

# Couplage vague-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

Présentée par Ronan Dupont  
le 30 septembre 2024

Sous la direction de Frédéric BOUCHETTE  
et Bijan MOHAMMADI

Devant le jury composé de

M. YATES  
E. I. TURKI  
P. MARCHESIELLO  
C. CHOQUET  
M. ERSOY  
F. BOUCHETTE  
B. MOHAMMADI

Chargée de Recherche, HDR  
Maîtresse de conférences, HDR  
Directeur de Recherche, HDR  
Professeure  
Maître de conférences, HDR  
Professeur  
Professeur

École des Ponts, LHSV  
Univ de Normandie  
IRD, LEGOS  
Univ de La Rochelle  
Univ de Toulon  
Univ de Montpellier  
Univ de Montpellier

Rapporteuse  
Rapporteuse  
Examinateur  
Examinateuse  
Examinateur  
Directeur de thèse  
Directeur de thèse

## Motivations

- Comprendre et anticiper les phénomènes du littoral comme l'érosion.
  - Contribuer à l'avancée de la modélisation numérique côtière.
  - Explorer une nouvelle manière de modéliser la dynamique du littoral avec un nombre limité d'hyperparamètres.
  - Développer un outil rapide d'exécution pour la conception de structures de défense en ingénierie côtière.



**Figure 1:** Illustration à Gouville-sur-Mer en février 2020. © Radio France - Lucie Thuillet

Contexte historique (2004 - 2024 F. Bouchette, B. Mohammadi, P. Azerad). Une collaboration long terme avec BRLi.

 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
  - Optimisation de positionnement de géotubes.
  - Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
  - Optimisation de positionnement de géotubes.
  - Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.

 Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
  - Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.



 Damien Isèbe (2004 - 2007)

- Optimisation de formes sur des ouvrages de défenses du littoral.
  - Optimisation de positionnement de géotubes.
  - Étude théorique d'une modèle d'évolution de dunes en régime fluvial.



 Afaf Bouharguane (2008 - 2011)

- Introduction hypothèse liant: dynamique du fond / minimisation énergie.
  - Études mathématiques de modèles non-locaux (EDP fractionnaires) de type Fowler.



 Megan Cook (2018 - 2021)

- Introduction contraintes physiques sur le modèle de minimisation (conservation, pente, etc). Développement du modèle OptiMorph.
  - Optimisation du réaménagement du port de la Turballe avec suivi du trait de côte.

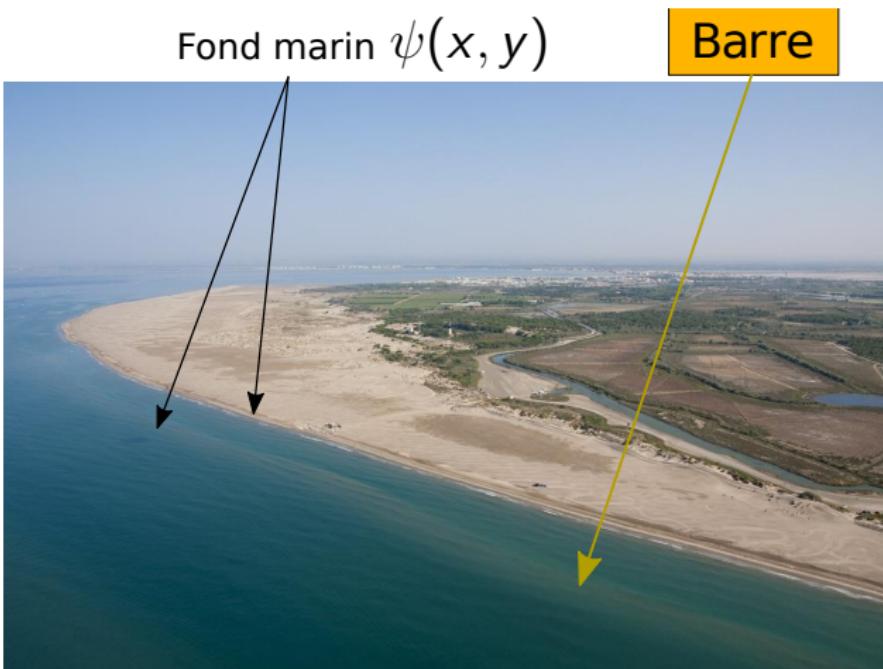
## Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
  - 2 Vers un modèle morphodynamique
  - 3 Extension à un modèle générique
  - 4 Évolution du modèle en 2D
  - 5 Conclusion et Perspectives

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

Quelle quantité doit évoluer ?

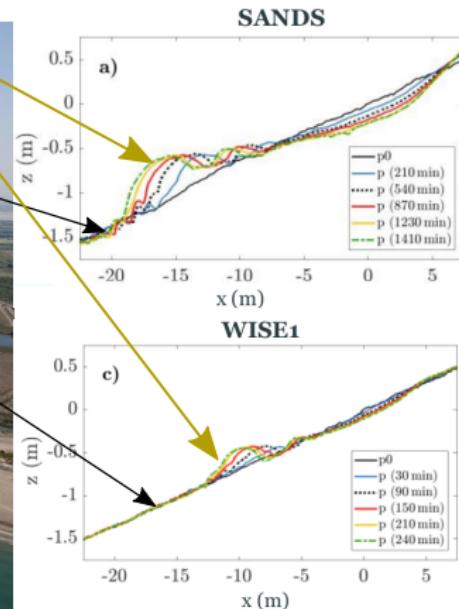


*Figure 2: Plage de l'Espiguette*

## Quelle quantité doit évoluer ?

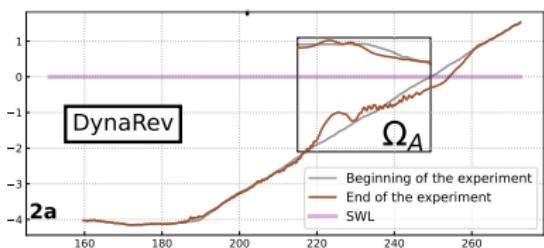
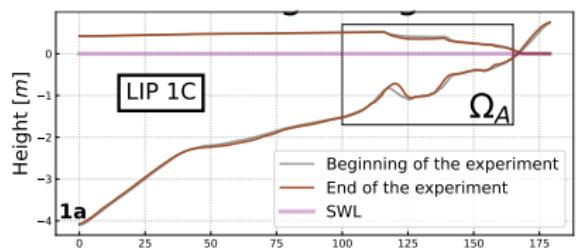
Fond marin  $\psi(x, y)$

## Barre



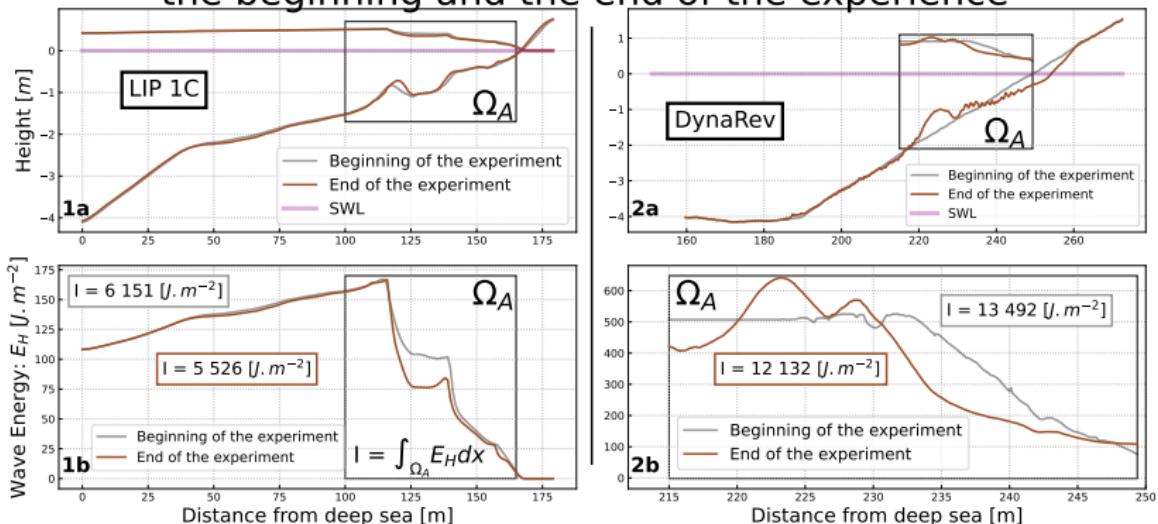
**Figure 2: (Gauche) Plage de l'Espiguette | (Droite) Evolution of beach profiles under erosive (left panels) wave conditions in SANDS and WISE 1 at selected time steps. - Sonja Eichentopf et al. (2018)**

## Quelle quantité minimiser ?



# Quelle quantité minimiser ?

## Comparison of Wave Energy $E_H$ between the beginning and the end of the experience

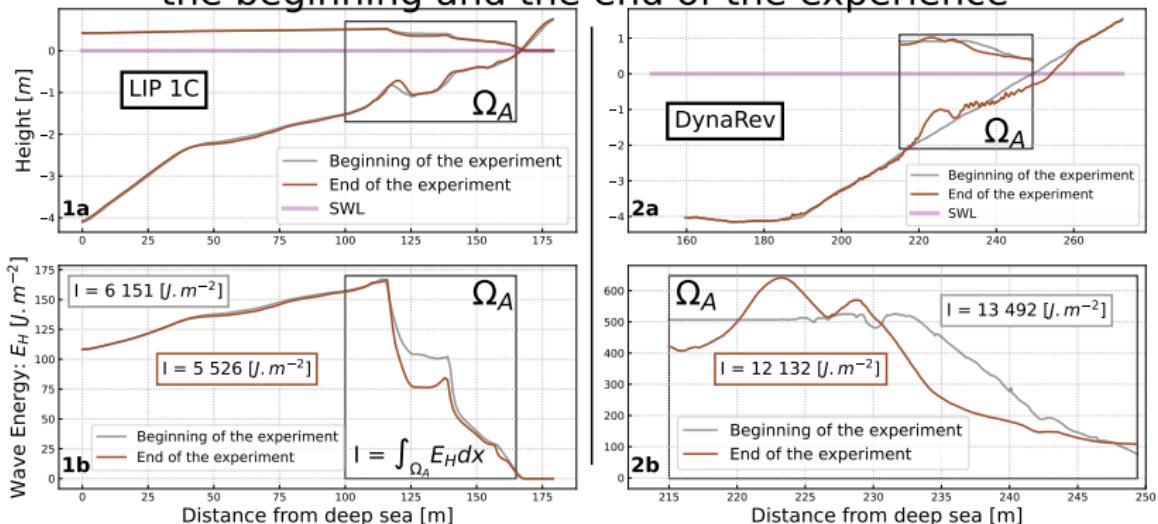


*Figure 3: 1) Expérience LIP 1C avec  $H$  générée par XBeach. 2) Expérience DynaRev avec  $H$  mesuré par LIDAR. a) Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). b) Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur  $\Omega_A$ .*

# Quelle quantité minimiser ?

$$I_i \approx 0.9 I_f$$

## Comparison of Wave Energy $E_H$ between the beginning and the end of the experience



*Figure 3: 1) Expérience LIP 1C avec  $H$  générée par XBeach. 2) Expérience DynaRev avec  $H$  mesuré par LIDAR. a) Fond et Hauteur d'eau moyennée au début de l'expérience (gris), Fond et Hauteur d'eau moyennée à la fin de l'expérience (marron). b) Énergies des vagues associées aux hauteurs d'eaux. L'énergie est calculée sur  $\Omega_A$ .*

## Quelle quantité minimiser ?

Minimiser l'énergie des vagues à travers la fonction de coût:

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} E_H d\Omega$$

représente la physique.

## Quel fond minimise l'énergie des vagues ?



Quel est le fond  $\psi$  minimisant l'énergie des vagues ?  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  ?

Un "fond possible"...



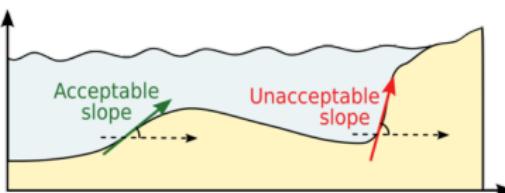
*Image provenant d'un photomontage.*

Cette solution à  $\boxed{\mathcal{J} = 0}$  minimise au maximum l'énergie des vagues.

# Ajout de contraintes physiques

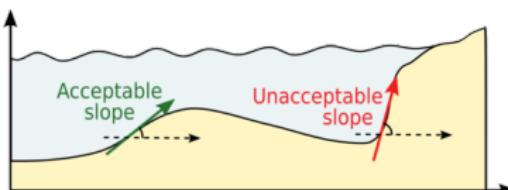
# Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

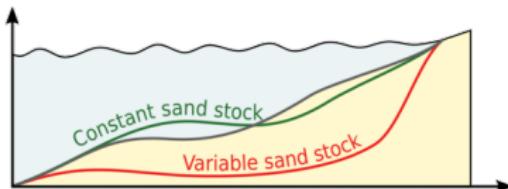


# Ajout de contraintes physiques

- Pente maximale:

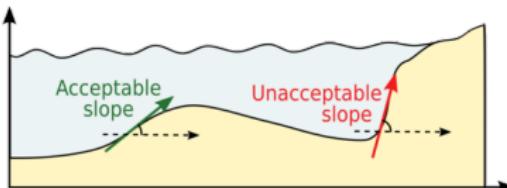


- Conservation sableuse:

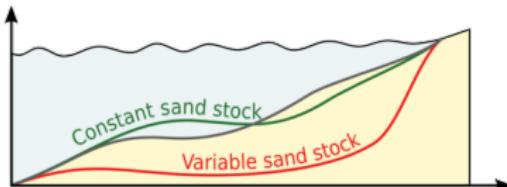


# Ajout de contraintes physiques

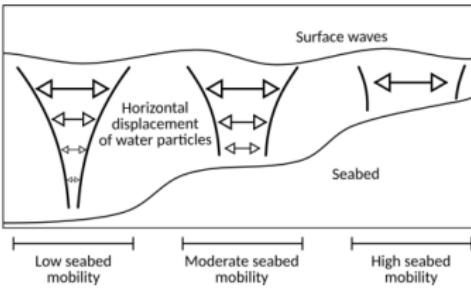
- Pente maximale:



- Conservation sableuse:



- Excitation sableuse:

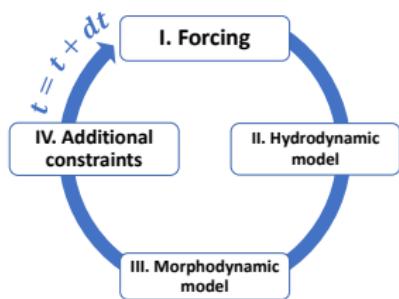


# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Validité du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

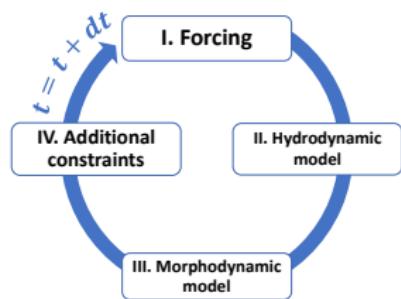
# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Validité du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives



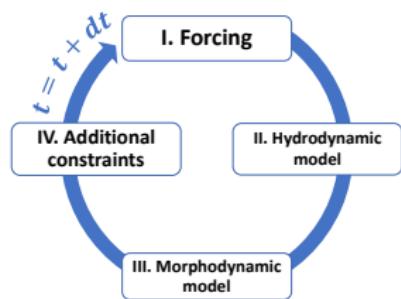
*Figure 4: Premier workflow.*

- Paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ .



*Figure 4: Premier workflow.*

- Paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ .
  - Paramètre hydrodynamique:  $\gamma$ .



*Figure 4: Premier workflow.*

- Paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ .
  - Paramètre hydrodynamique:  $\gamma$ .
  - Paramètres morphodynamique:  $\Upsilon$ .

# Premier workflow du modèle et quelques notations

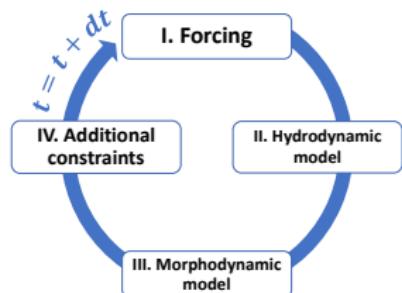


Figure 4: Premier workflow.

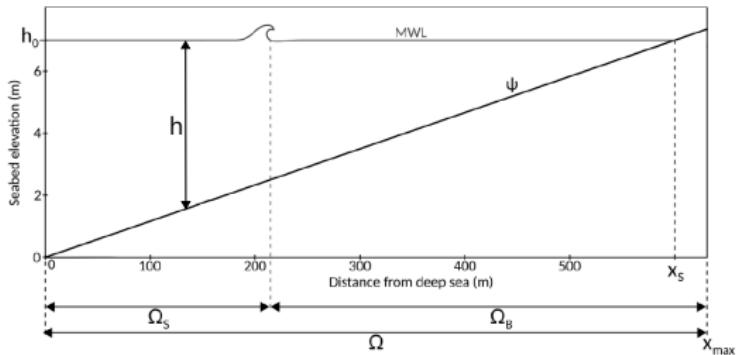


Figure 5: Notations usuelles.

- Paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ .
- Paramètre hydrodynamique:  $\gamma$ .
- Paramètres morphodynamique:  $\Upsilon$ .
- Paramètres géométriques:  $\psi_0$ ,  $\Omega$ ,  $h_0$ ,  $M_{slope}$ .

# Premier workflow du modèle et quelques notations

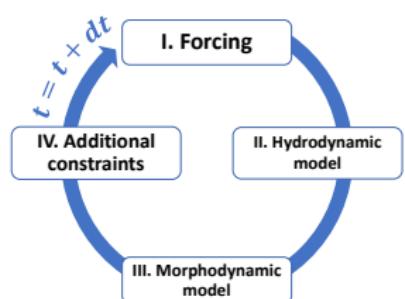


Figure 4: Premier workflow.

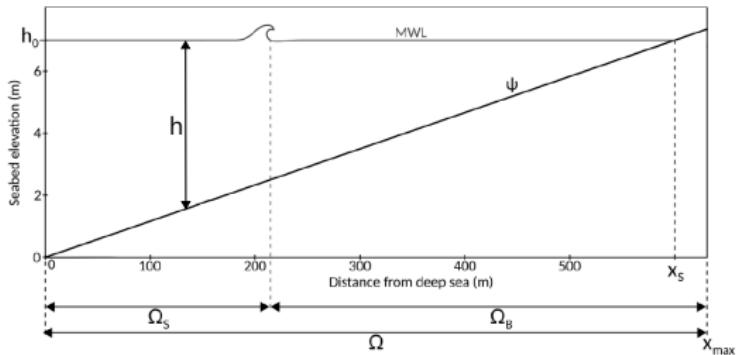


Figure 5: Notations usuelles.

- Paramètres de forcing:  $H_0(t)$ ,  $T_0(t)$ .
- Paramètre hydrodynamique:  $\gamma$ .
- Paramètres morphodynamique:  $\Upsilon$ .
- Paramètres géométriques:  $\psi_0$ ,  $\Omega$ ,  $h_0$ ,  $M_{slope}$ .
- Paramètres numériques:  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $T_f$ .

## Premier modèle de vagues

## Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

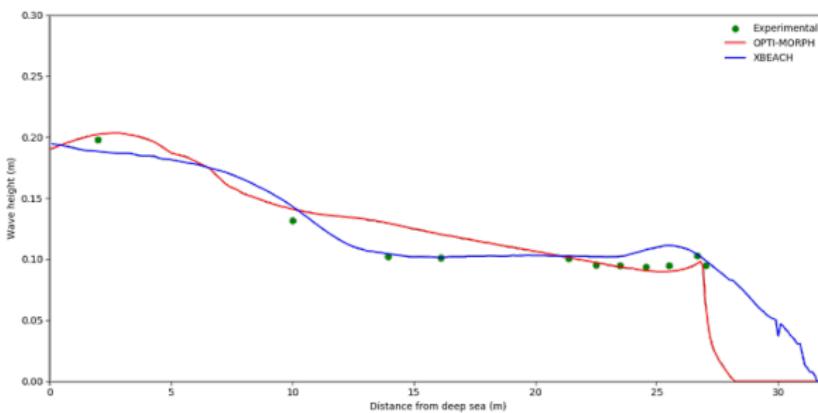
avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement.

# Premier modèle de vagues

## Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement.



### Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$

Figure 6: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

# Modèle morphodynamique

Rappel du problème:

On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

# Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

On cherche  $\min \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

## Sans contraintes physiques:

$$\begin{cases} \psi_t = -\Upsilon \nabla_\psi \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega$ ,
- $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
- $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.

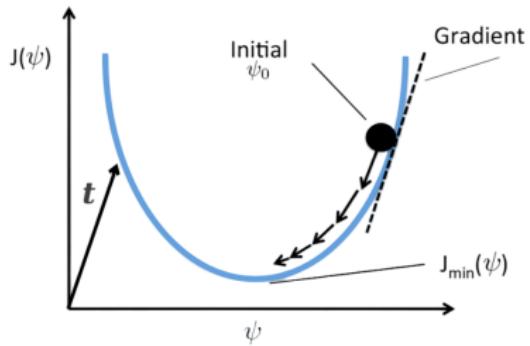


Figure 7: Descente du gradient.

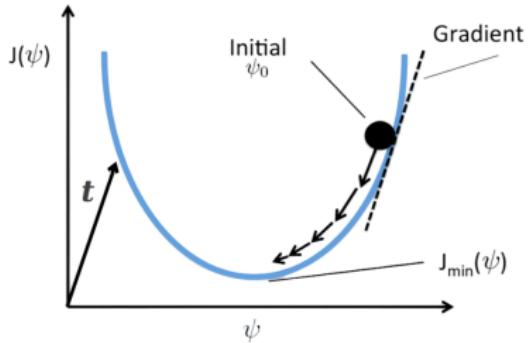
## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

#### Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = -\gamma \nabla_{\psi} \mathcal{J} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$



avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega$ ,
  - $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d$ : la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.

**Rq:** Sans contrainte,  $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ ,

*Figure 7: Descente du gradient.*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

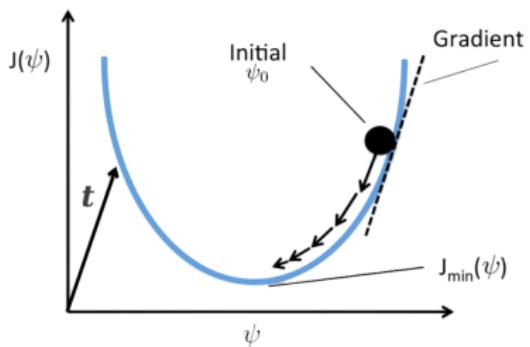
#### Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$

avec:

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega$ ,
  - $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d$ : la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.

**Rq:** Sans contrainte,  $d = -\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ ,



*Figure 7: Descente du gradient.*

## Modèle morphodynamique

## Rappel du problème:

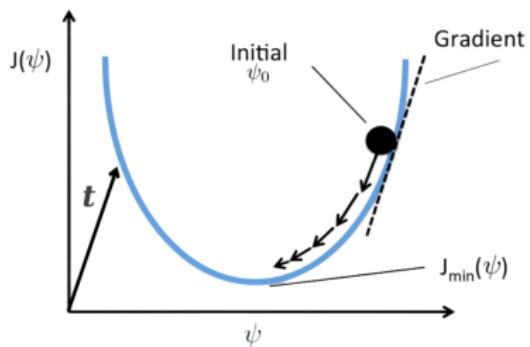
On cherche  $\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi)$  en tenant compte des contraintes physiques.

#### Avec contraintes physiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \Upsilon \Delta d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right.$$

avec :

- $\mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega$ ,
  - $\psi(t)$ : le fond sableux au temps  $t$ ,
  - $\Upsilon$ : la mobilité sédimentaire.
  - $d$ : la direction de descente incluant les contraintes et indiquant la manière dont le fond sableux évolue.
  - Rq:** Sans contrainte,  $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ ,
  - **A:** l'excitation du fond sableux par les vagues.



*Figure 7: Descente du gradient.*

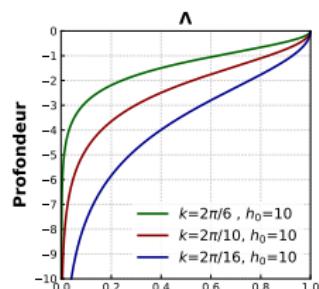
## Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après (Soulsby, 1987):

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))}, \end{aligned}$$

et en  $z = \psi$ :

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



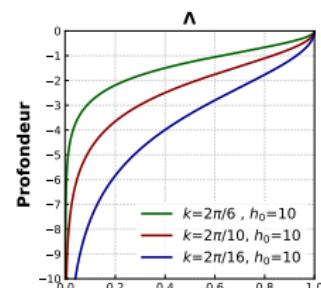
# Ajout de contraintes physiques

- Excitation sableuse. D'après ( Soulsby, 1987):

$$\begin{aligned}\varphi : \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},\end{aligned}$$

et en  $z = \psi$ :

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$$

# Ajout de contraintes physiques

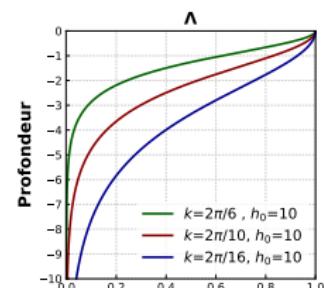
- Excitation sableuse. D'après ( Soulsby, 1987):

$$\varphi : \Omega \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, z) \longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))},$$

et en  $z = \psi$ :

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}$$



- Pente maximale:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$$

- Conservation sableuse:

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T_f]$$

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = C_{\text{te}}$$

et on veut  $\forall t \in [0, T_f], C_{\text{sand}}(t) = 0$ .

# Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut  $\forall t \in [0, T_f]$ ,  $C_{\text{sand}}(t) = 0$ .

Minimiser  $\mathcal{J}$  avec  $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$  (car  $C_{\text{sand}}(0) = 0$ )  
 $\Leftrightarrow$

Suivre la direction  $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$  en gardant  $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$ .

On définit:

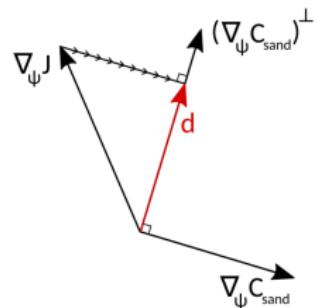
$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut  $\forall t \in [0, T_f], C_{\text{sand}}(t) = 0$ .

Minimiser  $\mathcal{J}$  avec  $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$  (car  $C_{\text{sand}}(0) = 0$ )

↔

Suivre la direction  $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$  en gardant  $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$ .



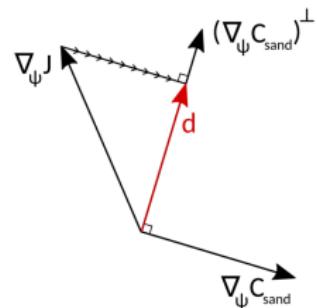
*Figure 8: Projection.*  
Cook (2021).

# Projection de la contrainte de conservation sableuse

On définit:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi_0)^2 d\Omega = \text{Cte}$$

et on veut  $\forall t \in [0, T_f]$ ,  $C_{\text{sand}}(t) = 0$ .



Minimiser  $\mathcal{J}$  avec  $C_{\text{sand}} = \text{Cte} = 0$  (car  $C_{\text{sand}}(0) = 0$ )  
 $\Leftrightarrow$

Suivre la direction  $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$  en gardant  $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$ .

*Figure 8: Projection.  
Cook (2021).*

On a donc:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|}.$$

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Validité du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

# Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta t = 0.18$  s

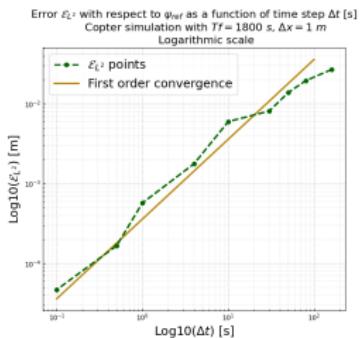


Figure 9: Convergence temporelle avec  $\Delta t$  dans  $[0.18, 90]$  s.

# Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta t = 0.18$  s

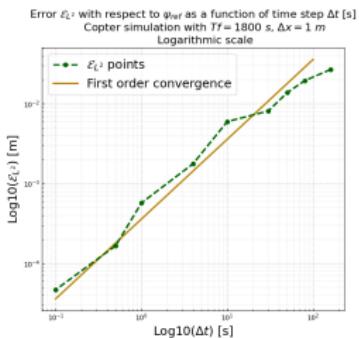


Figure 9: Convergence temporelle avec  $\Delta t$  dans  $[0.18, 90]$  s.

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta x = 0.5$  mm

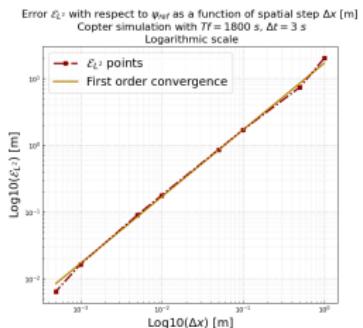


Figure 10: Convergence spatiale avec  $\Delta x$  dans  $[0.001, 2]$  m.

# Sensibilité sur le pas de temps, pas spatial et la longueur du domaine

On définit l'erreur:

$$\varepsilon_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}.$$

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta t = 0.18$  s

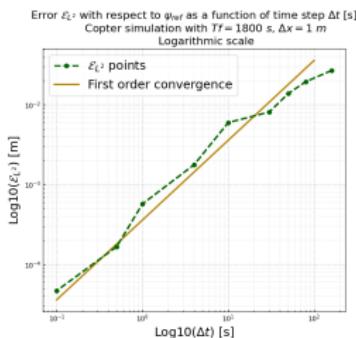


Figure 9: Convergence temporelle avec  $\Delta t$  dans  $[0.18, 90]$  s.

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Delta x = 0.5$  mm

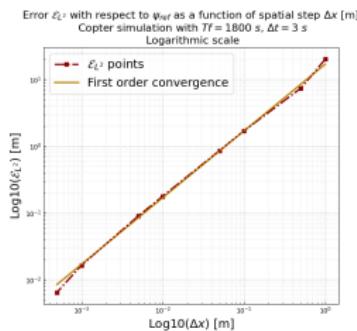


Figure 10: Convergence spatiale avec  $\Delta x$  dans  $[0.001, 2]$  m.

$\psi_{\text{ref}}$  à  $\Omega = 3000$  m

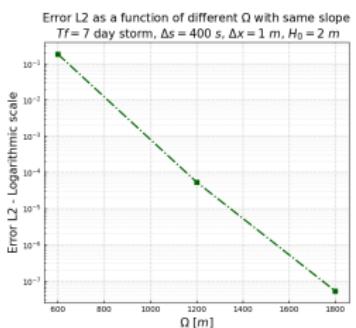


Figure 11: Passage à l'échelle, vérification de la bonne prise en compte des contraintes avec  $\Omega \in [600, 3000]$  m.

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Validité du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Évolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

# Présentation de l'expérience Copter 1D

Les expériences ont été menées dans le bassin à houle LHF (Grenoble) de  $30\text{ m} \times 30\text{ m}$ .

Échelle de longueur: 1/10 et échelle de temps: 1/3 (Froude)

## Paramètres de l'expérience:

- $H_0 = 135\text{ mm}$ , •  $T_0 = 2.5\text{ s}$ , •  $T_f = 30\text{ mins}$ .

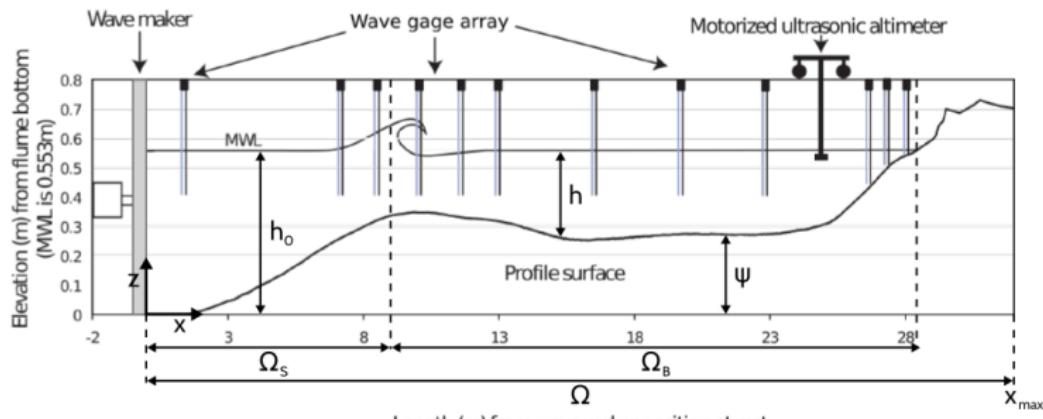


Figure 12: Schéma de l'expérience Copter 1D.

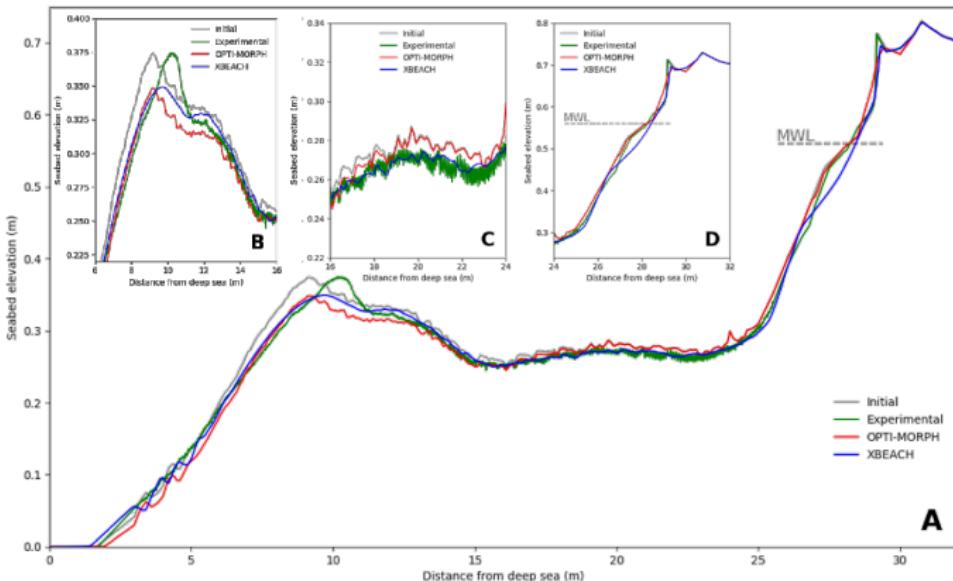
# Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

## Paramètres:

- $H_0 = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$



*Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).*

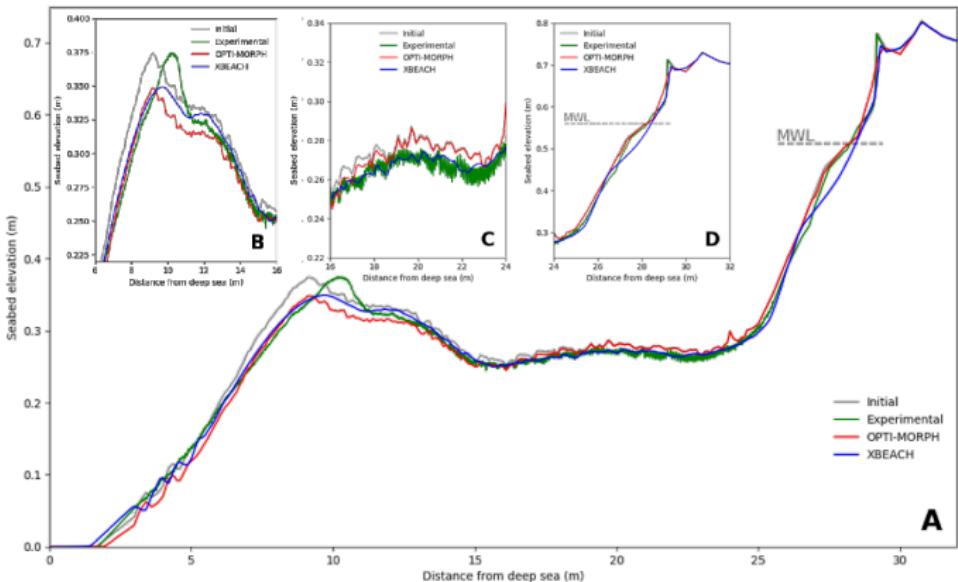
# Résultats morphodynamiques sur l'expérience Copter



Cook (2021)

## Paramètres:

- $H_0 = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$
- Pas de déplacement latéral de la barre sédimentaire

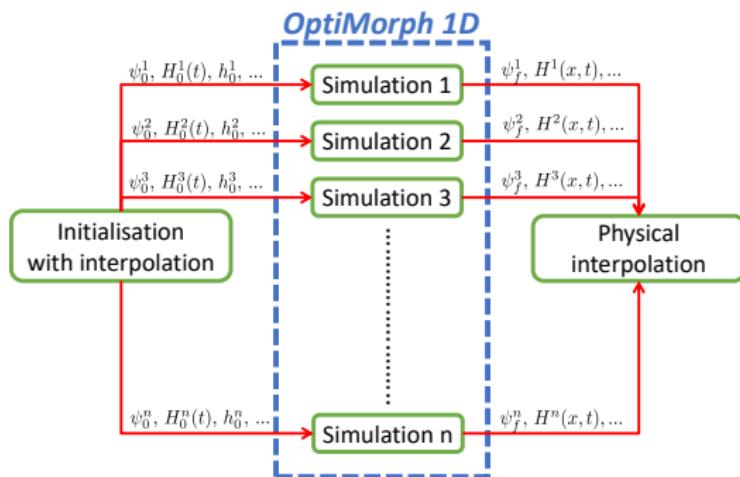


*Figure 13: Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond initial (gris) à l'aide du module morphodynamique XBeach (bleu) et du modèle OptiMorph (rouge). Comparaison avec les résultats expérimentaux COPTER (vert).*

# Table des Matières

- ① Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- ② Vers un modèle morphodynamique
  - Présentation du modèle
  - Validité du modèle
  - Résultats 1D du modèle
  - Extension du modèle en multi-1D
- ③ Extension à un modèle générique
- ④ Evolution du modèle en 2D
- ⑤ Conclusion et Perspectives

## Workflow et cas applicatif



*Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.*

# Workflow et cas applicatif

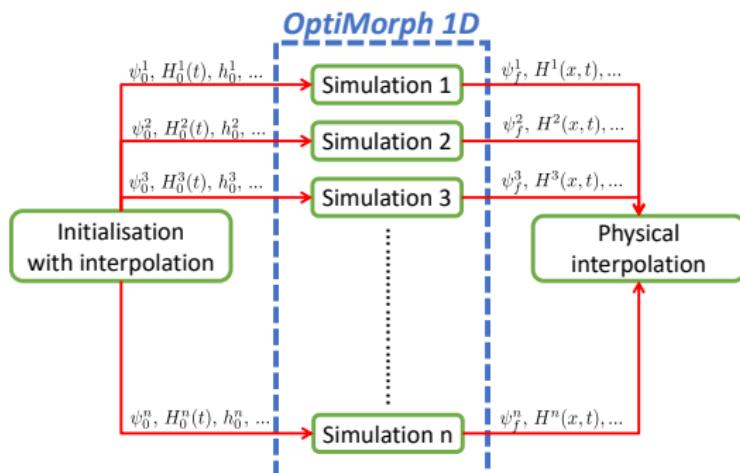


Figure 14: Workflow d'OptiMorph en Multi-1D.

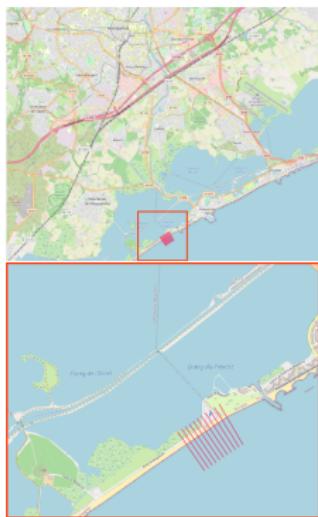


Figure 15: Géographie de la simulation au sud de Montpellier.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

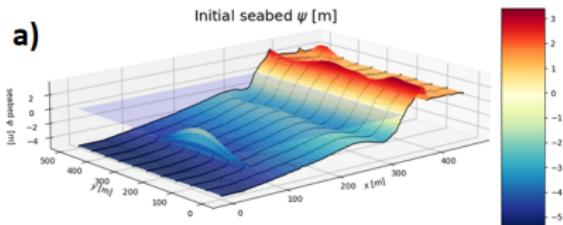
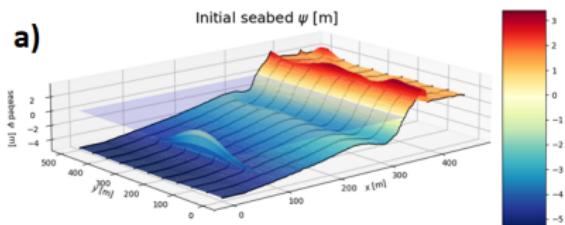


Figure 16: Fond initial.

## Résultats en multi-1D sur un cas réel



*Figure 16: Fond initial.*

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,
  - $T_0 = 2 \text{ s}$ ,
  - $T_f = 3 \text{ jours}$ ,
  - $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$ ,
  - "Géotube": 3 m de haut.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

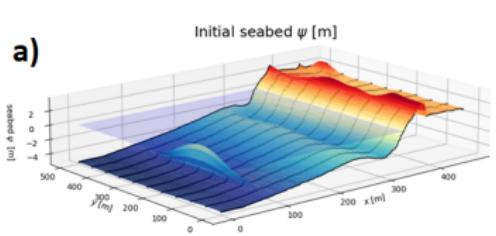


Figure 16: Fond initial.

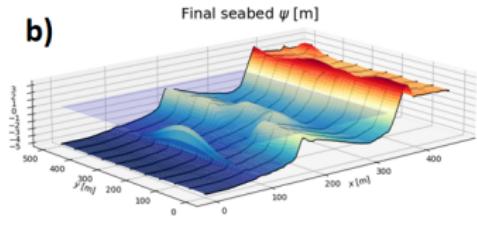


Figure 17: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2$  m ,
- $T_0 = 2$  s,
- $T_f = 3$  jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$  m,
- "Géotube": 3 m de haut.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

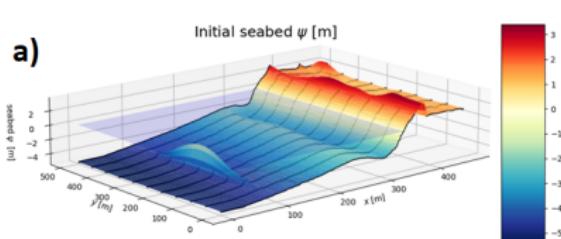


Figure 16: Fond initial.

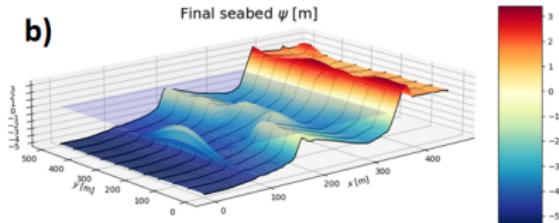


Figure 17: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2$  m ,
- $T_0 = 2$  s,
- $T_f = 3$  jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$  m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

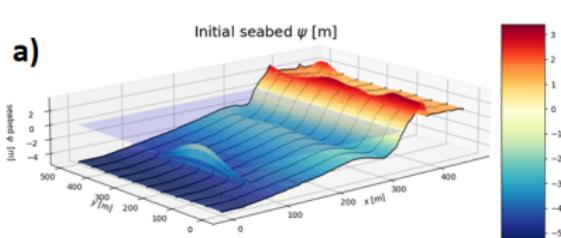


Figure 16: Fond initial.

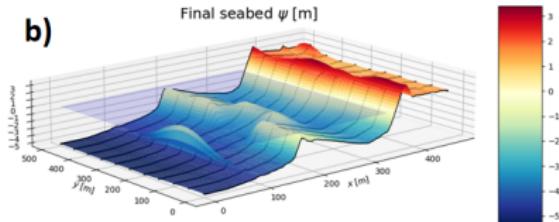


Figure 17: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2$  m ,
- $T_0 = 2$  s,
- $T_f = 3$  jours,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500]$  m,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

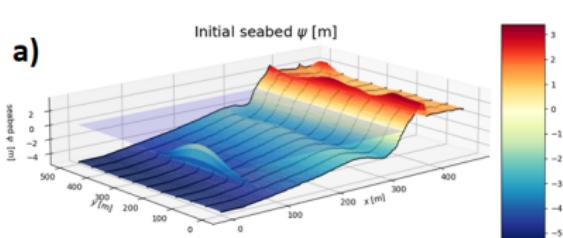


Figure 16: Fond initial.

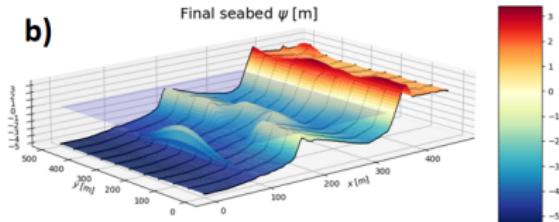


Figure 17: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,
- $T_0 = 2 \text{ s}$ ,
- $T_f = 3 \text{ jours}$ ,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$ ,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.

# Résultats en multi-1D sur un cas réel

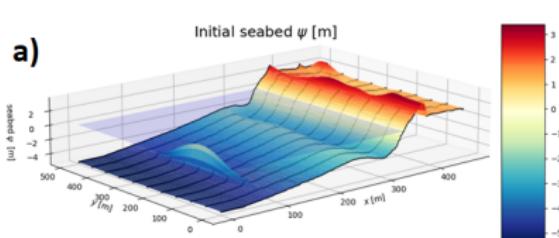


Figure 16: Fond initial.

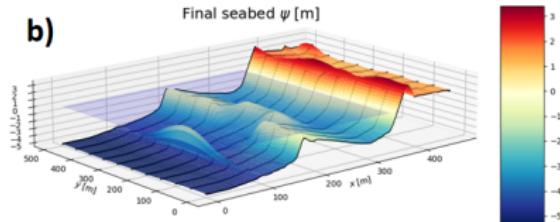


Figure 17: Fond final.

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,
- $T_0 = 2 \text{ s}$ ,
- $T_f = 3 \text{ jours}$ ,
- $\Omega = [0, 450] \times [0, 500] \text{ m}$ ,
- "Géotube": 3 m de haut.

- Calculs parallélisés sur 10 transects (noirs).
- Déplacement de la barre sédimentaire.
- Mécanismes 2D dû à l'interpolation physique.
- Mais modèle de vague inadapté pour le 2D.

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

## 5 Conclusion et Perspectives

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
    - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
    - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
    - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

## 5 Conclusion et Perspectives

## Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega. \end{array} \right.$$

## Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega. \end{array} \right.$$

## Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
  - ✓ Rapide.
  - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

## Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) \mathrm{d}\Omega. \end{array} \right.$$

# Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
  - ✓ Rapide.
  - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

## Différences Finies

- ✓ Facile à calculer.
  - ✗  $N + 1$  évaluations nécessaires.
  - ✗ Temps de calculs très longs.

## Rappel de l'équation gouvernante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t = \gamma \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -\nabla_\psi \mathcal{J} + \text{contraintes}, \\ \mathcal{J}(\psi) = \int_{\Omega} E_H(\psi) d\Omega. \end{array} \right.$$

# Calcul Analytique

- ✓ Solution exacte.
  - ✓ Rapide.
  - ✗ Faisable seulement sur un modèle simple.

## Différences Finies

- ✓ Facile à calculer.
  - ✗  $N + 1$  évaluations nécessaires.
  - ✗ Temps de calculs très longs.

## Définition



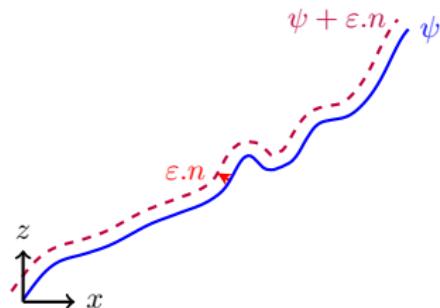
- ✓ Robuste.
  - ✗ Pré-traitement lourd.
  - ✗ Dépendance à C / Fortran 90.

## Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec  $n$ : vecteur normal à la forme.



*Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.*

# Le calcul de $\nabla_\psi \mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec  $n$ : vecteur normal à la forme.

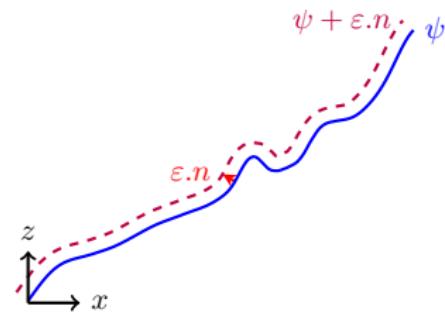


Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.

À l'ordre 1:

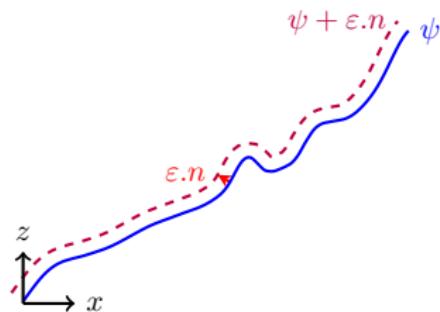
$$\nabla_\psi \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi) + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J} \cdot n - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^\top.$$

## Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec  $n$ : vecteur normal à la forme.



*Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.*

## À l'ordre 1:

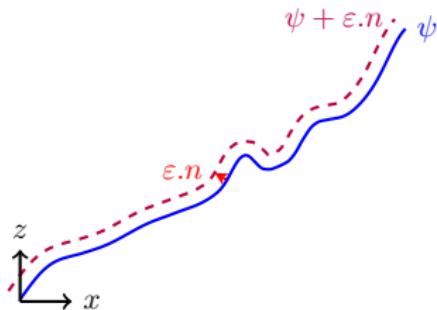
$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

## Le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$ au sens d'Hadamard

On considère:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\psi + \varepsilon n) - \mathcal{J}(\psi)}{\varepsilon},$$

avec  $n$ : vecteur normal à la forme.



*Figure 18: Schéma illustrant la dérivée au sens d'Hadamard.*

À l'ordre 1:

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mathcal{J}(\psi)} + \varepsilon \nabla_X \mathcal{J}.n - \cancel{\mathcal{J}(\psi)}}{\varepsilon}, \quad \text{avec } X = (x, z)^T.$$

Donc

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} \approx (\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}).n$$

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

## 5 Conclusion et Perspectives

## Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

et  $\mathcal{J} = \cos(\psi)$ , avec  $\boxed{\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}}$ .

# Vérification numérique sur un cas analytique

On considère:

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

et  $\mathcal{J} = \cos(\psi)$ , avec  $\nabla_\psi \mathcal{J} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2 + 1}$ .

$\nabla_\psi \mathcal{J}$  using Hadamard approximation with the following problem:

$$\psi = ax + b, \mathcal{J} = \cos(\psi), \text{ with } a = 0.02, b = -2$$

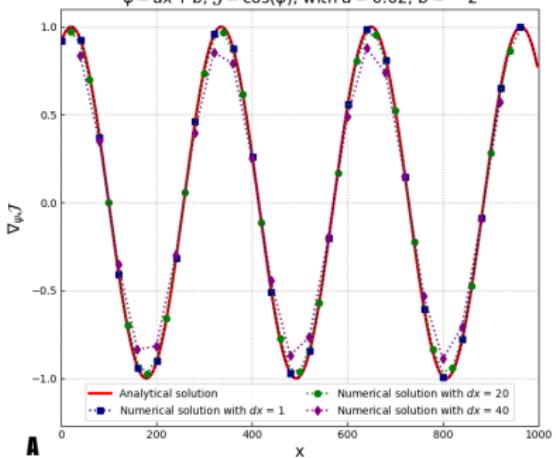
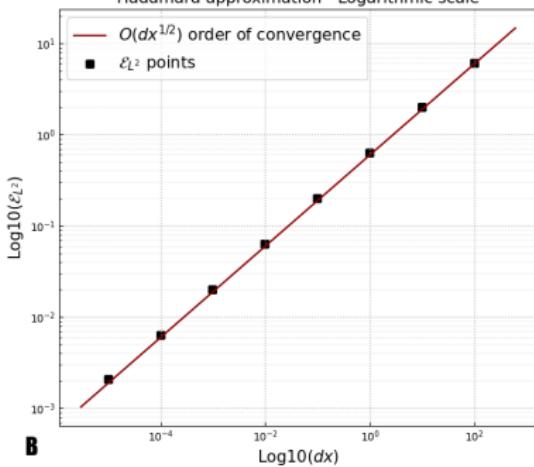


Figure 19: A) Solution analytique et approximative avec la dérivée de Hadamard, B) Erreur numérique calculée par rapport à la solution analytique.

Error  $\mathcal{E}_{L^2}$  between the analytical and numerical solution of the Hadamard approximation - Logarithmic scale

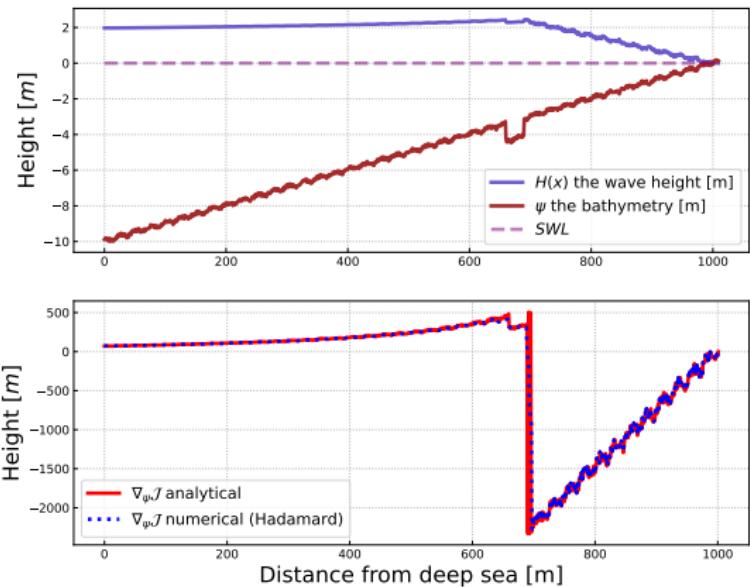


En posant:  $\nabla_x \mathcal{J} = \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \right)^\top$  et  $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2 + dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$ , on calcule

En posant:  $\nabla_x \mathcal{J} = \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \right)^T$  et  $n = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2 + dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$ , on calcule

### Paramètres:

- Modèle Shoaling avec:
  - $H_0 = 2 \text{ m}$ ,
  - $T_0 = 10 \text{ s}$ ,
  - $h_0 = 10 \text{ m}$ .
  - Fond linéaire avec des perturbations.



*Figure 20: Comparaison du calcul numériques et analytique de  $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$  sur un fond linéaire avec des perturbations.*

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

## 5 Conclusion et Perspectives

# Nouveau Workflow basé du la dérivée au sens d'Hadamard

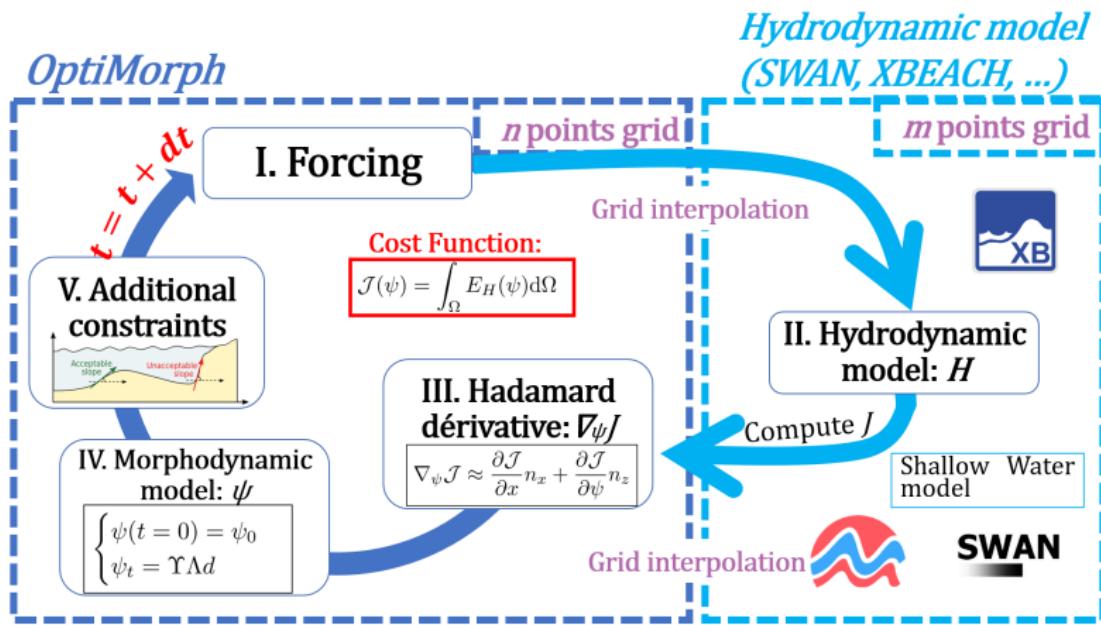


Figure 21: Nouveau workflow d'OptiMorph basé sur la dérivée au sens d'Hadamard

## Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

# Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

## Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- 
- ✓ Très rapide.
  - ✓ Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  analytiquement possible.
  - ✗ Très peu physique.

## Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

## Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- ✓ Très rapide.
  - ✓ Calcul de  $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$  analytiquement possible.
  - ✗ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

- ✓ Rapide.
  - ✓ Calcul entièrement l'action des vagues.
  - ✗ Ne traite pas les ondes longues.

# Présentation des 3 modèles de vagues

3 modèles à 3 complexités différentes:

## Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

- ✓ Très rapide.
  - ✓ Calcul de  $\nabla_{\psi}\mathcal{J}$  analytiquement possible.
  - ✗ Très peu physique.

SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues.

- ✓ Rapide.
  - ✓ Calcul entièrement l'action des vagues.
  - ✗ Ne traite pas les ondes longues.

XBeach

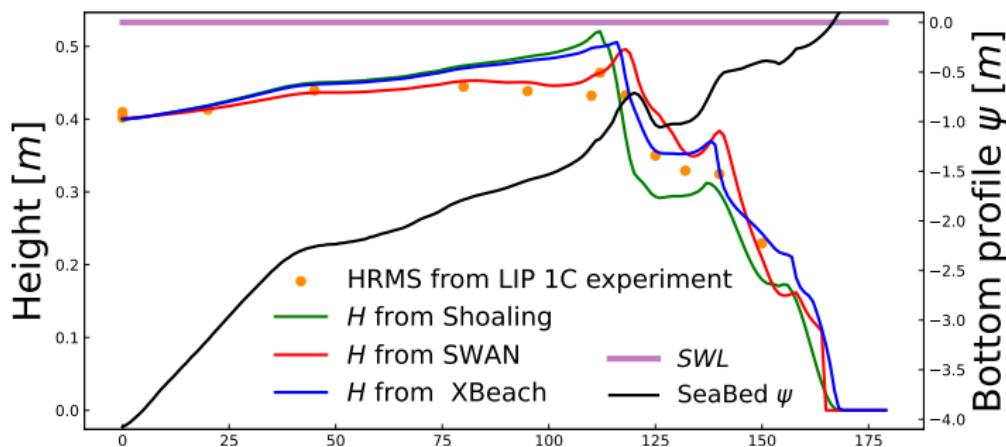
Résout séparément les ondes longues (vagues à vagues) et les ondes courtes (spectral).

- ✓ Considéré comme une référence.
  - ✓ Résout également la circulation.
  - ✗ Temps de calculs assez conséquents.

# Comparaison des modèles de vagues

## Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$

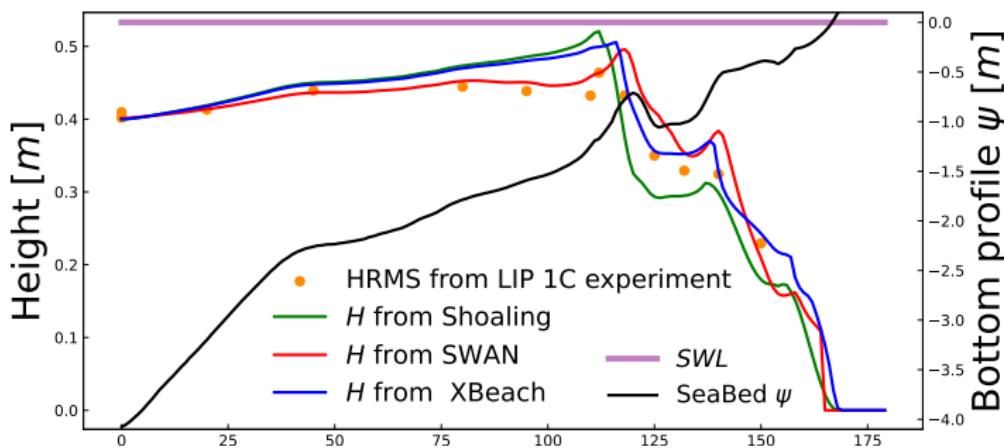


*Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.*

# Comparaison des modèles de vagues

## Paramètres:

- $H_s = 135 \text{ mm}$
- $T_0 = 2.5 \text{ s}$
- $T_f = 30 \text{ mins}$



*Figure 22: Résultats des vagues obtenus avec les modèles Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du fond marin lors de l'expérience du canal LIP 1C.*

- **Shoaling** :  $H_{\text{RMSE}} = 4.5 \text{ cm}$ .
- **SWAN** :  $H_{\text{RMSE}} = 3.3 \text{ cm}$ .
- **XBeach** :  $H_{\text{RMSE}} = 2.8 \text{ cm}$ .

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
  - Comment calculer  $\nabla_\psi J$  ?
  - Validation numérique de la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Présentation du nouveau modèle basé sur la dérivée par rapport à la forme au sens d'Hadamard
  - Résultats morphodynamiques
- 4 Évolution du modèle en 2D

## 5 Conclusion et Perspectives

# Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

## SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
- SANDS B: Une partie accréitive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	$H_s$ [m]	$T_0$ [s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

Table 1: Paramètres de SANDS.

## Présentation des expériences en canal : SANDS et LIP

SANDS (Eichentopf et al., 2018)

Le Canal d'Investigació i Experimentació Marítima (CIEM) (Barcelone) mesure 100x3x4.5 m.

- SANDS A: Une partie érosive sur une plage linéaire de pente 1/15.
  - SANDS B: Une partie accréitive sur le profil final de SANDS A.

	Fond initial	$H_S$ [m]	$T_0$ [s]	Durée [h]
A	Profil initial	0.53	4.14	23.5
B	Résultat de A	0.32	5.44	20.4

**Table 1:** Paramètres de SANDS.

LIP (Roelvink and Reniers, 1995)

The Delta Flume of Delft Hydraulics measures 225x7x5 m.

- LIP-1A: Avant la tempête, création d'une barre sédimentaire sur une plage linéaire de pente 1/30.
  - LIP-1B: Tempête, la barre se déplace vers le large sous l'action de grosses vagues, érosion.
  - LIP-1C: Après la tempête, la barre se déplace vers la côte, accrétion.

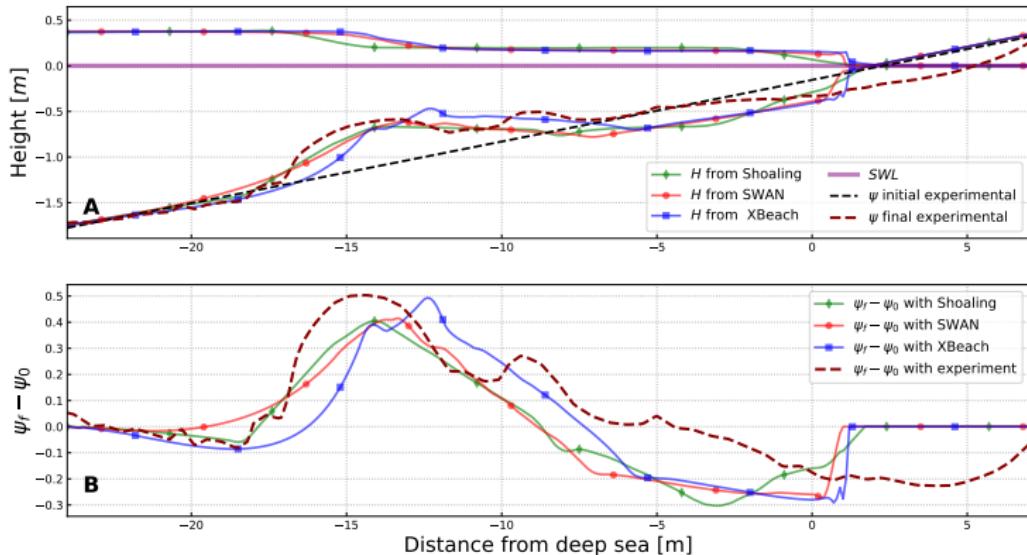
	Fond initial	$H_s[m]$	$T_0[s]$	Durée [h]
1A	Profil initial	0.9	5	
1B	Résultat de 1A	1.4	5	18
1C	Résultat de 1B	0.6	8	13

**Table 2:** Paramètres de LIP.

# Résultats en canal de l'expérience SANDS

## Paramètres:

- $H_s = 0.32 \text{ m}$
- $T_0 = 5.44 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente:  $1/15$



*Figure 23: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de  $\psi_f - \psi_0$ .*

# Résultats en canal de l'expérience SANDS

## Paramètres:

- $H_s = 0.32 \text{ m}$
- $T_0 = 5.44 \text{ s}$
- $T_f = 23\text{h}30$
- Pente:  $1/15$

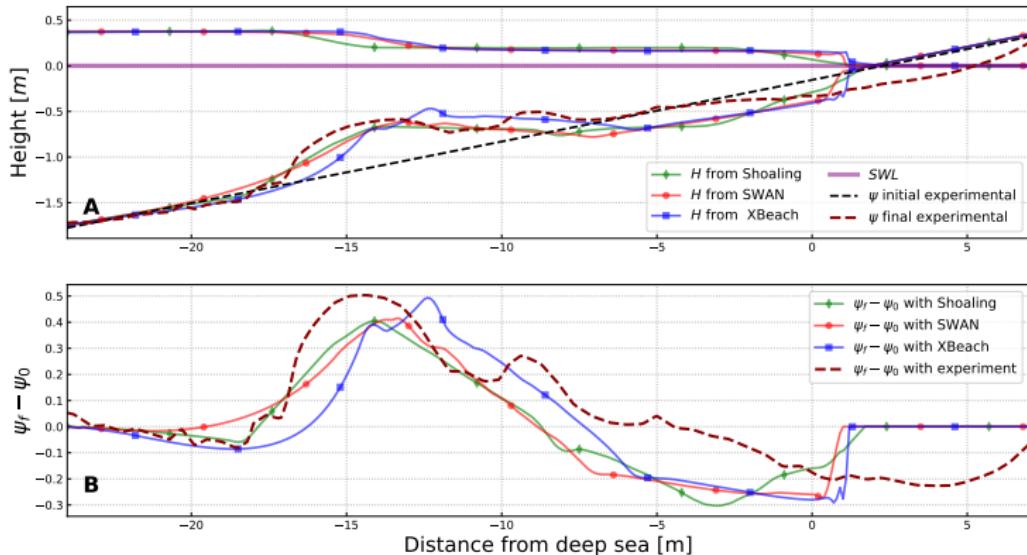


Figure 23: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues Shoaling (vert), SWAN (rouge) et XBeach (bleu). B) Écarts de  $\psi_f - \psi_0$ .

- Shoaling :  $\psi_{RMSE} = 11.7 \text{ cm}$ .
- SWAN :  $\psi_{RMSE} = 12.7 \text{ cm}$ .
- XBeach :  $\psi_{RMSE} = 13.5 \text{ cm}$ .

# Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

## Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$
- Pente: 1/30

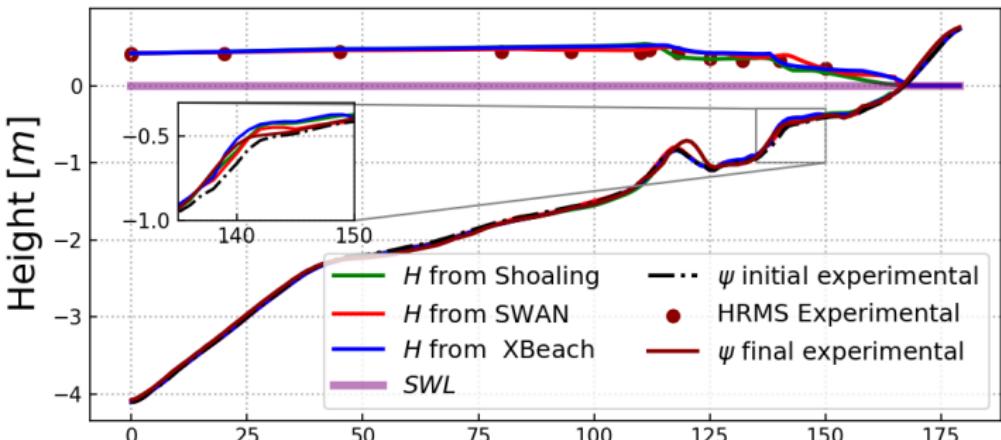


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

# Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

## Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$
- Pente: 1/30

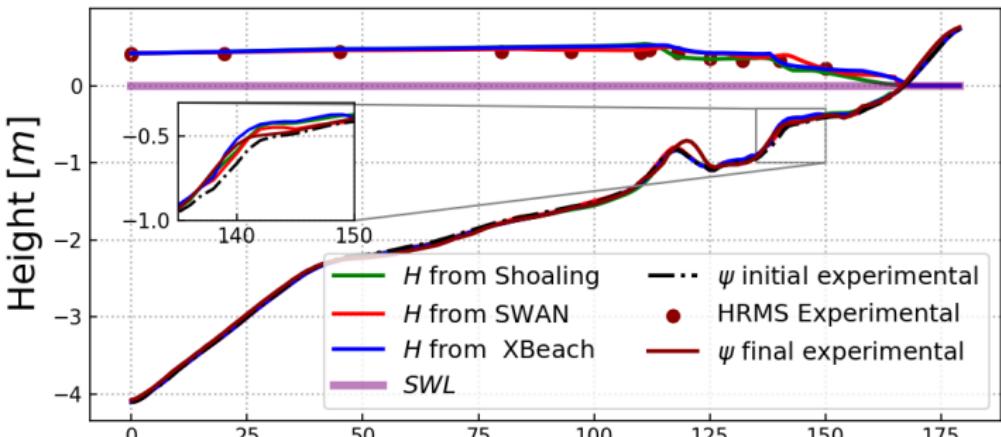


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

- Comportement de la barre intérieure globalement reproduit.

# Résultats en canal de l'expérience LIP 1C

## Paramètres:

- $H_s = 0.6 \text{ m}$
- $T_0 = 8 \text{ s}$
- $T_f = 13\text{h}$
- Pente: 1/30

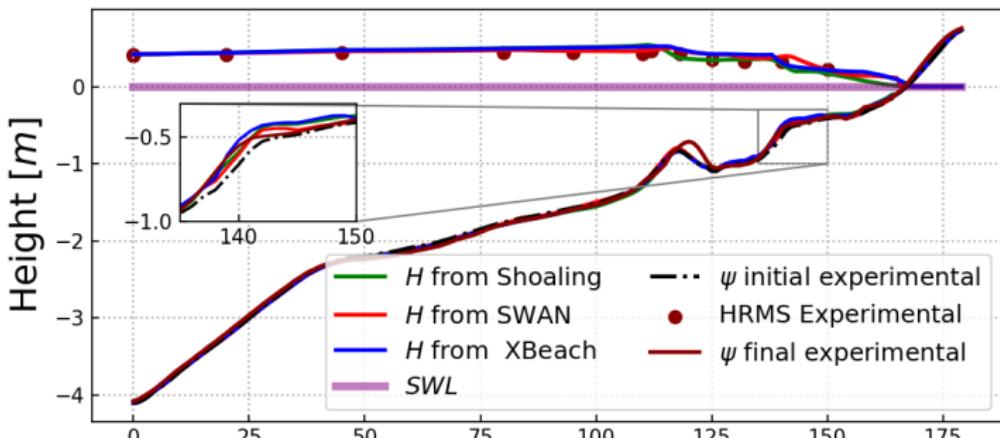


Figure 24: A) Résultats hydro-morphodynamiques avec des modèles de vagues Shoaling, SWAN et XBeach. Configuration du profil de SANDS érosive.

- Comportement de la barre intérieure globalement reproduit.
- Mais aucun déplacement latéral de la barre extérieure.

# Ajout de transport latéral

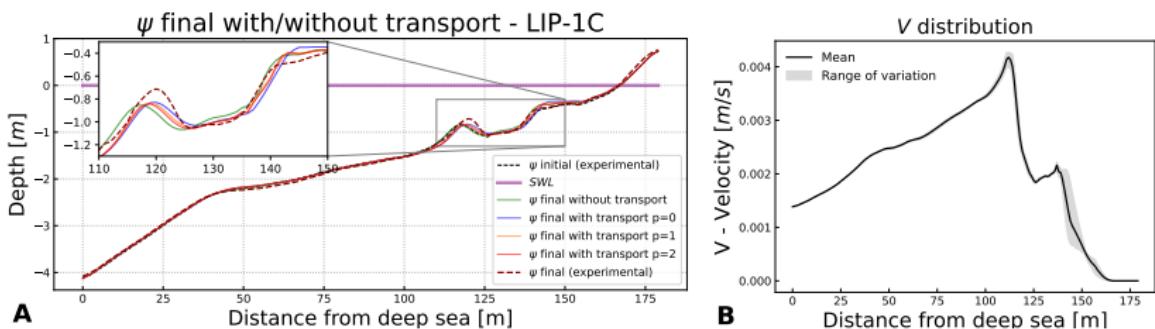
- Nouvelle équation gouvernante:  $\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi$ ,

## Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante:  $\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi$ ,
- Une vitesse possible:  $V = 0.01 U_b \left( \frac{H}{H_{\max}} \right)^p$  avec  $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$ ,

# Ajout de transport latéral

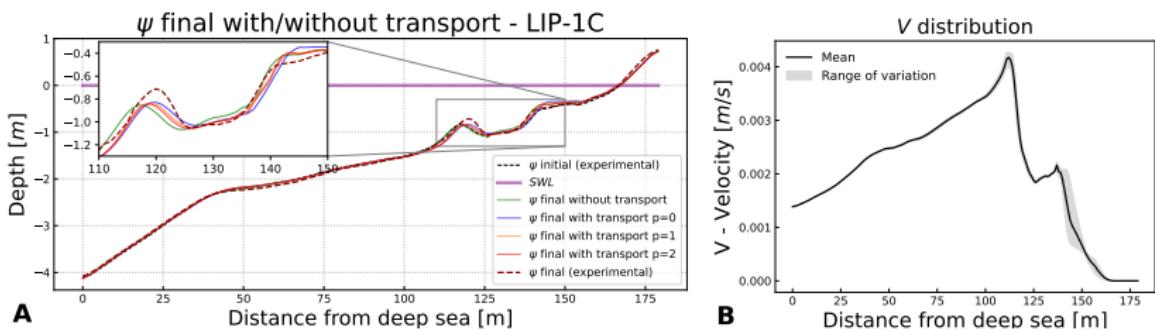
- Nouvelle équation gouvernante:  $\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi$ ,
- Une vitesse possible:  $V = 0.01 U_b \left( \frac{H}{H_{\max}} \right)^p$  avec  $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$ ,



*Figure 25: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour  $p = 0, 1, 2$  et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour  $p = 1$ .*

# Ajout de transport latéral

- Nouvelle équation gouvernante:  $\psi_t = \Upsilon \Lambda d - V \nabla_s \psi$ ,
- Une vitesse possible:  $V = 0.01 U_b \left( \frac{H}{H_{\max}} \right)^p$  avec  $U_b = \frac{\pi H}{T_0 \sinh(kh)}$ ,



*Figure 25: A) Résultats morphodynamiques du modèle OptiMorph avec transport latéral pour  $p = 0, 1, 2$  et du modèle de vagues XBeach, pour l'expérience du canal LIP 1C. B) Distribution des vitesses pour  $p = 1$ .*

- Mais  $V > 0$  pour ce choix  $\Rightarrow$  pas de déplacement de barre sédimentaire vers le large (comme dans LIP-1B).

## Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \nabla \Lambda d - V \nabla_s \psi & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_v \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

## Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma \Lambda d - \nabla_s \psi & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant  $\mathcal{J}$ .

## Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

$$\begin{cases} \psi_t = \gamma \Lambda d - \nabla_s \psi & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant  $\mathcal{J}$ .
  - Comment calculer  $\nabla_V \mathcal{J}$  ?

## Vers une meilleure définition de la vitesse ?

- Un nouveau couple d'équations gouvernantes ?

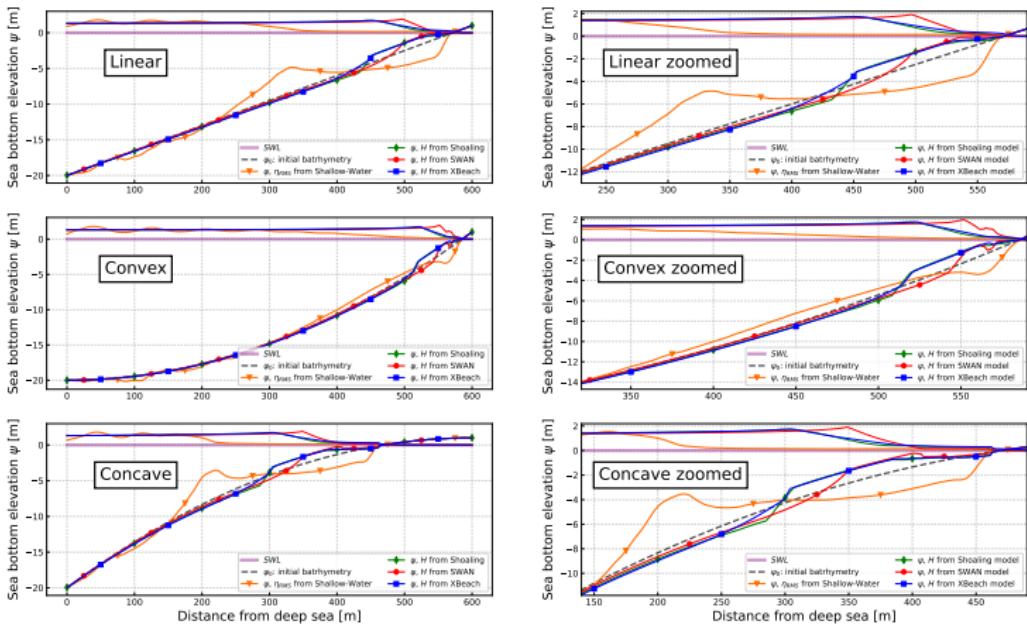
$$\begin{cases} \psi_t = \gamma \Lambda d - \nabla_s \psi & (a) \\ V_t = -\rho \nabla_V \mathcal{J} & (b) \end{cases}$$

- L'équation (b) traduit une vitesse minimisant  $\mathcal{J}$ .
  - Comment calculer  $\nabla_V \mathcal{J}$  ?
  - Est-ce que les déplacements morphodynamiques latéraux peuvent minimiser  $\mathcal{J}$  ?

# Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
  - $T_0 = 12 \text{ s}$
  - $T_f = 72 \text{ h}$
  - Pente:  $1/50$
  - $\Omega = 600 \text{ m}$
- 

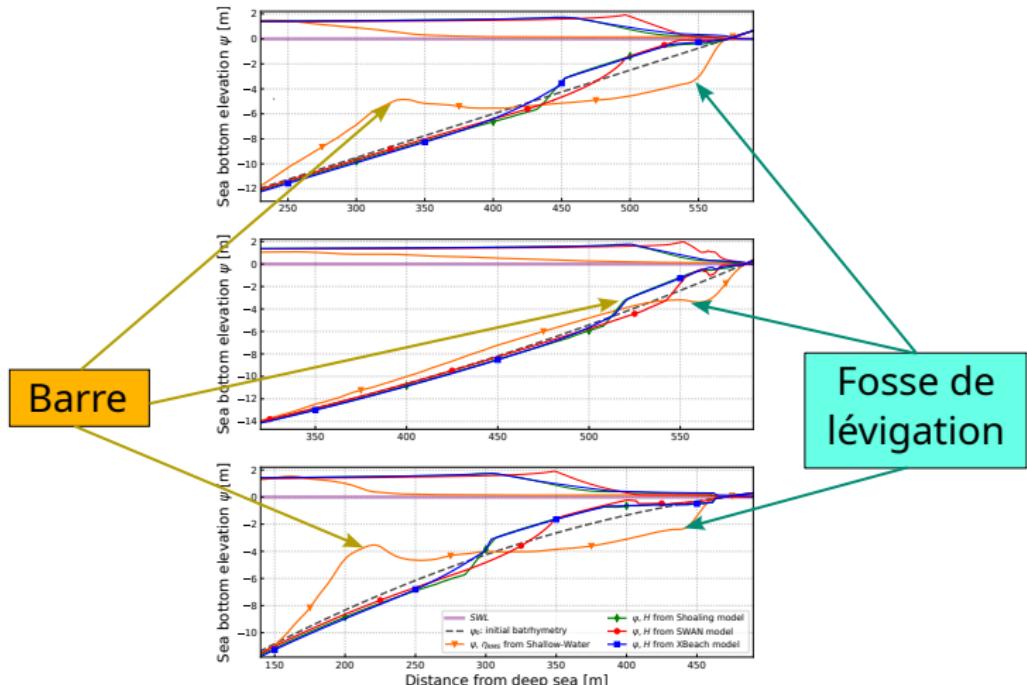


**Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).**

# Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50
- $\Omega = 600 \text{ m}$

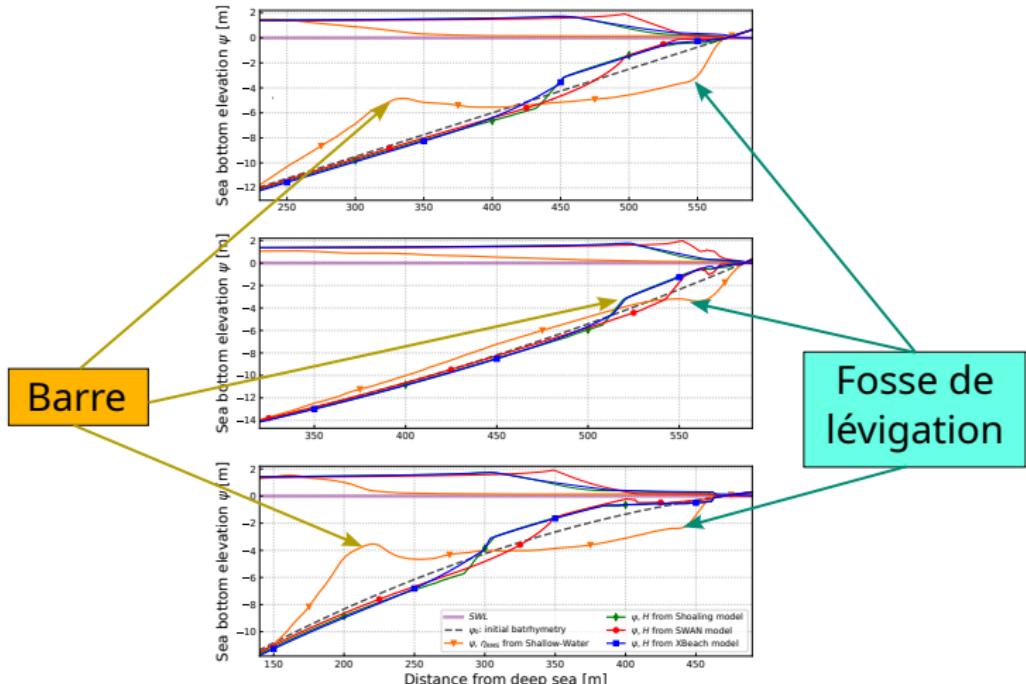


*Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).*

# Résultats sur des profils de plage à l'échelle in situ

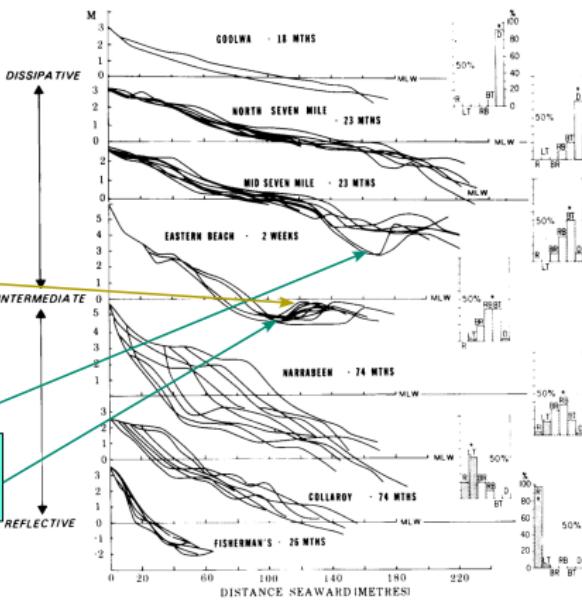
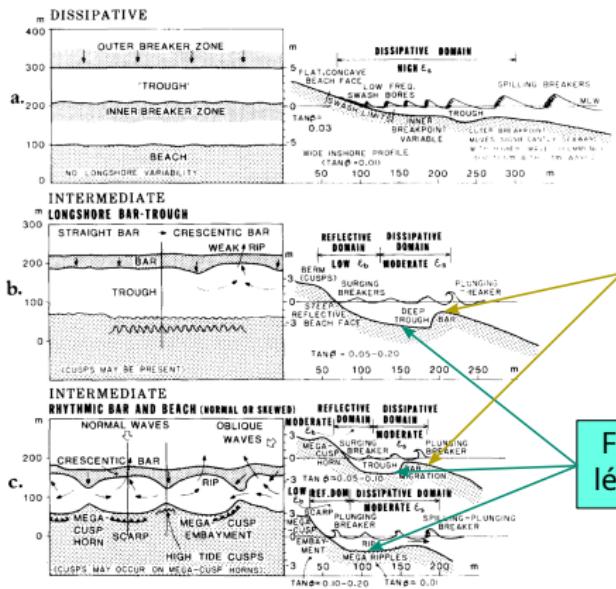
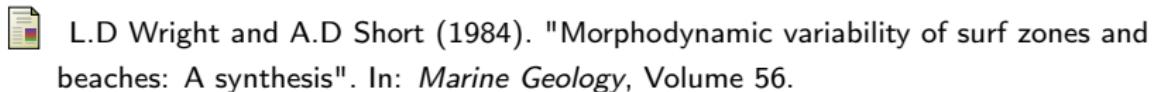
## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente: 1/50
- $\Omega = 600 \text{ m}$
- Caractéristiques observables dans la nature.



*Figure 26: Résultats hydro-morphodynamiques avec les modèles de vagues (Shoaling (vert), SWAN (rouge), XBeach (bleu), Saint-Venant (orange)). Configuration de profils linear, convex, concave (noir pointillé).*

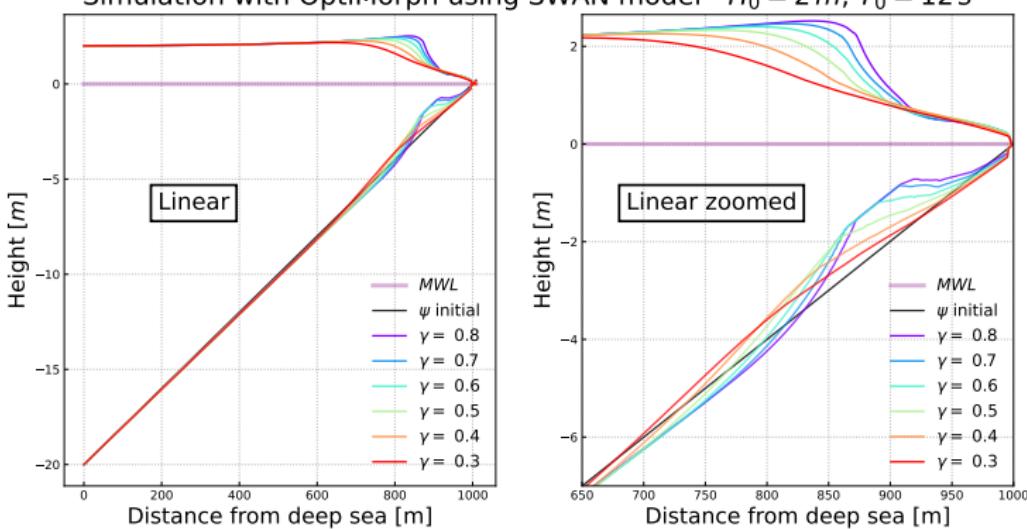
### Comparaison avec une référence de la littérature



**Figure 27:** (left) Plan and profile configurations of the six major beach states. (right) Beach profile mobility in relation to modal beach state and state variability.

## Paramètres:

- SWAN
  - $H_0 = 2 \text{ m}$
  - $T_0 = 12 \text{ s}$
  - $T_f = 72 \text{ h}$
  - Pente: 1/50



*Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.*

# Positionnement de la barre sédimentaire au point de déferlement de la vague

## Paramètres:

- SWAN
- $H_0 = 2 \text{ m}$
- $T_0 = 12 \text{ s}$
- $T_f = 72 \text{ h}$
- Pente:  $1/50$

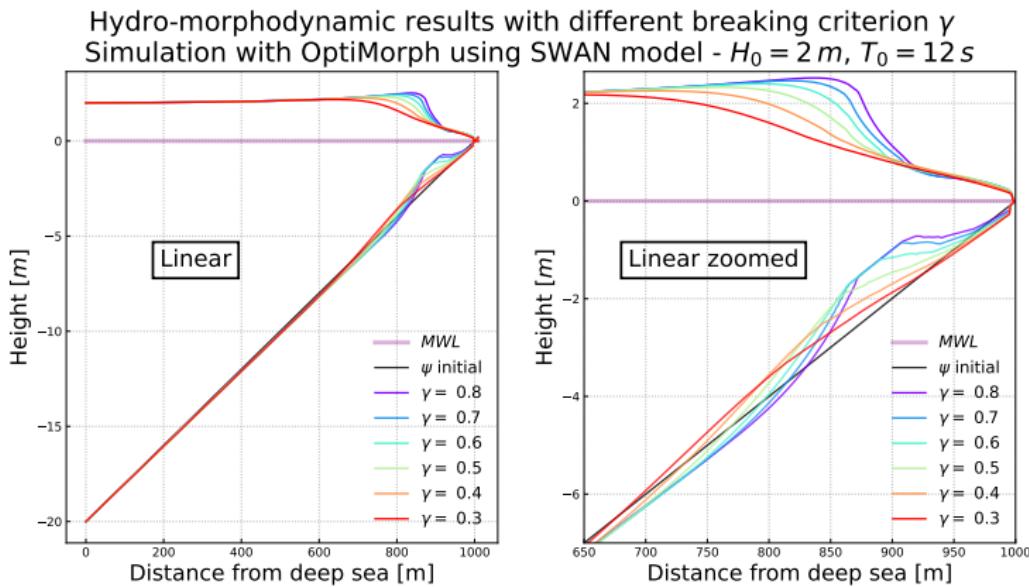


Figure 28: Résultats hydro-morphodynamiques avec différents critères de déferlement.

- Création d'une barre sédimentaire au point d'inflexion de la vague.

## Temps de calcul

<b>Simulation with 180 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

**Table 3:** Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

<b>Simulation with 1000 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

**Table 4:** Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

## Temps de calcul

<b>Simulation with 180 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

**Table 3:** Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

<b>Simulation with 1000 points</b>	Hydrodynamic			<b>Morphodynamic by wave energy minimization</b>
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

**Table 4:** Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.

## Temps de calcul

<b>Simulation with 180 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

**Table 3:** Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

<b>Simulation with 1000 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation for with 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

**Table 4: Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues. Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.**

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
  - Le temps de calcul morphodynamique négligeable devant l'hydrodynamique.

# Temps de calcul

<b>Simulation with 180 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.004	0.278	7.372	0.012
Total computation time for 1000 iterations (mins)	0.26	4.83	123.06	0.2

**Table 3:** Temps de calcul avec 180 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.  
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

<b>Simulation with 1000 points</b>	Hydrodynamic			Morphodynamic by wave energy minimization
	Shoaling	SWAN	XBeach	
Computation time for 1 iteration (s)	0.023	1.193	28.738	0.074
Total computation time for 1000 iterations (mins)	1.61	21.12	480.2	1.27

**Table 4:** Temps de calcul avec 1000 points : LIP - 1C avec différents modèles de vagues.  
Ordinateur à 2,4 GHz sur un processeur Intel Xeon E5-2680.

- Le temps de calcul augmente linéairement par rapport au nombre de points du maillage.
- Le temps de calcul morphodynamique négligeable devant l'hydrodynamique.



*Video 1: Démonstration,  
visionnable sur les temps morts.*

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
  - Présentation du modèle en 2D
  - Résultats 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
  - Présentation du modèle en 2D
  - Résultats 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

, valable en 2D.

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard:  $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$ , **valable en 2D.**

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard:  $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$ , **valable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard:  $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$ , **valable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.
  - Utilisation de modèles de vagues en 2D:

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard: 
$$\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$$
, **valable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.
  - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
    - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard:  $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$ , **valable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.
  - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
    - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
    - Modèles spectraux : **SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...**

## Passage du modèle en 2D: Immédiat.

- Équation gouvernante: 
$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$
, **valable en 2D.**
  - Calcul de  $\nabla_\psi \mathcal{J}$  au sens Hadamard:  $\nabla_\psi \mathcal{J} = \nabla_X \mathcal{J}.n$ , **valable en 2D.**
  - Extension des contraintes en 2D.
  - Utilisation de modèles de vagues en 2D:
    - Modèle basé sur le déferlement : **Shoaling en multi-1D.**
    - Modèles spectraux : SWAN, XBeach, WAVEWATCH III, ...
    - Modèles vagues à vagues: **SWASH, REF/DIF, FUNWAVE, ...**

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
  - Présentation du modèle en 2D
  - Résultats 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Présentation de l'expérience Copter 2D

Les vagues irrégulières de JONSWAP sont générées sur des séquences de 20 mn, répétées plusieurs fois. Quatre climats de vagues typiques:

- La tempête se lève :  $H_0 = 17 \text{ cm}/T_0 = 2.1 \text{ s}$ .
- Sommet de la tempête :  $H_0 = 23 \text{ cm}/T_0 = 2.3 \text{ s} \rightarrow \text{Géotube}$ .
- La tempête faiblit :  $H_0 = 18 \text{ cm}/T_0 = 3.5 \text{ s}$ .
- Conditions de vagues calmes :  $H_0 = 11 \text{ cm}/T_0 = 2. \text{ s}$

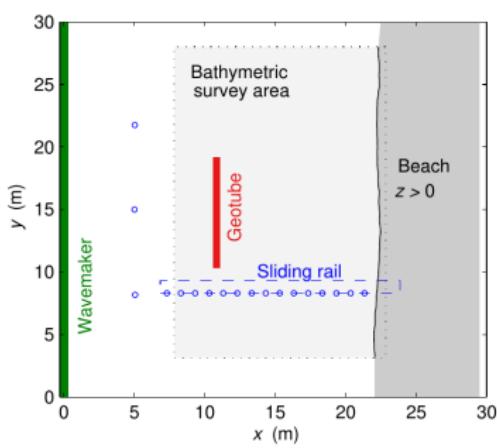


Figure 29: Schéma de Copter 2D.

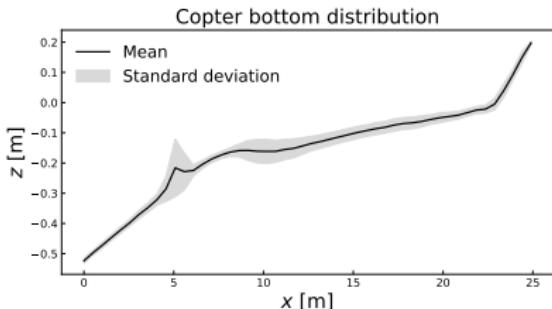


Figure 30: Photo de l'expérience Copter 2D.

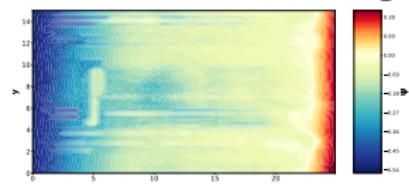
## Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

## Paramètres:

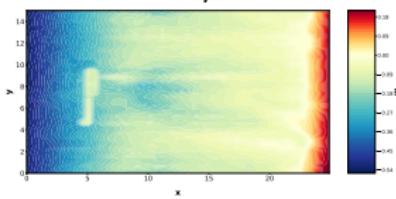
- $H_0 = 0.23$  m,
  - $T_0 = 2.3$  s,
  - $T_f = 20$  minutes.



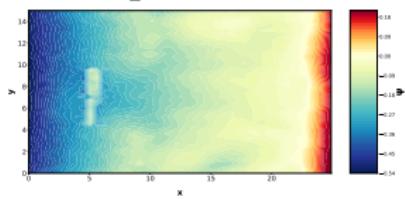
## Multi-1D Shoaling



REF/DIF



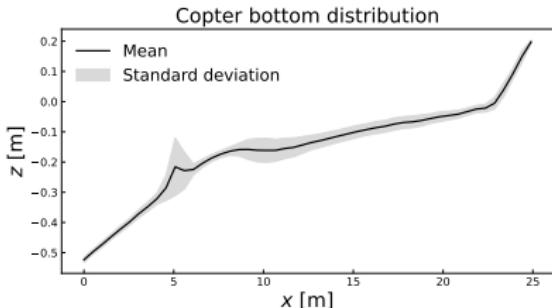
## Experimental



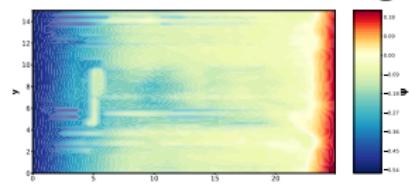
## Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

## Paramètres:

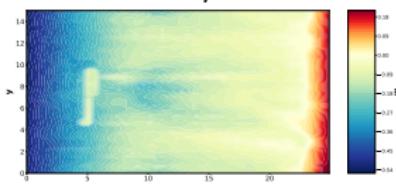
- $H_0 = 0.23$  m,
  - $T_0 = 2.3$  s,
  - $T_f = 20$  minutes.



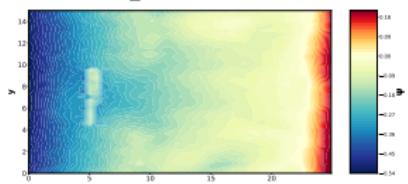
## Multi-1D Shoaling



REF/DIF



## Experimental

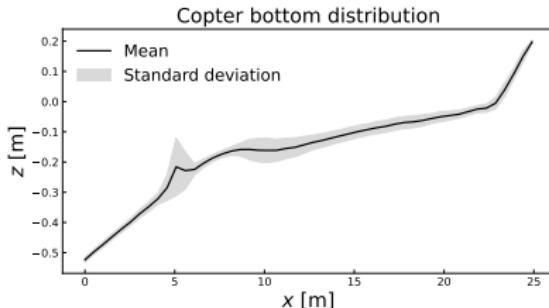


- Observation d'une fausse de lévigation derrière le tube en géotextile.

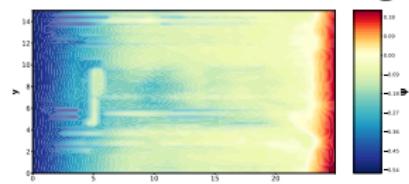
# Résultats morphodynamiques sur Copter 2D

## Paramètres:

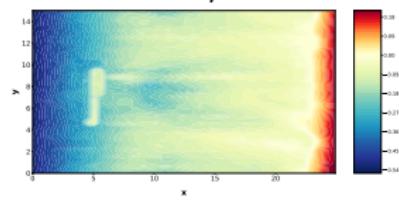
- $H_0 = 0.23 \text{ m}$ ,
- $T_0 = 2.3 \text{ s}$ ,
- $T_f = 20 \text{ minutes}$ .



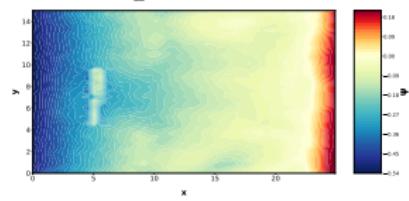
## Multi-1D Shoaling



## REF/DIF



## Experimental

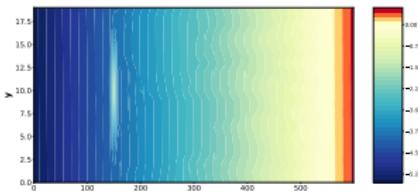


- Observation d'une fausse de lévigation derrière le tube en géotextile.
- Positionnement de la rupture de pente derrière l'ouvrage.

## Importance du modèle hydrodynamique

## Paramètres:

- $H_0 = 2$  m,  $T_0 = 6$  s,
  - $T_f = 72$  h, Pente: 1/100.



*Figure 31: Fond initial*

# Importance du modèle hydrodynamique

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,  $T_0 = 6 \text{ s}$ ,
- $T_f = 72 \text{ h}$ , Pente:  $1/100$ .

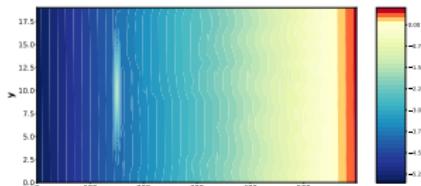
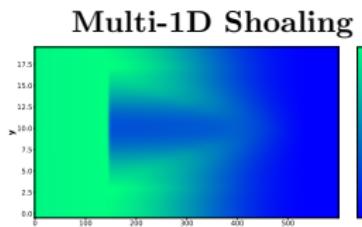
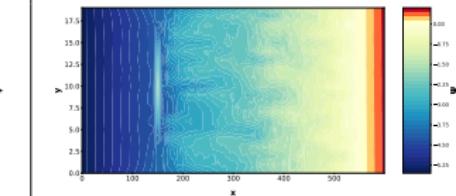
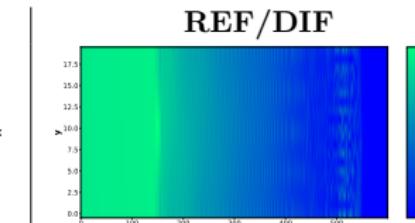
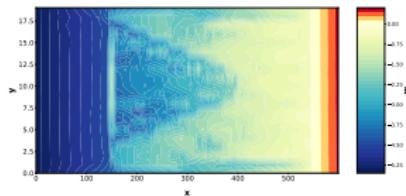


Figure 31: Fond initial

## Hydrodynamique



## Morphodynamique



# Importance du modèle hydrodynamique

## Paramètres:

- $H_0 = 2 \text{ m}$ ,  $T_0 = 6 \text{ s}$ ,
- $T_f = 72 \text{ h}$ , Pente: 1/100.

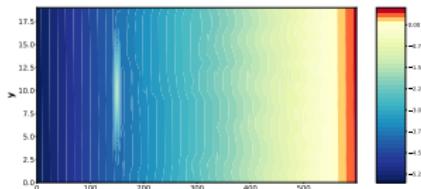
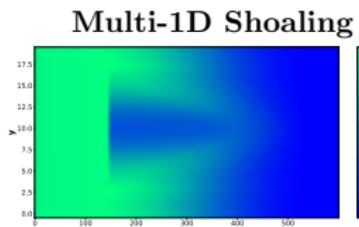
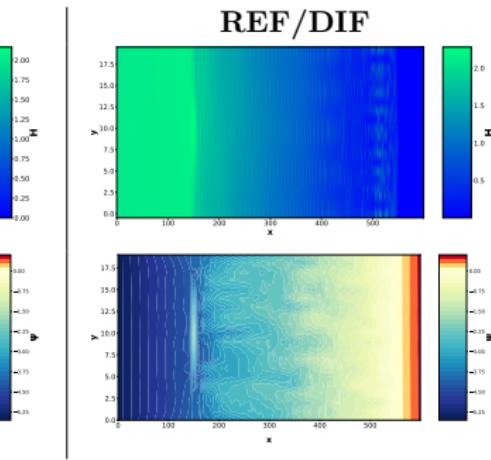
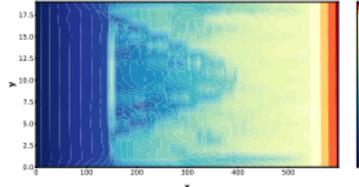


Figure 31: Fond initial

## Hydrodynamique



## Morphodynamique



- Deux modèles de vagues différents produisant deux résultats morphodynamiques différents.

# Table des Matières

- 1 Comment construire un modèle de dynamique des plages sableuses, à création de barres sédimentaires, comme solution d'un problème de minimisation ?
- 2 Vers un modèle morphodynamique
- 3 Extension à un modèle générique
- 4 Évolution du modèle en 2D
- 5 Conclusion et Perspectives

# Conclusion

- Un modèle générique, de faible complexité, pour la création de barres sédimentaires.
- Une nouvelle approche de calcul du gradient par rapport à la forme.
- Des cas de benchmark validés.
- Un modèle de vagues devant être choisi minutieusement en fonction du domaine d'étude.

## Publications:

- 
- Ronan Dupont, Frédéric Bouchette, and Bijan Mohammadi. (2024). "Beaches morphodynamic modeling based on hadamard sensitivity analysis.". In:
- Ocean Modelling*
- , page 102370.
- 
- 
- Ronan Dupont, Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Samuel Meulé. (2023). "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization.". In:
- Ocean Modelling*
- , page 102197.

## Perspectives

- Améliorer l'approche du transport latéral.
  - Continuer la validation *in situ* (accrétion, 2D,...).
  - Proposer OptiMorph comme un module intégrable dans les modèles morphodynamiques classiques.
  - Étoffer le modèle 2D (simplifier l'utilisation pour des cas réels,...).
  - Utiliser l'approche d'Hadamard dans un contexte différent (aérodynamique, thermodynamique, ...).

## En cours de publication:

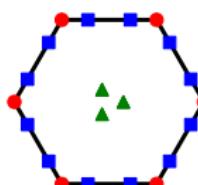


Ronan Dupont (202X). "Solving the Mild-Slope and Helmholtz equations using the Virtual Element Method (VEM), dealing with high order Robin Boundary Condition. "

## Un projet en parallèle

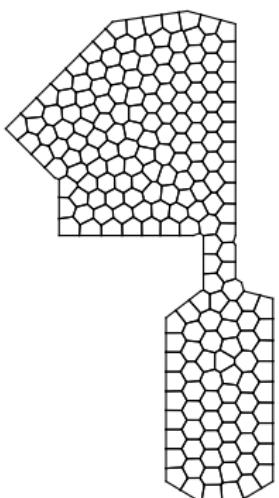


Ronan Dupont (202X). "Solving the Mild-Slope and Helmholtz equations using the Virtual Element Method (VEM), dealing with high order Robin Boundary Condition. "

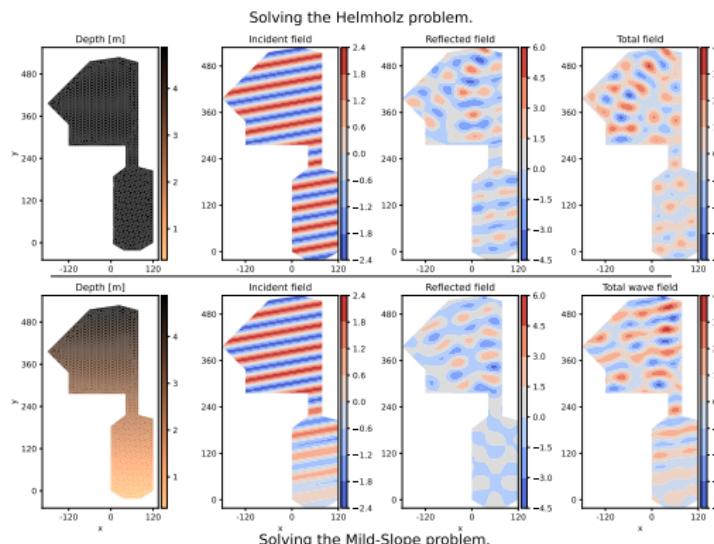


*2D element with:*

- : Summits dofs
  - : Edges dofs
  - ▲ : Inner dofs.



## *Maillage polyédrique du port de Cherbourg.*



## Résultats VEM des équations d'Helmholtz et Mild-Slope sur le port de Cherbourg.

Merci  
pour votre attention!

# References

- R. Dupont, M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, and S. Meulé, "Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization," *Ocean Modelling*, p. 102 197, 2023.
- R. Dupont, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Modelling beaches morphodynamic by hadamard sensitivity analysis," *Ocean Modelling*, vol. 189, p. 102 370, 2024.
- R. Dupont, F. Bouchette, B. Mohammadi, and D. Sous, "Optimorph: Un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. analyse de sensibilité en 1d et application multi-1d," *JNGCGC*, vol. 17, pp. 327–336, 2022.
- D. Isèbe, P. Azérad, F. Bouchette, and B. Mohammadi, "Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering," *en, International Review of Civil Engineering (IRECE)*, vol. 5, no. 2, p. 75, 2014.
- D. Isèbe, P. Azérad, B. Mohammadi, and F. Bouchette, "Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact," *Coastal Engineering*, vol. 55, no. 1, pp. 35–46, 2008.
- D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, and B. Mohammadi, "Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 8, pp. 1262–1277, 2008.
- A. Bouharguane, P. Azerad, F. Bouchette, F. Marche, and B. Mohammadi, "Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 13, no. 4, pp. 759–772, 2010.
- B. Mohammadi and F. Bouchette, "Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics," *Computers and Fluids*, vol. 89, pp. 78–87, 2014.
- B. Mohammadi and A. Bouharguane, "Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters," *Computers and Fluids*, vol. 40, pp. 291–298, 2011.
- B. Mohammadi, "Uncertainty quantification in littoral erosion," *Computers & Fluids*, vol. 143, pp. 120–133, 2017.
- M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, and N. Fraysse, "Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis," *en, China Ocean Engineering*, vol. 35, no. 6, pp. 802–813, 2021.
- A. Bouharguane and B. Mohammadi, "Minimisation principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 163–172, 2012.

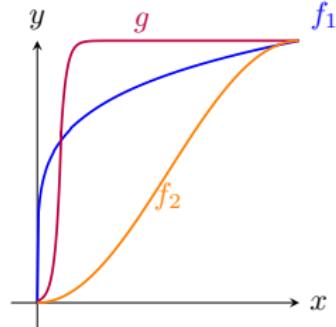
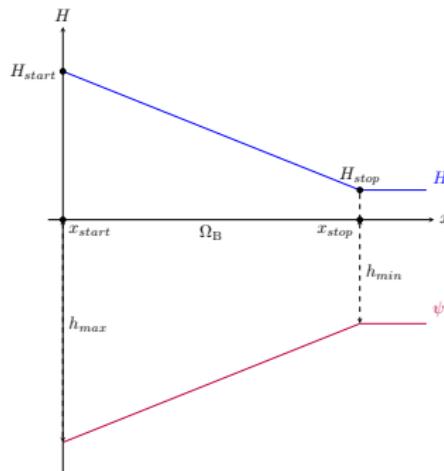
# Nouveau modèle de vagues

## Modèle Shoaling

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement:

$$\mathcal{F}(\gamma h(x, t)) = H(x_{start}) + [H(x_{stop}) - H(x_{start})] \cdot f\left(\frac{x-x_{start}}{x_{stop}-x_{start}}\right) \cdot g\left(\frac{h_{max}-h}{h_{max}-h_{min}}\right)$$



## Shoaling model:



Cook (2021)

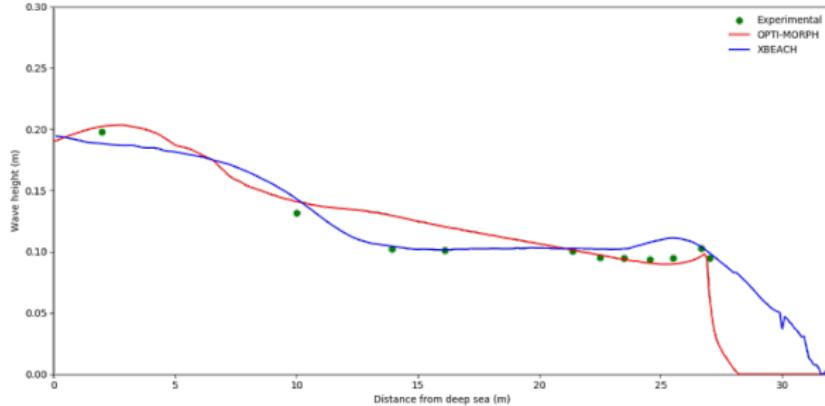
$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_{\mathbf{S}}(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_{\mathbf{S}}(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{S}} \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_{\mathbf{B}} \end{cases}$$

## Shoaling model:



Cook (2021)

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$



## Paramètres:

- $H_s = 135$  mm
- $T_0 = 2.5$  s

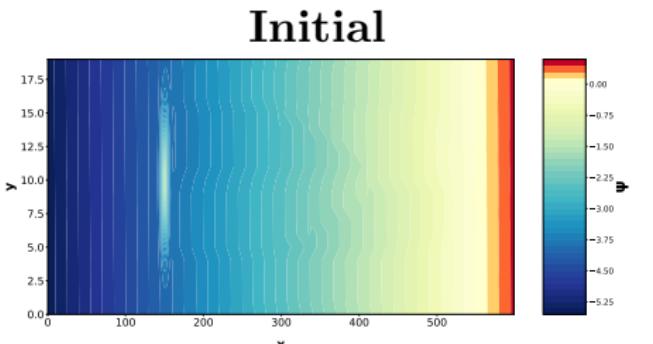
Figure 33: Comparaison de la hauteur moyenne des vagues lors d'une simulation de tempête sur l'expérience Copter. Cook (2021).

# Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - Shoaling

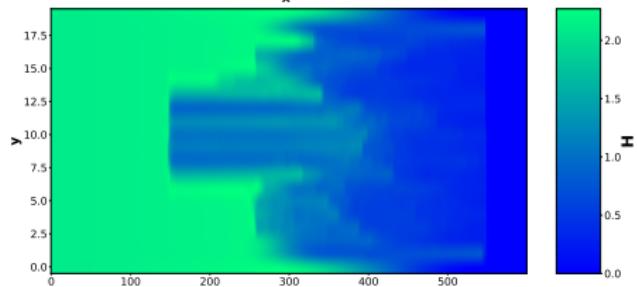
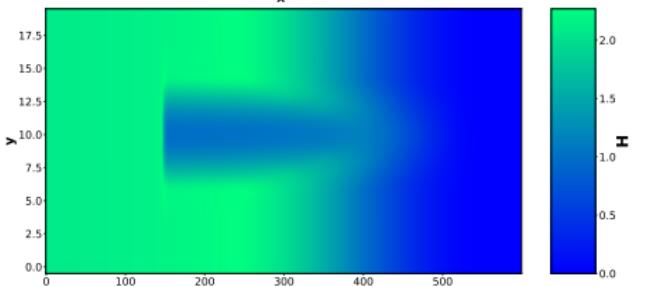
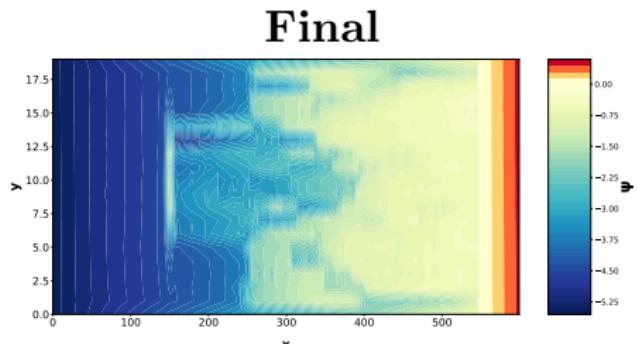
## Paramètres:

- **Shoaling Multi-1D,** •  $H_0 = 2 \text{ m}$ , •  $T_0 = 6 \text{ s}$ , •  $T_f = 72 \text{ h}$ , •  
Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final

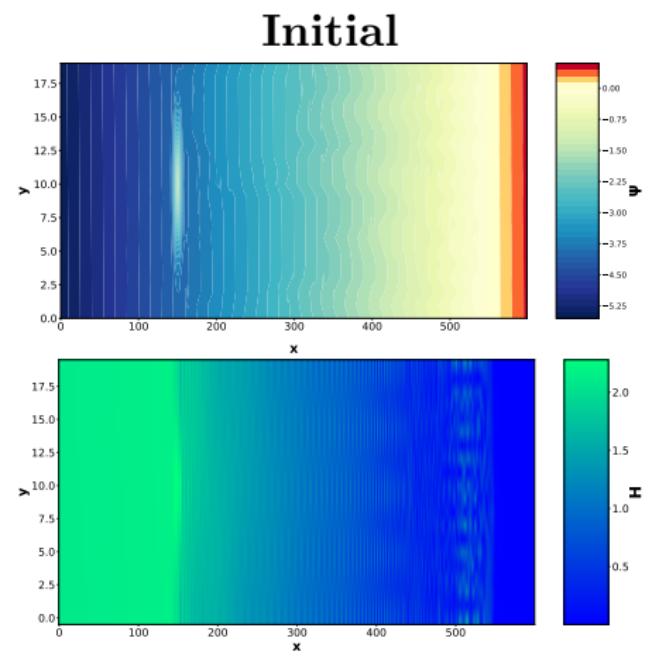


# Résultats sur une pente linéaire avec un tube en géotextile - REF/DIF

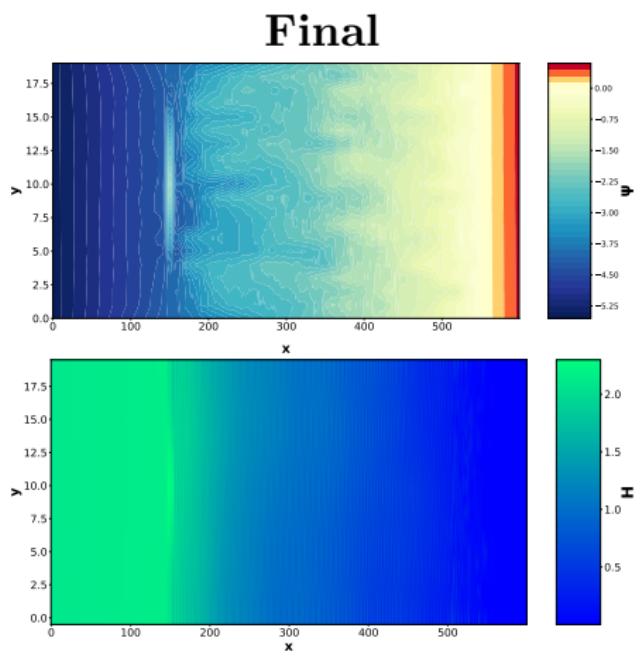
## Paramètres:

- REF/DIF, •  $H_0 = 2 \text{ m}$ , •  $T_0 = 6 \text{ s}$ , •  $T_f = 72 \text{ h}$ ,
- Pente: 1/100, • Géotube en forme de gaussienne.

Initial



Final



# Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes I

## Shoaling

Résout l'équation de Shoaling avec une paramétrisation sur le déferlement.

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \mathcal{F}(\gamma h(x, t)) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

avec  $\mathcal{F}$  une fonction de paramétrant le déferlement.

## SWAN

Résout de manière spectrale, l'action des vagues:  $A(x, y, \sigma, \theta) = \frac{E(x, y, \sigma, \theta)}{\sigma}$  avec,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (C_x A)}{\partial x} + \frac{\partial (C_y A)}{\partial y} + \frac{\partial (C_\sigma A)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (C_\theta A)}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}.$$

- $C_x$  et  $C_y$ : vitesses selon  $x$  et  $y$ ;
- $C_\sigma$ : déplacement de la fréquence relative dû aux variations de la bathymétrie
- $C_\theta$ : la réfraction induite par les effets combinés de la profondeur et des courants.
- $S$ : processus qui génèrent, dissipent ou redistribuent l'énergie des vagues.

# Présentation des 3 modèles de vagues à 3 complexités différentes II

## XBeach

Résout d'une part, **les ondes longues (vagues à vagues)** avec les débits calculés à l'aide d'une formulation moyenne en profondeur des équations Shallow-Water, en tenant compte du flux de masse induit par les vagues et des débits de retour:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial u^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial u^L}{\partial y} - fv^L - v_h \left( \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sx}}{\rho h} - \frac{T_{bx}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho h} \\ \frac{\partial v^L}{\partial t} + u^L \frac{\partial v^L}{\partial x} + v^L \frac{\partial v^L}{\partial y} + fu^L - v_h \left( \frac{\partial^2 v^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^L}{\partial y^2} \right) &= \frac{T_{sy}}{\rho h} - \frac{T_{by}^E}{\rho h} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho h} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u^L h}{\partial x} + \frac{\partial v^L h}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Où les composantes de la vitesse lagrangienne (désignées par l'exposant  $L$ ) sont la superposition de la vitesse eulérienne et de la vitesse de dérive de Stokes :

$$u^L = u^E + u^S \quad \text{et} \quad v^L = v^E + v^S.$$

Résout d'une autre part, **les ondes courtes (spectral)** par l'action des vagues.