一、填空题

1. $\int_{-2}^{+\infty}[(e^{-t}+t)\delta(t-1)+t\delta(t+3)]\mathrm{d}t=$**?** $\int_{+1}^{+\infty}e^{-2t}\cdot\delta'(t-2)dt=$**?**

解： **(1)、** $\int_{-2}^{+\infty}[(e^{-t}+t)\delta(t-1)+t\delta(t+3)]\mathrm{d}t$

$$=\int_{-2}^{+\infty}[(e^{-t}+t)\delta(t-1)]\mathrm{d}t=(e^{-t}+t)\Big|_{t=1}=e^{-1}+1$$

(2)、 $\int_{+1}^{+\infty}e^{-2t}\cdot\delta'(t-2)dt=-(e^{-2t})'\Big|_{t=2}=2e^{-4}$

2． 三角脉冲 $f(t)$ 定义在开区间**(-10,7)**上，则 $f(-4t+5)$ 的取值区间为______________。

解：

$$-10 < -4t+5 < 7, \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{15}{4}.$$

$$\underline{(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})}$$

3. 某二阶系统起始状态为$r(0_) = -1$，$r'(0\_) = 2$；初始条件为$r(0_+) = 3$，$r'(0_+) = 1$，则确定零输入响应齐次解待定系数的初始条件为$r_{zi}(0_+) =$________，$r'_{zi}(0_+) =$________；而确定零状态响应齐次解待定系数的初始条件为$r_{zs}(0_+) =$________，$r'_{zs}(0_+) =$________。

解： $r_{zi}(0_+) = r(0\_) = -1; r'_{zi}(0_+) = r'(0\_) = 2$

$$r(0_+) = r_{zi}(0_+) + r_{zs}(0_+) \Rightarrow r_{zs}(0_+) = r(0_+) - r_{zi}(0_+) = 4$$

$$r'(0_+) = r'_{zi}(0_+) + r'_{zs}(0_+) \Rightarrow r'_{zs}(0_+) = r'(0_+) - r'_{zi}(0_+) = -1$$

4. 已知 $f_0(t)=E(1-\frac{2|t|}{\tau})[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$ 的傅立叶变换为 $F_0(\omega)=\frac{E\tau}{2}\mathrm{sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$，则信号 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_0(t-n\tau)$ 的傅立叶级数系数 $F_n=$____。

解： $F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{1}{T_1}\cdot\frac{E\tau}{2}\mathrm{sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})\Big|_{\omega=n\omega_1}$

$\because T_1=\tau,\omega_1=\frac{2\pi}{\tau}$，$\therefore F_n=\frac{E}{2}\mathrm{sa}^2(\frac{n\pi}{2})$

5. 设线性滤波网络满足无失真传输条件，其单位冲激函数的付立叶变换为$H(j\omega)$，若$H(j1000\pi)=A\cdot e^{-jB}$，其中 ***A*** 和 ***B*** 为常数，则$H(j500\pi)$=____________________。

解：无失真传输条件：$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_0}$

幅频特性为常数，相频特性与频率成正比。

$$H(j500\pi)=A\cdot e^{-j\frac{B}{2}}$$

6． 若$F(s)=\dfrac{s^4+2s^3+2s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$，则$f(0_+)=$____；若某因果离散时间序列$x(n)$的$Z$变换为$X(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$，则$x(+\infty)=$________。

解： $F(s)$极点为$s=1,s=2,s=3$，皆位于左半平面

$F(s)=s-4+F_1(s)$，$F_1(s)=\dfrac{15s^2+40s+25}{s^3+6s^2+11s+6}$

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{15s^3 + 40s^2 + 25s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 15$$

$X(z)$的极点位于单位圆内，单位圆上只有一阶极点。

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z} = 1$$

7. 某因果信号的拉氏变换为$\dfrac{3}{s(s+3)}$，则对应的傅立叶变换为________________。

解：$\dfrac{3}{s(s+3)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+3}$，有极点位于虚轴上

傅里叶变换为$\dfrac{1}{j\omega(j\omega+3)}+\pi\delta(\omega)$

注：见 ***p249***

9. 已知 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$， $y(n)=\{\underset{\uparrow}{5},4,3\}$，起始点均为 $n=0$，

则 $2x(2n)-x(\frac{n}{2})$=__________， $x(n)$ 与 $y(n)$ 的卷积后得到

的序列为__________。

解：

$$x(2n)=\{\underset{\uparrow}{1},3,0,0,0,0\}$$

$$x(\frac{n}{2})=\{\underset{\uparrow}{1},0,2,0,3,0,4\}$$

$$2x(2n)-x(\frac{n}{2})=\{1,6,-2,0,-3,0,-4\}$$

$$x(n)*y(n)=\{\underset{\uparrow}{5},14,26,38,25,12\}$$

注：对位相乘求和，p34

10. $x(n)=3^{-|n|}$的 Z 变换为________，收敛域为_________。

解： $x(n)=3^{-n}u(n)+3^{n}u(-n-1)$

$$X(z)=\frac{z}{z-1/3}-\frac{z}{z-3}$$

收敛域： $1/3<|z|<3$

11． 因果稳定离散时间系统的系统函数 $H(z)$的收敛域的特点为：________________。

解：$\begin{cases} a < |z| \le \infty \\ a < 1 \end{cases}$

三、时域分析题

已知某个系统的微分方程如下：

$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+2e(t)$，其中$e(t)$为激励，$r(t)$为响应。用时域方法求解下列各题：

1．求系统的单位冲激响应和阶跃响应；

2．若输入信号$e(t)=e^{-t}u(t)$，$r(0_-)=1$，$r'(0_+)=1$，求：

(1) $r(0_+)$和$r'(0_-)$；

(2) 系统的零输入响应；

(3) 系统的零状态响应。

解：系统的特征方程为：$\alpha^2+4\alpha+3=0$，特征根为：$\alpha_1=-1,\alpha_2=-3$

1、将$h(t)$和$\delta(t)$带入微分方程的左端和右端，得：

$$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t) \text{————} \mathbf{(1)}$$

自由项为$\delta'(t)+2\delta(t)$。由于方程左端次数高于右端次数，所以设系统的冲激响应为：

$$h(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-3t})u(t) \text{————} \mathbf{(2)}$$

根据冲激函数匹配法求解系统的$h(0_+)$和$h'(0_+)$，由于方程右端含有$\delta'(t)$，为使方程左右两端平衡，故可设：

$$\begin{cases} h''(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ h'(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ h(t) = a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入式**(1)**得：$a = 1,\ b = \text{-}2$，故$h(0_+) = 1$，$h'(0_+) = -2$。

将$h(0_+)$和$h'(0_+)$带入式**(2)**，得：

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1/2 \\ C_2 = 1/2 \end{cases}$$

故系统的冲激响应为：$h(t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

根据系统的冲激响应和阶跃响应的关系：

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}(e^{-\tau}+e^{-3\tau})u(\tau)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}(e^{-\tau}+e^{-3\tau})d\tau=-\frac{1}{2}(-\frac{4}{3}+e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t})u(t)$$

2、将$e(t)=e^{-t}u(t)$带入方程右端得自由项：$\delta(t)+e^{-t}u(t)$。

由目测法求解跳变量：

方程右端存在$\delta(t)$，可断定$r''(t)$中必含有$\delta(t)$，则$r'(t)$在 **0** 时刻有 **1** 的跳变，即$r'(0_+)-r'(0_-)=1$；$r(t)$在 **0** 时刻没有跳变，即$r(0_+)-r(0_-)=0$。

(1)、$r(0_+)=r(0_-)=1$, $r'(0_-)=r'(0_+)-1=0$

(2)、系统零输入响应：$r_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$，根据$r(0_-)=1$和$r'(0_-)=0$得出：

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3/2 \\ C_2 = -1/2 \end{cases},$$

所以，$r_{zi}(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

(2)、在$t > 0$时微分方程右端自由项为e^{-t}，又由于**-1** 是特征方程的特征根，故设系统强迫响应$r_p(t) = Ate^{-t}$，将其带入微分方程得$A = \frac{1}{2}$，所以$r_p(t) = \frac{1}{2}te^{-t}$；

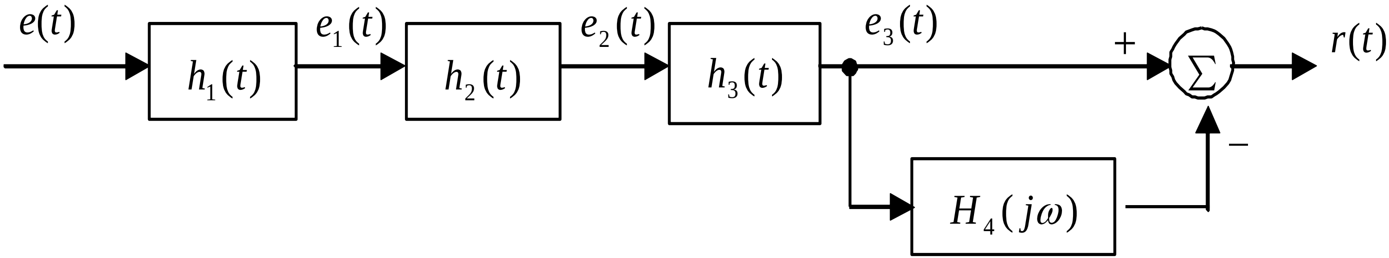
设系统的零状态响应为：$r_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{2}te^{-t}$，将 $r_{zs}(0_+)=r(0_+)-r(0_-)=0$ 和 $r'_{zs}(0_+)=r'(0_+)-r'(0_-)=1$ 代入$r_{zs}(t)$得：

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ -C_1-3C_2+\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1/4 \\ C_2=-1/4 \end{cases},$$

所以，$r_{zs}(t)=\left[\frac{1}{4}(e^{-t}-e^{-3t})+\frac{1}{2}te^{-t}\right]u(t)$

四、傅立叶分析题

一个信号处理系统$h(t)$由四个子系统互联而成，如下图所示。



其中 $h_1(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)\right]$，$h_2(t)=\frac{3\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(3\omega_c t)$，

$h_3(t)=u(t)$，$H_4(j\omega)=e^{-j2\pi\omega/\omega_c}$。

若 $e(t)=2\sin(2\omega_c t)+2\cos(\omega_c t/2)$，求以下各小题：

1. 求$H_1(j\omega)$、$H_2(j\omega)$和$H_3(j\omega)$，并画出$H_2(j\omega)$和$H_3(j\omega)$的幅度谱；

2. 求$H_A(j\omega)=H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)\cdot H_3(j\omega)$，并指出$H_A(j\omega)$的作用，求$e_3(t)$；

3. 求$r(t)$。

解：根据 $F[Sa(\omega_c t)] = \dfrac{\pi}{\omega_c}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]$

$$H_1[j\omega] = j\omega F\left[\frac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)\right] = \frac{j\omega}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]$$

$$H_2(j\omega) = F[\frac{3\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(3\omega_c t)] = u(\omega+3\omega_c)-u(\omega-3\omega_c)$$

$$H_3(j\omega) = F[u(t)] = \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

图

2、

$$H_A(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)\cdot H_3(j\omega)$$

$$= \frac{j\omega}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)][u(\omega+3\omega_c)-u(\omega-3\omega_c)][\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{j\omega}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)][\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)] + \underline{\frac{j\omega}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]\pi\delta(\omega)}$$

$$= \frac{1}{2}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]$$

$H_A(j\omega)$具有低通滤波器的作用。

由$e(t)=2\sin(2\omega_c t)+2\cos(\omega_c t/2)$得：

$$E(j\omega)=j2\pi[\delta(\omega+2\omega_c)-\delta(\omega-2\omega_c)]+2\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c}{2})]$$

$$E_3(j\omega)=H_A(j\omega)E(j\omega)$$

$$=\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c}{2})]$$

所以，$e_3(t)=\cos(\frac{\omega_c t}{2})$

3、根据$H_4(j\omega)=e^{-j2\pi\omega/\omega_c}$**得**$h_4(t)=\delta(t-\frac{2\pi}{\omega_c})$

由系统框图得：$r(t)=e_3(t)-e_3(t)*h_4(t)$

$$r(t) = \cos(\frac{\omega_c t}{2}) - \cos(\frac{\omega_c t}{2}) * \delta(t - \frac{2\pi}{\omega_c})$$

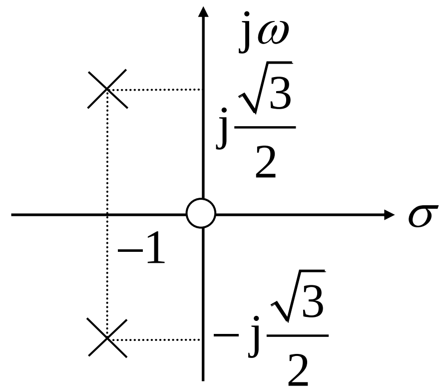
$$= \cos(\frac{\omega_c t}{2}) - \cos[\frac{\omega_c}{2}(t - \frac{2\pi}{\omega_c})]$$

$$= \cos(\frac{\omega_c t}{2}) - \cos(\frac{\omega_c}{2} t - \pi)$$

$$= 2\cos(\frac{\omega_c t}{2})$$

五、拉氏变换分析题

已知$H(s)$的零极点分布如图所示，单位冲激响应$h(t)$的初值$h(0_+)=2$，求以下各题：



1．系统的系统函数$H(s)$与单位冲激响应$h(t)$；

2．画出系统的幅频特性$|H(j\omega)|$和相频特性$\varphi(\omega)$曲线；

3．若激励$e(t)=\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}u(t)$，求

(1) 系统的瞬态响应；

(2) 系统的稳态响应。

解：

1、根据零极点图设系统函数为：$H(s)=\dfrac{As}{(s+1)^2+3/4}$

根据初值定理得：$h(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sH(s)=2 \Rightarrow A=2$

故$H(s)=\dfrac{2s}{(s+1)^2+3/4}$

根据系统函数$H(s)$求解系统冲激响应$h(t)$，将$H(s)$进行整理得：

$$H(s)=2[\frac{s+1}{(s+1)^2+3/4}-\frac{(2/\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}/2)}{(s+1)^2+3/4}]$$

$$h(t)=2e^{-t}[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]u(t)$$

2、 $H(j\omega)=\dfrac{2j\omega}{(j\omega+1)^2+3/4}$

图

3、 $e(t)=\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}u(t)$得出：$E(s)=\frac{\sqrt{3}/2}{s^2+3/4}$

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}s}{4}-\frac{7\sqrt{3}}{8}}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{\sqrt{3}s}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}}{s^2+\frac{3}{4}}$$

(1). 系统瞬态响应的拉氏变换为：

$$R_i(s)=\frac{-\frac{\sqrt{3}s}{4}-\frac{7\sqrt{3}}{8}}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{s+1}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}-\frac{5}{4}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+1)^2+\frac{3}{4}},$$

则瞬态响应为：

$$r_i(t)=-e^{-t}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5}{4}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

(2)、系统稳态响应的拉氏变换为：

$$R_s(s)=\frac{\frac{\sqrt{3}s}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}}{s^2+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}s}{s^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+\frac{3}{4}}$$

则稳态响应为：

$$r_s(t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{3}{4}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+30^\circ\right)u(t)$$

六、Z 变换分析题

研究一个线性时不变离散系统，其输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 满足 $y(n)-\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)=x(n-1)$

求以下各题：

1．画出系统框图（用符号 z^{-1} 表示向右延时 **1** 个单位）；

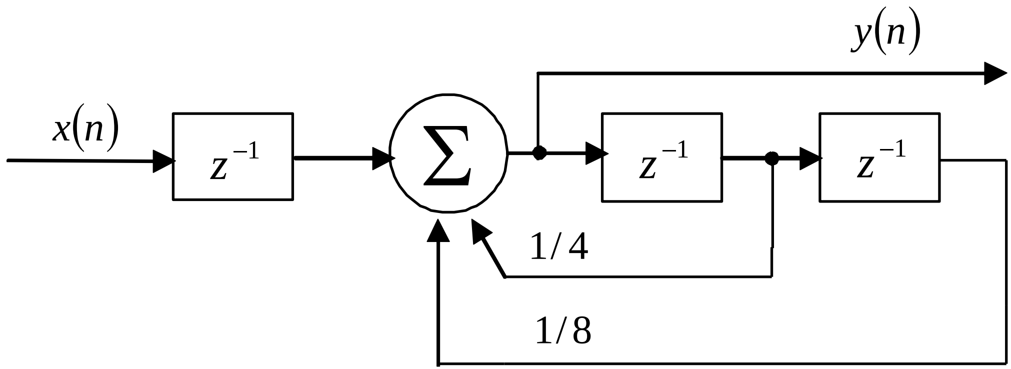
2．求系统函数 $H(z)$，并画出零极点图；

3．求所有可能的几种单位样值响应 $h(n)$，并分别指出其因果性和稳定性；

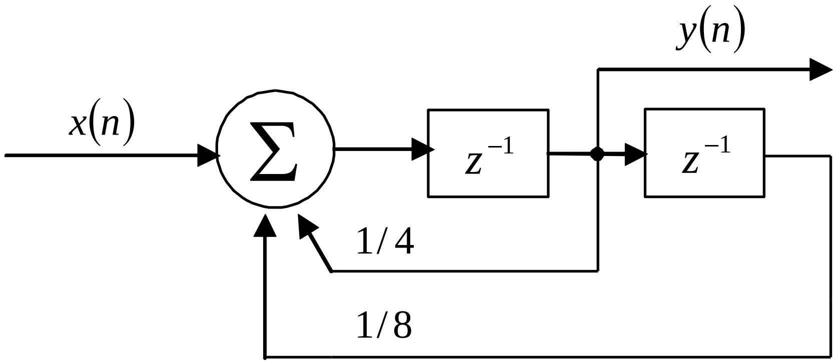
4．在 $h(n)$ 为稳定因果系统条件下，求该系统的频响特性；

5． 在 $h(n)$ 为稳定因果系统条件下，求系统对激励 $x_1(n)=[\cos(\frac{\pi}{4}n)]u(n)$ 的稳态响应 $y_{ss1}(n)$。

解：1、 $y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)+x(n-1)$



$$y(n+1)=\frac{1}{4}y(n)+\frac{1}{8}y(n-1)+x(n)$$



2、对差分方程两端作z变换可得：

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)$$，得：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z}{(z-0.5)(z+0.25)}$$

故$H(z)$有一阶极点$z=0.5$和一阶极点$z=-0.25$；一阶零点$z=0$和一阶零点$z=\infty$。

零极点图

3、根据极点的位置，收敛域分为$|z|>0.5$，$0.25<|z|<0.5$和$|z|<0.25$

$$H(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z+0.25)}=\frac{4}{3}[\frac{z}{z-0.5}+\frac{-z}{z+0.25}]$$

当$|z|>0.5$时，系统因果稳定

$$h(n)=\frac{4}{3}[(0.5)^n-(-0.25)^n]u(n)$$

当$0.25<|z|<0.5$时，系统非因果不稳定

$$h(n)=\frac{4}{3}[-(0.5)^{n}u(-n-1)-(-0.25)^{n}u(n)]$$

$|z|<0.25$时，系统反因果不稳定

$$h(n)=\frac{4}{3}[-(0.5)^{n}+(-0.25)^{n}]u(-n-1)$$

4、

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega}-0.5)(e^{j\omega}+0.25)}$$

$$= \frac{e^{j\omega}}{e^{j2\omega}-0.25e^{j\omega}+0.125}$$

5、

$$H(e^{j\frac{\pi}{4}})=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{2}}-0.25e^{j\frac{\pi}{4}}+0.125}=\frac{1}{\sqrt{\frac{73}{64}-\frac{7\sqrt{2}}{32}}}e^{j(-\frac{3\pi}{4}+arctg\frac{8-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1})}$$

故系统对激励$x_1(n)=[\cos(\frac{\pi}{4}n)]u(n)$的稳态响应为

$$y_{ss1}(n)=\frac{1}{\sqrt{\frac{73}{64}-\frac{7\sqrt{2}}{32}}}[\cos(\frac{\pi n}{4}-\frac{3\pi}{4}+arctg\frac{8-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1})]$$。