Factorisation de Cholesky et Vérification de la Définition Positive d'une Matrice

Table des Matières

Introduction

- La factorisation de Cholesky décompose une matrice symétrique définie positive en un produit de deux matrices triangulaires.
- Utilisée dans la résolution de systèmes d'équations linéaires et l'optimisation.
- La vérification de la définition positive est une étape préliminaire pour appliquer l'algorithme de Cholesky.

Définition de la Factorisation de Cholesky

La factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive A est donnée par :

$$A = L \cdot L^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure.

Pseudo-code de l'Algorithme de Cholesky

Algorithm 1 CholeskyFactorization(A)

Entrée : Matrice symétrique définie positive A de taille $n \times n$
Sortie : Matrice triangulaire inférieure L de taille $n \times n$ telle que $A = L \cdot L^T$
for $i = 1$ **to** n **do**
  for $j = 1$ **to** i **do**
    if $i == j$ **then**
      $temp\_sum \leftarrow \sum_{k=1}^{j-1} L[i,k]^2$
      $L[i,j] \leftarrow \sqrt{A[i,i] - temp\_sum}$
    else
      $temp\_sum \leftarrow \sum_{k=1}^{j-1} L[i,k] \cdot L[j,k]$
      $L[i,j] \leftarrow (A[i,j] - temp\_sum)/L[j,j]$
    end if
  end for
end for
Retourner L

Explication des Étapes

1. **Boucles Principales** : Parcourt les éléments de la matrice A pour construire la matrice L.
2. **Calcul des Éléments Diagonaux** : Si $i = j$, l'élément est calculé comme la racine carrée de $A[i,i] - \sum_{k=1}^{j-1} L[i,k]^2$.
3. **Calcul des Éléments Hors Diagonaux** : Si $i \neq j$, l'élément est calculé à partir des valeurs précédemment calculées.

Définition

- Une matrice symétrique A est définie positive si, pour tout vecteur non nul x, $x^T Ax > 0$.
- En pratique, cela équivaut à vérifier que tous les pivots principaux de la matrice ont un déterminant strictement positif.

Pseudo-code pour Vérifier la Définition Positive

Algorithm 2 IsPositiveDefinite(A)

Entrée : Matrice symétrique A de taille $n \times n$
Sortie : **Vrai** si A est définie positive, **Faux** sinon
for $i = 1$ **to** n **do**
  Extraire la sous-matrice A_i de taille $i \times i$
  Calculer le déterminant de A_i
  if déterminant$(A_i) \leq 0$ **then**
    Retourner Faux
  end if
end for
Retourner Vrai

Explication des Étapes

1. **Extraction des Sous-Matrices** : On extrait les sous-matrices principales A_i pour $i = 1$ à n.
2. **Calcul du Déterminant** : Le déterminant de chaque sous-matrice A_i est calculé.
3. **Condition de Définition Positive** : Si un déterminant est ≤ 0, la matrice n'est pas définie positive.

Conclusion

- Les algorithmes présentés permettent de factoriser une matrice symétrique définie positive et de vérifier cette propriété.
- La factorisation de Cholesky est largement utilisée dans les systèmes d'équations linéaires, l'optimisation, et la modélisation statistique.
- La vérification de la définition positive est cruciale pour s'assurer que la factorisation de Cholesky est possible.