

Couplage vagues-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES
E. I. TURKI
P. MARCHESIELLO
C. CHOQUET
M. ERSOY
F. BOUCHETTE
B. MOHAMMADI

Chargée de Recherches, HDR
Maîtresse de conférences, HDR
Directeur de recherche, HDR
Professeure
Maître de conférences, HDR
Professeur
Professeur

École des Ponts, LHSV
Univ de Normandie
IRD, LEGOS
Univ de La Rochelle
Université de Toulon
Univ de Montpellier
Univ de Montpellier

Rapporteuse
Rapporteuse
Examinateur
Examinateuse
Examinateur
Directeur de thèse
Directeur de thèse

Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
- Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
- Développer un outil pour l'ingénierie côtière, facilitant la conception de structures côtières.
- Explorer une nouvelle manière de penser la dynamique du littoral.



Figure 1: Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet

Sommaire

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

- 1** Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2** Vers un modèle morphodynamique
- 3** Extension à un modèle générique
- 4** Évolution du modèle en 2D
- 5** Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin ψ



Figure 2: Plage de l'Espiguette

Quelle quantité minimiser ?



Figure 3: Under impact of waves - Li Yan et al. (2019)

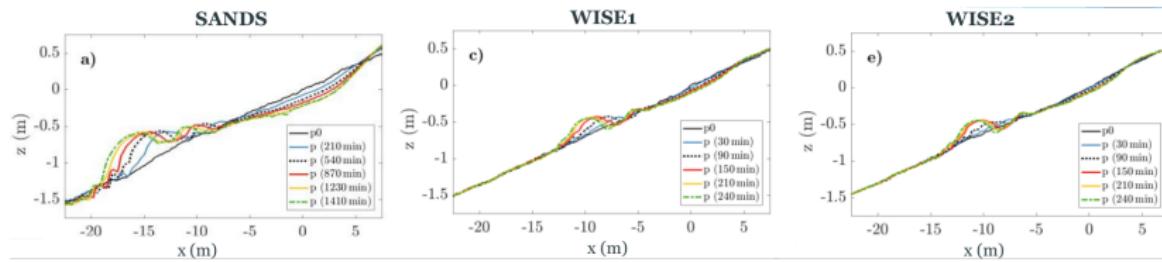


Figure 4: Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS, WISE 1 and WISE 2 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)

Quelle quantité minimiser ?

$$l_i \approx 0.9 l_f$$

Comparison of Wave Energy E_H between the beginning and the end of the experience

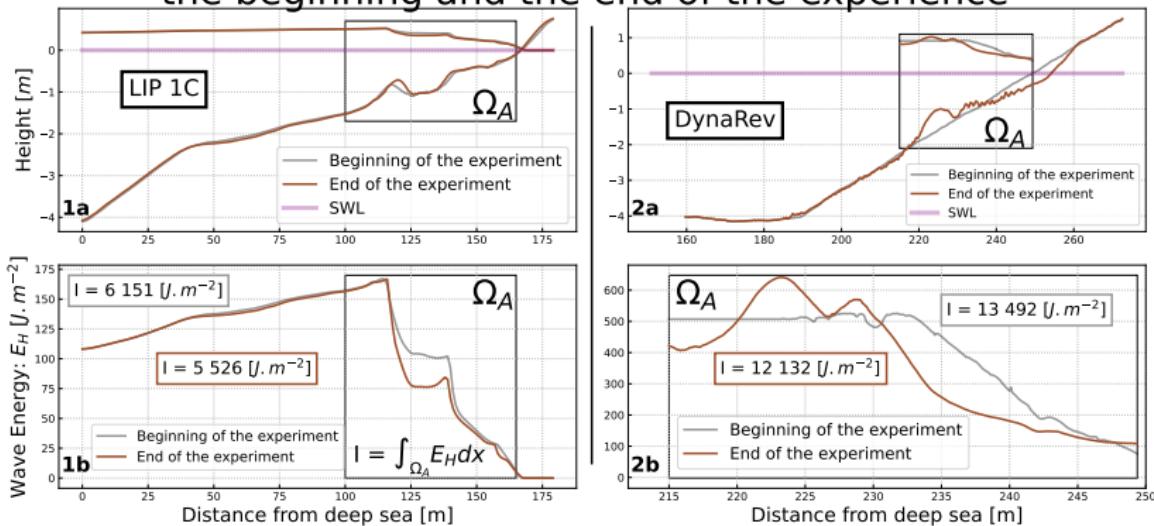


Figure 5: 1) Expérience LIP 1C avec H générée par XBeach. **2)** Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR. **a)** Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). **b)** Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A .

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?



Quel est le fond ψ minimisant l'énergie des vagues ? $\min_{\psi} \mathcal{J} ?$

Un "fond" possible...

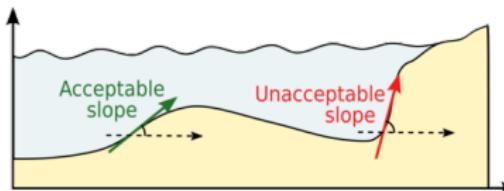


Image provenant d'un photomontage.

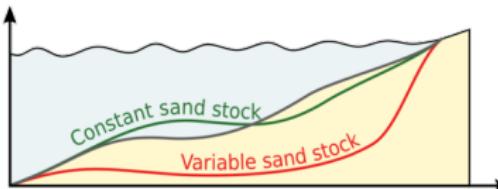
Cette solution satisfait $\min_{\psi} \mathcal{J}$.

Ajout de contraintes

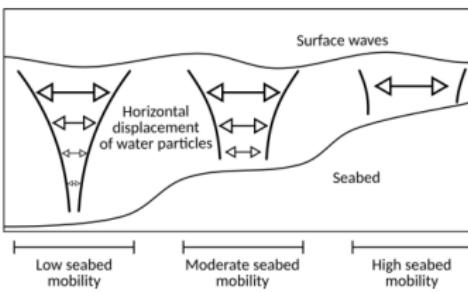
- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:



1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Workflow et quelques notations

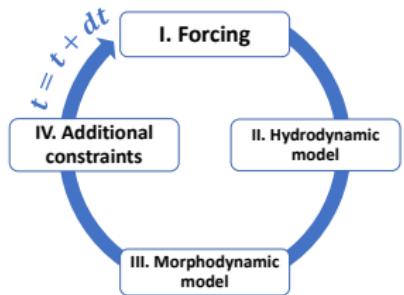


Figure 6: Premier workflow.

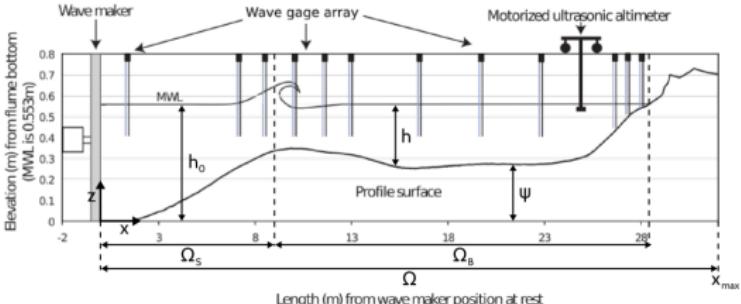


Figure 7: Notations usuelles sur l'expérience Copter.

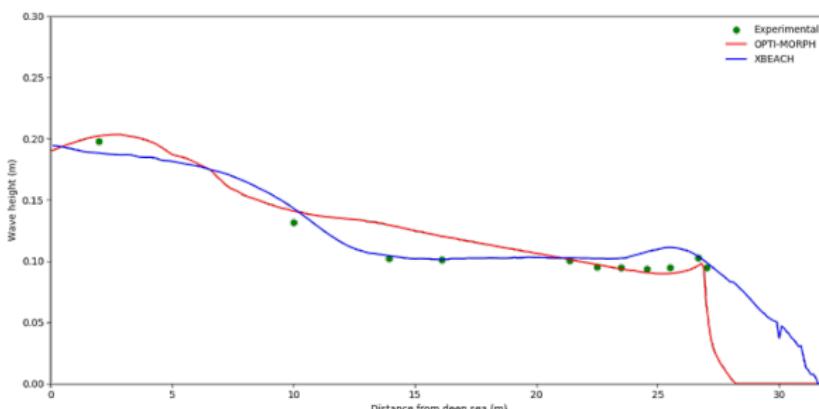
- Paramètres numériques: Δx , Δt , T_f .
- Paramètres géométriques: ψ_0 , Ω , h_0 , β .
- Modèle hydrodynamique: $H_0(t)$, $T_0(t)$, γ .
- Modèle morphodynamique: Υ .

Modèle de vagues

Complexified Shoaling model:

 Cook (2021)

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$



Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$

Figure 8: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

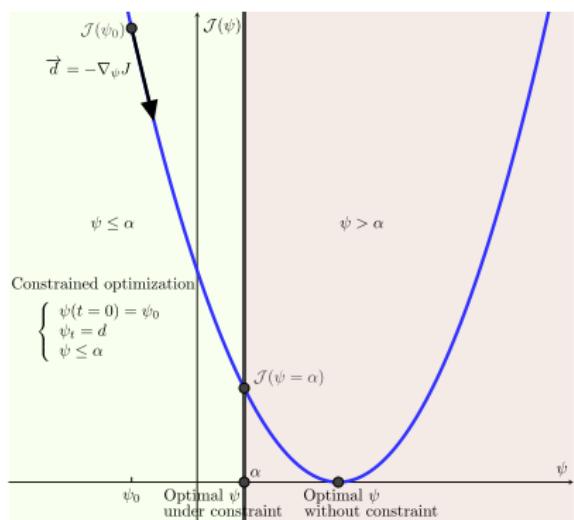


Figure 9: Descente du gradient sous contrainte α .

- ψ_t : l'évolution en temps du fond sableux (m.s^{-1}),
- Υ : la mobilité sédimentaire (m.s.kg^{-1}),
- Λ : l'excitation du fond sableux par les vagues,
- d : la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux varie. Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,
- $\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{t-T_{coupl}}^t \int_{\Omega_S} E_H(x, \tau) dx d\tau$.

Ajout de contraintes

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},\end{aligned}$$

et en $z = \psi$:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}.$$

- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}.$$

- Conservation sableuse:

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T_f].$$

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

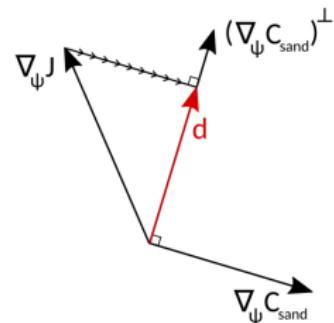


Figure 10: Projection 1D de Gram-Schmidt.

avec donc:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|},$$

et

$$\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}(t) = 2\psi \int_{\Omega} (\psi - \psi_0) dx.$$

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

ψ_{ref} à $\Delta x = 0.18$ s

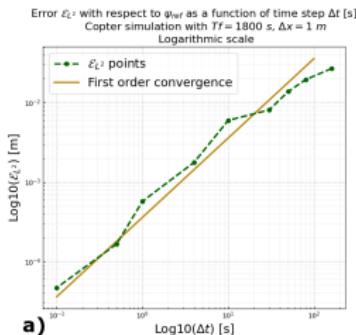


Figure 11: Convergence temporelle avec Δt dans $[0.18, 90]$ s.

ψ_{ref} à $\Delta x = 0.5$ mm

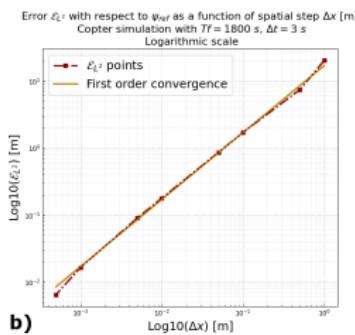


Figure 12: Convergence spatiale avec Δx dans $[0.001, 2]$ m.

ψ_{ref} à $\Omega = 3000$ m

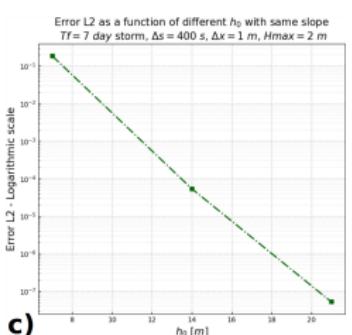


Figure 13: Convergence en taille de domaine avec Ω dans $[600, 3000]$ m.

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$
- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire

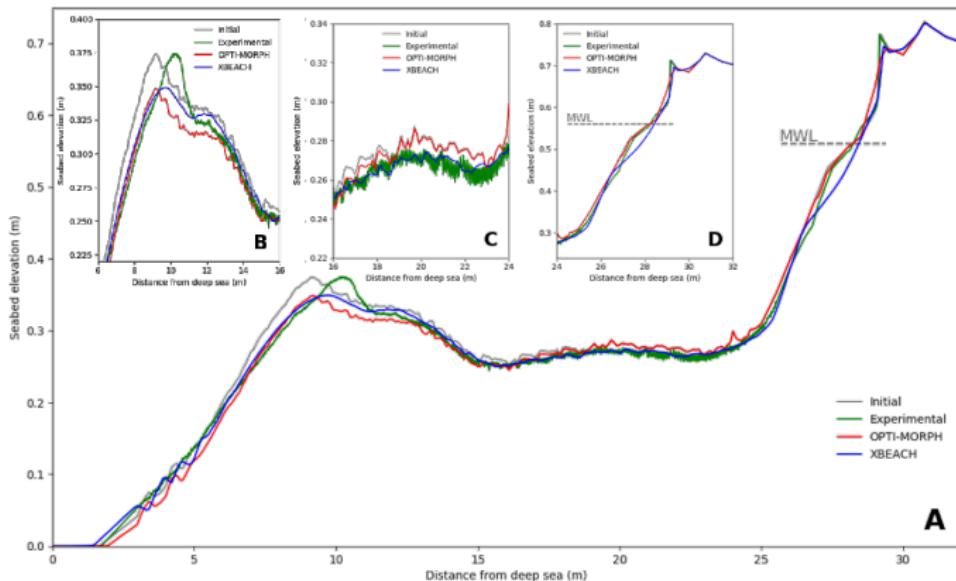


Figure 14: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Workflow et cas applicatif

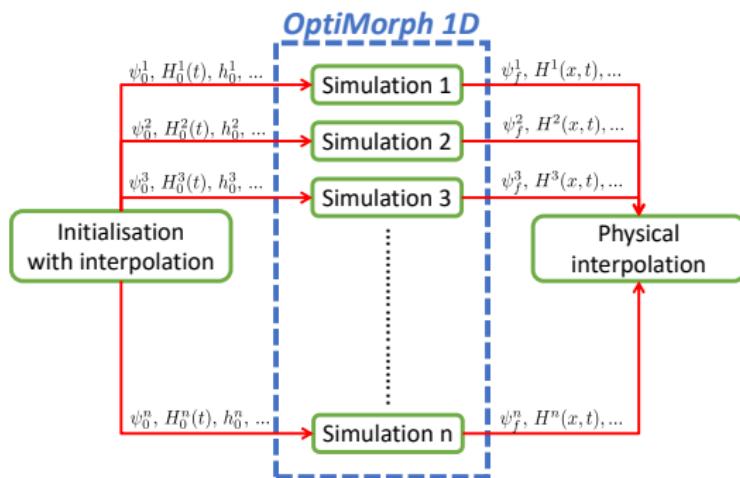


Figure 15: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

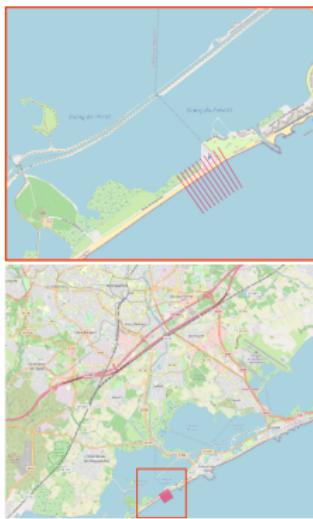


Figure 16: Géographie de la simulation au sud de Montpellier

Résultats en multi-1D sur un cas réel

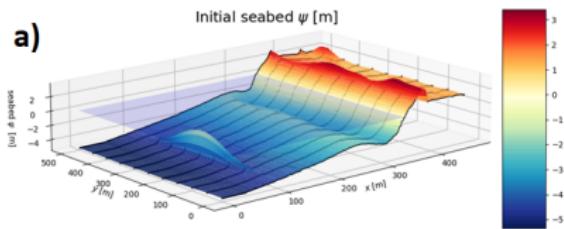


Figure 17: Fond initial.

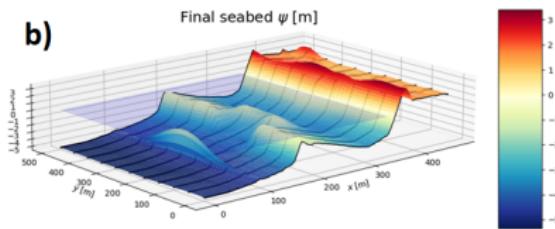


Figure 18: Fond final.

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$,
- $T_0 = 2 \text{ s}$,
- $T_f = 1 \text{ semaine}$,
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs),

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

3 Extension à un modèle générique

Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?

Validation numérique

Présentation du nouveau modèle

Résultats morphodynamiques

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

3 Extension à un modèle générique

Comment calculer $\nabla_\psi J$?

Validation numérique

Présentation du nouveau modèle

Résultats morphodynamiques

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Comment calculer $\nabla_\psi J$?

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
- ✓ Rapide.
- ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

Differences Finis

- ✓ Facile à mettre en place.
- ✗ $N + 1$ évaluations nécessaires.
- ✗ Temps de calculs très longs.

Différentiation Automatique



- ✓ Robuste.
- ✗ Pré-traitement lourd.
- ✗ Dépendance à C / Fortran 90.

L'approche Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

À l'ordre 1:

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} \mathcal{J} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J} \cdot n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \\ &\approx (\nabla_X \mathcal{J}) \cdot n, \end{aligned}$$

avec $X = (x, z)^T$.

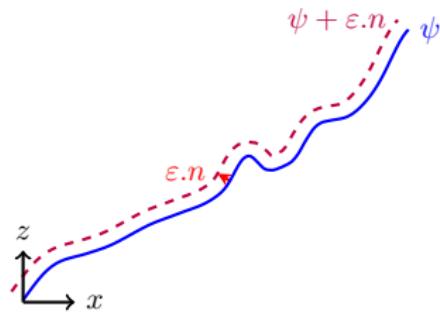


Figure 19: Schéma illustrant l'approche Hadamard.

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats morphodynamiques
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Vérification numérique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - f_\psi(x) = 0\} \quad \text{avec} \quad f_\psi(x, y) = ax + b$$

et $H = \cos(\psi)$. Après des calculs...

$$\nabla_\psi H = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}.$$

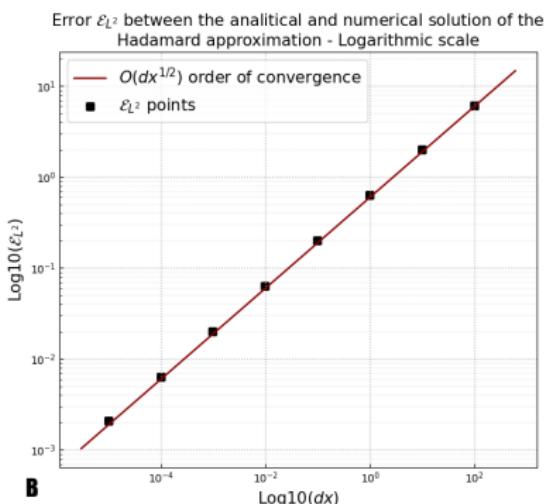
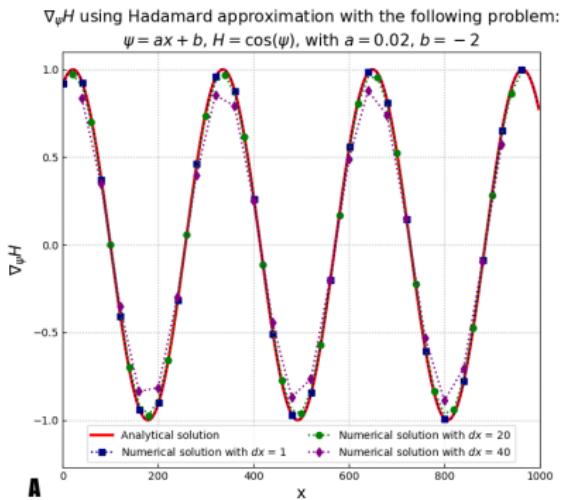


Figure 20: A) Solution analytique et approximative avec l'approche Hadamard, B) Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.

Vérification numérique

En posant: $\nabla_X H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^T$ et $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2+dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$, on calcul $\boxed{\nabla_\psi H = \nabla_X H \cdot n}$.

Comparison of numerical and analytical $\nabla_\psi H$ on the following problem:
 ψ linear without / with perturbations - $H_0 = 2$ m - $h_0 = 10$ m - $T_0 = 10$ s

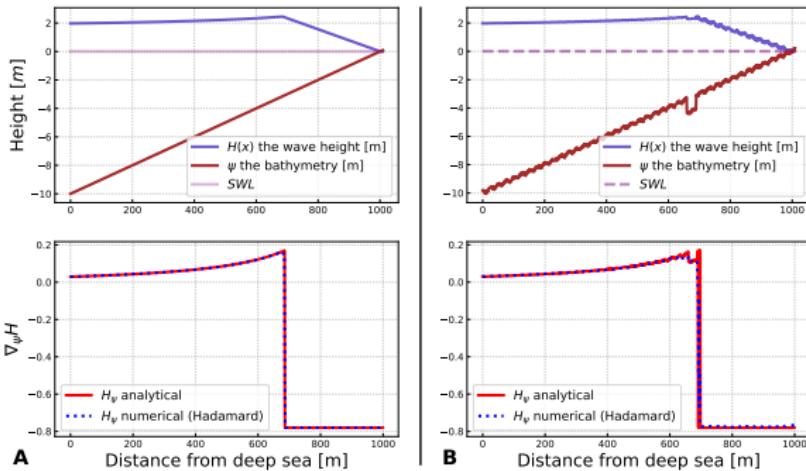


Figure 21: A) Solution analytique et approximative avec l'approche Hadamard sur un cas simple, B) Solution analytique et approximative sur un cas perturbé.

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Nouveau Workflow

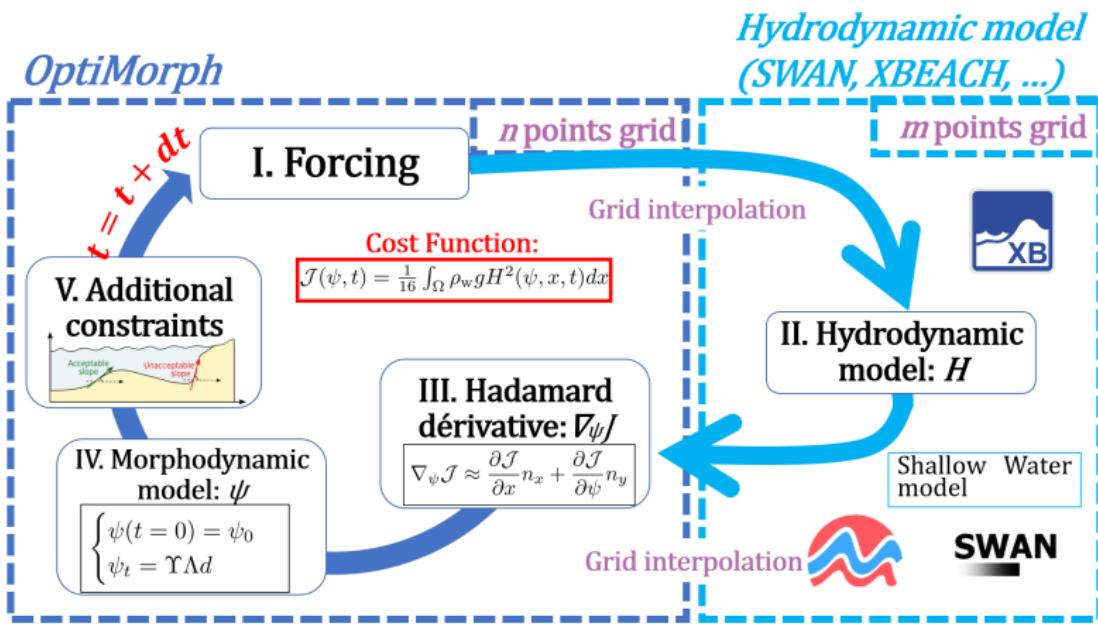


Figure 22: Nouveau workflow d'OptiMorph.

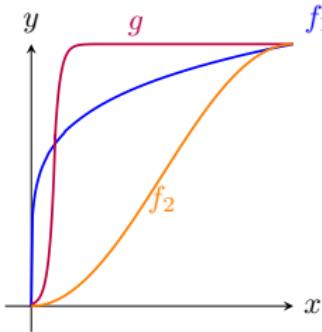
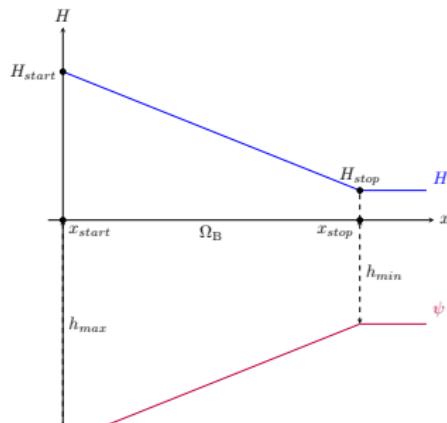
Nouveau modèle de vagues

Nouveau Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}(\gamma h(x, t)) = H(x_{start}) + [H(x_{stop}) - H(x_{start})] \cdot f\left(\frac{x-x_{start}}{x_{stop}-x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max}-h}{h_{max}-h_{min}}\right)$$



Nouveau modèle de vagues

Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$

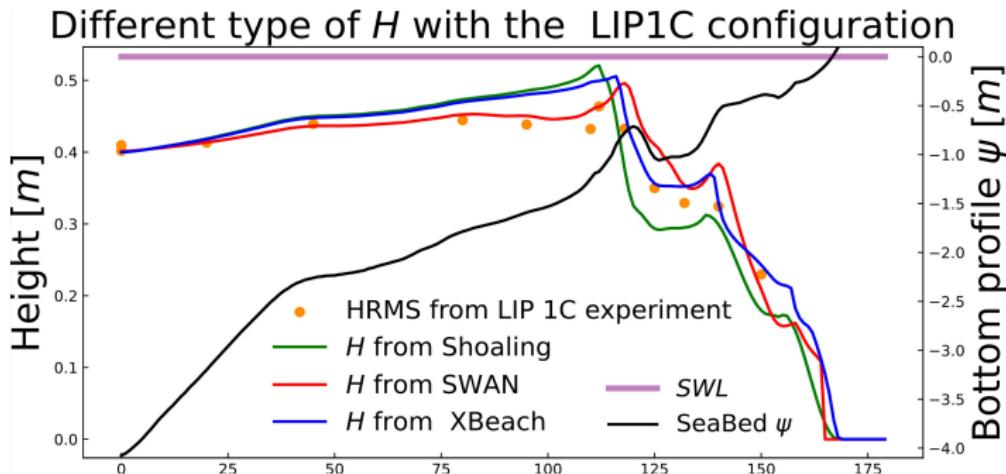


Figure 23: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.

- Shoaling Express : $H_{\text{RMSE}} = 4.5 \text{ cm}$,
- SWAN : $H_{\text{RMSE}} = 3.3 \text{ cm}$,
- XBeach : $H_{\text{RMSE}} = 2.8 \text{ cm}$.

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Résultats en canal de l'expérience SANDS

Paramètres:

- $H_s = 0.32 \text{ m}$
- $T_0 = 5.44 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: $1/15$

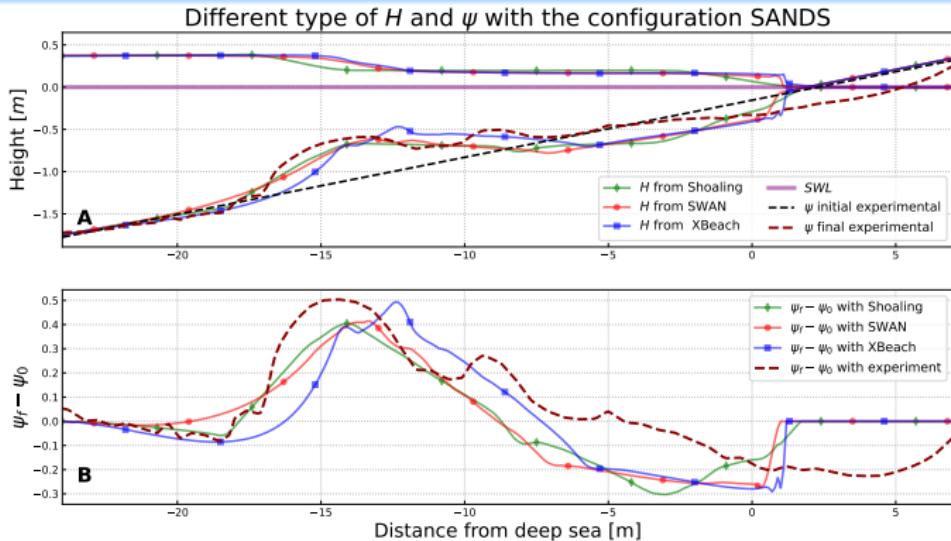


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de $\psi_f - \psi_i$.

- Shoaling Express : $\psi_{RMSE} = 11.7 \text{ cm}$,
- SWAN : $\psi_{RMSE} = 12.7 \text{ cm}$,
- XBeach : $\psi_{RMSE} = 13.5 \text{ cm}$.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Different type of H and ψ
with the configuration LIP11D - 1C

Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$
- Pente: $1/30$

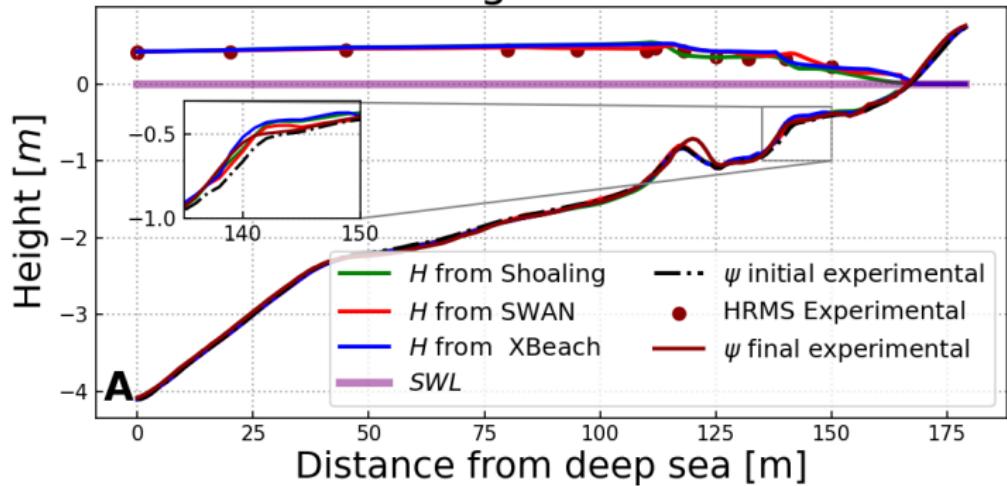


Figure 25: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

- Comportement de la barre intérieure bien reproduite,
- Aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t = \nabla \cdot d - V \nabla_s \psi$
- Une vitesse possible: $V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$

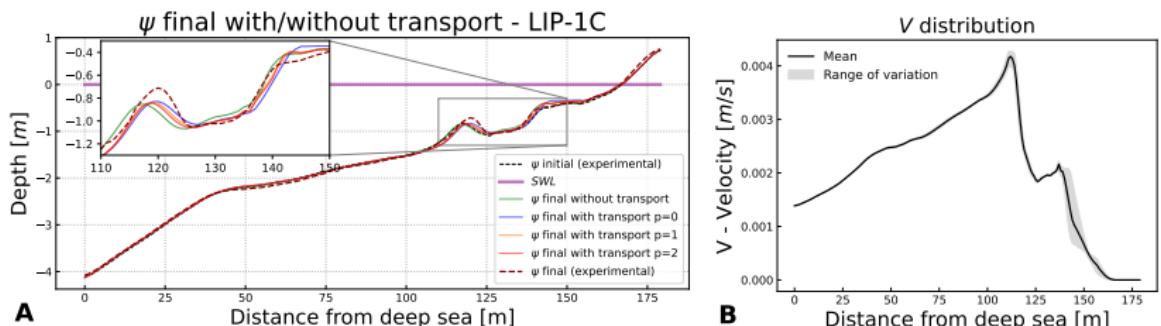


Figure 26: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour $p = 1$.

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi \\ V_t = \rho \nabla_V \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$(2b)$$

- L'équation (2b) traduit une vitesse minimisant \mathcal{J} .
- Comment calculer $\nabla_V \mathcal{J}$?
- Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser \mathcal{J} ?

Résultats en mer

Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: $1/50$
- Création d'une barre sédimentaire au point de rupture de la vague.

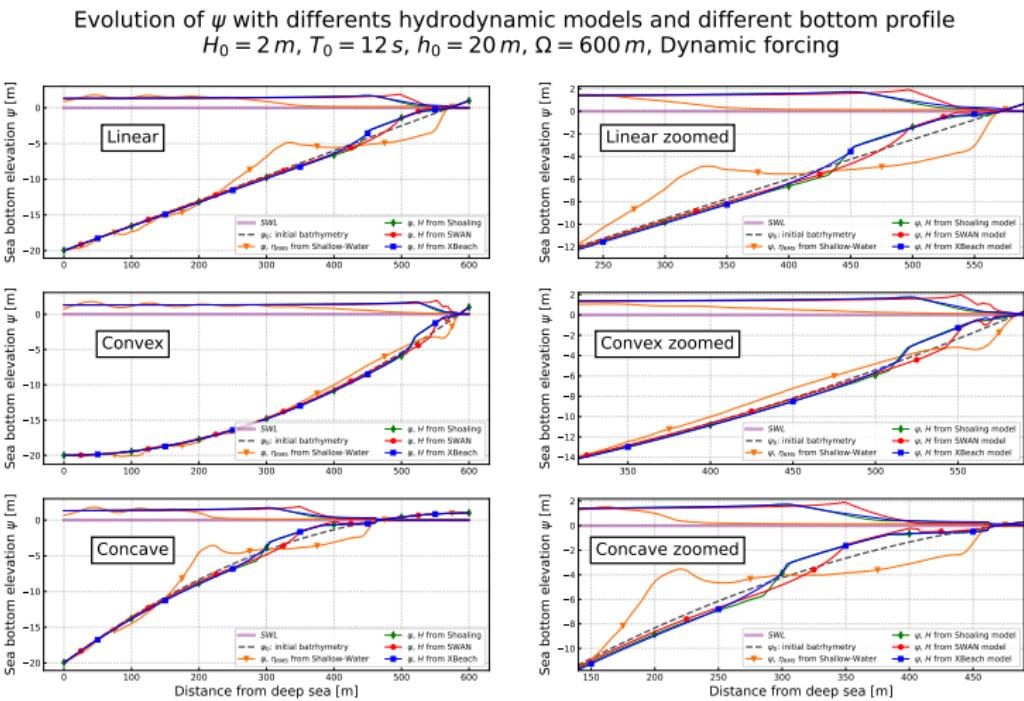


Figure 27: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Création d'une barre sédimentaire au point de déferlement

Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50

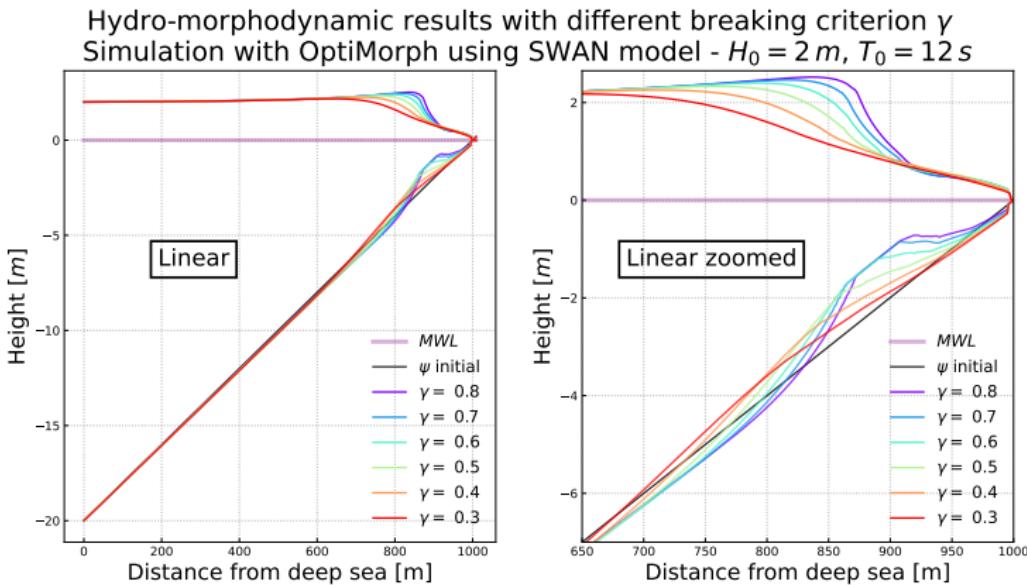


Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

- Création d'une barre sédimentaire au point de rupture de la vague.

Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 1: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.

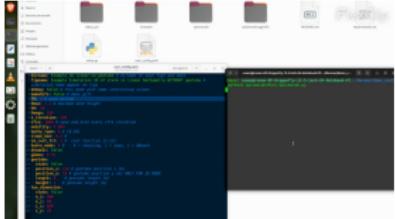
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation time for 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 2: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.

Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage,
- Le temps de calcul morphodynamique négligeable devant l'hydrodynamique.



Video 1: Démonstration.

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Présentation du modèle en 2D

- Équation gouvernante:
- Fonction de coût:

$$\begin{cases} \psi_t = \nabla \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}.$$

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{t-T_{coupl}}^t \int_{\Omega_S} E_H(x, \textcolor{red}{y}, \tau) dx d\tau.$$

- Hadamard: $\nabla_\psi \mathcal{J} \approx (\nabla_X \mathcal{J}).n$ avec $X = (x, \textcolor{red}{y}, z)^\top$.

Présentation du modèle en 2D

- Contrainte de pente:

- $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}, \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| \leq M_{\text{slope}},$
- $\left| \frac{\partial \psi}{\partial a} \right| \leq M_{\text{slope}}, \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial b} \right| \leq M_{\text{slope}}.$

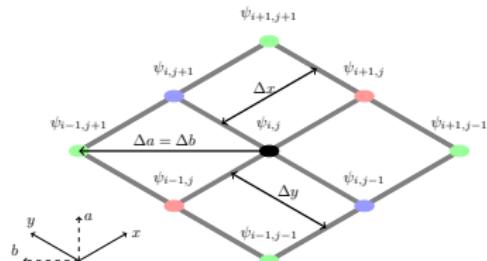


Figure 29: Représentations aux nœuds.

- Contrainte de conservation sableuse:

$$\int_{\Omega} \psi(t, x, y) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x, y) dx \quad \forall t \in [0, T_f].$$

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile

Paramètres:

- Shoaling
- REF/DIF
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 6 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/100
- Géotube gaussienne

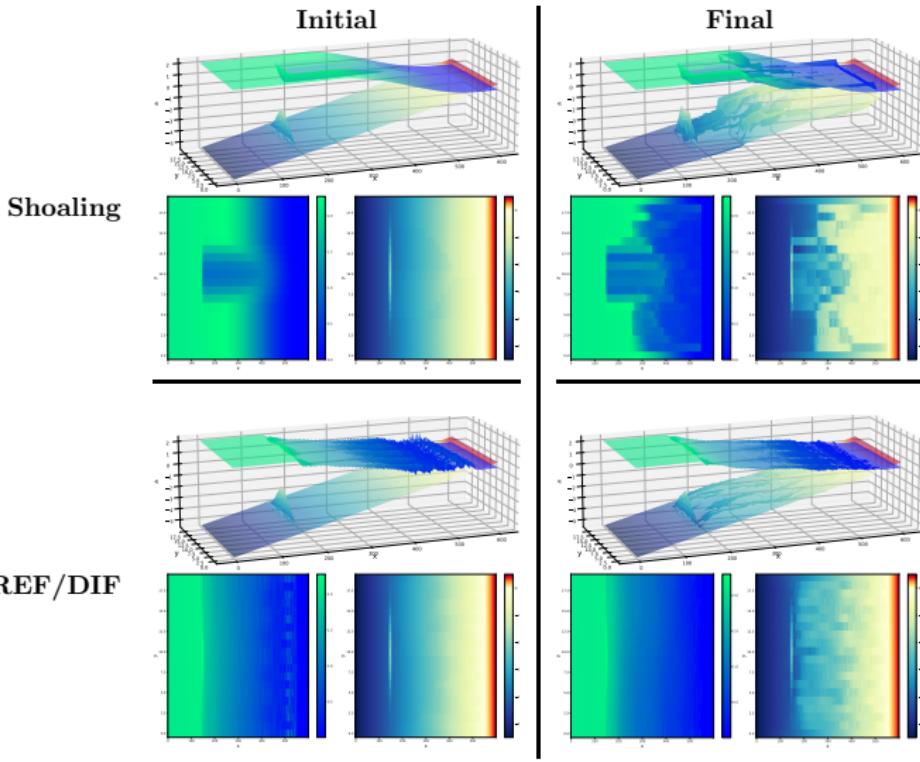


Figure 30: Simulation 2D avec OptiMorph.

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Conclusion

- Un modèle générique à création de barre sédimentaire,
- Un modèle numériquement stable,
- Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme,
- Des cas de benchmark validés.
- Des travaux menés en parallèle de la thèse sur:
Une solution numérique de l'équation de pente douce par la méthode des éléments virtuels d'ordre k sur maillage quelconque.

Perspectives

- Améliorer l'approche de transport latéral: essayer différentes approches pour calculer $\nabla_V \mathcal{J}$?
- Continuer la validation insitu (accrétion, 2D,...),
- Intégrer OptiMorph dans un modèle classique (XBeach ?),
- Étoffer le modèle 2D,
- Utiliser l'approche d'Hadamard dans un contexte différent.

*Merci
pour votre
attention!*