

Étudiant : Arthur LAURENT, Jules VERBRUGGHE, Ronan DUPONT

COMPTE RENDUE DE TP COUCHE LIMITE TURBULENTE

TRAVAUX PRATIQUE DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

Enseignant référent : Damien SOUS, Professeur des universités.

Année Universitaire 2019/2020

1 Introduction

Au cours de ce TP nous avons étudié la couche limite. Cette zone correspond à la couche de transition entre un écoulement permanent non perturbé et une paroi. En effet un fluide visqueux va être ralenti et perturbé par les frottements d'une paroi. Le cas ici étudié est un écoulement en canal avec une surface libre et un fond rugueux.

2 Formulation théorique

2.1 Décomposition turbulence

Question 1

On veut d'abord simplifier le problème. En effet l'écoulement est réalisé dans un canal de longueur (L) beaucoup plus grande que les données du problèmes (largeur, hauteur). On va donc négliger toute les dérivé par rapport à x . $\frac{\partial}{\partial x} = 0$.

En suite l'écoulement est permanent et unidirectionnel selon x . On a donc : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $v = 0, w = 0$

Question 2

Le tenseur de Reynolds est définie par $R = \overline{u'_i u'_j}$, on a donc la matrice :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

On calcul ensuite la divergence de ce tenseur, et après simplification on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Question 3

On a ensuite simplifiée l'équation de Naviez-Stokes. On néglige toutes les dérivés de temps et les dérivé de la vitesse par rapport à x et y . On rappelle que $v = 0$ et $w = 0$. On obitent donc :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} - g - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (4)$$

Or d'après l'équation : $R_{ij} = -2\nu_t \overline{d_{ij}} + \frac{2}{3}k\delta_{ij}$ on a une nouvelle expression de $\vec{\nabla} \cdot \vec{R}$.

Ainsi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} -\nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

On trouve bien le résultat cherché :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\bar{u}}{\partial z} + \nu_t \frac{\bar{u}}{\partial z} \right) \quad (6)$$

Question 4

Pour calculer la longueur du mélange l_m on reprend l'équation de ν_t .

$$\begin{aligned} \nu_t &= l_m^2 \sqrt{2d_{ij}d_{ij}} \\ &= l_m^2 \sqrt{2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \\ &= l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \end{aligned}$$

2.2 Couche logarithmique

Question 5

L'équation 6 montre que le gradient de pression longitudinale dépend seulement de la dérivé seconde de \bar{u} par rapport à z . Il faut donc mesurer la pression à différente altitude z et obtenir un profil de vitesse.

Question 6

On a l'expression de la contrainte tangentielle : $\tau(z) = \rho \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - u'w' \right)$ Or dans l'équation 4 on reconnais $\tau(z)$ et G_p .

$$0 = \frac{1}{\rho} G_p + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (7)$$

On intègre l'équation 7 entre 0 et z .

$$\tau(z) = -G_p z + cst \quad \text{avec} \quad cst = \tau_0 \quad (8)$$

Question 7

On calcul ensuite u_* . On sait que $u_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}$

$$u_* = \nu \frac{\bar{u}}{\partial z} + \nu_t \frac{\bar{u}}{\partial z} \quad (9)$$

$$= \nu \frac{\bar{u}}{\partial z} + l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\bar{u}}{\partial z} \quad (10)$$

$$= \left(\nu = k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \right) \partial \frac{\bar{u}}{\partial z} \quad (11)$$

Question 8

On veut ensuite calculer le profil de vitesse sans les effets visqueux donc.
 $\nu \ll k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$.

$$\begin{aligned} u_* &= kz \frac{\bar{u}}{\partial z} \\ \iff \int \frac{u_*}{kz} dz &= \int \partial \bar{u} \\ \iff \bar{u} &= \frac{u_*}{k} \ln(z) + cst \\ \frac{\bar{u}}{u_*} &= \frac{1}{k} \ln(z) + cst = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \xi \end{aligned}$$

Avec $cst = -\frac{1}{k} \ln(\delta) + \xi$ on a bien :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \xi \quad (12)$$

Question 9

— Paroi lisse :

Comme dans la question précédente on intègre l'équation mais entre z_v et z .

$$\begin{aligned} \int_{z_v}^z \frac{u_*}{kz} dz &= \int_{z_v}^z \partial \bar{u} \\ \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_v}\right) &= \overline{u(z)} - \overline{u(z_v)} \end{aligned}$$

On prend $z_v = 11 \frac{\nu}{u_*}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln\left(\frac{zu_*}{11\nu}\right) &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \xi + 11 \\ \frac{1}{k} \ln\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) - \frac{\ln(11)}{k} + 11 &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \xi \end{aligned} \quad (13)$$

Par identification on a bien $\delta_{lisse} = \frac{\nu}{u_{star}} = \delta$ et $\xi_{lisse} = -\frac{\ln(11)}{k} + 11 \approx 5.2$.

Question 10

— Paroi rugueuse :

Comme avec la paroi lisse on intègre la même équation mais entre z_o et z

$$\int_{z_0}^z \frac{u_*}{kz} dz = \int_{z_0}^z \partial \bar{u}$$

$$\frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = \overline{u(z)} - 0 \quad \text{car} \quad u(z_0) = 0$$

On a $z_0 = \frac{k_s}{33}$.

$$\frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + \frac{\ln(33)}{k} = \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \xi \quad (14)$$

De même on identifie. $\delta_{rugs} = k_s$ et $\xi_{rugs} = \frac{\ln(33)}{k}$.

3 Partie expérimentale :

Nous devons dans un premier temps extraire toutes les données. Pour ce faire, nous créons des matrices de la manière suivante.

```
for k=1:24
    fichier=load(['CL_' num2str(k) '.vna']);
    T(:,k)=fichier(1:2001,2);
    X(:,k)=-fichier(1:2001,5);
    Y(:,k)=fichier(1:2001,6);
    Z(:,k)=fichier(1:2001,7);
    VX(:,k)=fichier(1:2001,17);
    VY(:,k)=fichier(1:2001,18);
    VZ(:,k)=fichier(1:2001,19);
end
```

Question 11

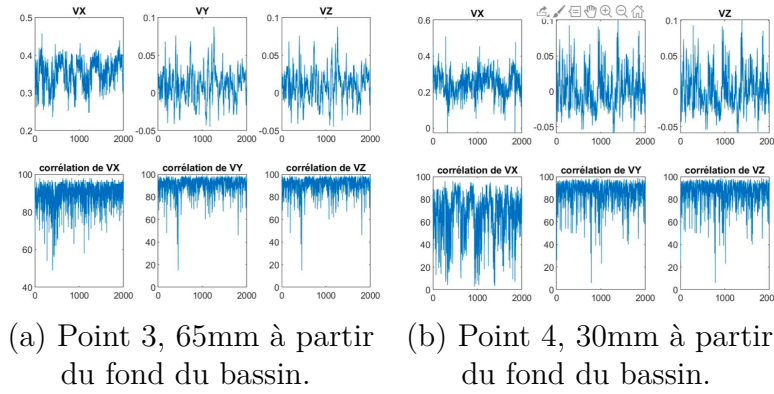
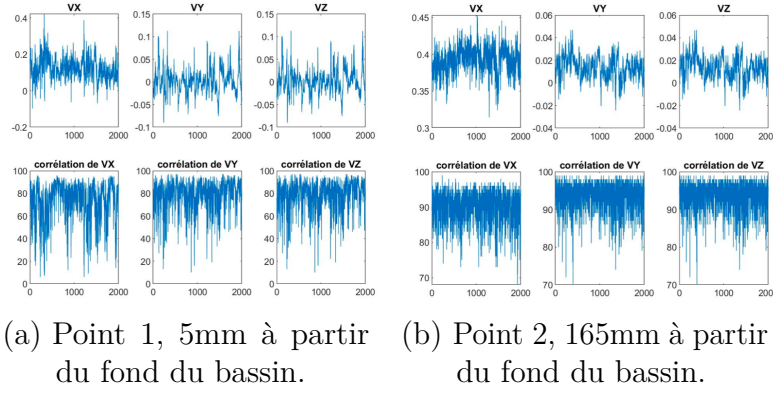


FIGURE 2 – Profil vertical es trois composante de la vitesse au cours du temps.

On considère que si une mesure a une corrélation inférieure à 80% la mesure ne peut pas être considérée comme fiable. En effet, si on regarde plus dans le détail, on remarque qu'il y a un réel lien entre la corrélation et le profil de vitesse. Or sur nos graphiques on remarque que bien souvent la corrélation est inférieure à ce seuil. Afin d'avoir des valeurs de nos vitesses plus fiables il est donc nécessaire d'appliquer un filtre permettant de ne pas prendre en compte les valeurs de vitesse ayant une corrélation inférieure à 80%. Pour ce faire on implémente une boucle qui lorsque la corrélation est inférieure à 80% attribut à la vitesse associée la valeur NaN, puis dans une seconde boucle on écrit dans un vecteur les vitesses en ignorant les NaN.

Question 12

Pour obtenir les profils moyens, on effectue plusieurs boucles en utilisant la fonction ISNAN de Matlab nous permettant de ne pas prendre en compte les valeurs dont la corrélation est inférieure à 80%.

On remarque sur les graphiques précédents que les vitesses moyennes selon les

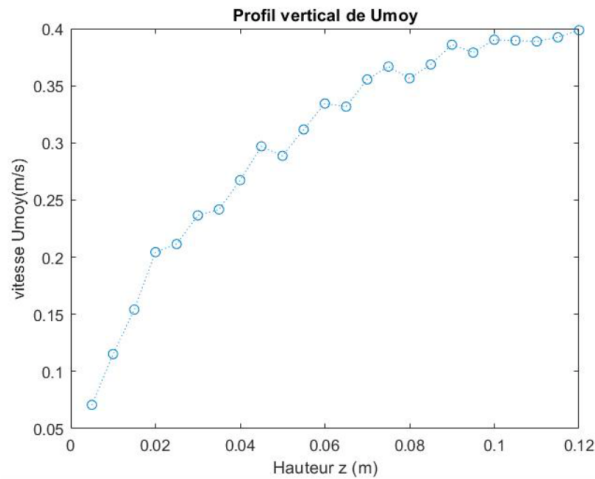


FIGURE 3 – Profil vertical de u_{moy}

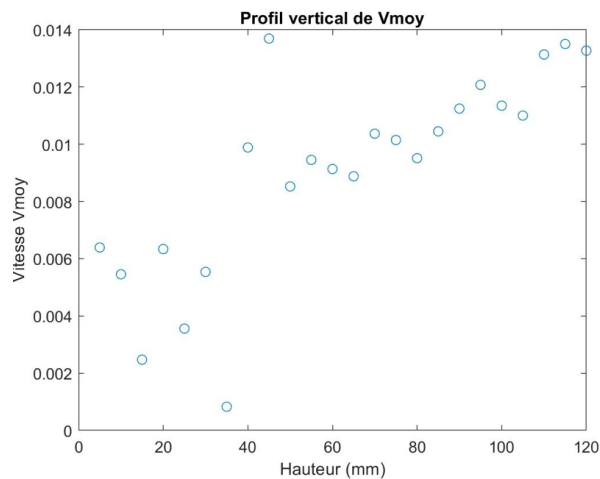
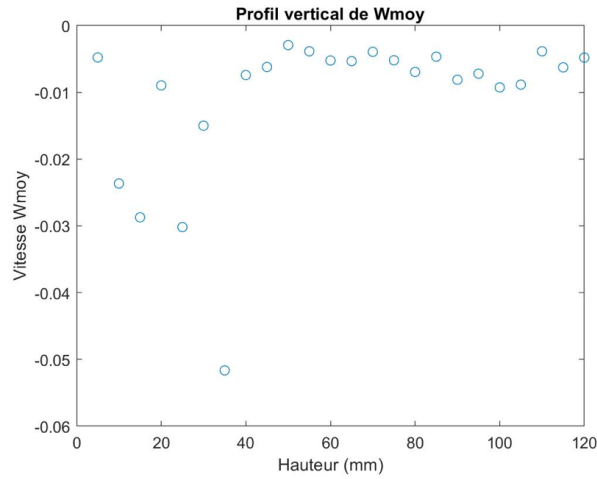
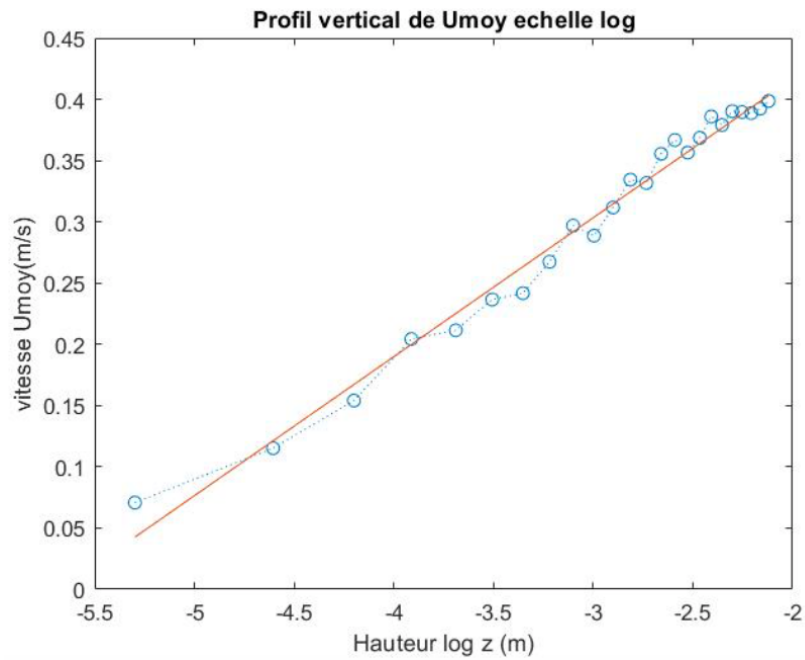


FIGURE 4 – Profil vertical de v_{moy}

axes Y et Z sont de l'ordre de $10^{-2}m/s$ alors que la valeur des vitesses moyenne le long de l'axe X (celui de l'écoulement) sont de l'ordre de $10^{-1}m/s$. On peut donc considérer que les vitesses selon les axes Y et Z sont négligeables devant la

FIGURE 5 – Profil vertical de w_{moy}

vitesse de l'écoulement. Afin d'évaluer la hauteur de la couche limite on réalise une régression linéaire en prenant la hauteur en échelle logarithmique à l'aide de la fonction régression de Matlab. Nous trouvons les coefficients $a = 0.1134$, $b = 0.6436$.

FIGURE 6 – Profil vertical de u_{moy} en échelle logarithmique

Question 13

Grâce au graphique on remarque que la couche limite est d'environ 10cm. Cette régression linéaire nous permet également de déterminer k_s puis z_0 . En effet :

$$\overline{u(z)} = \frac{u_*}{k} \ln(z) - \frac{u_*}{k} \ln(k_s) + \xi u_* = a \ln(z) + b \quad (15)$$

On a donc par identification. $a = \frac{u_*}{k}$ et $b = -\frac{u_*}{k} \ln(k_s) + \xi u_*$.

On trouve $u_* = 0.0465$ m/s, $k_s = \exp(\frac{8.5 * u_* - b}{a}) = 0.1120$ m et donc $z_0 = \frac{k_s}{33} = 0.0034$ m. Les rugosités sur le fond du canal étant de l'ordre du centimètre on en conclut que nos calculs sont proches de la réalité. Nous sommes alors en mesure de déterminer la couche dans laquelle le fluide est immobile qui est d'une épaisseur de 3.4 mm.

Question 14

On remarque que les valeurs de $u'v'$ et $u'w'$ sont faibles de l'ordre de 10^{-4} .

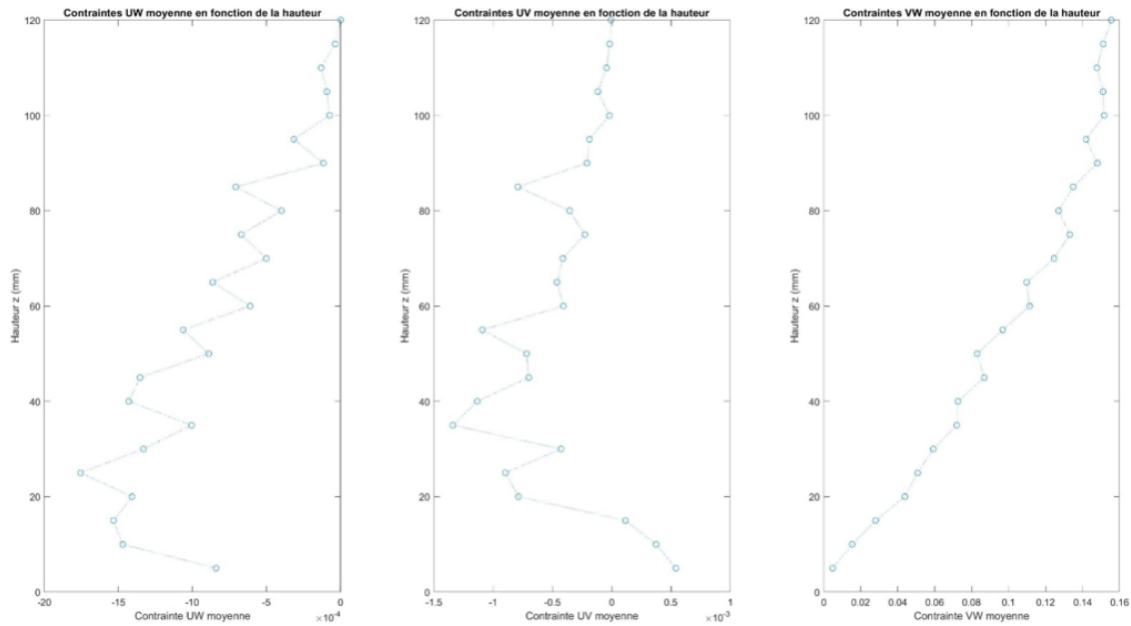


FIGURE 7 – Contrainte moyenne en fonction de la hauteur.

Question 15

En traçant le profil vertical de contrainte tangentielle : On remarque la zone rouge

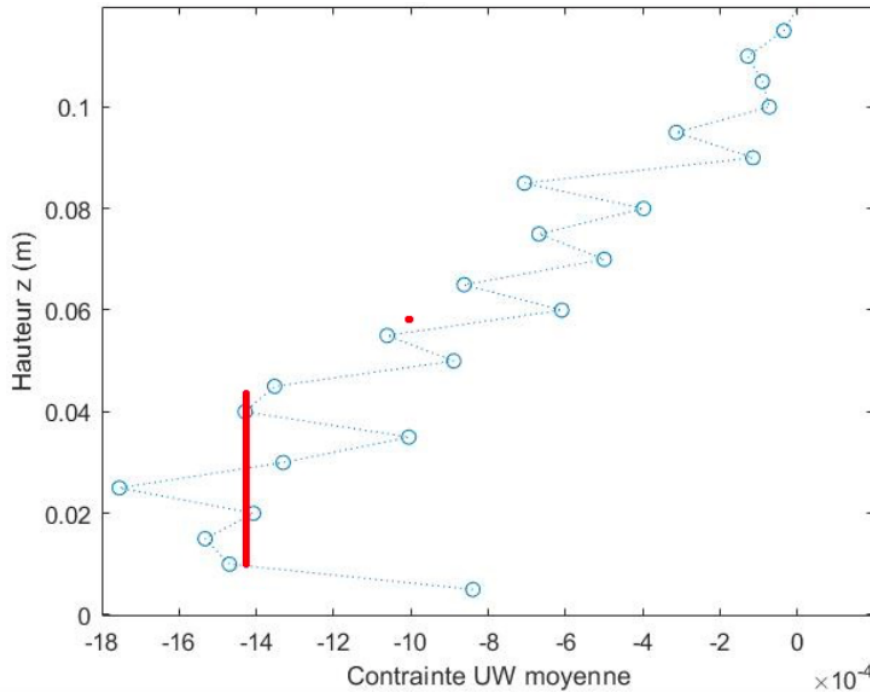


FIGURE 8 – Contrainte moyenne de uw en fonction de la hauteur.

à une contrainte égale à $14 \cdot 10^{-4}$. Cette contrainte caractéristique correspond à u_{\star}^2 , on en déduit $u_{\star} = 0.0465$. Ceci est assez proche de la valeur trouvée en question 13. On peut donc valider l'hypothèse de la contrainte constante.

4 Conclusion

Durant ce TP, nous avons pu mesurer la couche limite selon différentes approches. Nous avons pu mesurer u^* nous permettant d'en déduire la longueur caractéristique z_0 de deux manières différentes. Nous l'avons mesuré à l'aide du profil de vertical U_{moy} ainsi qu'à l'aide des contraintes de Reynold.

On remarque que la méthode de mesure à l'aide du profil vertical est plus précise que celle des contraintes de Reynold. En effet, nous avons des résultats plus « propres » pour cette première approches.

Dans les deux cas, nos résultats sont cohérents.