Contents

3D Best Fit Plane

命题

给定一组点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2),P_3(x_3,y_3,z_3)\ldots P_n(x_n,y_n,z_n)$，拟合最佳平面，给出平面方程。

几何

平面方程：

$Ax+By+Cz+D=0$,其中平面法向量$\vec{n}=(A,B,C)$

求解思路

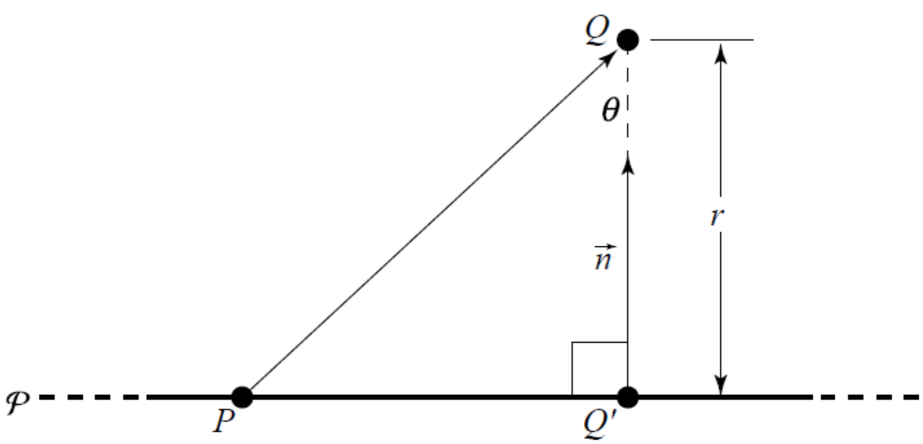
正交回归：

使得所有的点 P 到平面的距离方差最小的平面即所求平面。

几何推导

这里主要需要知道点到平面的距离：

如图



假设$\vec{n}$是平面的法向量，求点 Q 到平面的距离r。

推导：

$$\left|\overrightarrow{QQ'}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cos\theta$$

$$\left|\overrightarrow{QQ'}\right| = \frac{|\vec{n}||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\vec{n}|}$$

取$\vec{n}$为单位向量，则有

$$\left|\overrightarrow{QQ'}\right| = \vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

P 点是平面上的一点，我们可以假设 P 为 CenterOid，即所有给出样本点的数学期望。

假设 P 为P_0,则有$P_0 = (\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n})$。我们将$P_0$设为$P_0$（$x_0, y_0, z_0$）

则P_1到平面的距离为

$$D_1 = \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$$

$$D_2 = \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{(P_2 - P_0)}$$

$$\vdots$$

$$D_n = \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_n} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{(P_n - P_0)}$$

以下有两种推导方法，我们先使用具体方法推导，较容易理解。

方差为：

$$\mathrm{S} = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$$

具体方法：

带入$D_1, D_2 \cdots D_n$,则有

$$S = \left(\left(\vec{n} \cdot \overline{(P_1 - P_0)}\right)^2 + \left(\vec{n} \cdot \overline{(P_2 - P_0)}\right)^2 + \cdots \left(\vec{n} \cdot \overline{(P_n - P_0)}\right)^2\right) =$$

$$\left(\mathrm{A}(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)\right)^2 +$$

$$\left(\mathrm{A}(x_2 - x_0) + B(y_2 - y_0) + C(z_2 - z_0)\right)^2 +$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$(\mathrm{A}(x_n - x_0) + B(y_n - y_0) + C(z_n - z_0))^2$$

$$= A^2(x_1 - x_0)^2 + B^2(y_1 - y_0)^2 + C^2(z_1 - z_0)^2 + 2AB(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + 2AC(x_1 - x_0)(z_1 - z_0) + 2BC(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) +$$

$$A^2(x_2 - x_0)^2 + B^2(y_2 - y_0)^2 + C^2(z_2 - z_0)^2 + 2AB(x_2 - x_0)(y_2 - y_0) + 2AC(x_2 - x_0)(z_2 - z_0) + 2BC(y_2 - y_0)(z_2 - z_0) +$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$A^2(x_n - x_0)^2 + B^2(y_n - y_0)^2 + C^2(z_n - z_0)^2 + 2AB(x_n - x_0)(y_n - y_0) + 2AC(x_n - x_0)(z_n - z_0) + 2BC(y_n - y_0)(z_n - z_0)$$

$=\sum_{i=1}^{n} A^2(x_i - x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} B^2\left(y_i - x_y\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} C^2(z_i - z_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} 2AB(x_i - x_0)(y_i - y_0) +$
$\sum_{i=1}^{n} 2AC(x_i - x_0)(z_i - z_0) + \sum_{i=1}^{n} 2BC(y_i - y_0)(z_i - z_0)$

$$
= [A \quad B \quad C]\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2 & \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(y_i-y_0) & \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(z_i-z_0) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(y_i-y_0) & \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-x_y\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)(z_i-z_0) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(z_i-z_0) & \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)(z_i-z_0) & \sum_{i=1}^{n}(z_i-z_0)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{n^T} M \boldsymbol{n}
$$

其中M为我们熟悉的二次型。

当我们要求 S 最小时，根据正定矩阵二次型的性质我们可以知道，将$\mathrm{M} = \boldsymbol{u}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}^{-1}$

找到特征值最小的λ_k，取$\boldsymbol{n^T}$对应的特征向量$\boldsymbol{u_k}$即为使得二次型最小。由此求得平法方向。最后带入P_0*即可求得*D

即$\mathrm{A}x_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$*从而求得*$D$*。*

抽象方法：

接下来使用抽象方法推导：

设$\overrightarrow{y_i} = \overrightarrow{(P_i - P_0)}$,使用矩阵，则有$\boldsymbol{y_i} =$ $\boldsymbol{(x_i - x_0, y_i - y_0, z_i - z_0)}^{\boldsymbol{T}}$

$$S = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$$

$$= \left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{(P_1 - P_0)}\right)^2 + \left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{(P_2 - P_0)}\right)^2 + \cdots \left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{(P_n - P_0)}\right)^2$$

$$= (\boldsymbol{n^T y_1})(\boldsymbol{y_1^T n}) + (\boldsymbol{n^T y_2})(\boldsymbol{y_2^T n}) + \cdots (\boldsymbol{n^T y_n})(\boldsymbol{y_n^T n})$$

$$= \boldsymbol{n^T}(\boldsymbol{y_1 y_1^T})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n^T}(\boldsymbol{y_2 y_2^T})\boldsymbol{n} + \cdots + \boldsymbol{n^T}(\boldsymbol{y_n y_n^T})\boldsymbol{n}$$

$$= \boldsymbol{n^T}(\sum\nolimits_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{y_i y_i^T}))\boldsymbol{n}$$

$$= \boldsymbol{n^T} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_i - x_0} \\ \boldsymbol{y_i - y_0} \\ \boldsymbol{z_i - z_0} \end{bmatrix} [\boldsymbol{x_i - x_0} \quad \boldsymbol{y_i - y_0} \quad \boldsymbol{x_i - x_0}]\, \boldsymbol{n}$$

$$= [A \quad B \quad C] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0) & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(z_i - z_0) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0) & \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - x_y\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)(z_i - z_0) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(z_i - z_0) & \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)(z_i - z_0) & \sum_{i=1}^{n}(z_i - z_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{n^T} M \boldsymbol{n}$$

其中M为我们熟悉的二次型。

当我们要求 S 最小时，根据正定矩阵二次型的性质我们可以知道，将$\mathrm{M} = \boldsymbol{u} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}^{-1}$

找到特征值最小的λ_k，取$\boldsymbol{n^T}$对应的特征向量$\boldsymbol{u_k}$即为使得二次型最小。由此求得平法方向。最后带入P_0*即可求得D*

即$\mathrm{A}x_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$*从而求得D。*

求特征值的方法

在使用计算机求解特征值的时候，我们可以使用迭代的方法来计算。当阶数少于 10 的时候，使用雅克比方法是比较简单的方法。

Givens 旋转：

有空再写。先列出 Wiki Page

https://en.wikipedia.org/wiki/Givens_rotation

Jacobi 特征值迭代：

https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_eigenvalue_algorithm