Couplage vague-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES	Chargée de Recherche, HDR	École des Ponts, LHSV	Rapporteuse
E. I. TURKI	Maîtresse de conférences, HDR	Univ de Normandie	Rapporteuse
P. MARCHESIELLO	Directeur de Recherche, HDR	IRD, LEGOS	Examinateur
C. CHOQUET	Professeure	Univ de La Rochelle	Examinatrice
M. ERSOY	Maître de conférences, HDR	Université de Toulon	Examinateur
F. BOUCHETTE	Professeur	Univ de Montpellier	Directeur de thèse
B. MOHAMMADI	Professeur	Univ de Montpellier	Directeur de thèse

Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
- Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
- Explorer une nouvelle manière de modéliser la dynamique du littoral avec un nombre limité d'hyperparamètres.
- Développer un outil rapide d'éxecution pour la conception de structures de défense en ingénierie côtière.

Figure 1: Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet

Contexte historique (2004 - 2024 F. Bouchette, B. Mohammadi, P. Azerad). Une collaboration long terme avec BRLi.

Contexte historique (2004 - 2024 F. Bouchette, B. Mohammadi, P. Azerad). Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Contexte historique (2004 - 2024 F. Bouchette, B. Mohammadi, P. Azerad). Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
- Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.

Contexte historique (2004 - 2024 F. Bouchette, B. Mohammadi, P. Azerad). Une collaboration long terme avec BRLi.

Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
- Optimisation de positionnement de géotubes.
- Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
- Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.

Megan Cook (2018 - 2021)

- Introduction contraintes physiques sur le modèle de minimisation (conservation, pente, etc). Développement du modèle OptiMorph.
- Optimisation du réaménagement du port de la Turballe avec suivi du trait de côte.

Sommaire

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique

Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin $\psi(x, y)$

Figure 2: Plage de l'Espiguette

Quelle quantité minimiser ?

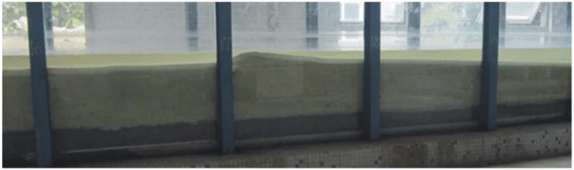


Figure 3: Under impact of waves - Li Yan et al. (2019)

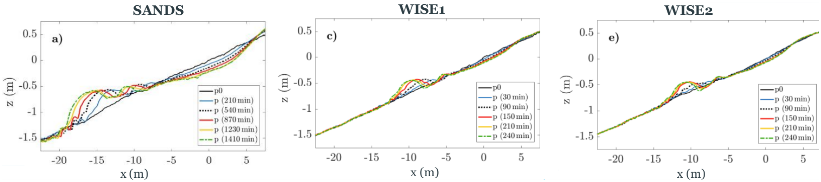


Figure 4: Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS, WISE 1 and WISE 2 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)

Quelle quantité minimiser ?

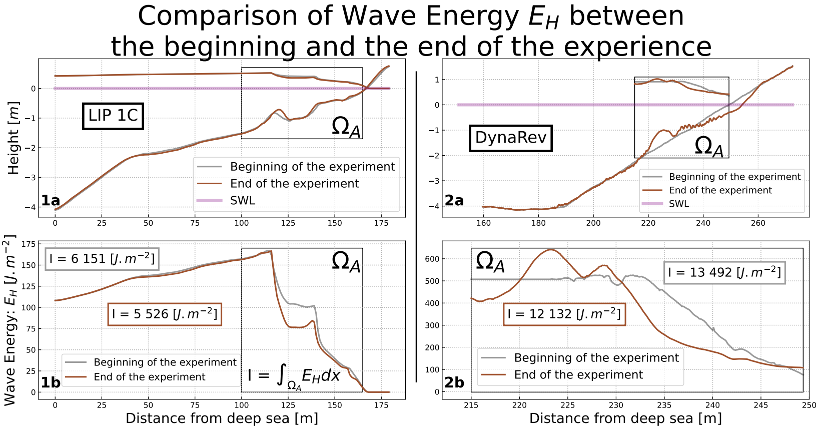


Figure 5: ***1)*** *Expérience LIP 1C avec H généré par XBeach.* ***2)*** *Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR.* ***a)*** *Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron).* ***b)*** *Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A.*

Quelle quantité minimiser ?

$$\boxed{I_\text{i} \approx 0.9\, I_\text{f}}$$

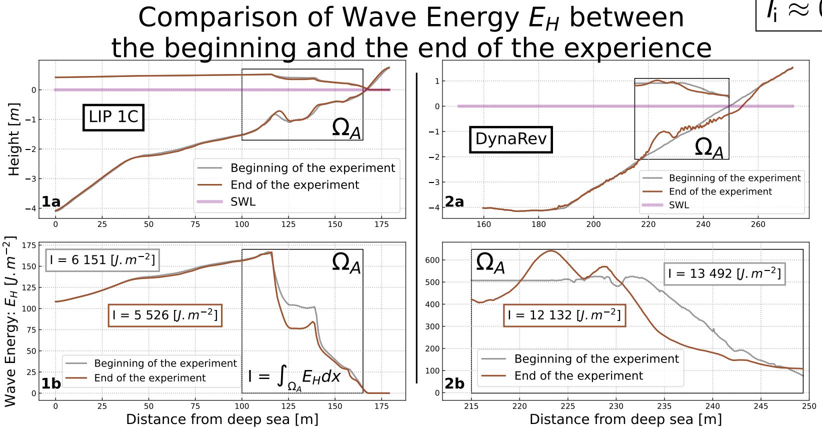


Figure 5: ***1)*** *Expérience LIP 1C avec H généré par XBeach.* ***2)*** *Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR.* ***a)*** *Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron).* ***b)*** *Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A.*

Quelle quantité minimiser ?

Minimiser l'énergie des vagues à travers la fonction de coût:

$$\mathcal{J} = \int_\Omega E_H dx$$

semble être un bon candidat.

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?

Quel est le fond ψ minimisant l'énergie des vagues ? $\min\limits_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$?

Un "fond possible"...

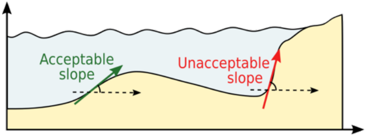
Image provenant d'un photomontage.

Cette solution à $\boxed{\mathcal{J} = 0}$ minimise au maximum l'énergie des vagues.

Ajout de contraintes

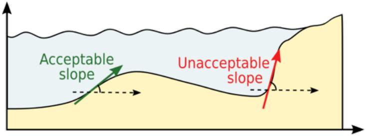
Ajout de contraintes

- Pente maximale:

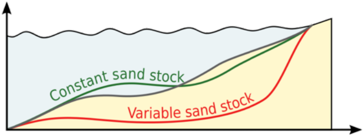


Ajout de contraintes

- Pente maximale:

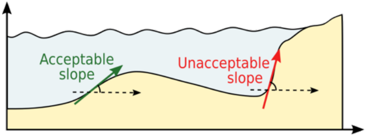


- Conservation sableuse:

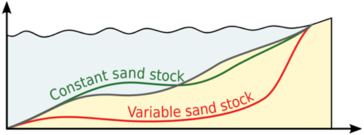


Ajout de contraintes

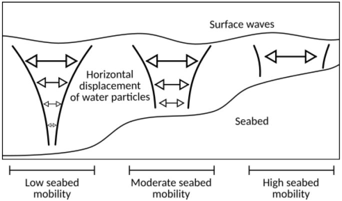
- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:



1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?

2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Validité du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D

3. Extension à un modèle générique

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?

2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Validité du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D

3. Extension à un modèle générique

Premier workflow du modèle et quelques notations

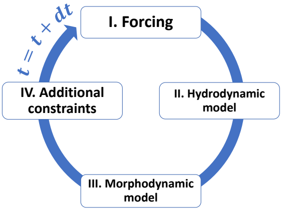


Figure 6: Premier workflow.

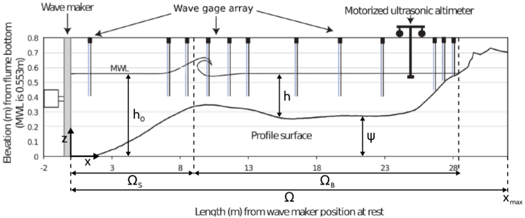


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

Premier workflow du modèle et quelques notations

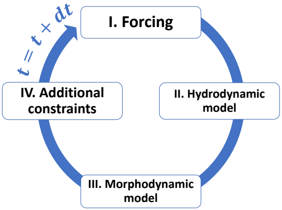


Figure 6: Premier workflow.

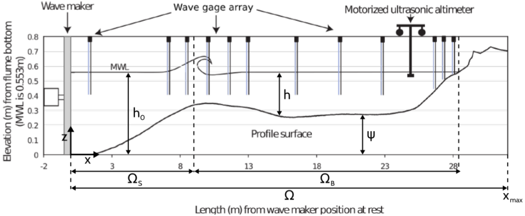


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

- Paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.

Premier workflow du modèle et quelques notations

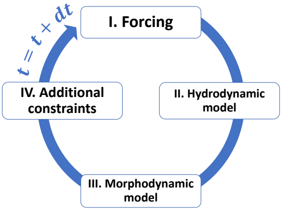


Figure 6: Premier workflow.

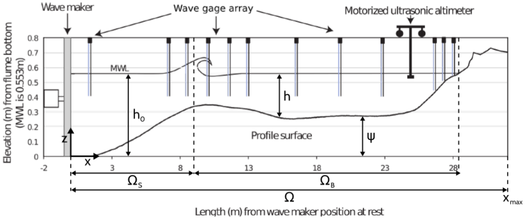


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

- Paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, β.

Premier workflow du modèle et quelques notations

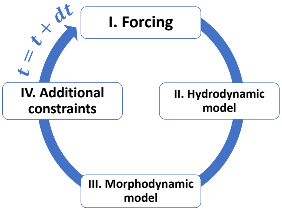


Figure 6: Premier workflow.

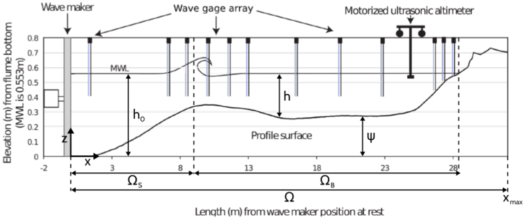


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

- Paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, β.
- Modèle hydrodynamique: $H_0(t)$, $T_0(t)$, γ.

Premier workflow du modèle et quelques notations

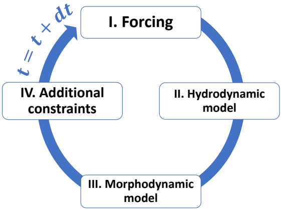


Figure 6: Premier workflow.

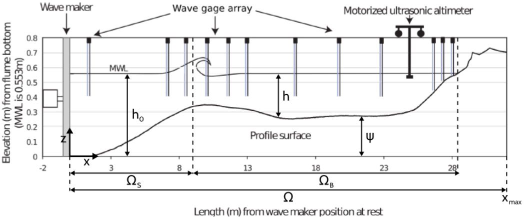


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

- Paramètres numériques: Δx, Δt, T_f.
- Paramètres géométriques: ψ_0, Ω, h_0, β.
- Modèle hydrodynamique: $H_0(t)$, $T_0(t)$, γ.
- Modèle morphodynamique: Υ.

Premier modèle de vagues

Shoaling model:

Cook (2021)

$$H(x,t) = \begin{cases} \left[(1-\alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x,t)\right] K_S(x,t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x,t)K_S(x,t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x,t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$

Premier modèle de vagues

Shoaling model:

Cook (2021)

$$H(x,t) = \begin{cases} \left[(1-\alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x,t)\right] K_S(x,t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x,t) K_S(x,t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x,t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s

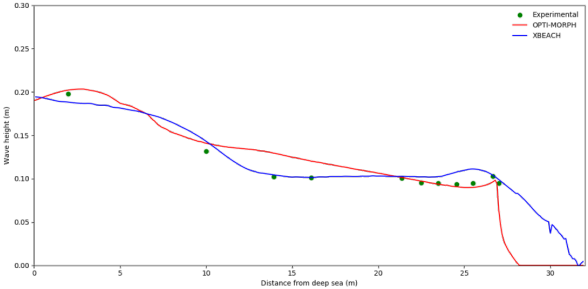


Figure 8: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \, \Lambda \, d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

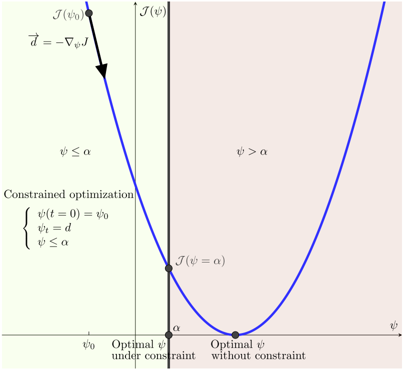


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \, \Lambda \, d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x) \mathrm{d}x,$

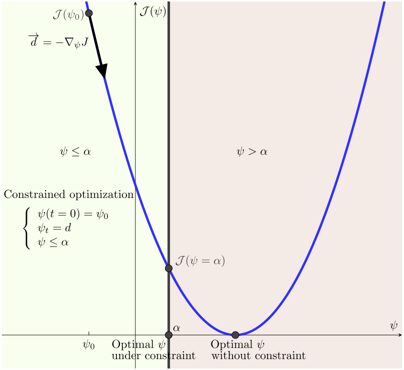


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

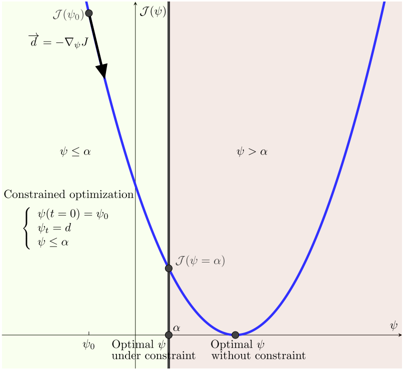


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x$,
- ψ_t: l'évolution en temps du fond sableux,

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

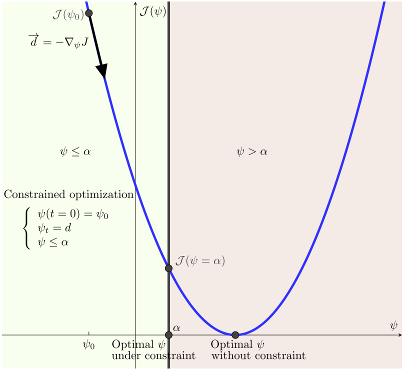


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x$,
- ψ_t: l'évolution en temps du fond sableux,
- d: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

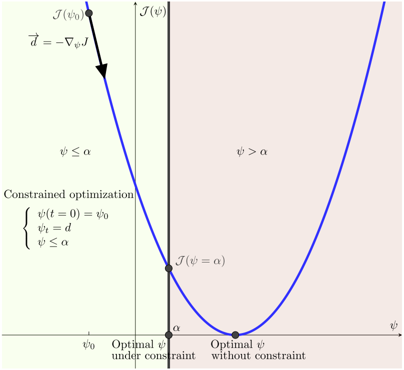


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x$,
- ψ_t: l'évolution en temps du fond sableux,
- d: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,
- Υ: la mobilité sédimentaire,

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \, \Lambda \, d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

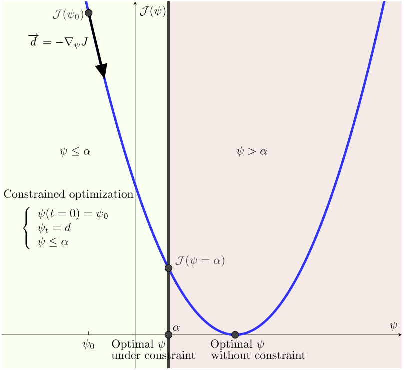


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α.

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x$,
- ψ_t: l'évolution en temps du fond sableux,
- d: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,
- Υ: la mobilité sédimentaire,
- Λ: l'excitation du fond sableux par les vagues.

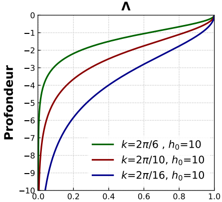
Ajout de contraintes

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{array}$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}.$$



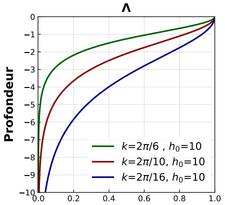
Ajout de contraintes

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{array}$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}.$$



- Pente maximale:

$$\boxed{\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| \leq M_{\text{slope}}}.$$

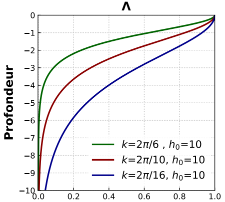
Ajout de contraintes

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \Omega \times [0, h_0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, z) & \longmapsto & \dfrac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{array}$$

et en $z = \psi$:

$$\boxed{\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}}.$$



- Pente maximale:

$$\boxed{\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| \leq M_{\text{slope}}}.$$

- Conservation sableuse:

$$\boxed{\int_\Omega \psi(t, x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi_0(x)\mathrm{d}x \quad \forall t \in [0, T_f]}.$$

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f],\ C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_\Omega (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_\Omega (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

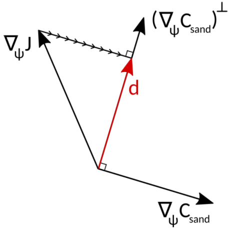


Figure 10: Projection. Cook (2021).

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f],\ C_{\text{sand}}(t) = 0$.

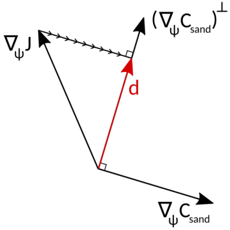


Figure 10: Projection. Cook (2021).

avec donc:

$$d = \nabla_\psi \mathcal{J} - \left\langle \nabla_\psi \mathcal{J}, \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|},$$

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_\Omega (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f],\ C_{\text{sand}}(t) = 0.$

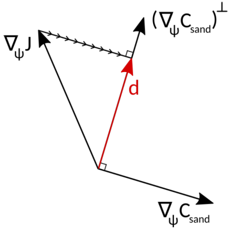


Figure 10: Projection. Cook (2021).

avec donc:

$$d = \nabla_\psi \mathcal{J} - \left\langle \nabla_\psi \mathcal{J}, \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|},$$

et

$$\nabla_\psi C_{\text{sand}}(t) = 2\psi \int_\Omega (\psi - \psi_0) dx.$$

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
   - Présentation du modèle
   - Validité du modèle
   - Résultats 1D du modèle
   - Extension du modèle en multi-1D
3. Extension à un modèle générique

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta t = 0.18 \text{ s}}$

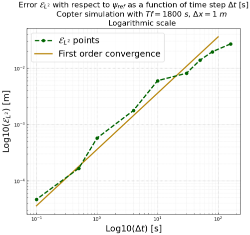


Figure 11: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta t = 0.18 \text{ s}}$

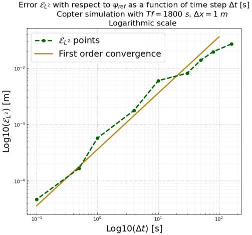


Figure 11: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta x = 0.5 \text{ mm}}$

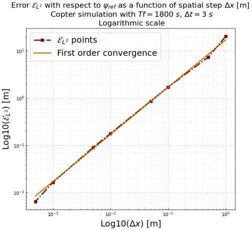


Figure 12: Convergence spatiale avec Δx dans [0.001,2] m.

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = ||\psi_{\text{ref}} - \psi||_{L^2}.$$

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta t = 0.18 \text{ s}}$

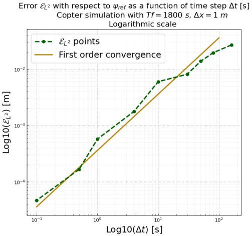


Figure 11: Convergence temporelle avec Δt dans [0.18, 90] s.

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Delta x = 0.5 \text{ mm}}$

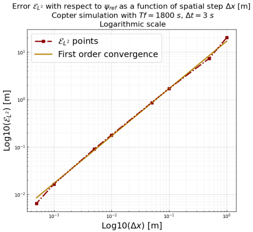


Figure 12: Convergence spatiale avec Δx dans [0.001,2] m.

$\boxed{\psi_{\text{ref}} \text{ à } \Omega = 3000 \text{ m}}$

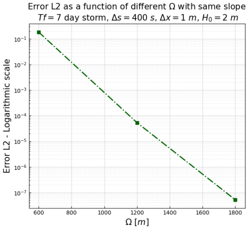


Figure 13: Passage à l'échelle, vérification de la bonne prise en compte des contraintes.

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter

Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins

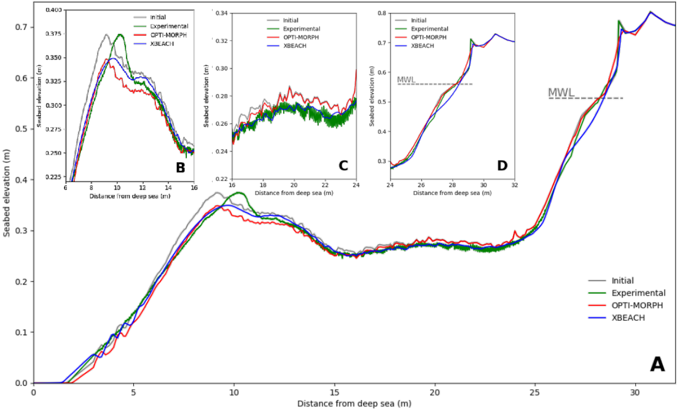


Figure 14: *Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).*

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter

Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins
- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire

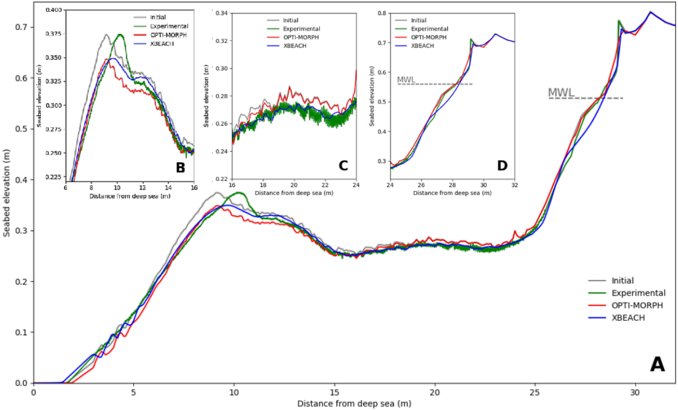


Figure 14: *Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).*

Workflow et cas applicatif

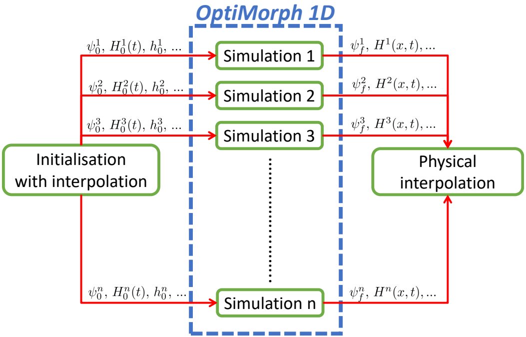


Figure 15: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

Workflow et cas applicatif

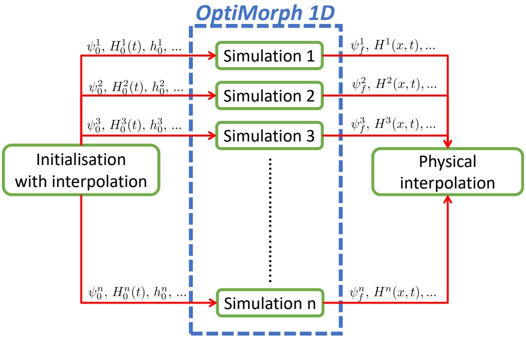


Figure 15: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

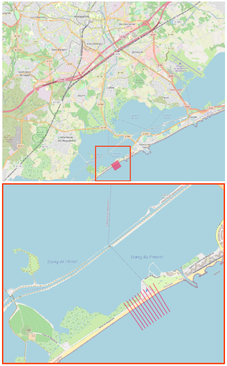


Figure 16: Géographie de la simulation au sud de Montpellier.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

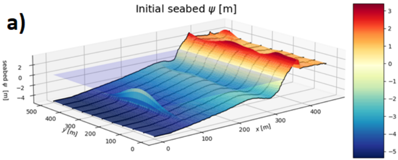


Figure 17: Fond initial.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

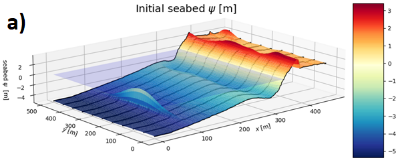


Figure 17: Fond initial.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

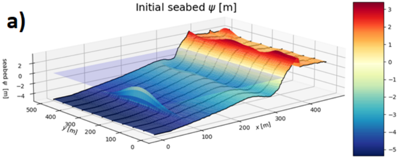


Figure 17: *Fond initial.*

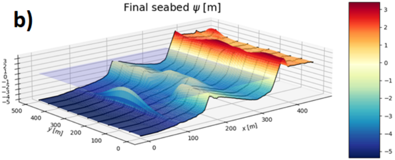


Figure 18: *Fond final.*

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0 , 450] \times [0 , 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

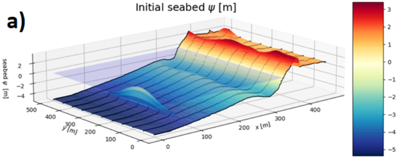


Figure 17: *Fond initial.*

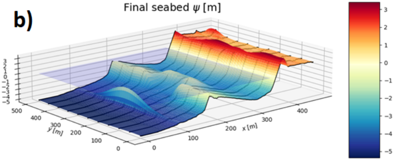


Figure 18: *Fond final.*

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0\ ,\ 450] \times [0\ ,\ 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).

Résultats en multi-1D sur un cas réel

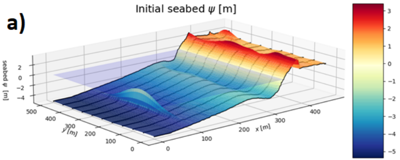


Figure 17: *Fond initial.*

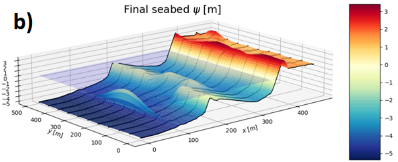


Figure 18: *Fond final.*

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0 , 450] \times [0 , 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

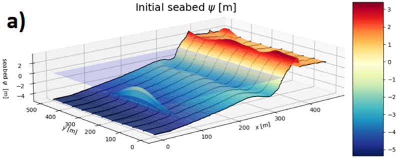


Figure 17: Fond initial.

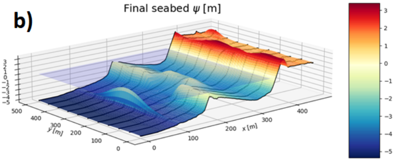


Figure 18: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0 , 450] \times [0 , 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mais aucun mécanisme de transport longshore.

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?

2. Vers un modèle morphodynamique

3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée de Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé la dérivée d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?
2. Vers un modèle morphodynamique
3. Extension à un modèle générique
    - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
    - Validation numérique de la dérivée de Hadamard
    - Présentation du nouveau modèle basé la dérivée d'Hadamard
    - Résultats morphodynamiques

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \displaystyle\int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \displaystyle\int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x.\end{array}\right.$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

✔ Facile à calculer.

✖ $N+1$ évaluations nécessaires.
✖ Temps de calculs très longs.

Comment calculer $\nabla_\psi J$? Les différentes stratégies.

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \displaystyle\int_\Omega E_H(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Calcul Analytique

✔ Solution exacte.
✔ Rapide.

✖ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

✔ Facile à calculer.

✖ $N+1$ évaluations nécessaires.
✖ Temps de calculs très longs.

Différentiation Automatique

Inria TAPENADE

✔ Robuste.

✖ Pré-traitement lourd.
✖ Dépendance à C / Fortran 90.

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon \boldsymbol{n}) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

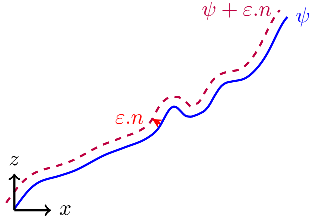


Figure 19: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n: vecteur normal à la forme.

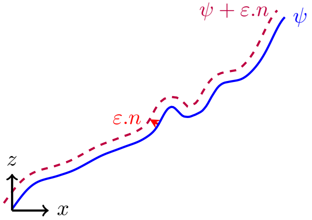


Figure 19: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\begin{aligned}\nabla_\psi \mathcal{J} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \\ &\approx (\nabla_X \mathcal{J}).n,\end{aligned}$$

avec $X = (x\,,\,z)^\intercal$.

Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}}$.

Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2+1}}$.

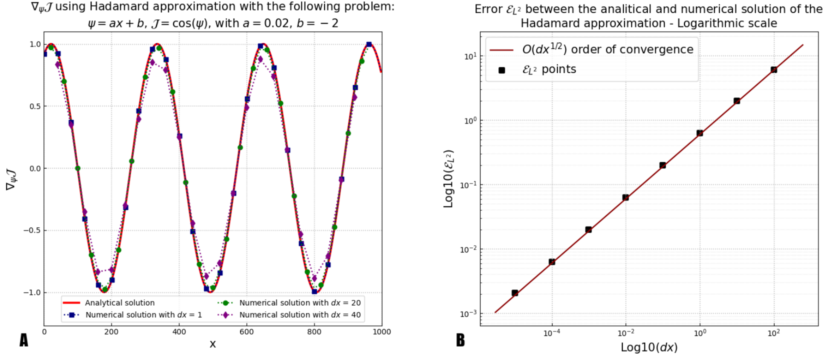


Figure 20: ***A)*** *Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard,* ***B)*** *Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.*

Vérification numérique sur un cas applicatif avec perturbations

En posant: $\nabla_X \mathcal{J} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \right)^\intercal$ et $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2 + dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$, on calcule $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J} . n}$.

Vérification numérique sur un cas applicatif avec perturbations

En posant: $\nabla_X \mathcal{J} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi}\right)^{\mathsf{T}}$ et $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2 + dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$, on calcule $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J} . n}$.

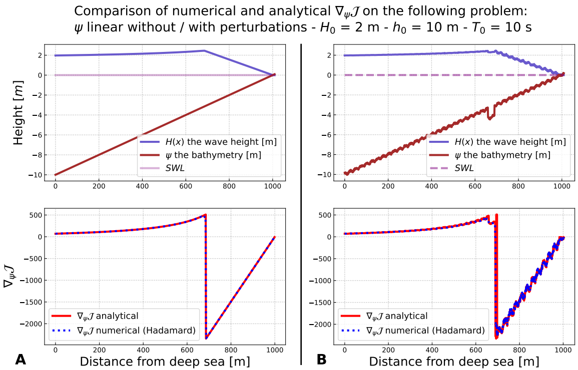


Figure 21: ***A)*** *Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard sur un cas simple,* ***B)*** *Solution analytique et approximative sur un cas perturbé.*

Nouveau Workflow basé du la dérivée au sens d'Hadamard

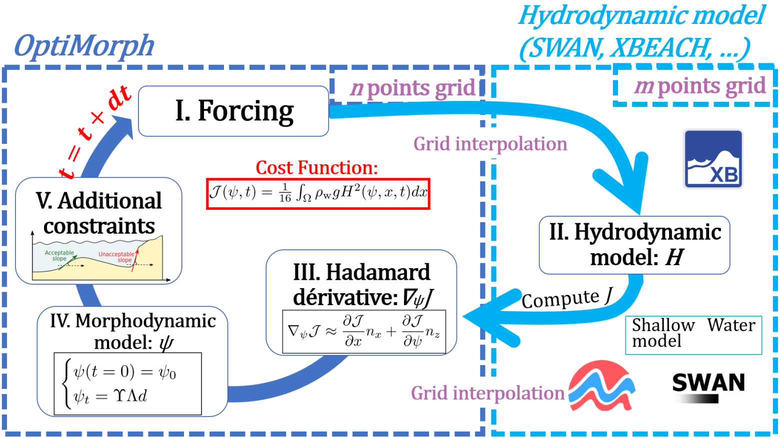


Figure 22: Nouveau workflow d'OptiMorph basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

✔ Rapide.
✔ Calcul entièrement l'action des vagues.

✖ Ne traite pas les ondes longues.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

✔ Très rapide.
✔ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.

✖ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

✔ Rapide.
✔ Calcul entièrement l'action des vagues.

✖ Ne traite pas les ondes longues.

XBeach

Résout séparément les ondes longues (vagues à vagues) et les ondes courtes (spectral).

✔ Très physique.
✔ Résout également la circulation.

✖ Temps de calculs assez conséquents.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins

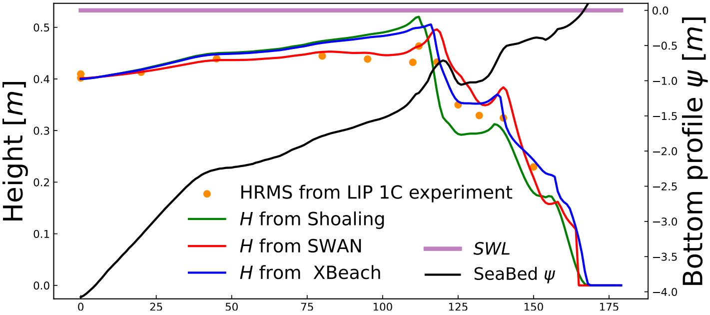


Figure 23: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s
- $T_f = 30$ mins

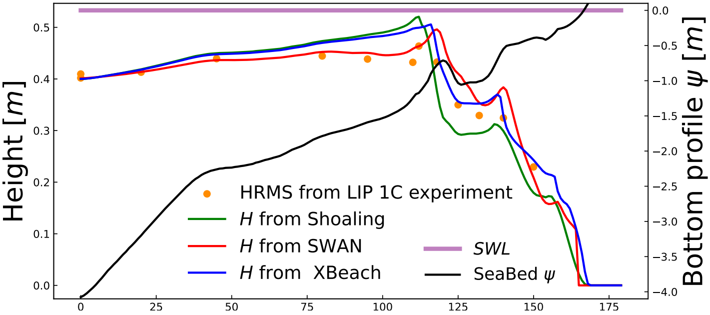


Figure 23: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

- Shoaling : $H_{\text{RMSE}} = 4.5$ cm.
- SWAN : $H_{\text{RMSE}} = 3.3$ cm.
- XBeach : $H_{\text{RMSE}} = 2.8$ cm.

1. Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, par minimisation ?

2. Vers un modèle morphodynamique

3. Extension à un modèle générique
   - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
   - Validation numérique de la dérivée de Hadamard
   - Présentation du nouveau modèle basé la dérivée d'Hadamard
   - Résultats morphodynamiques

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS 1: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS 2: Une partie accretive sur le profil final de SANDS 1.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS 1: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS 2: Une partie accretive sur le profil final de SANDS 1.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

LIP (Roelvink and Reniers, 1995)

The Delta Flume of Delft Hydraulics mesure 225x7x5 m.

- LIP-1A: Avant la tempête, création d'une barre sédimentaire sur une plage linéaire de pente 1/30.
- LIP-1B: Tempête, la barre se déplace vers le large sous l'action de grosses vagues, érosion.
- LIP-1C: Après la tempête, la barre se déplace vers la côte, accrétion.

	Fond initial	H_S[m]	T_0[s]	Durée [h]
1A	Profil initial	0.9	5	
1B	Résultat de 1A	1.4	5	18
1C	Résultat de 1B	0.6	8	13

Table 2: Paramètres de LIP.

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.32$ m
- $T_0 = 5.44$ s
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: 1/15

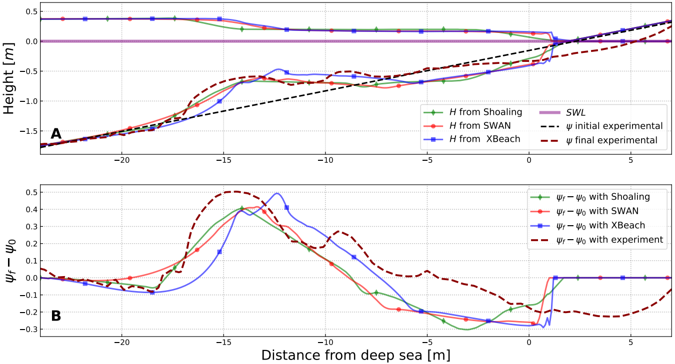


Figure 24: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu).* ***B)*** *Écarts de $\psi_f - \psi_i$.*

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.32$ m
- $T_0 = 5.44$ s
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: $1/15$

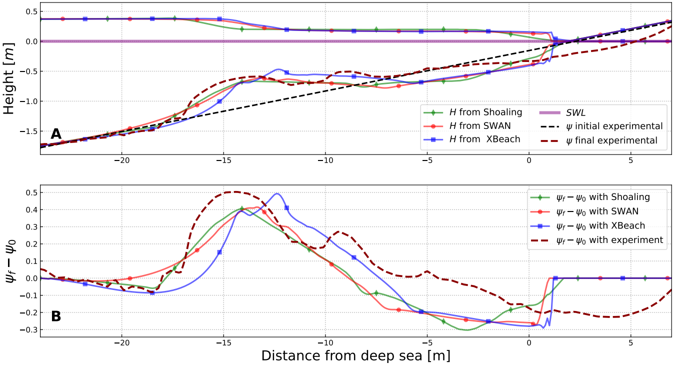


Figure 24: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu).* ***B)*** *Écarts de $\psi_f - \psi_i$.*

- Shoaling : $\psi_{\text{RMSE}} = 11.7$ cm.
- SWAN : $\psi_{\text{RMSE}} = 12.7$ cm.
- XBeach : $\psi_{\text{RMSE}} = 13.5$ cm.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h
- Pente: 1/30

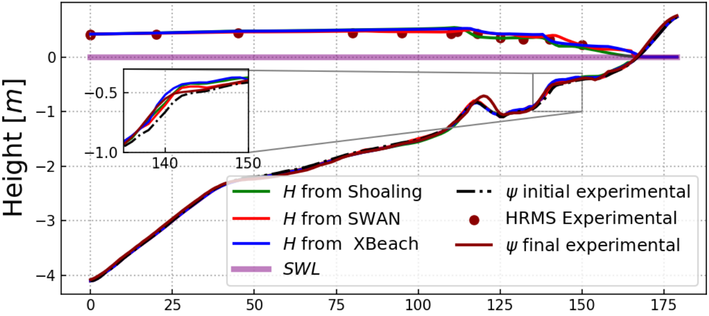


Figure 25: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h
- Pente: 1/30

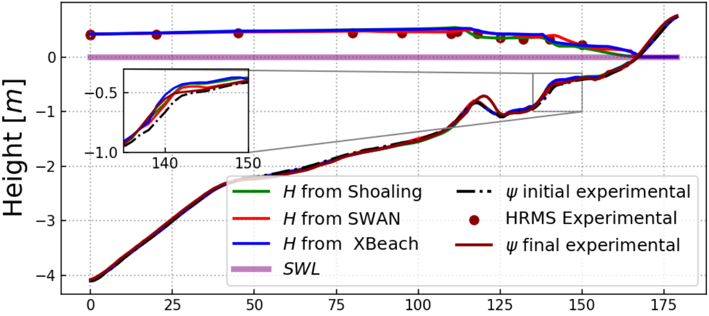


Figure 25: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

- Comportement de la barre intérieure globalement reproduit.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6$ m
- $T_0 = 8$ s
- $T_f = 13$h
- Pente: 1/30

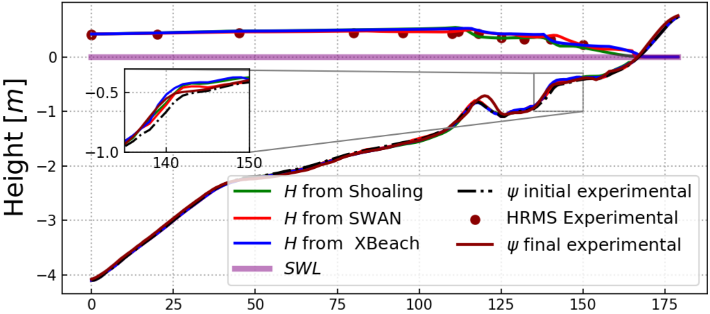


Figure 25: ***A)*** *Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

- Comportement de la barre intérieure globalement reproduit.
- Mais aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi}$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{max}}\right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

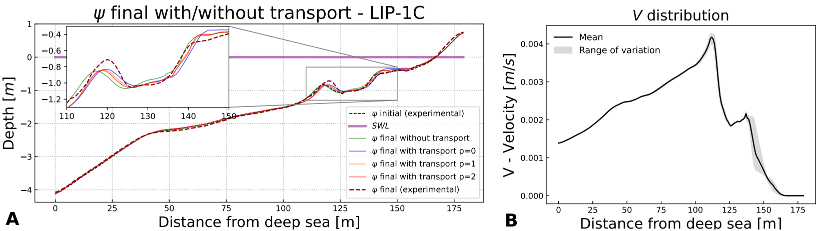


Figure 26: ***A)*** *Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C.* ***B)*** *Distribution des vitesses pour $p = 1$.*

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\boxed{\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi}$,
- Une vitesse possible: $\boxed{V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p}$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

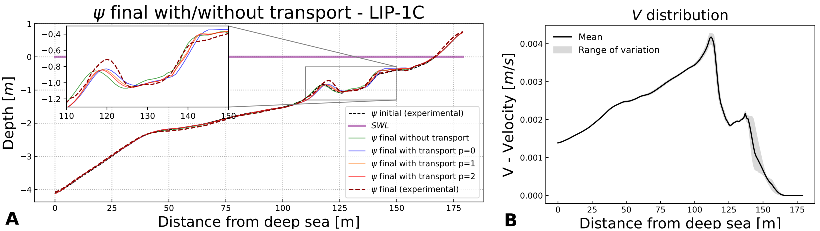


*Figure 26: **A)** Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. **B)** Distribution des vitesses pour $p = 1$.*

- Mais $V > 0$ pour ce choix $\Rightarrow$ pas de déplacement de barre sédimentaire vers le large (comme dans LIP-1B).

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi & (1a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (1b) \end{cases}$$

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi & (1a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (1b) \end{cases}$$

- L'équation (1b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi & \text{(1a)} \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & \text{(1b)} \end{cases}$$

- L'équation (1b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.
- Comment calculer $\nabla_V \mathcal{J}$?

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi & \text{(1a)} \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & \text{(1b)} \end{cases}$$

- L'équation (1b) traduit une vitesse minimisant $\mathcal{J}$.
- Comment calculer $\nabla_V \mathcal{J}$?
- Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser $\mathcal{J}$?

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: $1/50$
- $\Omega = 600$ m

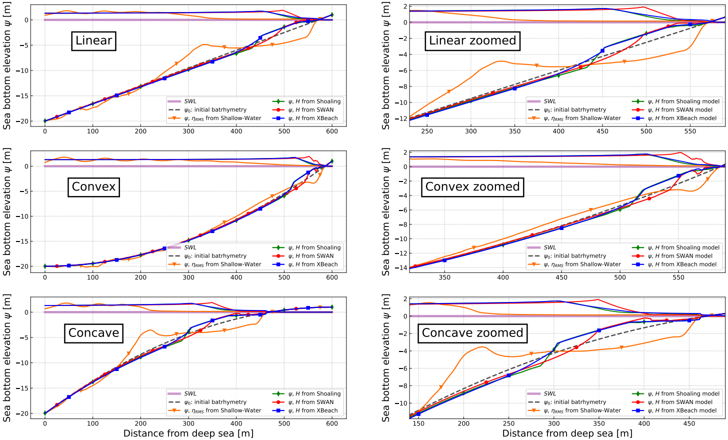


Figure 27: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: $1/50$
- $\Omega = 600$ m

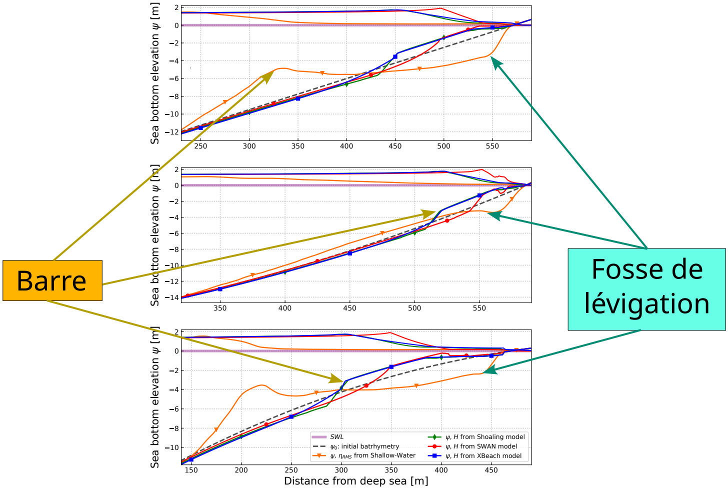


Figure 27: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m
- $T_0 = 12$ s
- $T_f = 72$ h
- Pente: $1/50$
- $\Omega = 600$ m

- Caractéristiques observables dans la nature.

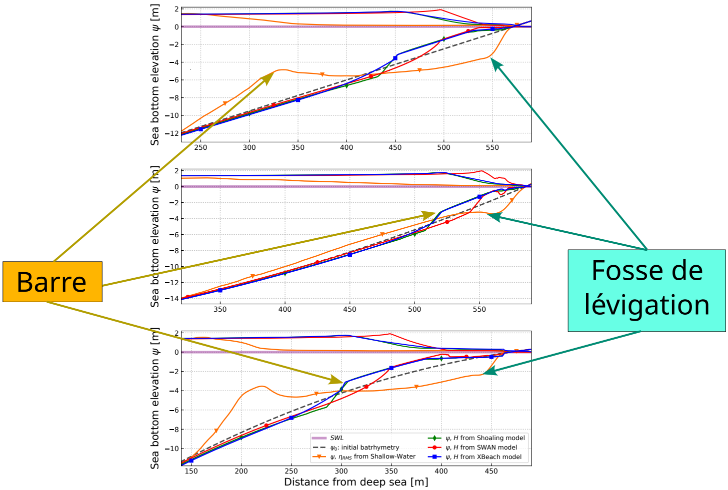


Figure 27: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).