Análise Quantitativa de Dados em Linguística

Regressão Logística

Ronaldo Lima Jr.
ronaldojr@letras.ufc.br
ronaldolimajr.github.io

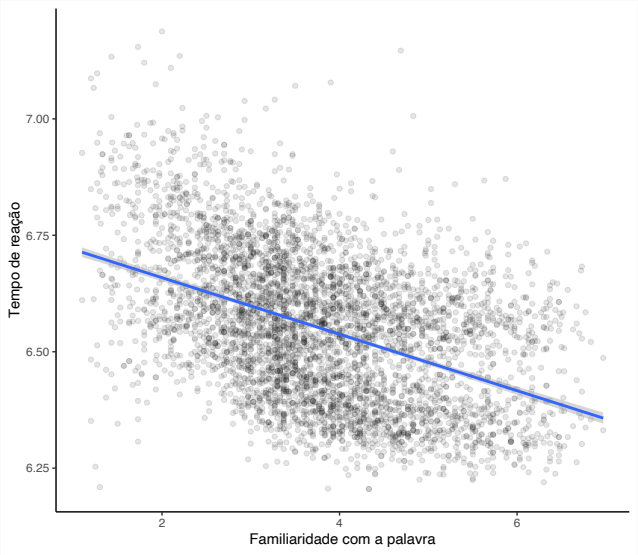
Universidade Federal do Ceará

Roteiro

1. Regressão Linear (revisão)
2. Regressão Logística
3. Modelo 1
4. Modelo 2

Regressão Linear (revisão)

Regressão Linear

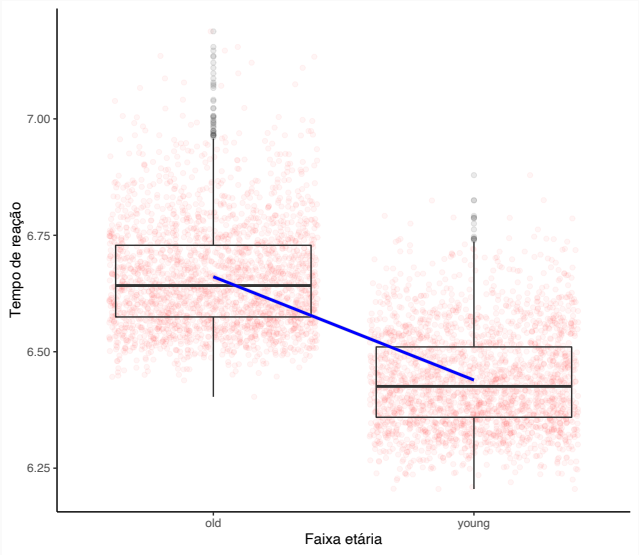



```
1 RTlexdec ~ Familiarity
```

→ Variável resposta contínua

→ Variável preditora contínua

Regressão Linear

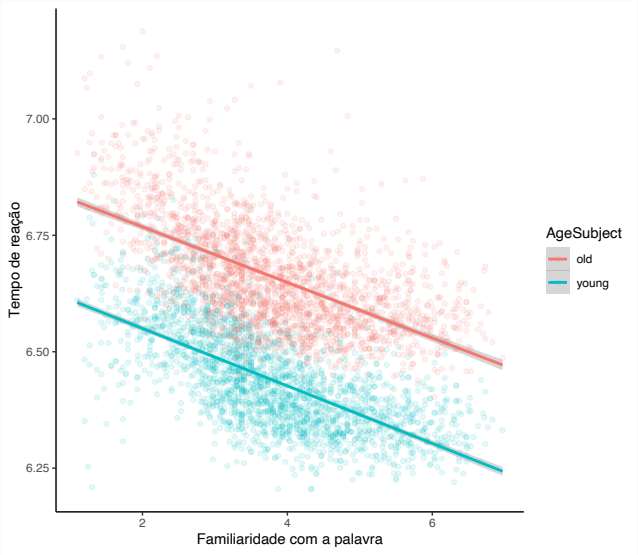



```
1 | RTlexdec ~ AgeSubject
```

→ Variável resposta contínua

→ Variável preditora categórica

Regressão Linear

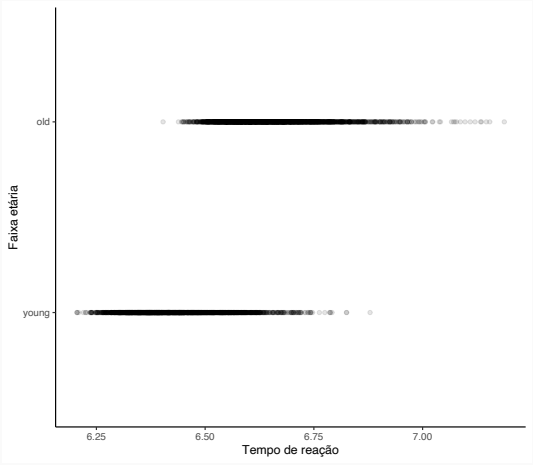



```
1 RTlexdec ~ Familiarity + AgeSubject
```

→ Variável resposta contínua

→ Variáveis preditoras contínuas e categóricas

Regressão Linear



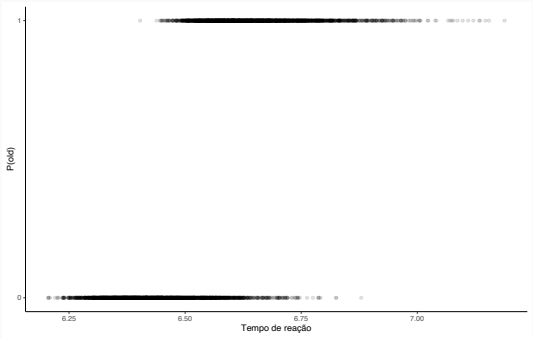
E se a variável preditora for binária? (`yes/no`, `0/1`, `good/bad`, `natural/unnatural`, etc.)

Ex.: modelar faixa etária em função do tempo de reação

i.e.: prever se um participante é jovem ou velho com base no seu tempo de reação

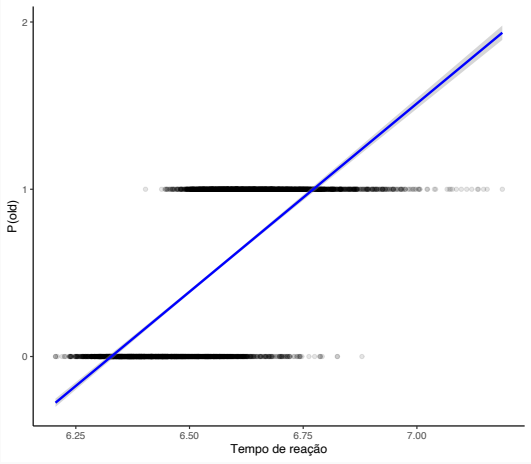
Tarefas de classificação como essa são muito comuns em *machine learning* (e é o que o Goldvarb faz por trás)

Regressão Linear



Nesses casos, não há uma unidade de medida no eixo y, então precisamos modelar/prever a probabilidade de um participante ser velho ou jovem diante de um tempo de reação.

Regressão Linear



Podemos simplesmente ajustar uma linha a esses dados?

```
1 lm(AgeSubject ~ RTLexdec)
```

- Claramente, não!

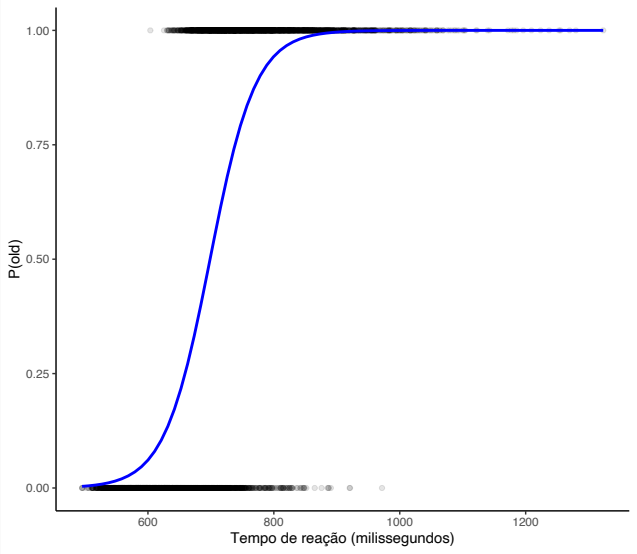
→ A maioria dos dados está longe da reta

→ Probabilidades vão de 0 a 1, e a reta estima probabilidades acima de 1 e abaixo de 0 (impossíveis)

O que fazer?

Regressão Logística

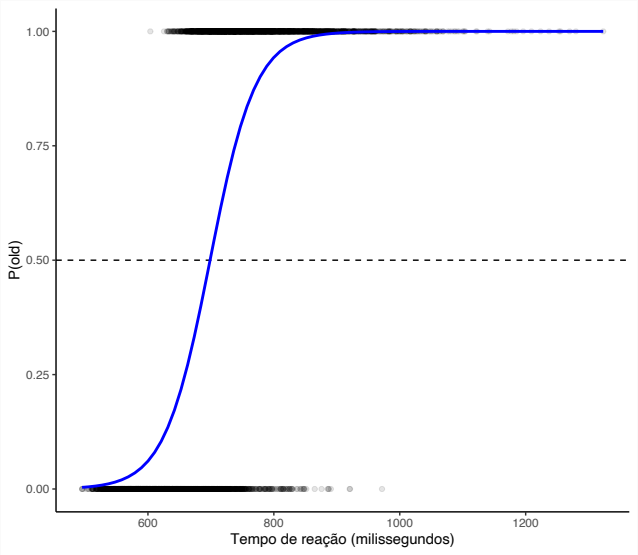
Regressão Logística



Utilizamos uma linha curva!

→ Neste caso, uma curva logística (ou sigmoide)

Regressão Logística



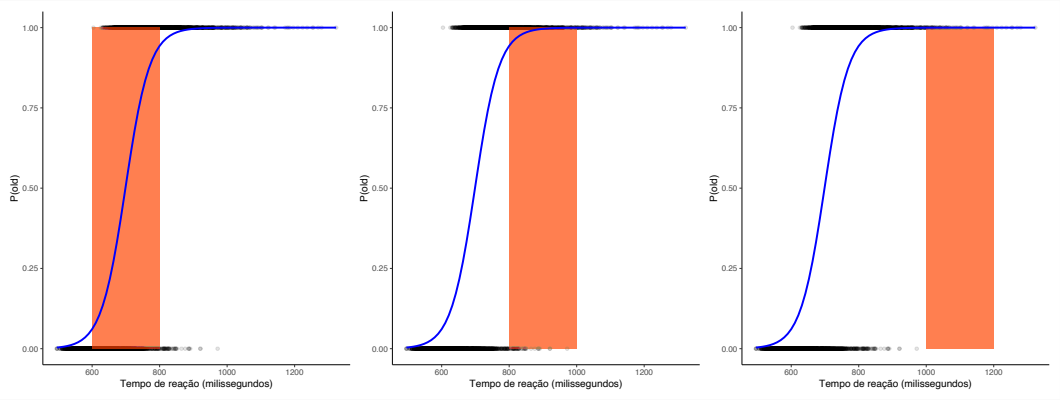
Utilizamos uma linha curva!

→ Neste caso, uma curva logística (ou sigmoide)

→ Porém, não podemos modelar a probabilidade em função das variáveis preditoras (neste caso P(old) em função do tempo de reação) porque a probabilidade não é constante (não é uma linha reta).

Regressão Logística

Mudanças de 200 milissegundos no tempo de reação:



Log-odds

Solução:

→ Utilizar uma medida relacionada a probabilidades, porém constante (linear), simétrica e facilmente reconvertida para probabilidades

→ *log-odds* (logaritmo das chances)

Odds (chances)

- As chances (odds) de algo ocorrer são a razão (divisão) da quantidade favorável pela quantidade desfavorável:
  - chances de um dado (justo) cair em um número específico = 1:5 = 0,2
  - chances de uma moeda (justa) cair cara = 1:1 = 1
  - Labov observou 195 apagamentos de /r/ e 21 produções de /r/ da loja Klein → chances de apagamento da loja Klein = 195:21 = 9,3
- As chances vão de 0 a ∞, com ponto de equilíbrio em 1:
  - chances entre 0 e 1: desfavorecem a ocorrência (dado)
  - chances de 1: ponto neutro/equilíbrio (moeda)
  - Chances maiores que 1: favorecem a ocorrência (apagamento de /r/ da Klein)

Problema: a escala das chances não é simétrica

$$0 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow \infty$$

Probabilidade

- A probabilidade de algo ocorrer é a razão (divisão) da quantidade favorável pela quantidade total:
  - probabilidade de um dado (justo) cair em um número específico $= 1/6 = 0{,}1666 \approx 17\%$
  - probabilidade de uma moeda (justa) cair cara $= 1/2 = 0{,}5 = 50\%$
  - Labov observou 195 apagamentos de /r/ e 21 produções de /r/ da loja Klein $\rightarrow$ probabilidade de apagamento da loja Klein $= 195/216 = 0{,}9027778 \approx 90\%$
- Probabilidade vai de 0 a 1, com ponto de equilíbrio em 0,5 (a escala é simétrica):
  - probabilidades entre 0 e 0,5 ($< 50\%$): desfavorecem a ocorrência (dado)
  - probabilidade de 0,5 (50%): ponto neutro/equilíbrio (moeda)
  - probabilidades maiores que 0,5 ($> 50\%$): favorecem a ocorrência (apagamento de /r/ da Klein)

Problema: o ponto de equilíbrio em 0,5 nem sempre é intuitivo; e, a mudança de probabilidade na curva logística (sigmoide) que utilizaremos não é constante

log-odds

- Ao tirarmos o logaritmo natural (log) das chances (odds), resolvemos o problema da assimetria da escala das chances, pois os valores de 0 a 1 ficam negativos; e resolvemos a não constância da probabilidade na curva logística, pois os valores em log-odds serão constantes
- A escala em log-odds vai de $-\infty$ a $+\infty$
- É simples fazer uma conversão entre qualquer uma dessas três medidas (probabilidade, chances/odds, log-odds)

Conversões

- probabilidade $\leftrightarrow$ odds
  - $p = odds/1 + odds$
  - $odds = p/1 - p$

- odds $\leftrightarrow$ log-odds
  - log-odds $=$ log(odds)
  - odds $=$ exp(log-odds)

- probabilidade $\leftrightarrow$ log-odds
  - $logodds = log(p/1 - p)$
  - $p = 1/1 + exp(-logodds)$

```
arm::invlogit()

ilogit = function(x) {
  1/(1+exp(-x))}
```

Conversões

Probabilidade	Chances (odds)	Log-odds
0,001	0,001	-6,91
0,01	0,01	-4,6
0,05	0,51	-2,94
0,1	0,11	-2,2
0,25	0,33	-1,1
0,5	1	0
0,75	3	1,1
0,9	9	2,2
0,95	19	2,94
0,99	99	4,6
0,999	999	6,91

- Obs. sobre log-odds:

→ valores negativos = baixa probabilidade (desfavorece)

→ valores positivos = alta probabilidade (favorece)

→ log-odd de 2 $\approx$ 90% (ou 10%) de probabilidade

→ log-odd de 4 $\approx$ 99% (ou 1%) de probabilidade

Modelos Lineares Generalizados

- Modelos Lineares e Modelos Logísticos são parte de uma mesma família

Generalized Linear Models (GLMs):
Linear, Logistic, Ordinal, Poisson, Multinomial, etc.

- Consequentemente, o output de uma regressão linear e de uma regressão logística é muito semelhante
- Principais diferenças:

→ coeficientes são dados em log-odds (conversíveis para probabilidade)

→ não há R^2, pois não há resíduos

Modelo 1

Modelo de Regressão Logística 1

Exemplo 1 (modelo com 1 variável preditora contínua)

Dados 'english' do pacote languageR

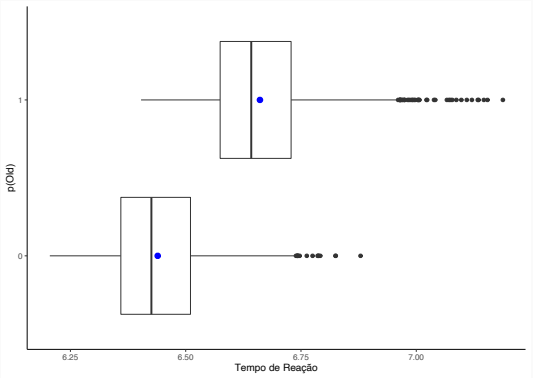
- Com modelo de regressão linear buscamos prever tempo de reação a partir da faixa etária (RTlexdec em função de AgeSubject)

→ Podemos agora prever a faixa etária a partir do tempo de reação (AgeSubject em função de RTlexdec)?

Modelo de Regressão Logística 1

Contrast Coding:

```
english = english %>%
  dplyr::select(RTlexdec, AgeSubject) %>%
  mutate(Old = as.factor(
    ifelse(AgeSubject == "old", 1, 0)
    ))

    RTlexdec AgeSubject Old
1   6.543754      young   0
2   6.397596      young   0
3   6.304942      young   0
4   6.424221      young   0
5   6.450597      young   0
```



Modelo de Regressão Logística 1

```
model.eng = glm(Old ~ RTlexdec, data = english, family = binomial())
summary(model.eng)
```

```
Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.6178  -0.4229  -0.0235   0.5312   2.3951

Coefficients:
             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -128.6308     3.8008  -33.84   <2e-16 ***
RTlexdec      19.6497     0.5804   33.86   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6332.6  on 4567  degrees of freedom
Residual deviance: 3145.8  on 4566  degrees of freedom
AIC: 3149.8
```

Modelo de Regressão Logística 1

Interpretação dos coeficientes:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -128.6308     3.8008  -33.84   <2e-16 ***
RTlexdec      19.6497     0.5804   33.86   <2e-16 ***
```

- *Intercept*: probabilidade de ser `Old` quando tempo de reação = 0

→ -129 log-odds (negativo, valores de referência da tabela)

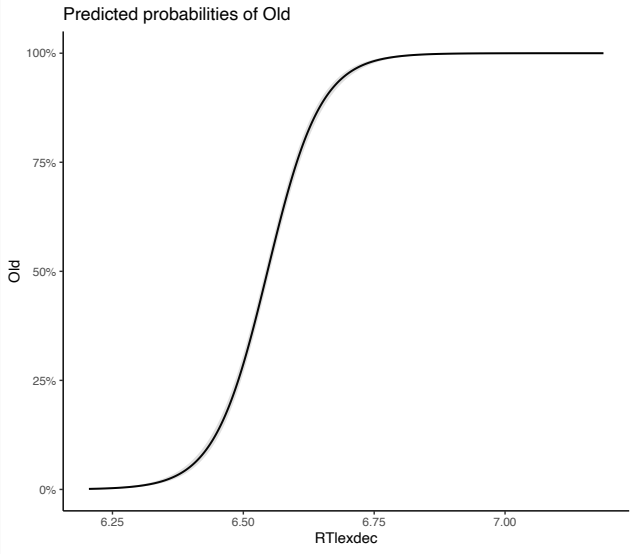
- *Slope*: quanto o *intercept* muda (neste caso aumenta) em log-odds para cada unidade de mudança em `RTlexdec`

→ 20 log-odds a mais para cada unidade de aumento em tempo de reação (não podemos transformar este *slope* em probabilidade porque a probabilidade da curva logística não é constante)

Modelo de Regressão Logística 1

Prever probabilidades de 'Old':

```
1  invlogit(-128.6308 + 19.6497)
2  4.678532e-48

3  invlogit(-128.6308 + (2*19.6497))
4  1.599064e-39

5  invlogit(-128.6308 + (6.25*19.6497))
6  0.002958308

7  invlogit(-128.6308 + (6.5*19.6497))
8  0.2874605

9  invlogit(-128.6308 + (6.75*19.6497))
10 0.9820962

11 invlogit(-128.6308 + (7*19.6497))
12 0.9998659
```



Modelo 2

Modelo de Regressão Logística 2

Exemplo 2 (modelo com variáveis preditoras categóricas)

Dados 'Labov'

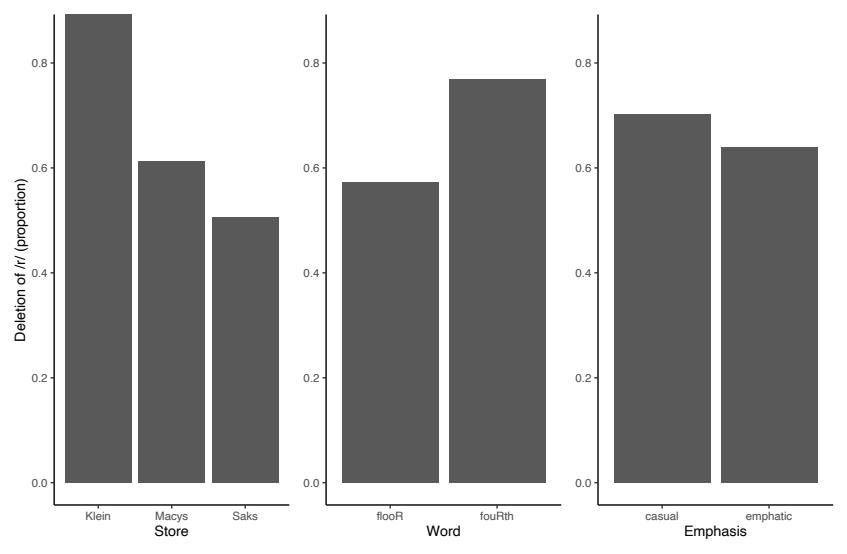
- Modelar/explicar/prever apagamento do /r/ em coda em função de:

→ loja/classe socioeconômica (Klein, Macys, Saks)

→ palavra/posição do /r/ – coda medial ou final (fouRth, flooR)

→ ênfase (casual, enfático)

Modelo de Regressão Logística 2



Modelo de Regressão Logística 2

Modelo com apenas "loja" como preditor:

```
# Contrast coding para modelarmos apagamento
labov = labov %>%
  mutate(deletion = if_else(r == "r0", 1, 0))

mLabov.store = glm(deletion ~ store,
                   data = labov,
                   family = "binomial")
summary(mLabov.store)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   2.2285     0.2296   9.704  < 2e-16 ***
storeMacys   -1.7049     0.2559  -6.663 2.68e-11 ***
storeSaks    -2.1385     0.2743  -7.796 6.41e-15 ***
```

- Todos coeficientes significativos
- *Intercept* = probabilidade (em log-odds) de apagamento na loja Klein (positivo)

  `arm::invlogit(2.2285) = 0.90`
- *Slope: Macys* = mudança no intercept na Macys (negativo = probabilidade diminui)

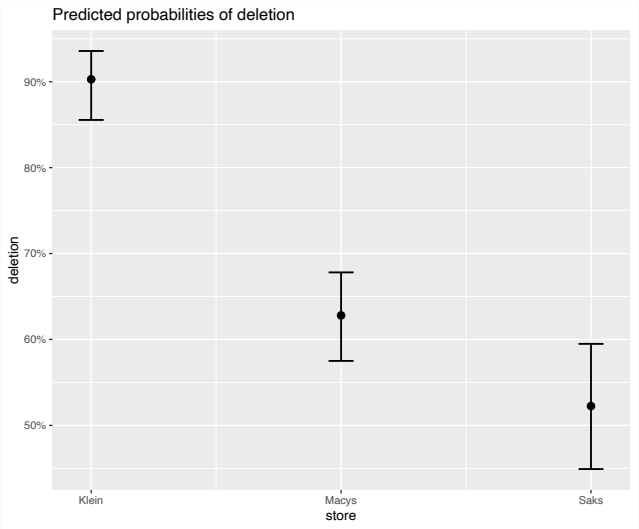
  `invlogit(2.2285-1.7049) = 0.63`
- *Slope: Saks* = mudança no intercept na Saks (negativo = probabilidade diminui)

  `invlogit(2.2285-2.1385) = 0.52`

Fazemos os cálculos com os log-odds e transformamos (com ‘`invlogit()`’, por exemplo) apenas o resultado (e não os coeficientes)

Modelo de Regressão Logística 2

Gráfico das probabilidades previstas pelo modelo (90%, 63% e 52%) com seus intervalos de 95% de confiança:



Modelo de Regressão Logística 2

Modelo com "loja" e "palavra" como preditores:

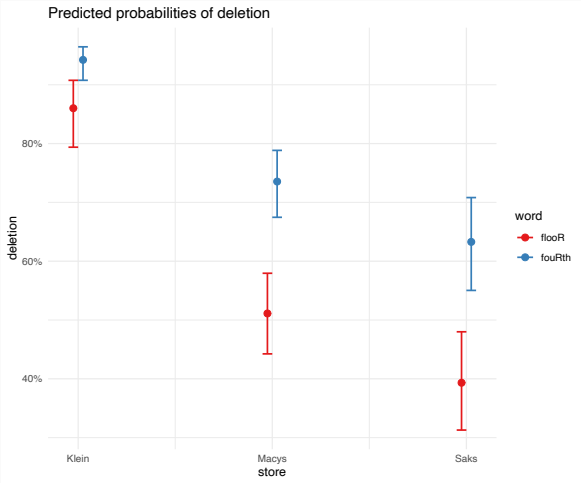
```
mLabov.store.word = glm(deletion ~ store + word,
                    data = labov,
                    family = "binomial")
summary(mLabov.store.word)

Coefficients:
             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    1.8165     0.2388   7.606 2.82e-14 ***
storeMacys    -1.7718     0.2603  -6.806 1.00e-11 ***
storeSaks     -2.2500     0.2810  -8.008 1.17e-15 ***
wordfouRth     0.9778     0.1742   5.614 1.98e-08 ***
```

- Todos coeficientes significativos
- Os coeficientes das lojas continuam com os mesmos sinais negativos, mas com valores diferentes, pois o modelo agora tem mais informações
- O *intercept* agora representa a probabiliadde (em log-odds) de apagamento da palavra "floor" na loja Klein
- Coeficiente de `word:fouRth` é positivo, indicando que a probabilidade de apagamento em "fourth" aumenta (em relação a "floor")

Modelo de Regressão Logística 2

Probabilidades previstas:

```
pred.store.word =
  tibble(store = rep(levels(labov$store), times = 2),
         word = rep(levels(labov$word), each = 3)) %>%
  mutate(pred = predict(mLabov.store.word,
                        newdata = pred.store.word,
                        type = "response"))
pred.store.word

1 Klein flooR  0.860
2 Macys flooR  0.511
3 Saks  flooR  0.393
4 Klein fouRth 0.942
5 Macys fouRth 0.735
6 Saks  fouRth 0.633
```



Modelo de Regressão Logística 2

Modelo com “loja”, “palavra” e “ênfase” como preditores:

```
mLabov = glm(deletion ~ store + word + emphasis,
                        data = labov,
                        family = "binomial")
summary(mLabov)
```

```
Coefficients:
                 Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)        1.9473     0.2514   7.746 9.47e-15 ***
storeMacys        -1.8004     0.2615  -6.884 5.81e-12 ***
storeSaks         -2.2564     0.2817  -8.011 1.13e-15 ***
wordfouRth         0.9912     0.1749   5.666 1.46e-08 ***
emphasisemphatic  -0.3197     0.1787  -1.789   0.0736 .
```

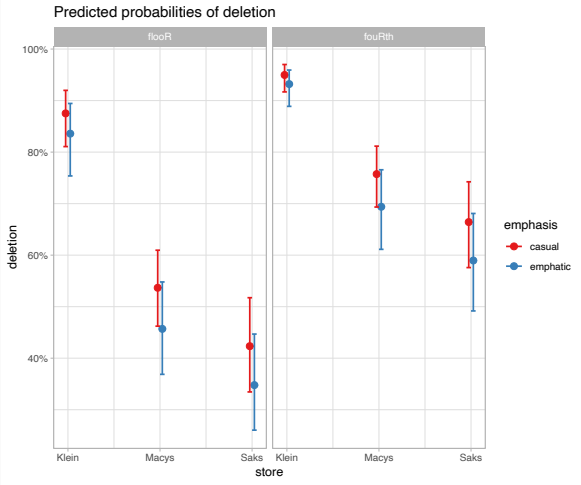
- Coeficiente para `emphasis` não significativo - tamanho de efeito pequeno
- Demais coeficientes mantêm suas direções (com valores levemente diferentes)

Modelo de Regressão Logística 2

Probabilidades previstas:

```
pred.labov =
  tibble(store = rep(levels(labov$store), times = 4),
         word = rep(levels(labov$word), each = 6),
         emphasis = rep(levels(labov$emphasis),
                        times = 2, each = 3)) %>%
  mutate(pred = predict(mLabov,
                        newdata = pred.labov,
                        type = "response"))
```

```
1 Klein flooR  casual   0.875
 2 Macys flooR  casual   0.537
 3 Saks  flooR  casual   0.423
 4 Klein flooR  emphatic 0.875
 5 Macys flooR  emphatic 0.537
 6 Saks  flooR  emphatic 0.423
 7 Klein fouRth casual   0.932
 8 Macys fouRth casual   0.694
 9 Saks  fouRth casual   0.590
10 Klein fouRth emphatic 0.932
11 Macys fouRth emphatic 0.694
12 Saks  fouRth emphatic 0.590
```



Perguntas?