Mathestützkurs für MB
Übung: komplexe Zahlen - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

a) $|z_a| = r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\quad \arg(z_a) = \varphi = -0,3218 \widehat{=} 5.9614\,(\approx 341,57°)$

b) $|z_b| = r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad \arg(z_b) = \varphi = 0,785\,(= 45°)$

c) $z_c = (3-i) - 2(1+i) = (3-2)(-i-2i) = 1-3i$

d) $z_d = \frac{(3-i)^2+(1-i)}{1-3i} = \frac{\left(9-6i+i^2\right)+(1-i)}{1-3i} = \frac{(8-6i)+(1-i)}{1-3i} = \frac{9-7i}{1-3i}\frac{1+3i}{1+3i} = \ldots = 3+2i$

Division in der Eulerdarstellung einfacher durchführbar. Dazu Betrag und Winkel von Zähler und Nenner berechnen!

Zähler: $r = \sqrt{9^2+(-7)^2} = \sqrt{130}$ $\quad \varphi = \arctan\frac{-7}{9} = -0,661 \Rightarrow \sqrt{130}\cdot e^{-0,661i}$

Nenner: $r = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad \varphi = \arctan\frac{-3}{1} = -1,249 \Rightarrow \sqrt{10}\cdot e^{-1,249i}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{130}\cdot e^{-0,661\cdot i}}{\sqrt{10}\cdot e^{-1,249\cdot i}} = 3,606\cdot e^{(-0,661-(-1,249))i} = 3,606\cdot e^{0,588\cdot i}$

Aufgabe 2:

a) $x = 1\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -0,707 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = 1\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0,707 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z_a = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

b) $x = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -1 y = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -1 \Rightarrow z_b = -1-i$

c) $z_c = e^{-\frac{3}{4}\pi i}\left(-\sqrt{2}\cdot e^{\frac{5}{4}\pi i}\right) = -\sqrt{2}\cdot e^{\left(-\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi\right)i} = -\sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} = -\sqrt{2}\cdot i$

d) $z_d = \frac{2e^{\pi i}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}} = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}}{e^{\frac{5}{4}\pi i}} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} = \sqrt{2}\cdot i$

Aufgabe 3:

$n = 3; r = 8; \varphi = \frac{5}{6}\pi$

$z_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \frac{5}{6}\pi}{3} + 0 \cdot \frac{2\pi i}{3}\right) = 2 \cdot \exp\left(\frac{5}{18}\pi i\right)$

$z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \frac{5}{6}\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi i}{3}\right) = 2 \cdot \exp\left(\frac{17}{18}\pi i\right)$

$z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \frac{5}{6}\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi i}{3}\right) = 2 \cdot \exp\left(\frac{29}{18}\pi i\right)$

Zum Zeichnen sollte man sich die Winkel in Grad umrechnen:

$z : j = \frac{5}{6}\pi \widehat{=} 150^\circ$

$z_0 : j = \frac{5}{18}\pi \widehat{=} 50^\circ$

$z_1 : j = \frac{17}{18}\pi \widehat{=} 170^\circ$

$z_2 : j = \frac{29}{18}\pi \widehat{=} 290^\circ$