Ronaldo Costa de Freitas

Primeira lista de exercícios

Manaus, Amazonas

2021

Ronaldo Costa de Freitas

Primeira lista de exercícios

Trabalho acadêmico apresentado à Faculdade de Sistemas de Informação da Universidade do Estado do Amazonas como requisito para obtenção de nota parcial à matéria de Matemática Básica ministrada pelo prof. Hiram Carlos Costa Amaral.

Universidade do Estado do Amazonas – UEA

Faculdade de Sistemas de Informação

Orientador: prof. Hiram Carlos Costa Amaral

Manaus, Amazonas

2021

Sumário

1 Resolução da lista de exercícios

1.1 Série A

1.

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Basta aplicar a equação $x = y + y^2$ para cada elemento do conjunto A em relação ao conjunto B.

p/ $x = -2$:
$y + y^2 = -2$
$y^2 + y + 2 = 0$
$\Delta = 1 - 4.1.2 = -7$
$S = \{(y', y'') \notin \mathbb{Z}\}$

p/ $x = -1$:
$y + y^2 = -1$
$y^2 + y + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4.1.1 = -3$
$S = \{(y', y'') \notin \mathbb{Z}\}$

p/ $x = 0$:
$y + y^2 = 0$
$y^2 + y = 0$
$y(y + 1) = 0$

$y' = 0$
$y'' = -1$

Pares formados: $(0, 0)$, $(0, -1)$

p/ $x = 1$:
$y + y^2 = 1$
$y^2 + y - 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4.1.(-1) = 5$
$S = \{(x', y'') \notin \mathbb{Z}\}$

__/__/__

para $x = 2$: $y + y^2 = 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4 . 1 . (-2) = 9$

$$y' = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$$

$$y'' = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$$

Pares formados $(-2, 2)$, $(2, 1)$

Resposta: $R = \{(2,-2), (0,-1), (0,0), (2,1)\}$

b) Resposta:

$D(x) = \{0, 2\}$

$Im(x) = \{-2, -1, 0, 1\}$

2

a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2} \Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x+2}} \Rightarrow \dfrac{5}{x+2} > 0 \Rightarrow x + 2 > 0$

$x > -2$

Resposta $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

CADERNO INTELIGENTE®

3. Resposta: apenas a relação G é uma função, já que ela é a única em que, para cada elemento do conjunto A, existe apenas um elemento correspondente do conjunto B.

4. $A = \{0, 1, 2\}$ $B = \{3, 4, 5\}$

p/ $y = 3$: $3 \leq x + 4$
$x \geq -1$

Pares formados: $(0,3), (1,3), (2,3)$

p/ $y = 4$: $4 \leq x + 4$
$x \geq 0$

Pares formados: $(0,4), (1,4), (2,4)$

p/ $y = 5$: $5 \leq x + 4$
$x \geq 1$

Pares formados: $(1,5), (2,5)$

Resposta: $D = \{(0,3), (1,3), (2,3), (0,4), (1,4), (2,4), (1,5), (2,5)\}$

d) D tem 8 elementos

5. $y = \dfrac{4x - 1}{2x - 3}$, basta resolver a equação para $y = 1$

$$\frac{4x - 1}{2x - 3} = 1 \Rightarrow 4x - 1 = 2x - 3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Resposta: c) $x = -1$

__/__/__

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y = x \end{cases}$

Basta aplicar a equação $y = x$ na inequação $x^2 + y^2 \leq 1$

$x^2 + x^2 \leq 1$ $\qquad x \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$2x^2 \leq 1$

$x^2 \leq \dfrac{1}{2}$

Existem infinitos números reais que satisfazem a inequação, logo, existem infinitos pares (x, y)

Resposta: d) infinitos pares

7.

a) Não é função: um dos elementos do conjunto A não corresponde a nenhum dos elementos do conjunto B.

b) Não é função: um dos elementos do conjunto A corresponde à mais de um elemento do conjunto B.

c) É função: todos os elementos do conjunto A correspondem a apenas um elemento do conjunto B.

d) É função: cada um dos elementos do conjunto A corresponde a apenas um elemento do conjunto B.

8. É preciso apagar uma das setas de x e retirar o elemento k.

Resposta d)

9. Apenas o desenho II não pode ser o gráfico de uma função, já que não respeita a definição de que cada elemento do domínio deve ter apenas uma imagem.

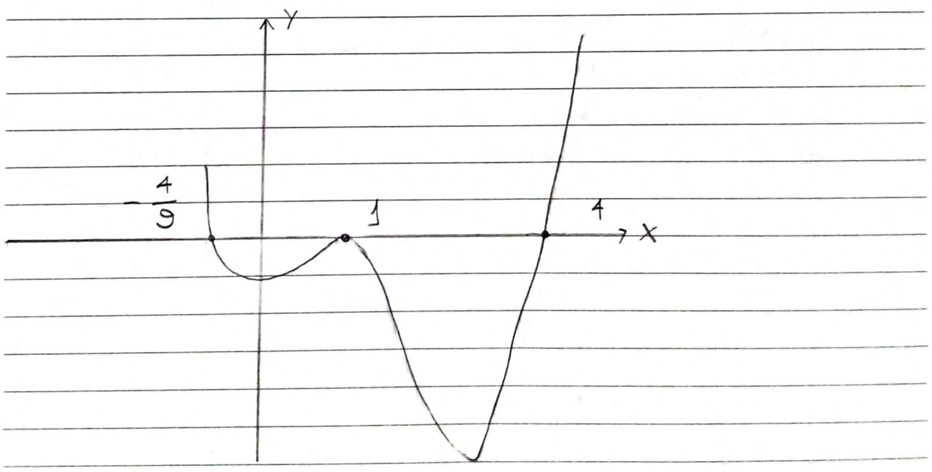
10. Desenvolvendo o polinômio, fica:

$$p(x) = x^4 - \frac{50}{9}x^3 + \frac{19}{3}x^2 - \frac{16}{9}$$

Sendo assim, as raízes são:

$$\left(-\frac{4}{9}, 0\right), (1,0), (4,0)$$

Plotando o gráfico, fica:

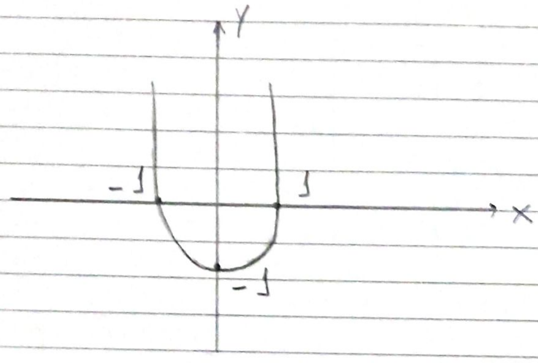


Resposta: d)

11.

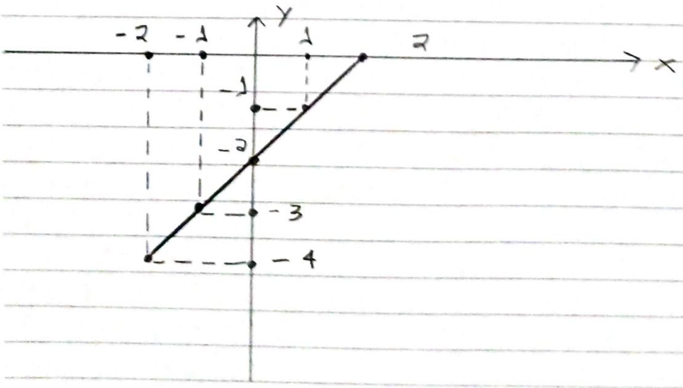
(a) $y = x^2 - 1$ $\quad D = \mathbb{R}$

Raízes: $(-1,0)$ e $(1,0)$ $\quad$ Mínimo: $(0,-1)$



(b) $f(x) = x - 2$, sendo $D = [-2, 2]$

p/ $x = -2$: $f(x) = -4$
p/ $x = -1$: $f(x) = -3$
p/ $x = 0$: $f(x) = -2$
p/ $x = 1$: $f(x) = -1$
p/ $x = 2$: $f(x) = 0$



__/__/__

12. $(2a-1,\ b+2) = (3a+2,\ 2b-6)$

$2a - 1 = 3a + 2$ $\qquad$ $b + 2 = 2b - 6$

$a = -3$ $\qquad$ $b = 8$

Resposta: $a = -3,\ b = 8$

13.

a) $(x+2,\ y-3) = (2x+1,\ 3y-1)$

$x + 2 = 2x + 1$ $\qquad$ $y - 3 = 3y - 1$

$x = 1$ $\qquad$ $2y = -2$

$y = -1$

Resposta: $x = 1,\ y = -1$

b) $(2x,\ x-8) = (1-3y,\ y)$

$$\begin{cases} 2x = 1 - 3x \\ x - 8 = y \end{cases}$$

$y = x - 8 \Rightarrow 2x = 1 - 3(x-8)$

$2x = 1 - 3x + 24$

$5x = 25$

$x = 5 \Rightarrow y = x - 8$

$y = -3$

Resposta: $x = 5,\ y = -3$

c) $(x^2+x, 2y) = (6, y^2)$

$x^2+x=6$
$x^2+x-6=0$
$\Delta = 1-4.1.(-6)=25$

$x' = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2$

$x'' = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$

$2y = y^2$
$y^2-2y=0$
$y(y-2)=0$

$y'=0$

$y''=2$

Resposta: $x=-3$ ou $x=2$ e $y=0$ ou $y=2$

14. $n(A \times B) = n(A) * n(B)$
$n(A \times B) = 5*7 = 35$

Resposta: 35 elementos

15. Apenas a relação que associa cada filho a sua mãe é uma função, já que cada filho está relacionado a apenas uma única mãe.

Resposta: b) somente a II

16. O gráfico da letra d, já que é o único em que cada elemento do domínio corresponde a apenas uma imagem.

__/__/__

17. $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ se for par} \\ 3n+1, \text{ se for ímpar} \end{cases}$

$f(n) = 25$

p/ $\frac{n}{2} = 25 \Rightarrow n = 50 \rightarrow$ é par: solução correta

p/ $3n+1 = 25 \Rightarrow 3n = 24 \Rightarrow n = 8 \rightarrow$ solução não satisfaz

Resposta: b) um

18. O gráfico c), visto que é o único em que os elementos do conjunto domínio correspondem, alguns, a mais de um elemento da imagem

19.

a) p/ $f(2,3)$: $2,3 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(2,3) = 1 \Rightarrow$ falso

b) p/ $f(3,1415)$: $3,1415 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3,1415) = 1 \Rightarrow$ falso

c) p/ $0 \leq f(a) + f(b) + f(c) \leq 3$: verdadeiro

Considerando os resultados de cada função, sendo ela racional ou não, a inequação é satisfeita.

Resposta: c)

20. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é par} \\ 1, \text{ se } x \text{ é impar} \end{cases}$

a) Não se pode considerar f injetora, já que elementos distintos do domínio têm imagens iguais.

b) Não se pode considerar f sobrejetora já que a imagem é diferente do contradomínio.

c) $f(-5) = -1$, $f(2) = 0$, logo $f(-5) \cdot f(2) \neq 1$

d) Falso, já que há casos em que $f(x) = 1$

e) Correto, a $Im(f) = \{0, 1\}$, ou seja, a função pode resultar em 0 e 1

Resposta: e) O conjunto imagem de f é $\{0, 1\}$

21.

a) Para que seja verdadeira, é suficiente que $f(x) = -g(x)$

b) Para que seja verdadeira, é necessária que $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, caso contrário, o resultado será um número positivo

Resposta: b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

22

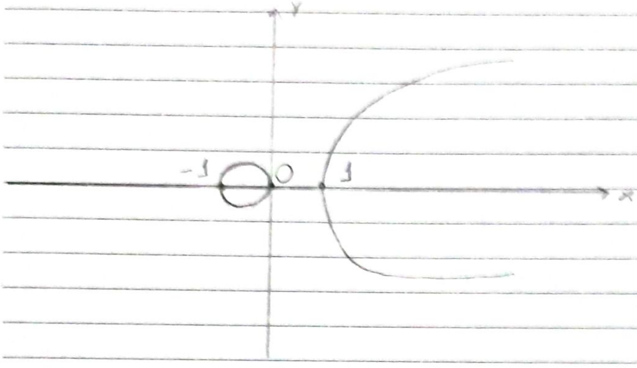
a) $T(x, y) = (x, 0)$, não é injetora, pois todos os elementos do domínio têm a mesma imagem.

 Resposta: a) $T(x, y) = (x, 0)$

1.2 Série B

1. $y^2 = x(x^2-1)$ Raízes $(1,0), (0,0), (1,0)$

Ao plotar o gráfico, tem-se



2. $f(x+1) = f(x+2)$ e $f(2) = 3$. $f(50) = ?$

$f(2+1) = f(2) + 2$
$f(3) = 3 + 2 = 5$

$f(3+1) = f(3) + 2$
$f(4) = 5 + 2 = 7$

A diferença é sempre 2, ou seja, trata-se de uma Progressão Aritmética cuja razão é 2. Como não sabemos o valor de $f(1)$, podemos considerar a posição de $f(50)$ como 1º na P.A

$a_2 = 3$ $r = 2$ $a_{50} = ?$

$a_{50} = a_2 + (49-1) \cdot r$ Resposta: d) 99
$a_{50} = 3 + 48 \cdot 2$
$a_{50} = 99$

__/__/__

3. $f(x+3) = x^2 + 1$

$t = x + 3 \Rightarrow$ usa t como incógnita auxiliar

$x = 3 - t$

$f(t) = (3-t)^2 + 1$

$f(t) = 9 - 6t + t^2 + 1$

$f(t) = t^2 - 6t + 10$

Resposta: d) $x^2 - 6x + 10$

4. $f(3x) = \dfrac{x}{2}$ $\quad f(x-1) = ?$

$t = 3x \Rightarrow$ usa t como incógnita auxiliar

$x = \dfrac{t}{3}$

$f(t) = \dfrac{\frac{t}{3}}{2} + 1 = \dfrac{t}{6} + 1 \Rightarrow f(t) = \dfrac{t}{6} + 1$

$x - 1 = t$

$f(x-1) = \dfrac{x-1}{6} + 1 \Rightarrow f(x-1) = \dfrac{x+5}{6}$

Resposta: a) $\dfrac{x+5}{6}$

__/__/__

5. $f(n+1) = \dfrac{2 \cdot f(n) + 1}{2}$ e $f(1) = 2$

$f(1+1) = \dfrac{2 \cdot f(1) + 1}{2} = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$f(2) = \dfrac{5}{2}$

$f(2+1) = \dfrac{2 \cdot f(2) + 1}{2} = \dfrac{\frac{10}{2} + 1}{2} = 3$

$f(3) = 3$

A diferença é sempre $\frac{1}{2}$, ou seja, trata-se de uma P.A de razão igual a $\frac{1}{2}$

$a_1 = 2 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_{101} = ?$

$a_{101} = 2 + (101-1) \cdot \frac{1}{2} = 52$

Resposta: d) 52

6. $f(x+1) = f(x) + f(1)$ e $f(2) = 1$

$$f(1+1) = f(1) + f(1)$$
$$f(2) = 2 \cdot f(1)$$
$$f(1) = \frac{f(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2+1) = f(2) + f(1)$$
$$f(3) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{3}{2}$$

A diferença é sempre $\frac{1}{2}$, ou seja, é uma P.A de razão igual a $\frac{1}{2}$.

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad r = \frac{1}{2}$ $\quad a_5 = ?$

$$a_5 = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: $\frac{5}{2}$

__/__/__

7. $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$Im(f) = \{1, 2, 2, 3, 2, \ldots\}$

Podemos concluir que: (1) f não é crescente, (2) f não é injetora (já que alguns elementos distintos do domínio têm imagens iguais) e (3) existe um número natural não-nulo n tal que $f(n) = n$, nesse caso, $f(1) = 1$.

Resposta: b) apenas I e II

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) > 2x$

(1) $f(-2) > 2 \cdot (-2) \Rightarrow f(-2) > -4$
$f(-2) = -3$

(2) $f\left(-\frac{1}{5}\right) > 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{5}\right) > -\frac{2}{5}$
$f\left(-\frac{1}{5}\right) > -0,4 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$

(3) $f\left(\frac{2}{3}\right) > 1.\overline{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

Sendo assim,

$f(-2) + f\left(-\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 + 0 + 2 = -1$

Resposta: -1

9. Para cada parte do gráfico temos as seguintes funções:

(1) de $(-1,0)$ até $(0,1)$: $f(x) = x+1$

(2) de $(0,1)$ até $(1,0)$: $f(x) = -x+1$

(3) de $(1,0)$ até $(2,2)$: $f(x) = 2x-2$

(4) de $(2,2)$ até $(3,2)$: $f(x) = 2$

(5) de $(3,2)$ até $(5,-2)$: $f(x) = -2x+8$

Para $g(x) = f(x+1)$:

(1) $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = x+1$: $g(x) = x+2$

(2) $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = -x+1$: $g(x) = -x$

(3) $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = 2x-2$: $g(x) = 2x$

(4) $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = 2$: $g(x) = 2$

(5) $g(x) = f(x+1)$ e $f(x) = -2x+8$: $g(x) = -2+6$

a) os zeros de $g(x) = 0$

(1) $g(x) = x+2 \rightarrow x = -2$
(2) $g(x) = -x \rightarrow x = 0$
(3) $g(x) = 2x \rightarrow x = 0$
(4) $g(x) = 2 \rightarrow 2 \neq 0$
(5) $g(x) = 6-2x \rightarrow x = 3$

Resposta: $x \in \{-2, 0, 3\}$

__/__/__

b) basta substituir os limites dos intervalos de $f(x)$ em $g(x)$ os quais são crescentes. Deste modo, $g(x)$ é crescente nestes seguintes intervalos:

$(-3, -1)$ e $(0, 1)$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se menor número} \\ -x+5, & \text{se menor número} \end{cases}$

Basta encontrar o x que equilibra as duas opções e aplicá-lo a cada uma:

$x + 1 = -x + 5 \Rightarrow x = 2$

p/ $f(x) = x + 1$
$f(2) = 3$

p/ $f(x) = -x + 5$
$f(2) = 3$

Maior valor: 3

Resposta: b) 3

11. $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2^{f(n)} \end{cases}$

$f(1) = f(0+1) = 2^{f(0)} = 2^1 = 2$

$f(2) = f(1+1) = 2^{f(1)} = 2^2 = 4$

$f(3) = f(2+1) = 2^{f(2)} = 2^4 = 16$

Resposta: $f(3) = 16$

12. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$$x^2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4.1.(-1) = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Resposta: b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

13. Resposta: b)