Mathestützkurs für MB
Übung: Vektorrechnung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Vektor:	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$
Einheitsvektor:	$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Betrag / euklidische Norm: (Länge eines Vektors)	$\lvert\vec{a}\rvert = \lVert\vec{a}\rVert = \lVert\vec{a}\rVert_2 = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$
Normierung:	$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}, \lvert\vec{w}\rvert = 1$
Skalarprodukt:	$\vec{a} \cdot \vec{b} = < \vec{a}, \vec{b} > = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = c \in \mathbb{R}$
Kreuzprodukt:	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{c} \in \mathbb{R}^3$
Geradengleichung:	$G : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ durch zwei Punkte P und Q: $G : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p})$
Schnittpunkt zweier Geraden:	$G_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1$ $G_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$ $\vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$
Abstand Punkt-Gerade:	$P : \vec{p}$ $G : \vec{x} = \vec{a}_1 + s \cdot \vec{b}_1$ $d = \frac{\lvert\vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a})\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert}$
Raumwinkel: Winkel zwischen Vektoren:	$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert} \quad \cos\alpha_2 = \frac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert} \quad \cos\alpha_3 = \frac{a_3}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\lvert\vec{v_1}\rvert \cdot \lvert\vec{v_2}\rvert}$

Aufgabe 1:

Berechne:

$$\vec{a} = (3\vec{e_1} + 7\vec{e_2} - 2\vec{e_3}) \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2b \\ 4a \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ 3 \\ 5a \end{pmatrix} - 6b\,\vec{e_1} + 5a(\vec{e_3} - \vec{e_2})$$

$$\vec{c} = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}(x) = \begin{pmatrix} 3x \\ 4 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot |4\sqrt{x}\,\vec{e_1} + 4x\,\vec{e_2} - 4\sqrt{2x}\,\vec{e_3} - 3\vec{e_2}|$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{, und } |\vec{e}| = ?$$

$$\vec{f} = \left| \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{6a} \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \begin{pmatrix} a+3 \\ a-3 \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix},\ a \neq -3$$

$$\vec{g} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimme a mit: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3a \\ -4a \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = 10$. Warum ist a nicht eindeutig?

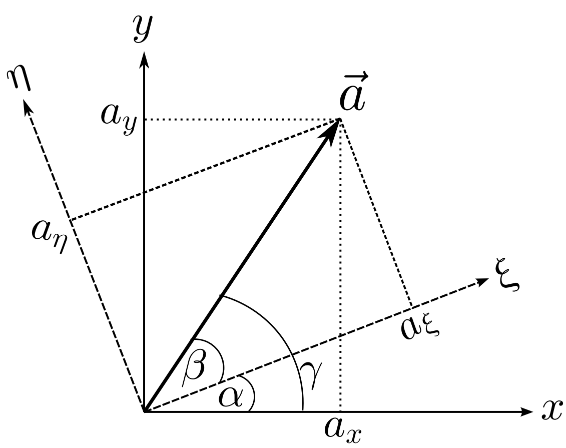
b) Bestimme den Vektor $\vec{a}$ mit den Raumwinkeln:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2$

Aufgabe 3:

Gleiche Vektoren haben in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Darstellungen. Oft ist es daher notwendig oder vorteilhaft Vektoren von einem in das andere Koordinatensystem umzurechnen.

Rechne den Vektor $\vec{a}$ des x, y -Koordinatensystems in den Vektor $\vec{a'}$ des um $\alpha = 23,13°$ gedrehten $\xi\,, \eta$ - Koordinatensystems um. (gelesen xi, eta)



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{gesucht} : \vec{a'} = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwende einen Taschenrechner.

Aufgabe 4:

Es sind die Punkte A, B, C und P gegeben.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} , \vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} , \vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} , \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} ,$$

a) Berechne die Geraden durch AB, AC sowie BC.

b) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden AC und BC.

c) Ermittle den Abstand des Punktes P von der Geraden AB

Aufgabe 5:

Man bestimme die Schnittmenge von jeweils zwei der drei Geraden, sowie die räumliche Lage zueinander:

$$G_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

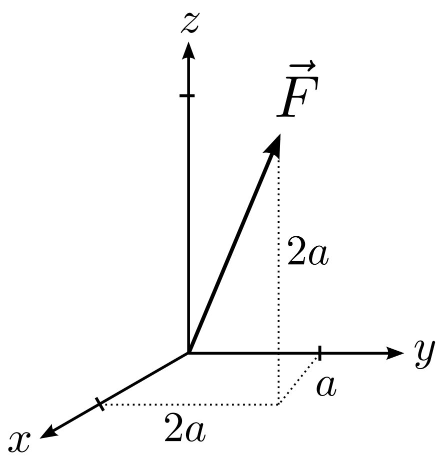
$$G_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) $G_1 \cap G_2$

b) $G_2 \cap G_3$

c) $G_1 \cap G_3$

Aufgabe 6:



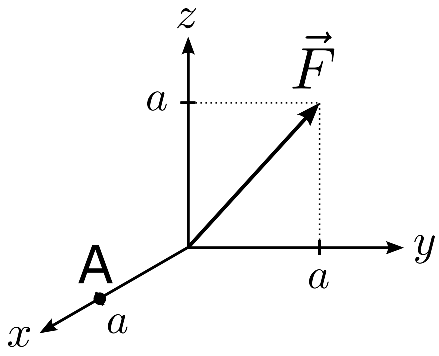
a) Stelle die Kraft $\vec{F}$ in Vektorschreibweise in folgender Form dar: $\vec{F} = \vec{a}\,F$, wobei $\vec{a}$ der normierte Richtungsvektor der Kraft (Richtung von $\vec{F}$ mit Länge 1) und F der Betrag der Kraft ist.

Hinweis: Für einen Vektor $\vec{v}$ ist $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ der normierte Vektor mit gleicher Richtung wie $\vec{v}$ und Einheitslänge 1 ($|\vec{w}| = 1$).

b) Die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F$ greift im Ursprung $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$ an.

Berechne die Momentenwirkung auf den Punkt A $\begin{pmatrix} a, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ mithilfe des Kreuzproduktes.

Hinweis: $\vec{M}^{(A)} = \vec{r} \times \vec{F}$, wobei $\vec{r}$ ein beliebiger Verbindungsvektor vom Bezugspunkt A zum Kraftangriffspunkt ist, sofern ein Rechtssystem verwendet wird.



Kontrolllösungen:

Aufgabe 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2a \\ 7a-3 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d(x)} = \begin{pmatrix} 12x^2+9x \\ 16x+12 \\ 8x^2+6x \end{pmatrix}$,

$|\vec{e}| = 1$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} (a+3)^2 \\ a^2-9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $h = -12$, $i = -12$

Aufgabe 2: a) $a = \pm 2$, b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: $\vec{a'} = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ c) $d = \frac{\sqrt{920}}{\sqrt{46}} \approx 4.47$

Aufgabe 5: a) $\overrightarrow{S_{1,2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $G_2 \cap G_3 = \emptyset$ $\quad$ c) $G_1 \cap G_3 = \emptyset$

Aufgabe 6: a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot F$ $\quad$ b) $\vec{M^{(A)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} aF$