2022 線形

[1]

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ l_1&1&0&0&0\\ l_2&l_3&1&0&0\\ l_4&l_5&l_6&1&0\\ l_7&l_8&l_9&l_{10}&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3&u_4&u_5\\ 0&u_6&u_7&u_8&u_9\\ 0&0&u_{10}&u_{11}&u_{12}\\ 0&0&0&u_{13}&u_{14}\\ 0&0&0&0&u_{15}\end{pmatrix}$$ とする.

$A=LU$ より 各成分を比較することで以下の25本の連立方程式が得られる.

$$\begin{cases}-6=u_1\\ 42=l_1u_1\\ 30=l_2u_1\\ -42=l_4u_1\\ 12=l_7u_1\end{cases}\quad \begin{cases}-9=u_2\\ 59=l_1u_2+u_6\\ 37=l_2u_2+l_3u_6\\ -47=l_4u_2+l_5u_6\\ 18=l_7u_2+l_8u_6\end{cases}\quad \begin{cases}-2=u_3\\ 7=l_1u_3+u_7\\ -8=l_2u_3+l_3u_7+u_{10}\\ 30=l_4u_3+l_5u_7+l_6u_{10}\\ 20=l_7u_3+l_8u_7+l_9u_{10}\end{cases}$$

$$\begin{cases}7=u_4\\ -53=l_1u_4+u_8\\ -35=l_2u_4+l_3u_8+u_{11}\\ 35=l_4u_4+l_5u_8+l_6u_{11}+u_{13}\\ -64=l_7u_4+l_8u_8+l_9u_{11}+l_{10}u_{13}\end{cases}\quad \begin{cases}-9=u_5\\ 56=l_1u_5+u_9\\ 30=l_2u_5+l_3u_9+u_{12}\\ -33=l_4u_5+l_5u_9+l_6u_{12}+u_{14}\\ 43=l_7u_5+l_8u_9+l_9u_{12}+l_{10}u_{14}+u_{15}\end{cases}$$

未知数の数も25コなのでこれは解ける. よってこれを解いて

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ -7&1&0&0&0\\ -5&2&1&0&0\\ 7&-4&-4&1&0\\ -2&0&-4&-9&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}-6&-9&-2&7&-9\\ 0&-4&-7&-4&-1\\ 0&0&-4&8&-1\\ 0&0&0&2&2\\ 0&0&0&0&39\end{pmatrix}$$

//

$37=45+l_3\cdot(-4)$ $7=14+u_7$ $-53=-49+u$ $56=63+u$

$-47=-63-4l_5$ $-8=10-14+u_{10}$ $-35=-35-8+u$ $30=45-14+u$ $30=45-14-1$

$18=18$ $30=-14+28-4l_6$ $35=49+16-32+u$ $-33=-63+28+4-u$

16 $-14=-16+u$ $30=32-u$

$20=4-4l_9$ $-64=-14-32+2l$ $43=18+4-18+u$

$16=-4l_9$ $-50+32-46=2l$ -18

$43=18+4-18+u$

2022 線形

2 (1)

$$Q\bar{Q} = (aE+bI+cJ+dK)(aE-bI-cJ-dK)$$
$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)E+(-ab+ab-cd+cd)I$$
$$+(-ac+bd+ac-bd)J+(-ad-bc+bc+ad)K$$
$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)E$$

(2) $I^2=-E$ より $I\cdot(-I)=(-I)\cdot I=E$ だから $I^{-1}=-I=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$ //

$$Q\cdot\frac{\bar{Q}}{a^2+b^2+c^2+d^2}=E,$$

また $\bar{Q}Q=(aE-bI-cJ-dK)(aE+bI+cJ+dK)$
$$=(-Q+2aE)(-\bar{Q}+2aE)$$
$$=Q\bar{Q}-2a(Q+\bar{Q})+4a^2E$$
$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)E-2a\cdot 2aE+4a^2E=(a^2+b^2+c^2+d^2)E=Q\bar{Q}$$

より $\frac{\bar{Q}}{a^2+b^2+c^2+d^2}Q=E$ だから $Q^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\bar{Q}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}a&-b&-c&-d\\b&a&d&-c\\c&-d&a&b\\d&c&-b&a\end{pmatrix}$ //

40分経過

30分間

$\boxed{2}$ (3)

(a)
(b). $A = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K$, $B = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K \in H$ に対して

$$A+B = (a_1+a_2)E + (b_1+b_2)I + (c_1+c_2)J + (d_1+d_2)K \in H$$

また $A+B = (a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) + (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K)$

$= B + A$.

(c) さらに $C = a_3E + b_3I + c_3J + d_3K \in H$ に対して

$$(A+B)+C = (a_1+a_2+a_3)E + (b_1+b_2+b_3)I + (c_1+c_2+c_3)J + (d_1+d_2+d_3)K$$
$$= a_1E + b_1I + c_1J + d_1K + (a_2+a_3)E + (b_2+b_3)I + (c_2+c_3)J + (d_2+d_3)K$$
$$= A + (B+C).$$

(d) $O = 0\cdot E + 0\cdot I + 0\cdot J + 0\cdot K \in H$ は $A + O = A$ より加法に対する零元

(e) $A' = (-a_1)E + (-b_1)I + (-c_1)J + (-d_1)K \in H$ とすると

$$A + A' = (a_1 - a_1)E + (b_1 - b_1)I + (c_1 - c_1)J + (d_1 - d_1)K = O$$

より $A' = -A$ は A に対する(加法に関する)逆元である つまり 逆元は $\forall A$ について存在する

(f) $AB = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)E + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)I$
$+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)J + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)K \in H$

(g) $((AB)C$ のEの係数$) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)b_3$
$- (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)c_3 - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)d_3$
$= a_1(a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 - d_2d_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3 + c_2d_3 - d_2c_3)$
$- c_1(a_2c_3 - b_2d_3 + c_2a_3 + d_2b_3) - d_1(a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 + d_2a_3)$
$= (A(BC)$ のEの係数$)$.

他も同様.

(h) $(A(B+C)$ のEの係数$) = a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3) - c_1(c_2+c_3) - d_1(d_2+d_3)$
$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 - d_1d_3)$
$= (AB + AC$ のEの係数$)$. 他も同様

(i) $BA = (a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1 - d_2d_1)E + (a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1)I + \cdots$

ここで (f) の AB の I の係数とこの BA の I の係数を比較すると

$$(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) - (a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1) = 2c_1d_2 - 2d_1c_2$$

これは 0 とは限らないので 乗法は非可換