# Mathestützkurs für MB Übung: Lineare Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachschaft Maschinenbau**
**Wintersemester 2021/2022**

**Aufgabe 1:**

Mit (1) bzw. (2) sind die jeweils die 1. bzw. 2. Zeile des LGS gemeint.

a) $2 \cdot (1) - (2) \Rightarrow 3x_2 = -10 \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{3}$
$x_2$ in (2)einsetzen ergibt: $4x_1 + \left(-\frac{10}{3}\right) = 10 \Rightarrow x_1 = \frac{10}{3}$

b) $(1) + 10 \cdot (2) \Rightarrow -19x = -\frac{19}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
$x$ in (1) einsetzten ergibt: $6 \cdot \frac{1}{3} - 10y = -6 \Rightarrow y = \frac{4}{5}$

c)

| | $r$ | $s$ | $t$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 2 | -3 | 5 | 7/2 | $(1) - 4 \cdot (2)$ |
| (2) | 1/2 | 2 | -1 | 5/2 | $3 \cdot (1) - 2 \cdot (3)$ |
| (3) | 3 | 1 | -10 | 2 | |
| (1) | 2 | -3 | 5 | 7/2 | (2)-(3) |
| (2) | 0 | -11 | 9 | -13/2 | |
| (3) | 0 | -11 | 35 | 13/2 | |
| (1) | 2 | -3 | 5 | 7/2 | $\Rightarrow -26t = -13 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ |
| (2) | 0 | -11 | 9 | -13/2 | $t$ in (2): $-11s + 9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{13}{2} \Rightarrow s = 1$ |
| (3) | 0 | 0 | -26 | -13 | $t$ und $s$ in (1): $2r - 3 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow r = 2$ |

d)

| | $a$ | $b$ | $c$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 2 | 1 | 1 | 1 | $2 \cdot (1) - (2)$ |
| (2) | 4 | 1 | 2 | 0 | $(1) - (3)$ |
| (3) | 2 | 0 | 1 | -1 | |
| (1) | 2 | 1 | 1 | 1 | $(2) - (3)$ |
| (2) | 0 | 1 | 0 | 2 | |
| (3) | 0 | 1 | 0 | 2 | |
| (1) | 2 | 1 | 1 | 1 | |
| (2) | 0 | 1 | 0 | 2 | |
| (3) | 0 | 0 | 0 | 0 | |

$\Rightarrow 0c = 0 \Rightarrow c = t$, mit $t$ als freien Parameter. $c$ in (2) liefert: $b = 2$

$c$ und $b$ in (1): $2a + 1 \cdot 2 + 1 \cdot t = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$.

Dies kann man als Gerade in Vektordarstellung wiedergeben: $\vec{g} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

**Aufgabe 2:**

| | $x$ | $y$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | 2 | 1 | 1 |
| (2) | 1 | 1 | 2 | 1 |
| (3) | 2 | 3 | 3 | $a$ |
| (1) | 1 | 2 | 1 | 1 |
| (2) | 0 | 1 | -1 | 0 |
| (3) | 0 | 1 | -1 | $2 - a$ |

$(1) - (2)$

$2 \cdot (1) - (3)$

Für $a \neq 2$ widersprüchliche Aussage! Also keine Lösung!

Für $a = 2$: $\left| \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right|$

Wähle $z = t \Rightarrow y = t \Rightarrow x = 1 - 3t$

Lösungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also unendlich viele Lösungen.

Es gibt kein $a$ für welches das LGS genau eine Lösung besitzt.

---

**Aufgabe 3:**

Einsetzen

$$1: -\frac{1}{2}S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 = 0 \to S_1 = \sqrt{3}S_2$$
$$2: -\frac{\sqrt{3}}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 - F = 0$$

Daraus $S_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$ und $S_2 = -\frac{1}{2}F$

$$3: N_1 + \frac{1}{2}S_1 = 0 \to N_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}F$$
$$4: H_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 - m_1 g = 0 \to H_1 = \frac{3}{4}F + m_1 g$$
$$5: -N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 = 0 \to N_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}F$$
$$6: H_2 + \frac{1}{2}S_2 - m_2 g = 0 \to H_2 = +\frac{1}{4}F + m_2 g$$

---

**Aufgabe 4:**

a) Man kann direkt ablesen, dass die Gleichung für $x = 2$ oder $x = -4$ erfüllt ist! b)

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 1$$

c) $a^2 - 3a - 4 = 0$

$$a_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-4)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow a_1 = 4; a_2 = -1$$

d) $5(b+1) = b^2 + 11 \Rightarrow b^2 - 5b + 6 = 0$

$$b_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow b_1 = 3; b_2 = 2$$

e)

$$2(4 + \sqrt{c}) = 8 + c$$
$$8 + 2\sqrt{c} = 8 + c$$
$$2\sqrt{c} = c$$
$$4c = c^2$$
$$0 = c(c-4) \Rightarrow c_1 = 0; c_2 = 4$$

---

**Aufgabe 5:**

$\left(cl^2 + ml^2\lambda^2\right)^2 \left(\frac{5}{32}ml^2\lambda^2 + \frac{3}{16}l^2 c\right) - \frac{c^2}{8}l^4 \left(cl^2 + ml^2\lambda^2\right) = 0 \mid: l^4$ und Quadrat auflösen

$\left(c^2 + 2cm\lambda^2 + m^2\lambda^4\right) \left(\frac{5}{32}ml^2\lambda^2 + \frac{3}{16}l^2 c\right) - \frac{c^2}{8} \left(cl^2 + ml^2\lambda^2\right) = 0 \mid: l^2$

$\frac{5}{32}c^2m\lambda^2 + \frac{5}{16}cm^2\lambda^4 + \frac{5}{32}m^3\lambda^6 + \frac{3}{16}c^3 + \frac{3}{8}c^2m\lambda^2 + \frac{3}{16}cm^2\lambda^4 - \frac{1}{8}c^3 - \frac{1}{8}c^2m\lambda^2 = 0$

$\frac{5}{32}m^3\lambda^6 + \frac{1}{2}cm^2\lambda^4 + \frac{13}{32}c^2m\lambda^2 + \frac{1}{16}c^3 = 0 \mid : m^3$

$\lambda^6 + \frac{16}{5}\frac{c}{m}\lambda^4 + \frac{13}{5}\frac{c^2}{m^2}\lambda^2 + \frac{2}{5}\frac{c^3}{m^3} = 0$, entspricht $u^3 + \frac{16}{5}\frac{c}{m}u^2 + \frac{13}{5}\frac{c^2}{m^2}u + \frac{2}{5}\frac{c^3}{m^3} = 0$

Erste Lösung raten: $u_1 = \lambda_1^2 = -\frac{c}{m}$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(\lambda^6 + \frac{16}{5}\left(\frac{c}{m}\right)\lambda^4 + \frac{13}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2\lambda^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^3\right) \div \left(\lambda^2 + \left(\frac{c}{m}\right)\right) = \lambda^4 + \frac{11}{5}\left(\frac{c}{m}\right)\lambda^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2 \\
\underline{-\lambda^6 - \left(\frac{c}{m}\right)\lambda^4} \\
\quad \frac{11}{5}\left(\frac{c}{m}\right)\lambda^4 + \frac{13}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2\lambda^2 \\
\quad \underline{-\frac{11}{5}\left(\frac{c}{m}\right)\lambda^4 - \frac{11}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2\lambda^2} \\
\qquad \frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2\lambda^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^3 \\
\qquad \underline{-\frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^2\lambda^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{c}{m}\right)^3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \left(\lambda^6 + \frac{16}{5}\frac{c}{m}\lambda^4 + \frac{13}{5}\frac{c^2}{m^2}\lambda^2 + \frac{2}{5}\frac{c^3}{m^3}\right) : \left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\right) = \lambda^4 + \frac{11}{5}\frac{c}{m}\lambda^2 + \frac{2}{5}\frac{c^2}{m^2}$$

Pq-Formel:

$\lambda_{2/3}^2 = -\frac{11}{10}\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{121}{100}\frac{c^2}{m^2} - \frac{40}{100}\frac{c^2}{m^2}}$

$u_2 = \lambda_2^2 = -\frac{1}{5}\frac{c}{m}$ und $u_3 = \lambda_3^2 = -2\frac{c}{m}$