

# Couplage vague-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont  
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE  
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES  
E. I. TURKI  
P. MARCHESIELLO  
C. CHOQUET  
M. ERSOY  
F. BOUCHETTE  
B. MOHAMMADI

Chargée de Recherche, HDR  
Maîtresse de conférences, HDR  
Directeur de Recherche, HDR  
Professeure  
Professeur  
Professeur  
Professeur

École des Ponts, LHSV  
Univ de Normandie  
IRD, LEGOS  
Univ de La Rochelle  
Univ de Toulon  
Univ de Montpellier  
Univ de Montpellier

Rapporteuse  
Rapporteuse  
Examinateur  
Examinateuse  
Examinateur  
Directeur de thèse  
Directeur de thèse

## Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
  - Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
  - Explorer une nouvelle manière de modéliser la dynamique du littoral avec un nombre limité d'hyperparamètres.
  - Développer un outil rapide d'exécution pour la conception de structures de défense en ingénierie côtière.



Figure: Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet



 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défense du littoral.
  - Optimisation de positionnement de géotubes.
  - Étude théorique d'un modèle d'évolution de dunes en régime fluvial



 Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
  - Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.



 Megan Cook (2018 - 2021)

- Introduction contraintes physiques sur le modèle de minimisation (conservation, pente, etc). Développement du modèle OptiMorph.
  - Optimisation du réaménagement du port de la Turballe avec suivi du trait de côte.



 Ronan Dupont (2021 - 2024)

- Introduction d'un nouveau modèle hydrodynamique paramétrisant le déferlement.
  - Validation numérique du modèle OptiMorph (consistance).
  - Extension du modèle OptiMorph multi-1D.
  - Passage à un modèle morphodynamique générique par l'approche mathématique d'Hadamard.
  - Validation de cas de Benchmark (SANDS, LIP).
  - Extension du modèle OptiMorph en 2D.

## Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
  - 2 Vers un modèle morphodynamique
  - 3 Extension à un modèle générique
  - 4 Évolution du modèle en 2D
  - 5 Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin  $\psi(x, y)$

## Barre



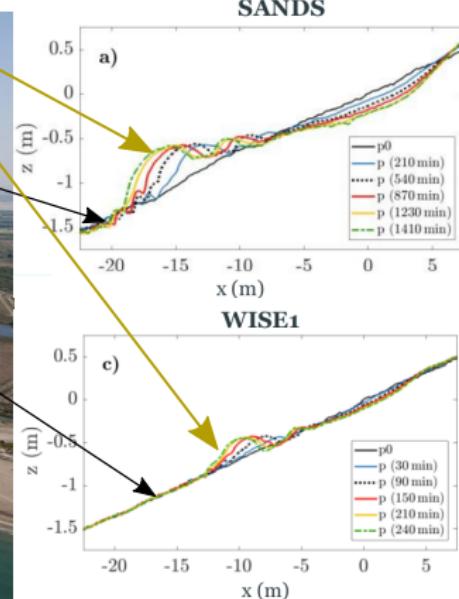
### *Figure: Plage de l'Espiguette*



Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin  $\psi(x, y)$

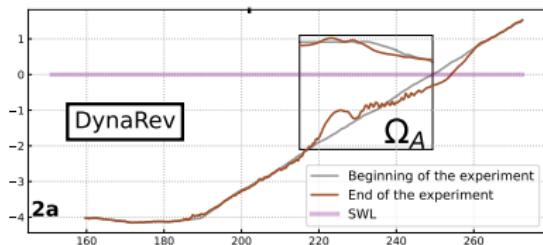
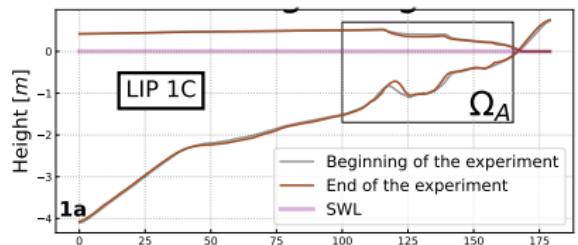
## Barre



**Figure: (Gauche) Plage de l'Espiguette | (Droite) Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS and WISE 1 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)**

Est-ce qu'il existe une quantité représentative de l'état global de ces systèmes ?

$$l_i \approx 0.9 l_f$$



# Minimiser l'énergie des vagues à travers la fonction de coût:

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} E_H$$

représente la physique.

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?



Quel est le fond  $\psi$  minimisant l'énergie des vagues ?  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  ?

Un "fond possible"...

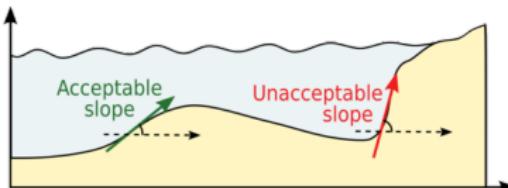


*Image provenant d'un photomontage.*

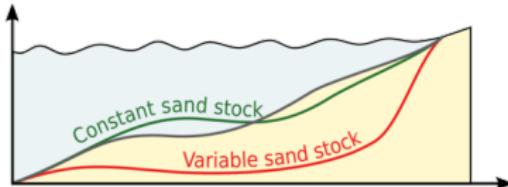
Cette solution à  $\mathcal{J} = 0$  minimise au maximum l'énergie des vagues.

# Ajout de contraintes physiques

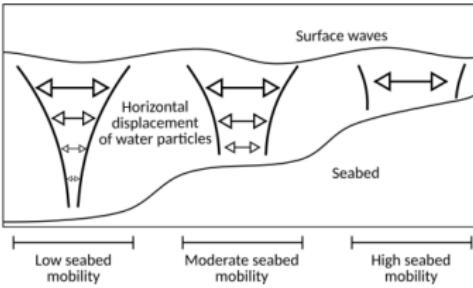
- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:



# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Consistance du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Fonctionnement du modèle et quelques notations

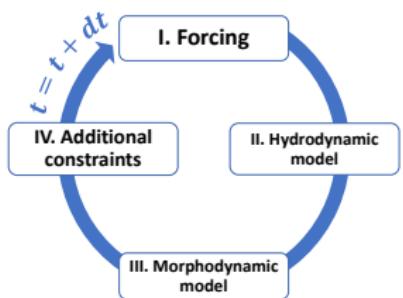


Figure: Fonctionnement du modèle.

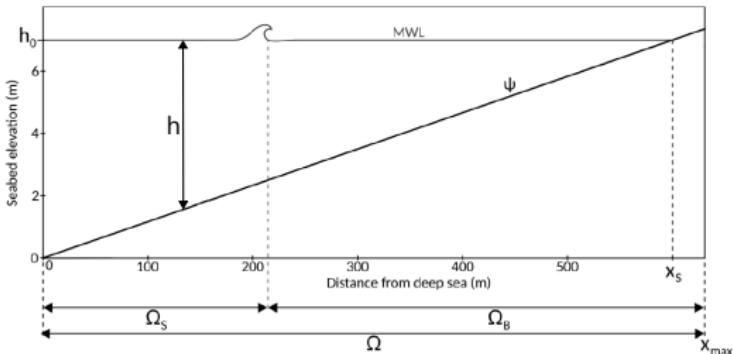


Figure: Notations usuelles.

- Des paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ ,  $\psi_0$ .
- Des paramètres hydrodynamiques:  $\gamma$ ,  $\theta$ , ...
- Des paramètres morphodynamique:  $\Upsilon$ .
- Paramètres géométriques:  $\Omega$ ,  $h_0$ ,  $M_{slope}$ .
- Des paramètres numériques:  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $T_f$ .

# Fonctionnement du modèle et quelques notations

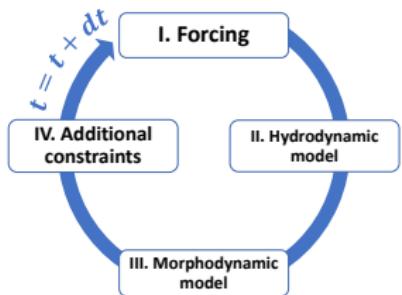


Figure: Fonctionnement du modèle.

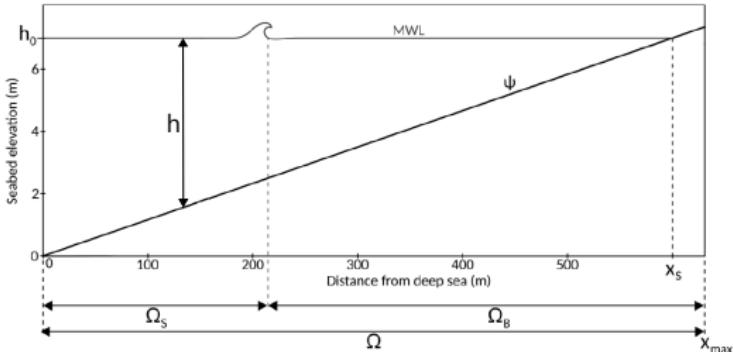


Figure: Notations usuelles.

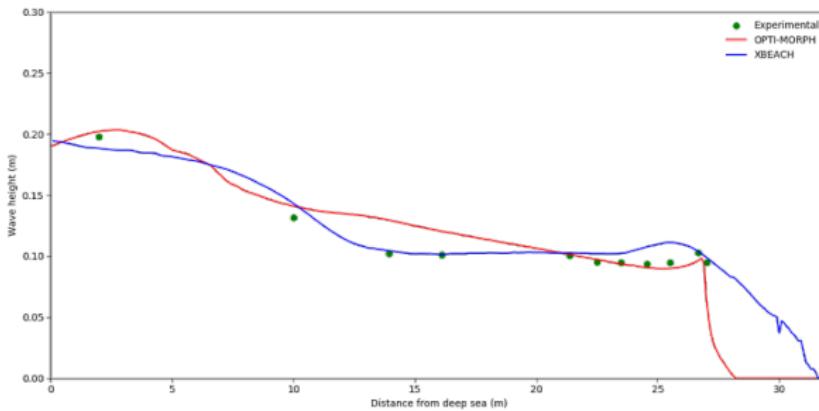
- Des paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ ,  $\psi_0$ .
  - Des paramètres hydrodynamiques:  $\gamma$ ,  $\theta$ , ...
  - Des paramètres morphodynamique:  $\Upsilon$ .
  - Paramètres géométriques:  $\Omega$ ,  $h_0$ ,  $M_{slope}$ .
  - Des paramètres numériques:  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $T_f$ .
- 1 hyperparamètre contre  
 $\approx 10\text{-}100$  dans les modèles classiques

# Premier modèle de vagues. Nécessité d'être simple.

## Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement.



### Paramètres:

- $H_s = 0.15$  m
- $T_0 = 2.5$  s

*Figure: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

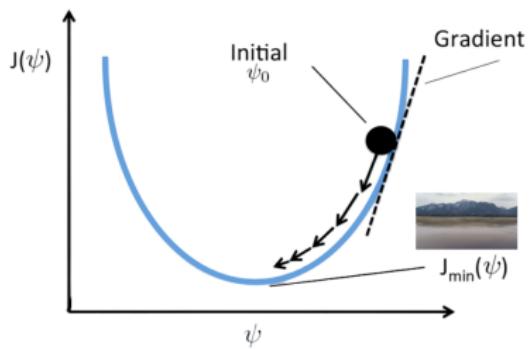
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

### Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire,
  - $d$ : la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux évolue. Ici,  
 $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$ .



*Figure: Descente du gradient à  $t = 0$  s.*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

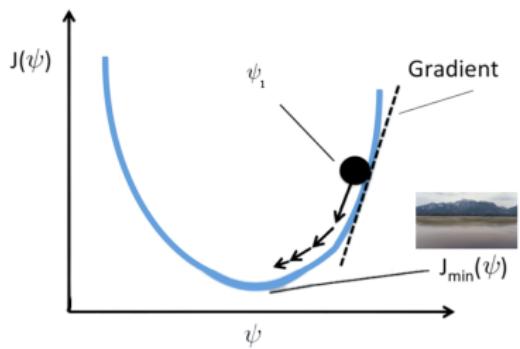
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

## Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire,
  - $d$ : la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux évolue. Ici,  $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$ .



*Figure: Descente du gradient à  $t = \Delta t$  s.*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

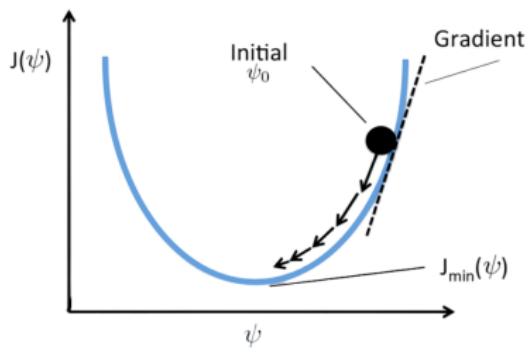
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d_C$ : la direction de descente **incluant les contraintes** et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.



## Figure: Descente du gradient.

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

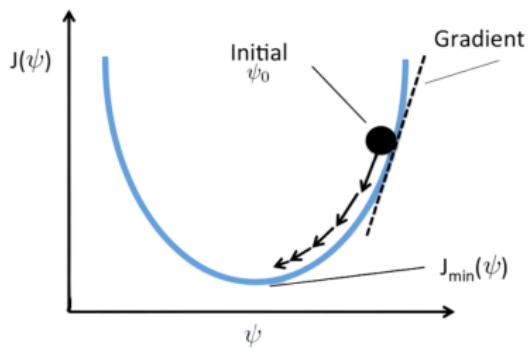
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma d_C \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$

avec:

- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d_C$ : la direction de descente **incluant les contraintes** et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.



## *Figure: Descente du gradient.*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

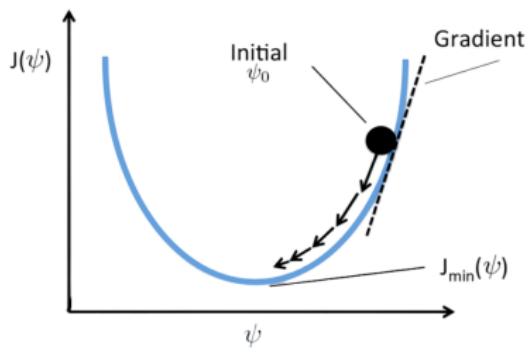
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

Avec contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Delta d_C \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d_C$ : la direction de descente **incluant les contraintes** et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  - $\Lambda(x)$ : l'excitation du fond sableux par les vagues.



### Figure: Descente du gradient.

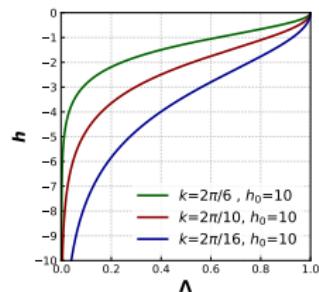
# Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après ( Soulsby, 1987):

$$\varphi : \begin{aligned} \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{aligned}$$

et en  $z = \psi$ :

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$$

- Conservation sableuse (uniquement en domaine fermé):

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T_f]$$

# Projection de la contrainte de conservation sableuse

On veut calculer la direction de descente  $d_C$  sans violer la contrainte de conservation sableuse.

On définit un résidu  $C_{\text{sand}}(t)$  que l'on souhaite nul  
 $\forall t \in [0, T_f]$ .

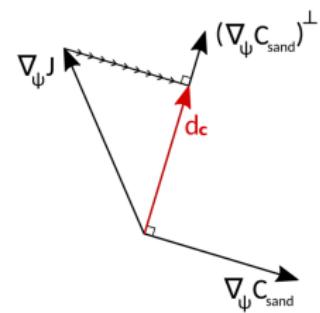


Figure: Projection.  
Cook (2021).

On a donc:

$$d_C = \nabla_\psi J - \left\langle \nabla_\psi J, \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_\psi C_{\text{sand}}}{\|\nabla_\psi C_{\text{sand}}\|}.$$

# Table des Matières

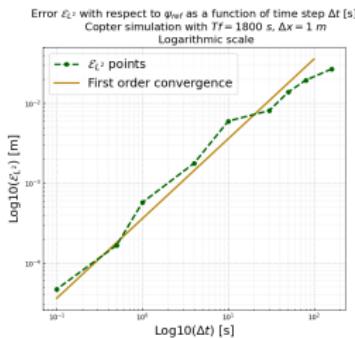
- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Consistance du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

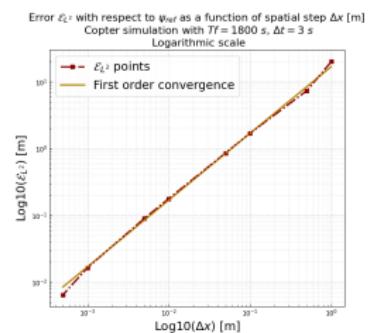
On définit l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

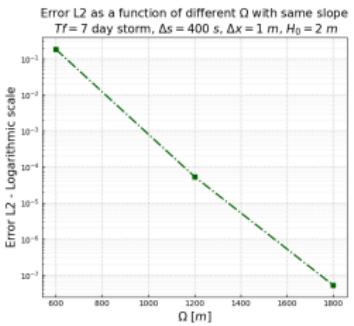
$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta t = 0.18$  s



$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta x = 0.5$  mm



$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Omega = 3000$  m



*Figure:* Convergence temporelle avec  $\Delta t$  dans  $[0.18, 90]$  s.

*Figure:* Convergence spatiale avec  $\Delta x$  dans  $[0.0005, 2]$  m.

*Figure:* Passage à l'échelle, vérification de la bonne prise en compte des contraintes avec  $\Omega \in [600, 3000]$  m.

# Table des Matières

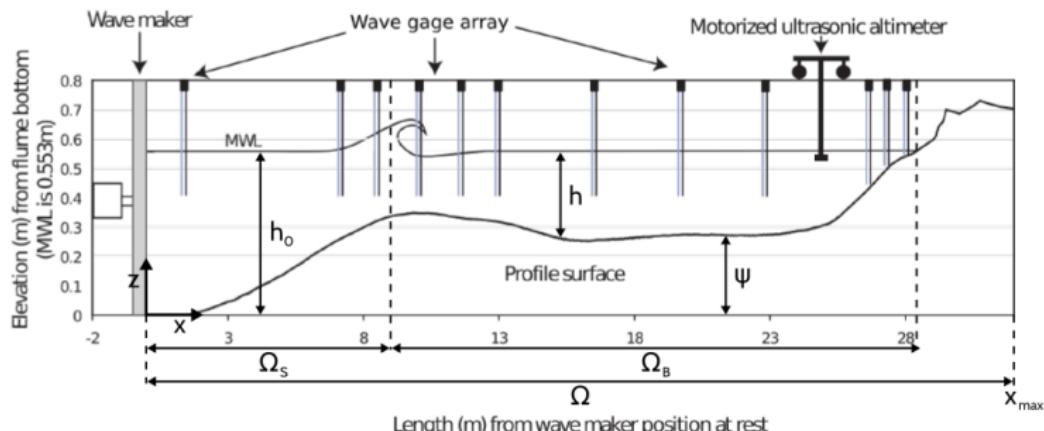
- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Consistance du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Présentation de l'expérience Copter 1D

Les expériences ont été menées dans le bassin à houle LHF (Grenoble) de  $30\text{ m} \times 30\text{ m}$ . Échelle de longueur: 1/10 et échelle de temps: 1/3 (Froude).

## Paramètres de l'expérience:

- $H_s = 0.15\text{ m}$ , •  $T_0 = 2.5\text{ s}$ , •  $T_f = 30\text{ mins.}$



*Figure: Schéma de l'expérience Copter 1D.*

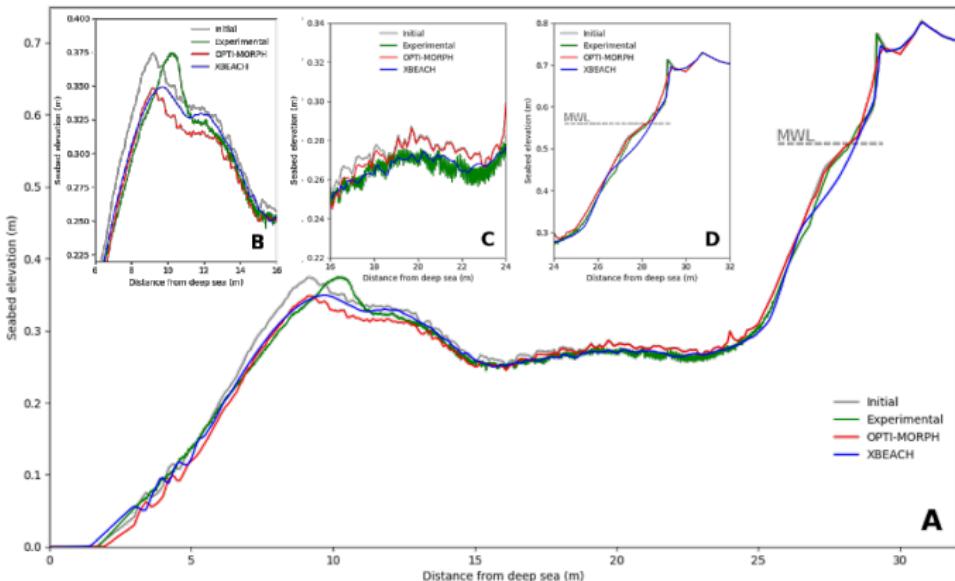
# Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

## Paramètres:

- $H_s = 0.15 \text{ m}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$
- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire



*Figure: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).*

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Consistance du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Workflow et cas applicatif

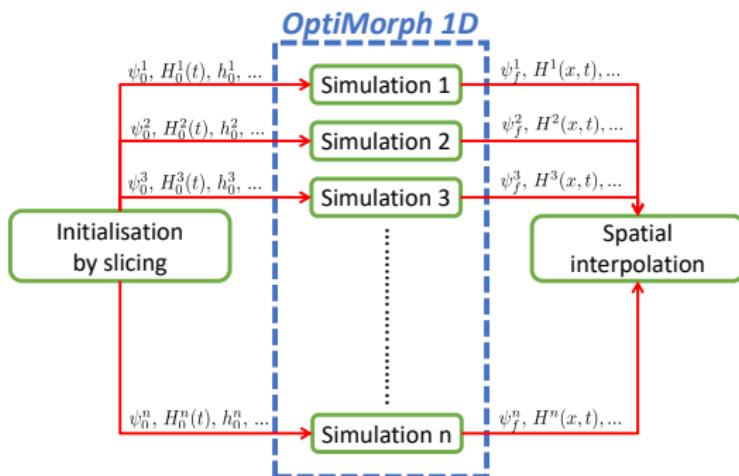


Figure: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.



Figure: Géographie de la simulation au sud de Montpellier.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

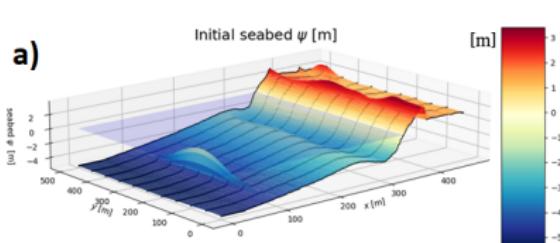


Figure: Fond initial.

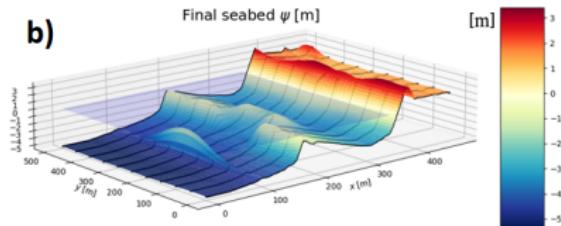


Figure: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2$  m ,
- $T_0 = 2$  s,
- $T_f = 3$  jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$  m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.
- Mais modèle de vague inadapté pour le 2D (pas de longshore).

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
    - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
    - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
    - Résultats morphodynamiques
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

## Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d_C \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_C = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi). \end{array} \right.$$

# Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
  - ✓ Rapide.
  - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

# Différences Finies

- ✓ Facile à calculer.
  - ✗  $N + 1$  évaluations nécessaires.
  - ✗ Temps de calculs très longs.

## Développement et Différentiation Automatique



- ✓ Robuste.
  - ✗ Pré-traitement lourd.
  - ✗ Dépendance à C / Fortran 90.

Cook (2021)

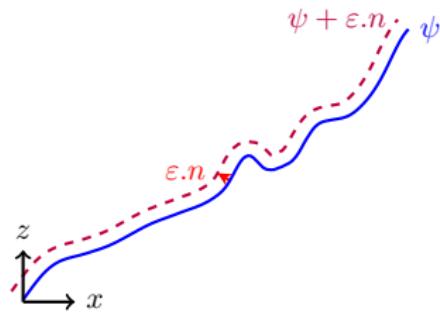
Mohammadi & Bouchette (2014)

## Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec  $n$ : vecteur normal à la forme.



*Figure: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.*

## À l'ordre 1:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^\top.$$

## Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

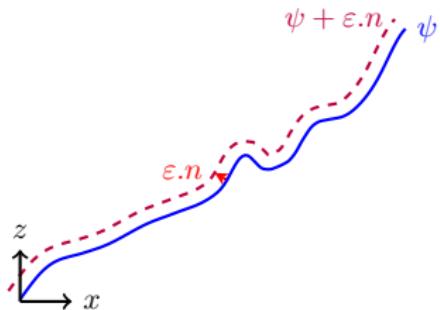
avec  $n$ : vecteur normal à la forme.

## À l'ordre 1:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

Donc

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx (\nabla_X \mathcal{J}) \cdot n$$



*Figure: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.*

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

## Vérification numérique sur un cas analytique

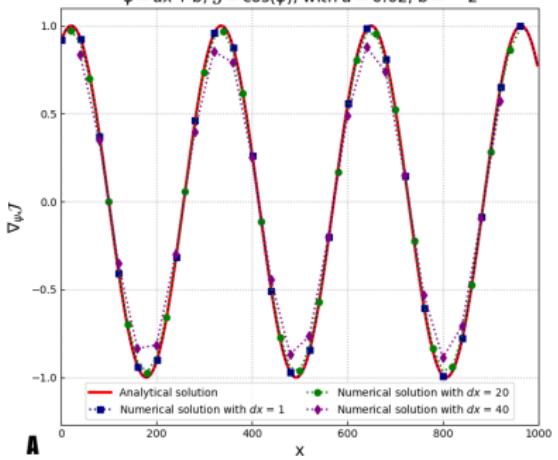
On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

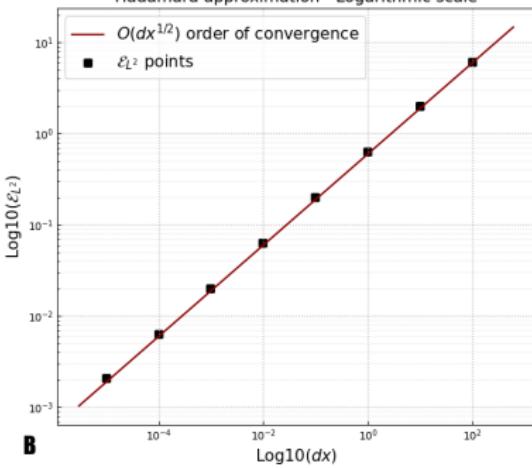
et  $\mathcal{J} = \cos(\psi)$ , avec  $\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}$ .

$\nabla_w J$  using Hadamard approximation with the following problem:

$$w = ax + b, \quad z = \cos(w), \text{ with } a = 0.02, b = -2$$



Error  $\mathcal{E}_{L^2}$  between the analytical and numerical solution of the Hadamard approximation - Logarithmic scale

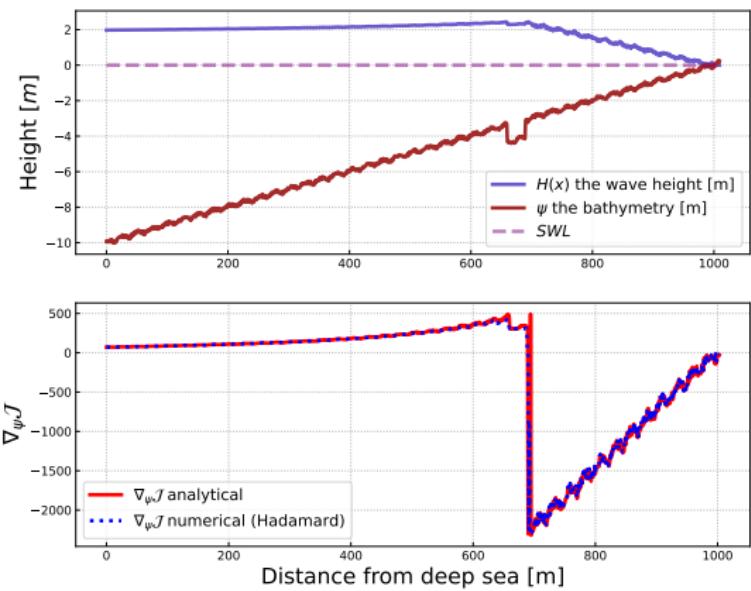


**Figure: A) Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard, B) Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.**

Avec  $\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \nabla_X \mathcal{J} \cdot n$

## Paramètres:

- Modèle Shoaling avec:
    - $H_0 = 2 \text{ m}$ ,
    - $T_0 = 10 \text{ s}$ ,
    - $h_0 = 10 \text{ m}$ .
  - Fond linéaire avec des perturbations.

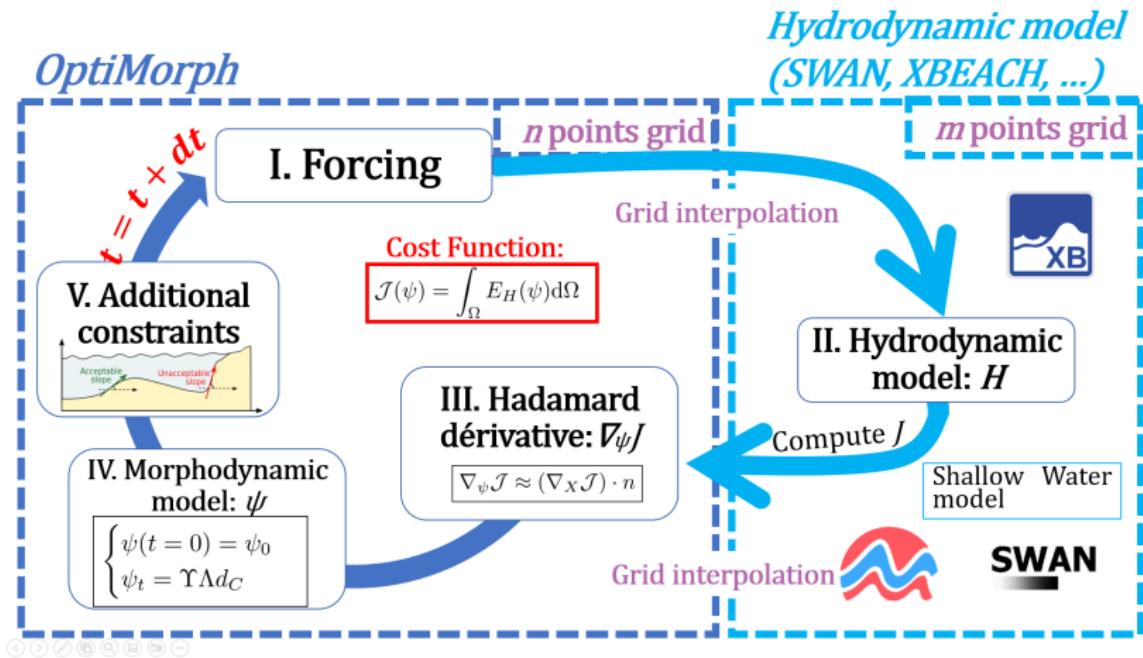


*Figure: Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  par l'approche d'Hadamard (bleu) et calcul analytique (rouge). Fond linéaire avec des perturbations.*

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

## Nouveau Workflow basé sur la dérivée au sens d'Hadamard



*Figure: Nouveau workflow d'OptiMorph basé sur la dérivée au sens d'Hadamard*

# Présentation des 3 modèles de vagues

## 3 modèles à 3 complexités différentes:

### Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- ✓ Très rapide.
- ✓ Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  analytiquement possible.
- ✗ Très peu physique.

### SWAN

Résout de manière spectrale, des

- ✓ Rapide.
- ✓ Calcul entièrement l'action des vagues.

✗ Ne décrit pas la surface de l'onde.

### XBeach

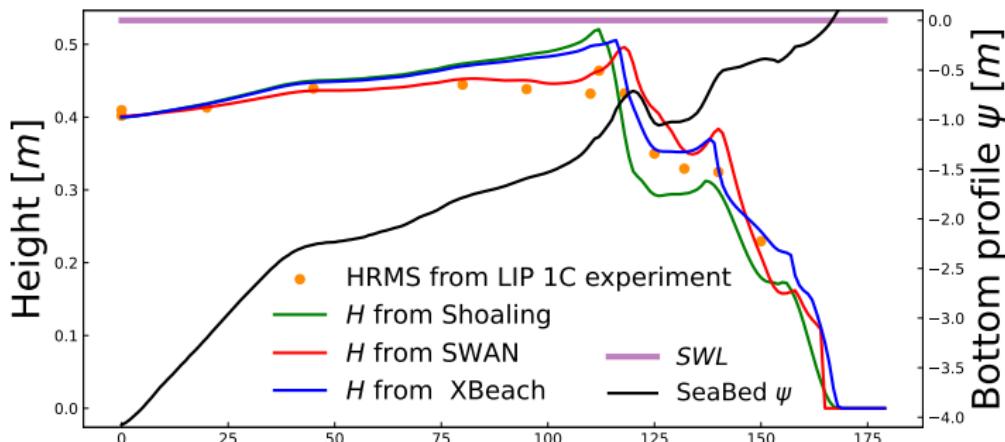
Résout séparément les ondes longues (vagues à vagues) et les ondes courtes (spectral).

- ✓ Résout également la circulation.
- ✗ Temps de calculs assez conséquents.

# Comparaison des modèles de vagues

## Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$



*Figure: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.*

- Shoaling :  $\text{RMSE}_H = 4.5 \text{ cm}$ .
- SWAN :  $\text{RMSE}_H = 3.3 \text{ cm}$ .
- XBeach :  $\text{RMSE}_H = 2.8 \text{ cm}$ .

$$\text{RMSE}_H = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(H_i^{\text{num}} - H_i^{\text{exp}})^2}{n}}$$

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
  - SANDS B: Une partie accréitive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	$H_S$ [m]	$T_0$ [s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

### Table: Paramètres de SANDS.

LIP (Roelvink and Reniers, 1995)

The Delta Flume of Delft Hydraulics measures 225x7x5 m.

- LIP-1A: Avant la tempête, création d'une barre sédimentaire sur une plage linéaire de pente 1/30.
  - LIP-1B: Tempête, la barre se déplace vers le large sous l'action de grosses vagues, érosion.
  - LIP-1C: Après la tempête, la barre se déplace vers la côte, accrétion.

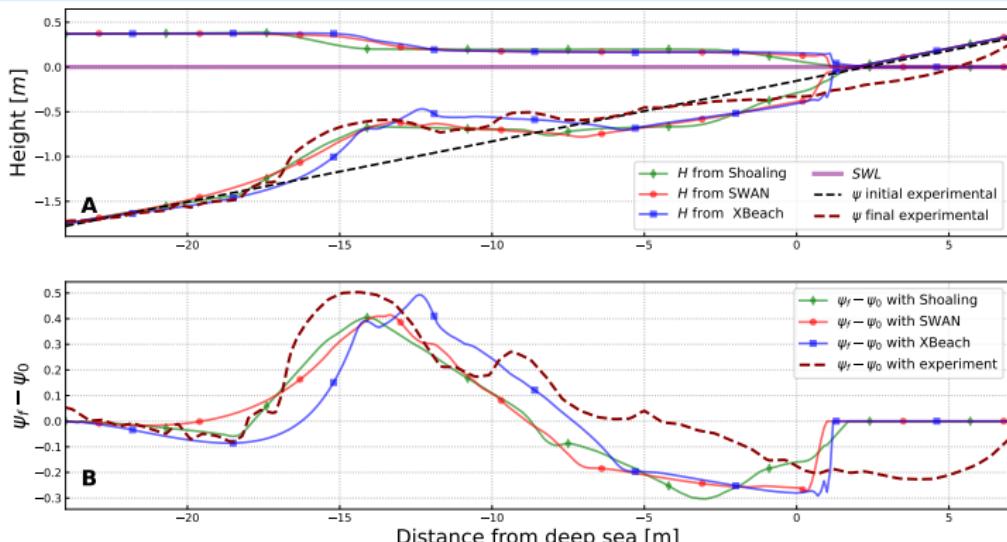
	Fond initial	$H_s[m]$	$T_0[s]$	Durée [h]
1A	Profil initial	0.9	5	
1B	Résultat de 1A	1.4	5	18
1C	Résultat de 1B	0.6	8	13

**Table:** Paramètres de LIP.

# Résultats en canal de l'expérience SANDS

## Paramètres:

- $H_s = 0.53 \text{ m}$
- $T_0 = 4.14 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: 1/15



*Figure: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de  $\psi_f - \psi_i$ .*

Sur [-25, 7] (tout le domaine):

- **Shoaling** :  $\text{RMSE}_\psi = 17.1 \text{ cm.}$
- **SWAN** :  $\text{RMSE}_\psi = 17.6 \text{ cm.}$
- **XBeach** :  $\text{RMSE}_\psi = 19 \text{ cm.}$

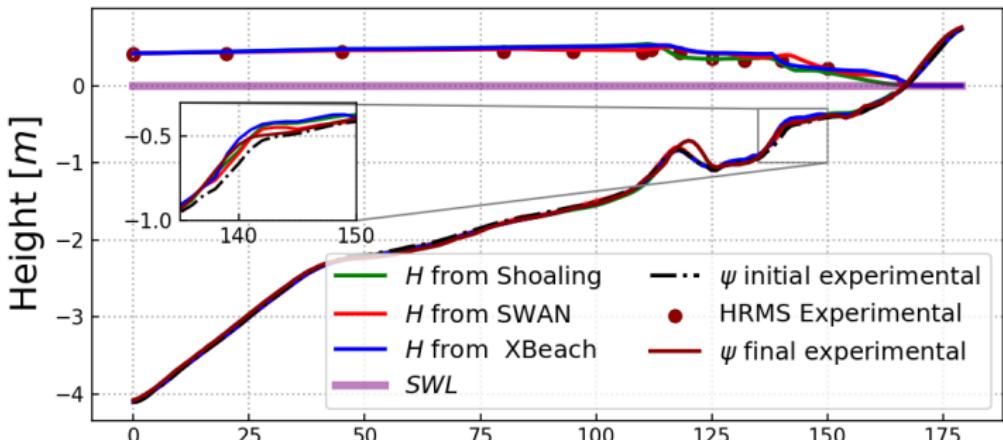
Sur [-25, 2] (partie immergée):

- **Shoaling** :  $\text{RMSE}_\psi = 11.7 \text{ cm.}$
- **SWAN** :  $\text{RMSE}_\psi = 12.7 \text{ cm.}$
- **XBeach** :  $\text{RMSE}_\psi = 13.5 \text{ cm.}$

# Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

## Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$



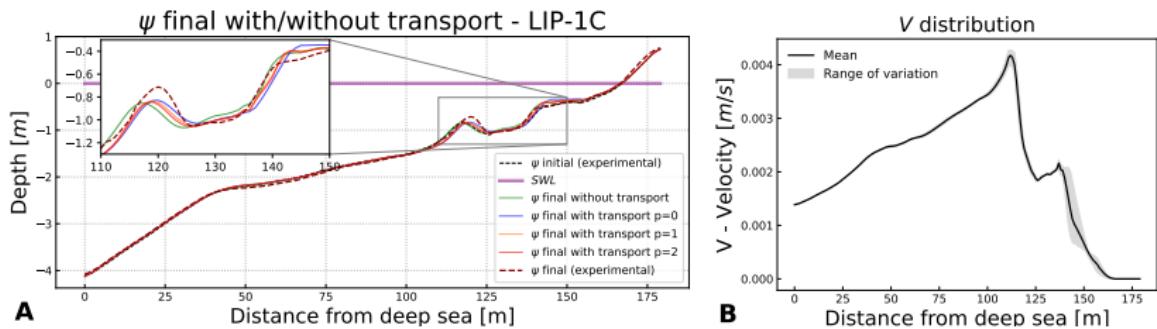
*Figure: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.*

- La barre intérieure simulée est superposée à celle expérimentale.
- Aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

# Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante:  $\psi_t + V \nabla_s \psi = \Gamma \Lambda d_c$ ,

- Une vitesse possible:  $V \sim U_b \left( \frac{H}{H_{\max}} \right)^p$  avec  $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$ ,



*Figure: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour  $p = 0, 1, 2$  et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour  $p = 1$ .*

- Mais  $V \geq 0$  pour ce choix  $\Rightarrow$  pas de déplacement de barre sédimentaire vers le large (comme dans LIP-1B).

## Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t + V \nabla_s \psi = \gamma \Lambda d_C & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant  $\mathcal{J}$ .
  - Comment calculer  $\nabla_V \mathcal{J}$  ?
  - Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser  $\mathcal{J}$  ?

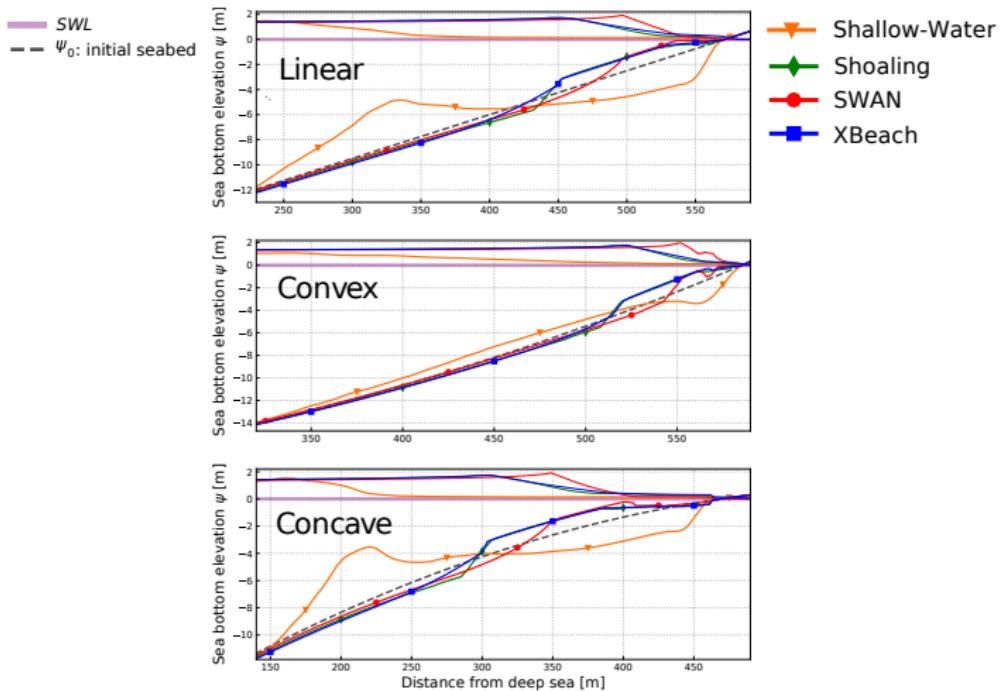
# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

# Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
  - $T_0 = 12 \text{ s}$
  - $T_f = 72 \text{ h}$
  - Pente:  $1/50$
  - $\Omega = 600 \text{ m}$
- 



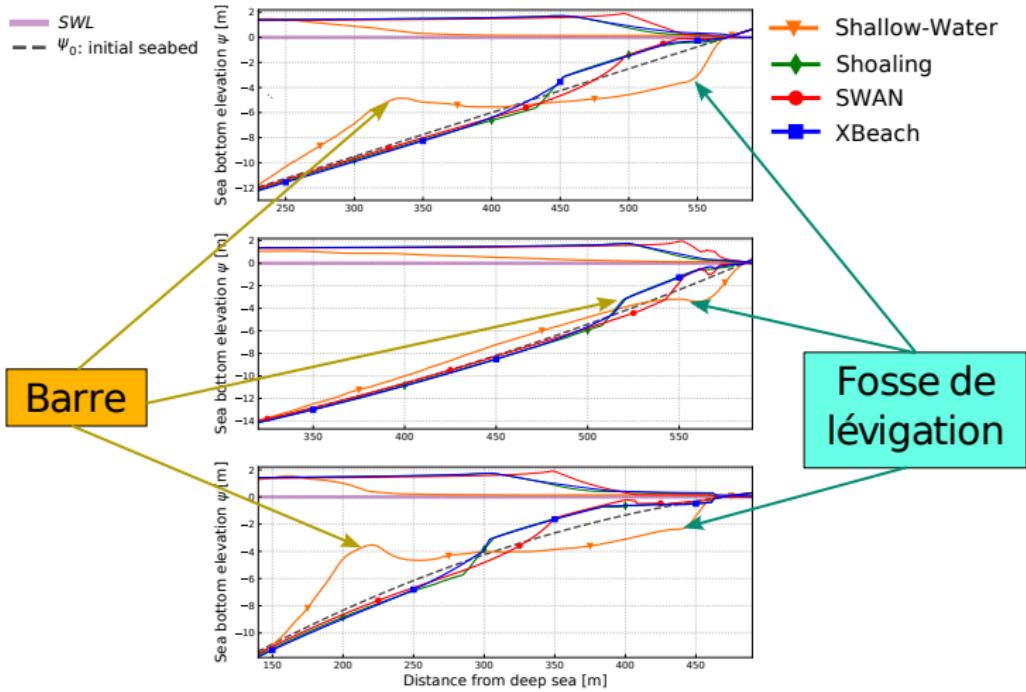
*Figure: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).*

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
  - $T_0 = 12 \text{ s}$
  - $T_f = 72 \text{ h}$
  - Pente:  $1/50$
  - $\Omega = 600 \text{ m}$

---

  - Caractéristiques observables dans la nature

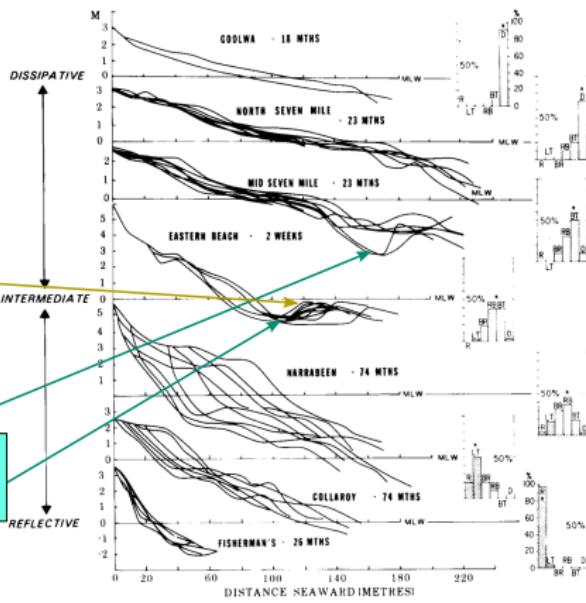
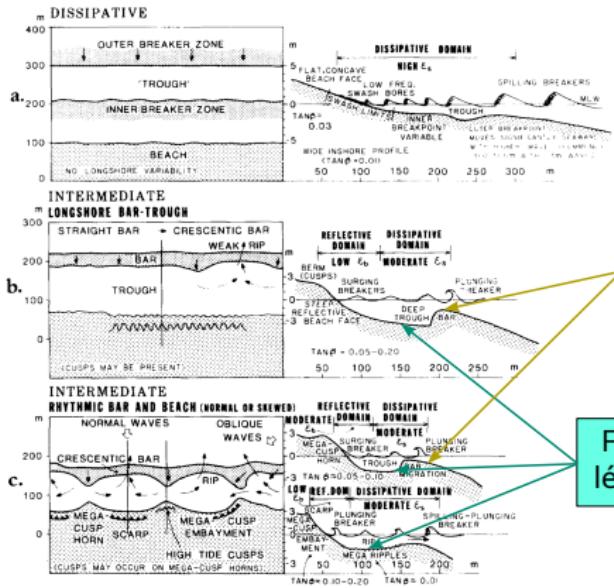


*Figure: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).*

# Comparaison avec une référence de la littérature



L.D Wright and A.D Short (1984). "Morphodynamic variability of surf zones and beaches: A synthesis". In: *Marine Geology*, Volume 56.

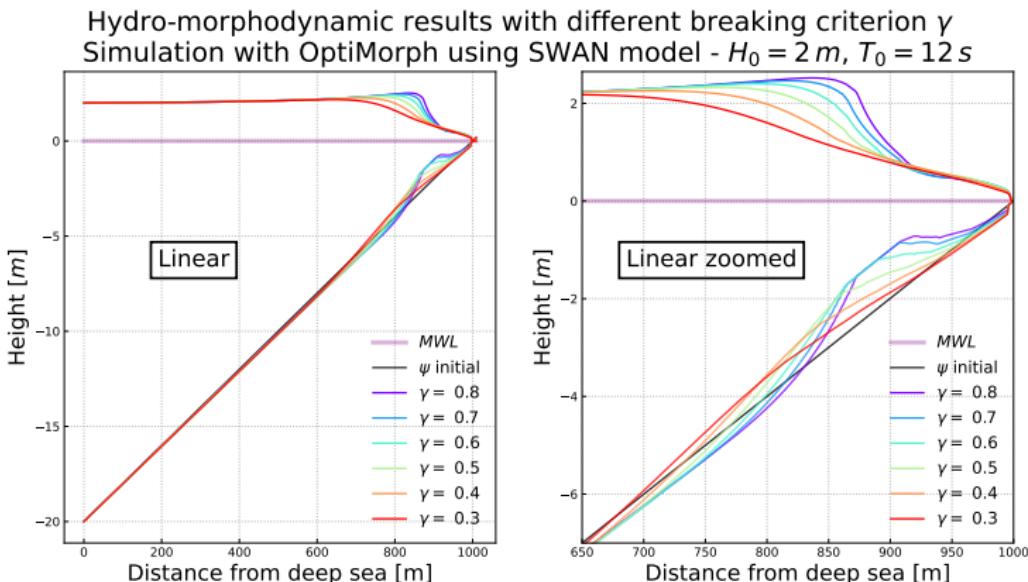


*Figure:* (left) Plan and profile configurations of the six major beach states. (right) Beach profile mobility in relation to modal beach state and state variability.

# Interaction entre le déferlement et la création de la barre sédimentaire

## Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50



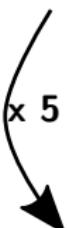
*Figure: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.*

- Création d'une barre sédimentaire au point d'inflexion de la vague.

# Temps de calcul

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

**Table:** Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.  
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.



Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation time for 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

**Table:** Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.  
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
- Temps de calcul entre la morphodynamique et le modèle shoaling: **comparables**.
- Temps de calcul morphodynamiques négligeable devant ceux des modèles de vagues complexes.



**Video:** Démonstration,  
visionnable sur les temps  
morts.

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
  - Présentation du modèle en 2D
  - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

## Passage du modèle en 2D : Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d_C \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **variable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard: 
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_x \mathcal{J} \cdot n$$
, **variable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.
  - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
    - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
    - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
    - Modèles vagues à vagues: SWASH, FUNWAVE, ...
    - Modèles monochromatiques spectraux reconstruisant la phase: **REF/DIF**, ...

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
  - Présentation du modèle en 2D
  - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

# Présentation de l'expérience Copter 2D

Les vagues irrégulières de JONSWAP sont générées sur des séquences de 20 mn, répétées plusieurs fois. Quatre climats de vagues typiques:

- La tempête se lève :  $H_s = 17 \text{ cm} / T_0 = 2.1 \text{ s}$ .
- Sommet de la tempête :  $H_s = 23 \text{ cm} / T_0 = 2.3 \text{ s} \rightarrow \text{Géotube}$ .
- La tempête faiblit :  $H_s = 18 \text{ cm} / T_0 = 3.5 \text{ s}$ .
- Conditions de vagues calmes :  $H_s = 11 \text{ cm} / T_0 = 2 \text{ s}$ .

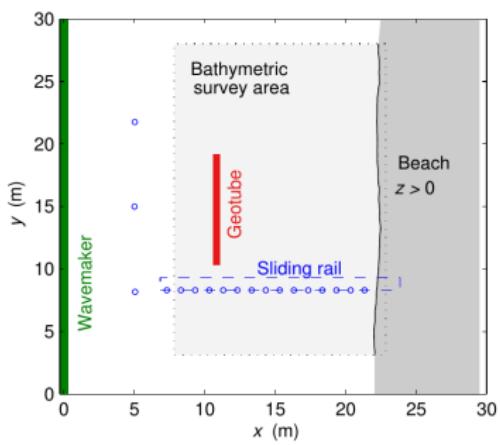


Figure: Schéma de Copter 2D.



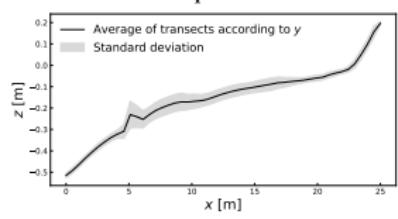
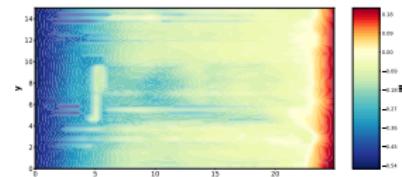
Figure: Photo de l'expérience Copter 2D.

## Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

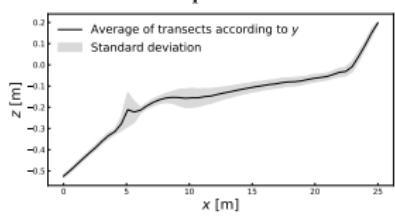
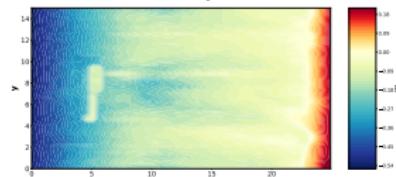
## Paramètres:

- $H_0 = 0.23$  m, •  $T_0 = 2.3$  s, •  $T_f = 20$  minutes.

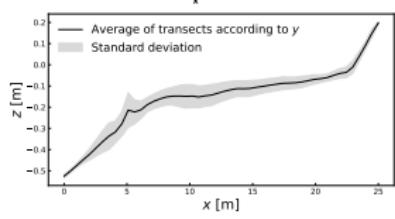
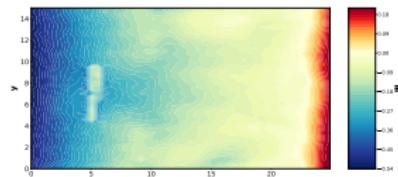
## Multi-1D Shoaling



REF/DIF



## Experimental



- Observation d'une fosse de lévigation derrière le tube en géotextile.
  - Modification du fond  $\Rightarrow$  bonne réaction morphodynamique.

# Compréhension de l'influence du modèle de vagues sur la morphodynamique

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,  $T_0 = 6 \text{ s}$ ,
- $T_f = 72 \text{ h}$ , Pente: 1/100.

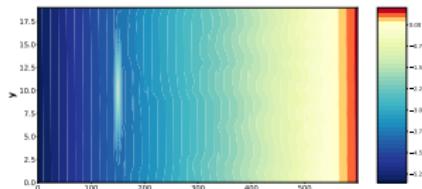
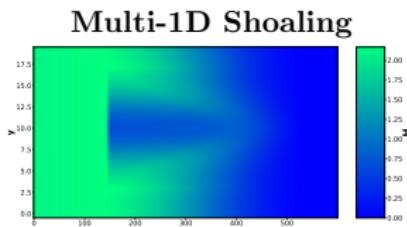
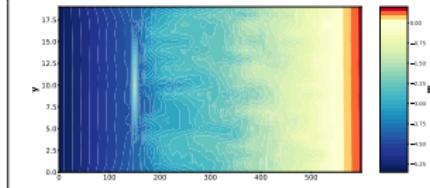
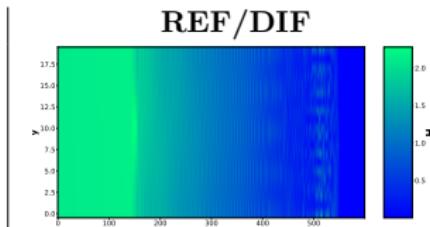
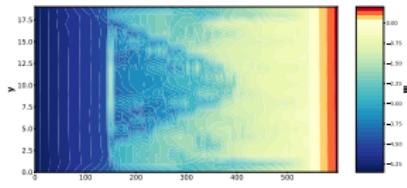


Figure: Fond initial

## Hydrodynamique



## Morphodynamique



- Deux modèles de vagues différents produisant deux résultats morphodynamiques différents.

## Un modèle exploratoire dans la vision de Murray

-  A. Brad Murray (2007). "Reducing model complexity for explanation and prediction". In: *Geomorphology*, Volume 90.

- "In short, a model can be useful for explanation even if it is 'incorrect' in terms of the numerical accuracy of its ingredients."
  - "A highly simplified 'exploratory' model (Murray, 2003) can help pinpoint what aspects of the essential interactions produce the behavior of interest."
  - "An exploratory model can change the way we think about a geomorphological system."
  - "In geomorphology,  $F = ma$  can rarely be a starting point."

OptiMorph est un modèle exploratoire

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

## Conclusion

- Un modèle générique, de faible complexité, pour la création de barres sédimentaires.
  - Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme.
  - Des cas de benchmark validés.
  - Un modèle de vagues doit être choisi minutieusement en fonction du domaine d'étude.
  - OptiMorph est un modèle exploratoire (selon la vision de Murray (2007))

## Publications:

- Ronan Dupont, Frédéric Bouchette, and Bijan Mohammadi. (2024). "Beaches morphodynamic modeling based on hadamard sensitivity analysis. ". In: *Ocean Modelling*, doi.org/10.1016/j.ocemod.2024.102370.
  - Ronan Dupont, Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Samuel Meulé. (2023). "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization.". In: *Ocean Modelling*, doi.org/10.1016/j.ocemod.2023.102197.

## Perspectives

- Étendre l'approche du transport latéral.
  - Continuer la validation in situ (accrétion, 2D,...).
  - Continuer à améliorer le modèle (érosion lorsqu'il n'y a pas d'eau,...).
  - Ajouter un plus grand nombre de modèles de vagues (SWAN 2D, XBeach 2D, modèles BT, ... )

En cours de publication:

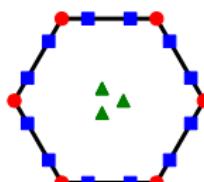


Ronan Dupont, Mathias Dauphin, and Romain Mottier. (202X). "An arbitrary order Virtual Element Methods for Helmholtz equations with Robin boundary condition "

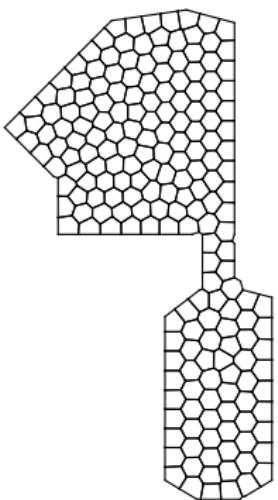
## Un projet en parallèle



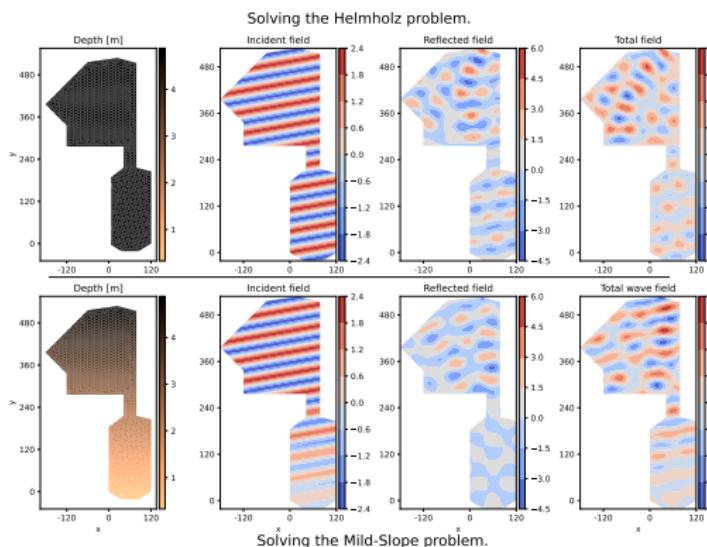
Ronan Dupont, Mathias Dauphin, and Romain Mottier. (202X). "An arbitrary order Virtual Element Methods for Helmholtz equations with Robin boundary condition "



- : Summits dofs
- : Edges dofs
- ▲ : Inner dofs.



## *Maillage polyédrique du port de Cherbourg.*



## Résultats VEM des équations d'Helmholtz et Mild-Slope sur le port de Cherbourg.

Merci  
pour votre attention!

# References

- R. Dupont, M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, and S. Meulé, "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization," *Ocean Modelling*, p. 102 197, 2023.
- R. Dupont, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Modelling beaches morphodynamic by hadamard sensitivity analysis," *Ocean Modelling*, vol. 189, p. 102 370, 2024.
- R. Dupont, F. Bouchette, B. Mohammadi, and D. Sous, "Optimorph: Un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. analyse de sensibilité en 1d et application multi-1d," *JNGGCC*, vol. 17, pp. 327–336, 2022.
- D. Isèbe, P. Azérad, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering," *en, International Review of Civil Engineering (IRECE)*, vol. 5, no. 2, p. 75, 2014.
- D. Isèbe, P. Azérad, B. Mohammadi, and F. Bouchette, "Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact," *Coastal Engineering*, vol. 55, no. 1, pp. 35–46, 2008.
- D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, and B. Mohammadi, "Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 8, pp. 1262–1277, 2008.
- A. Bouharguane, P. Azerad, F. Bouchette, F. Marche, and B. Mohammadi, "Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 13, no. 4, pp. 759–772, 2010.
- B. Mohammadi and F. Bouchette, "Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics," *Computers and Fluids*, vol. 89, pp. 78–87, 2014.
- B. Mohammadi and A. Bouharguane, "Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters," *Computers and Fluids*, vol. 40, pp. 291–298, 2011.
- B. Mohammadi, "Uncertainty quantification in littoral erosion," *Computers & Fluids*, vol. 143, pp. 120–133, 2017.
- M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, and N. Fraysse, "Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis," *en, China Ocean Engineering*, vol. 35, no. 6, pp. 802–813, 2021.
- A. Bouharguane and B. Mohammadi, "Minimisation principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 163–172, 2012.

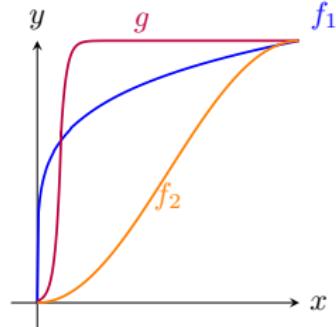
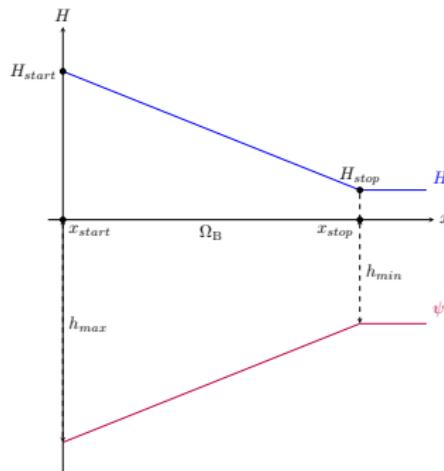
# Nouveau modèle de vagues

## Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}(\gamma h(x, t)) = H(x_{start}) + [H(x_{stop}) - H(x_{start})] \cdot f\left(\frac{x-x_{start}}{x_{stop}-x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max}-h}{h_{max}-h_{min}}\right)$$



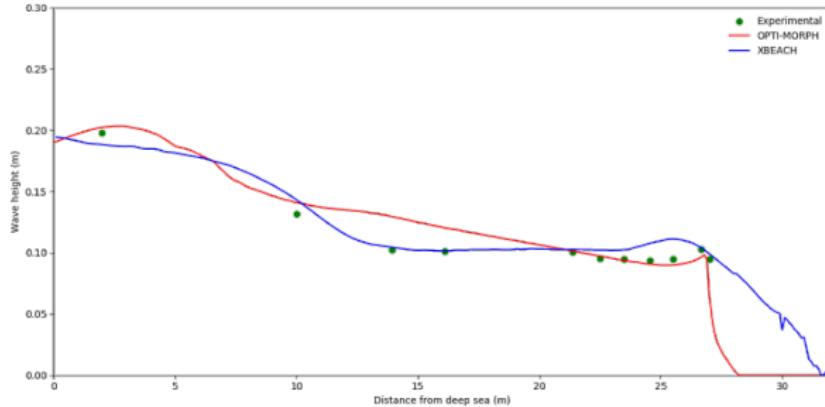
# Premier modèle de vagues

## Shoaling model:



Cook (2021)

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_s(x, t) & \text{if } x \in \Omega_s \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_s(x, t) & \text{if } x \in \Omega_s \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$



## Paramètres:

- $H_s = 135$  mm
- $T_0 = 2.5$  s

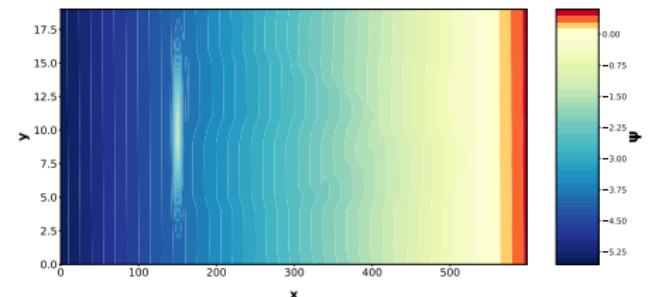
*Figure: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).*

# Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - Shoaling

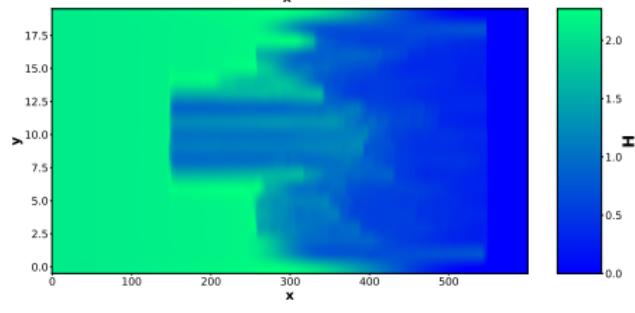
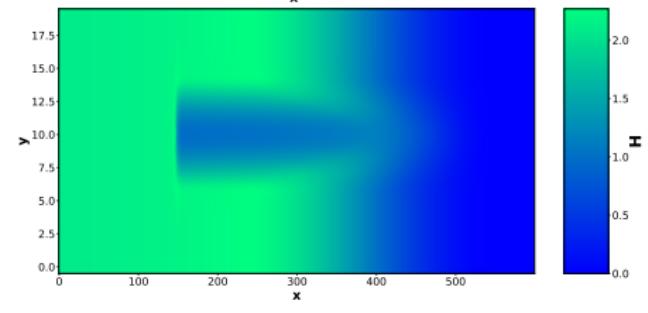
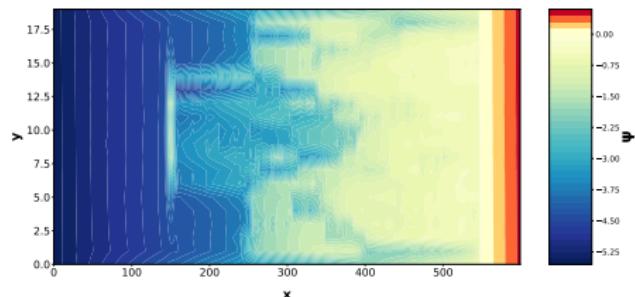
## Paramètres:

- **Shoaling Multi-1D,** •  $H_0 = 2 \text{ m}$ , •  $T_0 = 6 \text{ s}$ , •  $T_f = 72 \text{ h}$ , •  
Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final

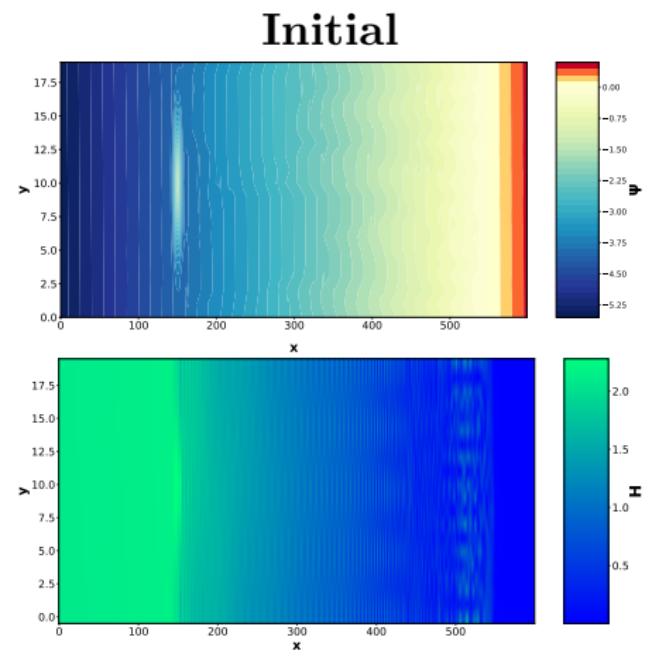


# Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - REF/DIF

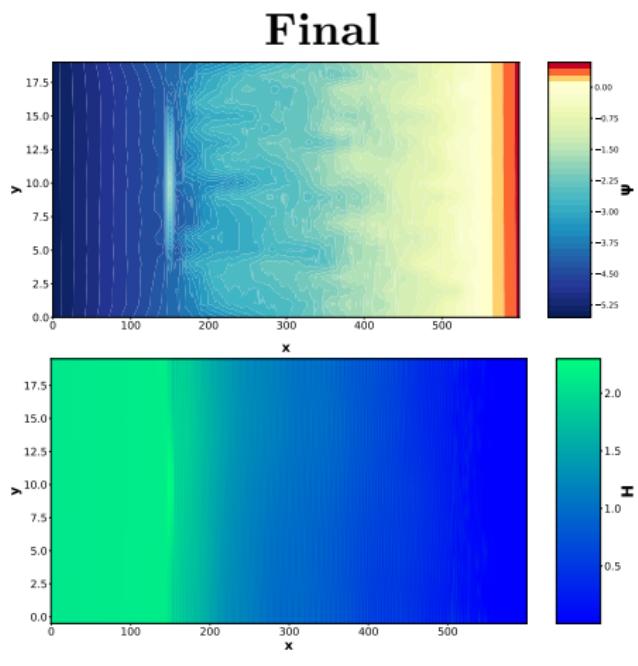
## Paramètres:

- REF/DIF, •  $H_0 = 2 \text{ m}$ , •  $T_0 = 6 \text{ s}$ , •  $T_f = 72 \text{ h}$ ,
- Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final



# Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes I

## Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement.

## SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues:  $A(x, y, \sigma, \theta) = \frac{E(x, y, \sigma, \theta)}{\sigma}$  avec,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (C_x A)}{\partial x} + \frac{\partial (C_y A)}{\partial y} + \frac{\partial (C_\sigma A)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (C_\theta A)}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}.$$

- $C_x$  et  $C_y$ : vitesses selon  $x$  et  $y$ ;
- $C_\sigma$ : déplacement de la fréquence relative dû aux variations de la bathymétrie
- $C_\theta$ : la réfraction induite par les effets combinés de la profondeur et des courants.
- $S$ : processus qui génèrent, dissipent ou redistribuent l'énergie des vagues.

# Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes II

## XBeach

Résout d'une part, **les ondes longues (vagues à vagues)** avec les débits calculés à l'aide d'une formulation moyenne en profondeur des équations Shallow-Water, en tenant compte du flux de masse induit par les vagues et des débits de retour:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial u^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial u^L}{\partial y} - fv^L - v_h \left( \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sx}}{\rho h} - \frac{T_{bx}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho h} \\ \frac{\partial v^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial v^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial v^L}{\partial y} + fu^L - v_h \left( \frac{\partial^2 v^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sy}}{\rho h} - \frac{T_{by}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho h} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u^L h}{\partial x} + \frac{\partial v^L h}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Où les composantes de la vitesse lagrangienne (désignées par l'exposant  $L$ ) sont la superposition de la vitesse eulérienne et de la vitesse de dérive de Stokes :

$$u^L = u^E + u^S \quad \text{et} \quad v^L = v^E + v^S.$$

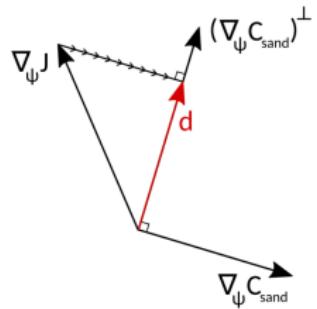
Résout d'une autre part, **les ondes courtes (spectral)** par l'action des vagues.

# Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut  $\forall t \in [0, T_f]$ ,  $C_{\text{sand}}(t) = 0$ .



Minimiser  $\mathcal{J}$  avec  $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$  (car  $C_{\text{sand}}(0) = 0$ )

$\Leftrightarrow$

Suivre la direction  $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$  en gardant  $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$ .

Figure: Projection.  
Cook (2021).

On a donc:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\| \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \|}.$$

## Definition of $\Upsilon$ (Part 1)

$$\psi_t + \frac{1}{1 - \lambda_p(x)} \nabla(q(x, t)) = 0,$$

$$\psi_t = -\frac{1}{1 - \lambda_p(x)} q_x = -\Upsilon(x) \Lambda(x) \nabla_\psi \mathcal{J}(x, t).$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Upsilon(s) \nabla_\psi \mathcal{J}(s, t) ds = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda_p(s)} q_s(s, t) ds.$$

$$\Upsilon(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \nabla_\psi \mathcal{J}(s, t) ds = \frac{1}{1 - \lambda_p(x)} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} q_s(s, t) ds.$$

$$\Upsilon(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \nabla_\psi \mathcal{J}(s, t) ds = \frac{1}{1 - \lambda_p(x)} (q(x + \varepsilon, t) - q(x - \varepsilon, t)),$$

which simplifies to:

$$\Upsilon(x) = F(x, t) \frac{1}{1 - \lambda_p(x)}.$$

## Definition of $\Upsilon$ (Part 2)

The factor  $F(x, t)$  is defined as:

$$F(x, t) = \frac{q(x + \varepsilon, t) - q(x - \varepsilon, t)}{2\varepsilon \overline{\nabla_\psi \mathcal{J}}|_{(x,t)}},$$

where

$$\overline{\nabla_\psi \mathcal{J}}|_{(x,t)} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \nabla_\psi \mathcal{J}(s, t) ds.$$

$$\Upsilon = \bar{F} \frac{1}{1 - \lambda_p}$$

$$\bar{F} = \frac{q(x_R, 0) - q(x_L, 0)}{\int_{x_L}^{x_R} \nabla_\psi \mathcal{J}(s, 0) ds},$$

and

$$q = 10 \frac{\pi}{6} d_{50} p U_f' [1 - 0.7 \sqrt{\theta_c / \theta'}].$$

$$\bar{F} = \pi d_{50} \left[ 10 - 7 \sqrt{\theta_c / \theta'} \right] \frac{p(x_L) U f'(x_L) - p(x_R) U f'(x_R)}{6 \int_{x_L}^{x_R} \nabla_\psi \mathcal{J}(s, 0) ds}.$$