

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnenec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Ronan - Crougnenec Guillaume

Seatech - Université de Toulon

Mai 2020

# Sommaire

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnenec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

- 1 Introduction
- 2 Modélisation d'une épidémie
- 3 Résolution Numérique des modèles
- 4 Simulations et Résultats
- 5 Modèle topologique de la simulation
- 6 Conclusion
- 7 Bibliographie

# Introduction

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crouguennec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

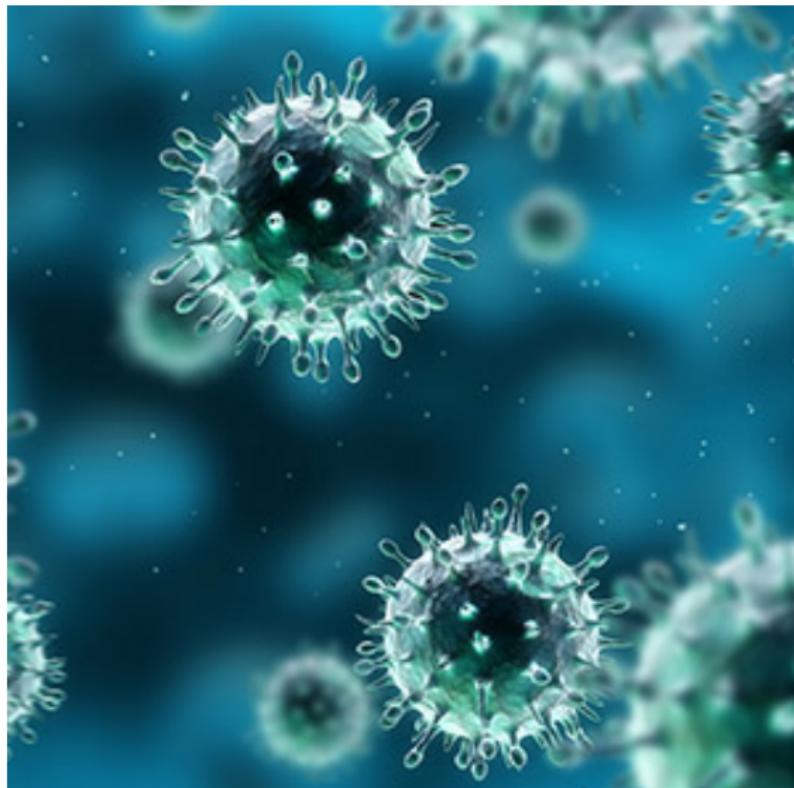
Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie



# SIR

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crogueenec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

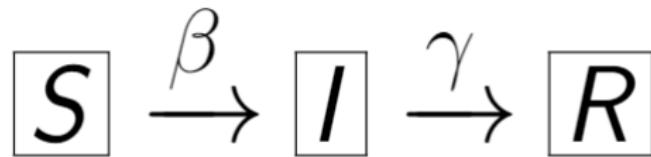
Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{cases}$$

# SEIR

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

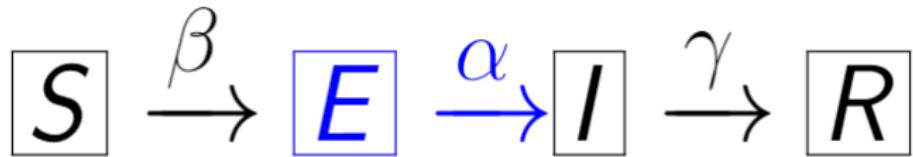
Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

# SEIR natalité

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

# SEIR natalité et mortalité

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

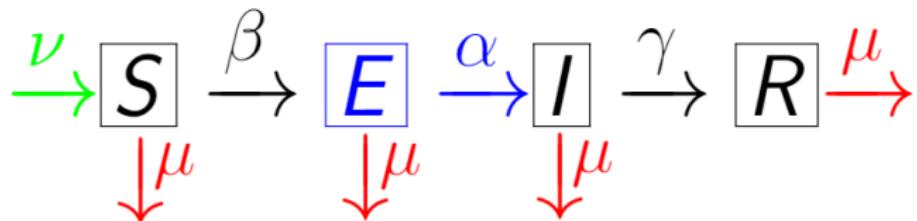
Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

# SEIR Perte d'immunité

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Crouguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

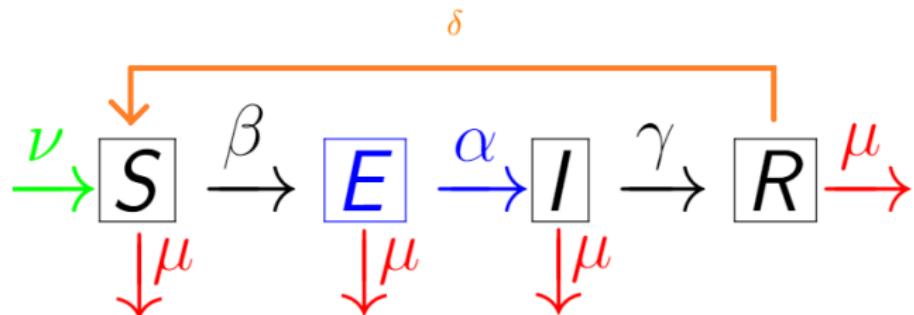
Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie



$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \nu N(t) - \mu S(t) + \delta R(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) \end{cases}$$

# SEIR par tranche d'âge

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crouguennec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

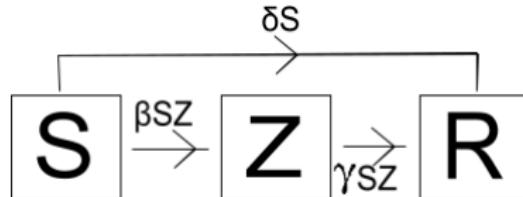
Bibliographie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(a, t)}{\partial a} = -\lambda(a, t)S(a, t) - \mu(a)S(a, t) \\ \frac{\partial E(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial E(a, t)}{\partial a} = \lambda(a, t)S(a, t) - \alpha(a)E(a, t) - \mu(a)E(a, t) \\ \frac{\partial I(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial I(a, t)}{\partial a} = \alpha(a)E(a, t) - \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)I(a, t) \\ \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} = \gamma(a)I(a, t) - \mu(a)R(a, t) \end{array} \right.$$

$$\lambda(a, t) = \int_0^{a_{\max}} \beta(u, a)I(u, t)du$$

$$\beta(u, a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}$$

# Modèle SZR : classique



$$(SIR) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{array} \right. \quad (SZR) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ \end{array} \right.$$

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

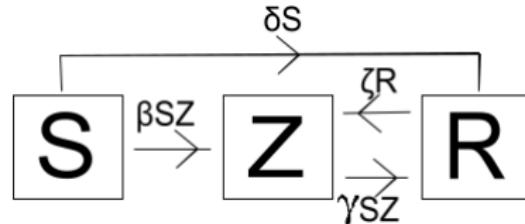
Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Modèle SZR avec taux de résurrection $\epsilon$



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ + \epsilon R \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ - \epsilon R \end{cases}$$

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Crougnenec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Ajout d'un terme de diffusion $\alpha_{diff}$

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnenec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI + \alpha_{diff} \Delta S \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I + \alpha_{diff} \Delta I \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \end{cases}$$

# Sans diffusion

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Avec diffusion : $\alpha_{diff} = 0.001$

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Modèle explicite

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Crouguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$S(x_i, t_n) = S_i^n = S(i.h, n.dt) \text{ et } I(x_i, t_n) = I_i^n = I(i.h, n.dt).$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{dt} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}(x_i, t_n) \approx \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{h^2}$$

## Schéma numérique

$$\Rightarrow S_i^{n+1} = S_i^n + dt(-\beta S_i^n I_i^n + \frac{\alpha_{diff}}{h^2} (S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n))$$

$$\Rightarrow I_i^{n+1} = I_i^n + dt(-\gamma I_i^n + \beta S_i^n I_i^n + \frac{\alpha_{diff}}{h^2} (I_{i+1}^n - 2I_i^n + I_{i-1}^n))$$

$$\Rightarrow R_i^{n+1} = R_i^n + dt \cdot \gamma \cdot I_i^n$$

# Modèle implicite

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Crouguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{dt} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}(x_i, t_{n+1}) \approx \frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

## Schéma numérique

$$\Rightarrow S_i^{n+1} \left( 1 + dt(\beta I_i^n + 2 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \right) - \alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} (S_{i+1}^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}) = S_i^n$$

$$\Rightarrow I_i^{n+1} \left( 1 + dt(\gamma - \beta S_i^n + 2 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \right) - \alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} (I_{i+1}^{n+1} + I_{i-1}^{n+1}) = I_i^n$$

$$\Rightarrow R_i^{n+1} = R_i^n + dt \cdot \gamma \cdot I_i^n$$

# Résolution 2D

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

$$\Delta S_{i,j}^n = \frac{S_{i+1,j}^n + S_{i-1,j}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i,j+1}^n + S_{i,j-1}^n}{h^2}$$

## Résolution matriciel

$$\begin{cases} a_{li} = 1 + dt(-\beta S_i^n + 4 \frac{\alpha_{diff}}{h^2}) \\ b_i = -\alpha_{diff} \frac{dt}{h^2} \end{cases}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} a_{S_0} & b_i & & & (0) \\ b_i & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & b_i \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & b_i \\ b_i & & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & b_i \\ (0) & & b_i & b_i & a_{S_{n2-1}} \end{pmatrix} b_S = \begin{pmatrix} S_0^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{m-1}^n \end{pmatrix} x_S = \begin{pmatrix} S_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{m-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

# SRZ :Influence du taux de résurrection $\epsilon$

$$SZR : \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SZ \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = \beta SZ - \gamma SZ + \epsilon R \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma SZ - \epsilon R \end{cases}$$

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Crougnenec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Influence des Conditions Initiales sur le résultat du modèle SZR

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnenec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Simulation du covid-19

Simulation de modèles d'épidémie

Dupont Croguennec

Introduction

Modélisation d'une épidémie

Résolution Numérique des modèles

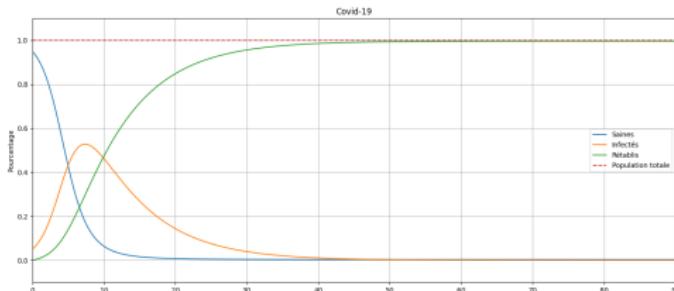
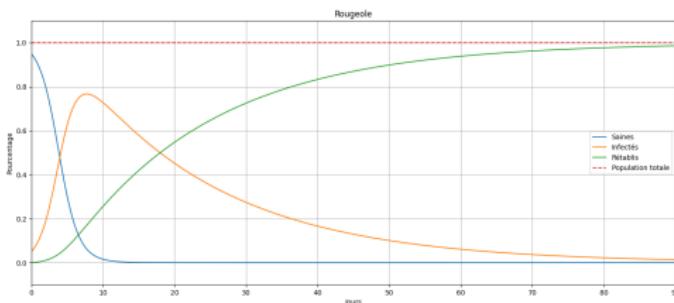
Simulations et Résultats

Modèle topologique de la simulation

Conclusion

Bibliographie

Maladie	$\beta$	$\gamma$	$R_0$
Rougeole	0.8	1/20	16
Covid-19	0.76	1/7.5	5.7



# Résultat en incluant la topologie

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crougnec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

# Conclusion

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crogueennec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie



# Bibliographie

Simulation de  
modèles  
d'épidémie

Dupont  
Crogueennec

Introduction

Modélisation  
d'une  
épidémie

Résolution  
Numérique  
des modèles

Simulations et  
Résultats

Modèle  
topologique de  
la simulation

Conclusion

Bibliographie

-  W. CHINVIRIYASIT, *Numerical modelling of an SIR epidemic model with diffusion*, 2010
-  Gloria FACANONI, *Etude des modèles SIR/SZR en temporel*, 2020
-  Coralie LEMKE, *Covid-19 : chaque malade pourrait-il vraiment en contaminer 5,7 autres ?*, Avril 2020
-  Max BERGGREN, *Model of a zombie outbreak in Sweden, Norway and Finland (Denmark is fine)*, Nov 27, 2014
-  Corentin BAYETTE, *Modélisation d'une épidémie, partie 2*, April 23, 2020  
[https://images.math.cnrs.fr/  
Modelisation-d-une-epidemie-partie-2.html](https://images.math.cnrs.fr/Modelisation-d-une-epidemie-partie-2.html)