

Module HAT002T
Hydro-morphodynamisme littoral & portuaire avancé
**Simulation des équations "Shallow water" par la
méthode des volumes finis**
Session 02-03

Ronan Dupont

De nos jours, la méthode des volumes finis est encore le plus employée pour résoudre numériquement les équations de Saint-Venant ; ces équations sont présentes dans de nombreux codes de calculs hydrodynamiques du littoral.

Le but de ce TP est de faire une introduction aux **volumes finis** et ainsi, tester différents **schémas numériques conservatifs** sur des cas très connus de la littérature. Les schémas numériques conservatifs sont capables en théorie de prendre en compte les discontinuités (chocs). Ces schémas sont très adaptés pour la simulation numérique de **systèmes hyperboliques d'EDP non linéaires**. Celui qui nous intéresse ici est le système de Saint-Venant dit "Shallow Water". Les solutions de ce système ne sont pas toujours continues.

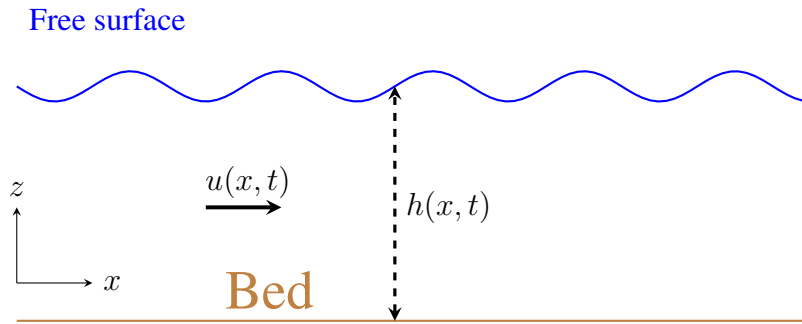


FIGURE 1 – Schéma de Saint-Venant pour un écoulement en 1D

La figure 1 schématise la configuration 1D des écoulements qui nous intéressent. Pour faciliter la résolution, nous choisirons de résoudre une configuration à **fond plat**. On peut écrire ce système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) &= 0 \\ + \text{Condition de Neumann nulle sur les bords} \end{cases} \quad (1)$$

La première équation représente la conservation de la masse et la seconde représente la conservation de la quantité de mouvement. Ces équations peuvent se réécrire sous la forme conservative :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0 \quad (2)$$

avec $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_t = \partial/\partial t$ et

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}}, \quad \boxed{F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}} \quad (3)$$

où W est le vecteur des variables conservatives et $F(W)$ le flux. On peut également écrire ce système sous la forme non conservative sous la forme :

$$\partial_t A + \partial_x W = 0 \quad A = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (4)$$

ce qui nous permet de déduire les valeurs propres de A , la matrice jacobienne des flux :

$$\lambda_1(W) = u + c = \frac{q}{h} + \sqrt{gh} \quad \lambda_2(W) = u - c = \frac{q}{h} - \sqrt{gh} \quad (5)$$

avec donc $u = q/h$ et $c = \sqrt{gh}$.

On souhaite comparer les performances de différents schémas numériques basés sur la méthode des volumes finis. Les volumes finis sont basés sur l'intégration spatio-temporelle des équations, sur chaque "volume" : $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ et sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(W(\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}, \mathbf{t})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(W(\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}, \mathbf{t})) dt = 0 \quad (6)$$

En posant :

$$W_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_n) dx, \quad F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(W(\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}, \mathbf{t})) dt,$$

on peut résumer cette intégration sur le schéma suivant :

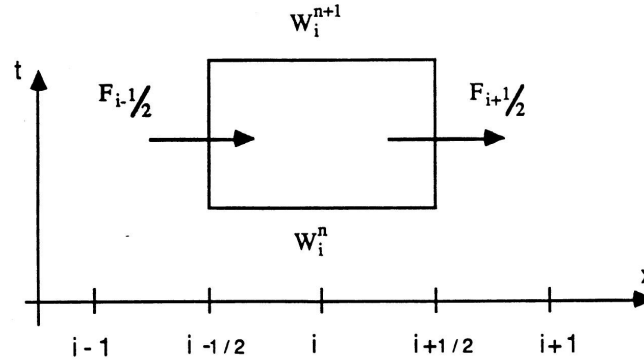


FIGURE 2 – Schéma des volumes finis en 1D

et donc l'équation (6) définit le **schéma conservatif** et explicite des volumes finis s'écrivant de manière générale comme ceci :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right]. \quad (7)$$

La difficulté de cette approximation réside dans la manière de calculer le flux numérique $F_{i\pm\frac{1}{2}}$. Dans ce TP, on présentera seulement les schémas de Lax-Friedrichs et Rusanov. Cependant, il en existe de nombreux et de bien plus robustes (HLL, Godunov, ...).

Schéma de Lax-Friedrichs

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[F(W_{i+1}^n) + F(W_i^n) \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (W_{i+1}^n - W_i^n)$$

Schéma de Rusanov

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[F(W_{i+1}^n) + F(W_i^n) \right] - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}} (W_{i+1}^n - W_i^n)$$

où le coefficient $a_{i+\frac{1}{2}} = \max \{ \rho(W_i^n), \rho(W_{i+1}^n) \}$ et $\rho(W_i^n) = \max \{ |\lambda_1(W_i^n)|, |\lambda_2(W_i^n)| \}$ est le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux (évalué pour la maille de centre x_i) à l'instant t_n .

Bonus : Schéma HLL

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} F(W_i^n) & c_1 \geq 0 \\ F(W_{i+1}^n) & c_2 \leq 0 \\ \frac{c_2 F(W_i^n) - c_1 F(W_{i+1}^n)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (W_{i+1}^n - W_i^n) & c_1 < 0 < c_2 \end{cases}$$

avec les coefficients $c_1 = \min \{ \lambda_1(W_i^n), \lambda_1(W_{i+1}^n) \}$ et $c_2 = \max \{ \lambda_2(W_i^n), \lambda_2(W_{i+1}^n) \}$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres du système.

Description des problèmes

Pour ce TP, nous verrons 3 problèmes très connus de la littérature. Deux d'entre eux ont une solution analytique qui va nous permettre de comparer la solution numérique et la solution exacte.

Cas 1 : Propagation d'une déformation statique

Ce premier cas prendra en condition initiale un plan d'eau plat d'une hauteur $h_0 = 10 \text{ m}$, qui sera déformé avec une gaussienne. Le plan d'eau initial est donné par l'équation suivante :

$$h(x, 0) = h_0 + A e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

avec $A = 5$, $\sigma = 1$. Le débit q sera lui laissé à 0. Vous effectuerez la simulation sur un domaine $x = [-100, 100]$ et un temps final $Tf = 15 \text{ s}$.

Cas 2 : Rupture de barrage sur fond sec

Le problème de rupture de barrage sur fond sec peut s'illustrer par le schéma suivant :

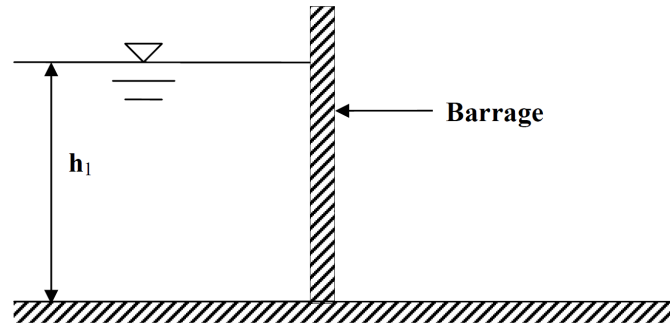


FIGURE 3 – Cas de rupture de barrage sur fond sec

on prendra donc la condition initiale suivante :

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x < 0 \\ h_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

avec $h_1 = 20 \text{ m}$, $h_2 = 0.001 \text{ m}$ et q laissé à 0. Vous effectuerez la simulation sur un domaine $x = [-100, 100]$ et un temps final $Tf = 15 \text{ s}$.

La solution analytique de ce problème est donnée par les équations suivantes :

$$h(x, t) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x < -c_1 t \\ \frac{1}{9g} \left(2c_1 - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } -c_1 t < x < 2c_1 t \\ h_2 & \text{si } x > 2c_1 t \end{cases} \quad (10)$$

avec $c_1 = \sqrt{gh_1}$ et $c_2 = \sqrt{gh_2}$.

Cas 3 : Rupture de barrage sur fond mouillé

Le problème de rupture de barrage sur fond mouillé peut s'illustrer par le schéma suivant :

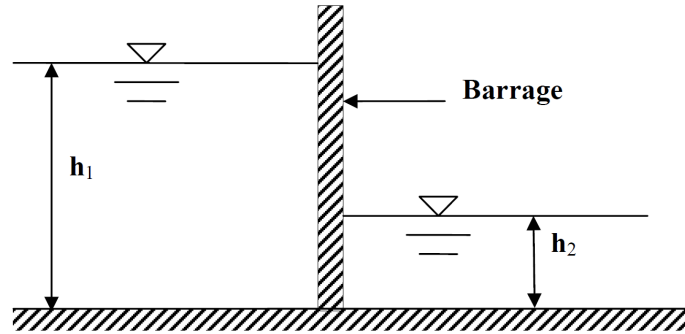


FIGURE 4 – Cas de rupture de barrage sur fond mouillé

on prendra donc la condition initiale suivante :

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x < 0 \\ h_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

avec $h_1 = 20 \text{ m}$, $h_2 = 10 \text{ m}$ et q laissé à 0. Vous effectuerez la simulation sur un domaine $x = [-100, 100]$ et un temps final $T_f = 15 \text{ s}$.

La solution analytique de ce problème a été trouvée par STOKER (1957). Elle est représenté de la manière suivante :

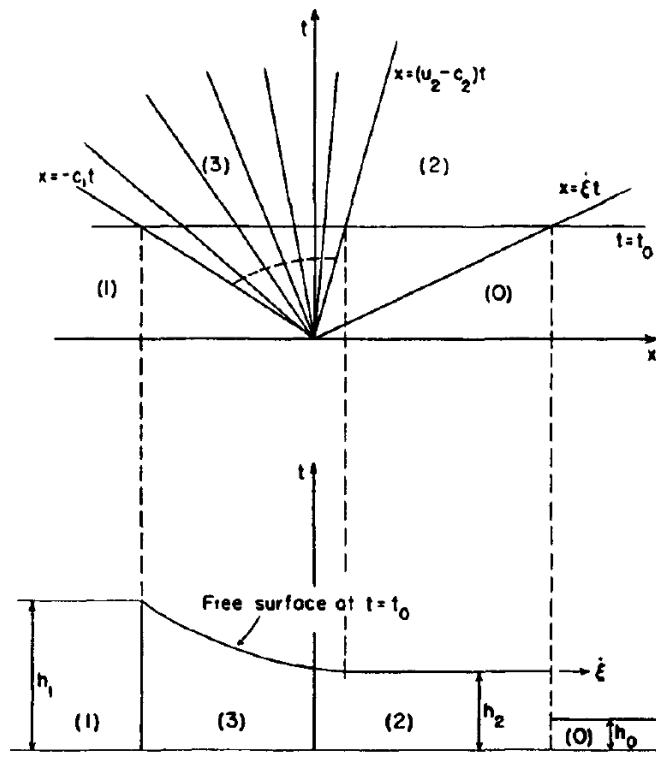


FIGURE 5 – Schéma de la solution de Stoker

Cette solution présente une disjonction de cas sur les 4 domaines. Elle peut se reformuler de la manière suivante :

$$h(x, t) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x < -c_1 t \\ \frac{1}{9g} \left(2c_1 - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } -c_1 t < x < \lambda^* t \\ h_* & \text{si } \lambda^* t < x < \dot{s} t \\ h_2 & \text{si } \dot{s} t < x \end{cases} \quad (12)$$

avec la vitesse de choc donnée par la relation de Rankine-Hugoniot $\dot{s} = \frac{h_* u_*}{h_* - h_2}$. Pour déterminer la solution, il suffit de déterminer l'état intermédiaire (h_*, u_*) en résolvant le système d'équation non linéaire :

$$\begin{aligned} u_* &= 2\sqrt{gh_1} - 2\sqrt{gh_*} \\ u_* &= (h_* - h_2) \sqrt{\frac{g(h_* + h_2)}{2h_* h_2}} \end{aligned} \quad (13)$$

on pourra ensuite obtenir $\lambda^* = u_* - \sqrt{gh_*}$.

Applications :

Question 1 – Dans un premier temps, vous coderez en python la méthode des volumes finis pour le cas que vous souhaitez. Vous commencerez par implémenter le schéma de Lax-Friedrichs. Dans la pratique, la résolution spatiale Δx est fixée et le pas de temps Δt est calculer à partir de la valeur de la condition de stabilité : $\boxed{\text{CFL} = s_{max} \Delta t / \Delta x}$ avec $\boxed{s_{max} = \max_i (|u_i + c_i|, |u_i - c_i|)}$ est la vitesse absolue maximale calculée, soit initialement (pas de temps constant), soit à chaque pas de temps (pas de temps variable). Effectuez plusieurs simulations pour différentes valeurs de CFL, commentez vos résultats.

Question 2 – Implémenter ensuite le schéma de Rusonov et comparer avec le schéma précédent.

Question 3 – Implémenter les solutions analytiques des cas 2 et 3. Comparez les solutions numériques et analytiques. Vous pourrez tracer des courbes d'erreurs.

Question 4 – Bonus: Implémentez un autre schéma numérique permettant de calculer le flux numérique. Vous pouvez implémenter le schéma de Roe, HLL ou d'autres que vous aurez trouvé dans vos recherches.

BON COURAGE À TOUS !