

Couplage vague-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES
E. I. TURKI
P. MARCHESIELLO
C. CHOQUET
M. ERSOY
F. BOUCHETTE
B. MOHAMMADI

Chargée de Recherche, HDR
Maîtresse de conférences, HDR
Directeur de Recherche, HDR
Professeure
Professeur
Professeur
Professeur

École des Ponts, LHSV
Univ de Normandie
IRD, LEGOS
Univ de La Rochelle
Univ de Toulon
Univ de Montpellier
Univ de Montpellier

Rapporteuse
Rapporteuse
Examinateur
Examinateuse
Examinateur
Directeur de thèse
Directeur de thèse

Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
 - Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
 - Explorer une nouvelle manière de modéliser la dynamique du littoral avec un nombre limité d'hyperparamètres.
 - Développer un outil rapide d'exécution pour la conception de structures de défense en ingénierie côtière.



Figure 1: Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet

Contexte historique. Des travaux de 2004 - 2024 entre Geosciences Montpellier et l'IMAG. Une collaboration long terme avec BRLi.



 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défense du littoral.
 - Optimisation de positionnement de géotubes.
 - Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.



 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défense du littoral.
 - Optimisation de positionnement de géotubes.
 - Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.



 Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
 - Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.



 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défense du littoral.
 - Optimisation de positionnement de géotubes.
 - Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial



 Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
 - Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.



 Megan Cook (2018 - 2021)

- Introduction contraintes physiques sur le modèle de minimisation (conservation, pente, etc). Développement du modèle OptiMorph.
 - Optimisation du réaménagement du port de la Turballe avec suivi du trait de côte.

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
 - 2 Vers un modèle morphodynamique
 - 3 Extension à un modèle générique
 - 4 Évolution du modèle en 2D
 - 5 Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

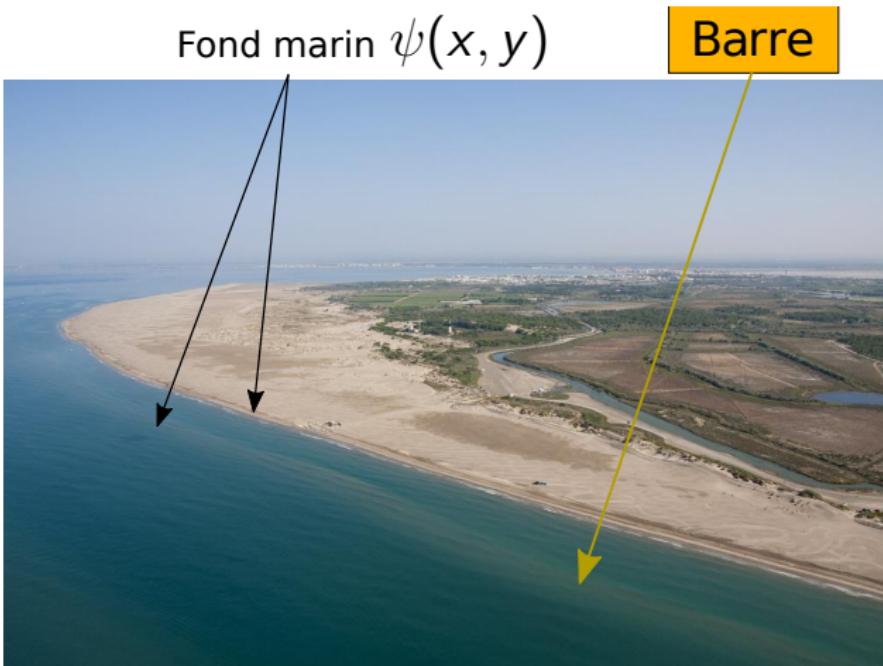


Figure 2: Plage de l'Espiguette

Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin $\psi(x, y)$

Barre

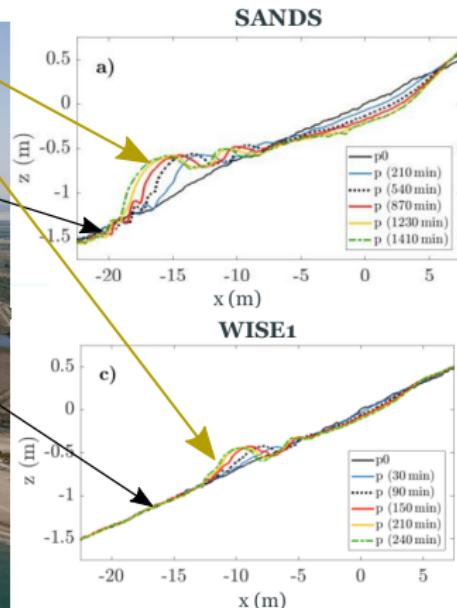
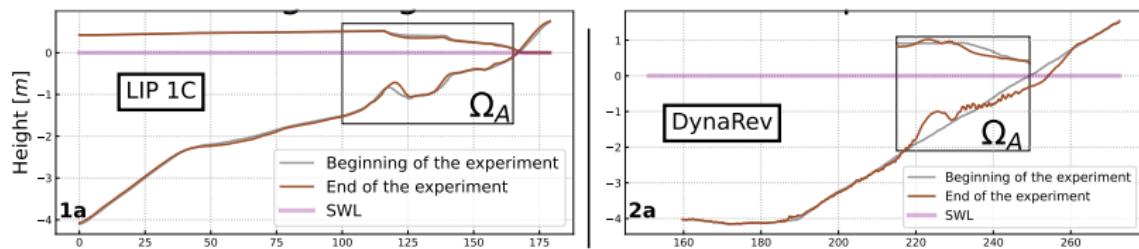


Figure 2: (Gauche) Plage de l'Espiguette | (Droite) Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS and WISE 1 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)

Est-ce qu'il existe une quantité représentative de l'état global de ces systèmes ?



Est-ce qu'il existe une quantité représentative de l'état global de ces systèmes ?

Comparison of Wave Energy E_H between the beginning and the end of the experience

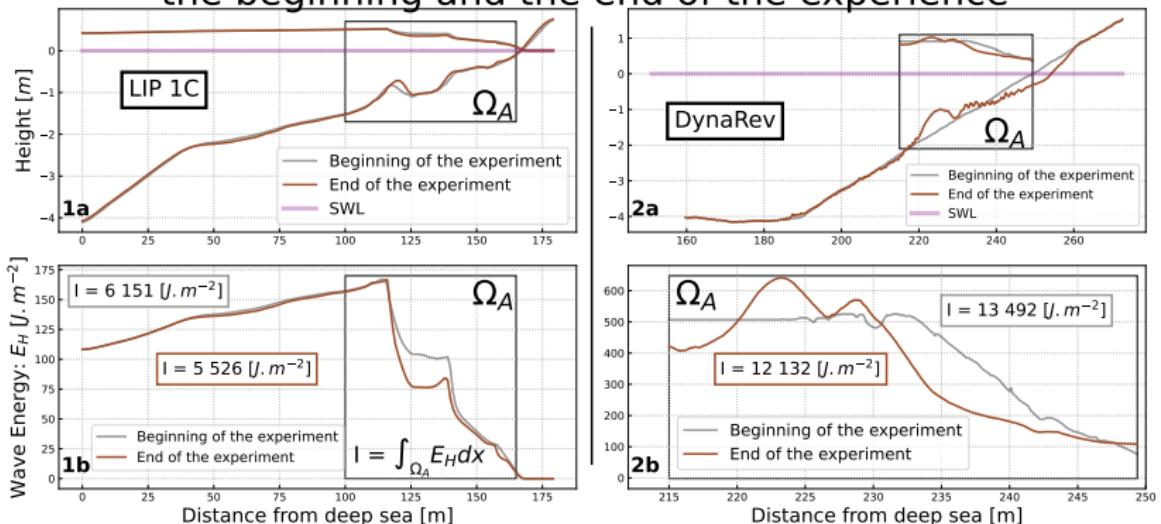


Figure 3: 1) Expérience LIP 1C avec H générée par XBeach. 2) Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR. a) Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). b) Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A .

Est-ce qu'il existe une quantité représentative de l'état global de ces systèmes ?

$$I_i \approx 0.9 I_f$$

Comparison of Wave Energy E_H between the beginning and the end of the experience

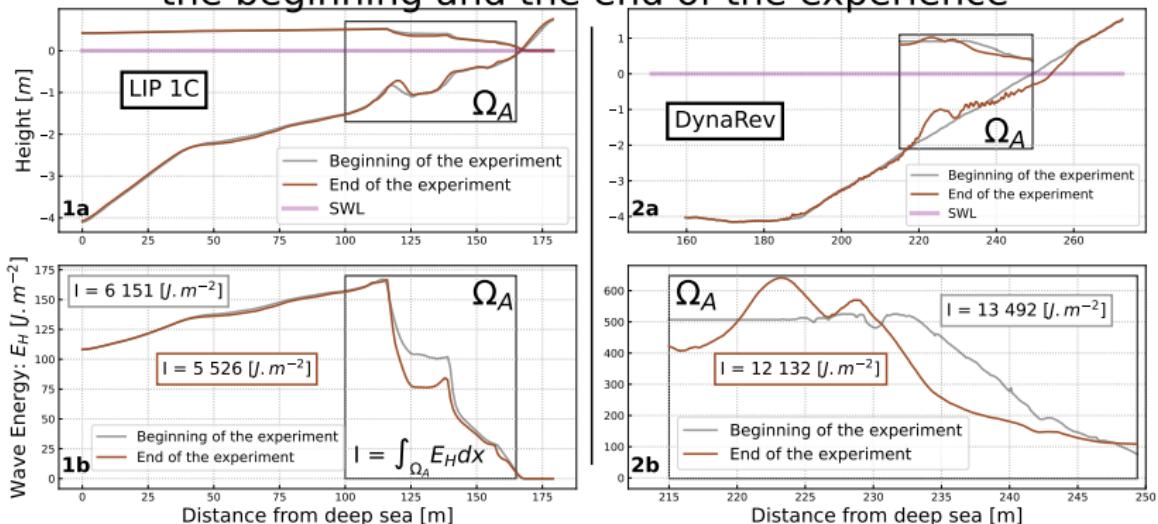


Figure 3: 1) Expérience LIP 1C avec H généré par XBeach. 2) Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR. a) Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). b) Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A .

Minimiser l'énergie des vagues à travers la fonction de coût:

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} E_H$$

représente la physique.

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?



Quel est le fond ψ minimisant l'énergie des vagues ? $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$?

Un "fond possible"...



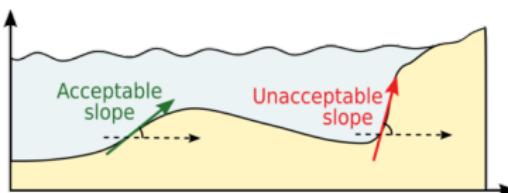
Image provenant d'un photomontage.

Cette solution à $\mathcal{J} = 0$ minimise au maximum l'énergie des vagues.

Ajout de contraintes physiques

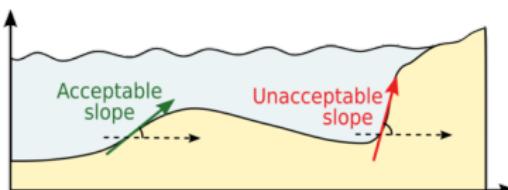
Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

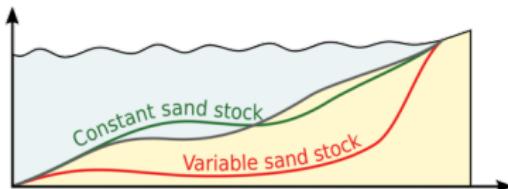


Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

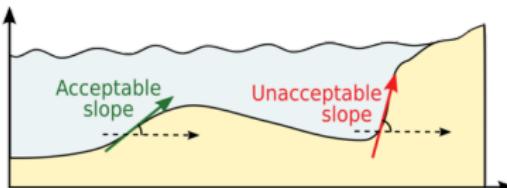


- Conservation sableuse:

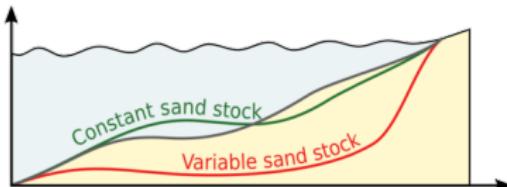


Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:

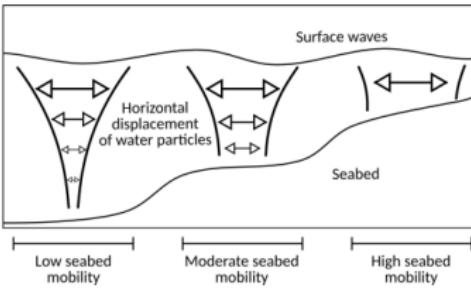


Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
 - Présentation du modèle
 - Consistance du modèle
 - Résultats 1D du modèle
 - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

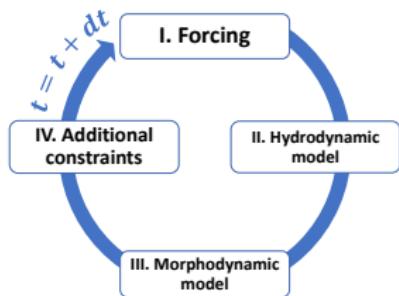


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

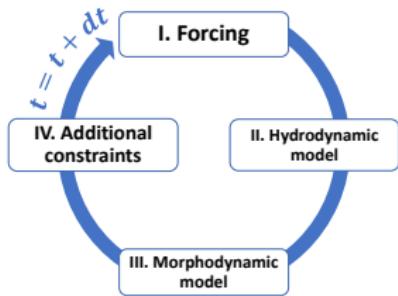


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .

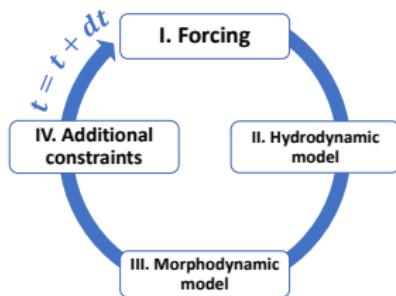


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
 - Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ...

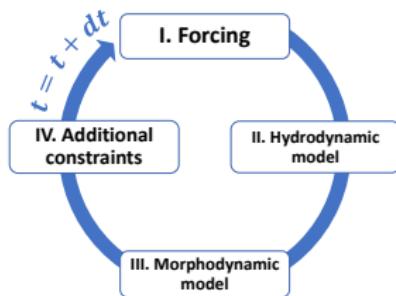


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
 - Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ...
 - Des paramètres morphodynamique: Υ .

Fonctionnement du modèle et quelques notations

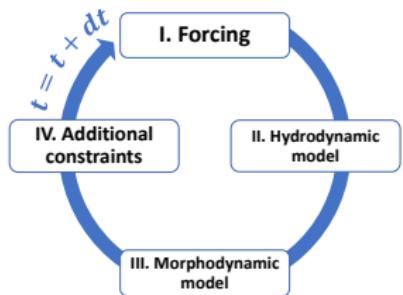


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

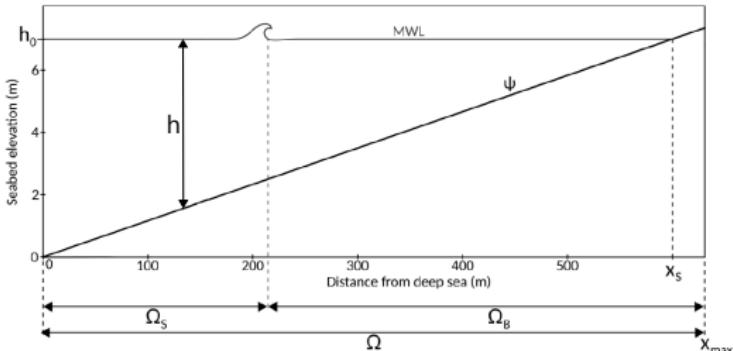


Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
- Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ...
- Des paramètres morphodynamique: Υ .
- Paramètres géométriques: Ω , h_0 , M_{slope} .

Fonctionnement du modèle et quelques notations

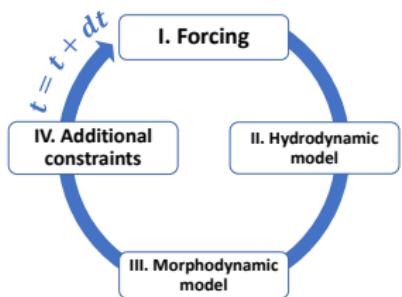


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

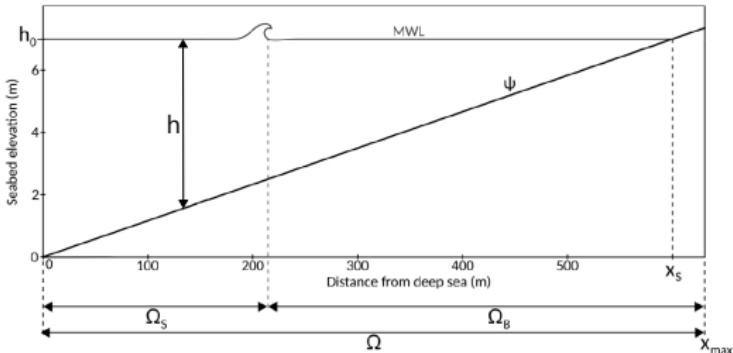


Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
- Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ...
- Des paramètres morphodynamique: Υ .
- Paramètres géométriques: Ω , h_0 , M_{slope} .
- Des paramètres numériques: Δx , Δt , T_f .

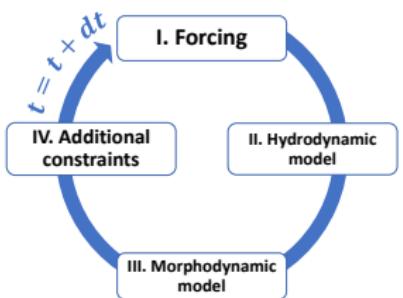


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

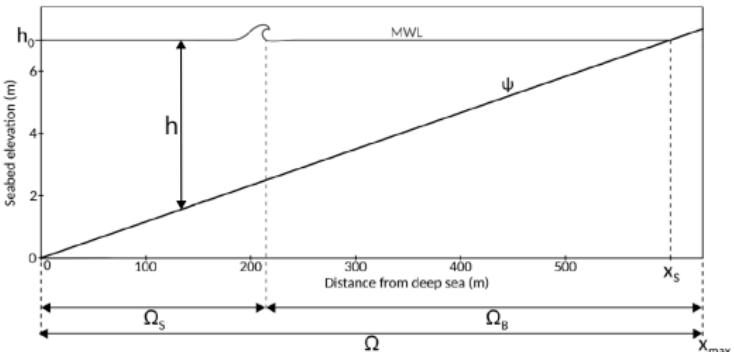


Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
 - Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ...
 - Des paramètres morphodynamique: Υ .
 - Paramètres géométriques: Ω , h_0 , M_{slope} .
 - Des paramètres numériques: Δx , Δt , T_f .

1 hyperparamètre

Fonctionnement du modèle et quelques notations

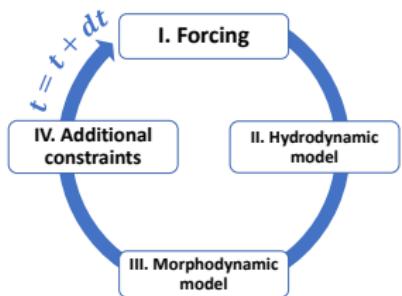


Figure 4: Fonctionnement du modèle.

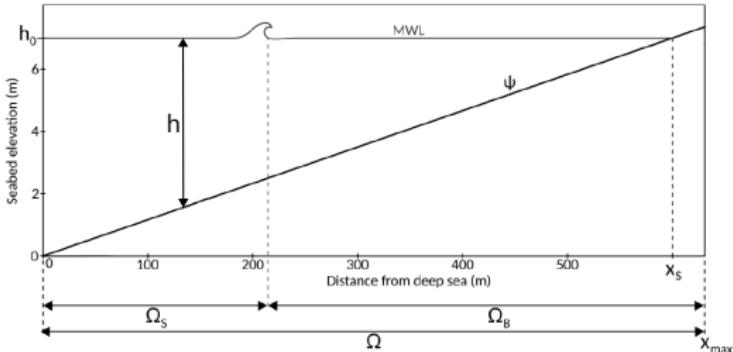


Figure 5: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing: $H_0(t)$, $T_0(t)$, ψ_0 .
- Des paramètres hydrodynamiques: γ , θ , ... 1 hyperparamètre
- Des paramètres morphodynamique: τ . contre
- Paramètres géométriques: Ω , h_0 , M_{slope} . ≈ 10-100 dans les modèles classiques
- Des paramètres numériques: Δx , Δt , T_f .

Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

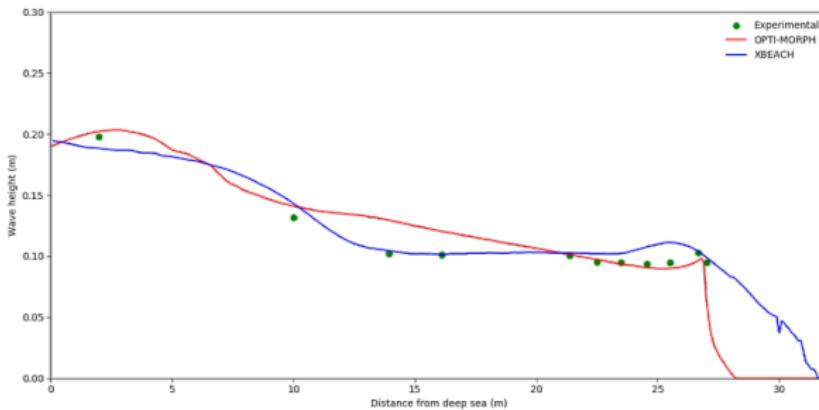
avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement.

Premier modèle de vagues. Nécessité d'être simple.

Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement.



Paramètres:

- $H_s = 0.15$ m
- $T_0 = 2.5$ s

Figure 6: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = -\gamma \nabla_{\psi} \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

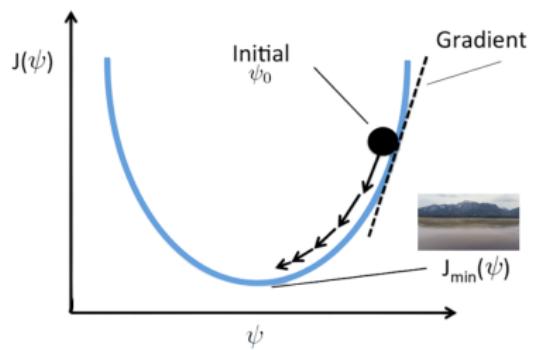


Figure 7: Descente du gradient à $t = 0$ s.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = -\gamma \nabla_{\psi} \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

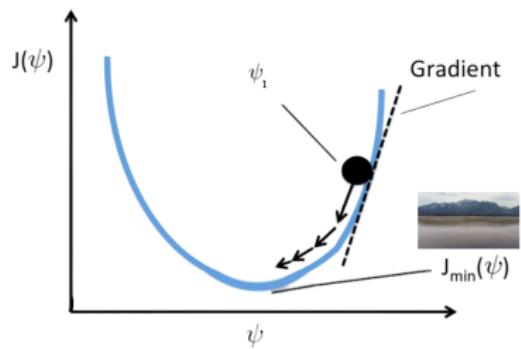


Figure 7: Descente du gradient à $t = \Delta t$ s.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = -\gamma \nabla_{\psi} \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi),$
 - $\psi(t)$: le fond sableux au temps t ,
 - Υ : la mobilité sédimentaire.

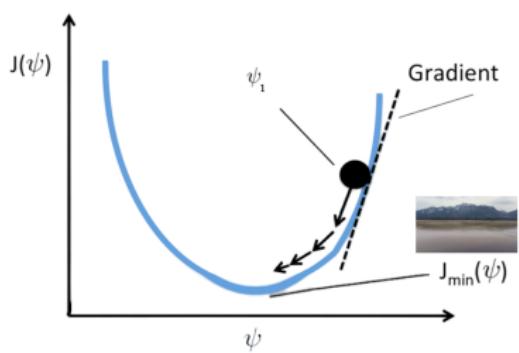


Figure 7: Descente du gradient à $t = \Delta t$ s.

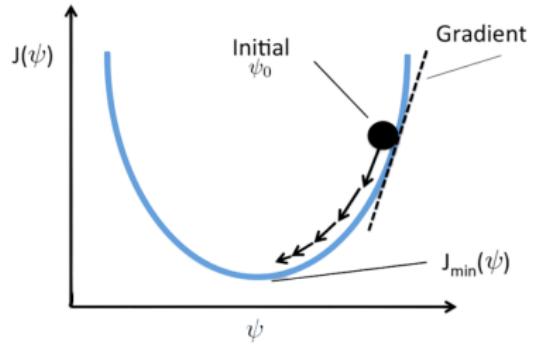
Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = -r \nabla_{\psi} \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$



avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi),$
 - $\psi(t)$: le fond sableux au temps t ,
 - Υ : la mobilité sédimentaire.
 - $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.

Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$,

Figure 7: Descente du gradient.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi),$
 - $\psi(t)$: le fond sableux au temps t ,
 - Υ : la mobilité sédimentaire.
 - $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.

Rq: Sans contrainte, $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$,

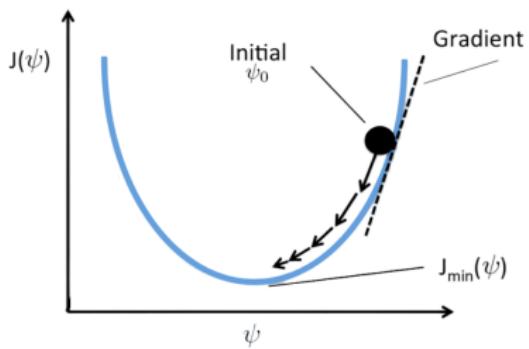


Figure 7: Descente du gradient.

Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$ en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma \Delta d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

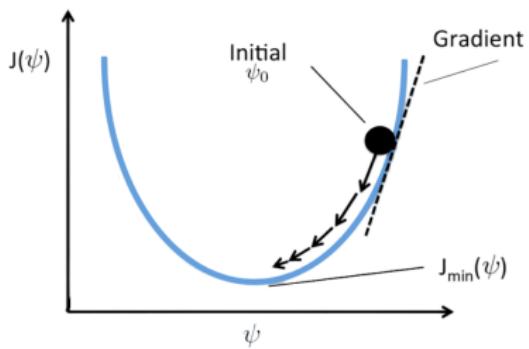


Figure 7: Descente du gradient.

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi),$
 - $\psi(t)$: le fond sableux au temps t ,
 - Υ : la mobilité sédimentaire.
 - $d(x)$: la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
 - **Rq:** Sans contrainte, $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J},$
 - **$\Lambda(x)$:** l'excitation du fond sableux par les vagues.

Ajout de contraintes physiques

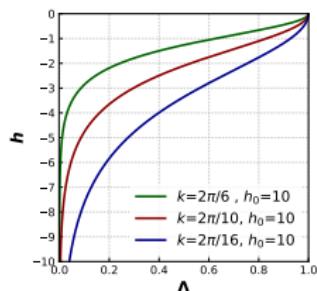
- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\varphi : \Omega \times [0, h_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, z) \mapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},$$

et en $z = \psi$:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



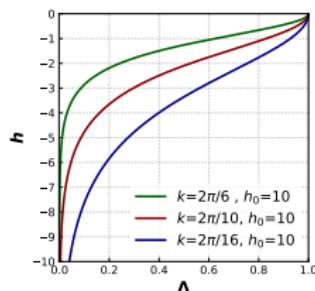
Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\varphi : \begin{aligned} \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{aligned}$$

et en $z = \psi$:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$$

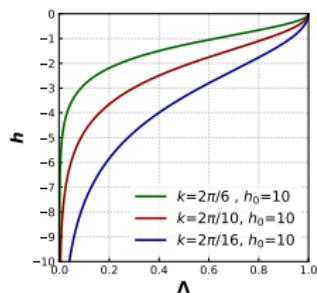
Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{aligned}\varphi : \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},\end{aligned}$$

et en $z = \psi$:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$$

- Conservation sableuse (uniquement en domaine fermé):

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T_f]$$

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

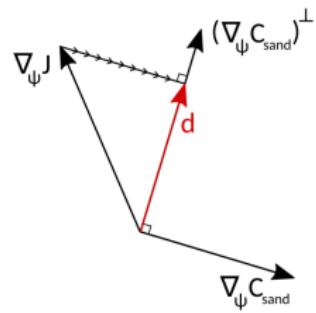
On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

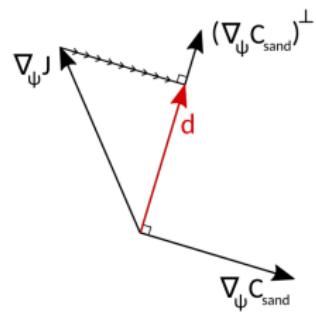
On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.



*Figure 8: Projection.
Cook (2021).*

On veut calculer la direction de descente d sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidus $C_{\text{sand}}(t)$ que l'on souhaite nul $\forall t \in [0, T_f]$.



*Figure 8: Projection.
Cook (2021).*

On a donc:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|}.$$

Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
 - Présentation du modèle
 - Consistance du modèle**
 - Résultats 1D du modèle
 - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

ψ_{ref} à $\Delta t = 0.18$ s

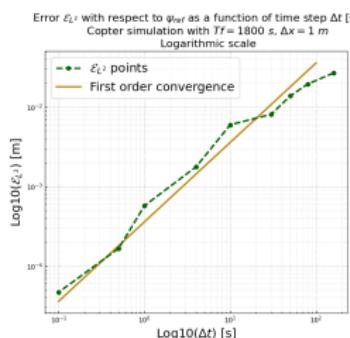


Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans $[0.18, 90]$ s.

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

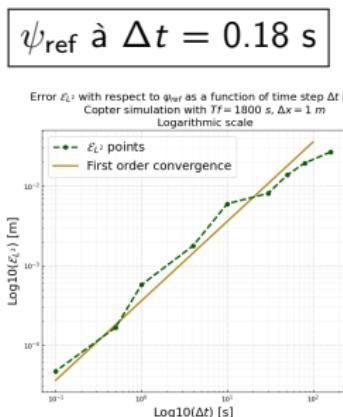


Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans $[0.18, 90]$ s.

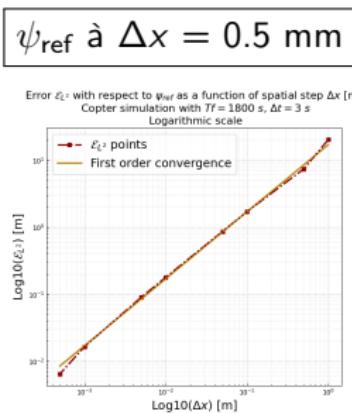


Figure 10: Convergence spatiale avec Δx dans $[0.0005, 2]$ m.

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

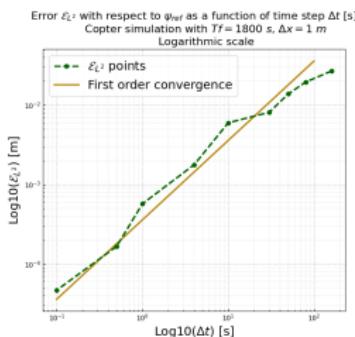
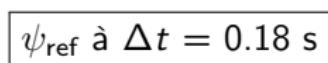


Figure 9: Convergence temporelle avec Δt dans $[0.18, 90]$ s.

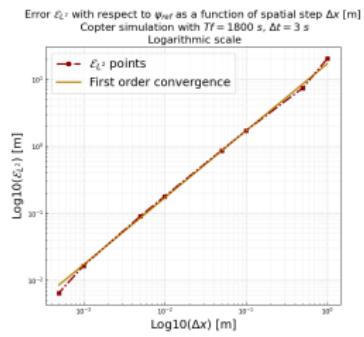
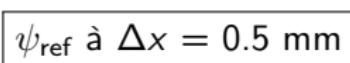


Figure 10: Convergence spatiale avec Δx dans $[0.0005, 2]$ m.

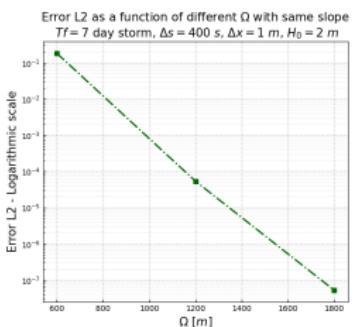
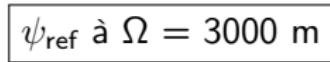


Figure 11: Passage à l'échelle, vérification de la bonne prise en compte des contraintes avec $\Omega \in [600, 3000]$ m.

Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
 - Présentation du modèle
 - Consistance du modèle
 - Résultats 1D du modèle
 - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Présentation de l'expérience Copter 1D

Les expériences ont été menées dans le bassin à houle LHF (Grenoble) de $30\text{ m} \times 30\text{ m}$. Échelle de longueur: 1/10 et échelle de temps: 1/3 (Froude).

Paramètres de l'expérience:

- $H_s = 0.15\text{ m}$, • $T_0 = 2.5\text{ s}$, • $T_f = 30\text{ mins.}$

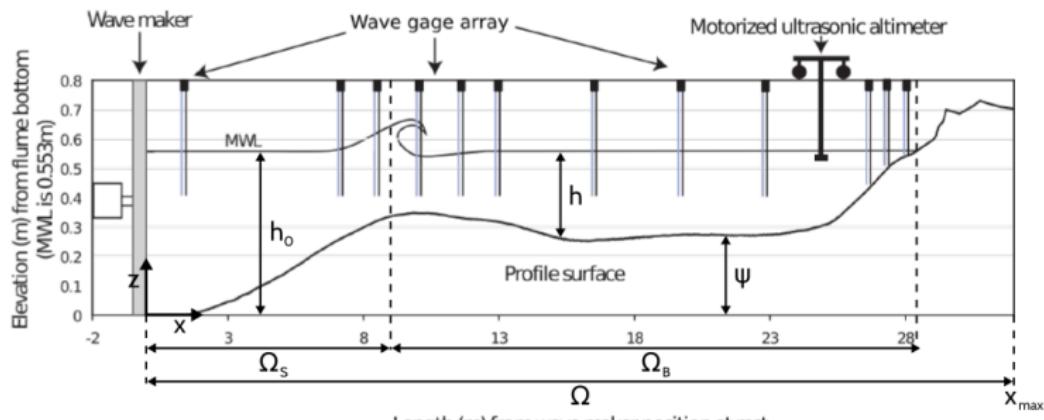


Figure 12: Schéma de l'expérience Copter 1D.

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 0.15 \text{ m}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$

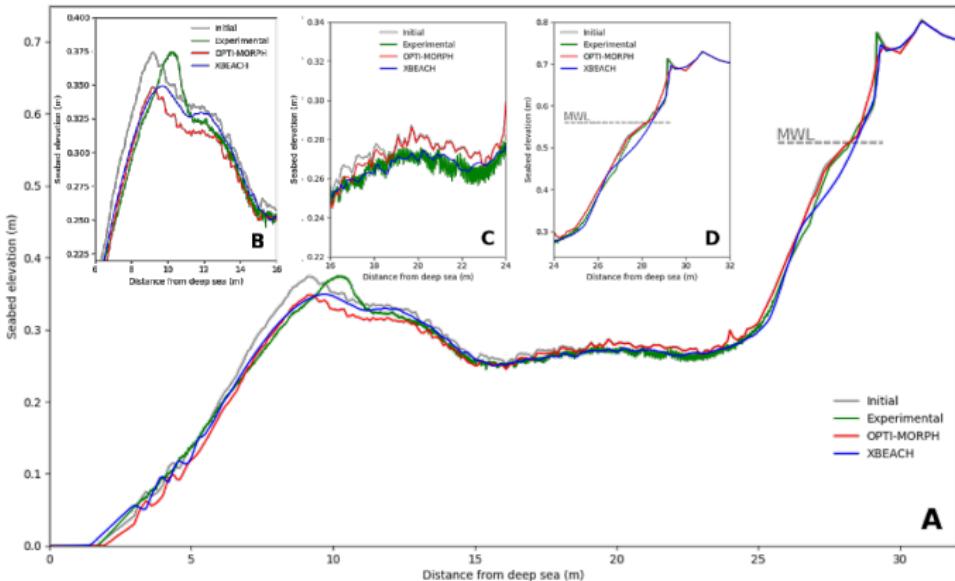


Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 0.15 \text{ m}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$
- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire

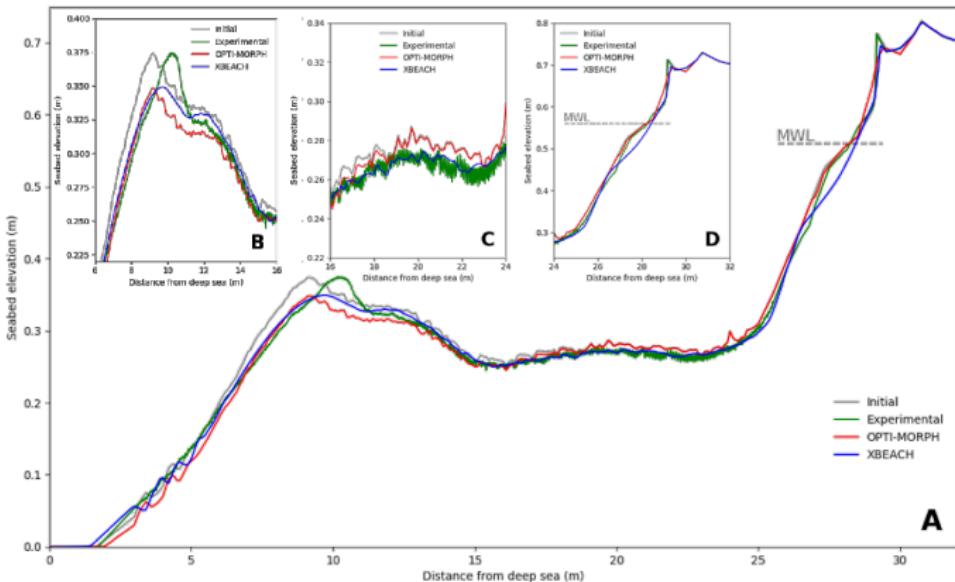


Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
 - Présentation du modèle
 - Consistance du modèle
 - Résultats 1D du modèle
 - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Workflow et cas applicatif

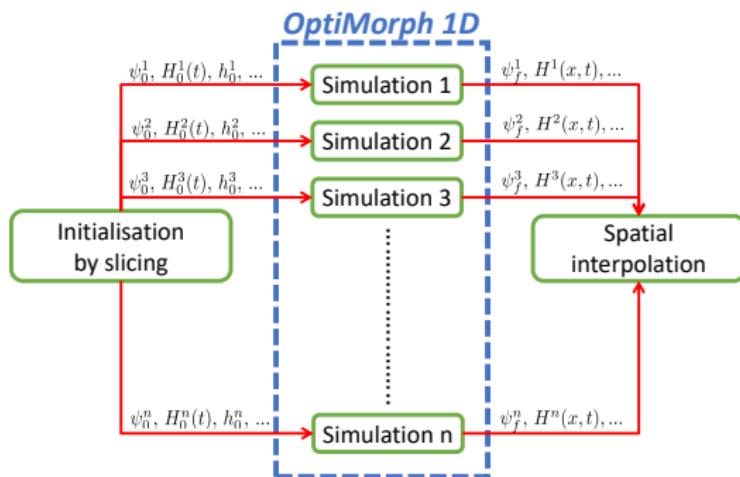


Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

Workflow et cas applicatif

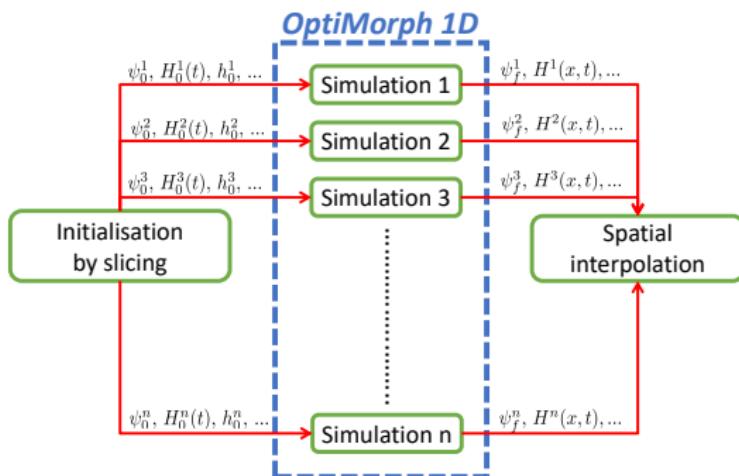


Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.



Figure 15: Géographie de la simulation au sud de Montpellier.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

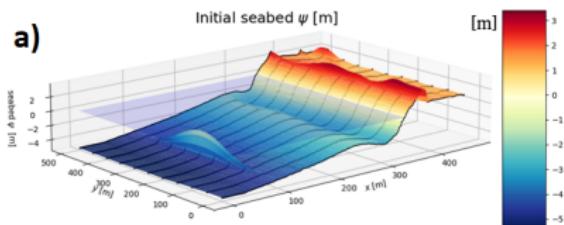


Figure 16: Fond initial.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

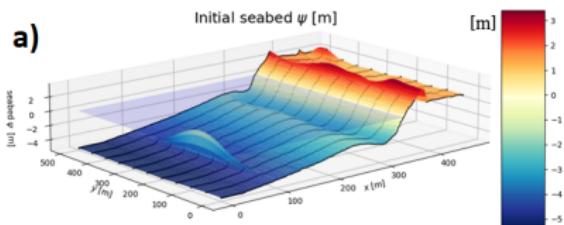


Figure 16: Fond initial.

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$,
 - $T_0 = 2 \text{ s}$,
 - $T_f = 3 \text{ jours}$,
 - $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$,
 - "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

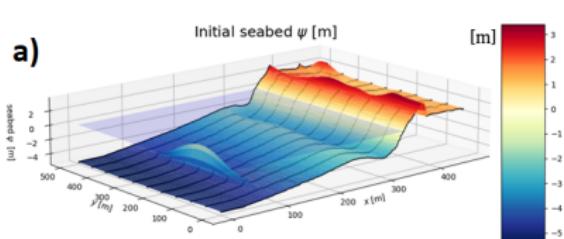


Figure 16: Fond initial.

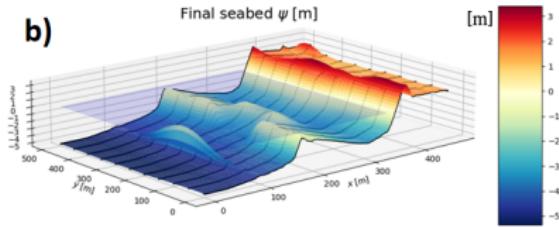


Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

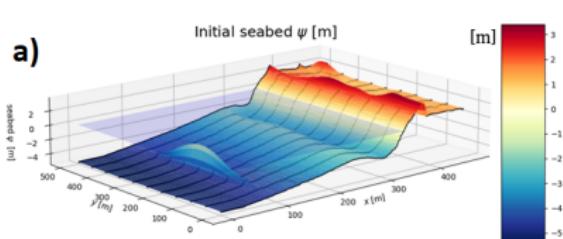


Figure 16: Fond initial.

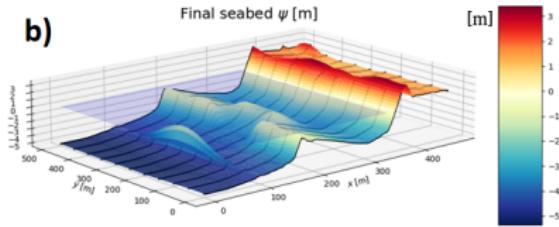


Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).

Résultats en multi-1D sur un cas réel

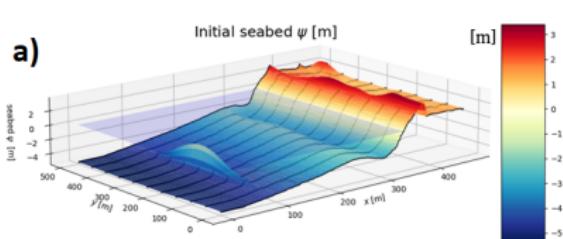


Figure 16: Fond initial.

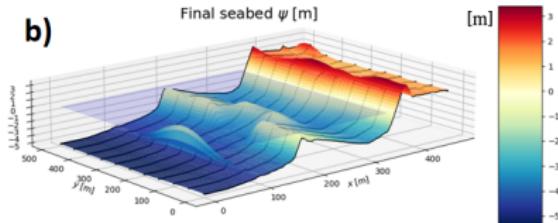


Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$,
- $T_0 = 2 \text{ s}$,
- $T_f = 3 \text{ jours}$,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

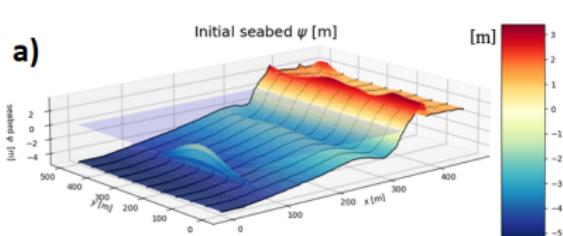


Figure 16: Fond initial.

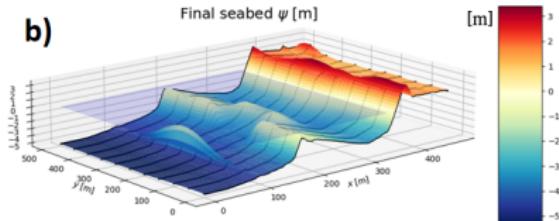


Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m ,
- $T_0 = 2$ s,
- $T_f = 3$ jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$ m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.

Résultats en multi-1D sur un cas réel

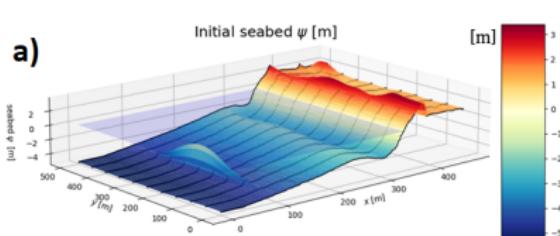


Figure 16: Fond initial.

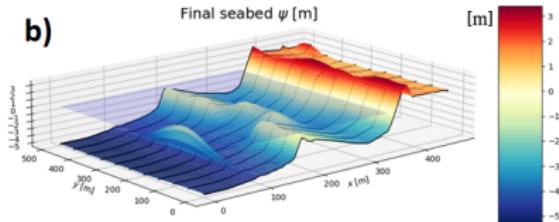


Figure 17: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$,
- $T_0 = 2 \text{ s}$,
- $T_f = 3 \text{ jours}$,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.
- Mais modèle de vague inadapté pour le 2D.

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
 - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi). \end{cases}$$

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi). \end{array} \right.$$

Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
 - ✓ Rapide.
 - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

Cook (2021)

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi). \end{array} \right.$$

Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
 - ✓ Rapide.
 - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

- ✓ Facile à calculer.
 - ✗ $N + 1$ évaluations nécessaires.
 - ✗ Temps de calculs très longs.

Cook (2021)

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi). \end{array} \right.$$

Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
 - ✓ Rapide.
 - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finies

- ✓ Facile à calculer.
 - ✗ $N + 1$ évaluations nécessaires.
 - ✗ Temps de calculs très longs.

Définition



- ✓ Robuste.
 - ✗ Pré-traitement lourd.
 - ✗ Dépendance à C / Fortran 90.

Cook (2021)

Mohammadi & Bouchette (2014)

Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

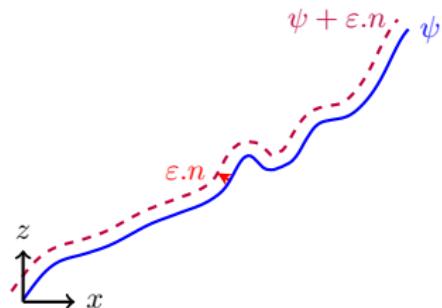


Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

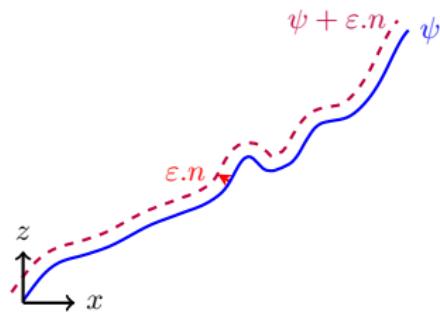


Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

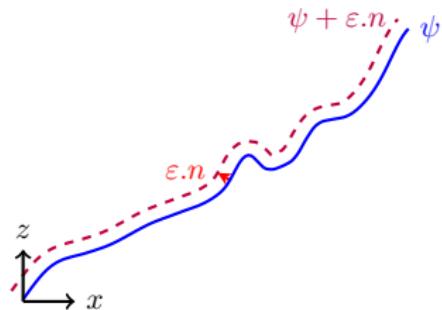


Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

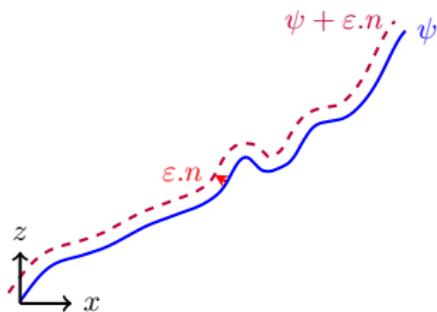


Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

Donc

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx (\nabla_X \mathcal{J}).n$$

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
 - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}}$.

Vérification numérique sur un cas analytique

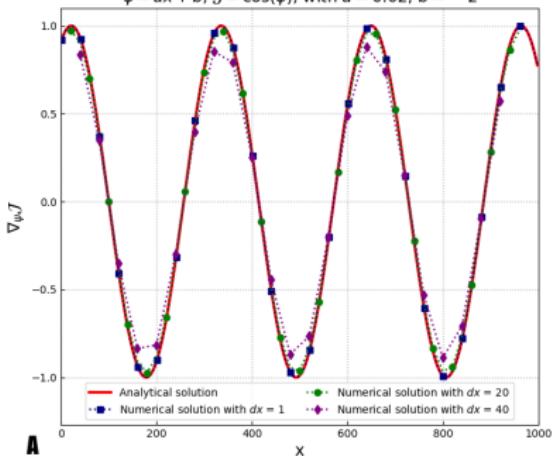
On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

et $\mathcal{J} = \cos(\psi)$, avec $\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}$.

$\nabla_w J$ using Hadamard approximation with the following problem:

$$w = ax + b, \quad z = \cos(w), \text{ with } a = 0.02, b = -2$$



Error \mathcal{E}_{L^2} between the analytical and numerical solution of the Hadamard approximation - Logarithmic scale

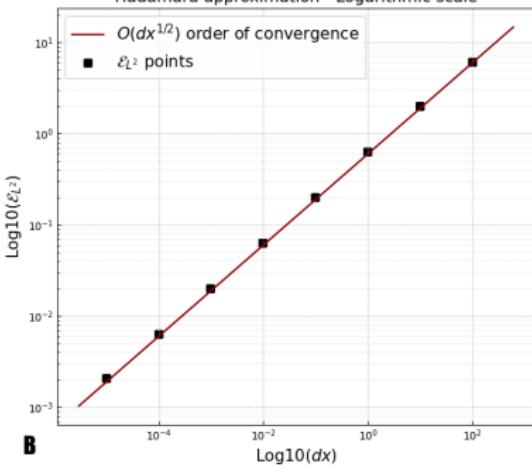


Figure 19: A) Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard, B) Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.

Avec $\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \nabla_{\chi} \mathcal{J}.n$

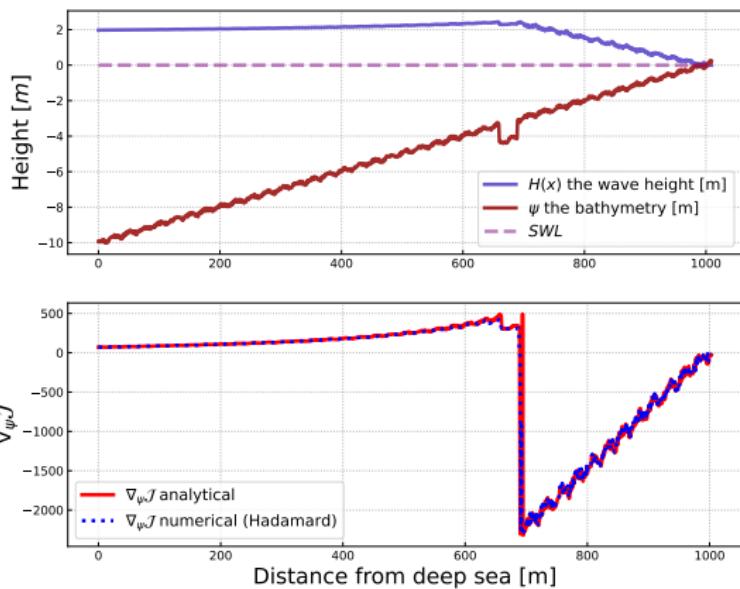


Figure 20: Calcul de $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ par l'approche d'Hadamard (bleu) et calcul analytique (rouge). Fond linéaire avec des perturbations.

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
 - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Nouveau Workflow basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

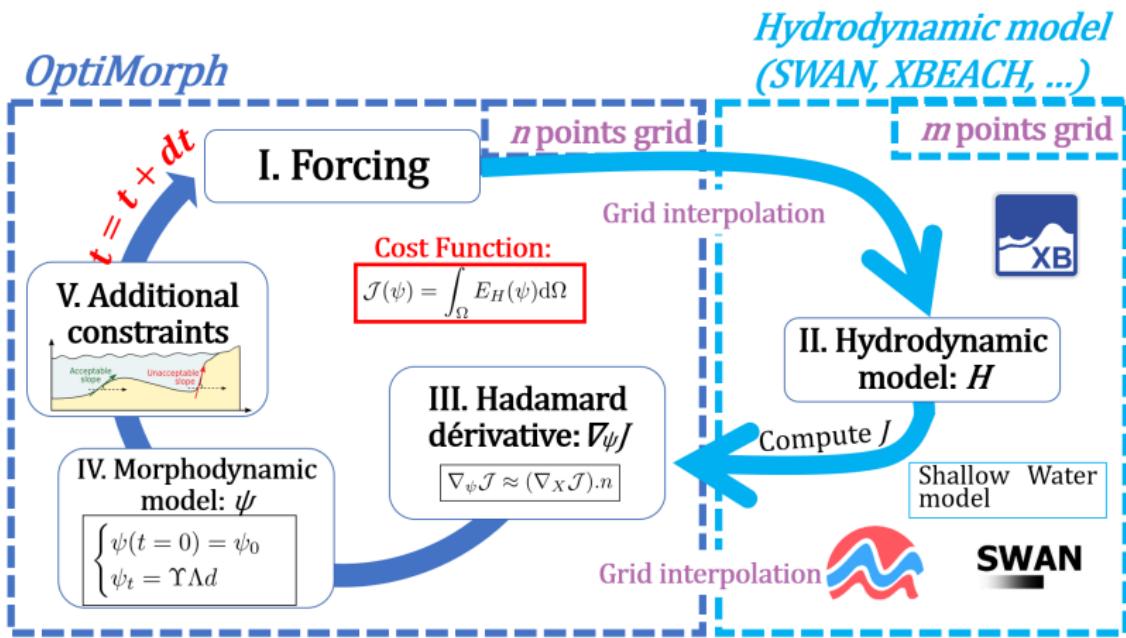


Figure 21: Nouveau workflow d'OptiMorph basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

-
- ✓ Très rapide.
 - ✓ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.
 - ✗ Très peu physique.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- ✓ Très rapide.
 - ✓ Calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ analytiquement possible.
 - ✗ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

- ✓ Rapide.
 - ✓ Calcul entièrement l'action des vagues.
 - ✗ Ne décrit pas la surface de l'onde.

Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- ✓ Très rapide.
 - ✓ Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ analytiquement possible.
 - ✗ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

- ✓ Rapide.
 - ✓ Calcul entièrement l'action des vagues.
 - ✗ Ne décrit pas la surface de l'onde.

XBeach

Résout séparément les ondes longues (vagues à vagues) et les ondes courtes (spectral).

- ✓ Résout également la circulation.
 - ✗ Temps de calculs assez conséquents.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$

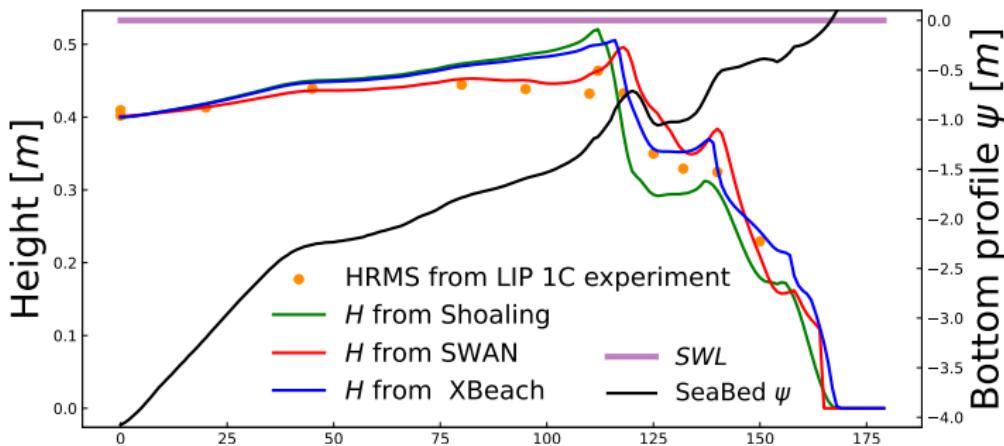


Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

Comparaison des modèles de vagues

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
 - $T_0 = 8 \text{ s}$

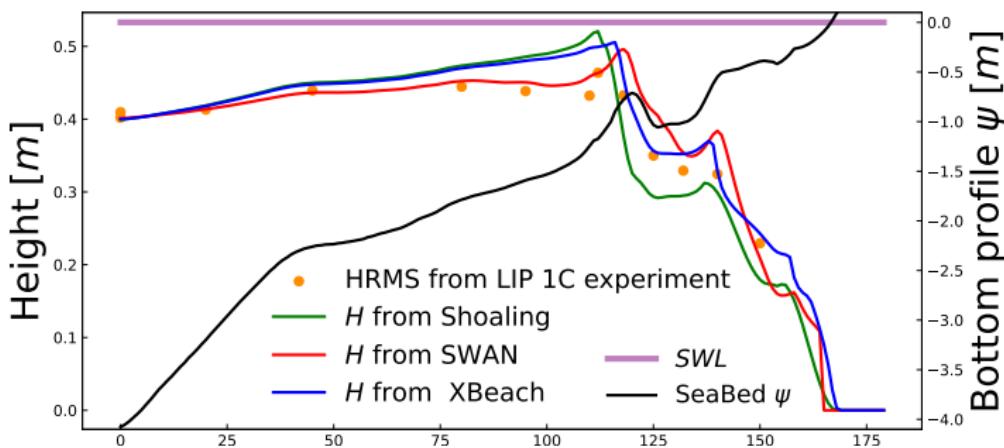


Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

- Shoaling : RMSE_H = 4.5 cm.
 - SWAN : RMSE_H = 3.3 cm.
 - XBeach : RMSE_H = 2.8 cm.

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
 - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS B: Une partie accréitive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	H_s [m]	T_0 [s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
 - SANDS B: Une partie accréitive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	H_S [m]	T_0 [s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

LIP (Roelvink and Reniers, 1995)

The Delta Flume of Delft Hydraulics measures 225x7x5 m.

- LIP-1A: Avant la tempête, création d'une barre sédimentaire sur une plage linéaire de pente 1/30.
 - LIP-1B: Tempête, la barre se déplace vers le large sous l'action de grosses vagues, érosion.
 - LIP-1C: Après la tempête, la barre se déplace vers la côte, accrétion.

	Fond initial	$H_s[m]$	$T_0[s]$	Durée [h]
1A	Profil initial	0.9	5	
1B	Résultat de 1A	1.4	5	18
1C	Résultat de 1B	0.6	8	13

Table 2: Paramètres de LIP.

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.53 \text{ m}$
- $T_0 = 4.14 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: 1/15

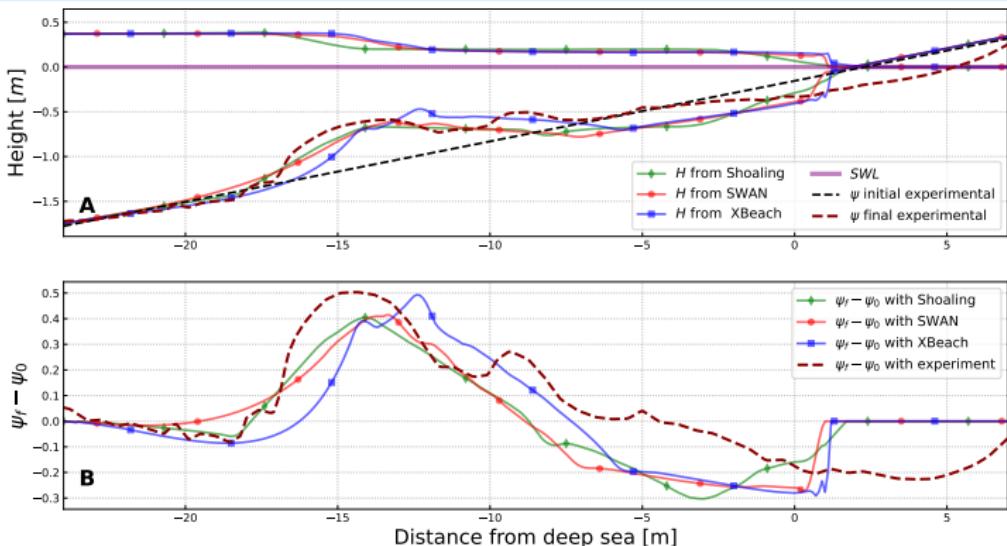


Figure 23: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de $\psi_f - \psi_i$.

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.53 \text{ m}$
- $T_0 = 4.14 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: 1/15

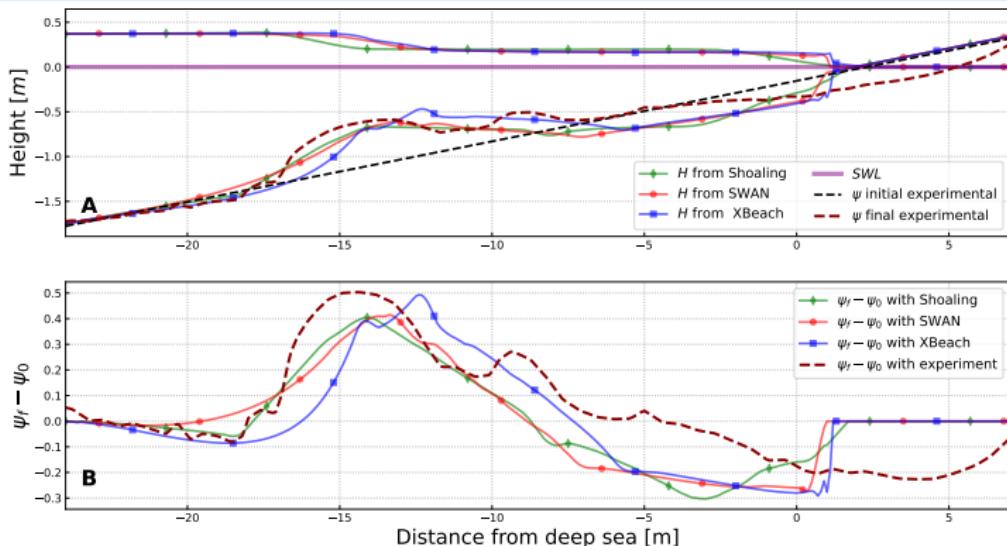


Figure 23: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de $\psi_f - \psi_i$.

Sur [-25, 7] (tout le domaine):

- **Shoaling** : $\text{RMSE}_\psi = 17.1 \text{ cm.}$
- **SWAN** : $\text{RMSE}_\psi = 17.6 \text{ cm.}$
- **XBeach** : $\text{RMSE}_\psi = 19 \text{ cm.}$

Sur [-25, 2] (partie immergée):

- **Shoaling** : $\text{RMSE}_\psi = 11.7 \text{ cm.}$
- **SWAN** : $\text{RMSE}_\psi = 12.7 \text{ cm.}$
- **XBeach** : $\text{RMSE}_\psi = 13.5 \text{ cm.}$

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$

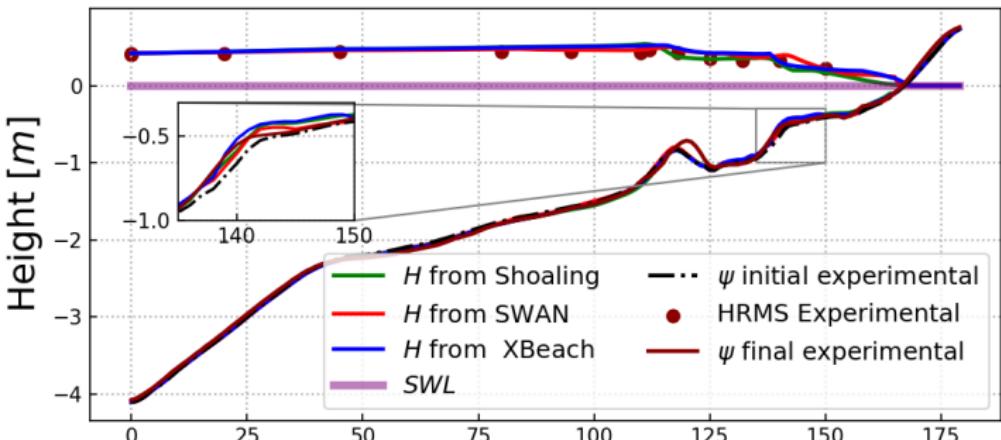


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
 - $T_0 = 8 \text{ s}$
 - $T_f \equiv 13 \text{ h}$

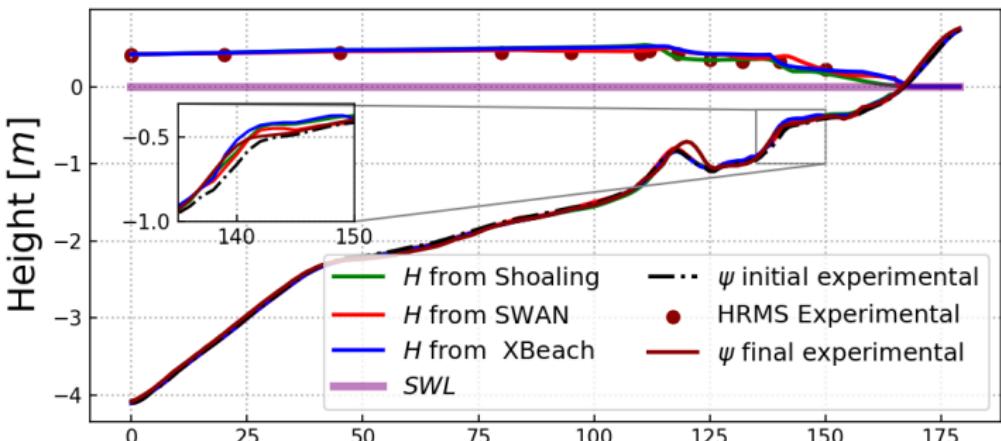


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

- La barre intérieure simulée est superposée à celle expérimentale.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$

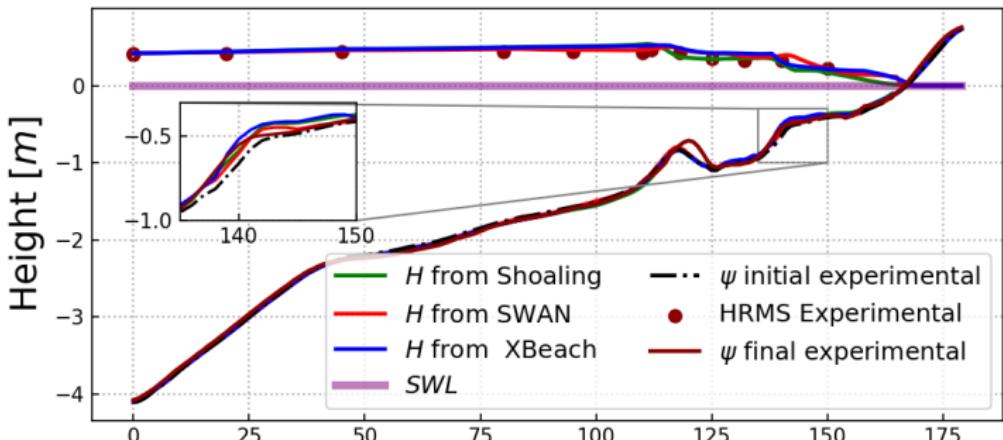


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

- La barre intérieure simulée est superposée à celle expérimentale.
- Aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t + V \nabla_s \psi = \Gamma \Lambda d$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t + V \nabla_s \psi = \Upsilon \Lambda d$,
 - Une vitesse possible: $V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t + V \nabla_s \psi = \Upsilon \Lambda d$,
- Une vitesse possible: $V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

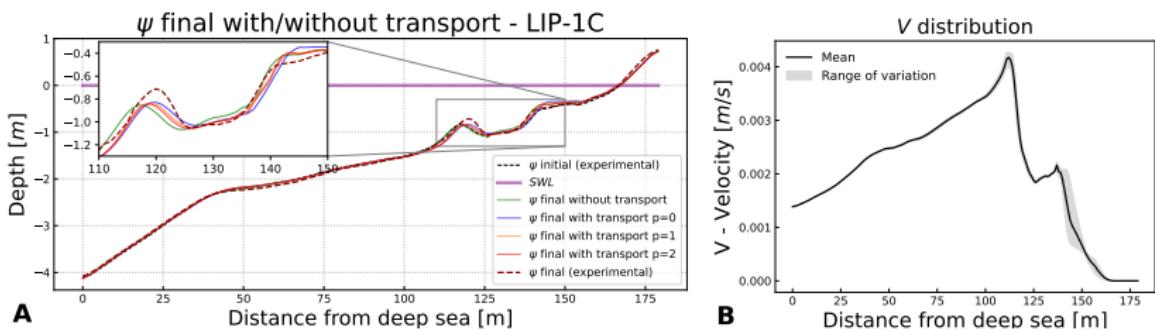


Figure 25: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour $p = 1$.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t + V \nabla_s \psi = \gamma \Lambda d$,
 - Une vitesse possible: $V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$,

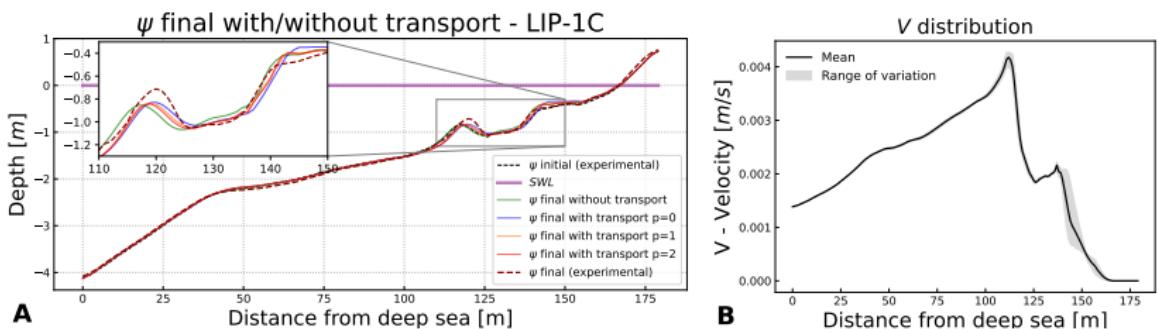


Figure 25: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour $p = 1$.

- Mais $V \geq 0$ pour ce choix \Rightarrow pas de déplacement de barre sédimentaire vers le large (comme dans LIP-1B).

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V \nabla_s \psi = \gamma \Lambda d & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V \nabla_s \psi = \gamma \Lambda d & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant \mathcal{J} .

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V \nabla_s \psi = \gamma \Lambda d & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant \mathcal{J} .
 - Comment calculer $\nabla_V \mathcal{J}$?

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V \nabla_s \psi = \Upsilon \Lambda d & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant \mathcal{J} .
 - Comment calculer $\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{J}$?
 - Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser \mathcal{J} ?

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_\psi J$?
 - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
 - $T_0 = 12 \text{ s}$
 - $T_f = 72 \text{ h}$
 - Pente: $1/50$
 - $\Omega = 600 \text{ m}$
-

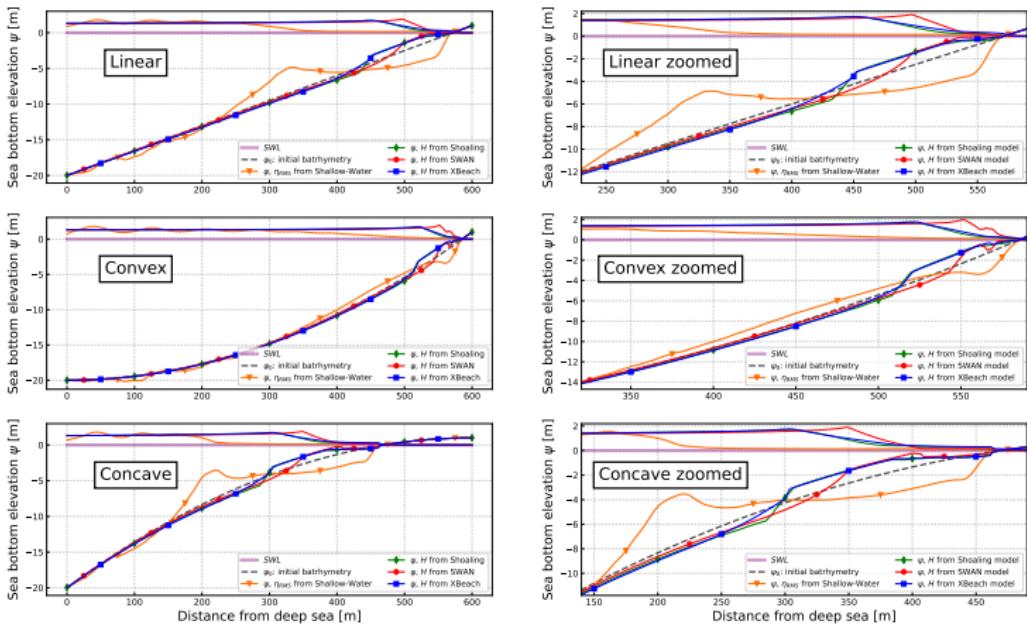


Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
 - $T_0 = 12 \text{ s}$
 - $T_f = 72 \text{ h}$
 - Pente: $1/50$
 - $\Omega = 600 \text{ m}$

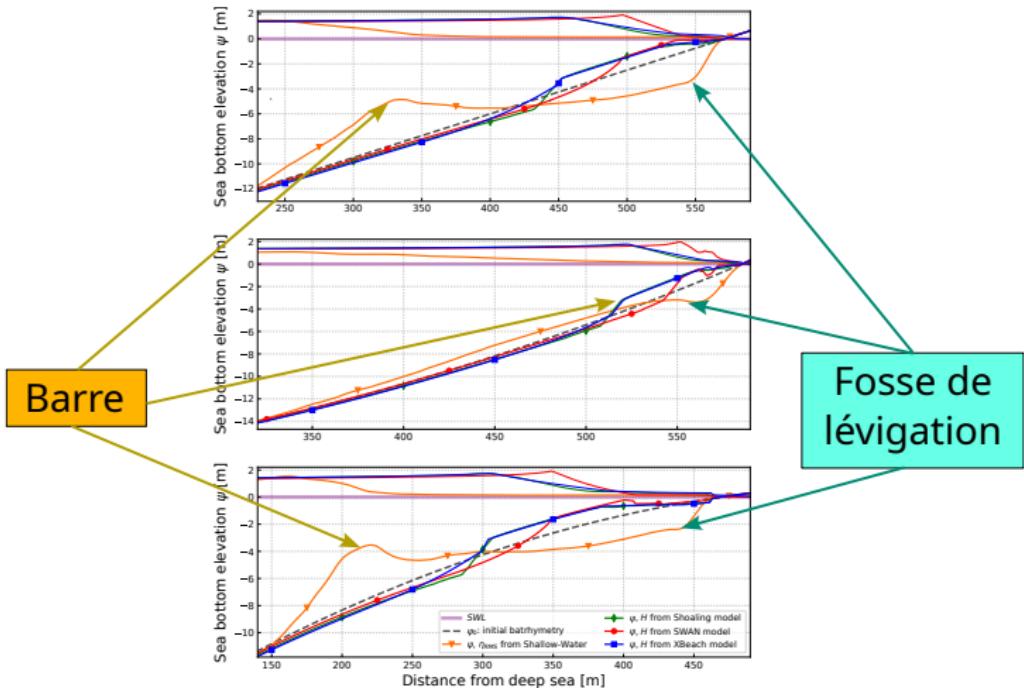


Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
 - $T_0 = 12 \text{ s}$
 - $T_f = 72 \text{ h}$
 - Pente: 1/50
 - $\Omega = 600 \text{ m}$

 - Caractéristiques observables dans la nature

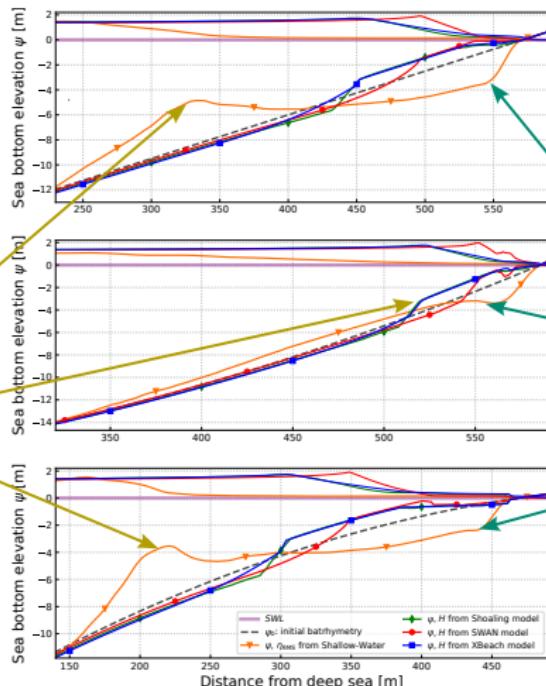


Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Comparaison avec une référence de la littérature

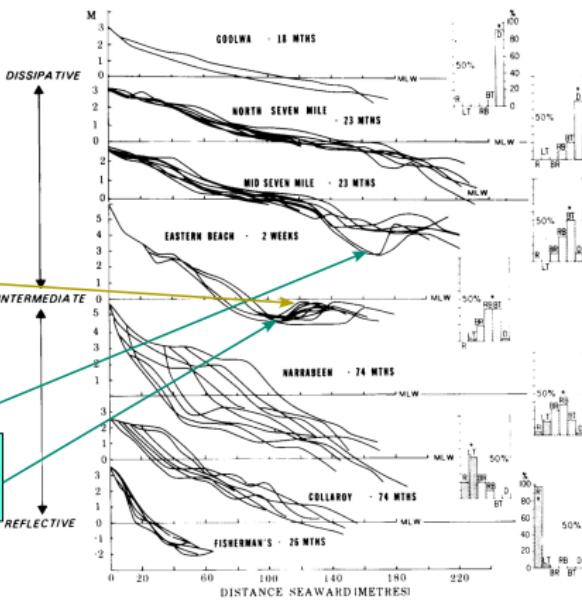
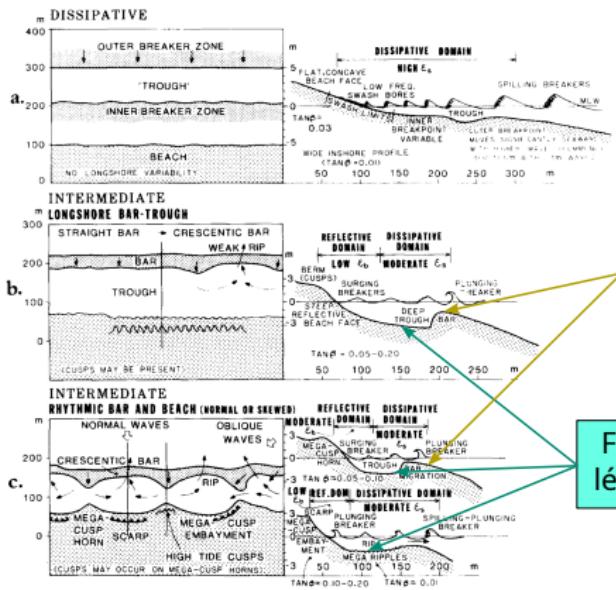
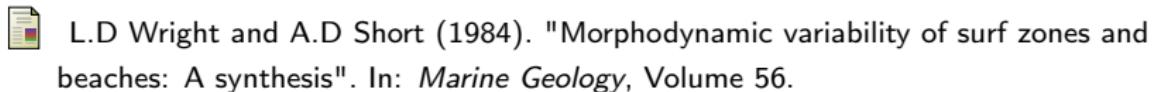


Figure 27: (left) Plan and profile configurations of the six major beach states. (right) Beach profile mobility in relation to modal beach state and state variability.

Interaction entre le déferlement et la création de la barre sédimentaire

Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50

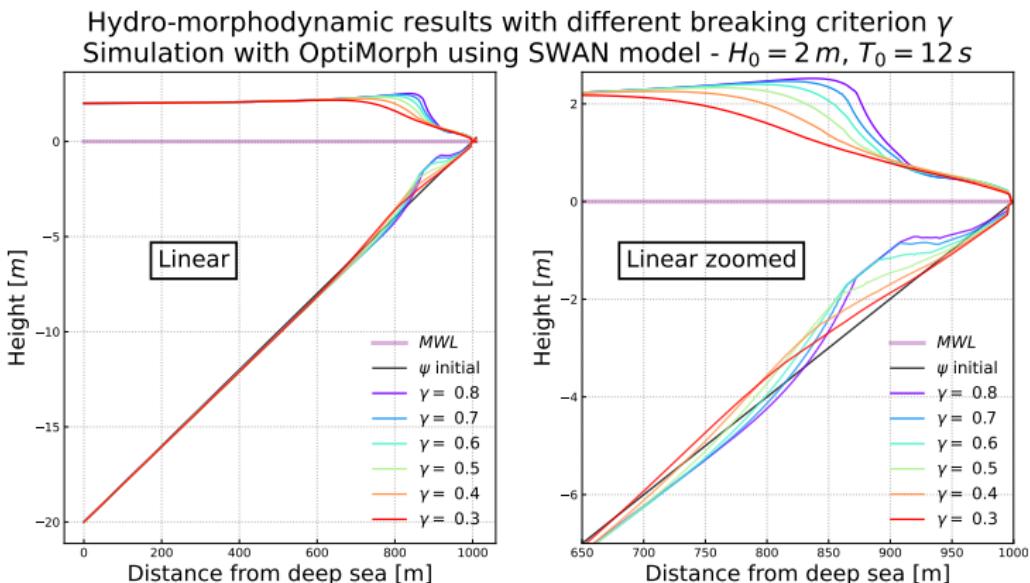


Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

Interaction entre le déferlement et la création de la barre sédimentaire

Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50

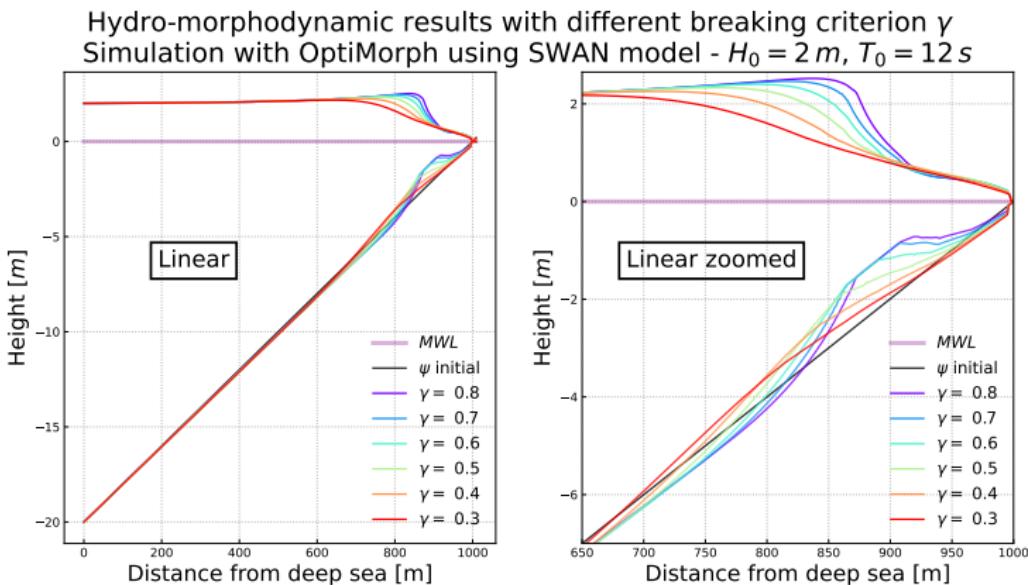


Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

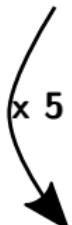
- Création d'une barre sédimentaire au point d'inflexion de la vague.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5 Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.



Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

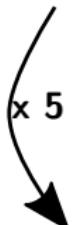
Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5 Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.



Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

x 5

Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

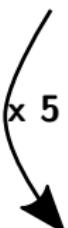
Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
 - Temps de calcul entre la morphodynamique et le modèle shoaling: comparables.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 3: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.



Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation time for 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
- Temps de calcul entre la morphodynamique et le modèle shoaling: **comparables**.
- Temps de calcul morphodynamiques négligeable devant ceux des modèles de vagues complexes.



Video 1: Démonstration,
visionnable sur les temps
morts.

Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante: $\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$, valable en 2D.

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$, **valable en 2D.**

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard:
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$$
, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.
 - Utilisation de modèles de vagues en 2D:

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard: $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.
 - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
 - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard:
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$$
, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.
 - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
 - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
 - Modèles spectraux : **SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...**

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard:
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$$
, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.
 - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
 - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
 - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
 - Modèles vagues à vagues: **SWASH, FUNWAVE, ...**

Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante:
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
 - Calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens Hadamard:
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$$
, **valable en 2D.**
 - Extension des contraintes en 2D.
 - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
 - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
 - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
 - Modèles vagues à vagues: SWASH, FUNWAVE, ...
 - Modèles monochromatiques spectraux reconstruisant la phase: REF/DIF, ...

Table des Matières

Présentation de l'expérience Copter 2D

Les vagues irrégulières de JONSWAP sont générées sur des séquences de 20 mn, répétées plusieurs fois. Quatre climats de vagues typiques:

- La tempête se lève : $H_s = 17 \text{ cm} / T_0 = 2.1 \text{ s}$.
- Sommet de la tempête : $H_s = 23 \text{ cm} / T_0 = 2.3 \text{ s} \rightarrow \text{Géotube}$.
- La tempête faiblit : $H_s = 18 \text{ cm} / T_0 = 3.5 \text{ s}$.
- Conditions de vagues calmes : $H_s = 11 \text{ cm} / T_0 = 2 \text{ s}$.

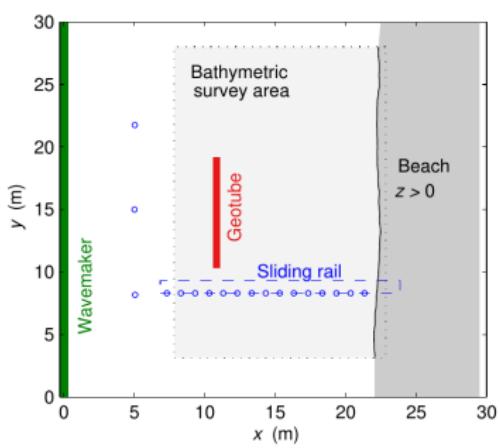


Figure 29: Schéma de Copter 2D.



Figure 30: Photo de l'expérience Copter 2D.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

Paramètres:

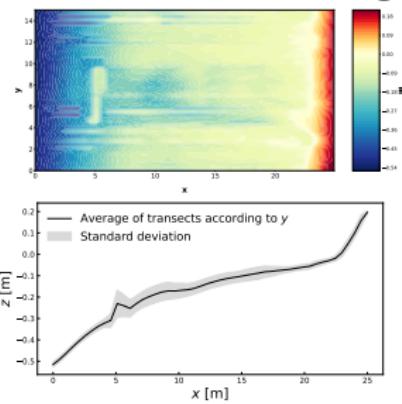
- $H_0 = 0.23$ m, • $T_0 = 2.3$ s, • $T_f = 20$ minutes.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

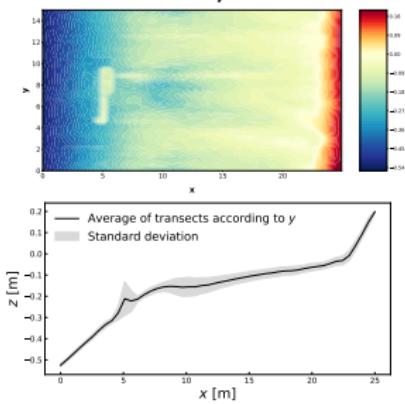
Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m, • $T_0 = 2.3$ s, • $T_f = 20$ minutes.

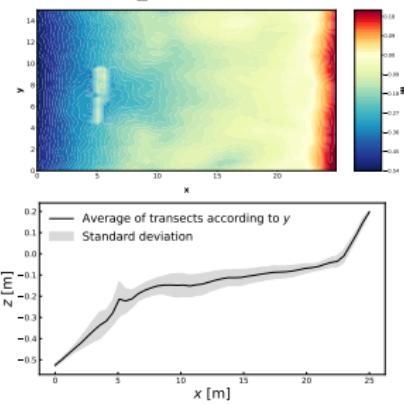
Multi-1D Shoaling



REF/DIF



Experimental

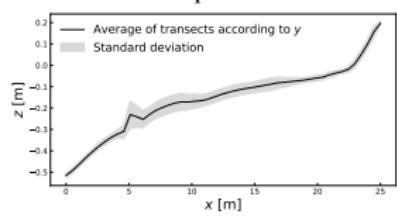
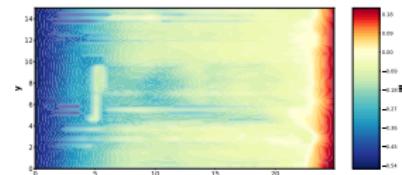


Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

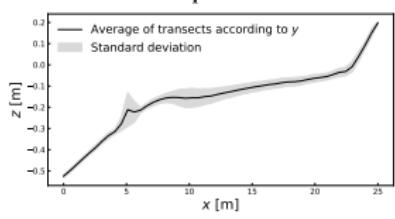
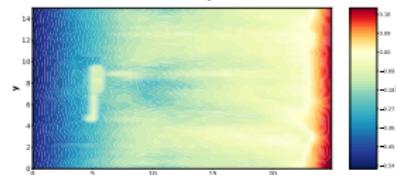
Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m, • $T_0 = 2.3$ s, • $T_f = 20$ minutes.

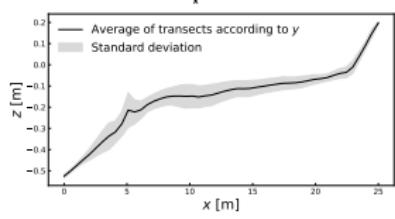
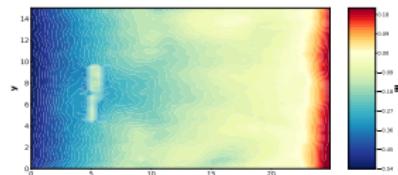
Multi-1D Shoaling



REF/DIF



Experimental



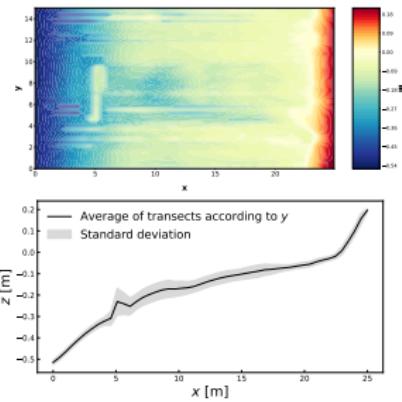
- Observation d'une fosse de lévigation derrière le tube en géotextile.

Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

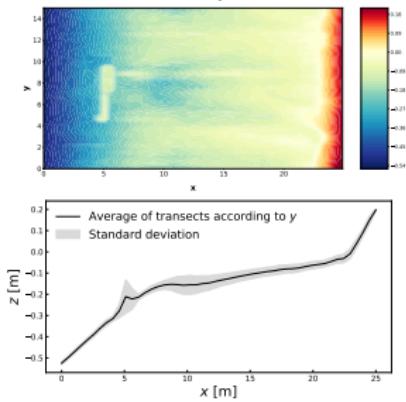
Paramètres:

- $H_0 = 0.23$ m, • $T_0 = 2.3$ s, • $T_f = 20$ minutes.

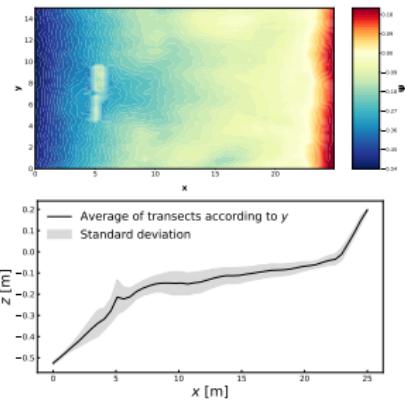
Multi-1D Shoaling



REF/DIF



Experimental



- Observation d'une fosse de lévigation derrière le tube en géotextile.
 - Modification du fond \Rightarrow bonne réaction morphodynamique.

Paramètres:

- $H_0 = 2$ m, $T_0 = 6$ s,
 - $T_f = 72$ h, Pente: 1/100.

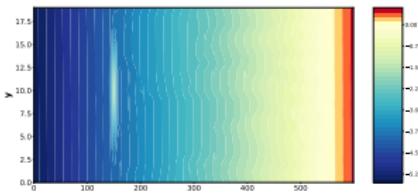


Figure 31: Fond initial

Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$, $T_0 = 6 \text{ s}$,
- $T_f = 72 \text{ h}$, Pente: $1/100$.

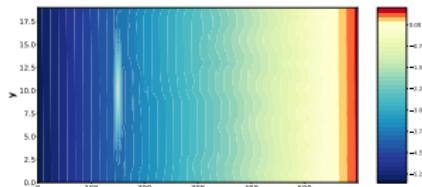
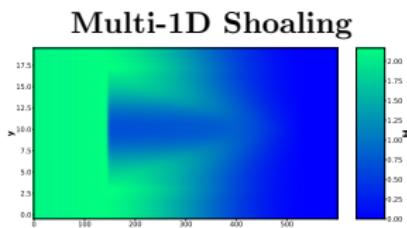
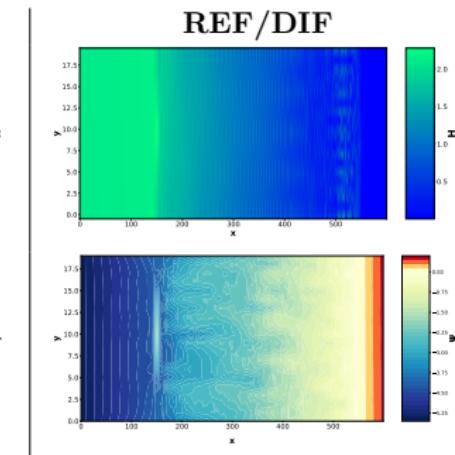
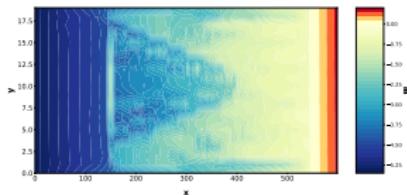


Figure 31: Fond initial

Hydrodynamique



Morphodynamique



Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$, $T_0 = 6 \text{ s}$,
- $T_f = 72 \text{ h}$, Pente: 1/100.

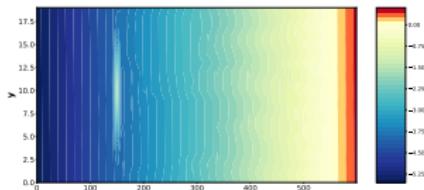
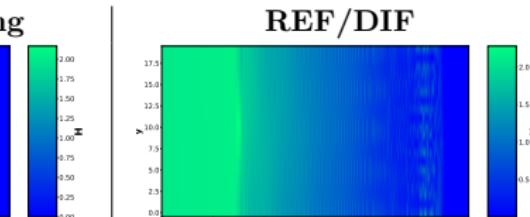
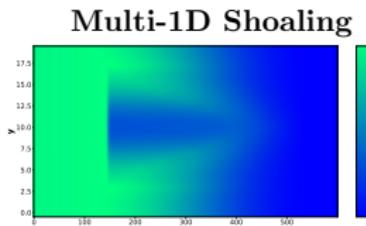
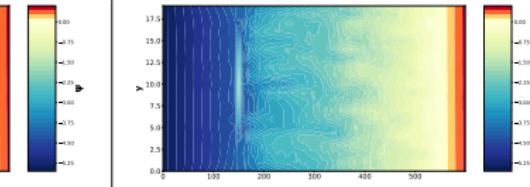
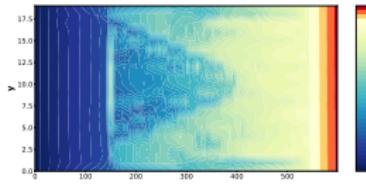


Figure 31: Fond initial

Hydrodynamique



Morphodynamique



- Deux modèles de vagues différents produisant deux résultats morphodynamiques différents.

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

-  A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

-  A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients."

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

-  A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients.*"
 - "*A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray



A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "*In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients.*"
 - "*A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest.*"
 - "*An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray



A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients."
 - "A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest."
 - "An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system."
 - "*In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point.*"

Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

-  A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients."
 - "A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest."
 - "An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system."
 - "In geomorphology, $F = ma$ can rarely be a starting point."

OptiMorph est un modèle exploratoire

Conclusion

- Un modèle générique, de faible complexité, pour la création de barres sédimentaires.
 - Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme.
 - Des cas de benchmark validés.
 - Un modèle de vagues doit être choisi minutieusement en fonction du domaine d'étude.
 - OptiMorph est un modèle exploratoire (selon la vision de Murray (2007))

Publications:

- Ronan Dupont, Frédéric Bouchette, and Bijan Mohammadi. (2024). "Beaches morphodynamic modeling based on hadamard sensitivity analysis. ". In: *Ocean Modelling*, doi.org/10.1016/j.ocemod.2024.102370.
 - Ronan Dupont, Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Samuel Meulé. (2023). "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization.". In: *Ocean Modelling*, doi.org/10.1016/j.ocemod.2023.102197.

Perspectives

- Étendre l'approche du transport latéral.
 - Continuer la validation in situ (accrétion, 2D,...).
 - Continuer à améliorer le modèle (érosion lorsqu'il n'y a pas d'eau,...).

En cours de publication:

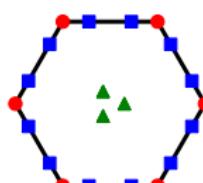


Ronan Dupont, Mathias Dauphin, and Romain Mottier. (202X). "An arbitrary order Virtual Element Methods for Helmholtz equations with Robin boundary condition "

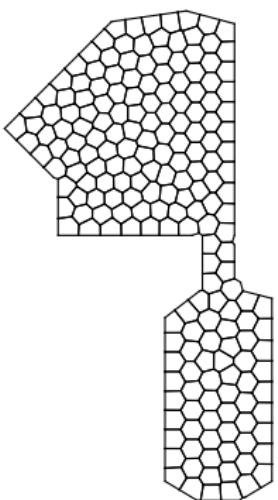
Un projet en parallèle



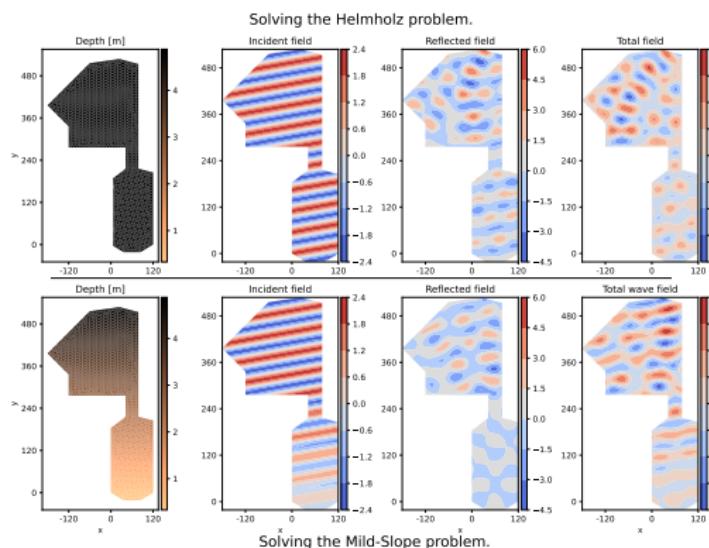
Ronan Dupont, Mathias Dauphin, and Romain Mottier. (202X). "An arbitrary order Virtual Element Methods for Helmholtz equations with Robin boundary condition "



- : Summits dofs
- : Edges dofs
- ▲ : Inner dofs.



Maillage polyédrique du port de Cherbourg.



Résultats VEM des équations d'Helmholtz et Mild-Slope sur le port de Cherbourg.

Merci
pour votre attention!

References

- R. Dupont, M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, and S. Meulé, "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization," *Ocean Modelling*, p. 102 197, 2023.
- R. Dupont, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Modelling beaches morphodynamic by hadamard sensitivity analysis," *Ocean Modelling*, vol. 189, p. 102 370, 2024.
- R. Dupont, F. Bouchette, B. Mohammadi, and D. Sous, "Optimorph: Un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. analyse de sensibilité en 1d et application multi-1d," *JNGGCC*, vol. 17, pp. 327–336, 2022.
- D. Isèbe, P. Azérad, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering," *en, International Review of Civil Engineering (IRECE)*, vol. 5, no. 2, p. 75, 2014.
- D. Isèbe, P. Azérad, B. Mohammadi, and F. Bouchette, "Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact," *Coastal Engineering*, vol. 55, no. 1, pp. 35–46, 2008.
- D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, and B. Mohammadi, "Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 8, pp. 1262–1277, 2008.
- A. Bouharguane, P. Azerad, F. Bouchette, F. Marche, and B. Mohammadi, "Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 13, no. 4, pp. 759–772, 2010.
- B. Mohammadi and F. Bouchette, "Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics," *Computers and Fluids*, vol. 89, pp. 78–87, 2014.
- B. Mohammadi and A. Bouharguane, "Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters," *Computers and Fluids*, vol. 40, pp. 291–298, 2011.
- B. Mohammadi, "Uncertainty quantification in littoral erosion," *Computers & Fluids*, vol. 143, pp. 120–133, 2017.
- M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, and N. Fraysse, "Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis," *en, China Ocean Engineering*, vol. 35, no. 6, pp. 802–813, 2021.
- A. Bouharguane and B. Mohammadi, "Minimisation principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 163–172, 2012.

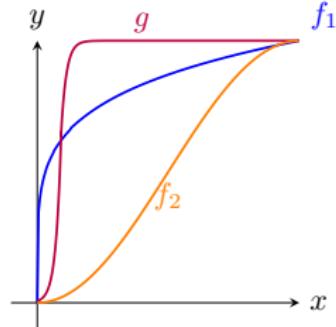
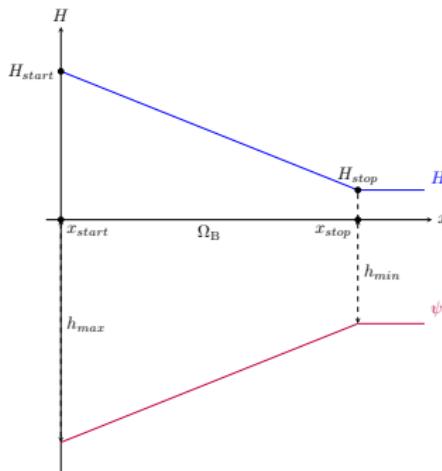
Nouveau modèle de vagues

Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}(\gamma h(x, t)) = H(x_{start}) + [H(x_{stop}) - H(x_{start})] \cdot f\left(\frac{x-x_{start}}{x_{stop}-x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max}-h}{h_{max}-h_{min}}\right)$$



Shoaling model:



Cook (2021)

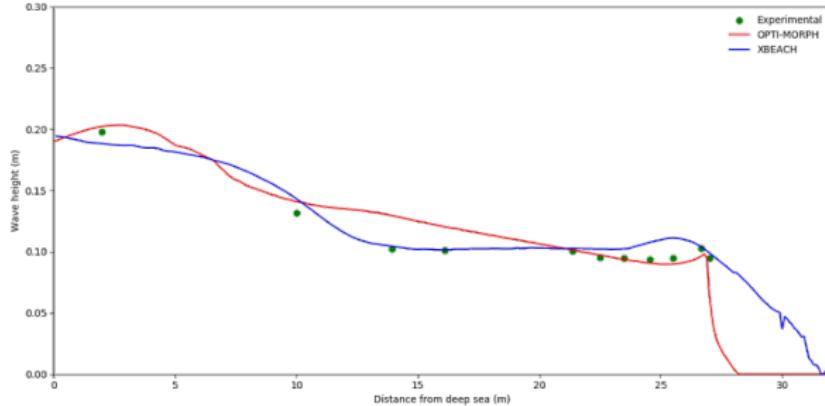
$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_{\mathbf{S}}(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_{\mathbf{S}}(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{B}} \end{cases}$$

Shoaling model:



Cook (2021)

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$



Paramètres:

- $H_s = 135$ mm
- $T_0 = 2.5$ s

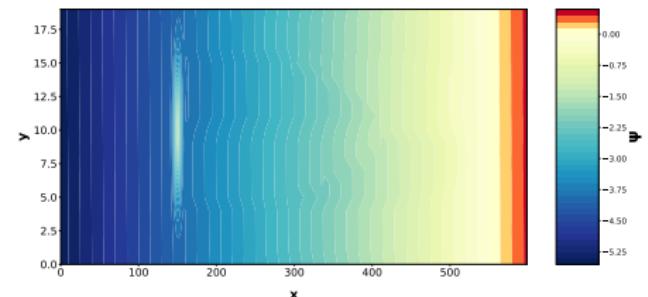
Figure 33: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - Shoaling

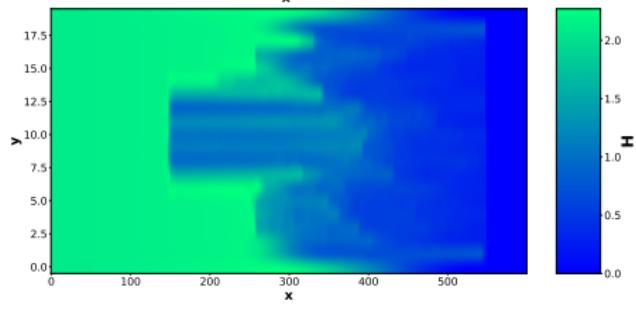
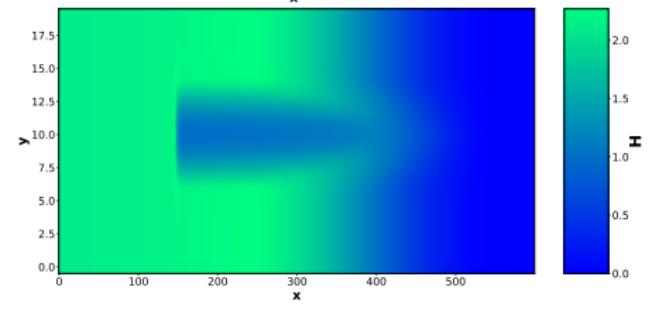
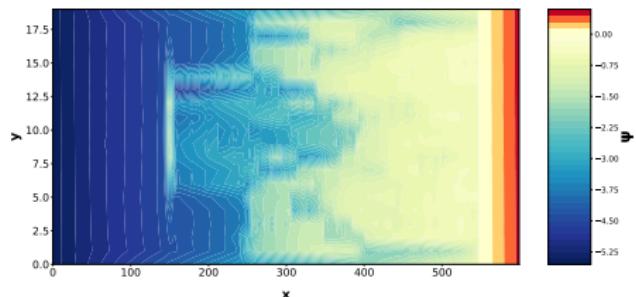
Paramètres:

- **Shoaling Multi-1D,** • $H_0 = 2 \text{ m}$, • $T_0 = 6 \text{ s}$, • $T_f = 72 \text{ h}$, •
Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final

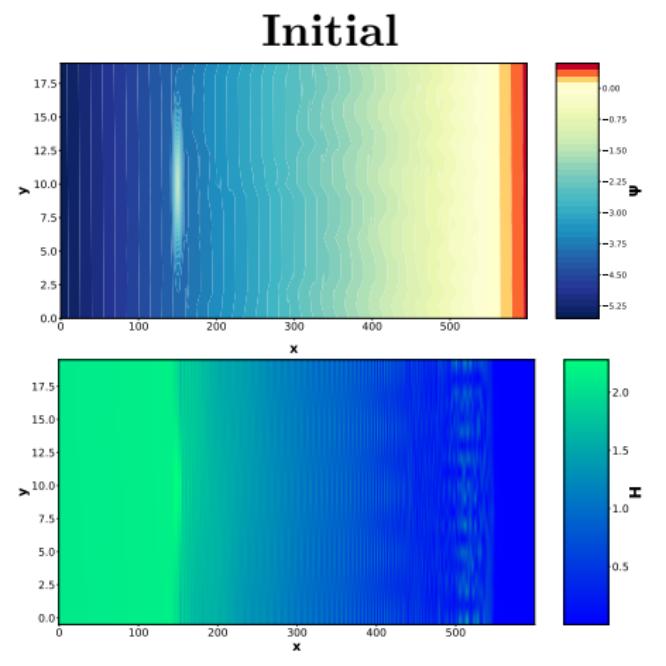


Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - REF/DIF

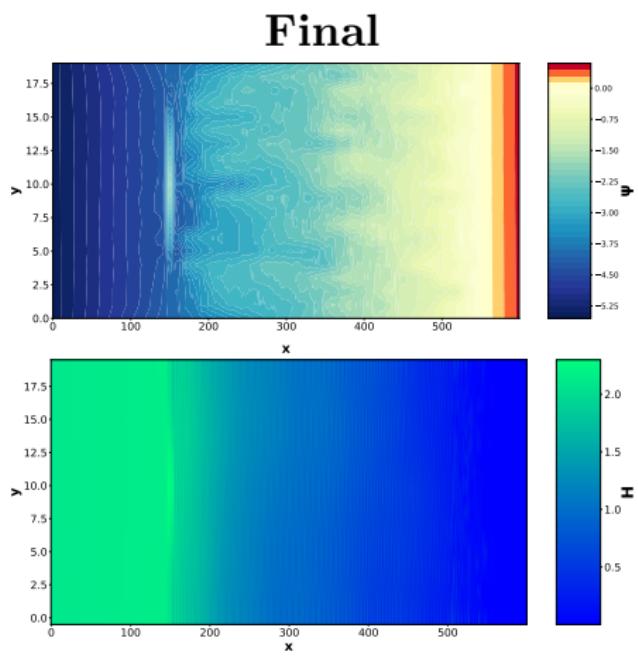
Paramètres:

- REF/DIF, • $H_0 = 2 \text{ m}$, • $T_0 = 6 \text{ s}$, • $T_f = 72 \text{ h}$,
- Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final



Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes I

Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues: $A(x, y, \sigma, \theta) = \frac{E(x, y, \sigma, \theta)}{\sigma}$ avec,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (C_x A)}{\partial x} + \frac{\partial (C_y A)}{\partial y} + \frac{\partial (C_\sigma A)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (C_\theta A)}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}.$$

- C_x et C_y : vitesses selon x et y ;
- C_σ : déplacement de la fréquence relative dû aux variations de la bathymétrie
- C_θ : la réfraction induite par les effets combinés de la profondeur et des courants.
- S : processus qui génèrent, dissipent ou redistribuent l'énergie des vagues.

Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes II

XBeach

Résout d'une part, **les ondes longues (vagues à vagues)** avec les débits calculés à l'aide d'une formulation moyenne en profondeur des équations Shallow-Water, en tenant compte du flux de masse induit par les vagues et des débits de retour:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial u^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial u^L}{\partial y} - fv^L - v_h \left(\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sx}}{\rho h} - \frac{T_{bx}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho h} \\ \frac{\partial v^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial v^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial v^L}{\partial y} + fu^L - v_h \left(\frac{\partial^2 v^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sy}}{\rho h} - \frac{T_{by}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho h} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u^L h}{\partial x} + \frac{\partial v^L h}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Où les composantes de la vitesse lagrangienne (désignées par l'exposant L) sont la superposition de la vitesse eulérienne et de la vitesse de dérive de Stokes :

$$u^L = u^E + u^S \quad \text{et} \quad v^L = v^E + v^S.$$

Résout d'une autre part, **les ondes courtes (spectral)** par l'action des vagues.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Minimiser \mathcal{J} avec $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$ (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)
 \Leftrightarrow

Suivre la direction $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ en gardant $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$.

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Minimiser \mathcal{J} avec $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$ (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)
 \Leftrightarrow

Suivre la direction $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ en gardant $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$.

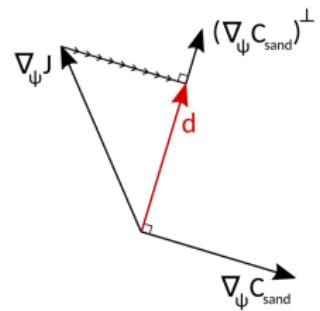


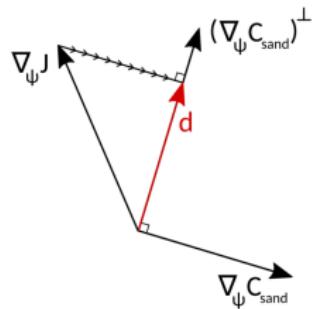
Figure 34: Projection.
Cook (2021).

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.



Minimiser J avec $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$ (car $C_{\text{sand}}(0) = 0$)
 \Leftrightarrow

Suivre la direction $\nabla_{\psi} J$ en gardant $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$.

Figure 34: Projection.
Cook (2021).

On a donc:

$$d = \nabla_{\psi} J - \left\langle \nabla_{\psi} J, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|}.$$