2019 線形

[1]

$$A=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&7\end{pmatrix}$$

一般には $\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ として $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{21}&\cdots\\ \tilde{a}_{12}&\ddots&\\ \vdots&&\tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}$

2次 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ に対して
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$$

(1) $\det A=\begin{vmatrix}4&-2\\-2&7\end{vmatrix}=28-4=\underline{24}$

(2) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}7&2\\2&4\end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{24}\begin{pmatrix}7&2\\2&4\end{pmatrix}}$

(3) $|A-tE|=\begin{vmatrix}4-t&-2\\-2&7-t\end{vmatrix}=t^2-11t+28-4=(t-3)(t-8)=0$

を解いて $t=3,8$.

$t=3$のとき

$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\-2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より $x=2y$ よって固有値3の固有ベクトルは $x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$t=8$のとき

$\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x-2y\\-2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より $y=-2x$ よって固有値8の固有ベクトルは $x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

(4) Aの固有値は3と8でどちらも正なのでAは正定値行列である.

~~対称行列~~ A が正定値 ⇔ $\forall x\neq 0,\ x^TAx>0$ ⇔ Aの$\forall\lambda$が$\lambda>0$.

(5) $P=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ とすると $(P\,E)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&5&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/5&-2/5\\0&1&2/5&1/5\end{pmatrix}$

より $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&-2/5\\2/5&1/5\end{pmatrix}$. よって $\underline{\begin{pmatrix}1/5&-2/5\\2/5&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&3\end{pmatrix}}$

$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ とするとグラムシュミットの正規直交化法によって

$v_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $(a_2-cv_1)\cdot v_1=0$ より $c=a_2\cdot v_1=\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}=0$ だから $v_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$P=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ とするとPは直交行列となる $\left(PP^T=\frac15\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=E\right)$ ∴ $\underline{P^TAP=\begin{pmatrix}8&0\\0&3\end{pmatrix}}$

ここで $x\neq 0$ に対して

$x^TAx=x^TP\begin{pmatrix}8&0\\0&3\end{pmatrix}P^Tx=y^T\begin{pmatrix}8&0\\0&3\end{pmatrix}y$ ($y=P^Tx$ とおいた)

$=8y_1^2+3y_2^2>0$ ($x\neq0, P\neq0$ より $y\neq0$ より)

だから Aは正定値. ▨

2 A を実対称行列とする.

(1) A の固有値を λ, λ に属する固有ベクトルを x とする.
また, ベクトル a と b のエルミート内積を (a, b) と表すことにする.
すると, $Ax = \lambda x$ であり, また仮定より $A^T = A$.
よって

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x).$$

また

$$(Ax, x) = (x, \overline{A^T} x) = (x, A^T x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x).$$

ゆえに

$$(\lambda - \overline{\lambda})(x, x) = 0.$$

$x \neq 0$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$.
よって A のすべての固有値は実数となる. ■

(2) A の固有値 λ に属する固有ベクトルを x, 固有値 $\mu\ (\neq \lambda)$ に属する固有ベクトルを y とする.
このとき

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y$$

が成り立つ. よって

$$(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda (x, y).$$

また

$$(Ax, y) = (x, \overline{A^T} y) = (x, Ay) \quad (\because A^T = A \text{ かつ } \overline{A} = A)$$
$$= (x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y) = \mu (x, y) \quad (\because (1) \text{より } \mu \text{ は実数})$$

ゆえに $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$
仮定より $\lambda - \mu \neq 0$ だから $(x, y) = 0$.
したがって異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する ■

25分ぐらい