Relatório

DEC 0013 Projeto Integrador I
Grupo: 404! Name not found!

Sumário

Definindo Volume

Intuitivamente temos uma concepção do significado de volume, mas utilizando o cálculo devemos tornar precisa a definição do que é este conceito. Sendo assim, para a matemática podemos definir volume como o espaço ocupado por um corpo. O espaço ocupado pode ser definido como **V = A * h,** ou seja volume é a multiplicação da área da base de um sólido pela sua altura. No entanto, esta definição é muito simples e é mais comum no ensino médio. Para o cálculo, a definição de volume é [2]:

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\, \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx$$

Figura 1. Definição de Volume, James Stewart [2]

Sólidos Regulares

Sabendo a definição de volume, devemos nos perguntar o que são sólidos regulares, existem apenas 9 poliedros regulares, 5 são conhecidos por Sólidos Platônicos e 4 são Poliedros de Kepler-Poinsot.

Os Sólidos Platônicos obedecem três regras:

- São poliedros convexos, ou seja, a sua superfície não se intercepta e o segmento de linha que une quaisquer dois pontos do poliedro está contido no interior ou em sua superfície;
- Os polígonos que formam suas faces são regulares e congruentes.
- São poliedros de Platão, ou seja, todas as faces apresentam o mesmo número de áreas, todos os vértices possuem o mesmo número de arestas e obedece a relação de Euler:

Seja o número de faces igual a F, de arestas igual a A e de vértices igual a V, então vale a seguinte relação, chamada de relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

Figura 2. Definição da Relação de Euler.

Podemos ver então que existem apenas 5 sólidos platônicos, variando apenas em tamanho, sendo eles:

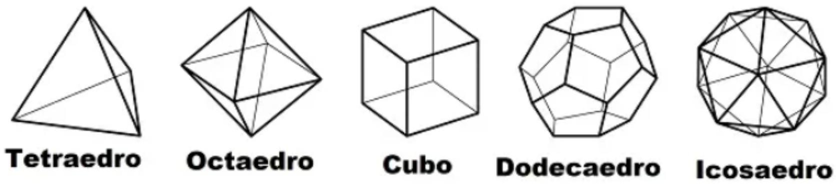


Figura 3. Poliedros Regulares Convexos de Platão.

Os Poliedros de Kepler-Poinsot também respeitam duas das três regras citadas acima, desrespeitando apenas a primeira, pois estes não são convexos. Sendo eles:

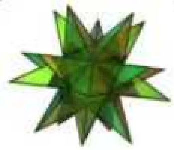
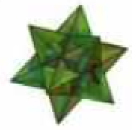
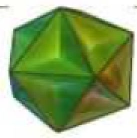
POLIEDRO	CARACTERÍSTICAS	FIGURA
Pequeno dodecaedro estrelado:	12 faces (pentagramas regulares); 12 vértices e 30 arestas	
Grande dodecaedro estrelado	12 faces (pentagramas regulares); 20 vértices; e 30 arestas	
Grande dodecaedro;	12 faces (pentágonos regulares); 12 vértices; e 30 arestas	
Icosaedro estrelado;	20 faces (triângulos equiláteros); 12 vértices; e 30 arestas.	

Tabela 1. Poliedros de Kepler-Poinsot [3]

Como estes poliedros variam em tamanho ou orientação, mantendo sua forma, é possível definir fórmulas específicas para o cálculo do seu volume, deduzindo-as pela definição do capítulo anterior. Sendo assim, para os sólidos platônicos temos que:

Para um tetraedro regular cujas arestas medem a, A_0 é a área da base e H a sua altura:

$$V = \frac{1}{3} A_0 H = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Figura 4. Volume Tetraedro Regular

Para um cubo cujas arestas medem a:

$$V = a^2 \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

Figura 5. Volume Cubo

Para um octaedro cujas arestas medem a:

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{2} a^3$$

Figura 6. Volume Octaedro

Para um dodecaedro cujas arestas medem a:

$$V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$$

Figura 7. Volume Dodecaedro

Para um icosaedro cujas comprimento do lado de cada face medem *l*:

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})l^3$$

Figura 8. Volume Icosaedro

Para uma esfera cujo raio mede r:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Figura 9. Volume Esfera

Para um cone cujo raio da base mede r e altura h:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Figura 10. Volume Cone

Para uma pirâmide triangular cuja aresta mede a:

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Figura 11. Volume pirâmide triangular

Para uma pirâmide quadrática cujo lado da base mede i e h é sua altura:

$$v = \frac{l^2 \cdot h}{3}$$

Figura 12. Volume pirâmide quadrática

Sólidos Irregulares

Diferentemente dos regulares, os sólidos irregulares não possuem uma forma geométrica definida, ou seja, não possuem arestas e vértices. São formados por curvas ou por regiões planas, como por exemplo, os sólidos de revolução. Dessa forma, não obedecem a relação de Euler.

Assim, para os sólidos de revolução, considera-se o gráfico de uma função, y = f(x), contínua e não negativa, sendo o plano bidimensional (x, y), coordenada x definida em um intervalo [a, b]. A região do plano (x, y) é delimitada pelo eixo x, pelas retas x = a e x = b, e pelo gráfico da função, conforme a Figura 13. [4]

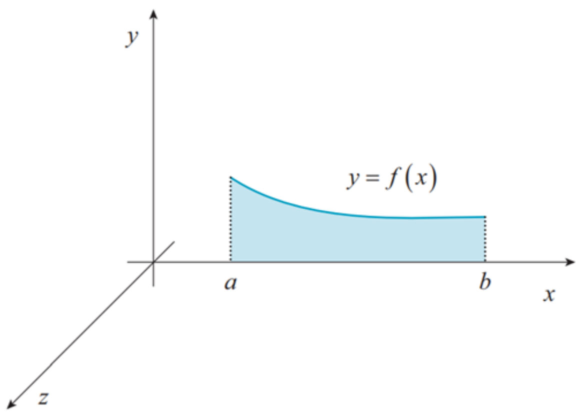


Figura 13. Gráfico da função y = f (x) no espaço tridimensional e a região do plano x y, sob este gráfico e acima do eixo x. [4]

Assim, é feita uma rotação da região plana ao redor do eixo x. Demonstrado na Figura 14.

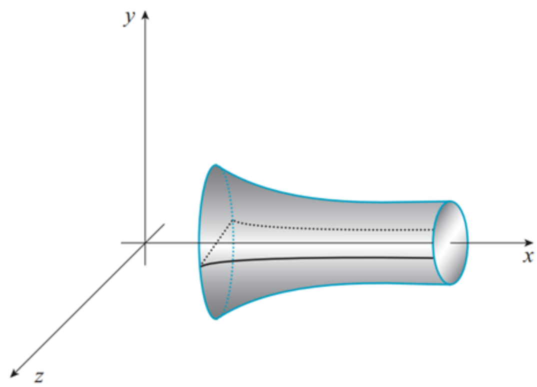


Figura 14. Sólido de revolução construído a partir do gráfico da função y = f (x).

Assim, um sólido de revolução é definido como:

Definição: Seja α um semiplano com origem em e (eixo de revolução) e uma superfície S nele contida ($S \subset \alpha$). Quando giramos o semiplano α em torno de sua origem e, a consequente rotação de S determina um sólido ao qual chamamos de **sólido de revolução.**

Figura 15. Definição de sólido de revolução. [4]

Para o cálculo do volume, existem dois métodos alternativos: no primeiro método, a integral é obtida como o limite da soma dos volumes de cilindros obtidos por aproximação através de cortes transversais do sólido de revolução gerado (Ω) determinados por partições do intervalo [a, b] do domínio da função f que está sendo considerado. No segundo método, considera-se a integral obtida como o limite das somas dos volumes de cascas cilíndricas, obtidas através da rotação de retângulos em torno do eixo y. [4]

Assim, para o primeiro método, o volume para o sólido de revolução pode ser obtido através da expressão (Figura 16).

Definição 3.5: O Volume de um sólido de revolução gerado pelo gráfico da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ao redor do eixo x, é dado pela integral

$$V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad (3.4)$$

Figura 16. Método dos Discos. [4]

Para o método das Cascas Cilíndricas, segundo método para o cálculo de volume, será útil para situações em que o eixo de rotação é o eixo y. Logo, define-se da seguinte forma (Figura 17).

Definição 3.6. O volume de um sólido Ω obtido pela rotação ao redor do eixo y da região entre o gráfico da função contínua não negativa $y=f(x)$ definida no intervalo $x\in[a,b]$, com $a\geq 0$, e o eixo x é dado por

$$V(\Omega)=2\pi\int_a^b xf(x)dx. \qquad (3.5)$$

Figura 17. Método das Cascas Cilíndricas. [4]

Além disso, existem casos em que o volume para sólidos irregulares pode ser obtido através da integral tripla. Dado pela seguinte expressão (Figura 18).

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k \quad \text{ou} \quad V=\iiint_T dV.$$

Figura 18. Cálculo de volume, método de integração tripla. [5]

Para estes casos, o sólido em questão é limitado por outros sólidos definidos.

Referências

[1] LIMA, Jandean da Silva. A utilização do Cálculo Diferencial e Integral para o cálculo de volume de sólidos geométricos. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/16992/3/2016_dis_jslima.pdf>. Acesso em: 18 de novembro de 2021.

[2] STEWART, James. Cálculo Volume I. 7° Ed. S. Paulo, CENGAGE Learning 2013.

[3] SÁ, C. C.; ROCHA, J. Treze viagens pelo mundo da matemática. Porto: U. Porto Editorial, 2010

[4] Batista, Eliezer; Toma, Elisa Z.; Fernandes, Márcio R.; Janesch, Silvia M. H. Cálculo II - 2 ed. - Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2012. 162 p. Disponível em: <https://mtm.grad.ufsc.br/livrosdigitais>. Acesso em 24 novembro de 2021.

[5] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo B – funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 6a edição. São Paulo (SP): Pearson, 2007, 296p.