

PROJET DE VOLUMES FINIS 2

# MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS À DEUX FLUIDES IMMISCIBLES EN 1D

novembre 2020

CROGUENNEC Guillaume

DUPONT Ronan

**Enseignant : M. Ersoy**

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation du phénomène physique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>4</b>
3.1	Problème de Riemann . . . . .	4
3.2	Volumes finis . . . . .	5
3.3	Godunov . . . . .	5
3.4	Lax-Friedrichs . . . . .	6
3.5	HLLC . . . . .	6
3.6	Pas de temps adaptatif . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>7</b>
4.1	Différents temps finaux . . . . .	7
4.2	Différentes discrétisations n . . . . .	9
4.3	Différentes conditions CFL . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>12</b>
7.1	Codes . . . . .	12
7.2	Preuve nécessaire à la méthode numérique de Godunov . . . . .	13

## Nomenclature

$\delta t$  pas temporel

$\delta x$  pas spatial

$\rho_{air/eau}$  Masse volumique en l'eau/air :  $\rho_{eau} = 1025 kg/m^3$   $\rho_{air} = 1 kg/m^3$ .

$\varphi$  Fonction indicatrice : vaut 0 dans l'eau et 1 dans l'air.

$c_0$  Célérité du son dans l'eau et l'air. Ici fixée à  $20 m/s$  pour les raisons évoquées dans [2].

$F_{i\pm 1/2}$  Flux de gauche/droite.

$i$  indice du point de discrétisation spatiale

$m$  Masse volumique en  $kg/m^3$ .

$n$  indice du numéro d'itération

$p$  Pression en  $Pa$  a pour expression  $P(\varphi, m) = c_0^2(m - (\rho_{air}\varphi + (1 - \varphi)\rho_{eau}))$ .

$U$  Vecteur conservatif du problème EBF :  $U = \begin{pmatrix} m \\ mu \\ m\varphi \end{pmatrix}$ .

$u$  Vitesse en  $m/s$ .

$U_i^n$  Valeur de  $U$  au point de discrétisation  $i$  à l'itération  $n$  :  $U_i^n = U(x_i, t_n)$

$W$  Vecteur non-conservatif du problème EBF :  $W = \begin{pmatrix} m \\ u \\ \varphi \end{pmatrix}$ .

$W_L^*$  Vecteur de solution exacte à gauche du problème non-conservatif EBF sur une interface :  
 $W_L^* = \begin{pmatrix} m_L^* \\ u_L^* \\ \varphi_L^* \end{pmatrix}$ .

$W_R^*$  Vecteur de solution exacte à droite du problème non-conservatif EBF sur une interface :  
 $W_R^* = \begin{pmatrix} m_R^* \\ u_R^* \\ \varphi_R^* \end{pmatrix}$ .

$W_L$  Vecteur non-conservatif du problème EBF au point de discrétisation à gauche de l'interface où on fait la résolution du problème de Riemann :  $W_L = \begin{pmatrix} m_L \\ u_L \\ \varphi_L \end{pmatrix}$ .

$W_R$  Vecteur non-conservatif du problème EBF au point de discrétisation à droite de l'interface où on fait la résolution du problème de Riemann :  $W_R = \begin{pmatrix} m_R \\ u_R \\ \varphi_R \end{pmatrix}$ .

## 1 Introduction

Les écoulements à deux fluides immiscibles représentent l'ensemble des problèmes de la mécanique des fluides où deux fluides interagissent ensemble sans pouvoir se mélanger. Cela représente donc une grande diversité de problèmes, que l'on retrouve souvent dans l'industrie : pour la rotation d'une hélice pas totalement immergée, un turbo-propulseur, un réacteur nucléaire, etc... La compréhension et la résolution de ces problèmes est donc primordiale. Pour cela, le meilleur moyen est de les modéliser puis de résoudre numériquement ces modèles afin de prévoir leur évolution.

On modélise donc le problème d'un écoulement à fluides immiscibles grâce aux équations de Navier-Stokes compressibles, constituées des conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour ce travail une seule dimension spatiale est nécessaire, ce qui limite donc ces équations au nombre de trois. Cependant, dans ce cas d'immiscibilité, une discontinuité va apparaître au niveau de l'interface entre les fluides. C'est pour cela que pour l'on utilise le schéma numérique de Godunov pour calculer les flux dont on a besoin pour la méthode numérique des volumes finis, qui elle s'impose par construction.

## 2 Modélisation du phénomène physique

On s'intéresse précisément aux problèmes d'écoulements à deux fluides immiscibles en une seule dimension spatiale, mais cela est déjà très intéressant car c'est un premier pas vers ceux avec plusieurs dimensions spatiales. De plus, même un modèle à une dimension spatiale peut être appliqué, par exemple à ce qu'il se passe dans un tuyau fin et infiniment long dont les interactions avec les parois sont négligées.

Dans la suite, on va considérer par défaut que les deux fluides immiscibles considérés sont l'eau et l'air, car ils sont les plus présents dans les problèmes industriels.

L'approche choisie pour modéliser ces écoulements est de considérer qu'il n'y a pas un domaine avec les deux fluides, mais deux domaines distincts avec chaque fluide dans un des deux. Ces deux domaines sont séparés par une interface infiniment mince et supposée sans masse. Grâce à cette hypothèse il est possible d'appliquer les équations de Navier-Stokes compressibles à chacun des deux domaines. Cela permet de s'affranchir d'une description trop locale des équations mais néanmoins de garder la possibilité d'étudier des écoulements où les deux fluides ont des comportements très différents.

Ce modèle serait donc décrit par six équations, car il y aurait deux système d'équations de Navier-Stokes. Mais en supposant que la loi de pression de l'air est la même que celle de l'eau, on peut obtenir deux domaines régis par les mêmes équations, mais simplement avec des valeurs initiales différentes (pour leur densité ou leur vitesse). Cela permet donc de modéliser le problème avec seulement trois équations. On a donc la même loi de pression pour les deux domaines :

$$P(\varphi, m) = c_0^2(m - \rho_{air}\varphi + (\varphi - 1)\rho_{eau}).$$

On obtient donc un modèle numérique bien plus simple à résoudre, et qui demande donc beaucoup moins de temps de calcul. Cependant, en considérant que l'air a la même loi de pression que l'eau on obtient un modèle dont le résultat sera plus loin de la réalité que dans le cas où on garderait des lois de pression différentes.

On obtient donc un seul système d'équations de Navier-Stokes, aussi appelés équations d'Euler bi-fluides car elles régissent le comportement d'un domaine constitué de deux fluides, et cela en description eulérienne. C'est-à-dire dans un cas où on utilise un champ de vitesse qui associe à chaque point un vecteur vitesse.

La première équation du système est celle de la conservation de la masse. Elle traduit le fait que toute variation de masse à un endroit (dérivée temporelle) vaut la masse entrante moins la masse

sortante (dérivée spatiale). On a en effet un terme source nul, car aucune masse n'est produite ni n'est détruite.

$$\partial_t m + \partial_x(mu) = 0.$$

La deuxième équation du système est celle de la conservation de la quantité de mouvement. Elle découle de principe fondamental de la dynamique selon lequel la dérivée temporelle de la quantité de mouvement de quelque chose vaut la somme des forces qui lui sont appliquées. Dans le cas étudié, les contraintes visqueuses sont négligées, et le terme source est nul car aucune force volumique n'est appliquée.

$$\partial_t(mu) + \partial_x(mu^2 + p(m, \varphi)) = 0.$$

La troisième équation du système est celle de la conservation de l'énergie. Dans le cas étudié, on rappelle que les contraintes visqueuses sont négligées, et le terme source est nul car toujours aucune force volumique n'est appliquée.

$$\partial_t(m\varphi) + \partial_x(mu\varphi) = 0.$$

### 3 Résolution numérique

On se retrouve donc avec le système des trois équations d'Euler bi-fluides à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t m + \partial_x(mu) = 0, \\ \partial_t(mu) + \partial_x(mu^2 + p(m, \varphi)) = 0, \\ \partial_t(m\varphi) + \partial_x(mu\varphi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Pour les conditions de bords on utilise des conditions de Neumann  $\frac{\partial}{\partial n} = 0$  avec une approximation en différences finies d'ordre 1 en égalisant simplement les termes de bords avec les termes adjacents.

#### 3.1 Problème de Riemann

On peut ramener ce système d'équation à un problème de Riemann en posant comme inconnue un vecteur  $U$  et donc comme flux un vecteur  $F(U)$  tels que :

$$U = \begin{pmatrix} m \\ mu \\ m\varphi \end{pmatrix} \text{ et } F(U) = \begin{pmatrix} mu \\ mu^2 + p(m, \varphi) \\ mu\varphi \end{pmatrix}.$$

En effet, cela nous ramène bien à l'équation matricielle d'un problème de Riemann sous forme conservative :

$$U_t + (F(U))_x = 0. \quad (2)$$

Ceci est la forme conservative du problème de Riemann, c'est-à-dire la qu'en résolvant numériquement on va avoir nos grandeurs (masse, quantité de mouvement et énergie) qui vont se conserver. Or, on sait grâce à GOLAY que pour utiliser la méthode numérique de Godunov, la forme conservative n'est pas adaptée, et qu'il faut donc utiliser la forme non-conservative [1].

Pour cela, on pose donc comme inconnue un vecteur  $W$  et donc une matrice jacobienne des flux  $A(W)$  tels que :

$$W = \begin{pmatrix} m \\ u \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } A(W) = \begin{pmatrix} u & m & 0 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial m} & u & \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui ramène bien notre système d'équation à l'équation matricielle d'un problème de Riemann sous forme non-conservative :

$$W_t + A(W)W_x = 0. \quad (3)$$

### 3.2 Volumes finis

Par construction, la méthode numérique la plus adaptée pour résoudre ce problème de Riemann est celle des volumes finis. Le principe de cette méthode est que la valeur d'une grandeur (qui n'a pas de terme source) à un endroit vaut ce qu'elle valait à l'instant d'avant, plus le flux discret entrant et moins le flux discret sortant. En appliquant cette méthode à la forme conservative du problème de Riemann on obtient donc le schéma numérique suivant :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left( F_{i+1/2}(U_i^n, U_{i+1}^n) - F_{i-1/2}(U_{i-1}^n, U_i^n) \right). \quad (4)$$

Pour le résoudre, il faut donc choisir une deuxième méthode numérique afin d'obtenir les valeurs des flux discrets.

### 3.3 Godunov

Pour résoudre ces flux discrets, on utilise dans un premier temps la méthode numérique de Godunov car on sait qu'il n'y en a pas de plus précise. Elle consiste à utiliser la résolution exacte du problème de Riemann sur chaque interface (entre chaque point de discrétisation) une disjonction de cas. En effet, on connaît grâce à Godunov *et al.* la solution exacte dans ce cas, et elle peut bien être exprimée par une disjonction de cas.

On rappelle que pour le schéma numérique de Godunov, il est nécessaire d'utiliser les variables non-conservatives, bien que ce soient les variables conservatives utilisés dans le schéma numérique des volumes finis.

Pour chaque itération du programme, il est donc nécessaire de transformer les  $U_i$  en  $W_i$  pour calculer les nouveaux  $W_i$ , puis les retransformer en nouveaux  $U_i$  afin de calculer les flux discrets de la méthode des volumes finis.

Pour calculer la solution, on sait grâce à Godunov *et al.* ce qu'il faut résoudre pour avoir les valeurs de  $W_L^*$  et  $W_R^*$  qui vont servir, en étant transformés en  $U$ , à calculer un flux discret. On a donc :

$$W_L^* = \begin{pmatrix} m_L^* \\ u_L^* \\ \varphi_L^* \end{pmatrix} \text{ et } W_R^* = \begin{pmatrix} m_R^* \\ u_R^* \\ \varphi_R^* \end{pmatrix}.$$

Or on sait que  $\varphi_L^* = \varphi_L$  et  $\varphi_R^* = \varphi_R$  et  $u_L^* = u_R^*$ .

Et en posant  $\Psi(m^*, m, \varphi) = \begin{cases} c_0 \ln(\frac{m^*}{m}) & \text{si } m^* < m \\ \sqrt{\frac{(m^*-m)(\varphi^*-\varphi)}{mm^*}} & \text{sinon} \end{cases}$

on a  $\boxed{u_L^* = u_L - \Psi(m_L^*, m_L, \varphi_L)}$  et  $\boxed{u_R^* = u_R - \Psi(m_R^*, m_R, \varphi_R)}$ .

Donc avec les trois dernières égalités on obtient l'équation :

$$u_R - u_L + \Psi(m_R^*, m_R, \varphi_R) + \Psi(m_L^*, m_L, \varphi_L) = 0. \quad (5)$$

De plus on sait que :

$$m_R^* = m_L^* + (\rho_{air} + \rho_{eau})(\rho_R - \rho_L).$$

Avec cette égalité, en utilisant (5) on obtient une seule inconnue à notre problème. Avec  $\Psi$  ayant deux formulations différentes suivant les valeurs de ses variables, on se retrouve avec une équation qui se résout différemment sur quatre domaines distincts. Néanmoins, si sur chacun de ces domaines elle admet obligatoirement une unique solution, alors il est bien possible d'obtenir les valeurs de  $W_L^*$  et  $W_R^*$  à partir de sa résolution. On montre en annexe 7.2 que c'est bien le cas, et que la méthode de Godunov est donc bien réalisable.

### 3.4 Lax-Friedrichs

Dans un deuxième temps, on choisit d'utiliser le schéma numérique de Lax-Friedrichs pour calculer les flux discrets, car il est le plus instinctif. Et pourtant bien souvent le moins précis.

On a donc les flux discrets calculés avec cette formule :

$$F_{i+1/2}(U_i, U_{i+1}) = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} (U_{i+1} - U_i). \quad (6)$$

Et en reprenant l'expression du flux du problème de Riemann, on obtient comme flux discrets pour la méthode des volumes finis :

$$F_{i+1/2}(U_i, U_{i+1}) = \left( \begin{array}{c} \frac{(mu)_{i+1} + (mu)_i}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} (m_{i+1} - m_i) \\ \frac{(mu^2 + p(m, \varphi))_{i+1} + ((mu^2 + p(m, \varphi)))_i}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} ((mu)_{i+1} - (mu)_i) \\ \frac{(mu\varphi)_i + (mu\varphi)_{i+1}}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} ((m\varphi)_{i+1} - (m\varphi)_i) \end{array} \right)$$

et

$$F_{i-1/2}(U_{i-1}, U_i) = \left( \begin{array}{c} \frac{(mu)_{i-1} + (mu)_i}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} (m_i - m_{i-1}) \\ \frac{(mu^2 + p(m, \varphi))_{i-1} + ((mu^2 + p(m, \varphi)))_i}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} ((mu)_i - (mu)_{i-1}) \\ \frac{(mu\varphi)_{i-1} + (mu\varphi)_i}{2} - \frac{\delta_x}{2\delta_t} ((m\varphi)_i - (m\varphi)_{i-1}) \end{array} \right).$$

L'avantage de ce schéma numérique est qu'il demande beaucoup moins de lignes de code pour son utilisation.

### 3.5 HLLC

Il faut savoir qu'il est possible de pallier le problème de l'énorme coût de calcul de la méthode numérique de Godunov, tout en gardant une précision égale. En effet son coût en calcul est dû à la nécessité de résoudre le problème de Riemann sur chaque interface à chaque pas de temps. Mais Harten *et al.* proposent de s'affranchir de ce problème grâce aux relations intégrales à travers les différentes ondes considérées [4]. Cela a donné naissance à la méthode numérique dite HLLC, des premières lettres de chacun de ses inventeurs.

### 3.6 Pas de temps adaptatif

Les schémas précédents étant explicites, il y a une CFL qui vient restreindre le pas de temps en fonction du pas spatial et des valeurs de  $u$ . Cela est assez logique car si le pas de temps est trop grand, alors ce qu'il y a en  $x_i$  va avoir un impact sur ce qu'il y aura en  $x_{i+2}$ , ce qui n'est pas pris en compte par nos méthodes numériques. Pour pallier cela, on doit donc avoir notre pas de temps inférieur à notre pas spatial divisé par la vitesse maximale en absolu plus la célérité [5].

On arrive donc à une condition CFL sous la forme :  $\boxed{\max |\lambda_i(w)| \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1}$ .

On pose donc :  $\delta t = \frac{\alpha \delta x}{(\max |u_i| + c_0)}$ .

Cela permet d'avoir un pas de temps plus ou moins grand tout en respectant la CFL en choisissant des valeurs de  $\alpha$  entre 0 et 1 exclus.

## 4 Résultats

Dans cette partie, on s'intéresse aux résultats obtenues avec la méthode numérique de Godunov, car c'est la plus précise. On compare dans un premier temps les résultats en faisant varier plusieurs paramètres comme le temps final  $Tf$ , la discrétisation spatiale  $n$  ainsi que la condition CFL sur un cas test simple. On prend comme cas test un domaine d'eau sur  $x=[0,0.5]$  avec une vitesse de  $1m/s$  et un domaine d'air sur  $x=[0.5,1]$  sans vitesse.

### 4.1 Différents temps finaux

On affiche les différentes variables  $m$ ,  $u$ ,  $P$ ,  $\varphi$  en fonction des différents temps finaux :  $Tf = 0s$ ,  $Tf = 0.1s$ ,  $Tf = 0.2s$ ,  $Tf = 0.3s$ , sur différentes discrétisations :  $n = 20$ ,  $n = 50$ ,  $n = 500$ ,  $n = 2000$ .

Pour le premier résultat figure 1, on trace à  $n = 20$ . On remarque que globalement les allures sont les mêmes quelque soit le  $Tf$ . Pour la pression, on remarque un saut au niveau de l'interface eau/air quelque soit le temps final. Plus le temps final est grand, plus le saut est grand. De plus les oscillations présentes pourraient être enlevées en utilisant la méthode Abgrall d'après [2].

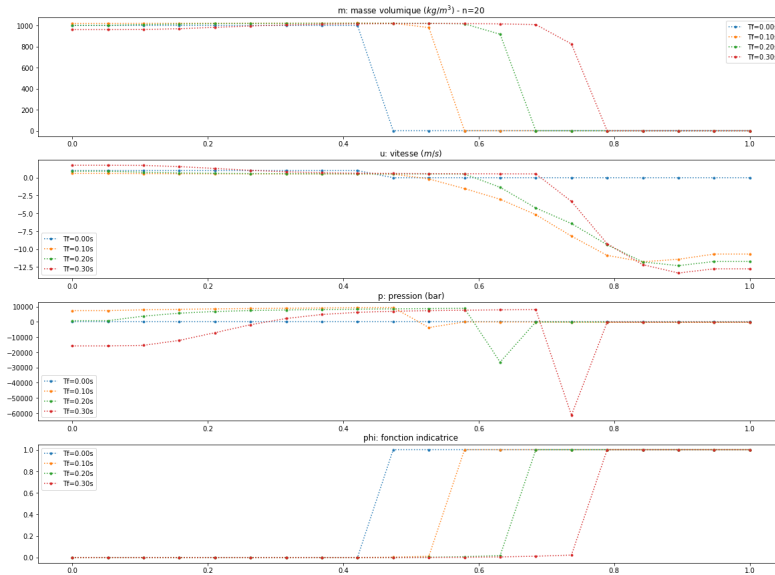
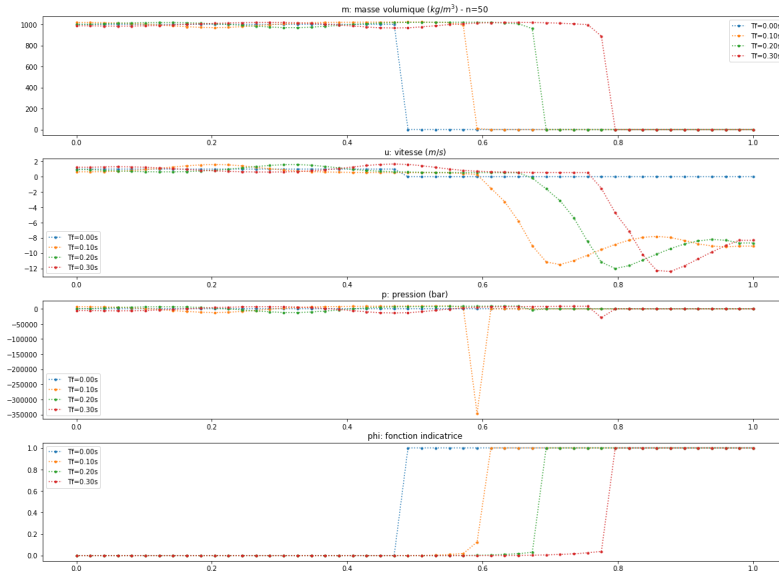


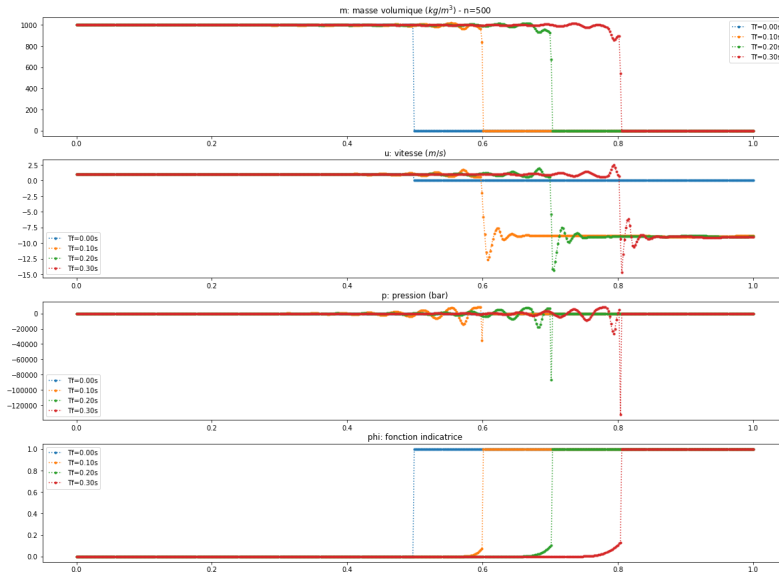
FIGURE 1 – Variation des temps finaux -  $n = 20$  - CFL=0.7

On trace ensuite les solutions figure 2 pour  $n = 50$  figure et on remarque que les allures sont les mêmes. Pour la pression on remarque un saut bien plus grand que les autres au niveau de  $Tf = 0.1s$ . Globalement les pentes sur  $m$  et  $u$  sont plus verticales sur la figure 2 que la figure 1. Augmenter la discrétisation améliore donc bien la précision de modèle.



FIGURE 2 – Variation des temps finaux -  $n = 50$  - CFL=0.7

On trace ensuite les solutions figure 3 pour  $n = 500$ . On remarque les mêmes choses que précédemment, la seule différence est que la précision est meilleure au niveau de l'interface sauf que la **dispersion** est de plus en plus forte (en fonction de  $n$ ) au niveau de cette interface.

FIGURE 3 – Variation des temps finaux -  $n = 500$  - CFL=0.7

On trace ensuite les solutions figure 4 pour  $n = 2000$ . Et on observe toujours de fortes oscillations au niveau de l'interface.

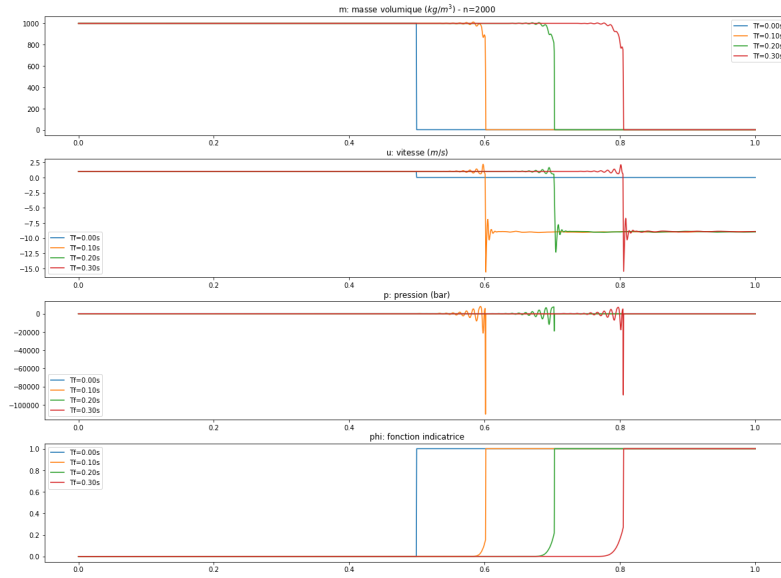


FIGURE 4 – Variation des temps finaux -  $n = 2000$  - CFL=0.7

## 4.2 Différentes discrétisations $n$

On superpose ensuite les tracés  $m$ ,  $u$ ,  $P$ ,  $\varphi$  en faisant varier la discrétisation  $n$ . La CFL est fixée à 0.7 et le temps final à 0.4s.

On obtient 5 avec  $n = 20, 50, 200, 1000$ .

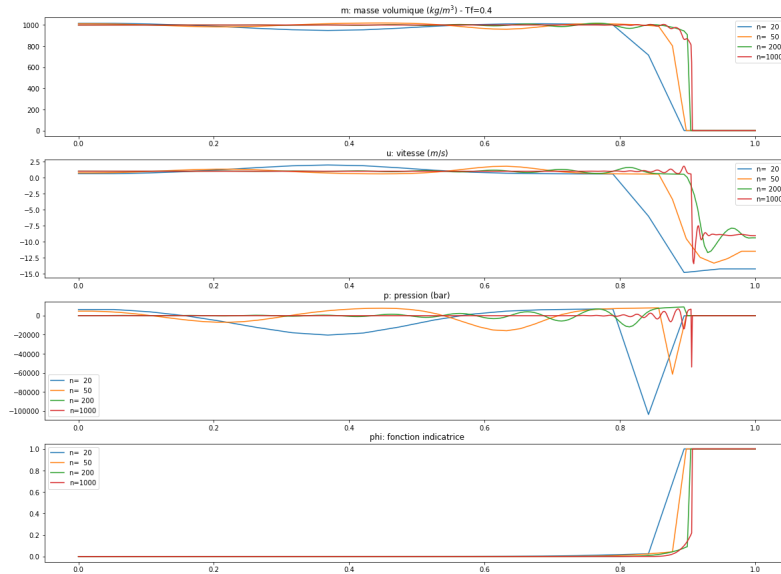


FIGURE 5 – Variation des discrétisations  $n$  avec une condition de CFL=0.7 Tf=0.4s

On remarque qu'augmenter  $n$  augmente la précision au niveau de l'interface et diminue le saut de pression. Cependant pour un très grand  $n$ , on obtient une forte dispersion.

On trace ensuite les solutions figure 6 pour un  $n = 5000$ .

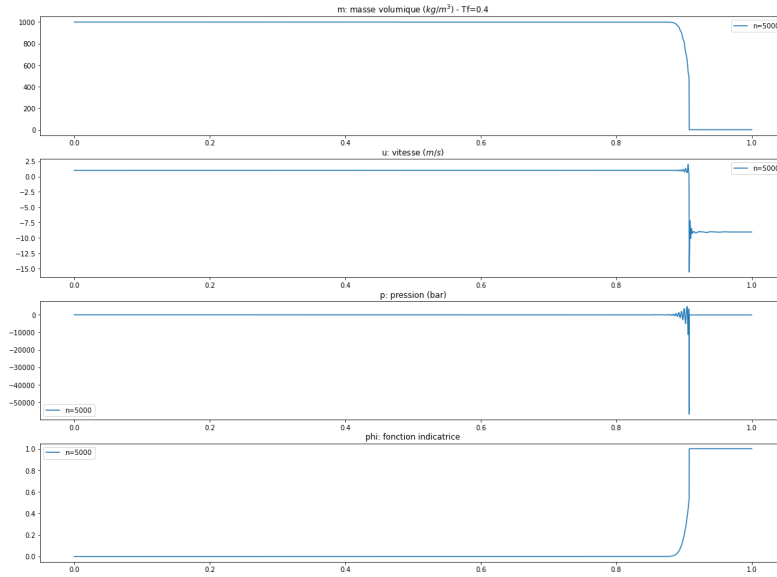


FIGURE 6 – Tf=0.4s n=5000 CFL=0.7

On a toujours de fortes oscillations au niveau de l'interface. De plus on peut observer un saut de pression à -50 000 Pa sur l'interface.

### 4.3 Différentes conditions CFL

On cherche ensuite à diminuer les oscillations sur l'interface. Pour cela, on essaye figure 7 de faire varier la condition CFL en posant Tf=0.1 et n=500.

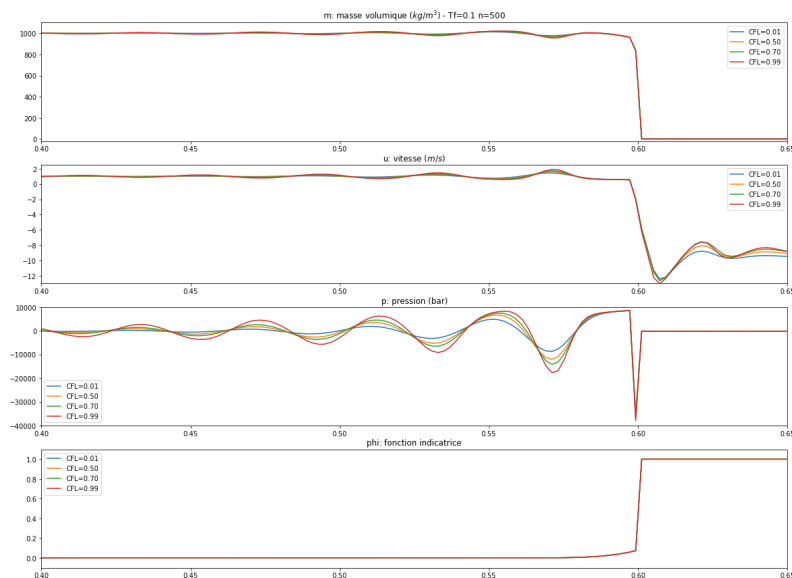


FIGURE 7 – Variation des CFL à Tf=0.1 n=500

Ainsi, plus la CFL est petite, moins il y a d'oscillations. Cependant, cela diminue les oscillations seulement sur la pression et la vitesse. Les différences ne sont pas flagrantes alors que le temps de calcul est lui bien plus long.

## 5 Conclusion

Pour ce problème d'écoulement bi-fluides immiscibles, on veut une résolution générale sur tous le domaine, mais ce qu'il s'y passe est très différent suivant l'endroit du domaine. L'idée des équations de Navier-Stokes couplées au fait d'imposer à l'air une loi de pression similaire à celle de l'eau dans le modèle numérique permet d'avoir à résoudre seulement trois équations, et pourtant les résultats obtenus restent cohérents malgré cette entorse à la physique. De plus, au vu des résultats obtenus, la méthode des volumes finis est bien adaptée à un tel problème, ainsi que celle de Godunov pour le calcul des flux discrets. Enfin, il est possible d'obtenir un coup de calcul moindre tout en préservant la précision en utilisant la méthode numérique HLLC pour calculer les flux numériques. De plus, il aurait été possible de vérifier la précision de nos résultats grâce au code de calcul de GOLAY (BBARM) en simulant les mêmes cas tests (toujours avec la méthode Godunov) afin de comparer les résultats.<sup>1</sup>

## 6 Bibliographie

### Références

- [1] FREDERIC GOLAY, PHILIPPE HELLUY. *Numerical schemes for low Mach wave breaking. International Journal of Computational Fluid Dynamics, Taylor & Francis*, 2007, 21 (2), pp.69-86.  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00139634/document>
- [2] FREDERIC GOLAY, MEHMET ERSOY, LYUDMYLA YUSHCHENKO, DAMIEN SOUS. *Block-based adaptive mesh refinement scheme using numerical density of entropy production for three-dimensional twofluid flows. International Journal of Computational Fluid Dynamics, Taylor & Francis*, 2015.  
[https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01226163/file/AMR\\_2014\\_v8.pdf](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01226163/file/AMR_2014_v8.pdf)
- [3] ANGELO MURRONE. *Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach*, 2004.  
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005951/document>
- [4] ERIC GONCALVÈS DA SILVA. *Résolution numérique des équations d'Euler 1D*, 2011.  
<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556980/document>
- [5] ERSOY MEHMET. *Cours de volumes finis (manuscrit)*, 2020.

---

1. Cela n'a pas été possible à cause de la fermeture temporaire de l'école

## 7 Annexe

### 7.1 Codes

```

!=====
program main
!=====
use foncBBAMR

! Declarations
implicit none
integer          :: i,j,k,n
real(kind=kind(0.d0)) :: dt,dx,Tf,t,c0,CFL,pair,peau,r,u,p,psi,alf
real(kind=kind(0.d0)), dimension(:,::),allocatable :: Un,Ud,Ug,Fg,Fd,W,Wg,Wd,Vp

n=500
dx=1.d0/(n-1)
t=0.d0
Tf=0.4
c0=20.d0
CFL=0.7 ! doit être inférieure à 1
pair=1.d0
peau=1000.d0
allocate(Un(n,3),Ug(n,3),Ud(n,3))
allocate(W(n,3),Wg(n,3),Wd(n,3))
allocate(Fg(n,3),Fd(n,3))

! ----- Corps du programme -----

DO i=1,n ! Conditions initiales
    if (i*dx<0.5) then
        Un(i,1)=peau !m
        Un(i,2)=peau !mu - Vitesse à 1m/s
        Un(i,3)=0.d0 !phi - Dans eau
    endif
    if (i*dx>=0.5) then
        Un(i,1)=pair !m
        Un(i,2)=0.d0 !mu - Vitesse nulle
        Un(i,3)=1.d0 !phi - Dans air
    endif
ENDDO

! Initialisation du pas de temps
dt=CFL*dx/maxval(abs(Un(:,2)/Un(:,1))+c0) !maxval de vect abs(ui) + c0

! Boucle de temps
DO WHILE (t<Tf)
    CALL U_to_W(Un,n,W) !Transforme U en W
    DO i=2,n-1
        !Flux i-1/2
        CALL riemisot(W(i-1,1),W(i-1,2),1.d0,W(i-1,3),W(i,1),W(i,2),1.d0,W(i,3),0.d0,r,u,p,psi,alf)
        Wg(i,1)=r
    
```

```

    Wg(i,2)=u
    Wg(i,3)=alf
    !Flux i+1/2
CALL riemisot(W(i,1),W(i,2),1.d0,W(i,3),W(i+1,1),W(i+1,2),1.d0,W(i+1,3),0.d0,r,u,p,psi,alf)
    Wd(i,1)=r
    Wd(i,2)=u
    Wd(i,3)=alf
ENDDO

    !Calcul des Fi+1/2 et Fi-1/2
CALL W_to_FU(Wd,n,Fd)
CALL W_to_FU(Wg,n,Fg)

    !Schéma VF
Un=Un-dt/dx*(Fd-Fg)
t=t+dt

    !Boundary Condition
Un(1,:)=Un(2,:)
Un(n,:)=Un(n-1,:)

    dt=CFL*dx/maxval(abs(Un(:,2)/Un(:,1))+c0) !Nouveau pas de temps
ENDDO

!=====
! SUBROUTINES
CONTAINS

SUBROUTINE U_to_W(Un,n,W) !Passe de U (conservatif) à W (non conservatif)
    real(kind=kind(0.d0)), dimension(:,:),allocatable :: Un,W
    integer :: n
    W(:,1)=Un(:,1) !m
    W(:,2)=Un(:,2)/Un(:,1) !u
    W(:,3)=Un(:,3)/Un(:,1) !phi
    RETURN
END SUBROUTINE U_to_W

SUBROUTINE W_to_FU(W,n,FU) !Calcul le flux à partir de W
    real(kind=kind(0.d0)), dimension(:,:),allocatable :: Fu,W
    integer :: n
    FU(:,1)=W(:,1)*W(:,2) !m.u
    FU(:,2)=W(:,1)*W(:,2)**2+c0**2*(W(:,1)-pair*W(:,3)+(W(:,3)-1.d0)*peau) !m.u^2+p(m,phi)
    FU(:,3)=W(:,1)*W(:,2)*W(:,3) !m.u.phi
    RETURN
END SUBROUTINE W_to_FU
!=====
end program main
!=====

```

## 7.2 Preuve nécessaire à la méthode numérique de Godunov

$$\text{On a } \Psi(m^*, m, \Psi) = \begin{cases} c_0 \ln\left(\frac{m^*}{m}\right) & \text{si } m^* < m \\ \sqrt{\frac{(m^* - m)(p^* - p)}{m^* m}} & \text{si } m^* > m \end{cases}$$

$$\text{et } m_R^* = m_L^* + (p_A + p_w)(p_R - p_L) \quad \text{à part } K = (p_A + p_w)(p_R - p_L)$$

On veut montrer que  $\forall W_L \in \mathbb{R}^3, \forall W_R \in \mathbb{R}^3, \exists! m_L^* \text{ tq}$

$$0 = U_R - U_L + \Psi(m_R^*, m_R, \Psi) + \Psi(m_L^*, m_L, \Psi)$$

Il faut donc prouver qu'il existe une unique solution pour chacun des 4 cas possibles.

1<sup>er</sup> cas:  $m_L^* < m_L$  et  $m_R^* < m_R$

$$\text{On a } U_R - U_L + c_0 \ln\left(\frac{m_L^* + K}{m_R}\right) + c_0 \ln\left(\frac{m_L^*}{m_L}\right) = 0$$

$$\frac{U_L - U_R}{c_0} = \ln\left(\frac{m_L^*(m_L^* + K)}{m_R m_L}\right)$$

$$m_R \cdot m_L \cdot e^{\frac{U_L - U_R}{c_0}} = m_L^* (m_L^* + K)$$

$$\boxed{m_L^{*2} + K m_L^* - m_R \cdot m_L e^{\frac{U_L - U_R}{c_0}} = 0}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\boxed{\Delta = K^2 + 4 m_R m_L e^{\frac{U_L - U_R}{c_0}}}$$

Donc les 2 solutions de cette équation seraient  $\frac{-K \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ .

Or le modèle physique impose  $m_L^* > 0$ .

Donc, comme  $\sqrt{\Delta} > |K|$ , on a  $\frac{-K - \sqrt{\Delta}}{2}$  qui n'est pas une solution, car strictement inférieure à 0.

Et  $\frac{-K + \sqrt{\Delta}}{2}$  qui est strictement supérieure à 0 est donc l'unique solution.

2<sup>ème</sup> cas:  $m_R^* > m_R$  et  $m_L^* > m_L$

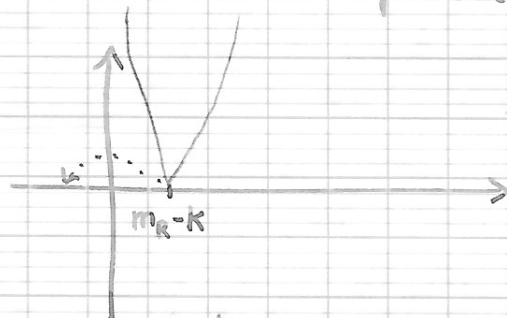
On divise ce cas en 2 sous-cas.

Le 1<sup>er</sup> où  $K > 0$ .

$$\text{On a donc } \underbrace{\frac{(m_L^* + K - m_R) C_0^2 (m_L^* + K - m_R)}{(m_L^* + K) m_R}}_A + \underbrace{\frac{(m_L^* - m_L) C_0^2 (m_L^* - m_L)}{m_L^* m_L}}_B = 0$$

$P_R^* - P_R$        $P_L^* - P_L$

Avec le degré des 2 polynômes de la fraction dans A, on connaît l'allure de la courbe de A par rapport à  $m_L^*$ :



Le minimum de A est en  $m_R - K$ .

Le même pour B :



Le minimum de B est en  $m_L$ .

Dans les deux cas, les courbes sont <sup>strictement</sup> monotones décroissantes avant leur minimum, puis <sup>strictement</sup> monotones croissantes après.

~~Par vers la discontinuité, on a K < 0 et m\_R < m\_L~~

Vers la discontinuité on a  $K \geq \pm 2 \max(m_R, m_L)$  avec  $m_R$  et  $m_L > 0$

Dans ce cas, K est positif. Donc  $m_L > m_R - K$ .

Dans ce cas,  $m_L^* > m_L$ . Or A et B étant <sup>strictement</sup> monotones croissantes après  $m_L$ , on a A+B <sup>strictement</sup> monotone croissante pour  $m_L^* > m_L$ .

Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il y a bien une unique solution à l'équation.

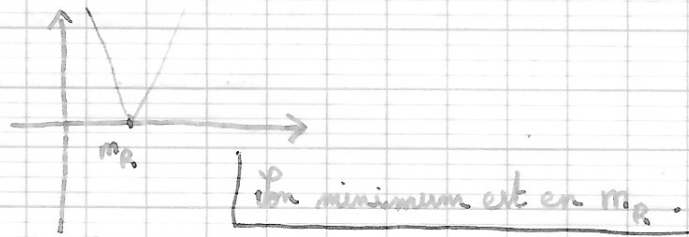


Le 2<sup>ème</sup> sous-cas est celui où  $|K| < 0$ .

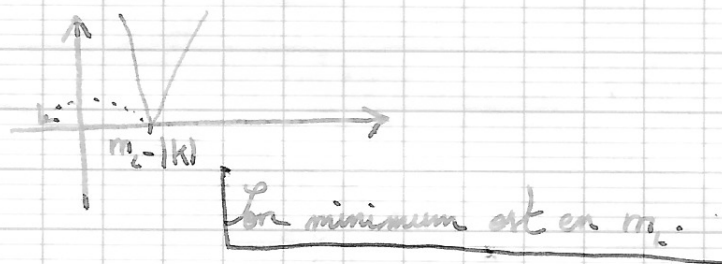
Dans ce cas, grâce à l'équation  $m_R^* = m_L^* + K$ , on reprend l'équation (1) en remplaçant  $m_L^* + K$  par  $m_R^*$ , et  $m_L^*$  par  $m_R^* + |K|$ .

On a donc cette fois  $A = \frac{(m_R^* - m_R)^2 c_0^2}{m_R^* m_R}$  et  $B = \frac{(m_R^* + |K| - m_L)^2 c_0^2}{(m_R^* + |K|) m_L}$

L'allure de A est :



L'allure de B est :



Comme vers la discontinuité  $|K| = 2 \cdot \max(m_R, m_L)$ , on a  $m_R > m_L - |K|$ . Donc A + B est strictement monotone croissante pour  $m_R^* > m_R$ . Ce qui implique, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il y a une unique solution à l'équation.

3<sup>ème</sup> cas :  $m_L^* < m_L$  et  $m_R^* > m_R$   
 $|K| > 0$

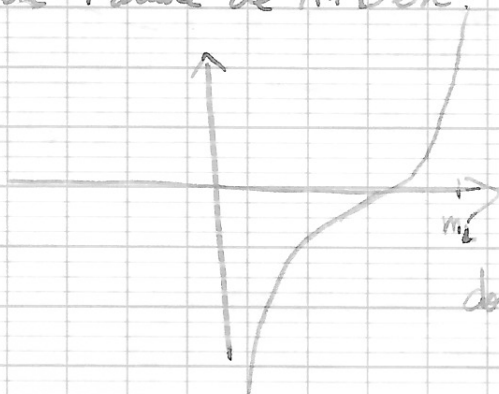
L'équation est  $U_R - U_L + \frac{(m_L^* + K - m_R)^2 c_0^2}{(m_L^* + K) m_R} + c_0 \ln\left(\frac{m_R^*}{m_L}\right) = 0$

En traçant l'allure des ces courbes on a :



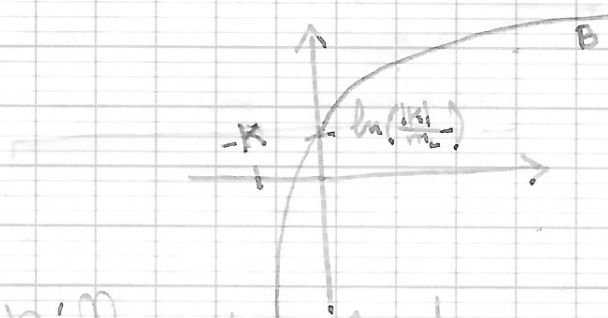
Sur la discontinuité  
 On a  $|K| = 2 \cdot \max(m_R, m_L)$ , donc  $m_R - K < 0$ .

Donc l'allure de  $A+B$  est :



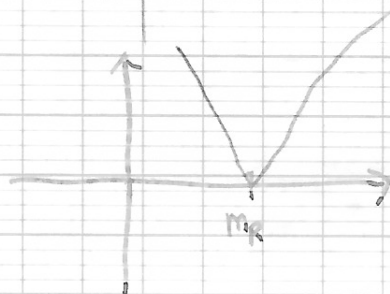
On a donc  $A+B$  strictement monotone croissante pour  $m_R^* > 0$ . Il existe donc bien une unique solution à l'équation.

Si  $K < 0$  : On réécrit l'équation mais on utilise la relation  $m_R^* = m_L^* + K$  pour qu'elle soit selon  $m_R^*$ . Pour  $B$  on a alors l'allure :



$B$  est donc strictement monotone croissante.

L'allure de  $A$  est :



On s'intéresse seulement à  $m_R^* > m_R$ , là où  $A$  est strictement monotone croissante. Donc  $A+B$  est strictement monotone croissante pour  $m_R^* > m_R$ , et cela implique qu'il y a une unique solution à l'équation.

4<sup>ème</sup> cas : Analogie au 3<sup>ème</sup>