$H(X) \le \log_2(|suppX|)$

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i,b_j)\\
&= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i)p(b_j|a_i)\\
&= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)[\log_2 p(a_i)+\log_2 p(b_j|a_i)]\\
&= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i) - \sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log_2 p(b_j|a_i)\\
&= -\sum_{i,j} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i) - \sum_{i,j} p(a_i).p(b_j|a_i)\log_2 p(b_j|a_i)\\
&= -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\log_2 p(a_i)\sum_{j=1}^{n} p(b_j|a_i) + H(Y|X)\\
&= -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\log_2 p(a_i) + H(Y|X) = H(X)+H(Y|X)
\end{aligned}$$

(Do $\sum_{j=1}^{n} p(b_j|a_i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(b_j.a_i)}{P(a_i)} = \frac{1}{P(a_i)}\sum_{j=1}^{n} P(b_j.a_i) = \frac{1}{P(a_i)}P(a_i) = 1$)

$H(Y|X) \le -\sum_{j=1}^{d} Prob(X\in E_j)\log_2 j.$

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{a\in E_j} p(a)H(Y|a)\\
&\le \sum_{j=1}^{d}\sum_{a\in E_j} p(a)\log_2 j \qquad (1)\\
&= \sum_{j=1}^{d} Prob(X\in E_j)\log_2 j.
\end{aligned}$$

Định lý 1. Đặt $M = (m_{ij})$ là ma trận $n \times n$ chỉ chứa hai giá trị 0,1 và đặt $d_1, ..., d_n$ là tổng các hàng của ma trận M, hay $d_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$. Khi đó:

$$perM \le \prod_{i=1}^{n}(d_i!)^{1/d_i}.$$

Chứng minh: Xét $G = (U \cup V, E)$ là đồ thị hai phía tương ứng với ma trận M, trong đó d_i là bậc tương ứng của các đỉnh u_i, và kí hiệu Σ là tập các *perfect matching* của G. Vì $perM = m(G) = |\Sigma|$ nên thay vì tìm cận trên cho $perM$ như định lý 1, ta sẽ tìm cận trên cho $|\Sigma|$. Giả sử $|\Sigma| \ne 0$ và mỗi $\sigma \in \Sigma$ là một hoán vị tương ứng $\sigma(1)\sigma(2)....\sigma(n)$ của các chỉ số. Vì vậy, tương ứng với mỗi giá trị $u_i \in U$ là một giá trị $v_{\sigma(i)} \in U$ theo phép song ánh σ

Ý tưởng ban đầu là chọn σ một cách ngẫu nhiên và xét biến ngẫu nhiên $X = (X_1, X_2, .., X_n) = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$.
Theo mệnh đề **(A)**,

$$H(\sigma(1),\sigma(2),....,\sigma(n)) = \log_2(|\Sigma|)$$

Do đó chỉ cần chỉ ra

$$H(\sigma(1),...,\sigma(n)) \le \log_2(\prod_{i=1}^{n}(d_i!)^{1/d_i}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\log_2(d_i!). \qquad (2)$$

Sử dụng mệnh đề **(B)**, ta có

$$H(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) = \sum_{i=1}^{n} H(\sigma(\sigma_i)|\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i-1)) \tag{3}$$

Ý tưởng của Radhakrishnan là xét các đỉnh $u_1, u_2, ..., u_n$ theo một *thứ tự ngẫu nhiên* τ , với xác suất là như nhau và bằng $\frac{1}{n!}$, và lấy giá trị kì vọng của các entropy. Nói cách khác, ta xét các cặp *matching* theo thứ tự $\sigma(\tau(1)), \sigma(\tau(2)), ..., \sigma(\tau(n))$. Xét τ cố định, khi đó $k_i = \tau^{-1}(i)$ được hiểu là vị trí của u_i theo thứ tự ngẫu nhiên τ là k_i. Khi đó, biểu thức (2) trở thành:

$$H(\sigma(1), ..., \sigma(n)) = \sum_{i=1}^{n} H(\sigma(i)|\sigma(\tau(1)), ..., \sigma(\tau(k_i - 1)))$$

Khi đó

$$H(\sigma(1), ..., \sigma(n)) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau} \left(\sum_{i=1}^{n} H(\sigma(i)|\sigma(\tau(1)), ..., \sigma(\tau(k_i - 1))) \right)$$

Xét biểu thức

$$H(\sigma(i)|\sigma(\tau(1)), ..., \sigma(\tau(k_i - 1))) \tag{4}$$

Để tìm cận trên cho , ta sẽ sử dụng mệnh đề **(C)**, áp dụng với biến ngẫu nhiên $X = \Big(\sigma(\tau(1)), ..., \sigma(\tau(k_i - 1))\Big)$ và $Y = \sigma(i)$. Với mỗi σ đặt $N_i(\sigma, \tau)$

$\sigma(\tau_1), \sigma(\tau_2), ..., \sigma(\tau_n)$

$H(\sigma(\tau_1), .., \sigma(\tau_n)) = \sum\limits_{i=1}^{n} H(\sigma(\tau_i)|\sigma(\tau_1), ..., \sigma(\tau_{k_i-1}))$

$H(\sigma(\tau_1), .., \sigma(\tau_n)) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\tau} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} H(\sigma(\tau_i)|\sigma(\tau_1), ..., \sigma(\tau_{k_i-1})) \right)$

$\Theta(n^{\log_2 2})$