2018 微積

1 (1) ヤコビ行列Jは $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$.

その行列式は $\det J = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$. //

(2) (1)の変数変換をすると Dに対応するr, θの範囲は $0\leq r\leq R$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^R re^{-r^2}dr$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\right)=\underline{\pi\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)}$$ //

(3) $\lim_{R\to\infty} I = \lim_{R\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)=\pi(1-0)=\underline{\pi}$ //

(4) $J=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ とおくと

$$J^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy.$$

また

$$\lim_{R\to\infty} I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

だから $J^2=\pi$. よって $e^{-x^2}>0$ より $J>0$ だから $\underline{J=\sqrt{\pi}}$ //

(5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$

$t=x^2$ $(x>0)$ とおくと $\begin{array}{c|c} t & 0\to\infty \\ \hline x & 0\to\infty\end{array}$ で $\sqrt{t}=x$, $dt=2x\,dx$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\frac{1}{x}e^{-x^2}2x\,dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

また(4)より

$$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \quad (\because e^{-x^2}は偶関数).$$

したがって $\underline{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$ //

15分