025 & 0.0108 \end{pmatrix} \quad (167)$$

Aplicação (extraído das notas de aula do prof. Maurício)

A distribuição Gumbel pode ser empregada como modelo para velocidades máximas dos ventos anuais de uma certa região ou para previsão de enchentes (nível máximo de um rio).

Exemplo. Supondo que a velocidade máxima do vento de uma região tem uma distribuição Gumbel com média $100\,m/s$ e desvio padrão $50\,m/s$. Calcule a probabilidade de que em um dado ano a velocidade máxima do vento seja no mínimo $200\,m/s$.

Solução: Note que

$$\mathbb{E}[X] = 100$$

e

$$Var[X] = 50$$

mas sabemos que

$$\mathbb{E}[X] = \alpha + \beta\gamma$$

e

$$Var[X] = \frac{\beta\pi}{\sqrt{6}}$$

assim

$$\beta = \frac{50\sqrt{6}}{\pi} = 38.9848$$

e

$$\alpha + 0.577216\beta = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 77.498 \tag{168}$$

portanto

$$\begin{aligned} P[X > 200] &= 1 - F(200) \\ &= 1 - exp\Big[-exp\Big[-\frac{200 - 77.498}{38.9848}\Big]\Big] \\ &= 0.0423 \end{aligned} \tag{169}$$

6.23 Distribuição Gama Generalizada

Seja X uma variável aleatória contínua e f função densidade de probabilidade. Se f é escrita como

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)} \, \mu^{\alpha\phi} \, x^{\alpha\phi-1} \, exp[-(\mu \, t)^{\alpha}] \, I_{(0,+\infty)}(x), \tag{170}$$

então X segue Gama Generalizada de parâmetros $\alpha, \phi, \mu > 0$. Assim, denotamos $X \sim$ GG(α, ϕ, μ).

Fato 1. f é legítima densidade.

PROVA:Antes de provar, precisamos mostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \, exp[-bx^c] \, dx = \frac{\Gamma\left(\dfrac{a}{c}\right)}{c \, b^{a/c}} \tag{171}$$

Seja I a integral de (NUMERO), então faça a transformação

$$z = bx^c$$

então

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^{\dfrac{a-1}{c}} e^{-z} c^{-1} z^{1/c-1} b^{-1/c} \, dz \\
&= \int_0^{+\infty} z^{\frac{a}{c}-\frac{1}{c}+\frac{1}{c}-1} b^{\frac{1-a}{c}-\frac{1}{c}} c^{-1} e^{-z} \, dz \\
&= \int_0^{+\infty} z^{\frac{a}{c}-1} b^{-\frac{a}{c}} c^{-1} \, e^{-z} \, dz \\
&= \frac{1}{c \, b^{a/c}} \int_0^{+\infty} z^{a/c-1} \, e^{-z} \, dz \\
&= \frac{\Gamma(a/c)}{c \, b^{a/c}}.
\end{aligned} \tag{172}$$

Agora podemos retornar a questão. Precisamos checar que para todo x em $(0, +\infty)$, temos $f(x)$ não-negativo. Como $\alpha, \mu, \phi > 0$ garantem essa afirmação, logo f é não-negativa. Por último, precisamos mostrar que

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = 1$$

portanto, usando o resultado (69)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(x)\, dx &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)}\, \mu^{\alpha\phi}\, x^{\alpha\phi-1}\, exp[-(\mu\, t)^{\alpha}]dx \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)}\, \mu^{\alpha\phi} \int_0^{\infty} x^{\alpha\phi-1}\, exp[-(\mu\, t)^{\alpha}]dx \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)}\, \mu^{\alpha\phi} \frac{\Gamma(\alpha\phi/\alpha)}{\alpha\, \mu^{\alpha^2\phi/\alpha}} \\
&= 1. \qquad (173)
\end{aligned}
$$

Fato 2. A função de distribuição acumulada F de Gama Generalizada com parâmetros $\alpha, \mu, \phi > 0$ é

$$
F(x) = \frac{\gamma[\phi, (\mu\, t)^{\alpha}]}{\Gamma(\phi)} \qquad (174)
$$

onde $\gamma[y, x] = \int_0^x w^{y-1}\, e^{-w}\, dw$ é denominada função gama incompleta inferior.

PROVA: faça a transformação $w = (\mu\, t)^{\alpha}$, então

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)\, dt \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)}\, \mu^{\alpha\phi} \int_0^{(\mu\, x)^{\alpha}} \left(\frac{w^{1/\alpha}}{\mu}\right)^{\alpha\phi-1} exp(-w)\, \frac{dw}{w^{1-1/\alpha}\, \alpha\, \mu} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^{(\mu\, x)^{\alpha}} w^{\phi-1}\, exp(-w)\, dw \\
&= \frac{\gamma[\phi, (\mu\, x)^{\alpha}]}{\Gamma(\phi)}. \qquad (175)
\end{aligned}
$$

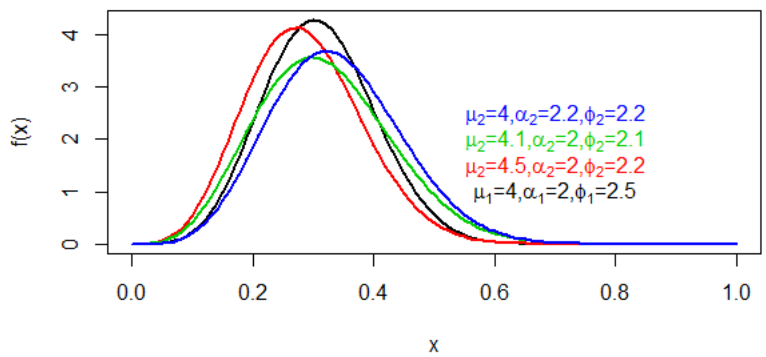


Figura 41: Densidade da Gama Generalizada para alguns valores de α, μ, ϕ

Essa parametrização foi introduzida por Stacy (1962). A distribuição Gama Generalizada tem se mostrado um ótimo modelo que leva a excelentes inferências para dados de sobrevivência (RAMOS, 2014).

```
#Fazendo uma função densidade de probabilidade (Stacy)

dGG <- function(x,mu,phi,alpha){
part1 = ((alpha)/gamma(phi))*mu^(alpha*phi)
part2 = (x^(alpha*phi-1))*exp(-(mu*x)^alpha)
return(part1*part2)
}
col=1:4
mu=c(4,4.5,4.1,4)
phi=c(2,2.0,2,2.2)
alpha=c(2.5,2.2,2.1,2.2)
curve(dGG(x,mu=mu[1],phi=phi[1],alpha=alpha[1]),
xlim=c(0.001,1),col=col[1],
lwd=2,ylab='f(x)')
x=0.7;y=c(1,1.5,2,2.5,3)
exp=expression(paste(mu[1],'=',4, ',', alpha[1],'=',2,
',',phi[1],'=',2.5))
text(x,y[1],exp,cex=1,col=col[1])
for(i in 2:4){
curve(dGG(x,mu=mu[i],phi=phi[i],alpha=alpha[i]),
xlim=c(0.001,1),col=col[i],
lwd=2,ylab='f(x)',add=TRUE)
}
exp=expression(paste(mu[2],'=',4.5, ',', alpha[2],'=',2.0,
',',phi[2],'=',2.2))
text(x,y[2],exp,col=col[2])
exp=expression(paste(mu[2],'=',4.1, ',', alpha[2],'=',2.0,
',',phi[2],'=',2.1))
text(x,y[3],exp,col=col[3])
exp=expression(paste(mu[2],'=',4, ',', alpha[2],'=',2.2,
',',phi[2],'=',2.2))
text(x,y[4],exp,col=col[4])
```

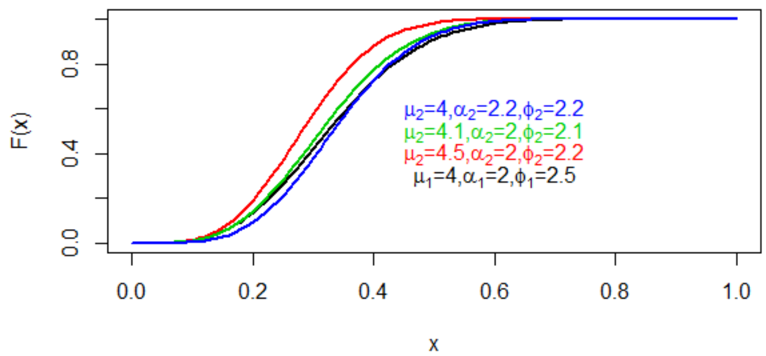


Figura 42: Acumulada da Gama Generalizada para alguns valores de α, μ, ϕ

```
#Função de distribuição acumulada da Gama Generalizada
aGG<-function(x,mu,phi,alpha){return(pgamma((mu*x)^alpha,phi))}

#Adicionando a opção da curva de sobrevivência
aGG<-function(x,mu,phi,alpha,lower.tail=TRUE){
if(lower.tail==FALSE){
return(1-pgamma((mu*x)^alpha,phi))
}else{return(pgamma((mu*x)^alpha,phi))}
}
```

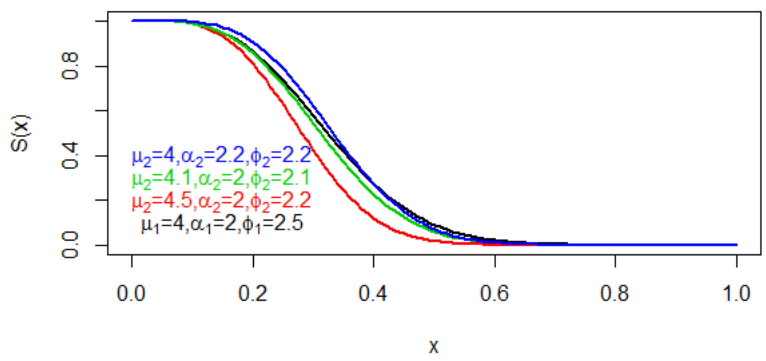


Figura 43: Sobrevivência da Gama Generalizada para alguns valores de α, μ, ϕ

Fato 3. $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\Gamma\Big(\phi + 1/\alpha\Big)}{\mu\,\Gamma(\phi)}$

PROVA:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} x\,f(x)\,dx \\
&= \frac{\alpha\,\mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} x^{\alpha\phi+1-1}\,exp[-(\mu\,x)^{\alpha}]\,dx \\
&= \frac{\alpha\,\mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha\phi+1}{\alpha}\Big)}{\alpha\,\mu^{\alpha\phi+1}} \\
&= \frac{\Gamma\Big(\phi+1/\alpha\Big)}{\mu\,\Gamma(\phi)}
\end{aligned} \tag{176}
$$

Fato 4. $\mathbb{E}[X^r] = \dfrac{\Gamma\Big(\phi + r/\alpha\Big)}{\mu^r\,\Gamma(\phi)}$

PROVA:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^r] &= \int_0^\infty x^r f(x)\, dx \\
&= \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty x^{\alpha\phi+r-1}\, exp[\,-(\mu\, x)^\alpha]\, dx \\
&= \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)}\, \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha\phi + r}{\alpha}\Big)}{\alpha\, \mu^{\alpha\phi+r}} \\
&= \frac{\Gamma\Big(\phi + r/\alpha\Big)}{\mu^r\, \Gamma(\phi)} \qquad (177)
\end{aligned}
$$

Fato 5. $Var[X] = \dfrac{1}{\mu^2}\left\{\dfrac{\Gamma\Big(\phi+2/\alpha\Big)}{\Gamma(\phi)} - \dfrac{\Gamma^2\Big(\phi+1/\alpha\Big)}{\Gamma^2(\phi)}\right\}$

PROVA:

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \\
&= \frac{\Gamma\Big(\phi+2/\alpha\Big)}{\mu^2\, \Gamma(\phi)} - \frac{\Gamma^2\Big(\phi+1/\alpha\Big)}{\mu^2\, \Gamma^2(\phi)} \\
&= \frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\Gamma\Big(\phi+2/\alpha\Big)}{\Gamma(\phi)} - \frac{\Gamma^2\Big(\phi+1/\alpha\Big)}{\Gamma^2(\phi)}\right\} \qquad (178)
\end{aligned}
$$

Fato 6. O valor modal $x_m = \dfrac{1}{\mu}(\phi - 1/\alpha)^{1/\alpha}$

PROVA: novamente vamos usar o artifício $g(x) = \ln f(x)$. Note que

$$
g(x) = \ln \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} + (\alpha\phi - 1) \ln x - (\mu\, x)^\alpha
$$

daí,

$$
\begin{aligned}
g'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(\alpha\phi - 1)}{x} - \mu^\alpha\, \alpha x^{\alpha-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(\alpha\phi - 1)}{x} = \mu^\alpha\, \alpha x^{\alpha-1} \\
&\Leftrightarrow \quad x^\alpha = \frac{\alpha\phi - 1}{\mu^\alpha\, \alpha} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\mu}\Big(\frac{\alpha\phi - 1}{\alpha}\Big)^{1/\alpha} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\mu}(\phi - 1/\alpha)^{1/\alpha} \qquad (179)
\end{aligned}
$$

A família paramétrica da distribuição Gama Generalizada é bastante importante, pois, dela podemos obter várias distribuições (casos reduzidos) como, por exemplo, Weibull $(\phi = 1)$, Gama $(\alpha = 1)$, Normal Generalizada $(\alpha = 2)$, Log-Normal $(\phi \longrightarrow \infty)$ etc.

Fato 7. A entropia H de Shannon de X é

$$H(X) = \ln \frac{\Gamma(\phi)}{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}} + (1/\alpha - \phi)[\Psi(\phi) + \ln \mu^{-\alpha}] + \phi. \tag{180}$$

PROVA:Note que

$$\ln f(x) = \ln \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} + (\alpha\phi - 1) \ln x - (\mu x)^{\alpha}$$

daí,

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \ln f(x)\, dx = \ln \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} + (\alpha\phi - 1)\mathbb{E}[\ln X] - \mu^{\alpha}\mathbb{E}[X^{\alpha}] \tag{181}$$

mas

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ln X] &= \int_0^{\infty} \ln x\, f(x)\, dx \\
&= \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \ln x\, x^{\alpha\phi-1}\, e^{-(\mu x)^{\alpha}}\, dx, \qquad \text{faça} \qquad z = (\mu x)^{\alpha} \\
&= \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \Big(\frac{1}{\alpha} \ln z - \ln \mu\Big)\, z^{\phi - 1/\alpha}\, \mu^{1-\alpha\phi}\, e^{-z}\, \mu^{-\alpha}\, \alpha^{-1}\, z^{1/\alpha - 1}\, \mu^{\alpha-1}\, dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \Big(\frac{1}{\alpha} \ln z - \ln \mu\Big)\, z^{\phi-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{1}{\alpha\, \Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \ln z\, z^{\phi-1} e^{-z} dz - \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \ln \mu\, z^{\phi-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma'(\phi)}{\Gamma(\phi)} - \ln \mu \\
&= \frac{1}{\alpha} \Psi(\phi) - \ln \mu
\end{aligned} \tag{182}$$

e sabemos que

$$\mathbb{E}[X^{\alpha}] = \frac{\phi}{\mu^{\alpha}}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(x)\, \ln f(x)\, dx &= \ln \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} + (\phi - 1/\alpha)[\Psi(\phi) - \alpha \ln \mu] - \mu^{\alpha} \frac{\phi}{\mu^{\alpha}} \\
&= \ln \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)} + (\phi - 1/\alpha)[\Psi(\phi) + \ln \mu^{-\alpha}] - \phi.
\end{aligned} \tag{183}$$

Logo,

$$H(X) = \ln \frac{\Gamma(\phi)}{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}} + (1/\alpha - \phi)[\Psi(\phi) + \ln \mu^{-\alpha}] + \phi. \tag{184}$$

Fato 8.Se $X \sim$ GG(α, ϕ, μ), então Y = $X^s \sim$ GG$(\alpha/s, \phi, \mu^s)$, $s > 0$.

PROVA: Sejam G função acumulada de Y e F função acumulada de X, então

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[X^s \leq y] \\ &= P[X \leq y^{1/s}] \\ &= F_X(y^{1/s}) \end{aligned} \tag{185}$$

agora derivando em relação a y (NUMERO), obtemos

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \frac{1}{s} y^{1/s-1}\, \frac{\alpha\, \mu^{\alpha\phi}}{\Gamma(\phi)}\, y^{1/s(\alpha\phi-1)}\, e^{-(\mu\, y^{1/s})^{\alpha}} \\ &= \frac{(\alpha/s)\, \mu^{(\alpha/s)\,\phi}}{\Gamma(\phi)}\, y^{[(\alpha/s)\phi-1]}\, e^{-[\mu^s\, y]^{(\alpha/s)}} \end{aligned} \tag{186}$$

portanto $Y \sim$ GG$(\alpha/s, \phi, \mu^s)$. Um caso particular interessante é quando $s = \alpha$ e, assim, $Y = X^\alpha \sim$ Gama(ϕ, μ^α).

Fato 9. Seja h função de Hazard de $X \sim$ GG(α, ϕ, μ), então

$$h(x) = \frac{\alpha\mu^{\alpha\phi}\, x^{\alpha\phi-1}\, e^{-(\mu\, x)^{\alpha}}}{\Gamma[\phi, (\mu\, x)^{\alpha}]}$$

onde $\Gamma(y, x) = \int_x^\infty x^{y-1}\, e^{-x}\, dx$ é denominada função gama incompleta superior.

Fato 10. Seja β_3 a curtose de $X \sim$ GG(α, ϕ, μ), então

$$\beta_3 = \frac{3m\Gamma(\phi + 3/\alpha)}{(\mu\sigma)^3\Gamma(\phi)} - \frac{3m\Gamma(\phi + 3/\alpha)}{\sigma^3\mu^2\Gamma(\phi)} - 3\Big(\frac{m}{\sigma}\Big)^3$$

PROVA: Vamos desenvolver o binômio $(X - m)^3$

$$\begin{aligned} (X - m)^3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} X^i\, (-m)^{3-i} \\ &= X^3 - 3X^2m + 3Xm - m^3 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{\mathbb{E}[X-m]^3}{\sigma^3} \\
&= \frac{1}{\sigma^3}\left(\mathbb{E}[X^3] - 3m\mathbb{E}[X^2] + 3m^2\mathbb{E}[X] - m^3\right) \\
&= \frac{3m\Gamma(\phi+3/\alpha)}{(\mu\sigma)^3\Gamma(\phi)} - \frac{3m\Gamma(\phi+3/\alpha)}{\sigma^3\mu^2\Gamma(\phi)} - 3\Big(\frac{m}{\sigma}\Big)^3 \qquad (187)
\end{aligned}$$

Fato 11. Seja β_4 a curtose de $X \sim$ GG(α, ϕ, μ), então

$$\beta_4 = \frac{\Gamma(\phi+4/\alpha)}{(\sigma\mu)^4\Gamma(\phi)} - \frac{4m\Gamma(\phi+3/\alpha)}{\sigma^4\mu^3\Gamma(\phi)} - \frac{6m\Gamma(\phi+2/\alpha)}{\sigma^4\mu^2\Gamma(\phi)} - 3\Big(\frac{m}{\sigma}\Big)^4$$

PROVA: Precisamos desenvolver $(X-m)^4$

$$\begin{aligned}
(X-m)^4 &= \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}X^i\,(-m)^{4-i} \\
&= X^4 - 4X^3m - 6X^2m^2 - 4Xm^3 + m^4
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \frac{\mathbb{E}[X-m]^4}{\sigma^4} \\
&= \frac{1}{\sigma^4}\left(\mathbb{E}[X^4] - 4m\mathbb{E}[X^3] - 6m^2\mathbb{E}[X^2] - 4m^3\mathbb{E}[X] + m^4\right) \\
&= \frac{\Gamma(\phi+4/\alpha)}{(\sigma\mu)^4\Gamma(\phi)} - \frac{4m\Gamma(\phi+3/\alpha)}{\sigma^4\mu^3\Gamma(\phi)} - \frac{6m\Gamma(\phi+2/\alpha)}{\sigma^4\mu^2\Gamma(\phi)} - 3\Big(\frac{m}{\sigma}\Big)^4 \qquad (188)
\end{aligned}$$

6.23.1 Simulação

Primeiramente, vamos utilizar o fato 8 para simular uma amostra e, em seguida, trabalharemos com uma função dentro do pacote *flexsurv* que contém a Gama Generalizada desenvolvida por Stacy. Já aprendemos como simular uma amostra da distribuição Gama. Agora basta usar o fato 8.

```
pdf('simulacaogg.pdf',width=8,height=6,paper='special')
###gerar gama(3/2,1)
rm(list=ls())
y=0
x=0
t=0
i=1
j=1
r=1
```

```
while(r<=10000){
u1=runif(1)
y[i]=-(3/2)*log(u1)
u2=runif(1)
if(u2< (2*exp(1)*y[i]/3)^(1/2)*exp(-y[i]/3)){
x[i]=y[i]
i=i+1
}else{
t[j]=y[j]
j=j+1
}
r=r+1
}

#hist(x,prob=T,col="lavenderblush2",border='white',breaks=20,
main=NULL,ylab="Densidade")
#curve(dgamma(x,3/2,1),add=T,xlim=c(0,12),lty=2,lwd=2)

alfa=10 #fato 8
w=x^(1/alfa)
hist(w,prob=T,col=8,breaks=c(50),
main=NULL,ylab="Densidade")   #,xlim=c(0,10000),ylim=c(0,10^(-2.8)))
f=function(x,fi,mu,alfa){
part1=alfa/gamma(fi);part2=((1/mu)^(fi*alfa))*x^( (alfa*fi) -1);
part3=exp(-( (1/mu)*x )^alfa)
return(part1*part2*part3)
}
grafic.density=function(fi,mu,alfa){
return(curve(f(x,fi=fi,mu=mu,alfa=alfa),
add=T,col="orange",lwd=3,
main=paste("fi =",fi,"mu = ",mu,"alfa =",alfa)
,xlab="Valores de x",ylab="Densidade"))}
#PLOTANDO A DENSIDADE
grafic.density(fi=1.5,mu=1,alfa=10)

dev.off()
```

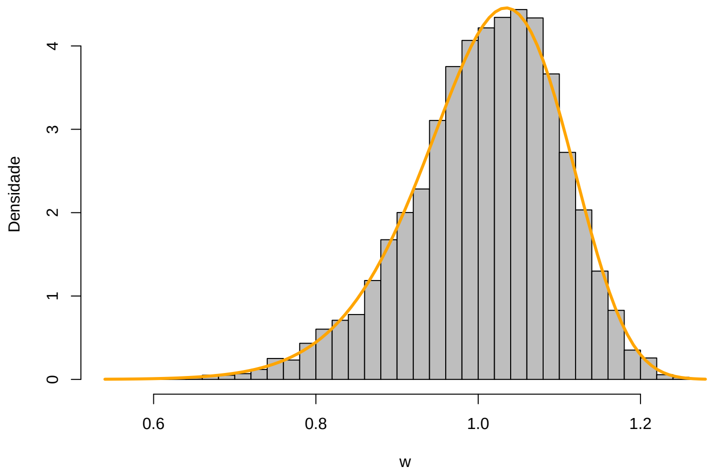
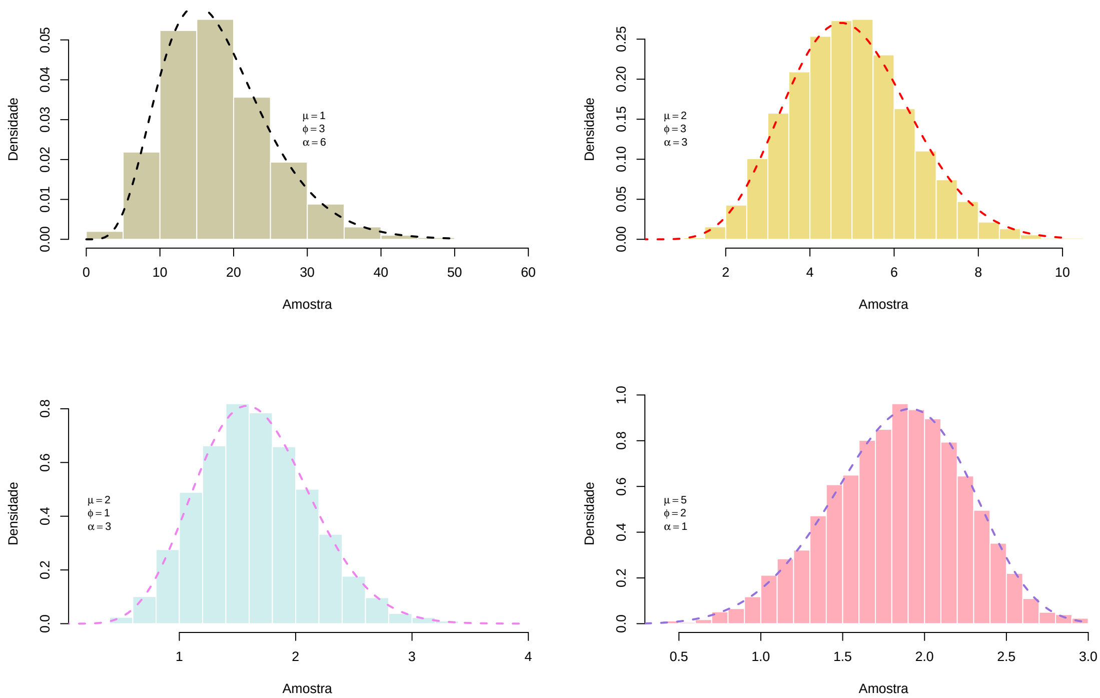


Figura 44: Gerando uma amostra de GG(3/2,1,10)

```
pdf('ggsimulacaoflex.pdf',width=8,height=6,paper='special')
par(mfrow=c(2,2))
sample<-rgengamma.orig(5000,shape=1,scale=3,k=6)
hist(sample,prob=T,col='lemonchiffon3',border='white',
main=NULL,ylab="Densidade",breaks=20,xlab="Amostra")
curve(dgengamma.orig(x,shape=1,scale=3,k=6),xlim=c(0,50),lwd=2,
add=T,lty=2)
legend('center',legend=c(expression(mu==1),expression(phi==3),
expression(alpha==6)),bt='n',cex=0.8)
sample<-rgengamma.orig(5000,shape=2,scale=3,k=3)
hist(sample,prob=T,col='lightgoldenrod',border='white',
main=NULL,ylab="Densidade",breaks=20,xlab="Amostra")
curve(dgengamma.orig(x,shape=2,scale=3,k=3),xlim=c(0,10),lwd=2,
add=T,lty=2,col='red',xlab='Amostra')
legend('left',legend=c(expression(mu==2),expression(phi==3),
expression(alpha==3)),bt='n',cex=0.8)
sample<-rgengamma.orig(5000,shape=2,scale=1,k=3)
hist(sample,prob=T,col='lightcyan2',border='white',
main=NULL,ylab="Densidade",breaks=20,xlab="Amostra")
curve(dgengamma.orig(x,shape=2,scale=1,k=3),xlim=c(0,4),lwd=2,
add=T,lty=2,col='violet',xlab='Amostra')
legend('left',legend=c(expression(mu==2),expression(phi==1),
expression(alpha==3)),bt='n',cex=0.8)
sample<-rgengamma.orig(5000,shape=5,scale=2,k=1)
hist(sample,prob=T,col='lightpink1',border='white',
main=NULL,ylab="Densidade",breaks=20,xlab="Amostra")
curve(dgengamma.orig(x,shape=5,scale=2,k=1),xlim=c(0,3),lwd=2,
add=T,lty=2,col='mediumpurple',xlab='Amostra')
legend('left',legend=c(expression(mu==5),expression(phi==2),
expression(alpha==1)),bt='n',cex=0.8)
```

```
dev.off()
```



7 DISTRIBUIÇÕES MISTAS

7.1 Distribuição Beta-Binomial

7.1.1 Histórico

Novas distribuições de probabilidade são obtidas quando é admitido que o parâmetro da distribuição também varie segundo uma distribuição de probabilidade, isto é, o parâmetro de interesse passa a ser também uma variável aleatória com sua própria distribuição. Esse mecanismo de obtenção de distribuições de probabilidade é definido como mistura. A distribuição beta-binomial surgiu da mistura da distribuição binomial com parâmetros n e p, onde $0 < p < 1$, então foi pressuposto que p podia variar grupo a grupo segundo uma distribuição beta.

A distribuição beta-binomial é útil na modelagem de dados discretos, quando há o interesse no número de y ocorrências para uma variável em n ensaios de Bernoulli com probabilidade p. Considerando sua variância maior que a de uma distribuição de Bernoulli, pode ser uma satisfatória alternativa à análise de dados com dispersão maior que a esperada em um modelo de Bernoulli.

O modelo Beta-Binomial foi proposto por Skellam (1948) que apresentou expressões para os momentos fatoriais da distribuição Beta-Binomial e descreveu a estimação dos parâmetros pelo método dos momentos e pelo método de máxima verossimilhança.

7.1.2 Exemplo prático

Suponha que fêmeas de insetos depositem ovos em determinados locais que denominaremos de unidades, folhas, por exemplo. Suponha que se tenha uniformidade na postura dos ovos, isto é, as fêmeas depositam exatamente n ovos nas folhas.

Considere, agora, o seguinte modelo: com probabilidade p, cada ovo eclode dando origem a uma larva. Então, para cada unidade a quantidade larvas será o resultado de n ensaios de Bernoulli. O número de larvas por unidade segue um modelo Binomial, $X \sim Bin(n, p)$. A probabilidade de exatamente k ovos eclodirem é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x).$$

Porém, sob certas condições, a pressuposição de que p é constante em todas as unidades não é válida, ou seja, a probabilidade de cada ovo eclodir varia de unidade a unidade. Tal pressuposição faz sentido, pois uma folha mais exposta ao sol, por exemplo, pode ser menos propícia ao desenvolvimento dos ovos. Uma forma de modelar p é supor que este varie segundo uma distribuição Beta

$$g(p) = \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} I_{(0,1)}(p).$$

A distribuição resultante da mistura das distribuições Beta e Binomial é denominada distribuição Beta-Binomial.

$$h(x) = \binom{n}{x} \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

7.1.3 Aplicação

Abaixo seguem algumas aplicações da distribuição Beta-Binomial:

- A Distribuição Beta-Binomial também pode ser modelada como uma urna de modelo Polya;
- Empregada em Fitossanidade, pois dadas as peculiaridades de determinadas espécies de insetos e patógenos, a pressuposição de que p possui o mesmo valor constante para todos os grupos não é válida (Madden & Hughes, 1995). Na literatura, esse padrão de distribuição é chamado de agrupado. Segundo Hoffmann et al. (1996), um indicativo de sua ocorrência seria quando a variância amostral estivesse maior que a variância de uma distribuição binomial esperada;
- Trabalhos relativos à distribuição espacial de incidência de doenças (Griffiths, 1973; Hughes & Madden, 1995);
- Empregada em Toxicologia e Teratologia;
- Na caracterização de doenças de Citrus. Onde o padrão espacial de doenças é estudado para se conhecer o mecanismo de atuação da doença e para orientar estratégias de controle. A distribuição beta-binomial é uma generalização da distribuição binomial quando assume-se que a incidência não é constante na região em estudo.

O modelo Beta-Binomial sob perspectiva clássica pode ser aplicado na área de renovação de contratos de planos de saúde coletivos empresariais, onde o interesse é determinar aprobabilidade do grupo de funcionários da empresa utilizar serviços de alto custo oferecidos pela operadora de saúde e a dependência entre os funcionários da empresa com relação ao evento de interesse. Já sob um enfoque Bayesiano, pode ser aplicado em finanças, cujo interesse é determinar a probabilidade de *default* de uma corporação e a relação de dependência entre as empresas de um mesmo grupo.

7.1.4 Definição

A distribuição beta-binomial (DBB) é uma extensão da distribuição binomial (DB), no sentido de o parâmetro binomial x não ser constante para todo grupo observado (unidade amostral). O modelo original da DBB foi proposto e obtido por Skellam (1948) a partir da pressuposição de que o número de sucessos y em n ensaios bernoullis por grupo era independente para todo grupo; isso é a probabilidade x de se detectar y sucessos em n observações varia de grupo a grupo. Tal variabilidade era descrita por uma distribuição beta com parâmetros α e β. A distribuição resultante é a beta-binomial e tem como função densidade de probabilidade:

$$f(y) = \binom{n}{y} \frac{B(\alpha + y, n + \beta - y)}{B(\alpha, \beta)}$$

em que $y = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ são conhecidos e $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.

Vale ressaltar que a distribuição beta-binomial é tipicamente a distribuição marginal obtida por uma inferência Bayesiana, em que se integra à função de distribuição conjunta dos dados (Y) e do parâmetro x, o produto da binomial pela beta, com relação a x.

Se $X \sim$ Beta(α, β), $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $Y|X = x \sim$ Binomial(n, x). Então, a conjunta de (X, Y) é dada por:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(Y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad &\Rightarrow \quad f_{X,Y}(x, y) = f_{Y/X}(Y/X = x) f_X(x) \\ &\Rightarrow \quad f_{X,Y}(x, y) = \binom{n}{y} x^y (1 - x)^{n-y} \frac{x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} I_{(0,1)}(x) I_{\{0,1,\ldots,n\}}(\\ &\Rightarrow \quad f_{X,Y}(x, y) = \binom{n}{y} \frac{x^{\alpha+y-1}(1 - x)^{n+\beta-y-1}}{B(\alpha, \beta)} I_{(0,1)}(x) I_{\{0,1,\ldots,n\}}(y) \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que a marginal de Y é:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\binom{n}{y}}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha+y-1}(1 - x)^{n+\beta-y-1} dx \\ &= \binom{n}{y} \frac{B(\alpha + y, n + \beta - y)}{B(\alpha, \beta)} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(y) \end{aligned}$$

Portanto, $Y \sim$Beta-Binomial (n, α, β).

7.1.5 Função densidade de probabilidade

Abaixo segue que a $\binom{n}{y}\dfrac{B(\alpha+y, n+\beta-y)}{B(\alpha,\beta)}I_{\{0,1,\ldots,\}}(y)$ é uma legítima função densidade de probabilidade.

– $f(y) > 0$, pois $y > 0$ e $n > y$ então $\binom{n}{y} > 0$ e $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

– $\sum\limits_{y=0}^{n} f(y) = 1$, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{y=0}^{n} f(y) &= \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}\frac{B(\alpha+y, n+\beta-y)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}\int_0^1 x^{\alpha+y-1}(1-x)^{\beta+n-y-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y}dx
\end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{y=0}^{n}\binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y} = 1$, aplicação do Binômio de Newton, então:

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \Rightarrow \frac{1}{B(\alpha,\beta)}B(\alpha,\beta) = 1$$

Portanto, temos que $f(y)$ é uma legítima função densidade de probabilidade. Abaixo alguns gráficos da fdp da distribuição beta-binomial:

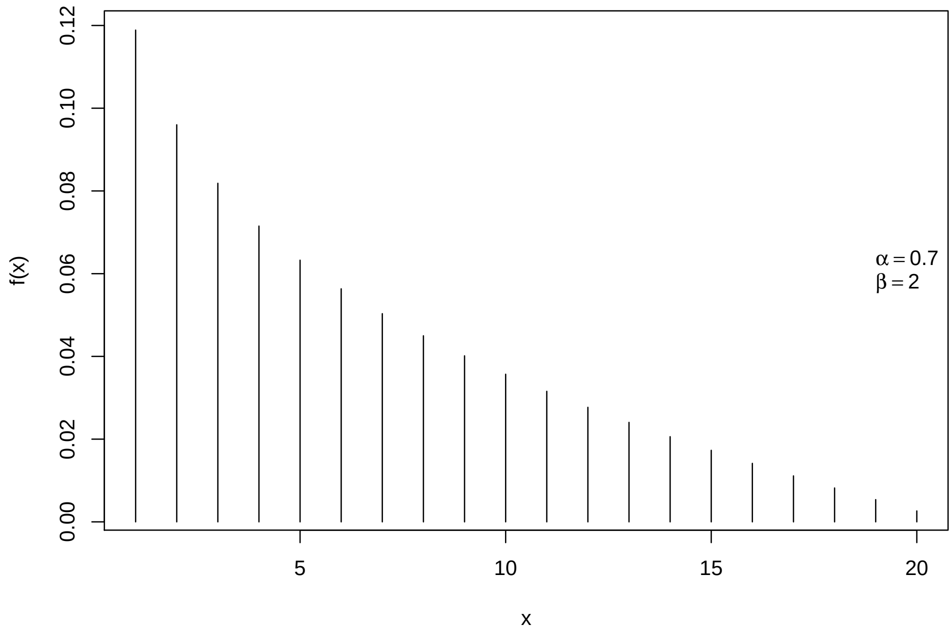


Figura 45: Fdp da distribuição beta-binomial

grafico2bb2.pdf

Figura 46: Fdp da distribuição beta-binomial

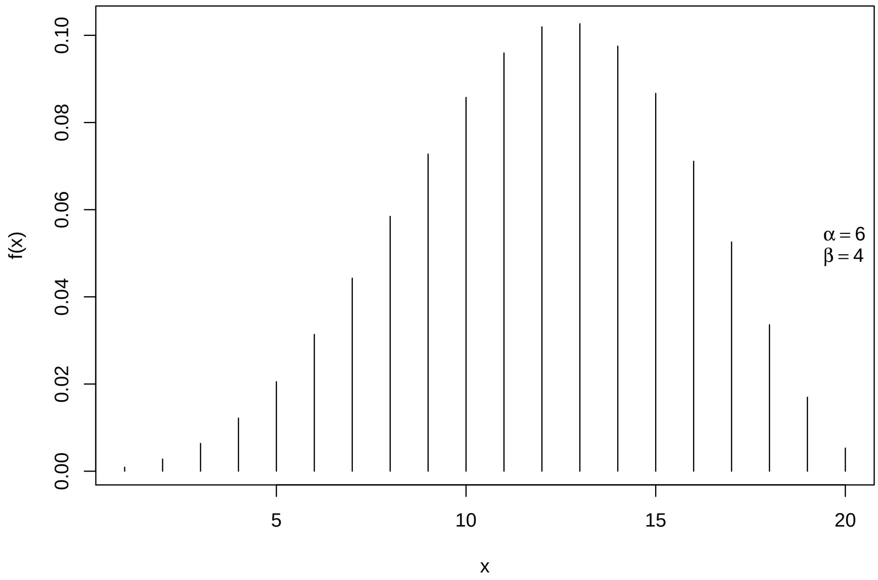


Figura 47: Fdp da distribuição beta-binomial

7.1.6 Função Distribuição Acumulada

$$F(y) = P(Y < y) = \sum_{i=0}^{y} \binom{n}{i} \frac{\Gamma(\alpha+i)\Gamma(n+\beta-i)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Abaixo alguns gráficos da fda da distribuição beta-binomial:

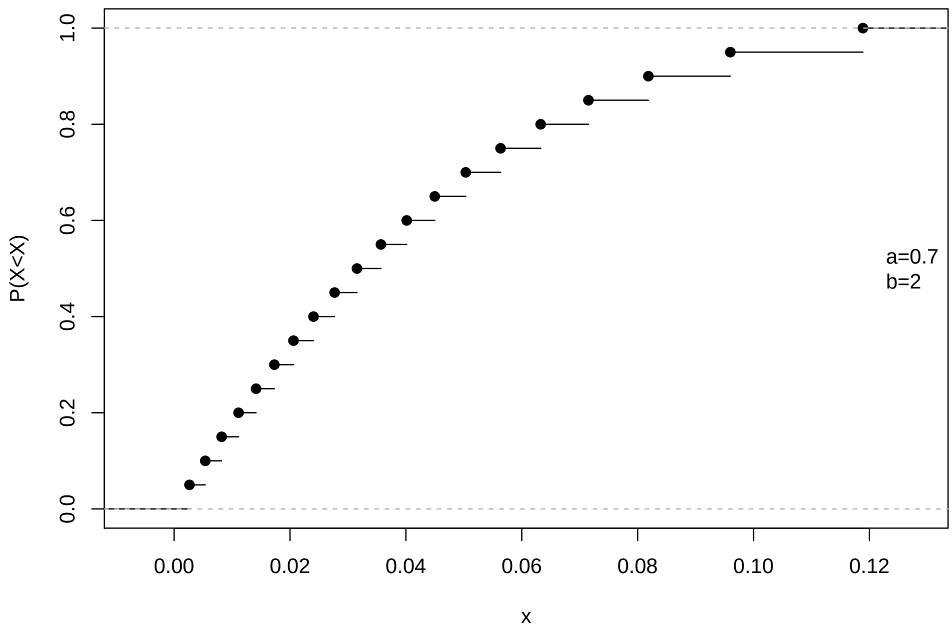


Figura 48: Fda da distribuição beta-binomial

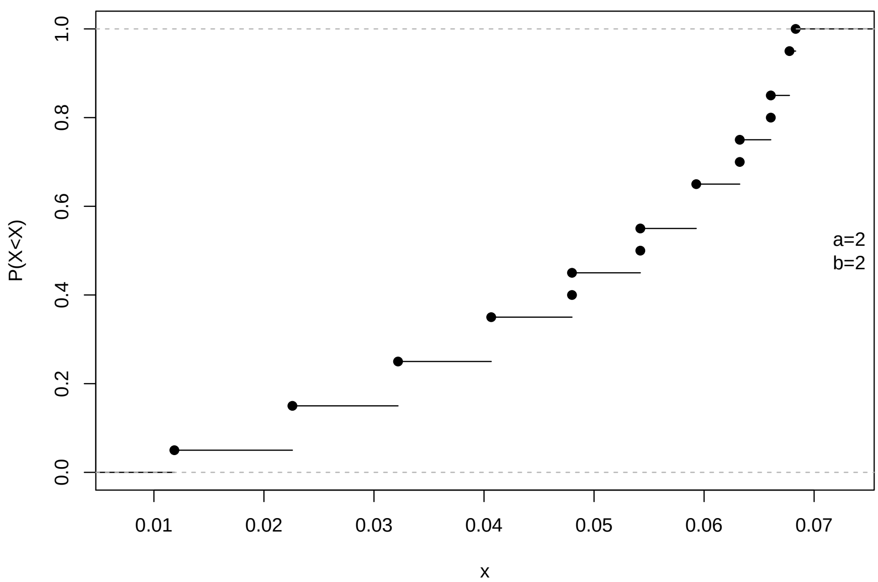


Figura 49: Fda da distribuição beta-binomial

7.1.7 Esperança

O valor esperado de uma variável aleatória $Y \sim Beta - Binomial(n, \alpha, \beta)$ é obtido abaixo:

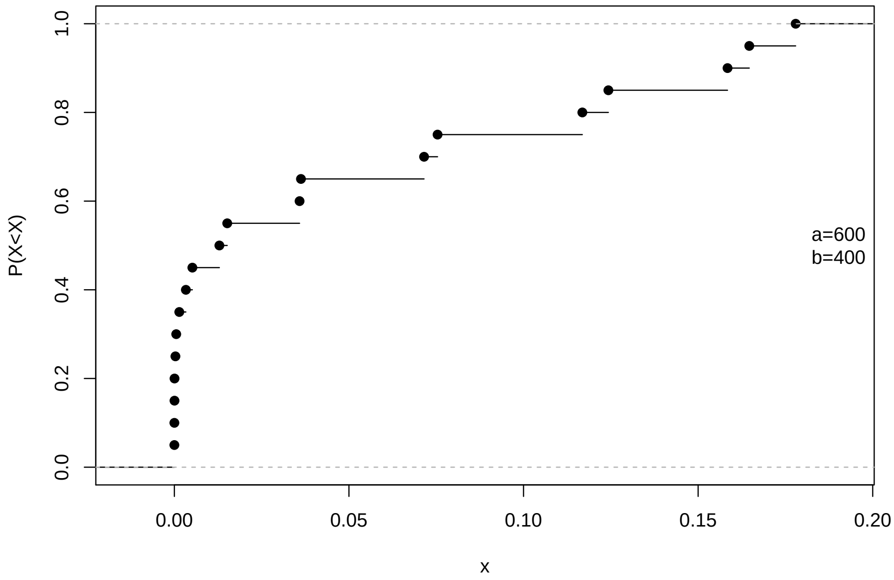


Figura 50: Fda da distribuição beta-binomial

1. Pela definição de esperança,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{n} y\binom{n}{y}\frac{B(\alpha+y,n+\beta-y)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{y=0}^{n} y\binom{n}{y}\int_0^1 x^{\alpha+y-1}(1-x)^{\beta+n-y-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 \sum_{y=0}^{n} y\binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\sum_{y=0}^{n} y\frac{n!}{(n-y)!y!}x^y(1-x)^{n-y}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}n\sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-y)!(y-1)!}x^y(1-x)^{n-y}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}n\sum_{y=1}^{n} \binom{n-1}{y-1}x^{y-1}(1-x)^{n-y}xdx
\end{aligned}
$$

Chamando $z = y - 1$, temos:

$$
E(Y) = \frac{n}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}x\sum_{z=0}^{n-1}\binom{n-1}{z}x^z(1-x)^{n-z-1}dx
$$

Aplicando o Binômio de Newton no somatório acima, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1-1}(1-x)^{\beta-1}1^{n-1}dx = n\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}\\
&= n\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{n\alpha\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\\
&= \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

2. Pela conjunta de (X,Y), onde $\alpha>0$, $\beta>0$, $Y/X=x\sim Binomial(n,x)$ e $X\sim Beta(\alpha,\beta)$,

$$E(Y)=E[E(Y/X)]=E(nX)=nE(X)=\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}$$

7.1.8 Variância

1. Pela definição de variância,

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$$

Anteriormente foi calculada a esperança de Y, necessita-se, agora, encontrar a esperança de Y^2. Como $y^2=y(1-y)+y$, então:

$$E(Y^2)=E(Y(Y-1))+E(Y)$$

Analisando, $E(Y(Y-1))$ separadamente, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{y=0}^{n} y(y-1)\binom{n}{y}\frac{B(\alpha+y,n+\beta-y)}{B(\alpha,\beta)}\\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{y=0}^{n} y(y-1)\binom{n}{y}\int_0^1 x^{\alpha+y-1}(1-x)^{\beta+n-y-1}dx\\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1\sum_{y=0}^{n} y(y-1)\binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\sum_{y=0}^{n} y(y-1)\frac{n!}{(n-y)!y(y-1)(y-2)!}x^y(1-x)\\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}n(n-1)\sum_{y=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-y)!(y-2)!}x^y(1-x)^{n-y}dx\\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}n(n-1)\sum_{y=1}^{n}\binom{n-2}{y-2}x^{y-2}(1-x)^{n-y}x^2dx
\end{aligned}
$$

Substituindo $z=y-2$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}x^2\sum_{z=0}^{n-2}\binom{n-2}{z}x^z(1-x)^{n-2-z}dx \\
&= \frac{n(n-1)}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+2-1}(1-x)^{\beta-1}1^{n-2}dx \\
&= n(n-1)\frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = n(n-1)\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&= n(n-1)\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= n(n-1)\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y) = n(n-1)\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} + \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}
$$

Finalmente, a variância de Y é:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{n(n-1)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} + \frac{n\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{n^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}
\end{aligned}
$$

2. Pela conjunta de (X,Y), onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $Y/X = x \sim Binomial(n,x)$ e $X \sim Beta(\alpha,\beta)$,

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Var(Y/X)) + Var(E(Y/X)) = E(nX(1-X)) + Var(nX) \\
&= nE(X(1-X)) + n^2Var(X)
\end{aligned}
$$

Analisando, separadamente $E(X(1-X))$:

$$
\begin{aligned}
E(X(1-X)) &= \int_0^1 \frac{x(1-x)}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1-1}(1-x)^{\beta+1-1}dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}B(\alpha+1,\beta+1) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} + \frac{n^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\left[1 + \frac{n}{\alpha+\beta}\right] \\
&= n\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}\right)
\end{aligned}
$$

7.1.9 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da distribuição beta binomial é dada por:

$$M_Y(t) = {}_2F_1(\alpha, -n; \beta + \alpha; (1 - e^t))$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{ty}) = E(E(e^{ty}|X = x)) = E(M_{Y|X=x}(t)) \\
&= E((1 - Xe^t + X)^n) = \frac{1}{B(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1 - xe^t + x)^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1 - (1 - e^t)x)^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= {}_2F_1(\alpha, -n; \beta + \alpha; (1 - e^t))
\end{aligned}$$

□

7.1.10 Função Característica

A função geradora de momentos da distribuição beta binomial é dada por:

$$\phi_Y(t) = {}_2F_1(\alpha, -n; \beta + \alpha; (1 - e^{it}))$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= E(e^{ity}) = E(E(e^{ity}|X = x)) = E(\phi_{Y|X=x}(t)) \\
&= E((1 - Xe^{it} + X)^n) = \frac{1}{B(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1 - xe^{it} + x)^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1 - (1 - e^{it})x)^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= {}_2F_1(\alpha, -n; \beta + \alpha; (1 - e^{it}))
\end{aligned}$$

□

7.1.11 R-ésimo momento fatorial

O coeficiente de assimetria da distribuição beta-binomial é dado por:

$$E(Y(Y-1)\dots(Y-r+1)) = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)\dots(Y-r+1)) &= \sum_{y=0}^{n} y(y-1)\dots(y-r+1)\binom{n}{y}\frac{B(\alpha+y, n+\beta-y)}{B(\alpha,\beta)} \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \sum_{y=0}^{n} \frac{y(y-1)\dots(y-r+1)n!}{(n-y)!y!} x^{\alpha+y-1}(1-x)^{n+\beta-y-1} d \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} \sum_{y=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)}{(n-y)!(y-r)!}
\end{aligned}$$

Substintuindo $z = y - r$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} \sum_{z=0}^{n-r} \frac{(n-r)!}{(n-r-z)!z!} x^z (1-x)^{n-r-z} dx \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha+r,\beta)
\end{aligned}$$

□

7.1.12 Coeficiente de assimetria

O coeficiente de assimetria da distribuição beta-binomial é dado por:

$$\frac{(\alpha+\beta+2n)(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta+2}\sqrt{\frac{1+\alpha+\beta}{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}}$$

Tem-se, utilizando a fórmula do r-ésimo momento fatorial, que:

- $E(Y) = \dfrac{n\alpha}{\alpha+\beta}$
- $E(Y^2) = E(Y(Y-1)+Y) = E(Y(Y-1))+E(Y) = \dfrac{n(n-1)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}+E(Y)$
- $E(Y^3) = E(Y(Y-1)(Y-2)-3Y^2+2Y) = E(Y(Y-1)(Y-2))+3E(Y^2)-2E(Y) = \dfrac{n(n-1)(n-2)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}+3E(Y^2)-2E(Y)$

Dessa forma, sendo $\mu = E(Y)$ e $\sigma = (V(Y))^{\frac{1}{2}}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^3\right] &= \frac{E(Y^3)-3E(Y)E(Y^2)+2(E(Y))^3}{(E(Y^2)-(E(Y))^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\alpha\beta n(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n)}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\left(\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n)}{(\alpha+\beta+2)}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}}
\end{aligned}$$

7.1.13 Coeficiente de curtose

O coeficiente de curtose da distribuição beta-binomial é dado por:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2(1+\alpha+\beta)}{n\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+n)}\left[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1+6n)+3\alpha\beta(n-2)+6n^2-\frac{3\alpha\beta n(6-n)}{\alpha+\beta}-\frac{18\alpha\beta n^2}{(\alpha+\beta)^2}\right]$$

7.1.14 Códigos no R

```
#Declarando a f.d.p.
densidade = function(x,a,b,n) choose(n,x)*beta(a+x,n+b-x)/beta(a,b)
x=1:20
#1° Gráfico
plot(densidade(x,0.7,2,20), type = "h", ylab = "f(x)", xlab = "x")
legend("right",c(expression(alpha==0.7),expression(beta==2)), bt="n",

#2° Gráfico
plot(densidade(x,2,2,20), type = "h", ylab = "f(x)", xlab = "x")
legend("right",c(expression(alpha==2),expression(beta==2)), bt="n", l

#3° Gráfico
plot(densidade(x,6,4,20), type = "h", ylab = "f(x)", xlab = "x")
legend("right",c(expression(alpha==6),expression(beta==4)), bt="n", l

#ecdf é uma função que acumula a f.d.p
x=1:10
#4° Gráfico
plot(ecdf(densidade(x,0.7,2,n)), ylab = "P(X<X)", xlab = "x", vertica
col.01line = "gray70", pch = 19, main= NULL)
legend("right",c("a=0.7","b=2"), bt="n", lty = 0)

#5° Gráfico
plot(ecdf(densidade(x,2,2,n)), ylab = "P(X<X)", xlab = "x", verticals
col.01line = "gray70", pch = 19, main= NULL)
legend("right",c("a=2","b=2"), bt="n", lty = 0)

#6° Gráfico
plot(ecdf(densidade(x,600,400,n)), ylab = "P(X<X)", xlab = "x", verti
col.01line = "gray70", pch = 19, main= NULL)
legend("right",c("a=600","b=400"), bt="n", lty = 0)
```

7.1.15 Simulação

Para a simulação será necessário instalar o pacote *VGAM*. Nesse pacote será possível gerar valores aleatórios utilizando *rbetabinom.ab*.

```
n=10
alpha=2
beta=3
# Gerando um vetor x de tamanho 10000 com valores aleatórios de uma b
# de parametros especificados acima
x=rbetabinom.ab(10000, size=n, shape1=alpha, shape2=beta, .dontuse.pr
k=hist(x,prob=TRUE)
k$counts=k$counts/10000
#Gerando a curva da beta binomial sob o histograma
```

```
plot(k,col='deeppink',ylab='density')
lines(0:10,dbetabinom.ab(0:10, size=10, log = FALSE,shape1=2,shape2=3
type='l',lwd=1)
```

Esse código gera o gráfico abaixo.

C:/Users/Geek/Documents/PET/Beta_Binomial/gr

Figura 51: Histograma dos valores aleatórios e a curva da f.d.p.

8 Complementar: ORDEM

Sem rigor matemático, exploraremos o conceito de ordem. Para uma primeira ideia, sejam z e z_0 pontos em uma região $\mathcal{R}$ do plano complexo. Agora, considere duas funções $f = f(z)$ e $g = g(z)$, onde $g(z) \neq 0$.

Se existir um número A independente de z tal que

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq A, \forall z \in \mathcal{R}$$

então, dizemos que

$$f(z) = O(g(z)) \quad \text{quando} \quad z \to z_0 \in \mathcal{R}.$$

9 APÊNDICE A

O apêndice A fornece alguns resultados matemáticos importantes para o texto. Não tomamos demonstrações e provas, apenas expressamos os resultados.

10 APÊNDICE B

Distribuição	função de probabilidade	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text
dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text
dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text
dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text
dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text
dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text	dummy text

Tabela 3: Distribuições discretas

11 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

1 BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. Estatística básica. Saraiva, 2010.

2 SHELDON, Ross et al. A first course in probability. Pearson Education India, 2002.

3 ROSS, Sheldon M. Introduction to probability models. Academic press, 2014.

4 MOOD, Alexander McFarlane. Introduction to the Theory of Statistics. 1950.

5 HOEL, Paul Gerhard; PORT, Sidney C.; STONE, Charles J. Introduction to probability theory. Boston: Houghton Mifflin, 1971.

6 KALBFLEISCH, James G. Probability and Statistical Inference: Volume 1: Probability. Springer Science & Business Media, 2012.

7 BOLFARINE, Heleno; SANDOVAL, Mônica Carneiro. Introdução à inferência estatística. SBM, 2001.

8 MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística. In: Probabilidade: aplicações à estatística. Livro Técnico, 1970.

9 DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. Probabilidade: Um Curso Introdutório Vol. 10. Edusp, 1997.

10 JAMES, Barry R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. 1996.

11 FELLER, William. An introduction to the theory of probability and its applications. M.: Mir (in Russian), 1967.