Mathestützkurs für MB Übung: Vektorrechnung - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2^2+2^2+1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6b \\ 12a \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ 3 \\ 5a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6b \\ -5a \\ 5a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6b-2a-6b \\ 12a-3-5a \\ 15-5a+5a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ 7a-3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \sqrt{4^2+5^2\cdot 3+3^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{d(x)} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4\sqrt{x} \\ 4x-3 \\ -4\sqrt{2x} \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \sqrt{(4\sqrt{x})^2+(4x-3)^2+(-4\sqrt{2x})^2} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \sqrt{16x+16x^2-24x+9+32x}$$
$$= \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \sqrt{16x^2+24x+9} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \sqrt{(4x+3)^2} = \begin{pmatrix} 12x^2+9x \\ 16x+12 \\ 8x^2+6x \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/10 \\ 0 \\ 6/10 \end{pmatrix}; |\vec{e}| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = 1$$

$$\vec{f} = \sqrt{a^2+6a+9} \cdot \begin{pmatrix} a+3 \\ a-3 \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix} = \sqrt{(a+3)^2} \cdot \begin{pmatrix} a+3 \\ a-3 \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+3)^2 \\ a^2-9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 6-2 \\ 2-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+4 \\ -2+6 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 12-15 \\ 12-6 \\ 5.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3-6-3) = -12$$

$$i = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -12$$

Aufgabe 2:

a) $|\vec{a}| = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = \sqrt{25a^2}$, mit $|\vec{v}| = 10$ folgt:

$\sqrt{25a^2} = 10 \rightarrow 5 \cdot |a| = 10 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow$ nicht eindeutig

b) $\cos(\alpha_1) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \rightarrow a_1 = 0$

$\cos(\alpha_2) = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = a_2 \rightarrow a_2 = \sqrt{3}$

$\cos(\alpha_3) = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 = a_3 \rightarrow a_3 = 1$

folglich: $\underline{\underline{\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Probe: $|\vec{a}| = \sqrt{0 + 3 + 1} = 2$

Aufgabe 3:

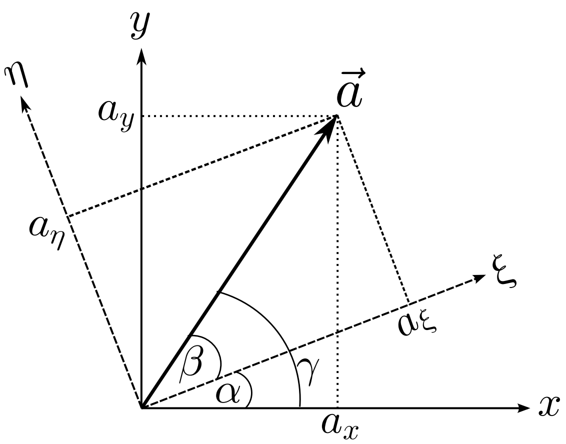
$|\vec{a}| = |\vec{a'}| : |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = |\vec{a'}|$

$\cos(\gamma) = \frac{3}{5} \rightarrow \gamma = \arccos(\frac{3}{5}) = 53,13°$

$\beta = \gamma - \alpha = 53,13° - 23,13° = 30°$

$\cos(\beta) = \frac{a_\xi}{|\vec{a}|} \rightarrow a_\xi = \cos(30°) \cdot 5 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$|\vec{a'}| = \sqrt{a_xi^2 + a_eta^2} \rightarrow a_eta = \sqrt{|\vec{a'}|^2 - a_\xi^2} = \frac{5}{2}$



Damit:

$\underline{\underline{\vec{a'} = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Aufgabe 4:

a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overline{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Entweder man sieht mit etwas Logik, dass es sich bei dem Schnittpunkt um C handeln muss oder man rechnet ihn wie folgt aus:
Aufstellen eines LGS und lösen:

$$\begin{aligned} 1+6s &= -2+9t \quad &(1) \\ -1+9s &= 5+3t \quad &(2) \\ 7-2s &= 8-3t \quad &(3) \end{aligned}$$

Aus (2) + (3) $\rightarrow 6+7s=13 \rightarrow s=1$

Einsetzen in die Gleichung der Geraden $\overline{AC}$ liefer: $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ und das ist der Punkt C.

c) Man kann die Aufgabe über eine geometrische Konstruktion lösen, oder in einer Formelsammlung nachschlagen, um zu sehen, dass der Abstand eines Punktes zu einer Geraden wie folgt berechnet werden kann:

Abstand $d = \frac{|\text{Richtungsvektor der Geraden} \times (\text{Punkt} - \text{Startpunkt der Geraden})|}{|\text{Richtungsvektor der Geraden}|}$

Damit:

$$d = \frac{|\vec{g} \times (\vec{p}-\vec{a})|}{|\vec{g}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right]\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{46}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -30 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{46}} = \frac{\sqrt{920}}{\sqrt{46}} \approx \underline{\underline{4.47}}$$

Aufgabe 5:

a)

$$\begin{aligned} 1+2r &= 3-2s \quad &(1) \\ -2-3r &= -3+5s \quad &(2) \\ 1+r &= 4+s \quad &(3) \end{aligned}$$

Aus $(1)+2\cdot(3) \rightarrow 3+4r=11 \rightarrow r=2$

Einsetzen in G_1 ergibt $\overrightarrow{S_{1,2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Kontrolle: mit $s=-1$ lässt sich $\overrightarrow{S_{1,2}}$ auch mit G_2 erreichen.

b)

$$\begin{aligned} 3-2s &= 2+4t \quad &(1) \\ -3+5s &= 0-10t \quad &(2) \\ 4+s &= 1-2t \quad &(3) \end{aligned}$$

Aus $(1)+2\cdot(3) \rightarrow 11=4$

Das stellt einen Widerspruch (!) dar und bedeutet, dass es keinen Schnittpunkt von G_2 und G_3 gibt.
Die Geraden liegen folglich also parallel oder windschief zueinander.

Man sieht leicht, dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet, dass die Geraden parallel sind, da die Richtungsvektoren Linearkombination des anderen Richtungsvektors sind.

c)

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 2 + 4t \qquad (1) \\ -2 - 3r &= 0 - 10t \quad (2) \\ 1 + r &= 1 - 2t \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus $3 \cdot (1) + 2 \cdot (3) \rightarrow 3 + 4r = 4 \rightarrow r\frac{1}{4}$

Einsetzen in G_1 ergibt: $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -11/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

Kontrolle: $\vec{S}$ lässt sich nicht mit G_3 erreichen. Das heißt die Geraden sind Windschief zueinander.

Aufgabe 6:

a) Richtung von $\vec{F}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$

normierter Richtungsvektor : $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{a\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{F} = \vec{a} \cdot F = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot F$

b) Verbindungsvektor $\vec{r}$: $\vec{r} = \vec{r_0} - \vec{r_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Momentenwirkung über Kreuzprodukt: $\vec{M}^{(A)} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} aF$