

Universidade Federal do ABC

ENGENHARIA AEROESPACIAL

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA PLATAFORMA DE
ESTIMAÇÃO EM TEMPO REAL DE ATITUDE COM SENSORES
INERCIAIS DE BAIXO CUSTO**

Autor:

Roney D da Silva

Orientadores:

Prof. Dr. Diego P. F. Correa

Prof. Dr. Leandro Baroni

São Bernardo do Campo – 2020

RONEY DUARTE DA SILVA

**PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA PLATAFORMA DE
ESTIMAÇÃO EM TEMPO REAL DE ATITUDE COM SENSORES
INERCIAIS DE BAIXO CUSTO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências
Sociais Aplicadas da Universidade Federal do
ABC como requisito parcial à obtenção do título
de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Orientadores:
Prof.Dr. Diego P. F. Correa
Prof. Dr. Leandro Baroni

São Bernardo do Campo – 2020

Duarte da Silva, Roney

Projeto e Implementação de uma Plataforma de Estimação em Tempo Real de Atitude com Sensores Inerciais de Baixo Custo/ Roney Duarte da Silva. — 2020.

92 fls.

Orientador: Dr. Diego P. F. Correa

Coorientador: Dr. Leandro Baroni

Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal do ABC, Bacharelado em Engenharia Aeroespacial, São Bernardo do Campo, 2020.

1. Estimação de Atitude. 2. Microcontroladores. 3. Sensores Inerciais. 4. Quaternios. 5. Filtro de Kalman. I. Correa, Diego P. F.. II. Baroni, Leandro. III. Bacharelado em Engenharia Aeroespacial, 2020. IV. Projeto e Implementação de uma Plataforma de Estimação em Tempo Real de Atitude com Sensores Inerciais de Baixo Custo.

Agradecimentos

Aos professores Diego P. F. Correa e Dr. Leandro Baroni, pela compreensão e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela predisposição em analisar e discutir este trabalho e pelas sugestões recebidas.

À Pró-reitoria de Assuntos Comunitários e Políticas Afirmativas, que por meio das políticas socioeconômicas tornou possível a formação de mais um jovem periférico.

Aos professores da UFABC que transmitiram conhecimento e deram incentivos ao longo do curso.

Aos amigos Alan, Alexandre, Eden, Elias, Jonatas, Marcelino, Victória e Thales, que compartilharam do meu tempo neste graduação tão prazerosa.

À minha mãe Cida, minha esposa Maristela, minha sogra e cunhado Alzira e Michael, pelo constante suporte e apoio.

“A pressa é a inimiga da vitória. O fraco não tem espaço e o covarde morre sem tentar”.

Racionais Mc's.

Resumo

Obter a atitude de drones, veículos subaquáticos e outros dispositivos com 6 graus de liberdade é uma das tarefas mais desafiadoras no projeto de sistemas de controle de navegação. Por este motivo, muitos projetos utilizam programas proprietários ou limitam-se á simulações. Neste trabalho é apresentado um sistema completo para determinação de atitude capaz de fornecer medidas calibradas e atitude estimada utilizando sensores MEMS, com microcontrolador de baixo custo e baixo consumo energético. Acelerômetro e magnetômetro são calibrados *online* no sistema embarcado como emprego do método dos mínimos quadrados sem auxílio de equipamentos externos. O estado estimado é computado com um rápido algorítimo algébrico de quatérnios (consumindo menos de 1,5 s) com emprego de um filtro aditivo de Kalman linear.

Palavras chave: Estimação de Atitude, ESP32, Sensores Inerciais, Plataforma *Strapdown*, Filtro de Kalman.

Abstract

Getting the attitude of drones, underwater vehicles or other devices with 6 DoF is one of the most challenging tasks in the project of navigation control systems. For this reason, many projects use proprietary software or are limited to simulations. This work presents a complete system for attitude determination capable of provide calibrated measurements and attitude estimation using MEMS sensors, with a low-cost and low-power microcontroller. The accelerometer and magnetometer are calibrated online on the embedded system using least squares methods without any external devices. The states estimation is computed with a fast algebraic quaternion algorithm (less than 1.5s) using an additive linear Kalman Filter.

Keywords: Attitude estimation, ESP32, Inertial Sensors, Strapdown platform, Kalman Filters.

Nomenclatura

Lista de Siglas e Abreviaturas

FKL Filtro de Kalman Linear

GPS *Global Position System*

INS *Inertial Navigation System*

LQR *Linear Quadratic Regulator*

MARG *Magnetic, Angular Rate, and Gravity*

MEMS *Micro-Electro Mechanical System*

NED *North East Down*

PID Proporcional Integral Derivativo

UMIS Unidade de Medição Inercial *Strapdown*

Lista de Símbolos

\mathbf{v}_{g_k} Ruído aditivo de processo

\mathbf{v}_k Ruído aditivo de medida

\mathbf{z}_k Medidas do processo

\bullet_c Vetor de medidas compensadas

\bullet_m Vetor de medidas brutas do sensor

$[\mathbf{x} \times]$ Matriz antissimétrica de um vetor \mathbf{x}

\mathbf{A}_k Matriz de predição linear

\mathbf{C}_k	Matriz de medida
\mathbf{K}_k	Matriz ganho de Kalman
\mathbf{P}_k^+	Matriz de covariância <i>a posteriori</i> do filtro de Kalman
\mathbf{P}_k^-	Matriz de covariância <i>a priori</i> da predição do filtro de Kalman
\mathbf{q}_{acl}	Quatérnio do acelerômetro
\mathbf{Q}_k	Matriz de covariância do ruído aditivo do processo
\mathbf{q}_{mag}	Quatérnio do magnetômetro
\mathbf{q}_{obs}	Quatérnio de observação
\mathbf{q}_{pro}	Quatérnio de predição
$\mathbf{R} \left({}_i^b \mathbf{q} \right)$	Matriz de transformação de coordenadas
\mathbf{R}_k	Matriz de covariância do ruído aditivo da medida
\mathbf{x}_k^+	Vetor de estados <i>a posteriori</i>
\mathbf{x}_k^-	Vetor de estados <i>a priori</i>
${}^b [\bullet]$	Vetor escrito no sistema do corpo
${}^i [\bullet]$	Vetor escrito no sistema inercial
${}_b^i \mathbf{q}$	Quatérnio do sistema i com respeito ao sistema b
$E[\bullet]$	Operador esperança
f_{giro}	Fator de escala do giroscópio
X, Y, Z	Cooerdenadas escritas no sistema inercial
x, y, z	Cooerdenadas escritas no sistema do corpo

Listas de Figuras

1.1	Sistemas de coordenadas e campos inerciais	4
1.2	Sistema básico de navegação inercial	5
3.1	MPU-9250 (GY-91)	19
3.2	Acelerômetro	20
3.3	Modelo simplificado de giroscópio com tecnologia MEMS	22
3.4	Modelo simplificado de magnetômetro com tecnologia MEMS	22
3.5	Controlador TTGO ESP32-WROOM 0.96O LED com suporte de bateria 18650	23
3.6	Sistema de navegação inercial	24
3.7	Parte interna da plataforma <i>strapdown</i>	25
3.8	Plataforma <i>strapdown</i> desenvolvida	25
3.9	Coleta estática do eixo x do giroscópio	34
3.10	Distribuição normal da leitura estática do eixo x do acelerômetro	35
3.11	Transformação das medidas do magnetômetro para o sistema intermediário II .	39
4.1	Resultados da calibração do acelerômetro	46
4.2	Norma das medida do acelerômetro	46
4.3	Representação tridimensional das medidas do magnetômetro	47
4.4	Comparativo das medidas \mathbf{m}_m e \mathbf{m}_c	48
4.5	Resultado da calibração do giroscópio	49
4.6	Fluxograma do filtro de Kalman implementado	50
4.7	Medidas dos coletadas dos sensores coletadas	51
4.8	Quatérnios obtidos do giroscópio e com algorítimo AQUA	53
4.9	Ângulos de Euler extraídos dos quatérnios da	54
4.10	Resíduo e inovação	55
4.11	Desvio padrão dos estados obtidos da matriz de covariância \mathbf{P}^+	56

4.12	Tempo de execução	56
B.1	Esquema elétrico da plataforma <i>Strapdown</i>	73

Lista de Tabelas

3.1	Especificações técnicas ESP32	23
3.2	Vetor de transmissão da telemetria	26

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Nomenclatura	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Sumário	xv
1 Introdução	3
1.1 Sistemas de coordenadas	4
1.2 Objetivos	6
1.2.1 Hipóteses assumidas	6
1.3 Revisão bibliográfica	6
1.4 Organização do trabalho	7
2 Fundamentação Teórica	9
2.1 Atitude	9
2.2 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)	12
2.3 Filtro de Kalman linear	13
2.3.1 Equações do filtro de Kalman linear	17
3 Metodologia	19
3.1 Hardware	19

3.1.1	Acelerômetro	20
3.1.2	Giroscópio	21
3.1.3	Magnetômetro	22
3.1.4	Microcontrolador	22
3.1.5	A plataforma	24
3.2	Telemetria	26
3.3	Calibração	26
3.3.1	Calibração do acelerômetro	27
3.3.2	Calibração do magnetômetro	29
3.3.3	Calibração do giroscópio	32
3.4	Orientação baseada nos quatérnios	32
3.4.1	Atitude baseada no giroscópio	34
3.4.2	Atitude baseada no acelerômetro e magnetômetro	36
Ângulo de guinada	38	
Covariância da observação	41	
3.4.3	Fusão dos sensores com o Filtro de Kalman linear	42
4	Resultados	45
4.1	Resultados das Calibrações	45
4.1.1	Resultado da calibração do acelerômetro	45
4.1.2	Resultado da calibração do magnetômetro	47
4.2	Implementação do Filtro de Kalman FKL	50
5	Conclusões	59
5.1	Códigos Fonte	60
Bibliografia		61
A	Apêndices	67
A.1	Propriedades dos quatérnios	67
A.2	Matrizes de covariância dos quatérnios de observação	69
B	Esquema Elétrico	73

"...estamos em uma época que o homem navega no mar, no céu e no espaço pelas trajetórias Kleperianas, com naves modernas controladas por robôs cada vez mais sofisticados explorando mundos novos..."

Capítulo 1

(SAGAN, 2011)

Introdução

Um dos maiores desafios na implementação de uma lei de controle de malha fechada em um determinado dispositivo é estimar os estados com precisão, e comumente, é um processo mais complexo que o próprio controle em si.

Sensores inerciais, que antes eram em maioria mecânicos, complexos e caros, estão disponíveis hoje a preços cada vez mais acessíveis. O Sistema de Navegação Inercial, comumente chamado de INS é um sistema composto por uma unidade de medidas inerciais (IMU) e um processador. Por meio das leis de Newton, a IMU fornece a força específica e a taxa de variação de velocidade angular. Ao incluir um magnetômetro (*compass*), compõe-se uma MARG do inglês *Magnetic, Angular Rate, and Gravity* (MADGWICK; HARRISON; VAIDYANATHAN, 2011). A aplicação mais comum de sensores inerciais é estimação da orientação de dispositivos com respeito a um referencial inercial. A precisão desta estimação depende da precisão destes sensores que é melhorada via compensação computacional. O desafio de um projetista é tornar a precisão tão boa quanto se deseja aumentando o mínimo possível o custo computacional.

Tratando de processamento de dados, o avanço tecnológico dos microprocessadores oferta soluções cada vez mais acessíveis com poder computacional cada vez maior. A utilização de processadores de desempenho e sensores miniaturizados, possibilitou novas técnicas de controle além de aprimorar as técnicas existentes (DavidTitterton2004). Sistemas de controle como PID (Proporcional Integral Derivativo), LQR (*Linear Quadratic Regulator*), SDRE (*State Dependent Riccati Equation*), *Feedback Linearization*, entre outros exigem o conhecimento do estado atual do sistema controlado. O baixo custo e fácil integração de sensores MEMS em sistemas embarcados tornou a implementação destas técnicas mais atrativas tanto no escopo didático quanto no comercial.

Pensando em explorar as técnicas de controle citadas, a UFABC adquiriu dois qua-

drirrotores elétricos com cerca de 1 kg de massa, modelo Gyro 200 desenvolvido pela empresa Gyrofly, de São José dos Campos. O sistema conta com uma plataforma com programas proprietários que impedem acesso total ao dispositivo. Há interesse em desenvolver uma plataforma com programa de código aberto para ampliar as experiências didáticas que o quadrirotor pode proporcionar. Este trabalho tem como foco o estudo e implementação de um sistema capaz de estimar online e fornecer a atitude de um quadrirotor com emprego de três sensores: acelerômetro, giroscópio e magnetômetro, todo sendo de baixo custo.

1.1 Sistemas de coordenadas

Como este trabalho tem como foco o estudo e implementação de um sistema capaz de fornecer a atitude com emprego sensores de baixo custo e consequentemente baixa acurácia, definimos apenas dois sistemas de coordenadas: O sistema do global e o sistema do corpo:

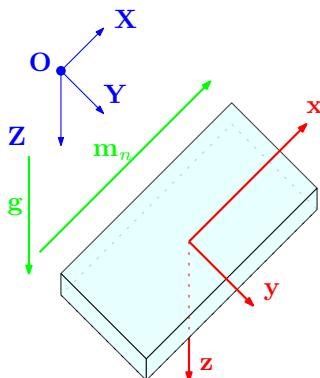


Figura 1.1: Sistemas de coordenadas e campos inerciais

O sistema global possui direção coincidente com a direção NED. Configurado com eixo X apontado para o norte (*north*), eixo Z apontando para baixo (*down*) paralelo ao vetor gravidade, e completando o sistema, o eixo Y aponta para o leste (*east*) (GROVES, 2007). Neste trabalho o sistema dito global será indicado com o sobrescrito *i*, e será considerado como um sistema inercial. O segundo sistema é o sistema do corpo, indicado com o sobrescrito *b*, possui *z* para baixo, *x* para frente e *y* completando a base ortogonal. A Fig. 1.1 apresenta os dois sistemas.

A Fig. 1.2 apresenta o sistema básico de INS. De posse dos dados calibrados da IMU/-MARG, o processador da INS pode calcular a velocidade, posição e atitude de um corpo a

partir de sua posição e velocidade iniciais e histórico de sua aceleração cinemática (CHATFIELD, 1997).

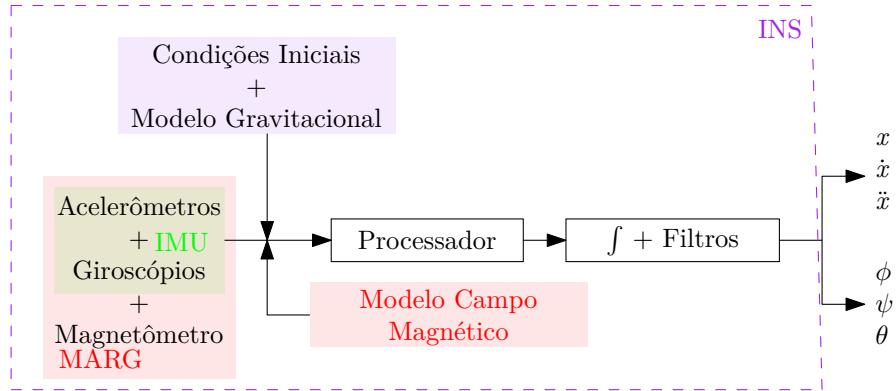


Figura 1.2: Sistema básico de navegação inercial

Os três sensores estão montados sobre uma base fixa que se move junto ao corpo como mostra a Fig. 1.1. Esta montagem fixada em uma base rígida recebe o nome de *strapdown*¹. Quando a base rígida está embarcada com um sistema computacional dedicado dá-se o nome de unidade de medição inercial *strapdown* (UMIS). Uma plataforma é obtida quando se fixa a UMIS no corpo do veículo (SANTANA; A CAMPOS; M FURUKAWA; MARUYAMA, 2018).

A tríade com as medidas do acelerômetro, giroscópio e magnetômetro, todos no sistema do corpo, são representados vetorialmente por ${}^b\mathbf{a}$, ${}^b\boldsymbol{\omega}$ e ${}^b\mathbf{m}$. As medidas dos eixos de cada sensor são armazenadas como visto nas Eqs. 1.1, 1.2 e 1.3

$${}^b\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^\top \quad (1.1)$$

$${}^b\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^\top \quad (1.2)$$

$${}^b\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^\top \quad (1.3)$$

Do mesmo modo, as medidas iniciais são representadas por:

$${}^i\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_X & a_Y & a_Z \end{bmatrix}^\top \quad (1.4)$$

$${}^i\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^\top \quad (1.5)$$

$${}^i\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_X & h_Y & h_Z \end{bmatrix}^\top \quad (1.6)$$

¹ “Amarrada ao corpo” (tradução do autor)

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal a construção de uma plataforma *Strapdown* capaz de fornecer estados estimados *online* dos ângulos de Euler, acessível e de código aberto.

Propor métodos de calibração *online* para o magnetômetro e acelerômetro tal que seja factível com as capacidades computacionais de baixo custo sem adição de equipamentos externos.

1.2.1 Hipóteses assumidas

As hipóteses assumidas para o presente trabalho foram:

Hipótese 1. *O sistema composto pela triáde dos eixos do giroscópio é considerado ortogonal.*

Hipótese 2. *O bias do giroscópio não é estimado, sendo apenas calibrado na inicialização pela média das medidas com a IMU estática e então considerado após a calibração.*

Hipótese 3. *Assume-se que a Terra é um referência inercial, portanto, o termo referencial inercial e global são tratados aqui como equivalentes.*

Hipótese 4. *A aceleração translacional é considerada muito menor que a aceleração da gravidade.*

Hipótese 5. *No desenvolvimento, o magnetômetro influenciará exclusivamente o ângulo de guinada ψ . Assim sendo, interferências eletromagnéticas serão influentes apenas neste ângulo.*

1.3 Revisão bibliográfica

Esta seção reúne a pesquisa bibliográfica relacionada à história e teoria navegação inercial.

Chatfield (1997), Kayton e Fried (1997), Grewal, Weill e Andrews (2000) e Titterton e Weston (2004) compõem a bibliografia básica de navegação inercial trazendo informações sobre a história da navegação, navegação inercial por meio de plataformas inerciais e plataformas *Strapdown*, desde sua concepção até seu desenvolvimento nos dias atuais. Contém capítulos dedicados a giroscópios e acelerômetros abordando testes, calibração e compensação dos mesmos. Também são apresentados fundamentos sobre GPS e INS, características de cada um e integração dos mesmos.

Os sensores iniciais são comumente utilizados em conjunto com outros sistemas como o GPS por exemplo. Gautier (2003) investiga os níveis de integração INS/GPS de forma fraca-mente acoplada (*loosely coupled system*), fortemente acoplada (*tightly coupled system*) e ultra fortemente acoplada (*ultra tightly coupled system*). Os trabalhos de Caron, Duflos, Pomorski e Vanheeghe (2006) e Milanés, Naranjo, González, Alonso, García e Pedro (2008) exploram a alternância entre GPS e IMU aplicado a veículos autônomos terrestres. Na universidade Federal de Santa Catarina, Stein e Reis (2007) propõe um sistema integrado GPS/INS com filtro de Kalman que coletava água nos rios da floresta amazônica, e devido a má qualidade de sinal GPS neste ambiente, a navegação inercial foi fundamental. Amorim (2012) apresenta a calibração geométrica de magnetômetros que foi aplicada neste trabalho.

Ban, Niu, Zhang, Zhang, Guo e Zhang (2014) avalia a utilização de INS com tecnologia MEMS de baixo custo, verificando que o erro de velocidade induzido por esta categoria de INS é relativamente pequeno menor que 0,1m/s dada atualização típica de GPS com intervalos de 1s.

O algorítimo desenvolvido por Kalman (1960) aplica-se a sistemas lineares discretos e hoje possui diversas formas de desenvolvimento e aplicações como, por exemplo, em Maybeck (1979) que é apresentada uma abordagem baseada na teoria de Bayes. Aguirre (2007) descreve filtro de forma simples e didática, sendo excelente como introdução do filtro, além de apresentar outros estimadores como o método dos mínimos quadrados. Welch e Bishop (2001), Grewal e Andrews (2008) e Robert Grover Brown (2012) apresentam abordagens práticas de utilização de filtro de Kalman.

Valenti, Dryanovski e Xiao (2015) apresenta em seu trabalho o algorítimo denominado AQUA (*Algebraic Quaternion Algorithm*). Este algorítimo fornece a atitude na representação de um quatérnio de forma algébrica e a fusão dos sensores pode ser feita com um filtro linear de Kalman.

A IMU utilizada foi a MPU-9250 fabricada pela InvenSense® que possui três sensores com três eixos ortogonais e um sensor de temperatura. O manual InvenSense (2016) da IMU é completo mostrando o acesso a informação pertinente às medidas aqui utilizadas.

1.4 Organização do trabalho

No capítulo 2 há uma breve apresentação da teoria dos quatérnios e do filtro de Kalman linear. No capítulo 3 é apresentada a plataforma desenvolvida e seus componentes, métodos de cali-

bração de cada sensor, obtenção dos quatérnios, e então, a mecanização do filtro de Kalman na perspectiva de fusão de sensores. Os resultados e a análise completa da implementação estão apresentados no capítulo 4. Por fim, o capítulo 5 trás a conclusão do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo contém desenvolvimento teórico relacionado a representação de atitude e a teoria do filtro de Kalman. A teoria sobre ângulos de Euler foi consultada na clássica obra de Sidi (2010) e a teoria dos quatérnios em Kuipers (1999) e Solà (2017). Por fim, a teoria do Filtro de Kalman foi tomada como base os livros Aguirre (2007) e Grewal et al. (2008).

2.1 Atitude

Determinar a atitude de um corpo é determinar sua orientação no espaço com respeito a um sistema de referência. A atitude pode ser representada por ângulos de Euler, quatérnios, matriz de rotação, matriz de cossenos diretores, entre outros.

A representação de um sistema em outro pode ser feita por uma operação denominada transformação de coordenadas. Esta transformação pode ser feita com auxílio de uma matriz denominada matriz de rotação. Optou-se por utilizar, neste trabalho, a matriz de rotação representada pelos ângulos de Euler da sequência ${}^b_i\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi)$, que é a mais comum na literatura da engenharia aeroespacial (SIDI, 2010):

$${}^b_i\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Um vetor representa no sistema inercial ${}^i\mathbf{x}$ é transformado no sistema do corpo ${}^b\mathbf{x}$

fazendo:

$${}^b\mathbf{x} = {}_i^b\mathbf{R} {}^i\mathbf{x} \quad (2.2)$$

A matriz de rotação é ortonormal, em decorrência, a transformação inversa da Eq. 2.2 é dada pela Eq. 2.3

$${}^i\mathbf{x} = ({}^b_i\mathbf{R})^\top {}^b\mathbf{x} = {}_b^i\mathbf{R} {}^b\mathbf{x} \quad (2.3)$$

Da matriz de transformação Eq. 2.1 também obtemos os ângulos de Euler. Com ${}_b^i\mathbf{R}(i, j)$ representando o elemento da i -ésima linha na j -ésima coluna de \mathbf{R} , os ângulos ϕ , θ e ψ são obtidos com as Eqs. 2.4, 2.5 e 2.6

$$\theta = -\arcsin {}_b^i\mathbf{R}(1, 3) \quad (2.4)$$

$$\psi = \arctan \frac{{}_b^i\mathbf{R}(2, 3)}{{}_b^i\mathbf{R}(3, 3)} \quad (2.5)$$

$$\phi = \arctan \frac{{}_b^i\mathbf{R}(1, 2)}{{}_b^i\mathbf{R}(1, 1)} \quad (2.6)$$

Além da matriz de rotação, pode-se representar a atitude de um corpo com um quatérnio \mathbf{q} . Há diversas formas de representar um quatérnio, neste trabalho o escalar q_0 e a parte vetorial \mathbf{q}_v compõem o quatérnio visto na Eq. 2.7.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \equiv \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}_v \end{bmatrix}^\top \quad (2.7)$$

obedecendo as relações mostradas em (2.8)

$$ij = -ji = k \quad (2.8)$$

A Eq. 2.8 pode ser interpretada da seguinte forma: dado um eixo \mathbf{u} a rotação de um ângulo θ , a operação obedece a regra da mão direita. A relação dos quatérnios com a matriz de cossenos diretores é desenvolvida no Apêndice A.1 e é dada pela Eq. 2.9:

$${}^b\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}({}_i^b\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Como feito com a matriz de rotação, um vetor escrito no sistema do corpo pode ser reescrito no sistema inercial fazendo

$${}^b\mathbf{x} = \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q} \right) {}^i\mathbf{x} \quad (2.10)$$

A transformação inversa é obtida com o quatérnio conjugado

$${}_i^b\mathbf{q} = {}_i^b\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}^\top \quad (2.11)$$

A rotação de vetores tridimensionais com quatérnios é feita com emprego da Eq. 2.9 ou com produto de quatérnios obedecendo a função passiva

$${}^i\mathbf{x}_q = {}_i^b\mathbf{q}^* \otimes {}^b\mathbf{x}_q \otimes {}_i^b\mathbf{q} \equiv {}_i^b\mathbf{q} \otimes {}^b\mathbf{x}_q \otimes {}_i^b\mathbf{q}^* \equiv \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q} \right) {}^b\mathbf{x} \quad (2.12)$$

O subscrito \bullet_q em um vetor, como ${}^b\mathbf{x}_q$, indica que o vetor tridimensional está escrito na forma de um quatérnio dada por

$${}^b\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} 0 & {}^b\mathbf{x} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & x_x & x_y & x_z \end{bmatrix}^\top \quad (2.13)$$

O produto de quatérnios é representado pelo operador \otimes é dado por

$${}_i^b\mathbf{s} = {}_i^b\mathbf{q} \otimes {}_i^n\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\ p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2 \\ p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1 \\ p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Alternativamente, com a matriz antissimétrica definida na Eq. 2.15

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

o produto de quatérnios pode ser reescrito como um produto comum de matrizes visto na

Eq. 2.16

$$\bar{\mathbf{q}} \otimes \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

com

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}) \triangleq - \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^\top \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I}_3 - [\mathbf{q} \times] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Mais detalhes sobre a teoria dos quatérnios podem ser vistos em (KUIPERS, 1999; TRAWNÝ; ROUMELIOTIS, 2005; SIDI, 2010; SOLÀ, 2017)

2.2 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Em sistemas lineares, o método dos mínimos quadrados (MMQ) é utilizado para estimar parâmetros $\beta \in \mathbb{R}^{N \times L}$ tal que seja possível relacionar a variável dependente $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times K}$ com a variável independente $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times L}$.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^\top \beta + \xi \quad (2.18)$$

A estimativa MMQ é melhor quanto menor for o erro cometido na parametrização. Com $\xi \in \mathbb{R}^{N \times K}$ representando o erro na aproximação da parametrização, para $K = 1$, o somatório dos erros é um escalar que quantifica o erro na parametrização

$$J = \xi^\top \xi = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^\top \mathbf{X}\beta - \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} + \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta \quad (2.19)$$

Um extremo de J com respeito a β é obtido fazendo $\frac{\partial \xi^\top \xi}{\partial \beta} = 0$. Derivando a Eq. 2.19 com respeito a β temos:

$$\frac{\partial \xi^\top \xi}{\partial \beta} = -\mathbf{X}^\top \mathbf{Y} - \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} + \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^\top \beta \quad (2.20)$$

$\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ é uma matriz simétrica, logo $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^\top$. A condição que β deve atender

para minimização do erro da parametrização é:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \quad (2.21)$$

Sabe-se que de fato a Eq. 2.20 está em um extremo de mínimo uma vez que a segunda derivada é positiva. Isto é verificado fazendo:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} = 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \quad (2.22)$$

uma vez que $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ é uma matriz simétrica definida positiva, verifica-se que a Eq. 2.21 fornece a minimização do erro da Eq. 2.19.

2.3 Filtro de Kalman linear

Aqui tratamos o filtro de Kalman (KF, do inglês *Kalman Filter*), que é um estimador recursivo ótimo amplamente utilizado para estimação de variáveis de estado em tempo real, no sentido de minimização do erro médio quadrado. O foco aqui será o caso discreto descrito pelo modelo linear do tipo:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (2.23)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.24)$$

Deseja-se computar o estado estimado $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ dado o estado previamente estimado $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ e a medida atual \mathbf{z}_k . Assume-se ainda que as incertezas \mathbf{v}_k e \mathbf{w}_k nas medidas e no modelo, respectivamente, não são relacionadas, isto é

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbb{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbb{E}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k] = 0 \quad (2.25)$$

$\mathbb{E}[\bullet]$ representa o operador esperança. O cômputo da estimação é feito da seguinte maneira

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (2.26)$$

\mathbf{K}'_k e \mathbf{K}_k representam as ponderações entre a propagação e a observação fornecida pelo filtro. A determinação de \mathbf{K}'_k parte da esperança de que o erro da estimação $\tilde{\mathbf{x}}_k^+$ seja nulo, uma

vez que o erro de estimativa é dado pela diferença entre o estado estimado e o estado exato \mathbf{x}_k

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k^+] = 0 \quad \text{com} \quad \tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k \quad (2.27)$$

O erro de estimativa pode ser reescrito considerando a Eq. 2.26 na Eq. 2.27

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k \quad (2.28)$$

levando as equações do modelo, Eqs. 2.23 e 2.24, no erro (2.28) obtemos

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_{k-1} + (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k - \mathbb{I}_N) \mathbf{w}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (2.29)$$

\mathbb{I}_N é uma matriz quadrada identidade de ordem N. A esperança do erro de estimativa é:

$$\underline{E[\tilde{\mathbf{x}}_k^+]} = E[\mathbf{K}'_k \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^+] + E[(\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_{k-1}] + \underline{E[(\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k - \mathbb{I}_N) \mathbf{w}_k]} + E[\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]$$

Dado que as incertezas das medidas \mathbf{v}_k e do modelo \mathbf{w}_k não são relacionadas, pode-se assumir que os termos sublinhados são nulos. Então temos

$$0 = E[\mathbf{K}'_k \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^+] + E[(\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_{k-1}]$$

As matrizes de Kalman são independentes entre as iterações. Tomando os elementos que contém \mathbf{K}'_k verifica-se que

$$E[(\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_{k-1}] = (\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k) E[\mathbf{x}_{k-1}] = 0$$

uma vez que os estados não possuem necessariamente esperança nula

$$\mathbf{K}'_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \quad (2.30)$$

A equação 2.26 pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = (\mathbb{I}_N - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (2.31)$$

Uma vez que o estado estimado a *priori* é definido como

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ = \mathbf{A}_k^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (2.32)$$

levando (2.32) em (2.31) temos

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.33)$$

$\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ é um termo conhecido como inovação e compara a medida atual com a propagação. A diferença entre a medida atual e o estado predito, $\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+$, é chamada de resíduo.

O filtro de Kalman é um filtro ótimo, sendo assim o ganho é computado de tal maneira que o erro da estimação seja minimizado. Para obter essa condição definiremos \mathbf{P}_k^- , que é a matriz de covariância da predição linear do filtro de Kalman *a priori* no instante k e, \mathbf{P}_k^+ que representa a matriz de covariância do erro de medida *a posteriori* como segue:

$$\mathbf{P}_k^- = E[\tilde{\mathbf{x}}_k^-, \tilde{\mathbf{x}}_k^-] = E[\hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k] \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E[\tilde{\mathbf{x}}_k^+, \tilde{\mathbf{x}}_k^+] = E[\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k] \quad (2.35)$$

Levando as Eqs. 2.23 e 2.32 na Eq. 2.34, a covariância do erro *a priori* pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E\left[\left(\mathbf{A}_k \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{x}_{k-1}\right) - \mathbf{w}_k\right) \left(\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{x}_{k-1}\right)^\top \mathbf{A}_k^\top - \mathbf{w}_k^\top\right)\right] \\ &= \mathbf{A}_k \underbrace{E\left[\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{x}_{k-1}\right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{x}_{k-1}\right)^\top\right]}_{\mathbf{P}_{k-1}^+} \mathbf{A}_k^\top + \underbrace{E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top]}_{\mathbf{Q}_k} \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (2.36)$$

A matriz \mathbf{Q}_k representa a covariância do ruído aditivo no processo \mathbf{x}_k (AGUIRRE, 2007). Para obter o resultado apresentado na Eq. 2.36 considera-se que não há correlação entre o erro dos estados estimados e o ruído de processo, i.e., $E[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_k] = 0$. O ganho \mathbf{K}_k pode ser obtido reescrevendo as Eqs. 2.31, 2.32 e 2.27

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = (\mathbb{I}_N - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (2.37)$$

A matriz de covariância \mathbf{P}_k^+ pode ser reescrita com (2.37) e $\mathbf{R}_k = \text{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top]$, que é conhecida como matriz de covariância de ruído aditivo da medida \mathbf{z}_k (AGUIRRE, 2007), da seguinte forma

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top \quad (2.38)$$

O ganho do filtro de Kalman é responsável por minimizar o traço da matriz de covariância a *posteriori* \mathbf{P}_k^+

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{P}_k^+) = 0$$

Das propriedades de matrizes sabe-se que o traço da soma de matrizes é igual à soma dos traços de cada uma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} (\text{Tr}[\mathbf{P}_k^+]) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}[\mathbf{P}_k^-] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}[\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}[\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^-] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}[\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}[\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Analizando cada parcela do lado direito da Eq. 2.38 temos

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{P}_k^-) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{Q}_k) = 0 \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^-) = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \mathbf{K}_k^\top) = 2\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top \quad (2.40c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \text{Tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top) = 2\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \quad (2.40d)$$

Levando Eqs. 2.40a, 2.40b, 2.40c e 2.40d em (2.39) obtém-se a relação do cômputo do ganho de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.41)$$

De posse do ganho de Kalman a covariância *a posteriori* é

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbb{I}_N - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.42)$$

2.3.1 Equações do filtro de Kalman linear

Conhecendo as condições iniciais dos estados e das covariâncias, o processo recursivo do filtro linear de Kalman apresentado na Seção §2.3, pode ser agrupado em três grupos: inicialização, propagação e atualização (AGUIRRE, 2007).

- Inicialização

$$\mathbf{x}_0^+ = \mathbb{E} [\mathbf{x}_0] \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = \mathbb{E} [\hat{\mathbf{x}}_0^+ - \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0^+ - \mathbf{x}_0] \quad (2.43b)$$

- Equações de propagação ou predição (*time update*)

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2.43c)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{Q}_k \quad (2.43d)$$

- Equações de atualização ou correção (*measurement update*)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.43e)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.43f)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbb{I}_N - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.43g)$$

Como apresentado nas Eqs. 2.43a – 2.43g, o estado estimado é obtido a partir da propagação do modelo adicionando as informações das medidas no tempo atual. Este fato confere ao filtro de Kalman uma estrutura denominada estrutura preditora–corretora (AGUIRRE, 2007). No próximo capítulo serão apresentadas informações sobre o funcionamento básico dos sensores e rotinas de calibração de cada um, característica do microcontrolador e obtenção dos quatérnios que cumprirão função do modelo e observação do filtro de Kalman.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo são apresentados dados técnicos da MPU-9250 e do microcontrolador ESP32 pertinentes ao projeto da plataforma *strapdown* consultados dos manuais InvenSense (2016) e Systems (2018). Em seguida, é fornecida uma breve teoria do funcionamento, erros típicos e apresentado um método de calibração para cada sensor (AMORIM, 2012). Então, o algorítimo AQUA desenvolvido por Valenti et al. (2015) é apresentado, e o capítulo finaliza com as equações do filtro de Kalman linear na perspectiva da fusão de sensores.

3.1 Hardware

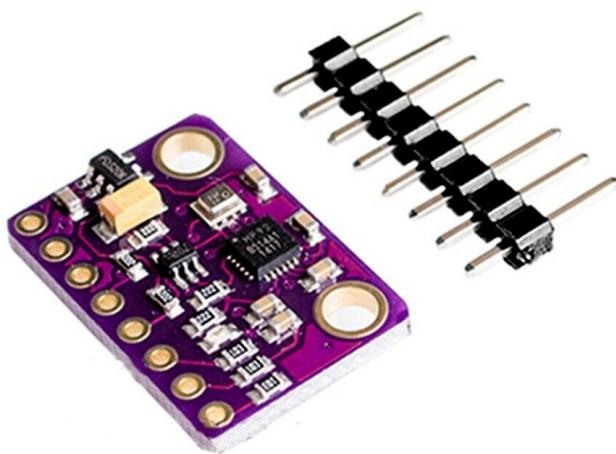


Figura 3.1: MPU-9250 (GY-91)

Fonte: <https://i.ebayimg.com/images/g/WfQAAOSwa3BbXuEG/s-l1600.jpg>

A plataforma *strapdown* construída é composta pela unidade de medida inercial MPU-9250, vista na Fig. 3.1, produzida pela empresa norte americana InvenSense® e o microcontrolador utilizado para calibrar, compensar e executar o algorítimo do filtro de Kalman foi o ESP32

produzido pela chinesa Espressif Systems®.

A IMU conta com três sensores: giroscópio, acelerômetro e magnetômetro com três eixos cada. De acordo com InvenSense (2016) o consumo médio é de 3,5 mA operando entre 2,4 – 3,6 V. A MPU-9250 conta com um filtro digital passa baixa (DFLP do inglês *Digital Filter Low Pass*). Este filtro rejeita frequências acima da frequência denominada frequência de banda e é interessante para amenizar ruídos nas medias. A frequência utilizada nesta trabalho foi de 20 Hz como frequência de banda na configuração do DFLP. Foi escolhida essa IMU devido a vasta documentação e ao baixo custo.

3.1.1 Acelerômetro

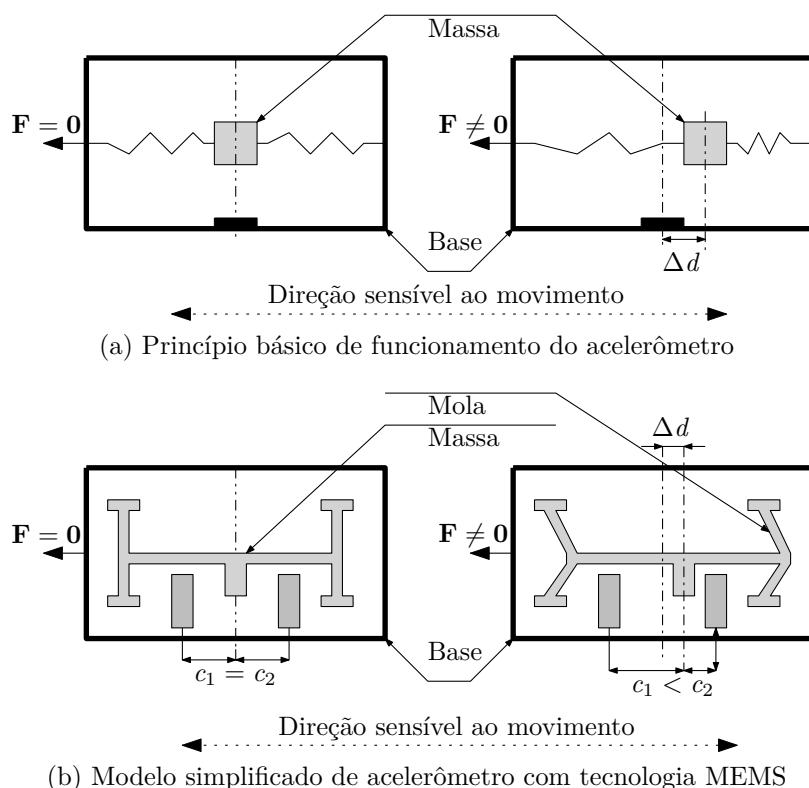


Figura 3.2: Acelerômetro

A Fig. 3.2a mostra esquematicamente um acelerômetro formado por um sistema massa-mola de massa m e constante elástica k conhecidas, este sistema serve de analogia para o sistema visto na Fig. 3.2b, que por sua vez representa o modelo simplificado de acelerômetros com tecnologia MEMS. O eixo pontilhado representa o único grau de liberdade do sistema bem como a direção sensível do acelerômetro. O corpo de silício fornece a massa e a rigidez do sistema massa-mola nos acelerômetros MEMS. Ao movimentar-se, a capacidade varia entre seus terminais,

relacionando-se com aceleração sentida pelo sistema, denominada força específica.

Tomando um referencial externo, podemos analisar um caso em que a direção sensível está perpendicular à aceleração da gravidade. Quando a força \mathbf{F} atua sobre sua estrutura, o corpo tende a resistir ao movimento divido à inércia e a aceleração inercial \mathbf{a}_i é obtida a partir da segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_i \quad \therefore \quad \mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (3.1)$$

Um observador no referencial interno do sensor, verificará o movimento relativo entre o corpo de silício e a estrutura devido a inércia, por este motivo, o sistema é dito não-inercial – um sistema inercial não gira e não acelera, por outro lado, o acelerômetro observado de fora pode ser visto com um sistema inercial validando a Eq. 3.1. Imagine agora que em relação ao eixo sensível do acelerômetro, uma força aplicada \mathbf{F} e o peso do corpo $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ estão paralelos, a Eq. 3.1 se torna

$$\frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{a}_i \quad \therefore \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{a}_i \quad (3.2)$$

A Eq. 3.2 mostra que a aceleração \mathbf{a}_i representa a força total por unidade de massa $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, essa força é responsável pelo movimento, e \mathbf{f} é denominada força específica (CHATFIELD, 1997; GROVES, 2007). A aceleração inercial causa o deslocamento Δd modificando a capacitância. De acordo com InvenSense (2016) cada um dos três eixos do acelerômetro da MPU-9250 possui massas de prova independentes em cada eixo. A conversão deslocamento-aceleração é feita por conversores analógicos-digitais de 16-bits também independentes com fatores de escalas programáveis em $\pm 2\text{ g}$, $\pm 4\text{ g}$, $\pm 8\text{ g}$ ou $\pm 16\text{ g}$. Neste trabalho foi utilizado $\pm 8\text{ g}$.

3.1.2 Giroscópio

Há giroscópios que utilizam fibras ópticas, laser, fenômenos óticos ou de precessão e a força de Coriolis. Os giroscópios com tecnologia MEMS como pode ser visto, de forma esquemática, na Fig. 3.3 exploram o efeito da força de Coriolis. Quando o eixo sensível está sujeito a uma rotação, o efeito Coriolis causa um vibração detectada por um circuito capacitivo. Da mesma forma que o acelerômetro, um conversor analógico-digital de 16-bits é responsável por fornecer as medições, que no caso do giroscópio são em dps^1 (graus por segundo). A escala programável

¹degree per second

é de $\pm 250^\circ/\text{s}$, $\pm 500^\circ/\text{s}$, $\pm 1000^\circ/\text{s}$ ou $\pm 2000^\circ/\text{s}$. Neste trabalho optou-se por $\pm 1000^\circ/\text{s}$.

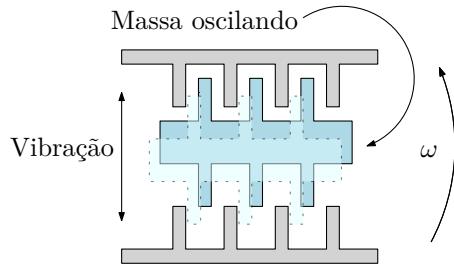


Figura 3.3: Modelo simplificado de giroscópio com tecnologia MEMS

3.1.3 Magnetômetro

Quando através de um condutor elétrico há fluxo de corrente e perpendicular a este fluxo atravessa um campo magnético, as cargas elétricas do fluxo de corrente tendem a desviar seu caminho original, gerando uma diferença de tensão. A Fig. 3.4 apresenta de forma esquemática esse tipo de magnetômetro. Este fenômeno é conhecido como efeito Hall e os magnetômetros com tecnologia MEMS o utilizam para computar campos eletromagnéticos. A MPU-9250 contém um magnetômetro triaxial com sensores Hall altamente sensíveis, amplificador de sinal e circuito aritmético para processamento de sinal dedicado em cada eixo. Os dados estão disponíveis com resolução de 16-bits e escala única de $\pm 4800 \mu\text{T}$.

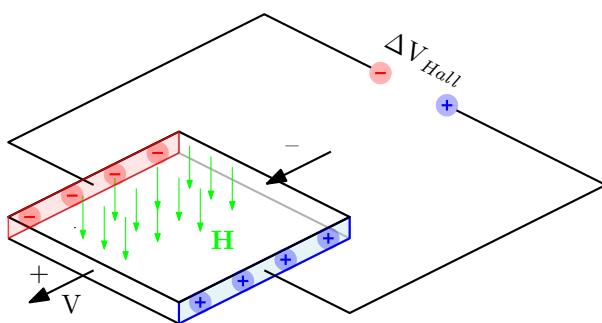


Figura 3.4: Modelo simplificado de magnetômetro com tecnologia MEMS

3.1.4 Microcontrolador

O microcontrolador utilizado para calibrar os sensores e executar o algoritmo do filtro de Kalman foi o ESP32 visto na Fig. 3.5. Produzido pela chinesa Espressif Systems® o ESP32 faz parte de uma família de microcontroladores de baixo custo e ultra baixo consumo energético contando com WIFI, bluetooth e o protocolo de comunicação *peer-to-peer* chamado ESP-NOW desenvolvido pela própria Espressif Systems®. O ESP32 é um microcontrolador voltado para

IoT² com inúmeras aplicações e seu emprego neste trabalho se deve ao baixo custo, vasta documentação, alto desempenho comparado a outros microcontroladores de mesmo preço como o Arduino Mega, além do protocolo de comunicação ESP-NOW utilizado para telemetria(MAIER; SHARP; VAGAPOV, 2017). A Tab. 3.1 apresenta as especificações pertinentes ao trabalho. Para mais detalhes consultar o manual ESP32 Datasheet (2018).

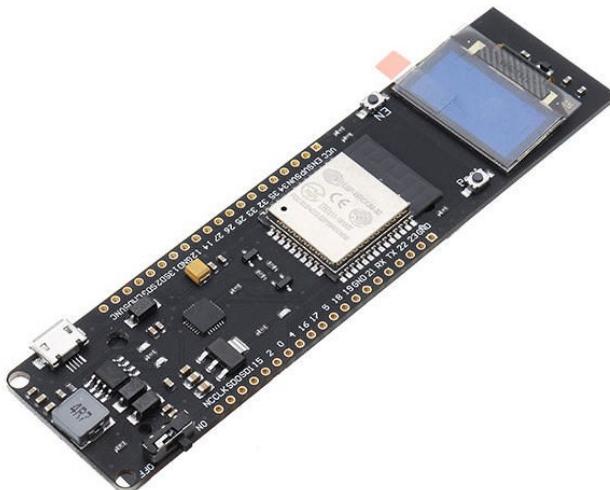


Figura 3.5: Controlador TTGO ESP32-WROOM 0.96O LED com suporte de bateria 18650

Fonte: https://uploads.filipeflop.com/2018/11/6WL75_01-600x600.jpeg

Microprocessador Tensilica Xtensa 32-bit LX6	2×240 MHz de 32 bits
Tensão de operação	2.3 – 3.6 V
Memória ROM ³	448 KB
Memória SRAM ⁴	520 KB
Interfaces I ² C ⁵	2

Tabela 3.1: Especificações técnicas ESP32

Fonte: ESP32 Datasheet (2018)

O ESP32 coleta os dados da IMU e os processa fornecendo o quatérnio estimado pelo filtro de Kalman. Não é necessário o armazenamento de informação dado que o filtro de Kalman é recursivo. O esquema elétrico de ligação está no apêndice B na página 73.

²*Internet of Things* (Internet das coisas)

³Usada na inicialização e funções principais

⁴Usada para dados e instruções

⁵*Inter-Integrated Circuit* é um barramento serial multi-slave e multi-mestre desenvolvido pela Philips®

3.1.5 A plataforma

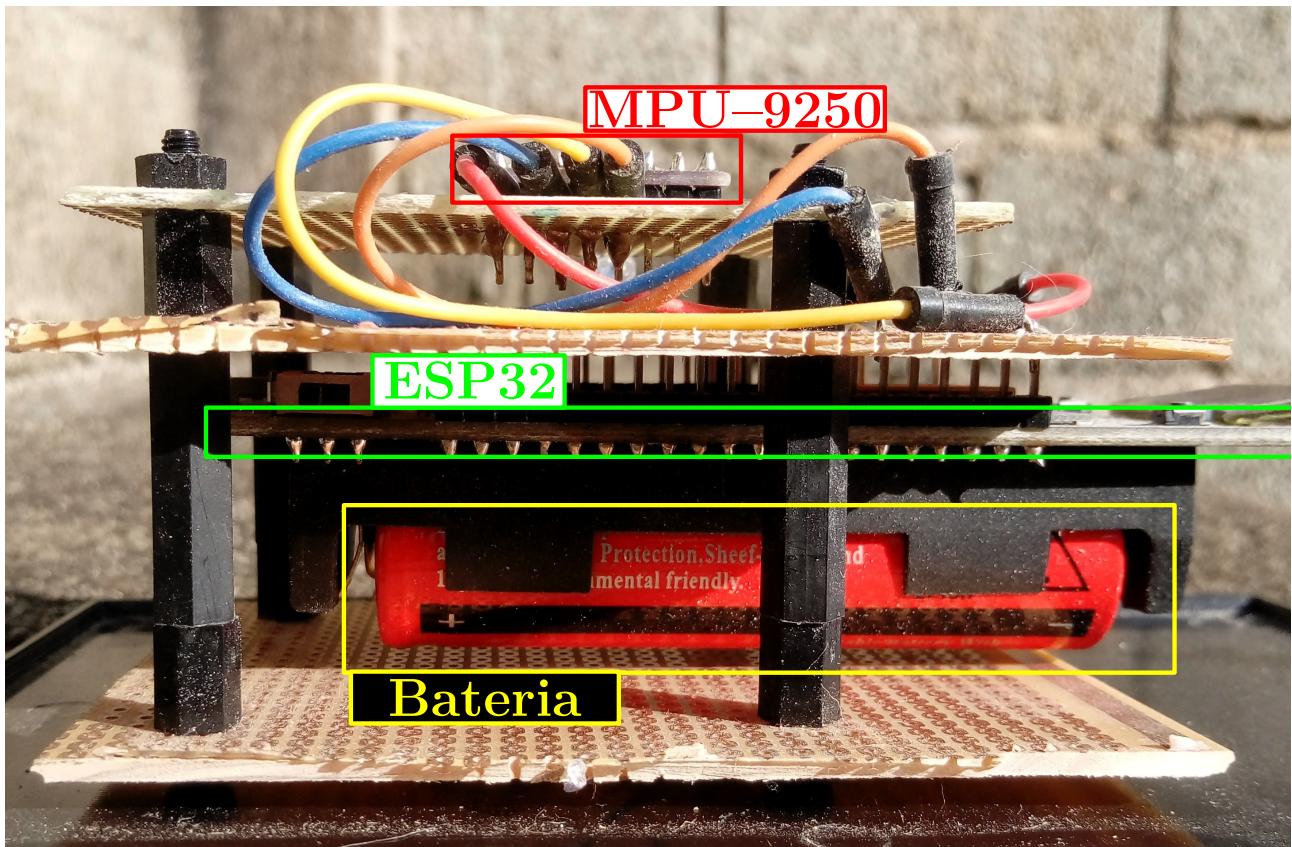


Figura 3.6: Sistema de navegação inercial. O sistema de navegação inercial é composto por uma IMU controlada por um computador. O computador é responsável por compensar as medidas e fornecer os estados de interesse.

Como dito, uma plataforma *Strapdown* é um sistema de navegação inercial fixa em um corpo. A fim de garantir um sistema de referência, o sistema de navegação foi preso em uma caixa retangular como visto nas Figs. 3.6, 3.7 e 3.8. A caixa fechada vista na Fig. 3.8, facilitou o processo de calibração, uma vez que as superfícies são perpendiculares, basta encontrar uma base perpendicular à aceleração da gravidade e tomar as medidas para calibração que será apresentada na Seção 3.3.1.

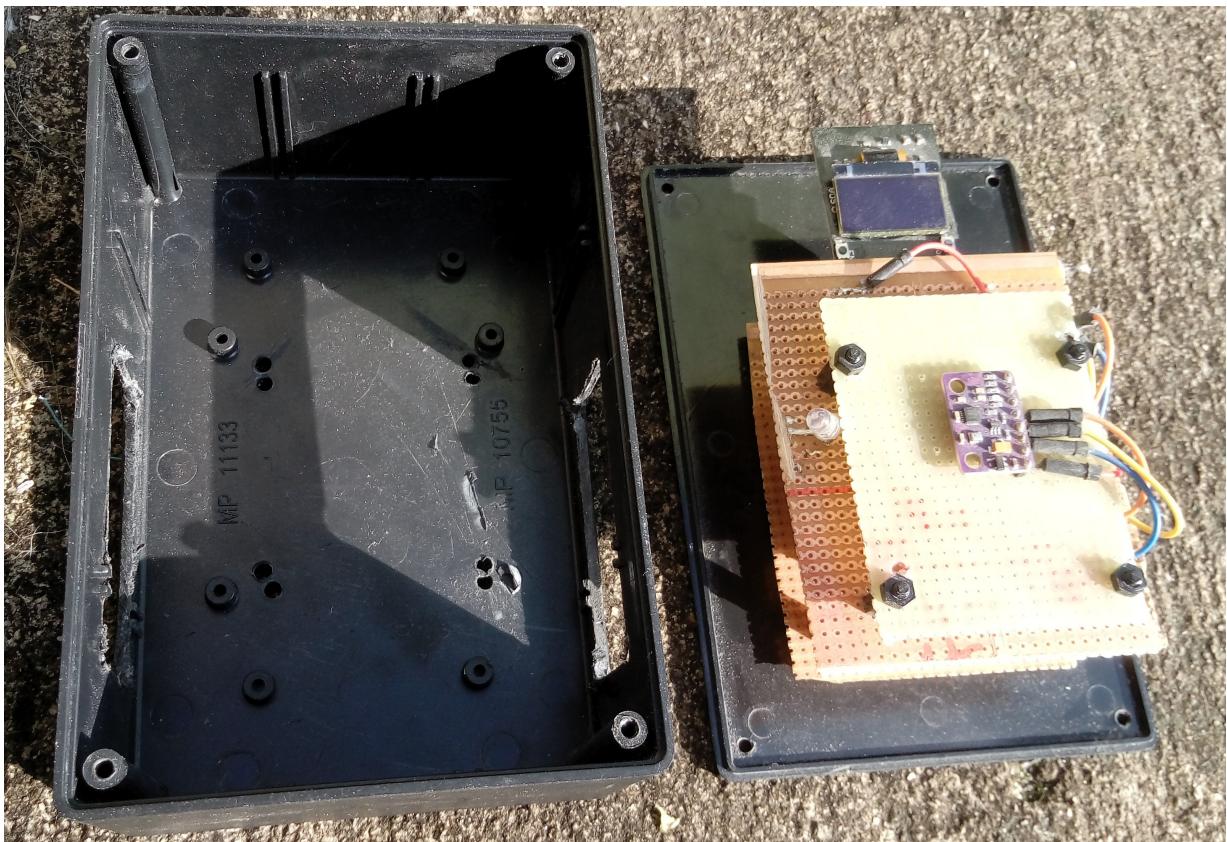


Figura 3.7: Parte interna da plataforma *strapdown*

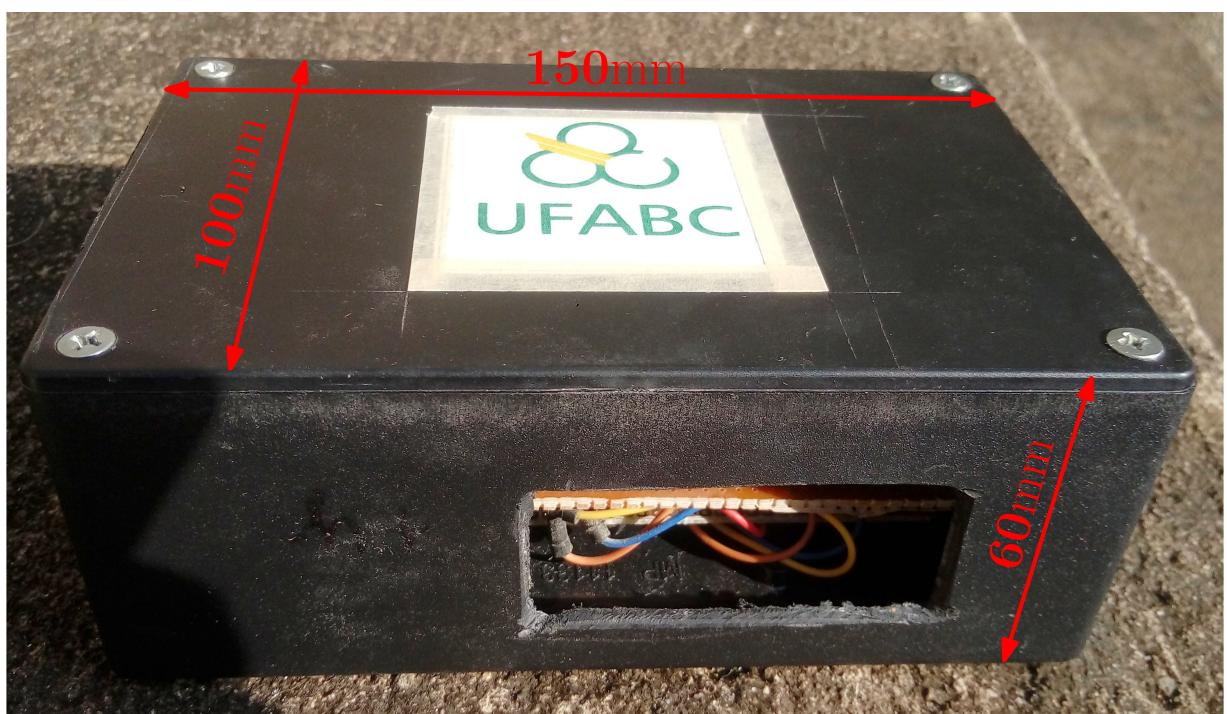


Figura 3.8: Plataforma *strapdown* desenvolvida

3.2 Telemetria

A transmissão de informações de interesse entre um determinado dispositivo e seu desenvolvedor/operador é chamada de telemetria. Para realizar essa transmissão foi utilizado o protocolo ESP-NOW que é capaz transmitir pacotes de dados de no máximo 255 KB entre dois ESP32. A fim de investigar a correta implementação e comparar os resultados do microcontrolador com um computador comum, optou-se por transmitir 17 *floats*⁶ – Um pacote com 17 *floats* possui 68KB, apenas 26,67% da capacidade total de transmissão do protocolo ESP-NOW – o pacote transmite a sequência vista na Tab. 3.2.

${}^b_i\mathbf{q}$				Ângulos de Euler	Medidas compensadas escritas no referencial do corpo						Intervalo de tempo					
q_0	q_1	q_2	q_3	°		$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$		Normalizado		s					
				ϕ	θ	ψ	a_x	a_y	a_z	ω_x	ω_y	ω_z	m_x	m_y	m_z	Δt

Tabela 3.2: Vetor de transmissão da telemetria

O protocolo ESP-NOW realiza comunicação semelhantemente à comunicação que os mouses sem fio utilizam para se comunicar com os computadores pessoais. Do mesmo modo que os mouses, há necessidade de um receptor. Para isso, foi utilizado outro ESP32 conectado á porta USB de um computador. Os dados então são coletados de forma simples e rápida. Na Seção §5.1 estão disponíveis os links com o código fonte da plataforma e do receptor.

3.3 Calibração

A calibração de um sensor é um procedimento para estimar os parâmetros dos modelos utilizados na compensação de seu erro. A implementação de um INS exige um processo de calibração sofisticado que seja capaz de atenuar efeitos indesejados como: erro de *bias*, fator de escala, não-linearidades, assimetria, *dead zone*⁷ e quantização⁸ (GREWAL, 2001). É proposto um método de calibração para cada sensor.

A calibração do acelerômetro e do magnetômetro se resume em utilizar um campo constante e resolver um sistema de equações tal que satisfaça uma determinada condição,

⁶Ponto flutuante de precisão única

⁷*Dead zone* é um efeito que invalida as medidas em determinadas regiões de operação

⁸São pontos sem continuidade presentes em todos os sistemas digitais

como mostrados nos trabalhos de Merayo, Brauer, Primdahl, Petersen e Nielsen (2000), Frosio, Pedersini e Borghese (2009), Amorim (2012), Santos Barbosa (2017) e Zhong e Xu (2018a,b).

A calibração do giroscópio, em casos mais sofisticados, utiliza uma plataforma tal que o rotacione com velocidade conhecida, a rotação conhecida é utilizada como referência para calibração. Todavia, por razões orçamentárias/contingenciamentos, o giroscópio foi calibrado apenas com a compensação do *bias*.

3.3.1 Calibração do acelerômetro

Os acelerômetros podem apresentar os seguintes erros segundo (TITTERTON et al., 2004):

Bias: normalmente é considerado como um sinal constante adicionado à saída que independe da entrada. Seu valor altera-se muito pouco e geralmente é diferente a cada inicialização.

Fator de escala: um erro proporcional à entrada, geralmente é linear.

Desalinhamento: ocorre devido à montagem. O desalinhamento pode causar influência em uma componente que deveria ser ortogonal, por exemplo, ao alinhar um eixo na direção do raio da Terra, pode-se presenciar influência da aceleração da gravidade em um outro eixo.

Deriva térmica: dispositivos eletrônicos têm forte influência da temperatura, o efeito de deriva térmica⁹ inclui variações nas leituras do sensor em função da temperatura de operação. A deriva térmica é modelada como uma variável aleatória.

Erro de quantização: advém da não continuidade presente em todos os sistemas digitais. A coleta em intervalos discretos cria na saída um ruído branco proporcional à magnitude da quantização .

O método proposto por Kuncar, Sysel e Urbanek (2016) torna possível compensar o erro de desalinhamento, fatores de escala e o *bias* determinístico de forma fácil e rápida. As médias dos sensores estão representadas por vetores, as medidas do acelerômetro calibrado $\mathbf{a}_c \in \mathbb{R}^3$ e os valores fornecidos pela IMU $\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^3$ são relacionados como na Eq. 3.3

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{M}_d \mathbf{M}_{FS} [\mathbf{a}_m - \mathbf{b}] \quad (3.3)$$

⁹Também conhecido como *drift* térmico

A matriz $\mathbf{M}_d \in \mathbb{R}^3$ contém o desalinhamento entre o sistema do corpo e os eixos dos sensores, a matriz $\mathbf{M}_{FS} \in \mathbb{R}^3$ é a matriz de fator de escala dos eixos e o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ é o *bias* determinístico. Aplicando o produto de matrizes a Eq. 3.3 pode ser escrita como

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{M}\mathbf{a}_m + \mathbf{a}_{offset} \quad (3.4)$$

O trabalho de calibrar o acelerômetro, se resume nesta abordagem em computar 12 parâmetros, 9 da matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e 3 do vetor $\mathbf{a}_{offset} \in \mathbb{R}^3$. A Eq. 3.4 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\mathbf{a}_c^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{a}_{offset}^\top \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Em um cenário ideal, com a IMU estática com um dos eixos apontando na direção do campo gravitacional, por exemplo, eixo x para baixo, a Eq. 3.5 deveria apresentar para valor ideal $\begin{bmatrix} 9,81 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e, por exemplo, com y para cima o valor correto a ser lido deveria ser $\begin{bmatrix} 0 & -9,81 & 0 \end{bmatrix}$. Sistematicamente, coletando quantidade de dados iguais para todos os eixos, na sequência $+x, -x, +y, -y, +z$ e $-z$ o sistema Eq. 3.6 pode ser construído

$$\begin{bmatrix} 9,81 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -9,81 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 9,81 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -9,81 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 9,81 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -9,81 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_m^\top]_{k=0} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{a}_m^\top]_{k=\frac{N}{6}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{a}_m^\top]_{k=\frac{2N}{6}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{a}_m^\top]_{k=\frac{3N}{6}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{a}_m^\top]_{k=\frac{4N}{6}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{a}_m^\top]_{k=\frac{5N}{6}} & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{a}_{offset}^\top \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O sistema Eq. 3.6 pode ser escrito na forma linear:

$$\mathbf{Y}_{N \times 3} = \mathbf{W}_{N \times 4} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{a}_{offset}^\top \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

N é o total de medidas coletadas, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ contém os valores que o sensor deveria mostrar se fosse ideal, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times 4}$ armazena o vetor $\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \end{bmatrix}$ de cada medida coletada. Deste modo, os parâmetros de calibração podem ser obtidos pelo método de mínimos quadrados da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{a}_{offset}^\top \end{bmatrix} = (\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \mathbf{Y} \quad (3.7)$$

Com \mathbf{M} e \mathbf{a}_{offset} os valores compensando são obtidos com a Eq. 3.4

3.3.2 Calibração do magnetômetro

Um magnetômetro calibrado $\mathbf{m}_c \in \mathbb{R}^3$ ideal, em geral, deveria ser capaz de fornecer o campo gravitacional da Terra $\mathbf{m}_e \in \mathbb{R}^3$ considerando a matriz de atitude $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, da seguinte forma (PEDLEY; STANLEY, 2014)

$$\mathbf{m}_c = \mathbf{R}\mathbf{m}_e \quad (3.8)$$

Além dos erros apresentados pelo acelerômetro, outro dois tipos de interferências, denominadas de *soft-iron* e *hard-iron*, devem ser consideradas para um bom funcionamento do magnetômetro.

Soft-iron é uma interferência eletromagnética gerada por elementos do próprio dispositivo, por exemplo o campo gerado por trilhas da placa de circuito impresso que podem ser variantes no tempo. Esses efeitos, em geral, modificam a intensidade dos eixos alterando o fator de escala e influenciando na matriz de atitude. Representaremos esses efeitos com uma matriz $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Interferências *hard-iron* podem ser geradas por materiais ferromagnéticos presentes no corpo do dispositivo ou próximo a este, que em geral não são variantes no tempo. Este campo constante compõe o *bias* e será denotado pelo vetor \mathbf{b} .

A medida contaminada \mathbf{m}_m pode ser modelada como visto na Eq. 3.9

$$\mathbf{m}_m = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{m}_e + \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{m}_c + \mathbf{b} \quad (3.9)$$

Segundo Amorim (2012) e Kuncar et al. (2016), a partir de medições feitas por um magnetômetro \mathbf{m}_m , pode-se obter, pelo método geométrico os parâmetros que possibilitem a

obtenção das medidas compensadas modelando

$$\mathbf{R}\mathbf{m}_e = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{m}_m - \mathbf{b}) \quad (3.10)$$

Considerando que a matriz $\mathbf{S} = \text{diag} \begin{pmatrix} x_{sf} & y_{sf} & z_{sf} \end{pmatrix}$, a inversa de \mathbf{S} é facilmente obtida tomando o inverso dos elementos da diagonal principal. Computando o quadrado do módulo do campo gravitacional, encontra-se a uma equação que possui o mesmo formato de uma elipsoide. Este fato é verificado fazendo:

$$\mathbf{m}_e^T \mathbf{m}_e = (\mathbf{m}_m - \mathbf{b})^T \mathbf{S}^{-T} \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{m}_m - \mathbf{b}) \quad (3.11)$$

expandindo os termos da Eq. 3.11

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_e^T \mathbf{m}_e &= (\mathbf{m}_m - \mathbf{b})^T \begin{bmatrix} \frac{m_x - b_x}{x_{sf}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_y - b_y}{y_{sf}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_z - b_z}{z_{sf}^2} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{m_x - b_x}{x_{sf}} \right)^2 + \left(\frac{m_y - b_y}{y_{sf}} \right)^2 + \left(\frac{m_z - b_z}{z_{sf}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando que o campo magnético \mathbf{m}_e em uma determinada localização terrestre é constante, a consequência lógica é que superfície gerada pela vetor medido \mathbf{m}_m , seja uma superfície esférica centrada na origem do sistema do corpo com raio igual ao campo magnético. Devido as interferências citadas, o que se observa ao rotacionar um magnetômetro não calibrado é um elipsoide deformado e fora da origem do sistema do corpo. O método de calibração geométrica, pode ser interpretado como um procedimento de parametrização de uma elipsoide deformada com origem deslocada, para um elipsoide com origem no centro e sem deformação. Calibrar o magnetômetro consiste em estimar os fatores de escala x_{sf} , y_{sf} e z_{sf} e o vetor de *bias* \mathbf{b} tal que seja possível a tomada de valores das medidas em qualquer altitude.

$$m_x^2 - 2m_x b_x + b_x^2 + \left(\frac{x_{sf}}{y_{sf}} \right)^2 (m_y^2 - 2m_y b_y + b_y^2) + \left(\frac{x_{sf}}{z_{sf}} \right)^2 (m_z^2 - 2m_z b_z + b_z^2) = x_{sf}^2 R^2 \quad (3.13)$$

Rescrevendo a Eq. 3.13 na forma matricial e isolando, por exemplo, o termo m_x^2 , temos

$$m_x^2 = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z & -m_y^2 & -m_z^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b_x \\ 2\left(\frac{x_{sf}}{y_{sf}}\right)^2 b_y \\ 2\left(\frac{x_{sf}}{z_{sf}}\right)^2 b_z \\ \left(\frac{x_{sf}}{y_{sf}}\right)^2 \\ \left(\frac{x_{sf}}{z_{sf}}\right)^2 \\ x_{sf}^2 R^2 - b_x^2 - \left(\frac{x_{sf}}{y_{sf}}\right)^2 b_y^2 - \left(\frac{x_{sf}}{z_{sf}}\right)^2 b_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A Eq. 3.14 relaciona as medidas aos parâmetros de forma linear, e pode ser reescrita na forma compactada a seguir

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (3.15)$$

O vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ e a matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times 6}$ são funções das medidas do magnetômetro, $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_5]^\top$ contém os parâmetros que compensam as medidas do sensor obtido pelo método dos mínimos quadrados como visto na Eq. 3.16:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^\top \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{w} \quad (3.16)$$

de posse da solução, os parâmetros de calibração são obtidos com o sistema (3.17)

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{x_0}{2} \\ b_y &= \frac{x_1}{2 \cdot x_3} \\ b_z &= \frac{x_2}{2 \cdot x_4} \\ x_{sf} &= \frac{\sqrt{x_5 + b_x^2 + x_3 b_y^2 + x_4 b_z^2}}{R} \\ y_{sf} &= \sqrt{\frac{x_{sf}^2}{x_3}} \\ z_{sf} &= \sqrt{\frac{x_{sf}^2}{x_4}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

com x_i representando a i-ésima componente do vetor \mathbf{x} . Os dados compensados do magnetômetro são obtidos a partir da Eq. 3.10.

Vale ressaltar que nesta abordagem foi assumido que a matriz \mathbf{S} é diagonal. Assumir tal condição facilita consideravelmente os cálculos, e como será mostrado nos resultados, de fato a distorção causada pelo efeito de *soft-iron* não deforma consideravelmente a superfície gerada pelos valores das medidas não calibradas. Trabalhos como o de Merayo et al. (2000), Renaudin, Afzal e Lachapelle (2010) e Pedley et al. (2014) apresentam abordagens mais complexas nas quais são considerados desalinhamento entre os eixos do magnetômetro. Nestas abordagens, a matriz \mathbf{S} não é simétrica, e como consequência, recairíamos sobre um problema de solução de sistemas homogêneos do tipo $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. A solução de tais problemas envolvem cálculos mais custosos do ponto de vista computacional como decomposição em valores singulares, autovalores e autovetores. Alguns trabalhos como Markovsky, Kukush e Huffel (2004) e Bonnet, Bassompierre, Godin, Lesecq e Barraud (2009) exploram como resolver esse tipo de problema.

3.3.3 Calibração do giroscópio

O giroscópio mede velocidade angular; então, para uma precisa calibração é necessário uma mesa giratória ou outro dispositivo que forneça rotações conhecidas, e então, por meio de comparação se faz a calibração(CHATFIELD, 1997). Neste caso, não se tem acesso a esse tipo de dispositivo, portanto a calibração foi feita compensando o *bias*. Esse procedimento parte da coleta de N amostras do giroscópio estático, então o *bias* é computado da seguinte forma:

$$\mathbf{b}_{giro} = \frac{\sum_{i=0}^N {}^b\omega}{N \times f_{giro}} \quad (3.18)$$

O escalar f_{giro} é fator de escala do giroscópio informado pelo fabricante que converte os valores LSB em graus por segundo. Subtraindo o *bias* calculado na Eq. 3.18 da medida fornecida pelo giroscópio, o valor compensando é obtido. Matematicamente esse procedimento é feito como visto na Eq. 3.19

$$\boldsymbol{\omega}_c = f_{giro} \times (\boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_{giro}) \quad (3.19)$$

3.4 Orientação baseada nos quatérnios

Nesta seção será apresentado o formalismo matemático de obtenção dos quatérnios predito e de observação computados a partir dos sensores iniciais. A referência básica desta seção é o artigo de Valenti, Dryanovski e Xiao (2016) .

Assume-se daqui em diante que os dados dos sensores estão previamente compensados.

Dada a precisão dos sensores de baixo custo utilizados aqui a aceleração medida ${}^b\mathbf{a}_m$ pelo acelerômetro deve fornecer a soma do campo gravitacional ${}^i\mathbf{g}$ com a aceleração translacional do corpo ${}^i\mathbf{a}_t$ apenas. Assume-se que outras acelerações como de Coriolis devido a rotação da Terra não são detectadas

$${}^b\mathbf{a}_m = \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q} \right) \left({}^i\mathbf{g} + {}^i\mathbf{a}_t \right) \quad (3.20)$$

Para fins de atitude, da Seção 1.2.1, a condição de baixa aceleração translacional possibilita assumir que Eq. 3.20 pode ser aproximada para:

$${}^b\mathbf{a}_m = \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q} \right) {}^i\mathbf{g} \quad (3.21)$$

sendo assim, a aceleração escrita no referencial inercial será somente a aceleração do campo gravitacional. A norma do campo gravitacional e do campo magnético são representadas pelas Eqs. 3.22 e 3.23, esses dois vetores compõem o sistema global.

$${}^i\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (3.22)$$

$${}^i\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^\top, |\mathbf{h}| = 1 \quad (3.23)$$

As Eqs. 3.24 e 3.26 são as medidas do acelerômetro e do magnetômetro que, por conveniência, também foram normalizadas. O vetor contendo as medidas do giroscópio estão em radianos por segundo na Eq. 3.25

$${}^b\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^\top, |\mathbf{a}| = 1 \quad (3.24)$$

$${}^b\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^\top, \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (3.25)$$

$${}^b\mathbf{h} = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^\top, |\mathbf{h}| = 1 \quad (3.26)$$

A observação será obtida em dois passos:

1º A partir da medida do acelerômetro, forma-se um quatérnio \mathbf{q}_{acel} que transforma um vetor escrito no sistema global para o sistema intermediário denominado Π . O sistema intermediário possui o eixo ${}^\Pi z$ paralelo ao eixo inercial ${}^i Z$;

2º Com as medidas do magnetômetro e o quatérnio \mathbf{q}_{acel} obtém-se o segundo quatérnio \mathbf{q}_{mag} que transforma as medidas escritas no sistema intermediário Π para o sistema do corpo.

O quatérnio de observação é dado por

$${}^i_b \mathbf{q}_{obs} = {}^i_{\Pi} \mathbf{q}_{accel} \otimes {}^{\Pi}_b \mathbf{q}_{mag} \quad (3.27)$$

3.4.1 Atitude baseada no giroscópio

De posse da atitude no instante anterior t_{k-1} , a medição do giroscópio torna possível propagar a atitude para o tempo atual t_k por meio da integração da matriz de rotação ou dos quatérnios. A taxa de variação de um quatérnio pode ser calculada com base na atitude anterior e no quatérnio formado pelas componentes do giroscópio (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014; VALENTI et al., 2015; FENG; LI; ZHANG; SHEN; BI; ZHENG; LIU, 2017), matematicamente temos:

$${}^i_b \dot{\mathbf{q}}_{t_k} = -\frac{1}{2} {}^b \boldsymbol{\omega}_{q,t_k} \otimes {}^b \mathbf{q}_{t_{k-1}} = \boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega}) {}^b \mathbf{q}_{t_{k-1}} \quad (3.28)$$

$\boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega})$ é definida na Eq. 2.17.

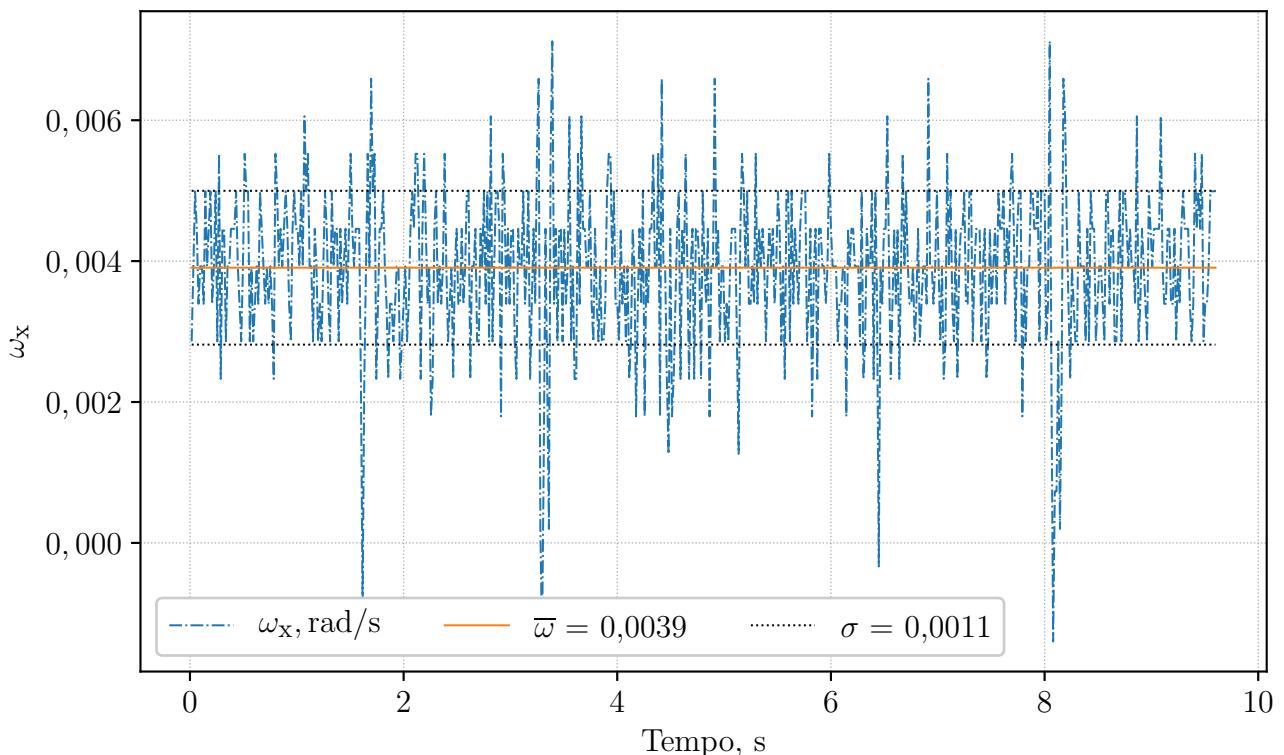


Figura 3.9: Coleta estática do eixo x do giroscópio

As Figs. 3.9 e 3.10 mostram a coleta estática de um dos eixos do giroscópio. Em uma leitura ideal, o caso estático deveria apresentar leitura de velocidade angular nula, porém, a medida coletada mostra um desvio sistemático com desvio padrão σ_g . Como é visto na

Seção 3.3.3, o erro sistemático será eliminado na calibração dos sensores, mas o desvio padrão permanece.

Utilizando o produto de quatérnios e adicionando o erro de medida do giroscópio $\delta\omega$ temos (VALENTI et al., 2015; FENG et al., 2017)

$${}^b_i \dot{\mathbf{q}}_{t_k} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k}) {}^b_i \mathbf{q}_{t_{k-1}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k}) = \begin{bmatrix} 0 & {}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k}^\top \\ -\boldsymbol{\omega}_{t_k} & -[{}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k} \times] \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

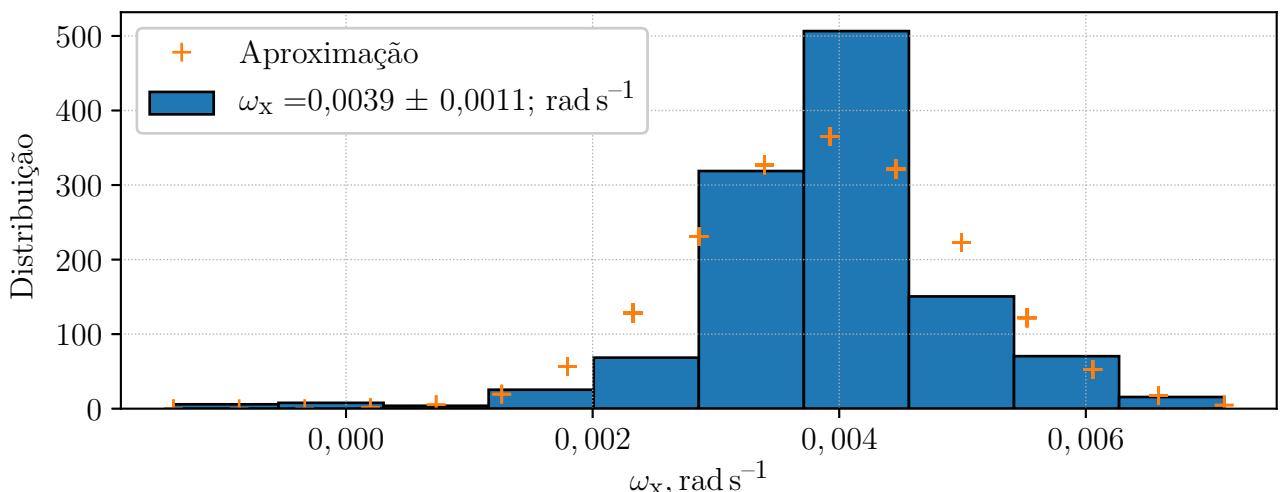


Figura 3.10: Distribuição normal da leitura estática do eixo x do acelerômetro

A Eq. 3.29 apresenta explicitamente o ruído de processo \mathbf{w} dado por

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix}$$

A integração de ordem zero da Eq. 3.29 por meio da matriz de transição $\boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k})$

fornecida

$${}^b_i \mathbf{q}_{\omega, t_k} = \mathbf{A}_{k-1} {}^b_i \mathbf{q}_{\omega, t_{k-1}} + \mathbf{w}_k = \left(\mathbb{I}_4 + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{\Omega}({}^b \boldsymbol{\omega}_{t_k}) \right) {}^b_i \mathbf{q}_{\omega, t_{k-1}} + \mathbf{w}_k \quad (3.31)$$

$${}^b_i \mathbf{q}_{\omega, t_k} = \mathbf{A}_{k-1} {}^b_i \mathbf{q}_{\omega, t_{k-1}}$$

\mathbf{w}_k é a integração do ruído de processo no tempo discreto dado por

$$\mathbf{w}_k = \frac{\Delta T}{2} \mathbf{G}_k \mathbf{v}_{g_k} = \frac{\Delta T}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{g_k} \quad (3.32)$$

\mathbf{v}_{g_k} é o ruído branco Gaussiano de média zero não correlacionado com covariância $\Sigma_g = \boldsymbol{\sigma}_{3 \times 3}^2$ visto nas Figs. 3.9 e 3.10. A matriz de covariância \mathbf{Q}_k é a esperança do ruído $E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top)$, assim temos:

$$\mathbf{Q}_k = \left(\frac{\Delta T}{2} \right)^2 \mathbf{G}_k \sum_g \mathbf{G}_k^\top \quad (3.33)$$

3.4.2 Atitude baseada no acelerômetro e magnetômetro

O trabalho de Valenti et al. (2015) apresenta o método chamado AQUA – *Algebraic Quaternion Algorithm*, no qual obtém-se a partir do acelerômetro e do magnetômetro um quatérnio de forma algébrica. Neste trabalho, o denominaremos como quatérnio de observação \mathbf{q}_{obs} , uma vez que este será utilizado como observador do estimador de estados.

O acelerômetro utiliza a direção do campo gravitacional para obter a orientação do corpo, todavia, como o campo gravitacional é perpendicular ao eixo Z não é possível determinar o ângulo de guinada. Assim sendo, as medidas do magnetômetro são responsáveis pela informação do ângulo faltante. O quatérnio de observação é obtido com a rotação total fornecida pelo quatérnio do acelerômetro e do magnetômetro

$${}^b_i \mathbf{q}_{obs} = {}^b_\Pi \mathbf{q}_{accel} \otimes {}^{\Pi}_i \mathbf{q}_{mag} \quad (3.34)$$

O campo gravitacional é reescrito no sistema do corpo com auxílio do quatérnio con-

jugado fazendo:

$${}^b\mathbf{a}_q = {}_i^b\mathbf{q}_{obs}^* \otimes {}^i\mathbf{g}_q \otimes {}_i^b\mathbf{q}_{obs} \quad \Leftrightarrow \quad {}^b\mathbf{a} = \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q}_{obs} \right) {}^i\mathbf{g} = \mathbf{R} \left({}_i^b\mathbf{q}_{accel} \right) \mathbf{R} \left({}_i^{\Pi}\mathbf{q}_{mag} \right) {}^i\mathbf{g}$$

É desejado que \mathbf{q}_{mag} possua apenas um grau de liberdade, uma vez que este deve influenciar apenas em um único ângulo de Euler. Valenti et al. (2016) propõe:

$${}_i^{\Pi}\mathbf{q}_{mag} = \begin{bmatrix} q_{0_{mag}} & 0 & 0 & q_{3_{mag}} \end{bmatrix}^\top \quad (3.35)$$

Utilizando a matriz (2.9) e a Eq. 3.21, e verificando que a matriz de rotação derivada do magnetômetro não influencia na rotação do vetor campo gravitacional temos:

$${}^b\mathbf{a}_q = {}_{\Pi}^b\mathbf{q}_{accel}^* \otimes {}^i\mathbf{g}_q \otimes {}_{\Pi}^b\mathbf{q}_{accel} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(q_{1_{accel}}q_{3_{accel}} + q_{0_{accel}}q_{2_{accel}}) \\ 2(q_{2_{accel}}q_{3_{accel}} - q_{0_{accel}}q_{1_{accel}}) \\ q_{0_{accel}}^2 - q_{1_{accel}}^2 - q_{2_{accel}}^2 + q_{3_{accel}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A Eq. 3.36 mostra que o quatérnio de atitude pode ser obtido diretamente das medidas do acelerômetro, todavia, temos quatro incógnitas $q_{0_{accel}}$, $q_{1_{accel}}$, $q_{2_{accel}}$ e $q_{3_{accel}}$ mas apenas três equações. Este fato ocorre pois a gravidade é perpendicular à coordenada iZ , e além disso, esse processo gera um quatérnio (que possui dimensão 4) a partir de um vetor tridimensional. Por conveniência, pode-se fazer $q_{3_{accel}} = 0$, assim

$$\begin{bmatrix} q_{2_{accel}} \\ q_{1_{accel}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{2q_{0_{accel}}} \\ \frac{-a_y}{2q_{0_{accel}}} \end{bmatrix}$$

substituindo estas equações na terceira linha da Eq. 3.36 temos

$$4q_{0_{accel}}^4 - 4q_{0_{accel}}^2 a_z - (a_y^2 + a_x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad q_{0_{accel}}^2 = \pm \frac{a_z \pm 1}{2}$$

Escolhendo a solução positiva, o quatérnio derivado das medidas do acelerômetro é

$${}_i^b\mathbf{q}_{accel} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{a_z + 1} & \frac{-a_y}{\sqrt{a_z + 1}} & \frac{a_x}{\sqrt{a_z + 1}} & 0 \end{bmatrix}^\top$$

para evitar singularidades quando a componente $a_z = -1$, pode-se fazer $q_{2_{acel}} = 0$ na Eq. 3.36

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_{1_{acel}}q_{3_{acel}} \\ -2q_{0_{acel}}q_{1_{acel}} \\ q_{0_{acel}}^2 - q_{1_{acel}}^2 + q_{3_{acel}}^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q_{3_{acel}} \\ q_{0_{acel}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{2q_1} \\ \frac{-a_y}{2q_1} \end{bmatrix}$$

$$-4q_{1_{acel}}^4 - 4a_zq_{1_{acel}}^2 + a_x^2 + a_y^2 = 0 \quad q_{1_{acel}} = \pm \sqrt{\frac{1-a_z}{2}}$$

Dois quatérnios são possíveis, escolhendo $q_{1_{acel}} = \sqrt{\frac{1-a_z}{2}}$

$${}^b_i \mathbf{q}_{acel} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{-a_y}{\sqrt{1-a_z}} & \sqrt{1-a_z} & 0 & \frac{a_x}{\sqrt{1-a_z}} \end{bmatrix}^\top \quad (3.37)$$

O quatérnio derivado do acelerômetro possui descontinuidade, todavia, como Valenti et al. (2015) apresenta em seu trabalho, mesmo com rotações completas o quatérnio de observação obtido do produto de \mathbf{q}_{acel} e \mathbf{q}_{mag} é contínuo. A condição que \mathbf{q}_{acel} deve atender em função de a_z é resumida em:

$${}^b_i \mathbf{q}_{acel} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \kappa_1 & -\frac{a_y}{\kappa_1} & \frac{a_x}{\kappa_1} & 0 \end{bmatrix}^\top, & a_z \geq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{a_y}{\kappa_2} & \kappa_2 & 0 & \frac{a_x}{\kappa_2} \end{bmatrix}^\top, & a_z < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

com

$$\kappa_1 = \sqrt{1+a_z} \quad (3.39a)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{1-a_z} \quad (3.39b)$$

Ângulo de guinada

Devido a grande influência magnética, é desejado que o magnetômetro sirva apenas para computar o alinhamento do eixo ${}^b x$ com o norte magnético, direção que o eixo ${}^i X$ é definido, i.e., o magnetômetro fornecerá, exclusivamente, o ângulo de guinada. Para que o quatérnio ${}^i \mathbf{q}_{mag}$ possua apenas um grau de liberdade, pode-se fazer $q_{1_{mag}} = q_{2_{mag}} = 0$, assim, o ângulo de guinada

fica dependente, exclusivamente, das componentes q_{0mag} e q_{3mag} , sendo assim:

$${}^{\Pi}_i \mathbf{q}_{mag} = \begin{bmatrix} q_{0mag} & 0 & 0 & q_{3mag} \end{bmatrix}^T \quad (3.40)$$

De posse do quatérnio (3.38), transforma-se as medidas do magnetômetro escritas no referencial do corpo, para o sistema intermediário Π fazendo:

$${}^{\Pi} \mathbf{l}_q = {}^{\Pi} \mathbf{q}_{acel} \otimes {}^b \mathbf{m}_q \otimes {}^{\Pi} \mathbf{q}_{acel}^* \quad (3.41)$$

As componentes magnéticas escritas no sistema intermediário (${}^{\Pi} \mathbf{l}$) possuem apenas o eixo l_z paralelo ao eixo inercial Z, sem garantias de que l_x esteja alinhado com o norte magnético (eixo **X**). O quatérnio derivado do magnetômetro deve transformar as medidas ${}^{\Pi} \mathbf{l}$ alinhando-o com o campo magnético terrestre que possui componente em X e em Z. Em outras palavras, tem-se.

$${}^{\Pi} \mathbf{l} = \mathbf{R}({}^{\Pi}_i \mathbf{q}_{mag}) \begin{bmatrix} \sqrt{\Gamma} & 0 & l_z \end{bmatrix}^T \quad \equiv \quad {}^{\Pi} \mathbf{l}_q = {}^{\Pi}_i \mathbf{q}_{mag} \otimes {}^{\Pi} \mathbf{l}_q \otimes {}^{\Pi}_i \mathbf{q}_{mag}^* \quad (3.42)$$

dado que

$$\Gamma = l_x^2 + l_y^2 \quad (3.43)$$

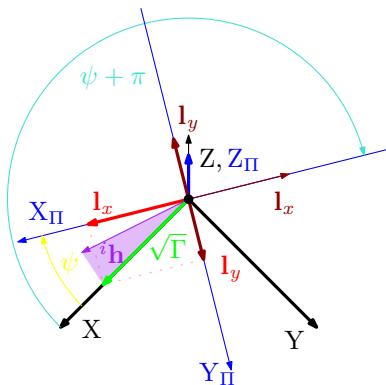


Figura 3.11: Transformação das medidas do magnetômetro para o sistema intermediário Π

A Fig. 3.11 apresenta o resultado da rotação das medidas no corpo levadas para o sistema Π , que possui o eixo Z_Π paralelo ao eixo Z do sistema inercial. Observe que o mesmo valor de $\sqrt{\Gamma}$ é obtido para dois ângulos ψ diferentes. Isto ocorre devido ao fato de Γ conter apenas o módulo do vetor composto por l_x e l_y . Para resolver este problema deve-se verificar

o sinal da componente l_x , uma vez que a mesma seja negativa, o quatérnio procurado do magnetômetro deve ser rotacionado 180° fazendo

$$\mathbf{q}_{mag}^{l_x < 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_{mag} = \begin{bmatrix} -q_{3mag} \\ 0 \\ 0 \\ q_{0mag} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Desenvolvendo a Eq. 3.42 tem-se a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\Gamma} (q_{0mag}^2 - q_{3mag}^2) \\ 2\sqrt{\Gamma} q_{0mag} q_{3mag} \\ l_z (q_{0mag}^2 + q_{3mag}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

com solução

$$\mathbf{q}_{mag} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\Gamma+l_x\sqrt{\Gamma}}}{\sqrt{\Gamma}} & 0 & 0 & \frac{l_y}{\sqrt{\Gamma+l_x\sqrt{\Gamma}}} \end{bmatrix}^\top \quad (3.45)$$

Por fim, com

$$\Pi \mathbf{l}_q =_i^{\Pi} \mathbf{q}_{mag}^{l_x < 0} \otimes {}^i \mathbf{l}_q \otimes \left({}^i \mathbf{q}_{mag}^{l_x < 0} \right)^* \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\Gamma} (q_{3mag}^2 - q_{0mag}^2) \\ -2\sqrt{\Gamma} q_{0mag} q_{3mag} \\ l_z (q_{0mag}^2 + q_{3mag}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

obtemos o quatérnio que corrige o ângulo de guinada para $l_x < 0$ dado por

$$\mathbf{q}_{mag}^{l_x < 0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{l_y}{\sqrt{\Gamma-l_x\sqrt{\Gamma}}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\Gamma-l_x\sqrt{\Gamma}}}{\sqrt{\Gamma}} \end{bmatrix}^\top \quad (3.47)$$

Das Eqs. 3.45 e 3.47

$$\mathbf{q}_{mag} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\sqrt{\Gamma}} & 0 & 0 & \frac{l_y}{\beta_1} \end{bmatrix}^\top & l_x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{l_y}{\beta_2} & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\sqrt{\Gamma}} \end{bmatrix}^\top & l_x < 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

onde

$$\beta_1 = \sqrt{\Gamma + l_x \sqrt{\Gamma}} \quad (3.49)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\Gamma - l_x \sqrt{\Gamma}} \quad (3.50)$$

Covariância da observação

De posse da matriz de covariância normalizada do acelerômetro e do magnetômetro, é possível estimar a covariância do quatérnio de observação (3.34). Como apresentado na Seção §3.4.2 o quatérnio de observação é uma função não linear dependente das medidas do acelerômetro e do magnetômetro. Define-se então a função $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ que representa o quatérnio e o vetor de medidas dos sensores \mathbf{u}

$$\mathbf{q}_{obs} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{com} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & m_x & m_y & m_z \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

No intuito de modelar as incertezas do quatérnio de observação, com expansões em séries de Taylor de primeira ordem forma-se a matriz Jacobiana \mathbf{J} e a incerteza é propagada como segue (VALENTI et al., 2016)

$$\sum_{\mathbf{q}_{obs}} = \mathbf{J} \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{J}^T \quad (3.52)$$

Lembrando que o quatérnio \mathbf{q}_{accel} é função exclusivamente das medidas do acelerômetro e o \mathbf{q}_{mag} é função de \mathbf{l} . Por conveniência, pode-se fazer:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{a}, \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{acc} & \mathbf{q}_{mag} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

consequentemente

$${}^b_i \mathbf{q} \equiv {}^b_i \mathbf{q} (\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_2(\mathbf{u}))) \quad (3.54)$$

logo, a Jacobiana pode ser obtida com a regra da cadeia

$$\mathbf{J} = \frac{\partial ({}^b_i \mathbf{q})}{\partial \mathbf{f}_1} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{f}_2} \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.55)$$

As derivadas parciais estão presentes no Apêndice (A.2). A matriz de covariância do

vetor \mathbf{u} é construída com diagonal formada pelas Eqs. 3.57 e 3.58

$$\sum_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{acc} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \hat{\Sigma}_{mag} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\hat{\Sigma}_{acc} = \frac{\begin{bmatrix} \sigma_{a_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{a_z}^2 \end{bmatrix}}{|\mathbf{g}|} \quad (3.57)$$

$$\hat{\Sigma}_{mag} = \frac{\begin{bmatrix} \sigma_{m_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{m_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{m_z}^2 \end{bmatrix}}{|\mathbf{h}|} \quad (3.58)$$

3.4.3 Fusão dos sensores com o Filtro de Kalman linear

As equações resumidas na Seção 2.3.1 estão colocadas aqui na perspectiva da implementação de um sistema que visa fundir as medidas dos sensores giroscópio, magnetômetro e acelerômetro com o filtro de Kalman linear. Partindo da inicialização temos:

$$\mathbf{q}_{k=0}^+ = \mathbf{q}_0 \quad (3.59a)$$

$$\mathbf{P}_{k=0}^+ = \mathbf{P}_0 \quad (3.59b)$$

As propagações do quatérnio e da matriz de covariância da predição linear, são feitas a partir do quatérnio estimado na iteração anterior e as medidas do giroscópio no referencial do corpo ${}^b\omega_k$. Matematicamente pode ser expresso como nas Eqs. 3.59c e 3.59d:

$$\mathbf{q}_k^- = \mathbf{A}_k \left({}^b\omega_k \right) \mathbf{q}_{k-1}^+ \quad (3.59c)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{Q}_k \quad (3.59d)$$

dado que $\mathbf{A}_k \left({}^b\omega_k \right)$ e $\mathbf{Q}_k \left(\mathbf{q}_{k-1}^+ \right)$ definidas nas Eqs. 3.31 e 3.33.

Com as medidas do acelerômetro e magnetômetro, obtém-se o quatérnio de observação $\mathbf{q}_{obs_k} \left({}^b\mathbf{a}_k, {}^b\mathbf{m}_k \right)$ e também a matriz de covariância das medidas $\mathbf{R}_k \left({}^b\mathbf{a}_k, {}^b\mathbf{m}_k \right)$ da Eq. 3.52.

Então, o processo de atualização é feito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- (\mathbf{P}_k^- + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (3.59e)$$

$$\mathbf{q}_k^+ = \mathbf{q}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{q}_{obs_k} - \mathbf{q}_k^-) \quad (3.59f)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbb{I}_N - \mathbf{K}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (3.59g)$$

O estado estimado é obtido como apresentado nas Eqs. 3.59a – 3.59g. Essa característica será explorada para fusão dos sensores fornecendo a atitude em tempo real apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados da implementação das rotinas de calibração e estimação de estados. O filtro de Kalman linear visto na Seção 3.4.3. Os dados foram transmitidos por meio do protocolo ESP–NOW com frequência 40 Hz e coletados em um computador para obtenção dos gráficos.

4.1 Resultados das Calibrações

Aqui são apresentados os resultados da implementação das rotinas de calibração. Para avaliar os resultados, foi implementada uma rotina na qual a plataforma transmitia os dados sem compensação e compensados.

4.1.1 Resultado da calibração do acelerômetro

A figura Fig. 4.1 apresenta o resultado obtido com o método de calibração para o acelerômetro. Com o sensor estático, foram coletadas 500 medidas em seis posições distintas. Cada eixo da plataforma ficou paralelo ao campo gravitacional no sentido positivo e negativo totalizando 3000 pontos.

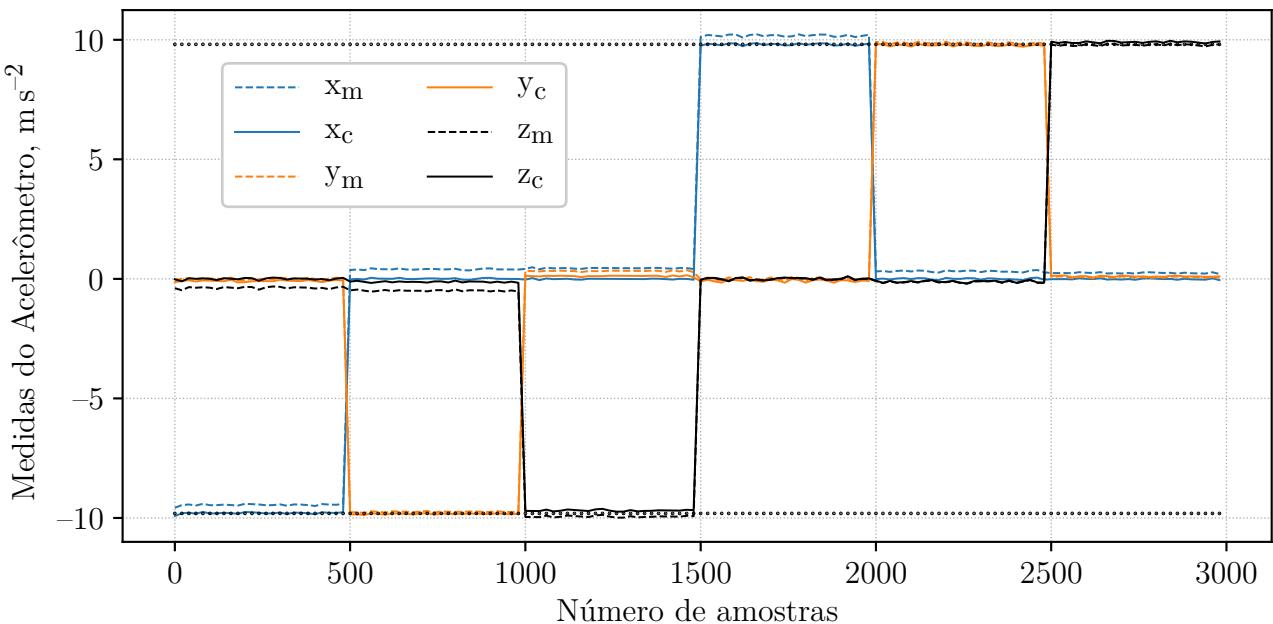


Figura 4.1: Resultados da calibração do acelerômetro. As linhas pontilhadas representam as medidas originais tomadas diretamente do sensor sem compensação, as linhas contínuas são as medidas compensadas com o método proposto.

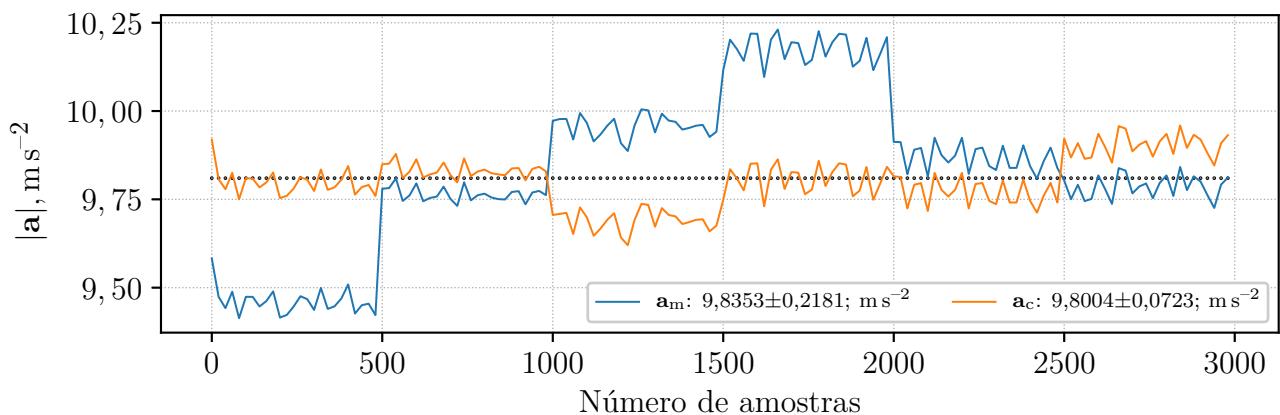


Figura 4.2: Norma das medida do acelerômetro

NA Fig. 4.1, as linhas pontilhadas representam as medidas brutas e as linhas contínuas as mesmas medidas porém compensadas. As linhas pretas apresentam os valores da aceleração da gravidade positivo e negativo e são os valores de medidas ideais. Observe que o método aproximou as medidas dos eixos de valores ideais quando o mesmo é alinhado com o campo gravitacional e trouxe a medida para valor nulo quando este é colocado perpendicular à gravidade. A norma a_m apresenta maiores distâncias do valor da gravidez no eixo x e os dados compensados a_c são mais uniformes, com desvio padrão 3 vezes menor, como é visto na Fig. 4.2.

4.1.2 Resultado da calibração do magnetômetro

Com a plataforma iniciada, a mesma solicita que seja rotacionada enquanto coletava 500 medidas em uma matriz $\mathbf{m}_{500 \times 3}$, então, o sistema da Eq. 3.14 é montado e as variáveis de compensação da Eq. 3.17 são computadas. Depois do processo de calibração, foram coletados dados calibrados e brutos da plataforma da mesma forma que foi feito como o acelerômetro.

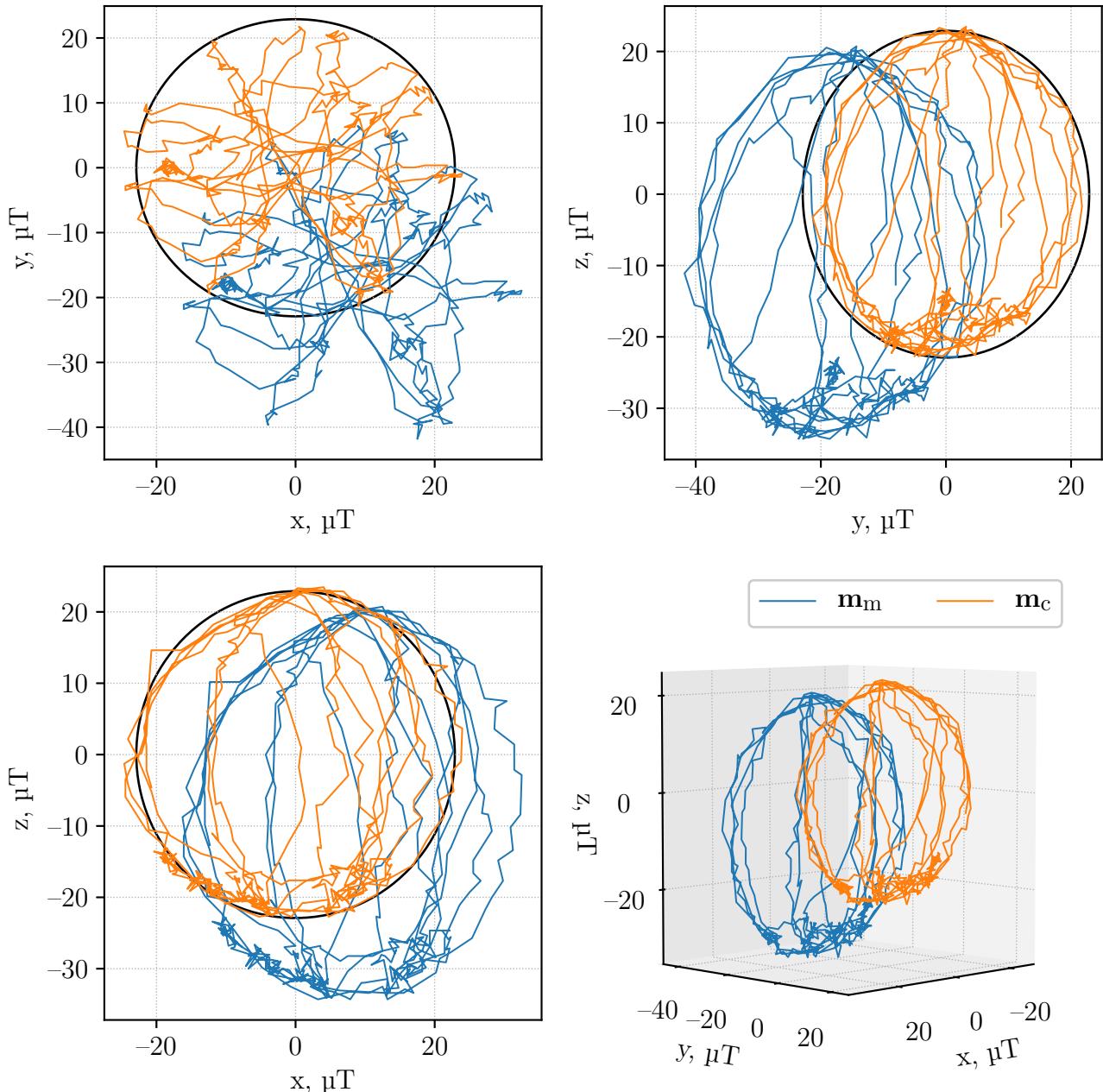


Figura 4.3: Representação tridimensional das medidas do magnetômetro. As denominações \mathbf{m}_m e \mathbf{m}_c referem-se as medidas brutas e compensadas respectivamente. A curva mais escura sem preenchimento é um circunferência de raio 22,8968 μT . O método de calibração geométrica compensou os efeitos de *hard-iron* deslocando as medidas para a origem, e também compensou os efeitos de escala conferindo uma aspecto mais uniforme com raio.

As representações no espaço de estados e tridimensional são vistas na Fig. 4.3. A circunferência nos gráficos do espaço de estado possui raio 22,8968 μT , esta representa a região gerada por medidas de um magnetômetro perfeito. É possível notar que o processo de calibração trouxe as medidas para dentro circunferência, distribuindo-as uniformemente. Observando a distribuição das medidas do eixo m_y nota-se que os dados não compensados, em sua maior parte são negativos, independente da atitude da plataforma, este fato decorre de interferências eletromagnéticas próximas da plataforma que somam-se ao campo magnético terrestre, claramente são efeitos *hard-iron*. Os efeitos de *soft-iron* influenciam na excentricidade da elipsoide vista na representação tridimensional. Na formulação, foi assumido que essa interferência poderia ser menos influente e, por simplicidade, a matriz \mathbf{S} foi assumida como diagonal. De fato os dados não compensados apresentam distorções, mas claramente não são os efeitos dominantes, justificando a simplificação adotada.

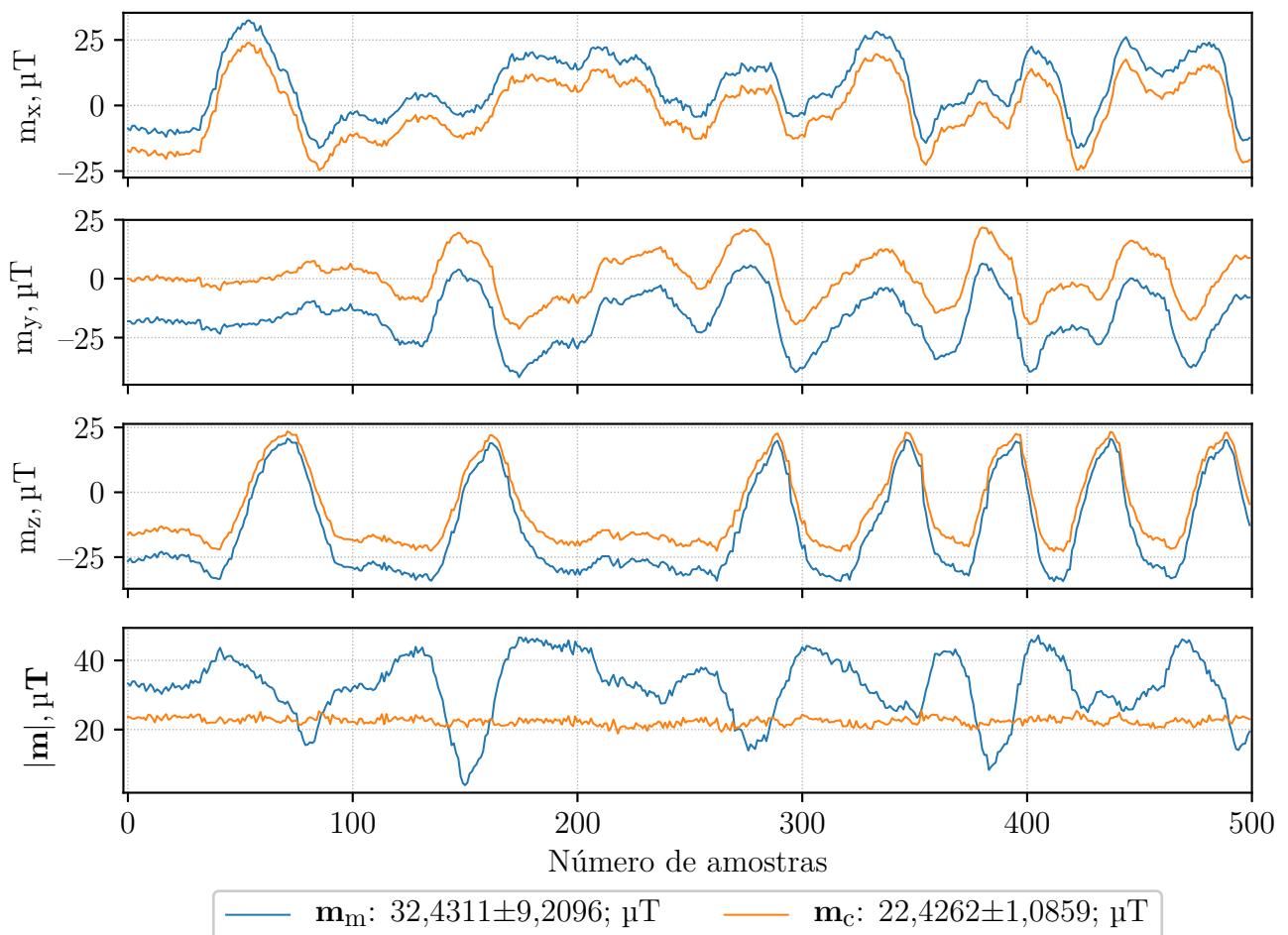


Figura 4.4: Comparativo das medidas \mathbf{m}_m e \mathbf{m}_c . O valor compensando apresenta norma próxima do campo magnético local com desvio padrão 8,4 vezes menor.

A Fig. 4.4 apresenta a medidas de cada eixo e da norma das medidas. A calibração

conferiu norma com média mais próxima do campo magnético local com desvio padrão 8,4 vezes menor. Para os fins de atitude, o que importa é a direção dada pelo versor do campo medido. Os dados coletados se mostram suficientemente bons para tal

Resultado da calibração do giroscópio

O resultado da calibração do giroscópio é apresentado na Fig. 4.5. A legenda interna apresenta os valores de média e desvio padrão das medidas sem compensação e compensadas. A compensação levou a média para o valor nulo mantendo o desvio padrão sem alteração.

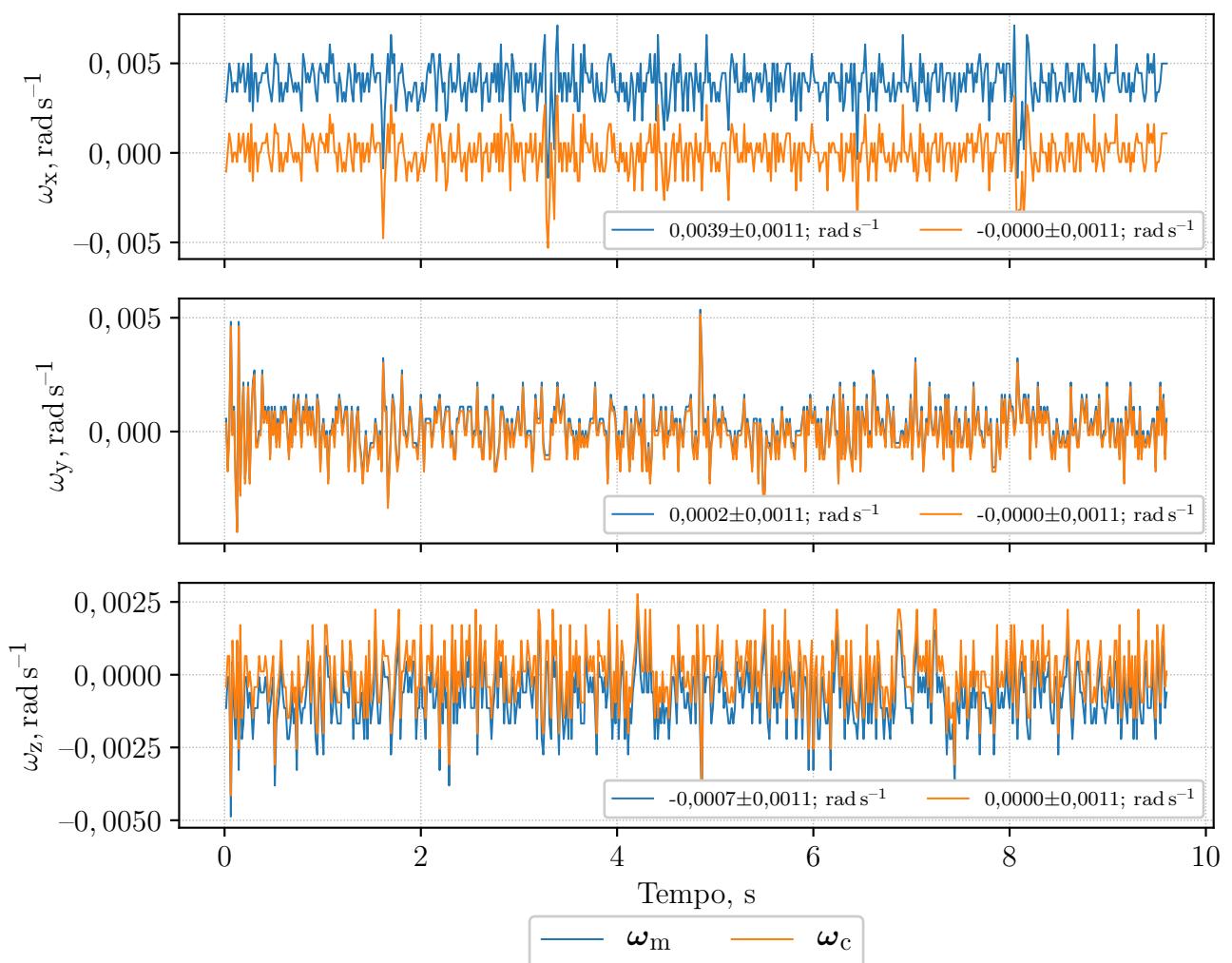


Figura 4.5: Resultado da calibração do giroscópio. Observe que o compensação aproximou a distribuição das medidas de zero, mas não influenciou no desvio padrão da mesma.

Sabe-se que o giroscópio apresenta mudanças aleatórias do *bias*, essas mudanças são conhecidas como deriva do *bias*. Uma maneira clássica de estimar esta deriva é através de um processo chamado análise de variância de Allan (SANTANA, 2011). Andrade (2019) utiliza em seu trabalho uma IMU semelhante a utilizada aqui, o autor conclui que não há mudanças

significativas tais que influenciem as medidas de atitude. Com um giroscópio mais preciso que o aqui usado, o giroscópio VG700AA-202, Santana (2011) verifica que mesmo após 12 horas de coletas não foi possível estimar o desvio padrão de Allan. Por estes motivos o giroscópio foi calibrado compensando o *bias*.

4.2 Implementação do Filtro de Kalman FKL

A implementação do filtro de Kalman linear, utilizando os quatérnios derivados na Seção 3.4.3, está esquematizada na Fig. 4.6. Com as velocidades angulares e o estado previamente estimado \mathbf{q}_{k-1}^+ , o estado *a priori* \mathbf{q}_k^- é obtido por integração e é indicado por 1 (em verde). O quatérnio de observação derivado do acelerômetro e magnetômetro \mathbf{q}_{obs} e a covariância da observação \mathbf{R}_k , são computados no retângulo indicado como 2 (em vermelho). A região indicada por 3 (em azul) representa o processo de atualização, que atualiza o estado propagado dadas as observações minimizando o erro da estimativa. As regiões 1 e 3 compõe o filtro de Kalman sendo a predição e atualização respectivamente.

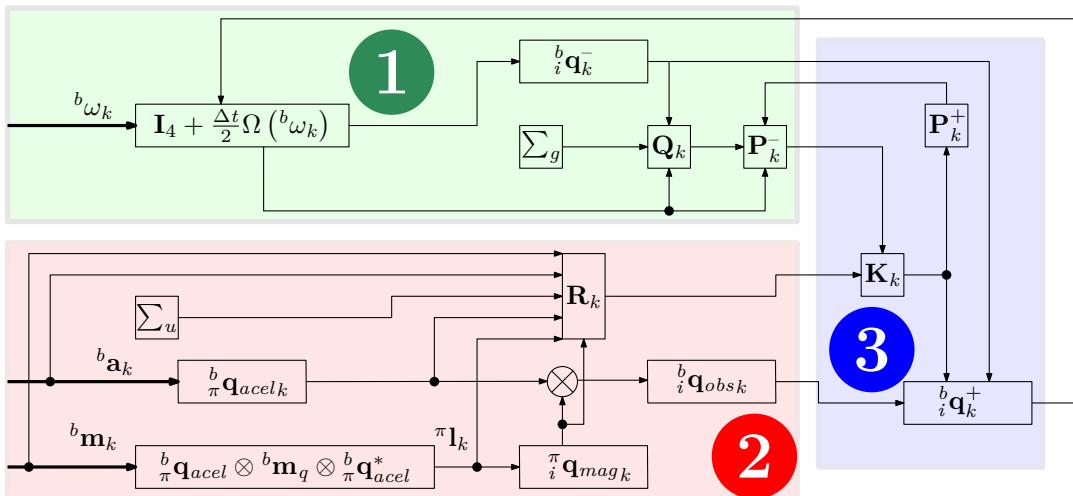


Figura 4.6: Fluxograma do filtro de Kalman implementado. As regiões retangulares representam os processos envolvidos na predição, observação e o filtro de Kalman. No retângulo 1 (em verde) é mostrado como o estado estimado no tempo anterior é somado às informações oriundas do giroscópio gerando o estado predito e a matriz de covariância do modelo \mathbf{Q}_k . A região 2 (em vermelho) soma as informações do acelerômetro com o magnetômetro fornecendo o estado de observação e a matriz de covariância da medida \mathbf{R}_k . A região 3 (em azul) apesenta a atualização do FK que estima o estado e propaga a matriz de covariância.

Para analisar o funcionamento da plataforma, depois de inicializada e seguido o procedimento de calibração, iniciou-se o processo de coleta de dados. A telemetria transmite as medidas da unidade MARG, o quatérnio estimado e o intervalo de tempo com frequência de

40 Hz (intervalos de 25 ms). A implementação fornece os dados do magnetômetro e acelerômetro normalizados, e giroscópio em radianos por segundo. O filtro passa–baixa forneceu medidas mais suaves para o giroscópio e acelerômetro. O magnetômetro da IMU-9250 não possui filtro, e por este motivo as medidas são mais ruidosas como visto na Fig. 4.7.

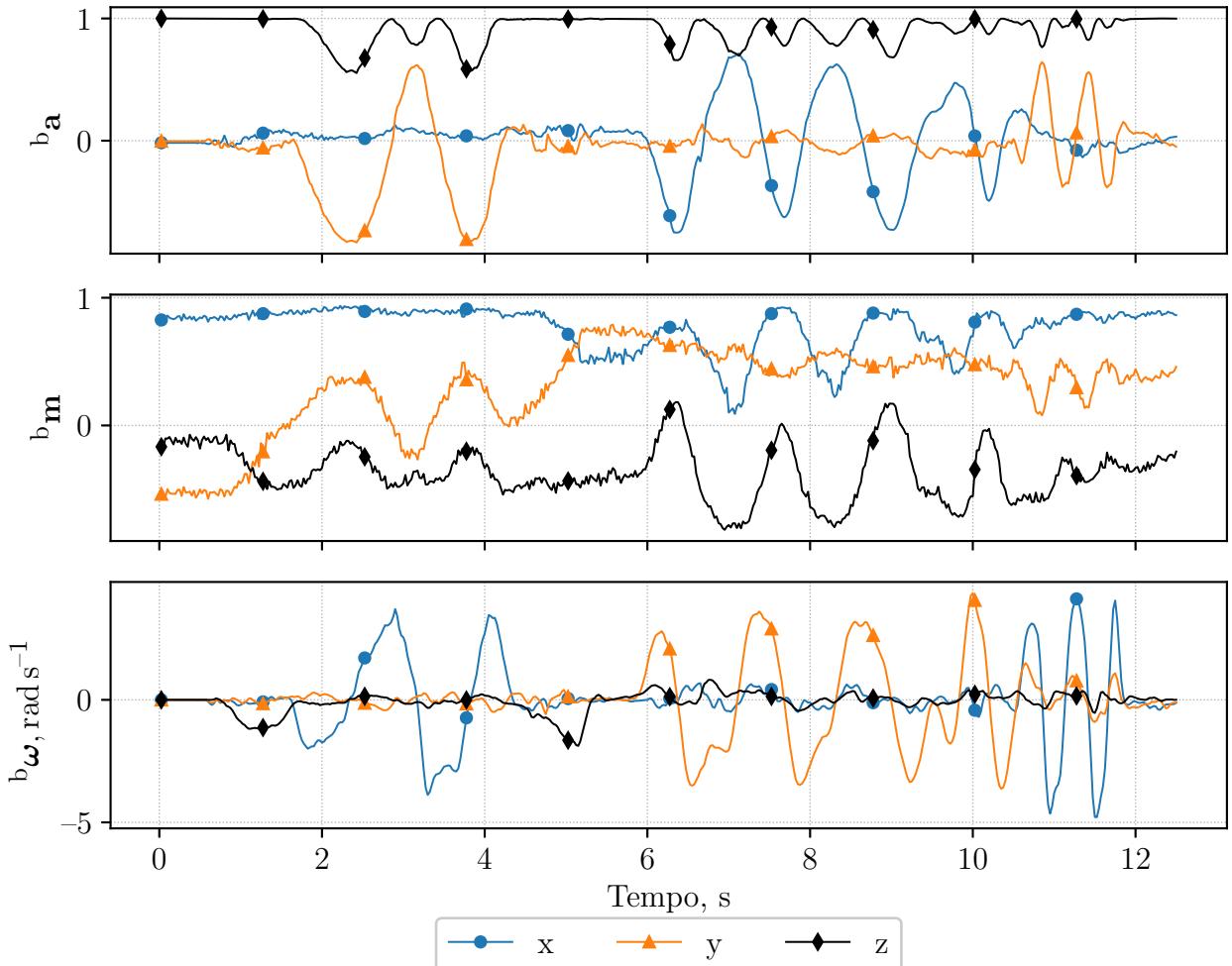


Figura 4.7: Medidas coletadas dos sensores. O gráfico apresenta as medidas tomadas no sistema do corpo. Os dados do giroscópio e acelerômetro possuem filtro passa–baixa na IMU-9250, observe como esses dados são visualmente mais suaves que o magnetômetro. Os dados do magnetômetro e acelerômetro estão normalizados e o giroscópio está em radianos por segundo.

Com as medidas do giroscópio e condição inicial, o quatérnio obtido por integração pura será indicado neste capítulo por \mathbf{q}_{giro} , que é diferente da propagação do filtro de Kalman \mathbf{q}^- . Com as medidas do acelerômetro e magnetômetro foi possível construir \mathbf{q}_{obs} , como apresentado na Seção §3.4.2.

A Fig. 4.8 apresenta as componentes dos quatérnios durante rotações manuais da plataforma. Para condição inicial de integração de \mathbf{q}_{giro} , foi tomada a primeira estimativa coletada da plataforma, que no caso foi igual à $\mathbf{q}_{giro} (k = 0) = \begin{bmatrix} -0,9395 & -0,0115 & -0,0090 & 0,3420 \end{bmatrix}^\top$.

As componentes de \mathbf{q}_{giro} possuem perfis mais suaves devido a integração pelo método de Euler de ordem zero. Inicialmente, o quatérnio estimado *online* \mathbf{q}^+ e \mathbf{q}_{giro} possuem valores semelhantes, mas devido ao *bias* do giroscópio, as medidas começam a divergir em menos de 6 s. Observe ainda que o valor estimado \mathbf{q}^+ está muito próximo do valor da predição \mathbf{q}^- , isto indica que o modelo de propagação representa bem a dinâmica do movimento. No tocante da observação, o ruído do magnetômetro ficou explicitamente conservado no quatérnio de observação \mathbf{q}_{obs} , todavia, o filtro conseguiu fundir as medidas de forma adequada conferindo suavidade da predição com eliminação da deriva.

Com as Eqs. 2.4, 2.5, 2.6 e 2.9, os ângulos de Euler foram extraídos diretamente dos quatérnios e apresentados na Fig. 4.8. O estimador consegue acompanhar os movimentos de todos os ângulos mesmo em movimentos abruptos. Assim como ocorre com os quatérnios, os ângulos derivados de \mathbf{q}_{giro} derivam rapidamente, e os derivados da observação são mais ruidosos. Comparando os ângulos de Euler extraídos de \mathbf{q}_{giro} com \mathbf{q}^+ , ϕ e ψ diferem mais de 7° em 12 s. O estimador mostrou-se eficiente em juntar a suavidade da integração do giroscópio com a acurácia da observação.

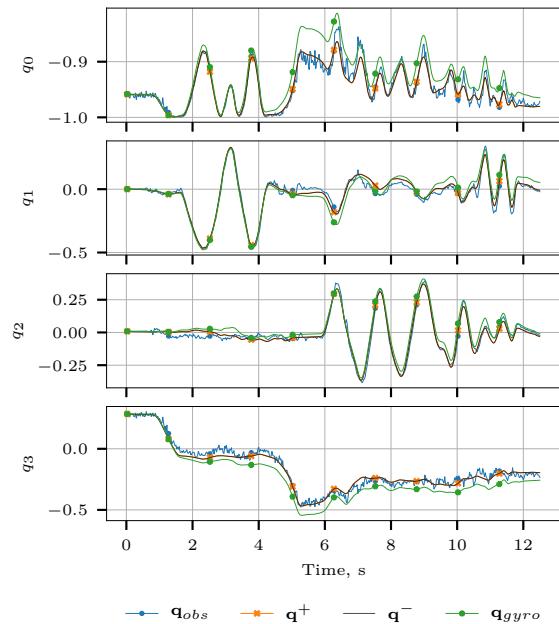


Figura 4.8: Quatérnios obtidos do giroscópio e com algorítimo AQUA. q_n representa a componente n do quatérnio. \mathbf{q}^+ e \mathbf{q}_{gyro} são os quatérnios estimado *online* e obtidos com o giroscópio por integração pura respectivamente. \mathbf{q}^- é a predição linear do FK e \mathbf{q}_{obs} é obtido fazendo $\mathbf{q}_{accel} \otimes \mathbf{q}_{mag}$.

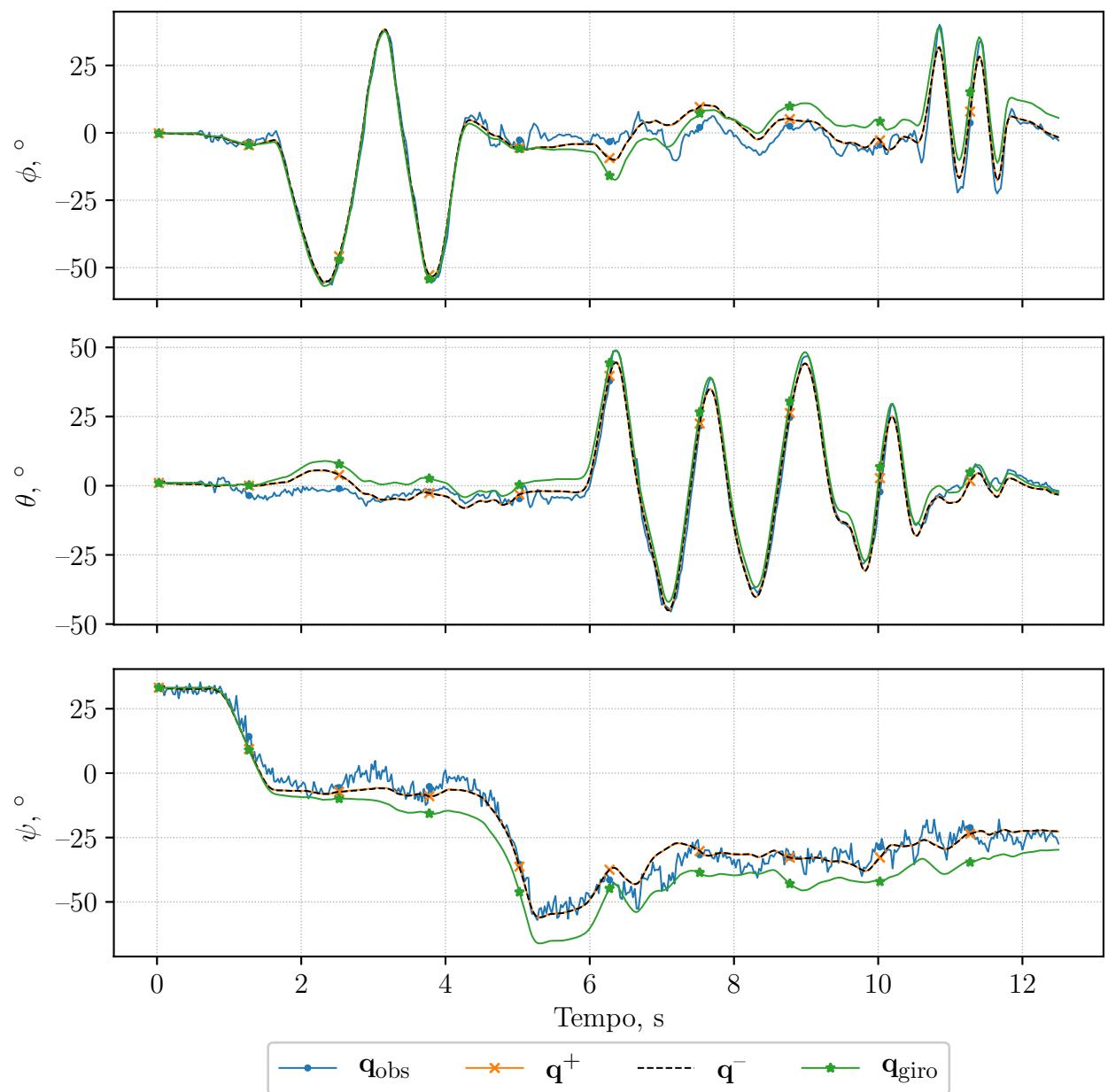


Figura 4.9: Ângulos de Euler extraídos dos quatérnios da Fig. 4.8 . Movimentações mais abruptas mostram que o filtro acompanha as medidas satisfatoriamente.

Na Fig. 4.10 são vistos o resíduo e a inovação apresentados na Seção §2.3. Como já dito, o primeiro indica o quanto a estimativa está acompanhando a observação/sensores, e o segundo, por sua vez, representa o quanto o modelo dista das medidas. Na legenda interna são indicadas a média e o desvio padrão de cada componente. Um filtro estável apresenta oscilações com média nula, e tanto o resíduo quanto a inovação apresentaram média na ordem de 10^{-3} .

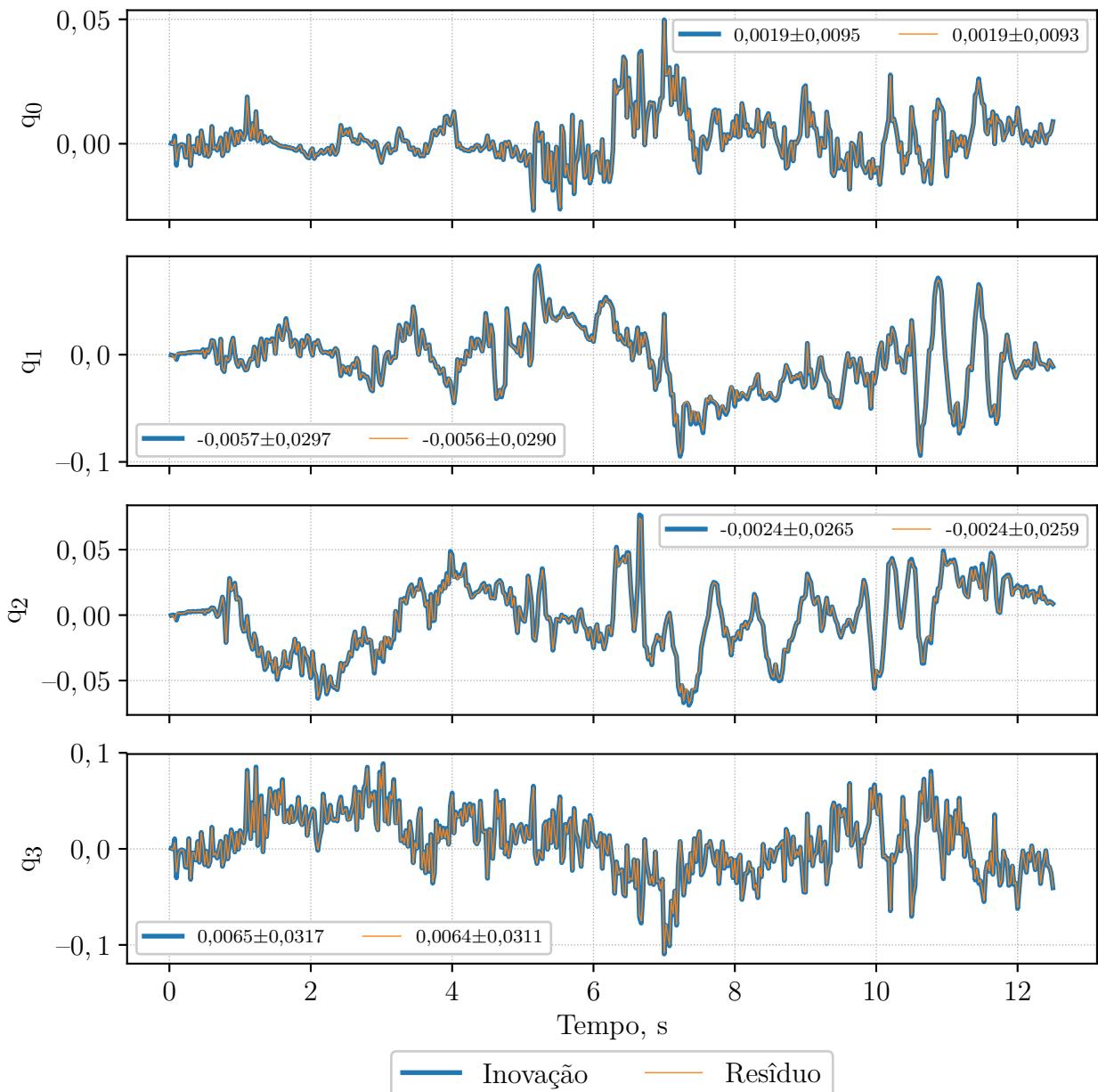


Figura 4.10: Resíduo e inovação. O filtro é dito estável quando essas medidas possuem média nula.

A Fig. 4.11 apresenta o desvio padrão dos estados estimados tomados a partir da diagonal da matriz de covariância *a posteriori* \mathbf{P}^+ . O filtro de Kalman é projetado de forma que minimize o traço de \mathbf{P}^+ . A estabilidade é verificada uma vez que o desvio padrão das compontes estão na ordem de 10^{-4} .

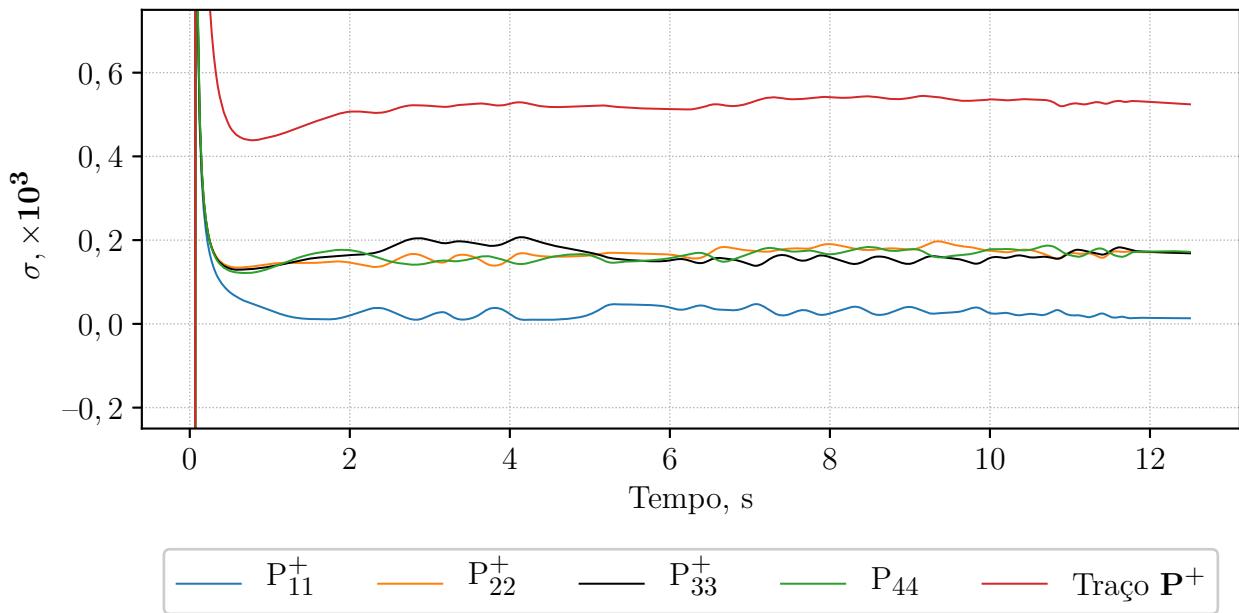


Figura 4.11: Desvio padrão dos estados obtidos da matriz de covariância \mathbf{P}^+

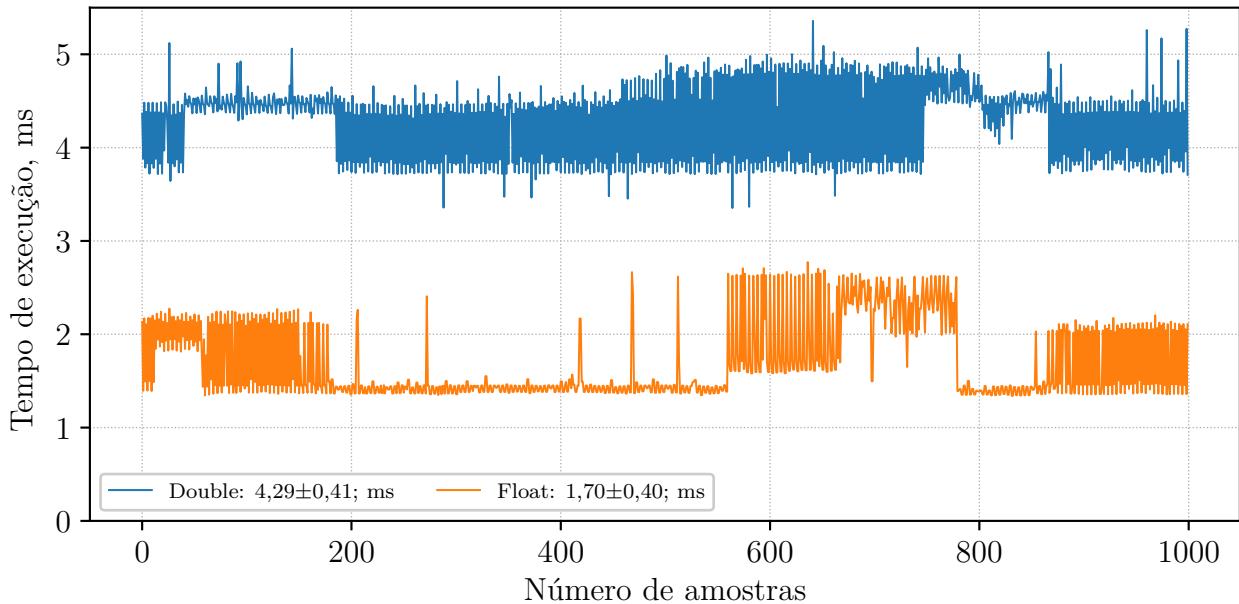


Figura 4.12: Tempo de execução

Para analisar o desempenho foram implementadas duas rotinas: uma com variáveis de ponto flutuante de precisão única (*float*) e outra com variáveis de precisão dupla (*double*). A

Fig. 4.12 apresenta o tempo de execução tomado em cada uma das implementações utilizando a função `esp_timer_get_time()`, que utiliza um temporizador de 60 bit com precisão de milissegundos. Percebe-se que com variáveis de tipo *double* o tempo é ≈ 2.5 vezes maior que para variáveis do tipo *float*, além disso, simulações feitas não apresentavam erros significativos entre os resultados obtidos com cada variável.

Neste trabalho foi utilizada a biblioteca Eigen¹ versão 3.3.7 que possui diversas rotinas implementadas de álgebra linear e vasta documentação. O compilador utilizou a *flag -Ofast* que otimiza rotinas matemáticas.

¹www.eigen.tuxfamily.org

Capítulo 5

Conclusões

O presente trabalho apresentou a implementação de uma plataforma *strapdown* composta por sensores MARG e microcontrolador de baixo custo. A plataforma se mostrou capaz de calibrar e compensar as medidas dos sensores, e também estimar e transmitir a atitude com frequência de 40 Hz.

No que diz respeito à calibração, os dados coletados diretamente da plataforma foram claros em demonstrar a eficácia dos métodos. A calibração geométrica foi capaz de simplificar o desenvolvimento matemático sem comprometer a qualidade da mesma.

Tomando como referências os estados estimados pelo filtro Kalman, as medidas obtidas exclusivamente com o giroscópio compartilham do perfil suave mas apresentam rápida deriva. As medidas derivadas do acelerômetro e magnetômetro por sua vez não apresentam deriva, mas são mais ruidosas. A fusão com filtro de Kalman agregou a suavidade da propagação por integração com a eliminação da deriva da observação.

O quatérnio de observação soma as informações do quatérnio do acelerômetro com o magnetômetro sem interferir nas informações de ϕ e θ . Este fato notável é importante na escolha do estimador para um dispositivo com planta pouco influente por ψ em sua dinâmica, como o caso de quadrirrotores, uma vez que o sensor mais sensível a interferências do meio é o magnetômetro.

A utilização de variáveis de tipo *float* se mostrou muito mais econômica computacionalmente sem comprometer a qualidade da estimação. Os tempos da ordem de 2 ms fornecem uma excelente margem para as mais diversas aplicações em sistemas mecânicos que possuem frequências naturais muito menores.

Sugestões para trabalhos futuros

Devido ao escopo do trabalho e o limite orçamentário, as manobras para simulações foram feitas manualmente. O acoplamento da plataforma projetada à uma plataforma *Stewart*, como feito no trabalho de Costa (2014), validaria tanto a calibração quanto a estimativa.

A não estimação do *bias* do giroscópio pode comprometer a estimação da atitude com o passar do tempo. Optou-se por utilizar um filtro linear por simplicidade, todavia, um estudo dos limites desta simplificação pode ser feito assim como outros estimadores podem ser implementados com o estimador linear quadrático.

O uso de um GPS fracamente acoplado poderia compensar facilmente os efeitos de acelerações translacionais, dado que de posse da posição, a velocidade e aceleração translacionais são computadas facilmente, assim, a consideração de que o acelerômetro está sentindo apenas a aceleração gravitacional pode ser eliminada.

A presente abordagem utiliza o filtro de Kalman aditivo, i.e., computa o estado estimado pela diferença entre o estado predito e a observação. Filtro multiplicativo como o apresentado no trabalho de Baroni (2017) pode ser explorado na perspectiva de dispositivos embarcados. Outros trabalho podem ser implementados e comparados no ambiente embardado, como os trabalhos de Sabatini (2006), Feng et al. (2017) e Guo, Wu, Wang e Qian (2017) que utilizam abordagens muito semelhantes como a tratada neste trabalho.

5.1 Códigos Fonte

Os algorítimos de calibração, estimação de atitude, telemetria e programa principal estão disponíveis em:

- <https://gitlab.com/roneydua/plataformastrapdown>

O código fonte do receptor está disponível em

- <https://gitlab.com/roneydua/coletadadostelemetria>

Bibliografia

- 1 KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, ASME International, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar. 1960. DOI: [10.1115/1.3662552](https://doi.org/10.1115/1.3662552).
- 2 MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation, and Control (Vol. 1)**. [S.l.]: Academic Press, 1979. p. 445. ISBN 9780124807013.
- 3 CHATFIELD, A. B. **Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation**. [S.l.]: AIAA, 11 jan. 1997. p. 339. ISBN 1563472430.
- 4 KAYTON, M.; FRIED, W. R. **Avionics Navigation Systems**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1997. ISBN 0471547956.
- 5 KUIPERS, J. B. **Quaternions and Rotation Sequences**. [S.l.]: Princeton University Press, 1999. 394 p. ISBN 9780691102986.
- 6 GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; ANDREWS, A. P. **Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2000. ISBN 047135032x.
- 7 MERAYO, J. M. G. et al. Scalar calibration of vector magnetometers. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 11, n. 2, p. 120–132, jan. 2000. DOI: [10.1088/0957-0233/11/2/304](https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/2/304).
- 8 GREWAL, M. **Global positioning systems, inertial navigation, and integration**. New York: John Wiley, 2001. ISBN 047135032X.
- 9 WELCH, G.; BISHOP, G. **An Introduction to the Kalman Filter**. Chapel Hill, NC, USA, 2001.
- 10 GAUTIER, J. D. **GPS/INS Generalized evaluation tool (GIGET) for the design and testing of the integrated navigation systems**. Jun. 2003. Tese (Doutorado) – Stanford University.

- 11 MARKOVSKY, I.; KUKUSH, A.; HUFFEL, S. V. Consistent least squares fitting of ellipsoids. **Numerische Mathematik**, Springer Science e Business Media LLC, v. 98, n. 1, p. 177–194, abr. 2004. DOI: [10.1007/s00211-004-0526-9](https://doi.org/10.1007/s00211-004-0526-9).
- 12 TITTERTON, D.; WESTON, J. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. [S.l.]: Institution of Engineering e Technology, 29 out. 2004. p. 576. ISBN 0863413587.
- 13 TRAWNÝ, N.; ROUMELIOTIS, S. I. Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation. [S.l.], 2005.
- 14 CARON, F. et al. GPS/IMU data fusion using multisensor Kalman filtering: introduction of contextual aspects. **Information Fusion**, Elsevier BV, v. 7, n. 2, p. 221–230, jun. 2006. DOI: [10.1016/j.inffus.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2004.07.002).
- 15 SABATINI, A. Quaternion-Based Extended Kalman Filter for Determining Orientation by Inertial and Magnetic Sensing. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 53, n. 7, p. 1346–1356, jul. 2006. DOI: [10.1109/tbme.2006.875664](https://doi.org/10.1109/tbme.2006.875664).
- 16 AGUIRRE, L. **Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. 730p. ISBN 9788570415844.
- 17 GROVES, P. D. **Principles of GNSS, Inertial, and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems (GNSS Technology and Applications)**. [S.l.]: Artech Print on Demand, 2007. ISBN 9781580532556.
- 18 STEIN, P. S.; REIS, N. R. S. dos. Sistema integrado de navegação para o Robô Ambiental Híbrido na Floresta Amazônica. In: ANAIS XIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO. ANAIS XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto. Florianópolis, Brasil: [s.n.], abr. 2007. p. 7103–7105.
- 19 GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB**. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2008. ISBN 9780470173664.
- 20 MILANÉS, V. et al. Sistema de Posicionamiento para Vehículos Autónomos. **Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI**, Universitat Politecnica de Valencia, v. 5, n. 4, p. 36–41, out. 2008. DOI: [10.1016/s1697-7912\(08\)70175-4](https://doi.org/10.1016/s1697-7912(08)70175-4).

- 21 BONNET, S. et al. Calibration methods for inertial and magnetic sensors. **Sensors and Actuators A: Physical**, Elsevier BV, v. 156, n. 2, p. 302–311, dez. 2009. DOI: [10.1016/j.sna.2009.10.008](https://doi.org/10.1016/j.sna.2009.10.008).
- 22 FROSIO, I.; PEDERSINI, F.; BORGHESE, N. Autocalibration of MEMS Accelerometers. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 58, n. 6, p. 2034–2041, jun. 2009. DOI: [10.1109/tim.2008.2006137](https://doi.org/10.1109/tim.2008.2006137).
- 23 RENAUDIN, V.; AFZAL, M. H.; LACHAPELLE, G. Complete Triaxis Magnetometer Calibration in the Magnetic Domain. **Journal of Sensors**, Hindawi Limited, v. 2010, p. 1–10, 2010. DOI: [10.1155/2010/967245](https://doi.org/10.1155/2010/967245).
- 24 SIDI, M. J. **Spacecraft Dynamics and Control**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1 nov. 2010. 432 p. ISBN 0521787807.
- 25 MADGWICK, S. O. H.; HARRISON, A. J. L.; VAIDYANATHAN, R. Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm. In: 2011 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics. [S.l.]: IEEE, jun. 2011. DOI: [10.1109/icorr.2011.5975346](https://doi.org/10.1109/icorr.2011.5975346).
- 26 SAGAN, C. **Cosmos**. [S.l.]: Random House Publishing Group, 6 jul. 2011. p. 352.
- 27 SANTANA, D. D. S. **Navegação terrestre usando unidade de medição inercial de baixo desempenho e fusão sensorial com filtro de Kalman adaptativo suavizado**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade São Paulo. DOI: [10.11606/t.3.2011.tde-25082011-162939](https://doi.org/10.11606/t.3.2011.tde-25082011-162939).
- 28 AMORIM, J. de. **Estudo e aplicação de algoritmos computacionais para a calibração de magnetômetros**. 2012. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do ABC, Santo André.
- 29 ROBERT GROVER BROWN, P. Y. C. H. **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises**. [S.l.]: PAPERBACKSHOP UK IMPORT, 20 fev. 2012. 383 p. ISBN 0470609699.
- 30 BAN, Y. et al. Low-end MEMS IMU can contribute in GPS/INS deep integration. In: 2014 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014. [S.l.]: IEEE, mai. 2014. DOI: [10.1109/plans.2014.6851440](https://doi.org/10.1109/plans.2014.6851440).

- 31 COSTA, M. S. M. **Controle de Veículos Aéreos Quadrirrotores. Uso de Filtros de Kalman para Minimização de Erros na Unidade de Medida Inercial.** Dez. 2014. Diss. (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- 32 MARKLEY, F. L.; CRASSIDIS, J. L. **Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control.** [S.l.]: Springer New York, 31 mai. 2014. DOI: [10.1007/978-1-4939-0802-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8).
- 33 PEDLEY, M.; STANLEY, M. **Magnetic Calibration.** [S.l.], set. 2014.
- 34 VALENTI, R. G.; DRYANOVSKI, I.; XIAO, J. Keeping a Good Attitude: A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs. **Sensors**, MDPI AG, v. 15, n. 8, p. 19302–19330, ago. 2015. DOI: [10.3390/s150819302](https://doi.org/10.3390/s150819302).
- 35 INVENSENSE. **MPU-9250 product specification.** Revisão 1.1. 1197 Borregas Ave, Sunnyvale, CA 94089 U.S.A., jun. 2016.
- 36 KUNCAR, A.; SYSEL, M.; URBANEK, T. Calibration of Triaxial Accelerometer and Triaxial Magnetometer for Tilt Compensated Electronic Compass. Springer International Publishing, p. 45–52, 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-33389-2_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-33389-2_5).
- 37 VALENTI, R. G.; DRYANOVSKI, I.; XIAO, J. A Linear Kalman Filter for MARG Orientation Estimation Using the Algebraic Quaternion Algorithm. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 65, n. 2, p. 467–481, fev. 2016. DOI: [10.1109/TIM.2015.2498998](https://doi.org/10.1109/TIM.2015.2498998).
- 38 BARONI, L. Kalman filter for attitude determination of a CubeSat using low-cost sensors. **Computational and Applied Mathematics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 37, S1, p. 72–83, ago. 2017. DOI: [10.1007/s40314-017-0502-5](https://doi.org/10.1007/s40314-017-0502-5).
- 39 FENG, K. et al. A New Quaternion-Based Kalman Filter for Real-Time Attitude Estimation Using the Two-Step Geometrically-Intuitive Correction Algorithm. **Sensors**, MDPI AG, v. 17, n. 9, p. 2146, set. 2017. DOI: [10.3390/s17092146](https://doi.org/10.3390/s17092146).
- 40 GUO, S. et al. Novel MARG-Sensor Orientation Estimation Algorithm Using Fast Kalman Filter. **Journal of Sensors**, Hindawi Limited, v. 2017, p. 1–12, 2017. DOI: [10.1155/2017/8542153](https://doi.org/10.1155/2017/8542153).

- 41 MAIER, A.; SHARP, A.; VAGAPOV, Y. Comparative analysis and practical implementation of the ESP32 microcontroller module for the internet of things. In: 2017 Internet Technologies and Applications (ITA). [S.l.]: IEEE, set. 2017. DOI: [10.1109/itecha.2017.8101926](https://doi.org/10.1109/itecha.2017.8101926).
- 42 SANTOS BARBOSA, F. dos. **4DOF Quadcopter: Development, Modeling and Control.** 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo.
- 43 SOLÀ, J. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter, 3 nov. 2017. arXiv: [1711.02508v1 \[cs.RO\]](https://arxiv.org/abs/1711.02508v1).
- 44 SANTANA, D. et al. Estimação de trajetórias utilizando sistema de navegação inercial strapdown. **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**, nov. 2018.
- 45 SYSTEMS, E. **ESP32 Datasheet.** Version 2.1. [S.l.], 2018. Disponível em: <https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32_datasheet_en.pdf>.
- 46 ZHONG, Y.; XU, Y. A calibration method of UAV accelerometer based on levenberg-marquardt iteration algorithm. In: 2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC). [S.l.]: IEEE, jun. 2018. DOI: [10.1109/ccdc.2018.8408114](https://doi.org/10.1109/ccdc.2018.8408114).
- 47 ZHONG, Y. et al. A New Drone Accelerometer Calibration Method. In: 2018 37th Chinese Control Conference (CCC). [S.l.]: IEEE, jul. 2018. DOI: [10.23919/chicc.2018.8482568](https://doi.org/10.23919/chicc.2018.8482568).
- 48 ANDRADE, R. M. de. **Implementação do Método Triad Para Determinação de Atitude de Uma Unidade de Medição Inercial.** Set. 2019. f. 70. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do ABC, São Bernardo do Campo.

Apêndice A

Apêndices

A.1 Propriedades dos quatérnios

Para rotacionar um vetor no referencial i e obter em outro referencial, por exemplo, b , podemos fazer uso de Eq. 2.16 e desenvolvemos a rotação do vetor fazendo:

$$\begin{aligned} {}^b \mathbf{x}_q &= {}_i^b \bar{\mathbf{q}} \otimes {}^i \mathbf{x}_q \otimes {}_i^b \bar{\mathbf{q}}^* \\ {}^b \mathbf{x}_q &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^\top \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbb{I}_3 + [\mathbf{q} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^i \mathbf{x} \end{bmatrix} \otimes {}_i^b \bar{\mathbf{q}}^* \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^\top {}^i \mathbf{x} \\ q_0 {}^i \mathbf{x} + [\mathbf{q} \times] {}^i \mathbf{x} \end{bmatrix} \otimes {}_i^b \bar{\mathbf{q}}^* \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^\top {}^i \mathbf{x} \\ q_0 {}^i \mathbf{x} + \mathbf{q} \times {}^i \mathbf{x} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Evidentemente, $-\mathbf{q}^\top {}^i \mathbf{x}$ e $q_0 {}^i \mathbf{x} - \mathbf{q} \times {}^i \mathbf{x}$ são respectivamente a parte escalar e a parte vetorial do quatérnio resultante do produto ${}_i^b \bar{\mathbf{q}} \otimes {}^i \mathbf{x}_q$. Por conveniência substituindo $\bar{\mathbf{r}} = {}_i^b \bar{\mathbf{q}} \otimes {}^i \mathbf{x}_q$

tem-se

$$\begin{aligned}
{}^b \mathbf{x}_q &= \bar{\mathbf{r}} \otimes {}^b \bar{\mathbf{q}}^* \\
&= \begin{bmatrix} r_0 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_0 & -\mathbf{r}^\top \\ \mathbf{r} & r_0 \mathbb{I}_3 + [\mathbf{r} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_0 q_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{q} \\ q_0 \mathbf{r} - r_0 \mathbf{q} - \mathbf{r} \times \mathbf{q} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Retomando $-\mathbf{q}^\top \mathbf{x}$ e $q_0 \mathbf{x} - \mathbf{q} \times \mathbf{x}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r_0 q_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{q} \\ q_0 \mathbf{r} - r_0 \mathbf{q} - \mathbf{r} \times \mathbf{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-\mathbf{q}^\top \mathbf{x}) q_0 + (q_0 \mathbf{x} + \mathbf{q} \times \mathbf{x})^\top \mathbf{q} \\ q_0 (q_0 \mathbf{x} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}) - (-\mathbf{q}^\top \mathbf{x}) \mathbf{q} - (q_0 \mathbf{x} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^\top \mathbf{x} q_0 + q_0 \mathbf{x}^\top \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}^\top \mathbf{q} \\ q_0^2 \mathbf{x} + q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} \mathbf{q} - q_0 \mathbf{x} \times \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{x} \times \mathbf{q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \times \mathbf{x}^\top \mathbf{q} \\ q_0^2 \mathbf{x} + 2q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{x} + \mathbf{q} \mathbf{q}^\top \mathbf{x} - (\mathbf{x}^\top (\mathbf{q}^\top \mathbf{q}) - \mathbf{q} (\mathbf{q}^\top \mathbf{x})) \end{bmatrix} \\
&= \\
{}^b \mathbf{x}_q &= \begin{bmatrix} -(\mathbf{q} \times \mathbf{x})^\top \mathbf{q} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_3 (q_0^2 - \mathbf{q}^2) + 2q_0 [\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q} \mathbf{q}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O termo

$$(q_0^2 - \mathbf{q}^2) \mathbb{I}_3 + 2q_0 [\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q} \mathbf{q}^\top \equiv (2q_0^2 - 1) \mathbb{I}_3 + 2q_0 [\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q} \mathbf{q}^\top \quad (\text{A.1})$$

é a matriz de rotação em função dos quatérnios $\mathbf{R} \left({}_i^b \mathbf{q} \right)$. Desenvolvendo-o temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \left({}_i^b \mathbf{q} \right) &= \left(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \right) \mathbb{I}_3 + 2 \begin{bmatrix} 0 & -q_0 q_3 & q_0 q_2 \\ q_0 q_3 & 0 & -q_0 q_1 \\ -q_0 q_2 & q_0 q_1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & q_3^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} \left({}_i^b \mathbf{q} \right) &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Matrizes de covariância dos quatérnios de observação

As matrizes aqui presentem foram retiradas de Valenti et al. (2016)

- Para $a_z \geq 0$

$$\frac{\partial \left({}_i^b \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{f}_1} = \begin{bmatrix} q_{0_m} & 0 & 0 & -q_{3_m} & q_{0_a} & -q_{1_a} & q_{2_a} & 0 \\ 0 & q_{0_m} & q_{3_m} & 0 & q_{1_a} & q_{0_a} & 0 & q_{2_a} \\ 0 & -q_{3_m} & q_{0_m} & 0 & q_{2_a} & 0 & q_{0_a} & -q_{1_a} \\ q_{3_m} & 0 & 0 & q_{0_m} & 0 & -q_{2_a} & q_{1_a} & q_{0_a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

– $l_x > 0$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\kappa} & \frac{a_y}{\kappa y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & -\frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & -\frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_y^2}{\beta_1 \gamma} & \frac{l_x l_y}{\beta_1 \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_y \beta_1}{\gamma_2} & \frac{l_x \beta_1}{\gamma_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_y \beta_1}{\gamma_2^3} & \frac{l_x \beta_1}{\gamma_2^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

- $l_x < 0$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\kappa} & \frac{a_y}{\kappa y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & -\frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & -\frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_y \beta_2}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}} & \frac{l_x \beta_2}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_y^2}{\beta_2 \gamma} & \frac{l_x l_y}{\beta_2 y} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & & & & \mathbf{0}_3 \\ m_z - \frac{2a_x m_x - a_y m_y}{\kappa^2} & \frac{a_x m_y}{\kappa^2} & \frac{a_x(-a_x m_x + a_y m_y)}{\kappa^4} & 1 - \frac{a_x^2}{\kappa^2} & -\frac{a_x a_y}{\kappa^2} & a_x \\ -\frac{a_y m_x}{\kappa^2} & m_z - \frac{a_x m_x - 2a_y m_y}{\kappa^2} & \frac{a_y(-a_x m_x + a_y m_y)}{\kappa^4} & -\frac{a_x a_y}{\kappa^2} & -1 + \frac{a_y^2}{\kappa^2} & a_y \\ m_x & -m_y & -m_z & a_x & -a_y & a_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

- Para $a_z < 0$

$$\frac{\partial \left({}_i^b \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{f}_1} = \begin{bmatrix} q_{0_m} & 0 & 0 & -q_{3_m} & q_{0_a} & -q_{1_a} & 0 & -q_{3_a} \\ 0 & q_{0_m} & q_{3_m} & 0 & q_{1_a} & q_{0_a} & -q_{3_a} & 0 \\ 0 & -q_{3_m} & q_{0_m} & 0 & 0 & q_{3_{\text{acc}}} & q_{0_a} & -q_{1_a} \\ q_{3_m} & 0 & 0 & q_{0_m} & q_{3_a} & 0 & q_{1_a} & q_{0_a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

- $l_x > 0$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\kappa} & -\frac{a_y}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & \frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_y^2}{\beta_1 \gamma} & -\frac{l_x l_y}{\beta_1 \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_y \beta_1}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}} & \frac{l_x \beta_1}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$- l_x < 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\kappa} & -\frac{a_y}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\kappa} & 0 & \frac{a_x}{\kappa^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_y \beta_2}{\gamma^{\frac{3}{2}}} & -\frac{l_x \beta_2}{\gamma^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_y^2}{\beta_2 \gamma} & \frac{l_x l_y}{\beta_2 \gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

•

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & & & & \mathbf{0}_3 & \\ m_z - \frac{2a_x m_x - a_y m_y}{\kappa^2} & \frac{a_x m_y}{\kappa^2} & \frac{a_x(-a_x m_x + a_y m_y)}{\kappa^4} & 1 - \frac{a_x^2}{\kappa^2} & -\frac{a_x a_y}{\kappa^2} & a_x \\ -\frac{a_y m_x}{\kappa^2} & m_z - \frac{a_x m_x - 2a_y m_y}{\kappa^2} & \frac{a_y(-a_x m_x + a_y m_y)}{\kappa^4} & -\frac{a_x a_y}{\kappa^2} & -1 + \frac{a_y^2}{\kappa^2} & a_y \\ m_x & -m_y & -m_z & a_x & -a_y & -a_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Esquema Elétrico

A Fig. B.1 apresenta o esquema elétrico da plataforma *strapdown*.

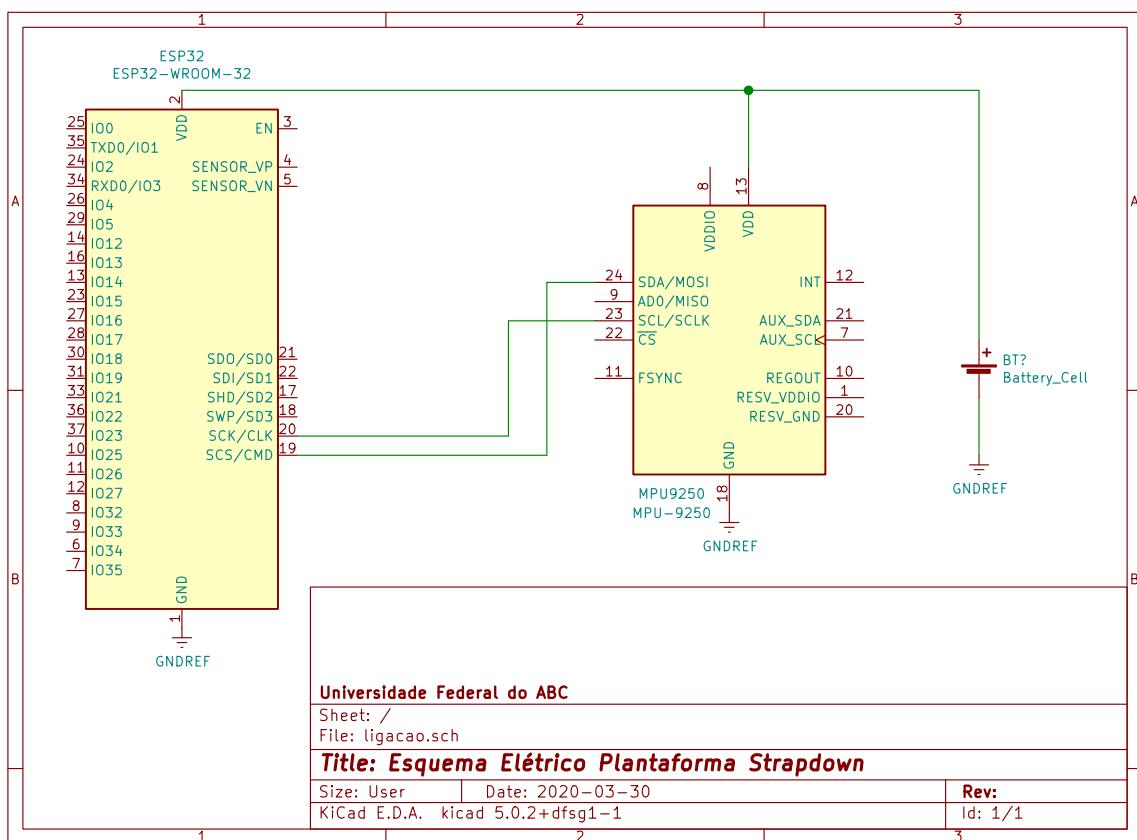


Figura B.1: Esquema elétrico da plataforma *Strapdown*

