

2020 雛形

$$(1) \det D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 24 - 12 - 36 - 3 + 4 = -96$$

・正則行列 \rightarrow 内積使う。
・ λ が実数 $= \lambda = \bar{\lambda}$
純虚数 $= \lambda = -\bar{\lambda}$

$$(2) X = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4a & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 12a & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$X^3 - 5X^2 + 8X - 4E = \begin{pmatrix} 8-20+16-4 & 12a-20a+8a & 0 \\ 0 & 8-20+16-4 & 0 \\ 0 & 0 & b^3-5b^2+8b-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3-5b^2+8b-4 \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3-5b^2+8b-4 \end{pmatrix} = 0$ となるための条件は $b^3-5b^2+8b-4=0$
 $(b-1)(b-2)^2=0$

したがって求める a, b は a は任意の実数, b は 1 または 2 //

(2) (1) $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと $A_2^T = -A_2$ より $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ より $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} (b \in \mathbb{R})$
また $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと $A_3^T = -A_3$ より $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$ より $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} //$

(2) 一般に $|A| = |A^T|$ が成り立つ。

A が実正方行列 $n \times n$ とす

$$|A| = |A^T| = |-A| = |-E A| = |-E| |A|$$

が成り立つ。 n が奇数 n とす n 次単位行列 E の行列式 $|E| = (-1)^n = -1$

より $|A| = -|A|$ 。 $\odot |A| = 0$ 。 要は A は正則でない。 \square

正則 \rightarrow ① $|A| \neq 0$
② 1次独立

(3) 実正方行列 A の固有値 λ とその固有ベクトル x とおくと $Ax = \lambda x$

a と b を x の内積 (a, b) と表すことにする

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x)$$

$$\text{また } (Ax, x) = (x, A^T x) = (x, -Ax) = (x, -\lambda x) = -\lambda (x, x)$$

より $(x, x) > 0$ より $\lambda = -\lambda$ 。 要は $\lambda = 0$ または λ は純虚数。 \square