Algoritmos de Ordenação cont...

Estrutura de Dados II

Prof. João Dallyson Sousa de Almeida
Núcleo de Computação Aplicada NCA - UFMA
Dep. De Informática - Universidade Federal do Maranhão

Apresentação

- Ementa
  - Algoritmos de ordenação e busca.
  - Árvore de busca multidirecional balanceada.
  - Hashing. Noções de organização de arquivos.
  - Noções de grafos: conceitos, coloração, árvores geradoras..
  - Algoritmos em grafos: caminho mínimo, fluxo máximo e outros.

- Bibliografia: básica
  - CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: Teoria e Prática. Editora Campus, 2002
  - Algorithms 4th edition by R. Sedgewick and K. Wayne, Addison-Wesley Professional, 2011, ISBN 0-321-57351-X
  - Ziviani, N. Projeto de Algoritmos Com Implementações em Pascal e C, Cengage Learning, 2004.

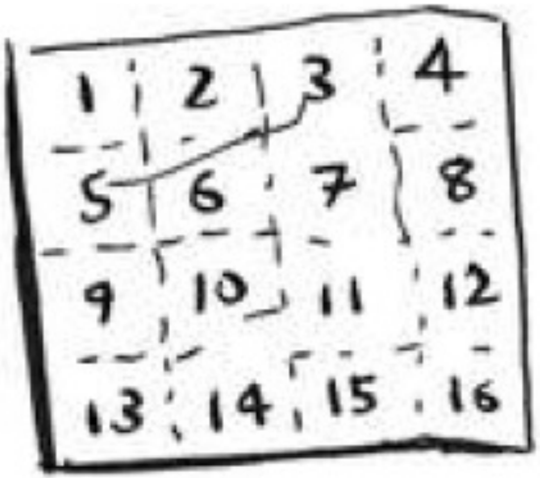
- Bibliografia: complementar
  - TENENBAUM, Aaron; LANGSAM, Yedidyah; AUGENSTEIN, Moshe J. Estruturas de dados usando C. São Paulo: Makron Books, 1995. ISBN: 9788534603485
  - ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; ARAUJO, Graziela Santos. Estruturas de Dados: Algoritmos, análise da complexidade e implementações em Java e C/C++. Pearson Prentice Hall, 2010
  - DROZDEK, Adam. Adam Drozdek. Data Structures and Algorithms in Java. 2. Cengage Learning. 2004. 2. Cengage Learning. 2004
  - GOODRICH, Michael T. Estruturas de dados e algoritmos em java. 4 ED. Porto Alegre: Bookman, 2007. 600.
  - SKIENA, Steven S.. The Algorithm Design Manual. 2. Springer-Verlag. 2008

Aula passada.....

- Introdução
- Conceitos básicos
- Classificação:
  - Localização, uso de memória, estabilidade
- Algoritmos:
  - SelectionSort (On^2 , Não Estável)
  - InsertionSort (On^2, Estável)
  - ShellSort (? , Não Estável)

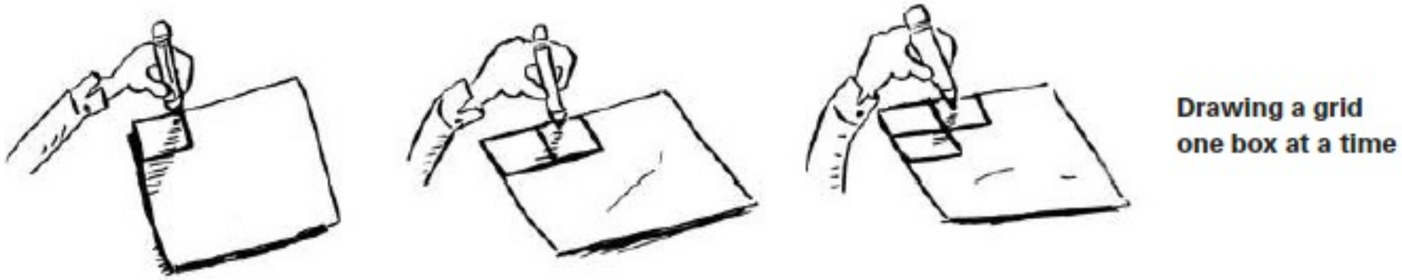
Introdução

- Qual o melhor algoritmos para desenhar quadrantes?



Introdução

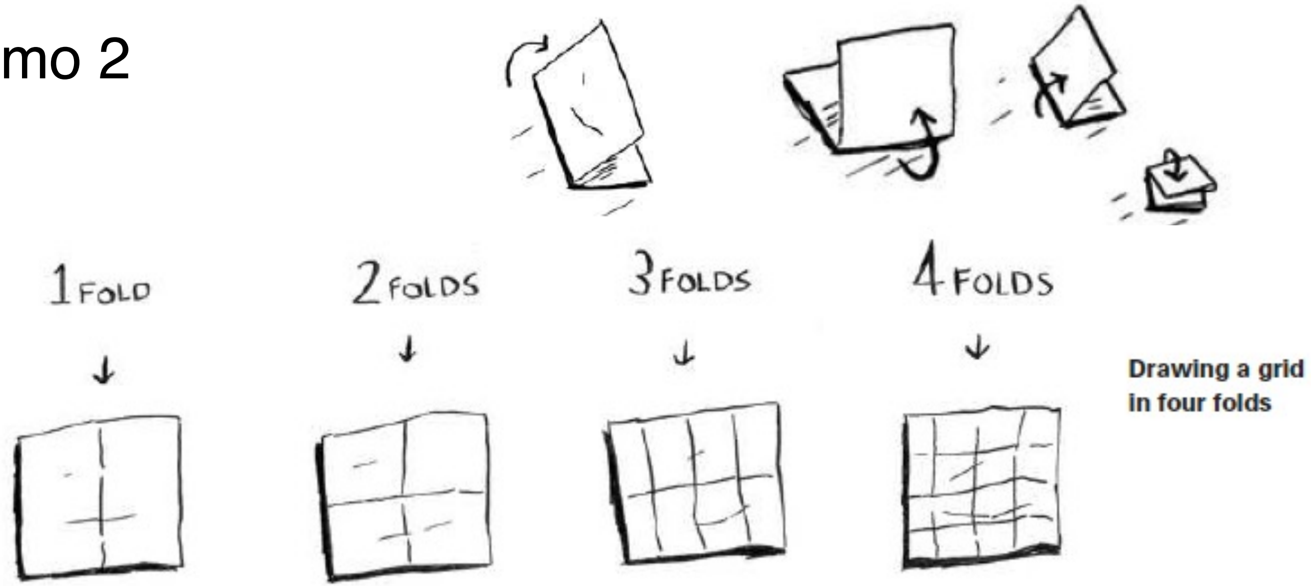
- Algoritmo 1



- Custo: Leva 16 passos para desenhar 16 quadrantes. O(n)

Introdução

- Algoritmo 2



- Custo: Leva 4 passos para obter 16 quadrantes. O(logn)

Divisão e conquista

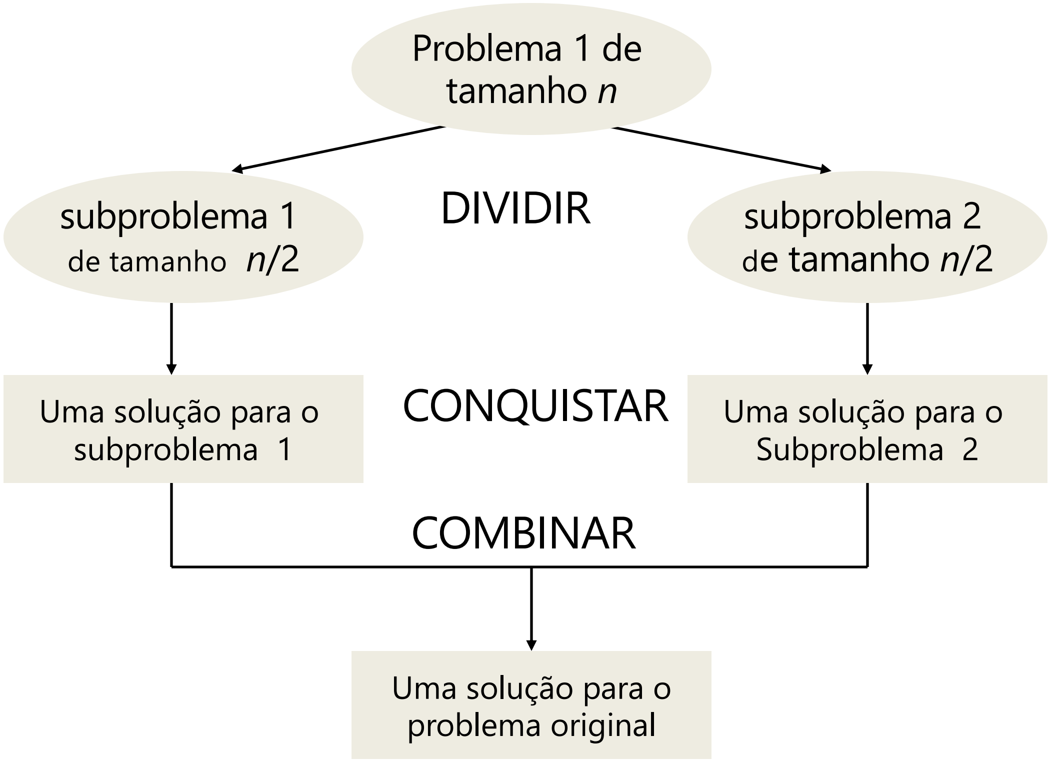
- Estratégia mais conhecida de projeto de algoritmos.
- Divide a instância do problema em duas ou mais instâncias menores
- Resolve as instâncias menores recursivamente
- Obtém a solução para a instância original (maior) combinando essas soluções.

Divisão e conquista: quando usar?

Três condições que indicam que a estratégia de divisão e conquista pode ser utilizada com sucesso:

1. Deve ser possível decompor uma instância em sub instâncias.
2. A combinação dos resultados dever ser eficiente (trivial se possível).
3. As sub-instâncias devem ser aproximadamente do mesmo tamanho.

Técnica de Divisão e Conquista



Divisão e Conquista

- Dividir o problema em um certo número de subproblemas

- Conquistar os subproblemas solucionando-os recursivamente. Se os tamanhos dos subproblemas são suficientemente pequenos, então, solucionar os subproblemas de forma simples.

- Combinar as soluções dos subproblemas na solução de problema original

Merge Sort

- Ordenação tipo dividir-para-conquistar
  - Cria uma sequencia ordenada a partir de duas outras também ordenadas

- Passos:
  - **Dividir**: dividir a sequência de n elementos a serem ordenados em duas subsequências de n/2 elementos cada;
  - **Conquistar**: ordenar as duas subsequências recursivamente utilizando a ordenação por intercalação;
  - **Combinar**: intercalar as duas subsequências ordenadas para produzir a solução.

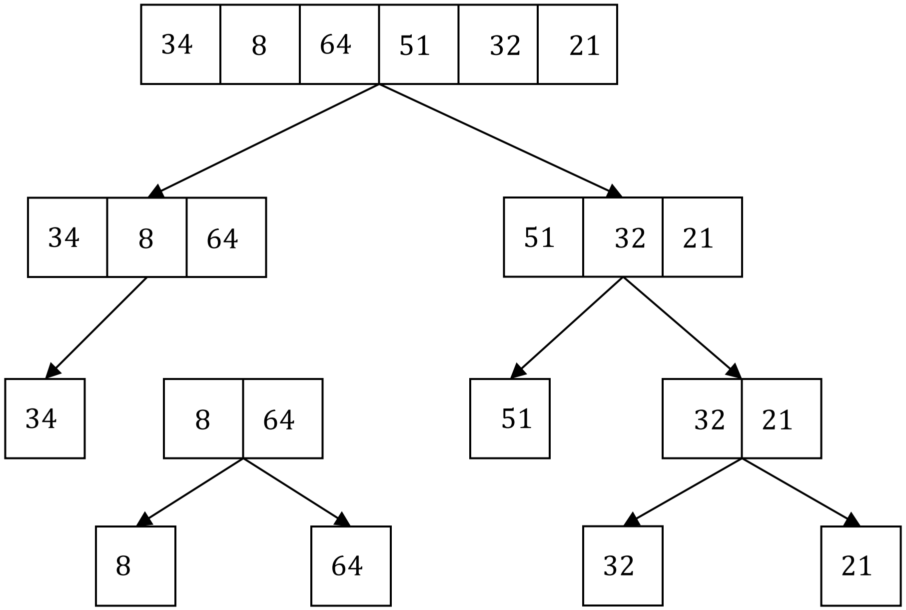
MergeSort

5	3	7	1	0	8	5

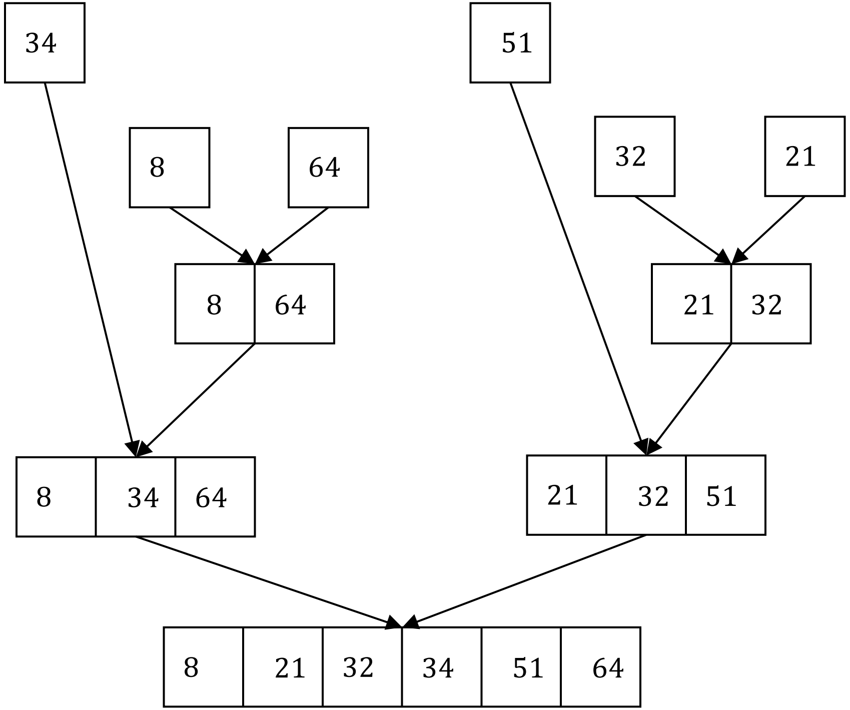
mergesort([5, 3, 7, 1, 0, 8, 5])

Merge Sort

- Dividir

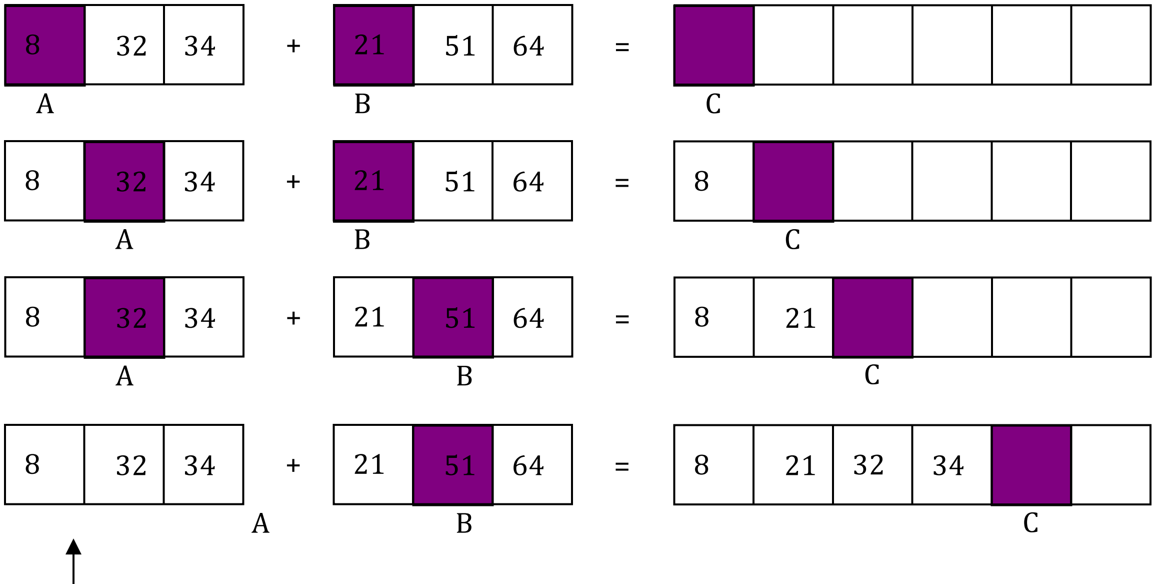


Merge Sort



Merge Sort

- Merge



Obs.: Quando um vetor acabar, copia o restante do outro

Merge Sort

```
public static int[] MergeSort(int [] A) {

    int [] Temp = new int[A.length];

    return MergeMain(A, Temp, 0, A.length-1);
}

public static int[] MergeMain(int [] A, int [] T, int esq, int dir) {

    int meio;

    if (esq < dir) {
        meio = (esq + dir)/2;
        MergeMain(A, T, esq, meio);
        MergeMain(A, T, meio + 1, dir);
        Merge(A, T, esq, meio+1 , dir);
    }

    return A;
}
```

Merge Sort

```
private static void Merge (int [] A, int [] T, int esqPos, int dirPos, int dirFim) {
    int esqFim = dirPos - 1;
    int tempPos = esqPos;
    int numElem = dirFim - esqPos + 1;

    while (esqPos <= esqFim && dirPos <= dirFim) {
        if (A[esqPos] <= A[dirPos])
            T[tempPos++] = A[esqPos++];
        else
            T[tempPos++] = A[dirPos++];
    }
    // copia o resto da primeira parte
    while (esqPos <= esqFim)
        T[tempPos++] = A[esqPos++];
    // copia o resto da primeira parte
    while (dirPos <= dirFim)
        T[tempPos++] = A[dirPos++];

    // Copia vetor
    for (int i = 0; i < numElem; i++, dirFim--)
        A[dirFim] = T[dirFim];
}
```

Merge Sort (Tempo de execução)

Para: (1) $T(1) = 1$

(2) $T(N) = 2T(N/2) + N$

** Admitindo que N é potência de 2

Relação de recorrência

Uma solução

1. Substitui continuamente a relação de recorrência do lado direito da equação. Primeiro substitui por N/2

   $2T(N/2) = 2(2(T(N/4) + N/2) = 4T(N/4) + N$

Daí

   $T(N) = 4T(N/4)+2N$

2. Fazendo sequenciadamente para N/4, N/8 temos que:

   $T(N) = 2^kT(N/2^k) + kN$

3. Sendo $k = \log N$

   $T(N) = NT(1) + N\log N = N\log N + N$

Merge Sort (Tempo de execução)

- A expressão de recorrência é dada por T(n) = 2T(n/2) + n, sendo que 2T(n/2) corresponde as duas chamadas recursivas e n ao tempo gasto na intercalação das duas metades do vetor.
- O tempo nas demais linha é O(1)
- A recorrência acima pode ser solucionada pelo método mestre (caso 2)
- Sendo a=2, b=2, f(n) = n

Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$
$$n = \Theta(n^{\log_2 2})$$
$$n = \Theta(n^1),$$

então

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Merge Sort

- Tempo de execução médio proporcional a NlogN
  - Pior caso igual
- Prós
  - Estável
  - Mais fácil de ser paralelizado
  - Implementação não-recursiva simples
- Contras
  - Uso de memória auxiliar do tamanho do vetor inicial

Exercício

1) Dada a seguinte lista de números [21, 1, 26, 45, 29, 28, 2, 9, 16, 49, 39, 27, 43, 34, 46, 40]. Que resposta ilustra a lista a ser classificada após 3 chamadas recursivas para mergesort?

   a) [16, 49, 39, 27, 43, 34, 46, 40]
   b) [21,1]
   c) [21, 1, 26, 45]
   d) [21]

2) Considere a lista da questão anterior. Que resposta ilustra as primeiras duas listas a serem juntadas.

   a) [21, 1] e [26, 45]
   b) [[1, 2, 9, 21, 26, 28, 29, 45] e [16, 27, 34, 39, 40, 43, 46, 49]
   c) [21] e [1]
   d) [9] e [16]

QuickSort

- Proposto por Hoare em 1960 e publicado em 1962.
- É o algoritmo de ordenação interna mais rápido que se conhece para uma ampla variedade de situações.
- Provavelmente é o mais utilizado.
- A idéia básica é dividir o problema de ordenar um conjunto com n itens em dois problemas menores.
- Os problemas menores são ordenados independentemente.
- Os resultados são combinados para produzir a solução final.
- http://visualgo.net/sorting.html

QuickSort

- A parte mais delicada do método é relativa ao método particao.
- O vetor v[esq..dir] é rearranjado por meio da escolha arbitrária de um **pivô** x.
- O vetor v é particionado em duas partes:
  - A parte esquerda com chaves menores ou iguais a x.
  - A parte direita com chaves maiores ou iguais a x.

Como escolher o pivô?

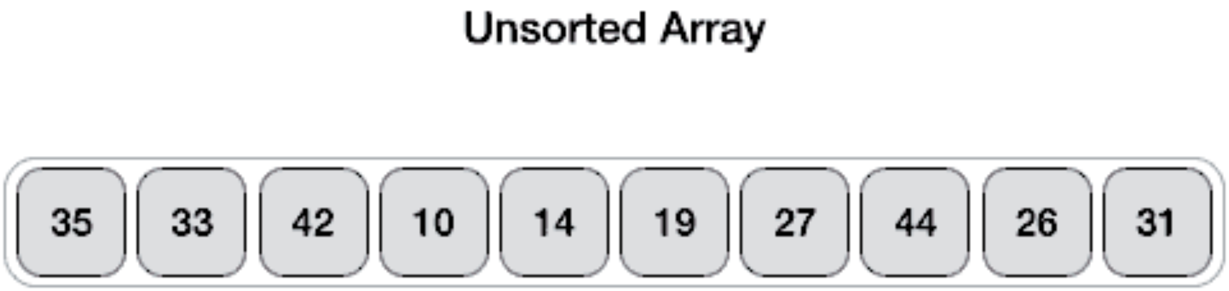
- Primeiro elemento?
- Último elemento?
- Aleatório?
- Elemento Central?
- Elemento mediano entre primeiro, central e último?

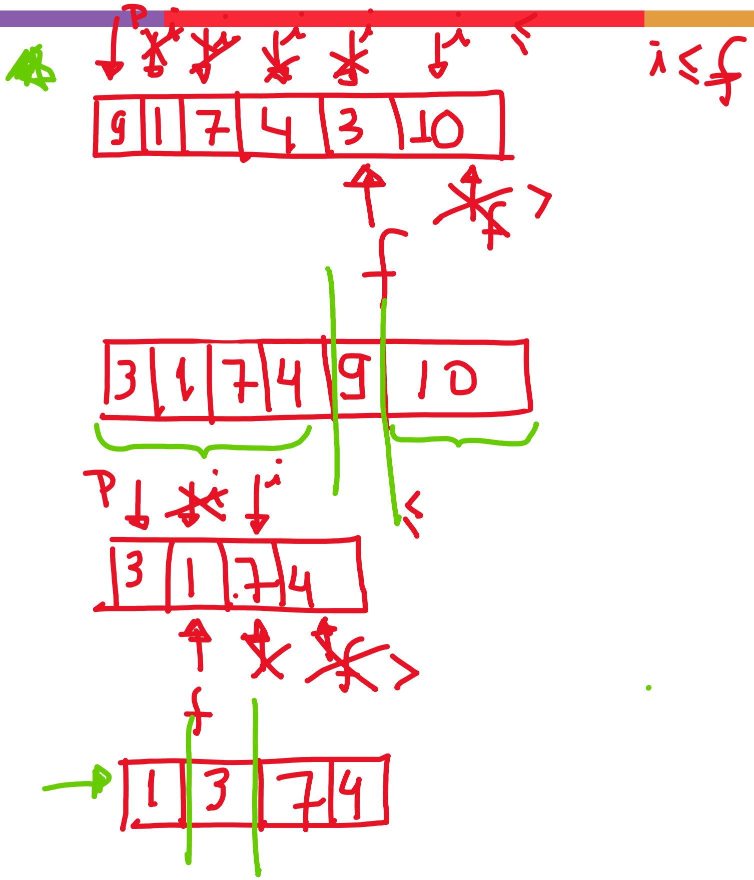
QuickSort

- Algoritmo para o particionamento:
  - Escolha arbitrariamente um **pivô** x.
  - Percorra o vetor a partir da esquerda até que v[i] >= x.
  - Percorra o vetor a partir da direita até que v[f] < x.
  - Troque v[i] com v[f].
  - Continue este processo até os ponteiros i e f se cruzarem.

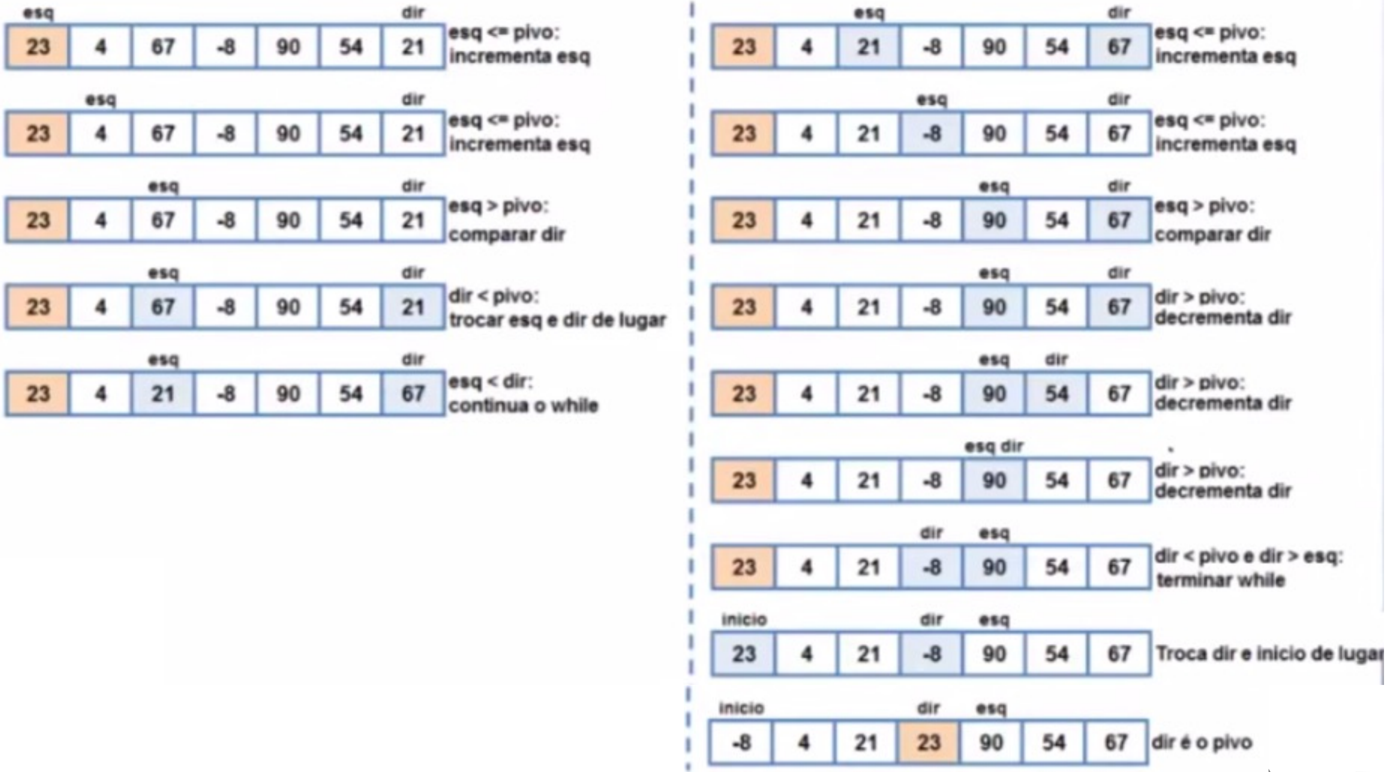
- Ao final, o vetor v[esq..dir] está particionado de tal forma que:
  - Os itens em v[esq], v[esq + 1], . . . , v[f] são menores ou iguais a x.
  - Os itens em v[i], v[i + 1], . . . , v[dir] são maiores ou iguais a x.

QuickSort



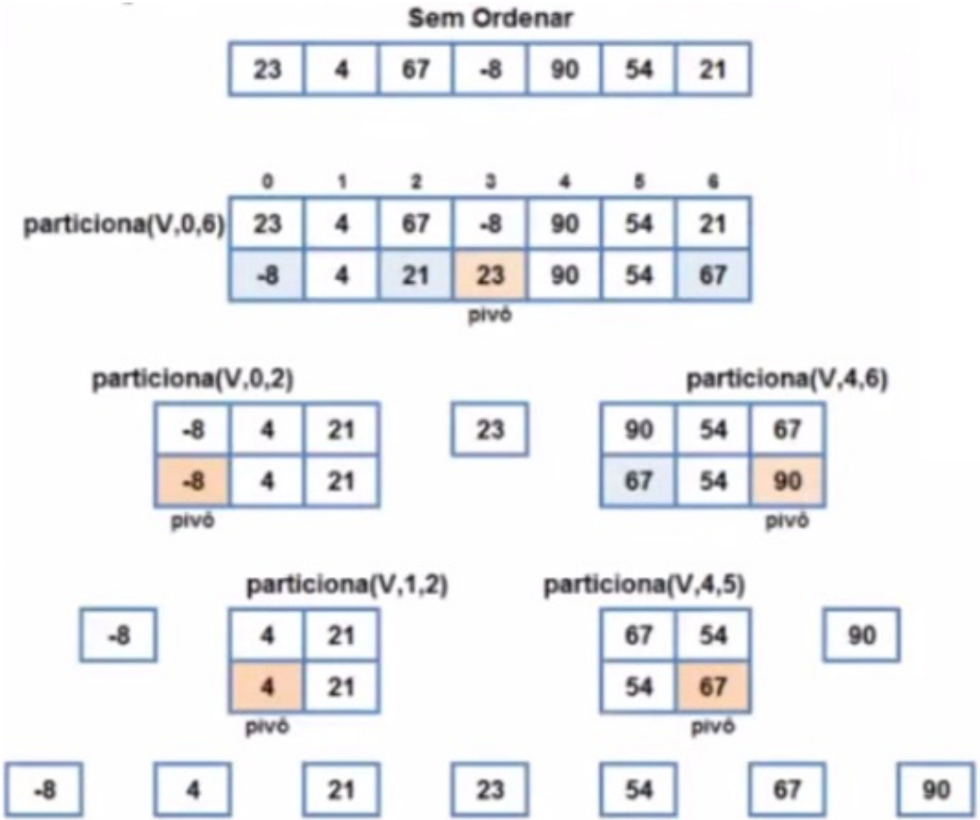

i ≤ f
9 1 7 4 3 10
3 1 7 4 9 10
3 1 7 4
1 3 7 4

QuickSort



FONTE: https://programacaodescomplicada.wordpress.com/2014/05/23/ed1-aula-52-ordenacao-quicksort/

QuickSort

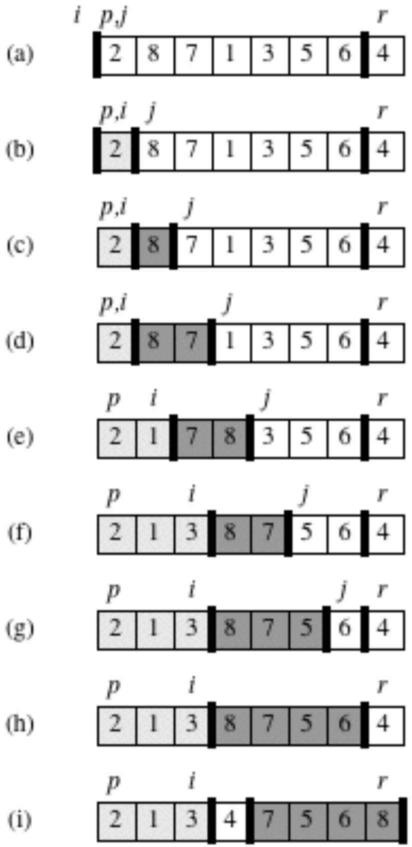


FONTE: https://programacaodescomplicada.wordpress.com/2014/05/23/ed1-aula-52-ordenacao-quicksort/

QuickSort

```
QUICKSORT(A, p, r)
if p < r
   then q ← PARTITION(A, p, r)
        QUICKSORT(A, p, q − 1)
        QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

```
PARTITION(A, p, r)
x ← A[r]
i ← p − 1
for j ← p to r − 1
    do if A[j] ≤ x
          then i ← i + 1
               exchange A[i] ↔ A[j]
exchange A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```



QuickSort

```
private static void quicksort(int[] vetor, int inicio, int fim)
{
    if (inicio < fim)
    {
        int posicaoPivo = particiona(vetor, inicio, fim);

        quicksort(vetor, inicio, posicaoPivo - 1);
        quicksort(vetor, posicaoPivo + 1, fim);
    }
}
```

QuickSort

```
private static int particiona(int[] vetor, int inicio, int fim)
{
    int pivo = vetor[inicio];
    int i = inicio + 1, f = fim;

    System.out.println("--------------------");
    while (i <= f)
    {

         if (vetor[i] <= pivo)
            i++;
        else if (pivo < vetor[f])
            f--;
        else
        {
            int troca = vetor[i];
            vetor[i] = vetor[f];
            vetor[f] = troca;
            i++;
            f--;
        }
    }
    vetor[inicio] = vetor[f];
    vetor[f] = pivo;
    return f;
}
```

Quicksort – Análise no pior caso

- Seja C(n) a função que conta o número de comparações.
  - Pior caso:
    - $C(n) = O(n^2)$
- O pior caso ocorre quando, sistematicamente, o pivô é escolhido como sendo um dos extremos de um arquivo já ordenado.

- Isto faz com que o procedimento Ordena seja chamado recursivamente n vezes, eliminando apenas um item em cada chamada.

- O pior caso pode ser evitado empregando pequenas modificações no algoritmo.

- Para isso basta escolher três itens quaisquer do vetor e usar a **mediana dos três** como pivô.

QuickSort - otimização

- Mediana de três:
  - Para evitar o pior caso do quicksort, podemos escolher o pivô como a mediana de três elementos

T	V	Y	Z	S	X	U
T	V	Y	Z	S	X	U
T	S	U	Z	Y	X	V

  - Aumentar o número de elementos considerados na mediana, ex: 5 ou 9, não ajuda muito.

QuickSort – Análise no melhor caso

- **Análise**
  - Melhor caso:

$$T(n) = n + T(n/2) + T(n/2)$$
$$T(n) = 2T(n/2) + n.$$

  - Esta situação ocorre quando cada partição divide o arquivo em duas partes iguais. Essa mesma recorrência já foi calculada para o MergeSort

$$T(n) = \Theta\ (n.\log n).$$

  - Caso médio de acordo com Sedgewick e Flajolet (1996, p. 17):

$$C(n) \approx 1,386n\log n - 0,846n,$$

  - Isso significa que em média o tempo de execução do Quicksort é O(n log n).

QuickSort (Random)

- Na análise do comportamento do caso médio fizemos uma suposição de que todas as permutações dos números de entrada são igualmente prováveis.
- Isso nem sempre é verdade
- Para corrigir este problema, vamos construir uma versão randomica do quicksort.
  - Nós temos que randomicamente particionar o vetor de entrada
  - Para isso, escolha o pivo randomicamente dentro dos elementos a serem ordenados
- http://visualgo.net/sorting.html

QuickSort (Random)

RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)

$i \leftarrow$ RANDOM(p, r)
exchange $A[r] \leftrightarrow A[i]$
return PARTITION(A, p, r)

RANDOMIZED-QUICKSORT(A, p, r)

if $p < r$
  then $q \leftarrow$ RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)
    RANDOMIZED-QUICKSORT$(A, p, q - 1)$
    RANDOMIZED-QUICKSORT$(A, q + 1, r)$

QuickSort

- Vantagens:
  - É extremamente eficiente para ordenar arquivos de dados.
  - Necessita de apenas uma pequena pilha como memória auxiliar.
  - Requer cerca de nlogn comparações em média para ordenar n itens.

- Desvantagens:
  - Tem um pior caso $O(n^2)$ comparações.
  - Sua implementação é muito delicada e difícil:
  - Um pequeno engano pode levar a efeitos inesperados para algumas entradas de dados.
  - O método não é **estável**.

Questão ENADE 2018 (Eng. Comp)

QUESTÃO 09

O MergeSort é um método de ordenação que combina dois vetores ordenados e cria um terceiro vetor maior também ordenado. O algoritmo abaixo apresenta essa ideia e combina os vetores `a[lo..mid]` e `a[mid+1..hi]` no vetor `a[lo..hi]`.

```
public class MergeSort {
    private static Comparable[] aux;
    public static void merge(Comparable[] a, int lo, int mid, int hi) {
     int i = lo, j = mid+1;
     for (int k = lo; k <= hi; k++)
            aux[k] = a[k];
     for (int k = lo; k <= hi; k++) {
            if (i > mid)
                   a[k] = aux[j++];
            else if (j > hi )
                   a[k] = aux[i++];
            else if (aux[j].compareTo(aux[i]))
                   a[k] = aux[j++];
            else
                   a[k] = aux[i++];
       }
     }
    public static void sort(Comparable[] a) {
     aux = new Comparable[a.length];
     sort(a, 0, a.length - 1);
    }
    private static void sort(Comparable[] a, int lo, int hi) {
     //implementação
    }
}
```

SEDGEWICK, R.; WAYNE, K. Algorithms. 4. ed. Boston: Addison-Wesley, 2011 (adaptado).

Questão ENADE 2018 (Eng. Comp) cont...

Considerando o código apresentado, a implementação do protótipo do método sort da classe MergeSort é

A
```
if (hi == lo)
   return;
int mid = lo + (hi - lo)/2;
sort(a, lo, mid);
sort(a, mid, hi);
merge(a, lo, mid, hi);
```

B
```
if (hi > lo)
   return;
int mid = lo + (hi - lo)/2;
sort(a, lo, mid);
sort(a, mid, hi);
merge(a, lo, mid, hi);
```

C
```
if (hi <= lo)
   return;
int mid = lo + (hi - lo)/2;
sort(a, lo, mid);
sort(a, mid, hi);
merge(a, lo, mid, hi);
```

D
```
if (hi > lo)
   return;
int mid = lo + (hi - lo)/2;
sort(a, lo, mid);
sort(a, mid+1, hi);
merge(a, lo, mid, hi);
```

E
```
if (hi <= lo)
   return;
int mid = lo + (hi - lo)/2;
sort(a, lo, mid);
sort(a, mid+1, hi);
merge(a, lo, mid, hi);
```

Questão ENADE 2021

QUESTÃO 32

Existe um grande número de implementações para algoritmos de ordenação. Um dos fatores a serem considerados, por exemplo, é o número máximo e médio de comparações que são necessárias para ordenar um vetor com **n** elementos. Diz-se também que um algoritmo de ordenação é estável se ele preserva a ordem de elementos que são iguais. Isto é, se tais elementos aparecem na sequência ordenada na mesma ordem em que estão na sequência inicial. Analise o algoritmo abaixo, onde **A** é um vetor e **"i, j, lo e hi"** são índices do vetor:

```
algoritmo ordena(A, lo, hi)
    se lo < hi então
       p := particao(A, lo, hi)
       ordena(A, lo, p - 1)
       ordena(A, p + 1, hi)


algoritmo particao(A, lo, hi)
    pivot := A[hi]
    i := lo
    repita para j := lo até hi
       se A[j] < pivot entao
       troca A[i] com A[j]
       i := i + 1
    troca A[i] com A[hi]
    return i
```

Com relação ao algoritmo apresentado, avalie as afirmações a seguir.

I. O algoritmo precisa de um espaço adicional O(n) para a pilha de recursão.

II. O algoritmo apresentado é um algoritmo de ordenação recursivo e estável.

III. O algoritmo precisa, em média, de O(n log n) comparações para ordenar n itens.

IV. O uso do primeiro elemento do vetor como "*pivot*" é mais eficiente que usar o último.

É correto apenas o que se afirma em

A I e III.

B II e IV.

C III e IV.

D I, II e III.

E I, II e IV.

Exercício 1

1) Dada a seguinte lista de números [14, 17, 13, 15, 19, 10, 3, 16, 9, 12] qual será o conteúdo da lista após a segunda partição do algoritmo quicksort.

a) [9, 3, 10, 13, 12]
b) [9, 3, 10, 13, 12, 14]
c) [9, 3, 10, 13, 12, 14, 17, 16, 15, 19]
d) [9, 3, 10, 13, 12, 14, 19, 16, 15, 17]

Exercício 2

2) Dada a seguinte lista de números [1, 20, 11, 5, 9, 16, 14, 13, 19] qual deve ser o valor do pivô usando o método da mediana de 3.

a) 1
b) 9
c) 16
d) 19
e) 11

Exercício 3

3) Qual dos seguintes algoritmos sempre garantem no pior caso O(nlogn)

a) Shell Sort
b) Quick Sort
c) Merge Sort
d) Insertion Sort

Referências

Básica

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: Teoria e Prática. Editora Campus, 2002
- Ziviani, N. Projeto de Algoritmos Com Implementações em Pascal e C, Cengage Learning, 2004.

Complementar

- TENENBAUM, Aaron; LANGSAM, Yedidyah; AUGENSTEIN, Moshe J. *Estruturas de dados usando C. São Paulo: Makron Books, 1995. ISBN: 9788534603485*
- ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; ARAUJO, Graziela Santos. Estruturas de Dados: Algoritmos, análise da complexidade e implementações em Java e C/C++. Pearson Prentice Hall, 2010
- DROZDEK, Adam. Adam Drozdek. Data Structures and Algorithms in Java. 2. Cengage Learning. 2004. 2. Cengage Learning. 2004
- GOODRICH, Michael T. Estruturas de dados e algoritmos em java. 4 ED. Porto Alegre: Bookman, 2007. 600.
- SKIENA, Steven S.. The Algorithm Design Manual. 2. Springer-Verlag. 2008
- Notas de aula: prof. Ítalo Cunha – UFMG. 2012.

Perguntas....