2020 微積

1 (1) $x+y=3$ より $y=3-x$.

よって $x^2+y^2=x^2+(3-x)^2=x^2+x^2-6x+9$

$=2(x^2-3x)+9$

$=2\{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\}+9$

$=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}$.

よって $x=\frac{3}{2}$, $y=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ のとき x^2+y^2 は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。//

(2) $F(x,y,\lambda)=xy+x-\lambda(x^2+y^2-1)$ とすると

ラグランジュの未定乗数法より

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=y+1-\lambda\cdot 2x=0 & \cdots ① \\ \frac{\partial F}{\partial y}=x-\lambda\cdot 2y=0 & \cdots ② \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

の解が極値をとる点の候補となる。

$y\neq 0$ とすると ② より $\lambda=\frac{x}{2y}$

①に代入して $y+1-\frac{x^2}{y}=0$. ゆえに $x^2-y^2-y=0$.

これと③から $2y^2+y-1=0$

$(2y-1)(y+1)=0$ ∴ $y=-1, \frac{1}{2}$.

$y=\frac{1}{2}$ のとき $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-1$ のとき $x=0$.

$y=0$ とすると ② より $x=0$ となるがこれは ③ をみたさない

よって極値をとる候補は $(x,y)=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),(0,-1)$.

ここで $f(x,y)=xy+x$ とすると

$f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$f(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$f(0,-1)=0$.

したがって最小値は $f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ //

2020 微積

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\int_0^r e^{-x}x\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^r - \int_0^r -e^{-x}\,dx$

$\displaystyle = -\frac{r}{e^r} + \left[-e^{-x}\right]_0^r = -\frac{r}{e^r} + \left(-\frac{1}{e^r}+1\right)$

よって $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x\,dx = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{r}{e^r}-\frac{1}{e^r}+1\right) = \underline{1}$

(2) $\displaystyle I=\int_0^\infty e^{-x^2}x^3\,dx$. $x^2=y$ とすると $2x\,dx=dy$. $\begin{array}{c|c} x & 0\to\infty \\ \hline y & 0\to\infty \end{array}$.

$\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-y}\,y\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y\,dy = \underline{\frac{1}{2}}$ (∵(1)を用いた).

(3) $\displaystyle J=\int_0^\infty e^{-x^2}x^{15}\,dx$.

(2)と同様の置き換えをすると

$\displaystyle J=\int_0^\infty e^{-y}\cdot y^7\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^7\,dy$

$\displaystyle =\frac{1}{2}\left\{\left[-y^7e^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 7y^6e^{-y}\,dy\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty 7y^6e^{-y}\,dy$

ここで任意の $n\in\mathbb{N}$ について $\displaystyle\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_0^\infty=0$ となることを用いた.

(帰納法とロピタルの定理で確かめられる.

$n=1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^1}{e^x}-0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

$n=k$ 仮定して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{k+1}}{e^x}-0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(k+1)x^k}{e^x}=(k+1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$.)

これを用いながら部分積分をくり返すと,

$\displaystyle J=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\int_0^\infty ye^{-y}\,dy = \frac{7!}{2} = \underline{2520}$