

Couplage vagues-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

Frédéric BOUCHETTE	Professeur	Université de Montpellier
Bijan MOHAMMADI	Professeur	Université de Montpellier
Marissa YATES	Maître de conférences	École des Ponts, LHSV
Emma Imen TURKI	Maître de conférences	Université de Normandie
Patrick MARCHESIELLO	Directeur de recherche	IRD, LEGOS
Catherine CHOQUET	Professeur	Université de La Rochelle
Mehmet ERSOY	Maître de conférences	Université de Toulon

Contexte

- Plusieurs années de recherche en optimisation du littoral (4 thèses).
- La suite des travaux de Megan Cook.
- Dernière thèse sur ces travaux.
- Une transition vers les méthodes numériques.

Sommaire

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

Fond marin ψ



Figure 1: Plage de l'Espiguette

Quelle quantité minimiser ?



Figure 2: Under impact of waves - Li Yan et al. (2019)

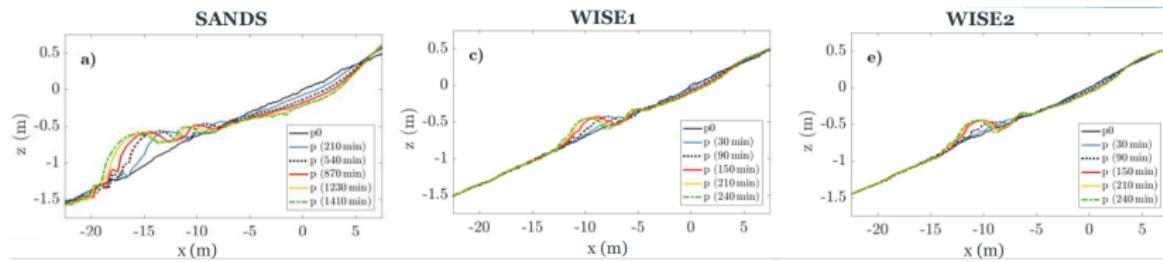


Figure 3: Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS, WISE 1 and WISE 2 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)

Quelle quantité minimiser ?

$$I_i \approx 0.9 I_f$$

Comparison of Wave Energy E_H between the beginning and the end of the experience

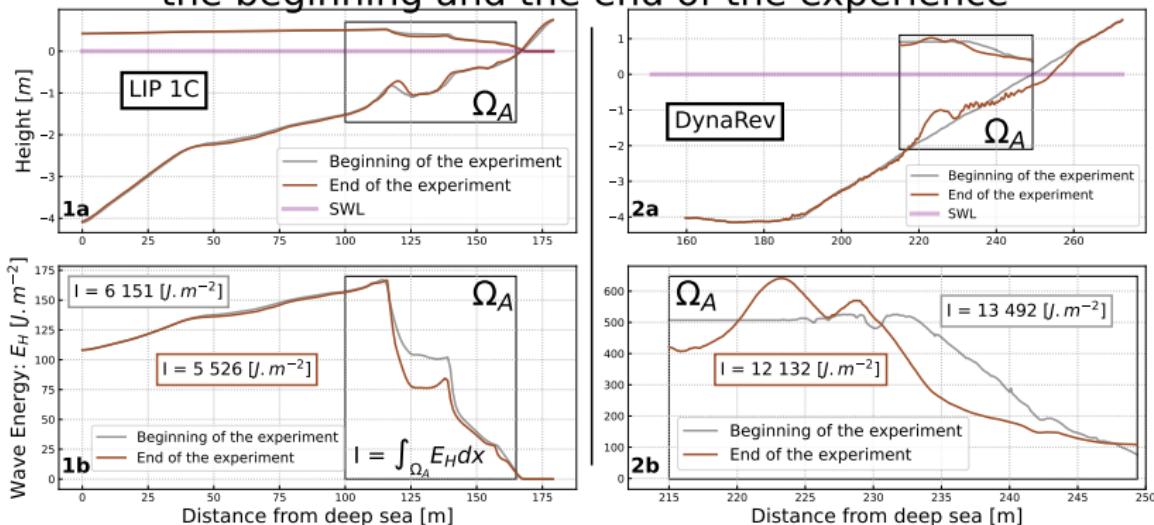


Figure 4: 1) Expérience LIP 1C avec H générée par XBeach. **2)** Expérience DynaRev avec H mesuré par LIDAR. **a)** Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). **b)** Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur Ω_A .

Quel fond minimise l'énergie des vagues ?



Quel est le fond ψ minimisant l'énergie des vagues ? $\min_{\psi} \mathcal{J} ?$

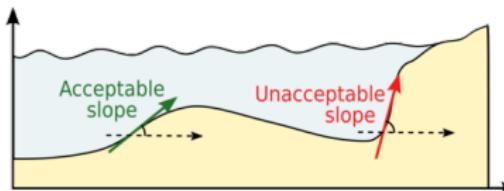
Un solution possible...



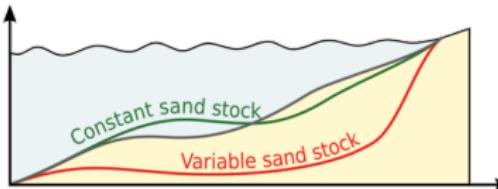
Cette solution satisfait $\min_{\psi} \mathcal{J}$.

Ajout de contraintes

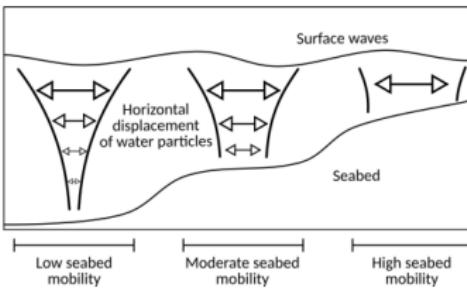
- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:



1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Workflow et quelques notations

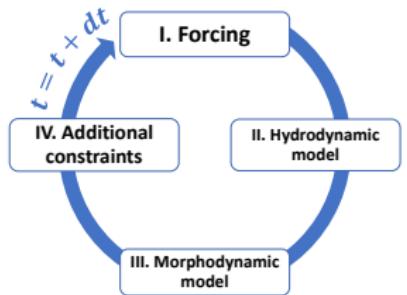


Figure 5: Premier workflow.

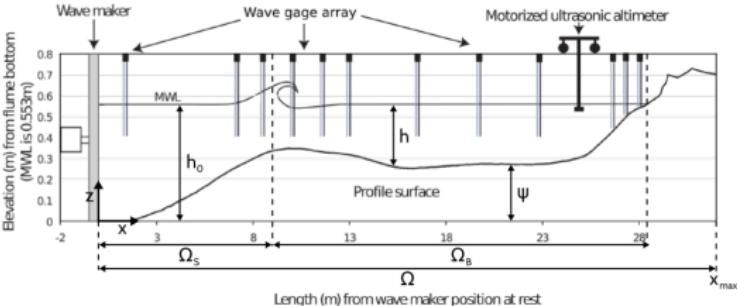


Figure 6: Notations usuelles.

- Paramètres numériques: $\Delta x, \Delta t, T_f$.
- Paramètres géométriques: $\psi_0, \Omega, h_0, \beta$.
- Modèle hydrodynamique: $H_0(t), T_0(t), \gamma$.
- Modèle morphodynamique: Υ .

Modèle de vagues

Complexified Shoaling model:

 Cook (2021)

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$

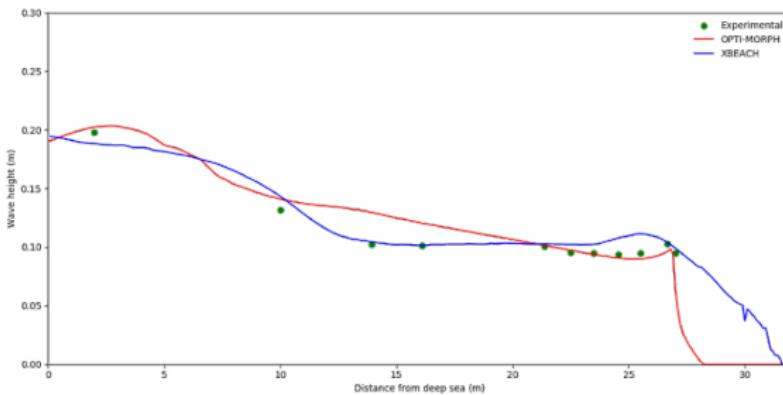


Figure 7: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

Modèle morphodynamique

Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

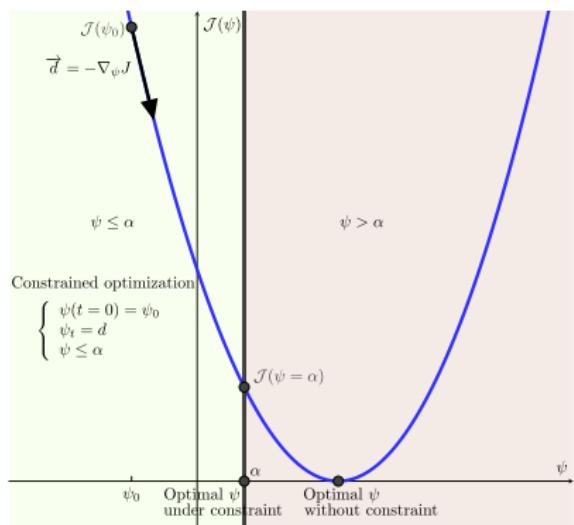


Figure 8: Descente du gradient sous contrainte α .

- ψ_t : l'évolution en temps du fond sableux (m.s^{-1}),
- Υ : la mobilité sédimentaire (m.s.kg^{-1}),
- Λ : l'excitation du fond sableux par les vagues,
- d : la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux varie. Sans contrainte, $d = -\nabla_\psi \mathcal{J}$,
- $\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{t-T_{coupl}}^t \int_{\Omega_S} E_H(x, \tau) dx d\tau$.

Ajout de contraintes

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},\end{aligned}$$

et en $z = \psi$:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}.$$

- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}.$$

- Conservation sableuse:

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T_f].$$

Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi - \psi_0)^2 d\Omega$$

et on veut $\forall t \in [0, T_f]$, $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

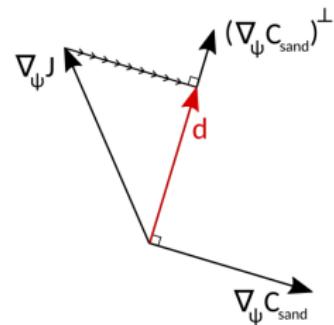


Figure 9: Projection 1D de Gram-Schmidt.

avec donc:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|},$$

et

$$\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}(t) = 2\psi \int_{\Omega} (\psi - \psi_0) dx.$$

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

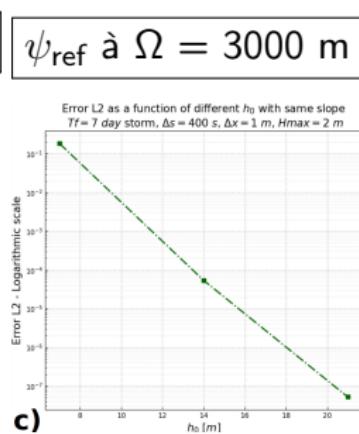
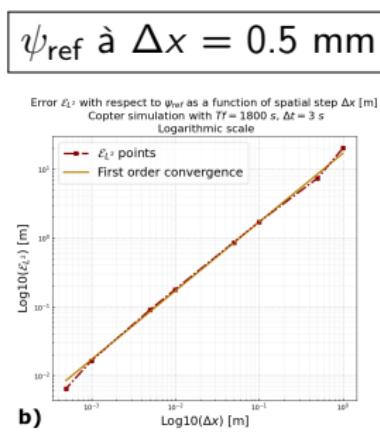
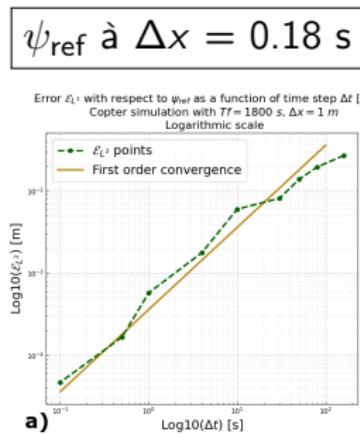


Figure 10: Convergence temporelle avec Δt dans $[0.18, 90]$ s.

Figure 11: Convergence spatiale avec Δx dans $[0.001, 2]$ m.

Figure 12: Convergence en taille de domaine avec Ω dans $[600, 3000]$ m.

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

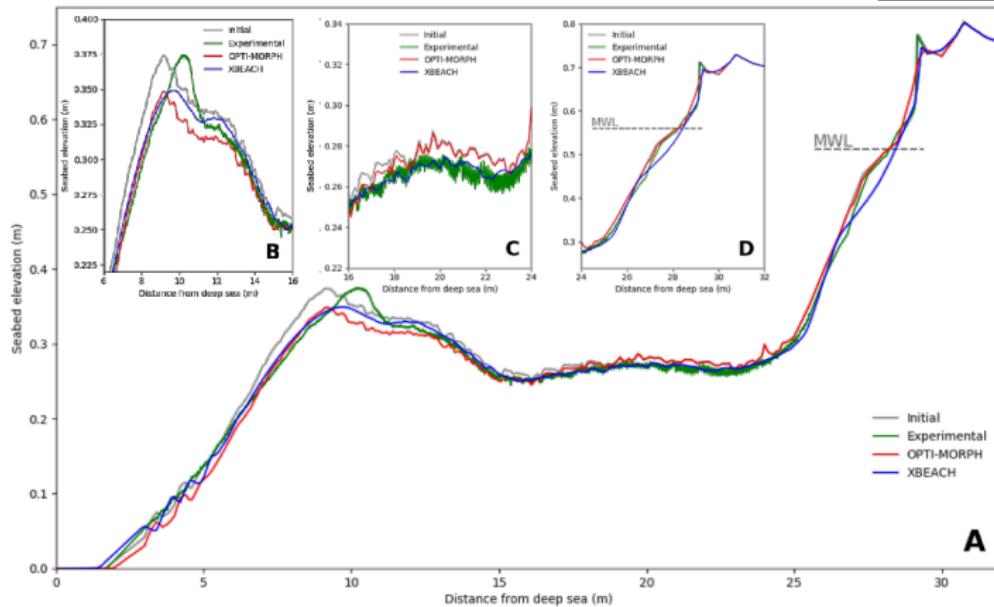


Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

Présentation du modèle

Validité du modèle

Résultats 1D du modèle

Extension du modèle en multi-1D

3 Extension à un modèle générique

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Workflow

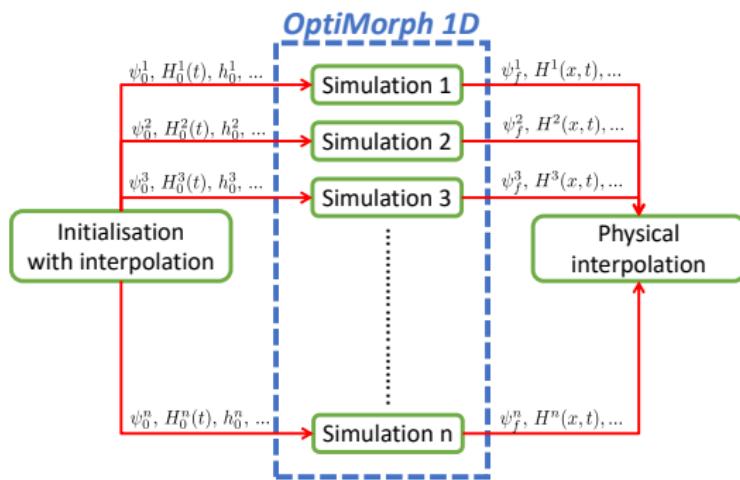


Figure 14: Workflow d'*OptiMorph* en Multi-1D.



Figure 15: Géographie de la simulation au sud de Montpellier

Résultats en multi-1D

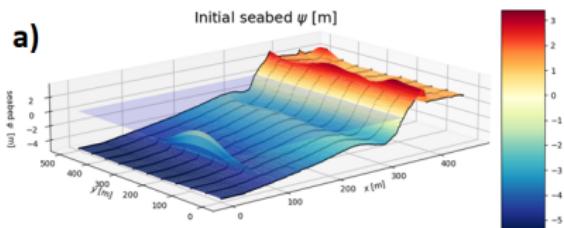


Figure 16: Fond initial.

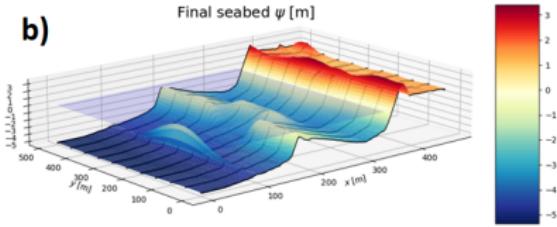


Figure 17: Fond final.

- $H_0 = 2 \text{ m}$,
- $T_0 = 2 \text{ s}$,
- $T_f = 1 \text{ semaine}$,
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs),

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

3 Extension à un modèle générique

Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?

Validation numérique

Présentation du nouveau modèle

Résultats

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Comment calculer $\nabla_\psi J$?

Rappel de l'équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
- ✓ Rapide.
- ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

Différences Finis

- ✓ Facile à mettre en place.
- ✗ $N + 1$ évaluations nécessaires.
- ✗ Temps de calculs très longs.

AD

TAPENADE


- ✓ Robuste.

- ✗ Pré-traitement lourd.
- ✗ Dépendance à C / Fortran 90.

L'approche Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec n : vecteur normal à la forme.

À l'ordre 1:

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} \mathcal{J} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J} \cdot n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \\ &\approx (\nabla_X \mathcal{J}) \cdot n, \end{aligned}$$

avec $X = (x, z)^T$.

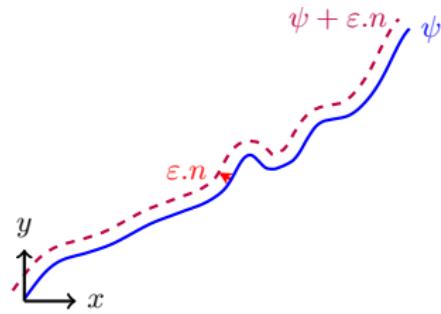


Figure 18: Schéma illustrant l'approche Hadamard.

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Vérification numérique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - f_\psi(x) = 0\} \quad \text{avec} \quad f_\psi(x, y) = ax + b$$

et $H = \cos(\psi)$. Après des calculs...

$$\nabla_\psi H = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}.$$

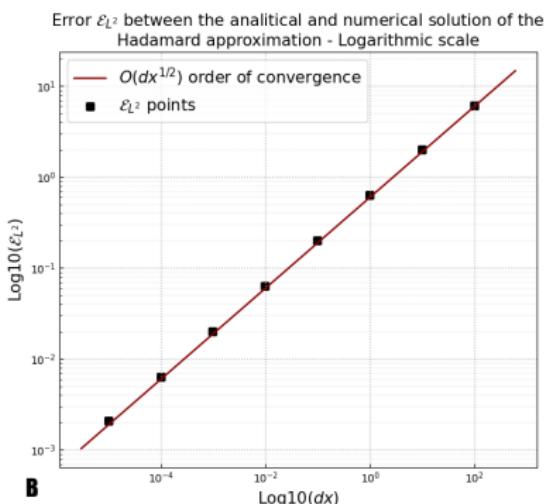
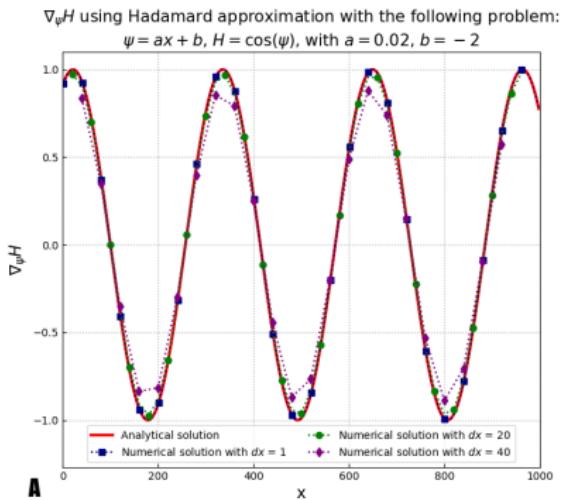


Figure 19: A) Solution analytique et approximative avec l'approche Hadamard, B) Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.

Vérification numérique

En posant: $\nabla_X H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^T$ et $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2+dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$, on calcul $\boxed{\nabla_\psi H = \nabla_X H \cdot n}$.

Comparison of numerical and analytical $\nabla_\psi H$ on the following problem:
 ψ linear without / with perturbations - $H_0 = 2$ m - $h_0 = 10$ m - $T_0 = 10$ s

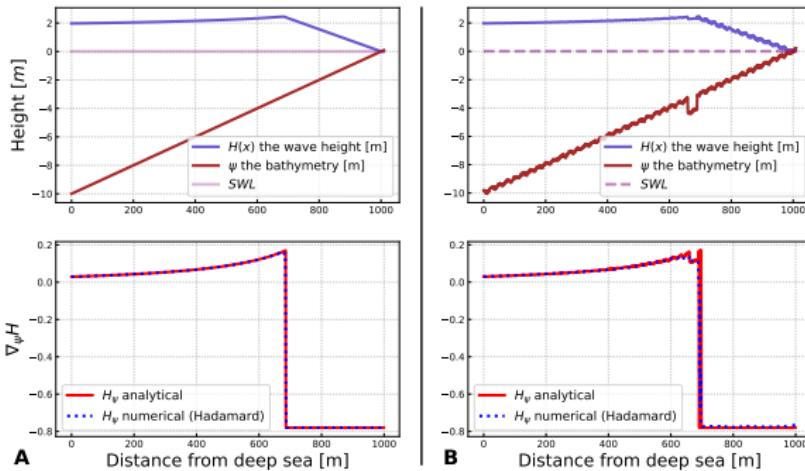


Figure 20: A) Solution analytique et approximative avec l'approche Hadamard sur un cas simple, B) Solution analytique et approximative sur un cas perturbé.

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
 - Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?
 - Validation numérique
 - Présentation du nouveau modèle
 - Résultats
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Nouveau Workflow

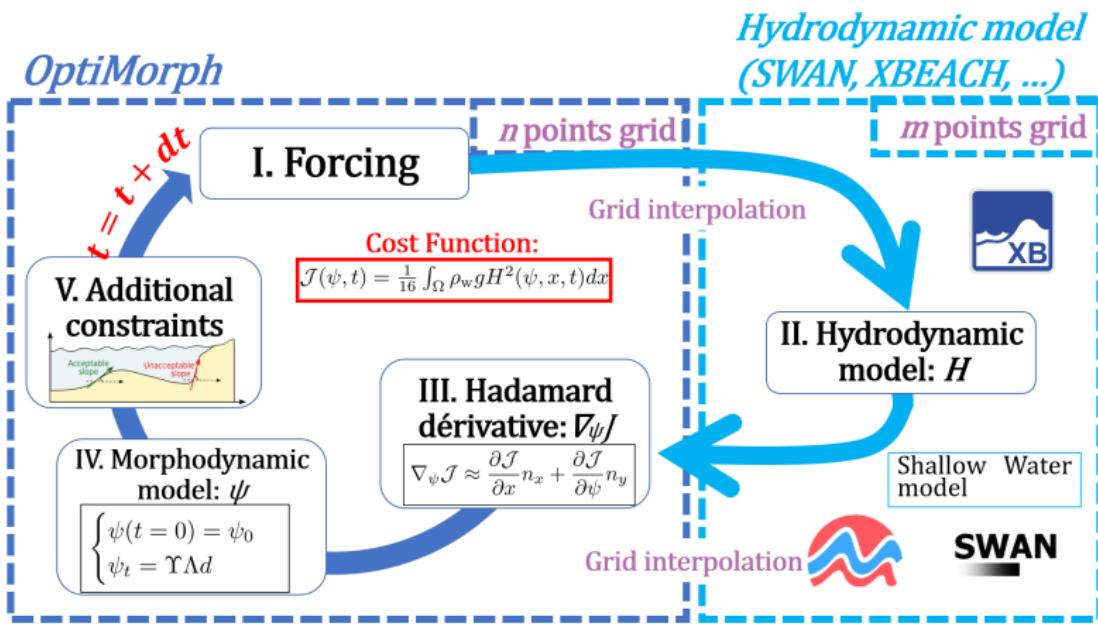


Figure 21: Nouveau diagramme de fonctionnement d'OptiMorph.

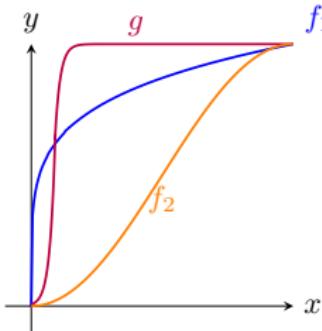
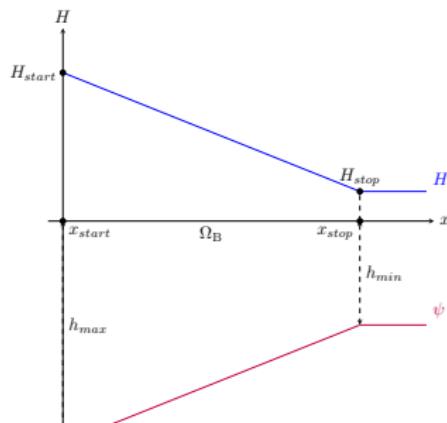
Nouveau modèle de vagues

Nouveau Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec \mathcal{F} une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}(\gamma h(x, t)) = H(x_{start}) + [H(x_{stop}) - H(x_{start})] \cdot f\left(\frac{x-x_{start}}{x_{stop}-x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max}-h}{h_{max}-h_{min}}\right)$$



Nouveau modèle de vagues

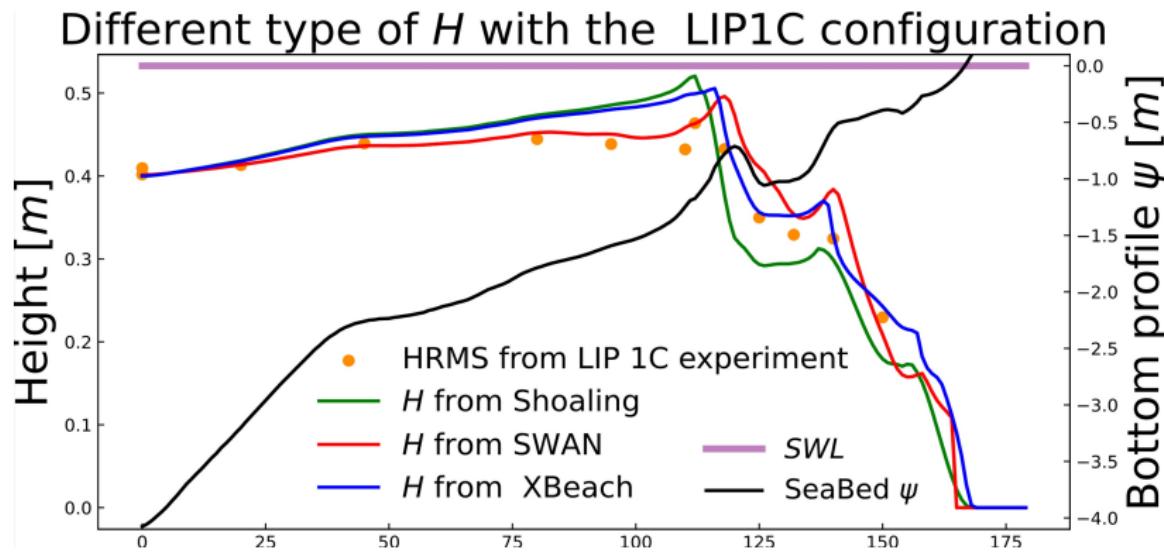


Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C. Points noirs, mesures HRMS, noir profil du fond, vert H du modèle Shoaling étendu ($H_{RMSE} = 0,045 \text{ m}$), rouge H du modèle SWAN ($H_{RMSE} = 0,033 \text{ m}$), bleu H du modèle XBeach ($H_{RMSE} = 0,028 \text{ m}$).

1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?

2 Vers un modèle morphodynamique

3 Extension à un modèle générique

Comment calculer $\nabla_{\psi} J$?

Validation numérique

Présentation du nouveau modèle

Résultats

4 Évolution du modèle en 2D

5 Conclusion et Perspectives

Résultats en canal de l'expérience SANDS

- $H_s = 0.32 \text{ m}$
- $T_0 = 5.44 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente: $1/15$

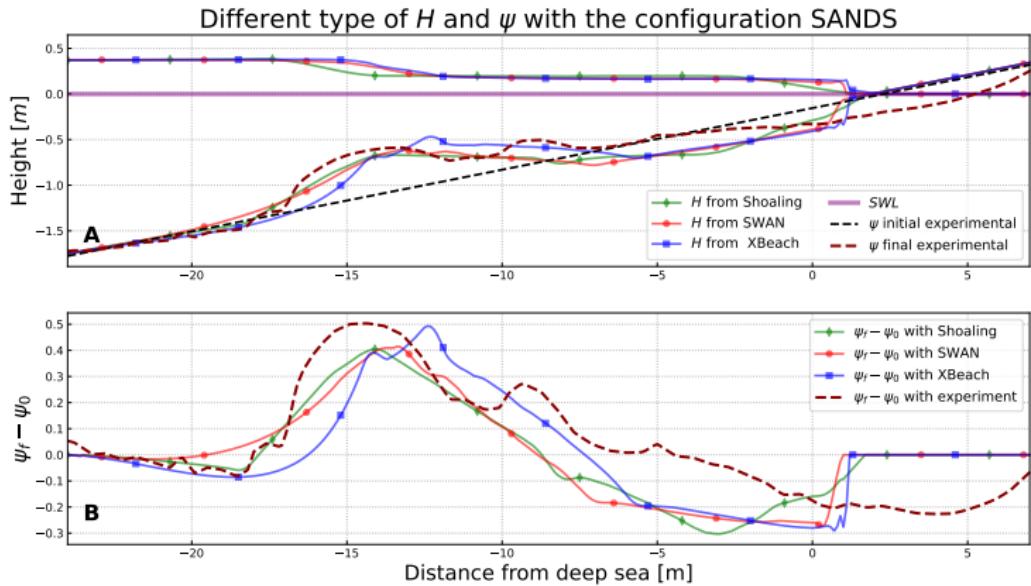


Figure 23: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu)). Noir : profil du fond, vert : Shoaling amélioré ($\psi_{RMSE} = 11,7 \text{ cm}$), rouge : SWAN ($\psi_{RMSE} = 12,7 \text{ cm}$), bleu : XBeach ($\psi_{RMSE} = 13,5 \text{ cm}$), rouge foncé : ψ de l'expérience. B) Écarts de $\psi_f - \psi_i$ obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN, XBeach et l'expérience.

Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

Different type of H and ψ
with the configuration LIP11D - 1C

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$
- Pente: $1/30$

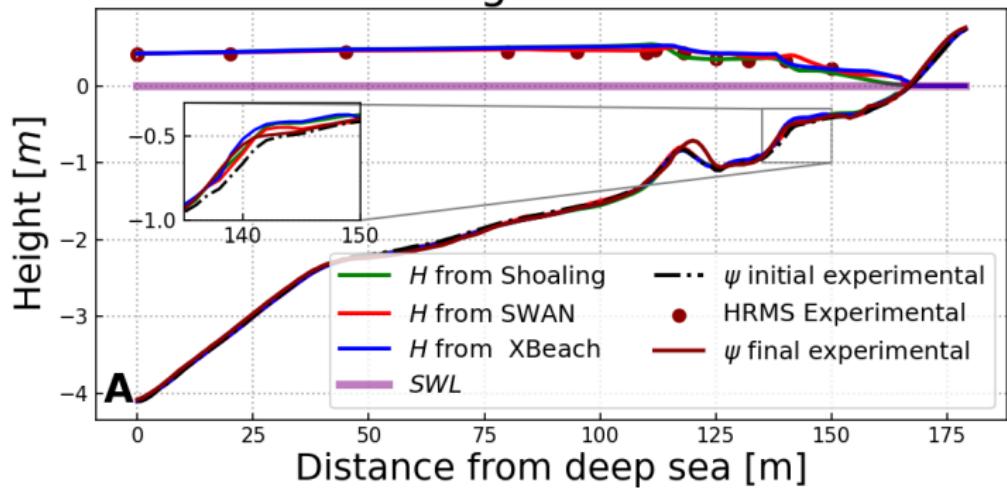


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu)). Configuration du profil du fond à partir de l'expérience érosive de SANDS. Noir : profil du fond, vert: Shoaling amélioré, rouge : SWAN , bleu XBeach , rouge foncé : ψ de l'expérience.

Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante: $\psi_t = \nabla \cdot d - V \nabla_s \psi$
- Une vitesse possible: $V = 0.01 U_b \left(\frac{H}{H_{\max}} \right)^p$ avec $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$

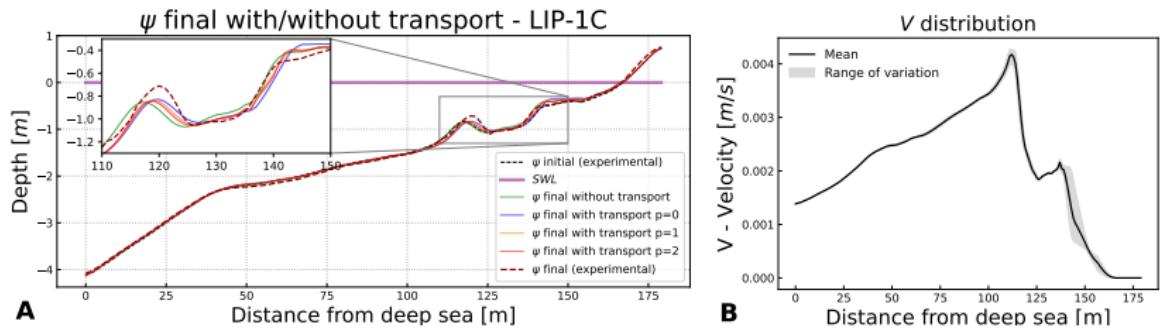


Figure 25: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour $p = 0, 1, 2$ et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour $p = 1$.

Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - \textcolor{red}{V} \nabla_s \psi \\ \textcolor{red}{V}_t = \rho \nabla_v \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \Upsilon \Lambda d - \textcolor{red}{V} \nabla_s \psi \\ \textcolor{red}{V}_t = \rho \nabla_v \mathcal{J} \end{array} \right. \quad (2b)$$

- L'équation (2b) traduit une vitesse minimisant \mathcal{J} .
- Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser \mathcal{J} ?

Résultats en mer

Evolution of ψ with different hydrodynamic models and different bottom profile
 $H_0 = 2 \text{ m}$, $T_0 = 12 \text{ s}$, $h_0 = 20 \text{ m}$, $\Omega = 600 \text{ m}$, Dynamic forcing

- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: $1/50$

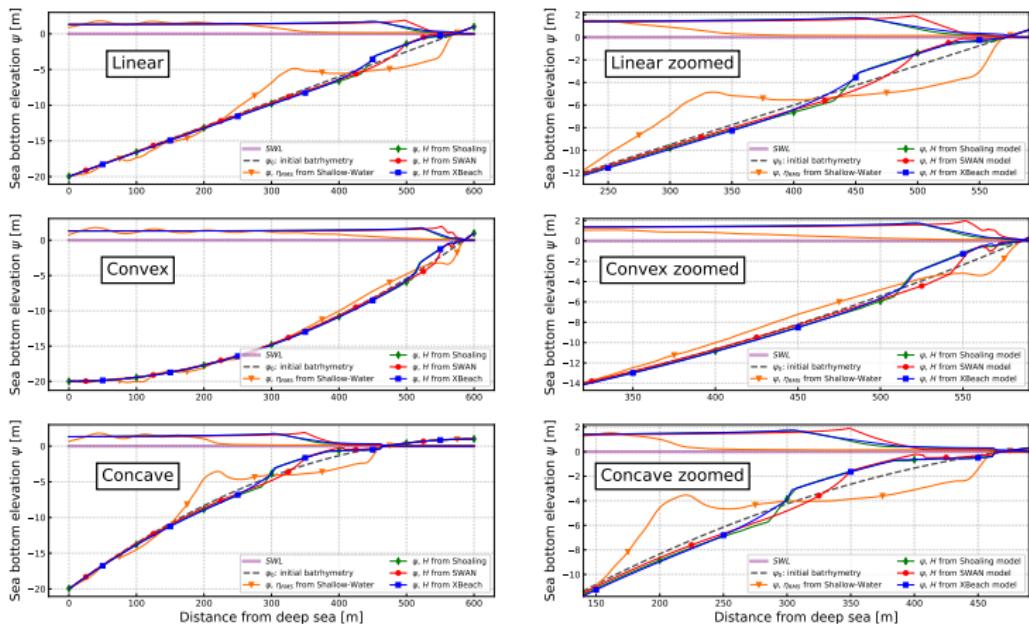


Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).

Sensibilité au critère de déferlement

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: $1/50$

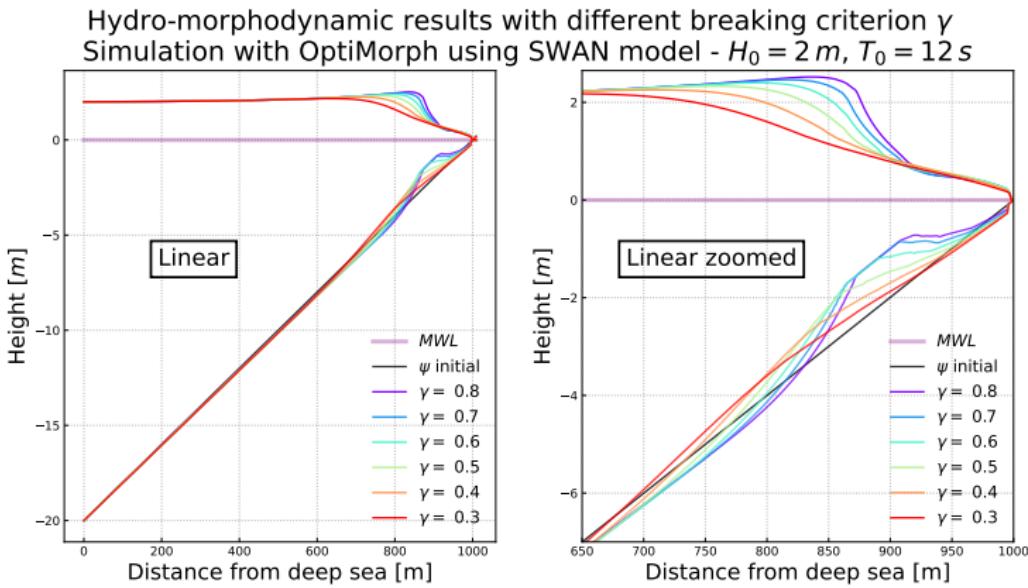


Figure 27: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

Temps de calcul

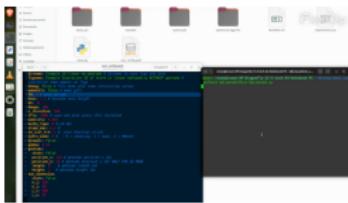


Figure 28: Démonstration.

Simulation with 180 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by gradient descent
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

Table 1: Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

Simulation with 1000 points	Hydrodynamic			Morphodynamic by gradient descent
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation time for 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

Table 2: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Présentation du modèle en 2D

- Équation gouvernante:
- Fonction de coût:

$$\begin{cases} \psi_t = \nabla \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases},$$

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{t-T_{coupl}}^t \int_{\Omega_S} E_H(x, \textcolor{red}{y}, \tau) dx d\tau,$$

- Hadamard: $\nabla_\psi \mathcal{J} \approx (\nabla_X \mathcal{J}).n$ avec $X = (x, \textcolor{red}{y}, z)^\top$,

Présentation du modèle en 2D

- Contrainte de pente:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{slope}$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| \leq M_{slope}$$

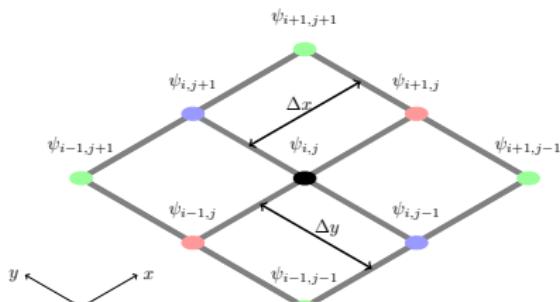


Figure 29: Représentations aux nœuds

- Contrainte de conservation sableuse:

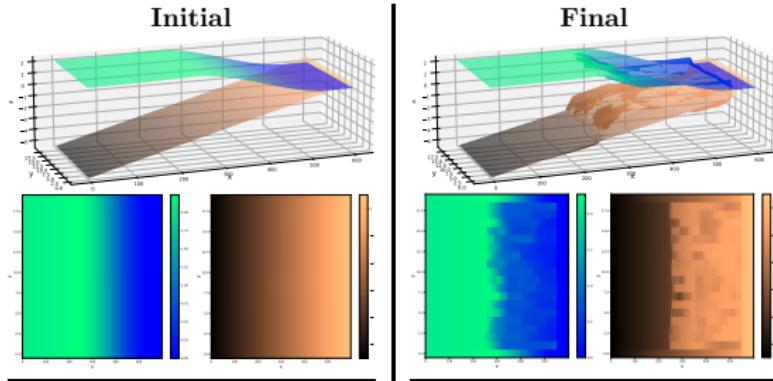
$$\int_{\Omega} \psi(t, x, y) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x, y) dx \quad \forall t \in [0, T_f]$$

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
 - Présentation du modèle en 2D
 - Résultats 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

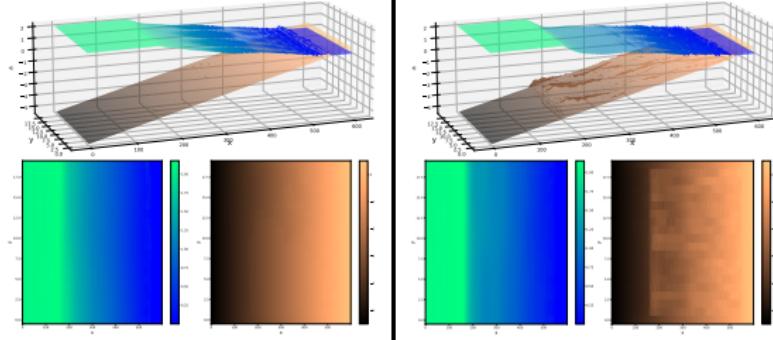
Résultats sur une pente linéaire

- Shoaling
- REF/DIF
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 6 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/100

Shoaling



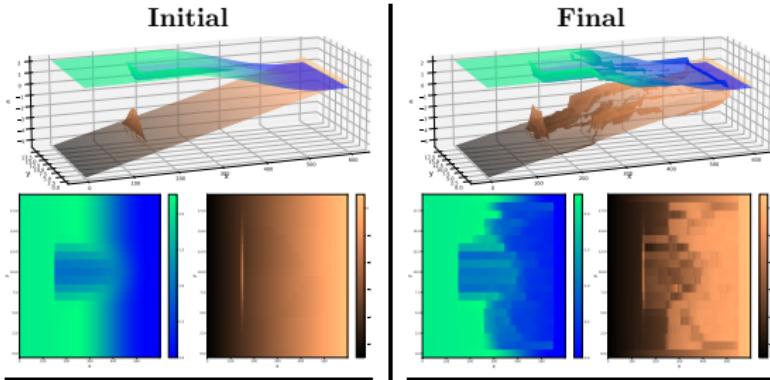
REF/DIF

*Figure 30: Simulation 2D avec OptiMorph.*

Résultats sur une pente linéair + géotube

- Shoaling
- REF/DIF
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 6 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/100
- Géotube gaussienne

Shoaling



REF/DIF

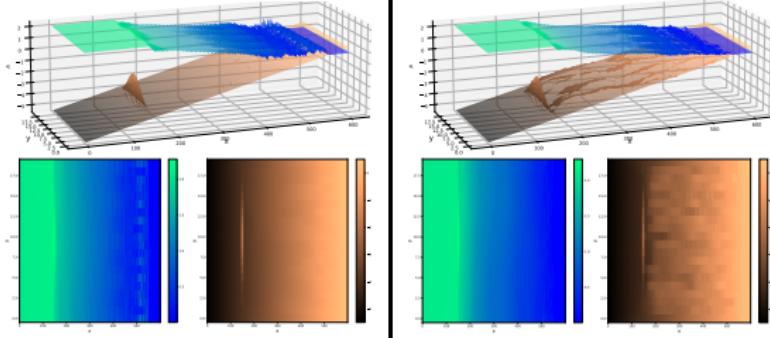
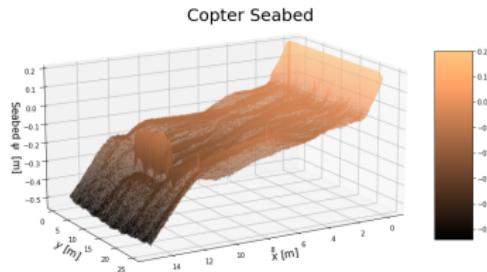


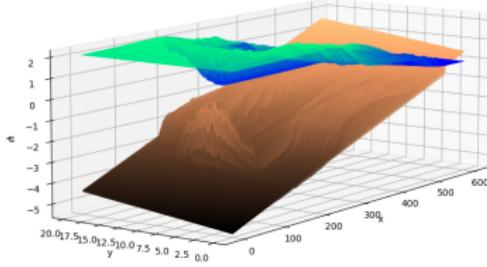
Figure 31: Simulation 2D avec OptiMorph.

Comparaison qualitative avec l'expérience Copter

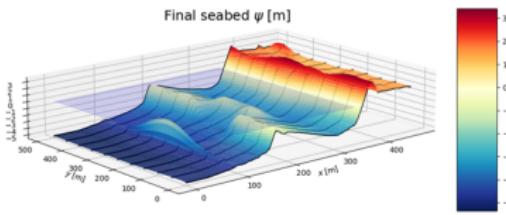
- Expérience Copter:



- OptiMorph 2D:



- OptiMorph multi-1D:



- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses par minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

Conclusion et Perspectives

Conclusion:

- Un modèle générique à création de barre sédimentaire,
- Un modèle numériquement stable,
- Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme,
- Des cas de benchmark validés.

Perspectives:

- Améliorer l'approche de transport latéral,
- Continuer la validation insitu (accrétion, 2D,...),
- Intégrer OptiMorph dans un modèle classique (XBeach ?),
- Étoffer le modèle 2D,
- Utiliser l'approche d'Hadamard dans un contexte différent.