2018 線形

2

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad a\in\mathbb{R}.$$

(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2a\lambda+(a+1)(a-1)=\{\lambda-(a+1)\}\{\lambda-(a-1)\}.$

より固有値は $\lambda=a-1,\ a+1.$

$\lambda=a-1$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c\in\mathbb{R}).$

$\lambda=a+1$ とすると

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c\in\mathbb{R}).$

以上より A の固有値 $\lambda=a-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda=a+1$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とすると $PP^T=E$ より $P^{-1}=P^T=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

よって $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$

ゆえに $\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{コ}}=P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} (a+1)^n & 0 \\ 0 & (a-1)^n \end{pmatrix}.$

よって $A^n=P\begin{pmatrix} (a+1)^n & 0 \\ 0 & (a-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+1)^n & 0 \\ 0 & (a-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^n+(a-1)^n & (a+1)^n-(a-1)^n \\ (a+1)^n-(a-1)^n & (a+1)^n+(a-1)^n \end{pmatrix}$$ //

10分