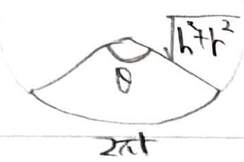
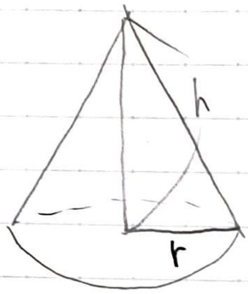


$$\theta = 2\pi \times \frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{h^2+r^2}}$$

2019 微積

$\boxed{1}$ (1) 体積をV(定数)とする。また高さをh, 半径をrとし, $\frac{h}{r}=x$ とする。



$$\text{側面積 } S = \pi(h^2+r^2)\cdot\frac{2\pi\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}}{2\pi} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

$$= \pi r\sqrt{r^2x^2+r^2} = \pi r^2\sqrt{x^2+1}$$

また,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x r^3 \text{ より } r^2 = \left(\frac{3V}{\pi x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

よって $S = \pi\left(\frac{3V}{\pi x}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^2+1} = (9\pi V^2)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

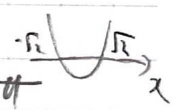
$(9\pi V^2)^{\frac{1}{3}}$ は定数なので $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の最小値を求めればよい

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\sqrt{x^2+1} + x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}\sqrt{x^2+1}}\left\{-2(x^2+1)+3x^{\frac{5}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}\sqrt{x^2+1}}(x^2-2)$$

よって $y=f(x)$ の増減表は下のようになり, Sが最小となるのは $x=\sqrt{2}$ のとき



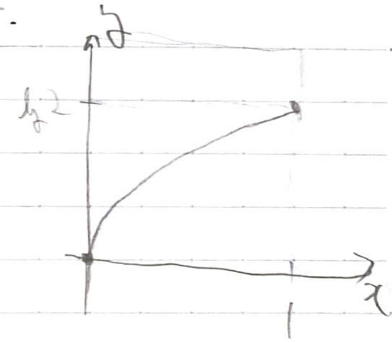
x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	最小値	$\nearrow$

(このとき $S = (9\pi V^2)^{\frac{1}{3}}\ 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{3})}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$= \left(\frac{9}{2}\pi V^2\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}$)

$\boxed{2}$ (1) $I = \int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx$

$y = 1+\sqrt{x}$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline y & 1 \to 2 \end{array}$ で $dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ より $dx = 2(y-1)dy$ だから

$$I = \int_1^2 \log y \cdot 2(y-1)\,dy = 2\int_1^2 (y\log y - \log y)\,dy$$



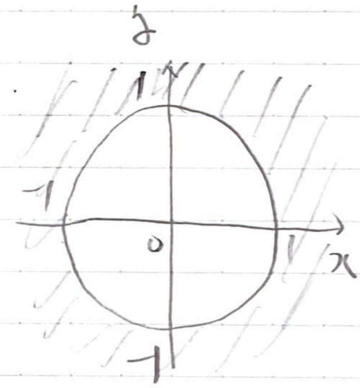
$$= 2\left\{ \left[\frac{1}{2}y^2\log y\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}y^2\cdot\frac{1}{y}dy - \int_1^2 \log y\,dy \right\}$$

$$= 2\left\{ 2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2 - \left(\left[y\log y\right]_1^2 - \int_1^2 y\cdot\frac{1}{y}dy\right) \right\}$$

$$= 2\left\{ 2\log 2 - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right) - (2\log 2 - 0) + \left[y\right]_1^2 \right\}$$

$$= 2\left(-\frac{3}{4}+1\right) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) $I = \iint_D (x^2+y^2)^{-2}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1\}$



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと D より

$r \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

である。

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} (r^2)^{-2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{r^3}dr$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}r^{-2}\right]_1^{\infty} = 2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right) = \pi$$

(40分)