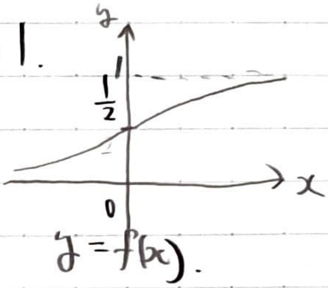
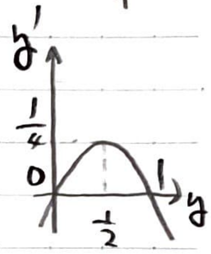
2021 微積

1 (1) $y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

$$y' = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1+e^{-x}-1}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{(1+e^{-x})^2} = y - y^2 = \underline{y(1-y)} \,/\!/$$

$e^{-x} > 0$ より $1+e^{-x} > 1$ だから $0 < y = \dfrac{1}{1+e^{-x}} < 1$.
よって y' は常に正なので y は単調増加.

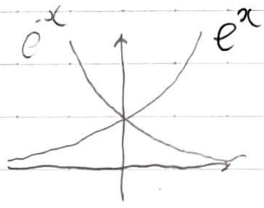




$0<y<1$ における関数 $y' = -y^2+y$ の値域は

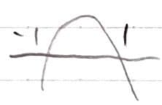
$$y' = -(y^2-y) = -\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

より $\underline{0 < y' \leq \frac{1}{4}} \,/\!/$

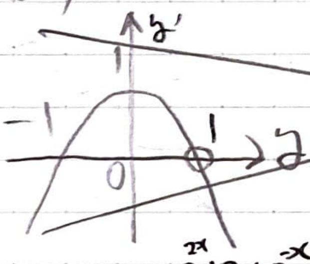


(2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$y' = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \underline{1-y^2} \,/\!/ = (1-y)(1+y)$$



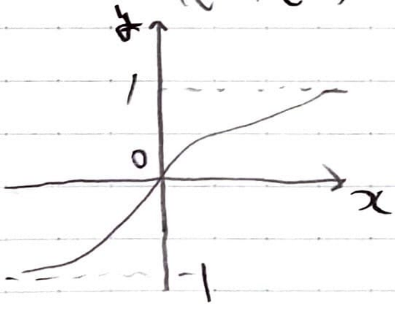
$e^{-x}, e^x > 0$ より $e^x - e^{-x} < e^x < e^x + e^{-x}$ だから $\underline{y = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} < 1}$.



~~$y' = -y^2+1$ のグラフは左のようになる.~~

~~$\lim_{x \to -\infty} y = -1$~~

ここで $y' = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$ より y は単調増加.



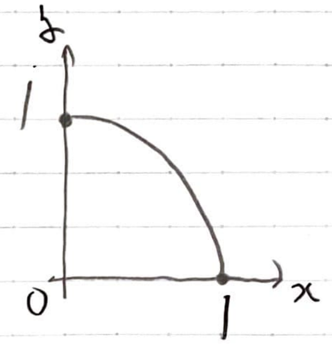
$\lim_{x\to\infty} y = 1$, $\lim_{x\to-\infty} y = -1$ より $y=f(x)$ のグラフは左.

よって $-1<y<1$ であり この範囲での $y' = -y^2+1$ の値域は

$\underline{0 < y' \leq 1} \,/\!/$

2021 微積

1 (2) $F(x,y,\lambda) = x^3+2y^3+\lambda(x^2+y^2-1)$ とする.



ラグランジュの未定乗数法より

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2+\lambda\cdot 2x = 0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2+\lambda\cdot 2y = 0 \quad \cdots ②$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2-1 = 0 \quad \cdots ③$$

を $0 \leq x, y \leq 1$ で解く ①に代入

$y \neq 0$ とすると②より $\lambda = -3y$ だから $3x^2-6xy=0$ 故から $x(x-2y)=0$.

$x \neq 0$ とすると $x=2y$. ③より $4y^2+y^2-1=0$ ∴ $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$x=0$ とすると ③より $y=1$.

$y=0$ とすると ③ より $x=1$.

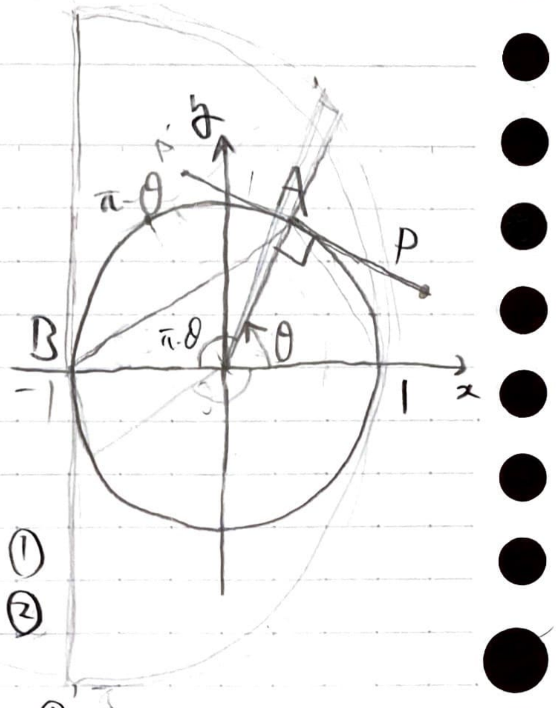
以上より極値をとる可能性がある点は $(x,y)=(0,1), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), (1,0)$

$f(0,1)=2$, $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $f(1,0)=1$.

よって極値は $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ //

$2\pi^2$

$\pi r^2 = \pi - \pi$



② $P(x, y)$ とする。図のように $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると

(1) $A(\cos\theta, \sin\theta)$ となり弧ABの長さは $\left|2\pi\cdot\frac{\pi-\theta}{2\pi}\right|$

よって $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ かつ $|\overrightarrow{AP}| = \pi - (\pi - \theta)$.

すなわち $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\cos\theta \\ y-\sin\theta \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} (x-\cos\theta)\cos\theta + (y-\sin\theta)\sin\theta = 0 & \cdots ① \\ (x-\cos\theta)^2 + (y-\sin\theta)^2 = \theta^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $x\cos\theta + y\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---- ①'

②より $x^2+y^2 - 2(x\cos\theta + y\sin\theta) + \sin^2\theta + \cos^2\theta = \theta^2$

$x^2 + y^2 = \theta^2 + 1$

①'で $\cos\theta \neq 0$ すなわち $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき $x = \frac{1 - y\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$r(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$\frac{1 - 2y\sin\theta + y^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + y^2 = \theta^2 + 1$

$y^2 - 2y\sin\theta + \sin^2\theta - \theta^2\cos^2\theta = 0$

$\{y - (\sin\theta + \theta\cos\theta)\}\{y - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\} = 0$

$y = \sin\theta + \theta\cos\theta$ とすると $x = \frac{1 - \sin^2\theta - \theta\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta(\cos\theta - \theta\sin\theta)}{\cos\theta} = \cos\theta - \theta\sin\theta$.

$y = \sin\theta - \theta\cos\theta$ とすると $x = \cos\theta + \theta\sin\theta$

図よりPはx座標が大きい方なので、後者の組が正しい $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \theta\sin\theta \\ \sin\theta - \theta\cos\theta \end{pmatrix}}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ //

$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) + (-\theta)\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) - (-\theta)\cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \theta\sin\theta \\ -(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{pmatrix}$ で対称性より $-\pi \leq \theta \leq 0$ のときも成り立つ.

(2) $L - \pi^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta)^2 + (\cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta)^2}\, d\theta$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\theta^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \theta\, d\theta + \int_{-\pi}^{0} (-\theta)\, d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_{-\pi}^{0} = \pi^2$ より $L = 2\pi^2$

(3) $\frac{1}{2}\left(S - \frac{\pi^3}{2}\right) =$