Couplage vague-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES	Chargée de Recherche, HDR	École des Ponts, LHSV	Rapporteuse
E. I. TURKI	Maîtresse de conférences, HDR	Univ de Normandie	Rapporteuse
P. MARCHESIELLO	Directeur de Recherche, HDR	IRD, LEGOS	Examinateur
C. CHOQUET	Professeure	Univ de La Rochelle	Examinatrice
M. ERSOY	Maître de conférences, HDR	Univ de Toulon	Examinateur
F. BOUCHETTE	Professeur	Univ de Montpellier	Directeur de thèse
B. MOHAMMADI	Professeur	Univ de Montpellier	Directeur de thèse

Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
- Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
- Explorer une nouvelle manière de modéliser la dynamique du littoral avec un nombre limité d'hyperparamètres.
- Développer un outil rapide d'éxecution pour la conception de structures de défense en ingénierie côtière.

Figure 1: Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet

Contexte historique. Des travaux de 2004 - 2024 entre Geosciences Montpellier et l'IMAG. Une collaboration long terme avec BRLi.

Contexte historique. Des travaux de 2004 - 2024 entre Geosciences Montpellier et l'IMAG. Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Contexte historique. Des travaux de 2004 - 2024 entre Geosciences Montpellier et l'IMAG. Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
- Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.

Contexte historique. Des travaux de 2004 - 2024 entre Geosciences Montpellier et l'IMAG. Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
- Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.

Megan Cook (2018 - 2021)

- Introduction contraintes physiques sur le modèle de minimisation (conservation, pente, etc). Développement du modèle OptiMorph.
- Optimisation du réaménagement du port de la Turballe avec suivi du trait de côte.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

Figure 2: Plage de l'Espiguette

Quelle quantité doit évoluer ?

Figure 2: (Gauche) Plage de l'Espiguette | (Droite) Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS and WISE 1 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)

Est-ce qu'il existe une grandeur à minimiser ?

Est-ce qu'il existe une grandeur à minimiser ?

Figure 3: ***1)*** *Expérience LIP 1C avec H généré par XBeach.* ***2)*** *Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR.* ***a)*** *Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron).* ***b)*** *Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A.*

Est-ce qu'il existe une grandeur à minimiser ?

$I_i \approx 0.9\, I_f$

Figure 3: ***1)*** *Expérience LIP 1C avec H généré par XBeach.* ***2)*** *Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR.* ***a)*** *Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron).* ***b)*** *Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A.*

Est-ce qu'il y existe une grandeur à minimiser ?

Minimiser l'énergie des vagues à travers la fonction de coût:

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} E_H$$

représente la physique.

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?

Quel est le fond ψ minimisant l'énergie des vagues ? $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$?

Un "fond possible"...

Image provenant d'un photomontage.

Cette solution à $\boxed{\mathcal{J} = 0}$ minimise au maximum l'énergie des vagues.

Ajout de contraintes physiques

Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

- Conservation sableuse:

Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

- Conservation sableuse:

- Excitation sableuse:

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Consistance du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Consistance du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.
- Un paramètre morphodynamique: Υ.

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.
- Un paramètre morphodynamique: Υ.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, M_{slope}.

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.
- Un paramètre morphodynamique: Υ.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, M_{slope}.
- Des paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.
- Un paramètre morphodynamique: Υ.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, M_{slope}.
- Des paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.

2 hyperparamètres

Premier workflow du modèle et quelques notations

Figure 4: Premier workflow.

Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$.
- Un paramètre hydrodynamique: γ.
- Un paramètre morphodynamique: Υ.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, M_{slope}.
- Des paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.

2 hyperparamètres

contre

$\approx$ 10-100 dans les modèles classiques

Premier modèle de vagues

Modèle Shoaling

$$H(x,t) = \begin{cases} H_0(x,t)K_{\mathrm{S}}(x,t) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{S}} \\ \mathcal{F}\left(\gamma h(x,t)\right) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}$ une fonction de paramétrant le déferlement.

Premier modèle de vagues

Modèle Shoaling

$$H(x,t) = \begin{cases} H_0(x,t)K_{\mathrm{S}}(x,t) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{S}} \\ \mathcal{F}\left(\gamma h(x,t)\right) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}$ une fonction de paramétrant le déferlement.

Paramètres:

- $H_s = 0.15$ m
- $T_0 = 2.5$ s

Figure 6: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = -\Upsilon \nabla_\psi \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Figure 7: Descente du gradient.

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(\psi)$,
- $\psi(t)$: le fond sableux au temps t,
- Υ: la mobilité sédimentaire.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \cancel{-\Upsilon \nabla_\psi \mathcal{J}}\ d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Figure 7: Descente du gradient.

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(\psi)$,
- $\psi(t)$: le fond sableux au temps t,
- Υ: la mobilité sédimentaire.
- $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon\, d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Figure 7: Descente du gradient.

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi)$,
- $\psi(t)$: le fond sableux au temps t,
- Υ: la mobilité sédimentaire.
- $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$,

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Figure 7: Descente du gradient.

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi)$,
- $\psi(t)$: le fond sableux au temps t,
- Υ: la mobilité sédimentaire.
- $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$,
- $\Lambda(x)$: l'excitation du fond sableux par les vagues.

Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{array}$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}$$

Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))} \end{array},$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}$$

- Pente maximale:

$$\boxed{\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| \leq M_{\text{slope}}}$$

Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))} \end{array},$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}$$

- Pente maximale:

$$\boxed{\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| \leq M_{\text{slope}}}$$

- Conservation sableuse (uniquement en domaine fermé):

$$\boxed{\int_\Omega \psi(t, x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi_0(x)\mathrm{d}x \quad \forall t \in [0, T_f]}$$

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

Figure 8: Projection. Cook (2021).

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

Figure 8: Projection. Cook (2021).

On a donc:

$$d = \nabla_\psi \mathcal{J} - \left\langle \nabla_\psi \mathcal{J}, \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|}.$$

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Consistance du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta t = 0.18 \text{ s}}$

Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

ψ_{ref} à $\Delta t = 0.18$ s

Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

ψ_{ref} à $\Delta x = 0.5$ mm

Figure 10: Convergence spatiale avec Δx dans [0.0005,2] m.

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

ψ_{ref} à $\Delta t = 0.18$ s

Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

ψ_{ref} à $\Delta x = 0.5$ mm

Figure 10: Convergence spatiale avec Δx dans [0.0005,2] m.

ψ_{ref} à $\Omega = 3000$ m

Figure 11: Passage à l'échelle, vérification de la bonne prise en compte des contraintes avec $\Omega \in$ [600, 3000] m.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Consistance du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Présentation de l'expérience Copter 1D

Les expériences ont été menées dans le bassin à houle LHF (Grenoble) de 30 m × 30 m. Échelle de longueur: 1/10 et échelle de temps: 1/3 (Froude).

Paramètres de l'expérience:

- $H_s = 0.15$ m,
- $T_0 = 2.5$ s,
- $T_f = 30$ mins.

Figure 12: Schéma de l'expérience Copter 1D.

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter

Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 0.15$ m
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins

Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter

Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 0.15$ m
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins

- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire

Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Consistance du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Workflow et cas applicatif

Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

Workflow et cas applicatif

Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

Figure 15: Géographie de la simulation au sud de Montpellier.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: Fond initial.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: Fond initial.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: *Fond initial.*

Figure 17: *Fond final.*

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: *Fond initial.*

Figure 17: *Fond final.*

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: Fond initial.

Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: Fond initial.

Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

Figure 16: Fond initial.

Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.
- Mais modèle de vague inadapté pour le 2D.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \displaystyle\int_\Omega E_H(\psi). \end{cases}$$

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(\psi). \end{cases}$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(\psi). \end{cases}$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

✔ Facile à calculer.

✖ $N+1$ évaluations nécessaires.
✖ Temps de calculs très longs.

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(\psi). \end{cases}$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

✔ Facile à calculer.

✖ $N+1$ évaluations nécessaires.
✖ Temps de calculs très longs.

Différentiation Automatique

Inria TAPENADE

✔ Robuste.

✖ Pré-traitement lourd.
✖ Dépendance à C / Fortran 90.

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x\,,\, z)^\intercal\,.$$

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x\,,\, z)^\intercal\,.$$

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x\,,\, z)^\intercal\,.$$

Donc

$$\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} \approx (\nabla_X \mathcal{J}).n}$$

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}}$.

Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2+1}}$.

Figure 19: ***A)*** *Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard,* ***B)*** *Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.*

Vérification numérique sur un cas applicatif avec perturbations

Avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \nabla_X \mathcal{J}.n}$

Paramètres:

- Modèle Shoaling avec:
  - $H_0 = 2$ m,
  - $T_0 = 10$ s,
  - $h_0 = 10$ m.
- Fond linéaire avec des perturbations.

Figure 20: Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ par l'approche d'Hadamard (bleu) et calcul analytique (rouge). Fond linéaire avec des perturbations.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Nouveau Workflow basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

Figure 21: Nouveau workflow d'OptiMorph basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

✔ Rapide.
✔ Calcul entièrement l'action des vagues.

✖ Ne décrit pas la surface de l'onde.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

✔ Rapide.
✔ Calcul entièrement l'action des vagues.

✖ Ne décrit pas la surface de l'onde.

XBeach

Résout séparément les ondes longues (vagues à vagues) et les ondes courtes (spectral).

✔ Considéré comme une référence.
✔ Résout également la circulation.

✖ Temps de calculs assez conséquents.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s

Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s

Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

- Shoaling : $H_{\text{RMSE}} = 4.5$ cm.
- SWAN : $H_{\text{RMSE}} = 3.3$ cm.
- XBeach : $H_{\text{RMSE}} = 2.8$ cm.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS B: Une partie accretive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS B: Une partie accretive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

LIP (Roelvink and Reniers, 1995)

The Delta Flume of Delft Hydraulics mesure 225x7x5 m.

- LIP-1A: Avant la tempête, création d'une barre sédimentaire sur une plage linéaire de pente 1/30.
- LIP-1B: Tempête, la barre se déplace vers le large sous l'action de grosses vagues, érosion.
- LIP-1C: Après la tempête, la barre se déplace vers la côte, accrétion.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
1A	Profil initial	0.9	5	
1B	Résultat de 1A	1.4	5	18
1C	Résultat de 1B	0.6	8	13

Table 2: Paramètres de LIP.

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.53$ m
- $T_0 = 4.14$ s
- $T_f = 23$h30
- Pente: 1/15

Figure 23: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu).* ***B)*** *Écarts de* $\psi_f - \psi_i$.

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.53$ m
- $T_0 = 4.14$ s
- $T_f = 23$h30
- Pente: 1/15

Figure 23: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu).* ***B)*** *Écarts de $\psi_f - \psi_i$.*

Sur [-25, 7] (tout le domaine):

- Shoaling : $\psi_{\text{RMSE}} = 17.1$ cm.
- SWAN : $\psi_{\text{RMSE}} = 17.6$ cm.
- XBeach : $\psi_{\text{RMSE}} = 19$ cm.

Sur [-25, 2] (partie immergée):

- Shoaling : $\psi_{\text{RMSE}} = 11.7$ cm.
- SWAN : $\psi_{\text{RMSE}} = 12.7$ cm.
- XBeach : $\psi_{\text{RMSE}} = 13.5$ cm.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h

Figure 24: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h

Figure 24: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

- La barre intérieure simulée est superposée à celle expérimentale.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h

Figure 24: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

- La barre intérieure simulée est superposée à celle expérimentale.
- Aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d}$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}}\right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}}\right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

Figure 25: ***A)*** *Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour* $p = 0, 1, 2$ *et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C.* ***B)*** *Distribution des vitesses pour* $p = 1$.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}}\right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

Figure 25: ***A)*** *Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour* $p = 0, 1, 2$ *et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C.* ***B)*** *Distribution des vitesses pour* $p = 1$.

- Mais $V > 0$ pour ce choix $\Rightarrow$ pas de déplacement de barre sédimentaire vers le large (comme dans LIP-1B).

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d & \text{(a)} \\ V_t = -\rho\nabla_V\mathcal{J} & \text{(b)} \end{cases}$$

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d & \text{(a)} \\ V_t = -\rho\nabla_V\mathcal{J} & \text{(b)} \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d & \text{(a)} \\ V_t = -\rho\nabla_V\mathcal{J} & \text{(b)} \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.
- Comment calculer $\nabla_V\mathcal{J}$?

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V\nabla_s\psi = \Upsilon\Lambda d & \text{(a)} \\ V_t = -\rho\nabla_V\mathcal{J} & \text{(b)} \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.
- Comment calculer $\nabla_V\mathcal{J}$?
- Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser $\mathcal{J}$?

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: 1/50
- $\Omega = 600$ m

Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: 1/50
- $\Omega = 600$ m

Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: 1/50
- $\Omega = 600$ m

- Caractéristiques observables dans la nature.

Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Comparaison avec une référence de la littérature

L.D Wright and A.D Short (1984). "Morphodynamic variability of surf zones and beaches: A synthesis". In: *Marine Geology*, Volume 56.

Figure 27: (left) Plan and profile configurations of the six major beach states. (right) Beach profile mobility in relation to modal beach state and state variability.

Interaction entre le déferlement et la création de la barre sédimentaire

Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: 1/50

Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

Interaction entre le déferlement et la création de la barre sédimentaire

Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: 1/50

Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

- Création d'une barre sédimentaire au point d'inflexion de la vague.

Temps de calcul

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 180 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 1000 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

Temps de calcul

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 180 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 1000 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5

Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
- Temps de calcul entre la morphodynamique et le modèle shoaling: **comparables**.

Temps de calcul

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 180 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5

	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
Simulation with 1000 points	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
- Temps de calcul entre la morphodynamique et le modèle shoaling: **comparables**.
- Temps de calcul morphodynamiques négligeable devant ceux des modèles de vagues complexes.

Video 1: Démonstration, visionnable sur les temps morts.

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
   - Présentation du modèle en 2D
   - Résultats 2D
5. Conclusion et Perspectives

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
   - Présentation du modèle en 2D
   - Résultats 2D
5. Conclusion et Perspectives

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.
- Utilisation de modèles de vagues en 2D:

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.
- Utilisation de modèles de vagues en 2D:
  - Modèle basé sur le déferlement : Shoaling en multi-1D.

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.
- Utilisation de modèles de vagues en 2D:
  - Modèle basé sur le déferlement : Shoaling en multi-1D.
  - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.
- Utilisation de modèles de vagues en 2D:
  - Modèle basé sur le déferlement : Shoaling en multi-1D.
  - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
  - Modèles vagues à vagues: SWASH, FUNWAVE, ...

Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: $\boxed{\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}}$, **valable en 2D.**
- Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n}$, **valable en 2D.**
- Extension des contraintes en 2D.
- Utilisation de modèles de vagues en 2D:
  - Modèle basé sur le déferlement : Shoaling en multi-1D.
  - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
  - Modèles vagues à vagues: SWASH, FUNWAVE, ...
  - Modèles monochromatiques spectraux reconstruisant la phase: REF/DIF, ...

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
   - Présentation du modèle en 2D
   - Résultats 2D
5. Conclusion et Perspectives

Présentation de l'expérience Copter 2D

Les vagues irrégulières de JONSWAP sont générées sur des séquences de 20 mn, répétées plusieurs fois. Quatre climats de vagues typiques:

- La tempête se lève : $H_s = 17\ \mathrm{cm}/T_0 = 2.1\ \mathrm{s}$.
- Sommet de la tempête : $H_s = 23\ \mathrm{cm}/T_0 = 2.3\ \mathrm{s} \rightarrow$ **Géotube**.
- La tempête faiblit : $H_s = 18\ \mathrm{cm}/T_0 = 3.5\ \mathrm{s}$.
- Conditions de vagues calmes : $H_s = 11\ \mathrm{cm}/T_0 = 2.\ \mathrm{s}$

Figure 29: Schéma de Copter 2D.

Figure 30: Photo de l'expérience Copter 2D.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m,
- $T_0 = 2.3$ s,
- $T_f = 20$ minutes.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m,
- $T_0 = 2.3$ s,
- $T_f = 20$ minutes.

Multi-1D Shoaling

REF/DIF

Experimental

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m,
- $T_0 = 2.3$ s,
- $T_f = 20$ minutes.

Multi-1D Shoaling

REF/DIF

Experimental

- Observation d'une fausse de lévigation derrière le tube en géotextile.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m,
- $T_0 = 2.3$ s,
- $T_f = 20$ minutes.

Multi-1D Shoaling | **REF/DIF** | **Experimental**

- Observation d'une fausse de lévigation derrière le tube en géotextile.
- Positionnement de la rupture de pente derrière l'ouvrage.

Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m, $T_0 = 6$ s,
- $T_f = 72$ h, Pente: 1/100.

Figure 31: Fond initial

Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m, $T_0 = 6$ s,
- $T_f = 72$ h, Pente: 1/100.

Figure 31: Fond initial

Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m, $T_0 = 6$ s,
- $T_f = 72$ h, Pente: 1/100.

Figure 31: Fond initial

- Deux modèles de vagues différents produisant deux résultats morphodynamiques différents.

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point.*"
- "*A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point.*"
- "*A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest.*"
- "*An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point.*"
- "*A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest.*"
- "*An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system.*"
- "*In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients.*"

Table des Matières

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
4. Évolution du modèle en 2D
5. Conclusion et Perspectives

Conclusion

- Un modèle générique, de faible complexité, pour la création de barres sédimentaires.
- Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme.
- Des cas de benckmark validés.
- Un modèle de vagues doit être choisi minutieusement en fonction du domaine d'étude.

Publications:

Ronan Dupont, Frédéric Bouchette, and Bijan Mohammadi. (2024). "Beaches morphodynamic modeling based on hadamard sensitivity analysis. ". In: *Ocean Modelling*, page 102370.

Ronan Dupont, Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Samuel Meulé. (2023). "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization.". In: *Ocean Modelling*, page 102197.

Perspectives

- Étendre l'approche du transport latéral.
- Continuer la validation in situ (accrétion, 2D,...).
- Continuer à améliorer numériques le modèle.

En cours de publication:

Ronan Dupont (202X). "Solving the Mild-Slope and Helmholtz equations using the Virtual Element Method (VEM), dealing with high order Robin Boundary Condition. "

Un projet en parallèle

Ronan Dupont (202X). "Solving the Mild-Slope and Helmholtz equations using the Virtual Element Method (VEM), dealing with high order Robin Boundary Condition. "

2D element with:
- ● : *Summits dofs*
- ■ : *Edges dofs*
- ▲ : *Inner dofs.*

Maillage polyédrique du port de Cherbourg.

Résultats VEM des équations d'Helmholtz et Mild-Slope sur le port de Cherbourg.

Merci pour votre attention!

References

R. Dupont, M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, and S. Meulé, "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization," *Ocean Modelling*, p. 102 197, 2023.

R. Dupont, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Modelling beaches morphodynamic by hadamard sensitivity analysis," *Ocean Modelling*, vol. 189, p. 102 370, 2024.

R. Dupont, F. Bouchette, B. Mohammadi, and D. Sous, "Optimorph: Un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. analyse de sensibilité en 1d et application multi-1d," *JNGCGC*, vol. 17, pp. 327–336, 2022.

D. Isèbe, P. Azérad, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering," en, *International Review of Civil Engineering (IRECE)*, vol. 5, no. 2, p. 75, 2014.

D. Isèbe, P. Azérad, B. Mohammadi, and F. Bouchette, "Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact," *Coastal Engineering*, vol. 55, no. 1, pp. 35–46, 2008.

D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, and B. Mohammadi, "Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 8, pp. 1262–1277, 2008.

A. Bouharguane, P. Azerad, F. Bouchette, F. Marche, and B. Mohammadi, "Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 13, no. 4, pp. 759–772, 2010.

B. Mohammadi and F. Bouchette, "Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics," *Computers and Fluids*, vol. 89, pp. 78–87, 2014.

B. Mohammadi and A. Bouharguane, "Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters," *Computers and Fluids*, vol. 40, pp. 291–298, 2011.

B. Mohammadi, "Uncertainty quantification in littoral erosion," *Computers & Fluids*, vol. 143, pp. 120–133, 2017.

M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, and N. Fraysse, "Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis," en, *China Ocean Engineering*, vol. 35, no. 6, pp. 802–813, 2021.

A. Bouharguane and B. Mohammadi, "Minimisation principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 163–172, 2012.

Nouveau modèle de vagues

Modèle Shoaling

$$H(x,t) = \begin{cases} H_0(x,t)K_{\mathrm{S}}(x,t) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{S}} \\ \mathcal{F}\left(\gamma h(x,t)\right) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}$ une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}\left(\gamma h(x,t)\right) = H(x_{start}) + \left[H(x_{stop}) - H(x_{start})\right] \cdot f\left(\frac{x - x_{start}}{x_{stop} - x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max} - h}{h_{max} - h_{min}}\right)$$

Shoaling model:

Cook (2021)

$$H(x,t) = \begin{cases} [(1-\alpha(x))H_{\mathbf{0}}(t) + \alpha(x)H_{\mathbf{0}}^{w}(x,t)]\, K_{\mathbf{S}}(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x < d_w \\ H_{\mathbf{0}}^{w}(x,t) K_{\mathbf{S}}(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{B}} \end{cases}$$

Shoaling model:

Cook (2021)

$$H(x,t) = \begin{cases} [(1-\alpha(x))H_{\mathbf{0}}(t) + \alpha(x)H_{\mathbf{0}}^{w}(x,t)]\, K_{\mathbf{S}}(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x < d_w \\ H_{\mathbf{0}}^{w}(x,t) K_{\mathbf{S}}(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x,t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{B}} \end{cases}$$

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s

Figure 33: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - Shoaling

Paramètres:

- **Shoaling Multi-1D**,
- $H_0 = 2$ m,
- $T_0 = 6$ s,
- $T_f = 72$ h,
- Pente: 1/100,
- Géotube en forme de gaussienne.

Initial

Final

Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - REF/DIF

Paramètres:

- **REF/DIF**,
- $H_0 = 2$ m,
- $T_0 = 6$ s,
- $T_f = 72$ h,
- Pente: 1/100,
- Géotube en forme de gaussienne.

Initial

Final

Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes I

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

$$H(x,t) = \begin{cases} H_0(x,t)K_{\mathrm{S}}(x,t) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{S}} \\ \mathcal{F}\left(\gamma h(x,t)\right) & \text{for} \quad x \in \Omega_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}$ une fonction de paramétrant le déferlement.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues: $A(x,y,\sigma,\theta) = \frac{E(x,y,\sigma,\theta)}{\sigma}$ avec,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial\left(C_x A\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(C_y A\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(C_\sigma A\right)}{\partial \sigma} + \frac{\partial\left(C_\theta A\right)}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}.$$

• C_x et C_y: vitesses selon x et y; • C_σ: déplacement de la fréquence relative dû aux variations de la bathymétrie • C_θ: la réfraction induite par les effets combinés de la profondeur et des courants. • S: processus qui génèrent, dissipent ou redistribuent l'énergie des vagues.

Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes II

XBeach

Résout d'une part, **les ondes longues (vagues à vagues)** avec les débits calculés à l'aide d'une formulation moyenne en profondeur des équations Shallow-Water, en tenant compte du flux de masse induit par les vagues et des débits de retour:

$$\frac{\partial u^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial u^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial u^L}{\partial y} - f v^L - v_h \left(\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} \right) = \frac{T_{sx}}{\rho h} - \frac{T^E_{bx}}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho h}$$

$$\frac{\partial v^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial v^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial v^L}{\partial y} + f u^L - v_h \left(\frac{\partial^2 v^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^L}{\partial y^2} \right) = \frac{T_{sy}}{\rho h} - \frac{T^E_{by}}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho h}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u^L h}{\partial x} + \frac{\partial v^L h}{\partial y} = 0$$

Où les composantes de la vitesse lagrangienne (désignées par l'exposant L) sont la superposition de la vitesse eulérienne et de la vitesse de dérive de Stokes :
$u^L = u^E + u^S$ et $v^L = v^E + v^S$.
Résout d'une autre part, **les ondes courtes (spectral)** par l'action des vagues.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Minimiser $\mathcal{J}$ avec C_{sand}=Cte=0 (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)

$$\Leftrightarrow$$

Suivre la direction $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ en gardant $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Minimiser $\mathcal{J}$ avec C_{sand}=Cte=0 (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)

$$\Leftrightarrow$$

Suivre la direction $\nabla_\psi \mathcal{J}$ en gardant $\nabla_\psi C_{\text{sand}} = 0$.

Figure 34: Projection. Cook (2021).

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Minimiser $\mathcal{J}$ avec C_{sand}=Cte=0 (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)

$$\Leftrightarrow$$

Suivre la direction $\nabla_\psi \mathcal{J}$ en gardant $\nabla_\psi C_{\text{sand}} = 0$.

Figure 34: Projection. Cook (2021).

On a donc:

$$d = \nabla_\psi \mathcal{J} - \left\langle \nabla_\psi \mathcal{J}, \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|}.$$