

Mathestützkurs für MB

Übung: komplexe Zahlen

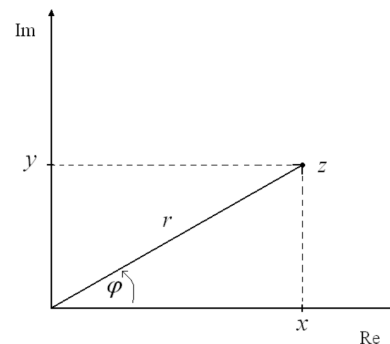


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

i ist die Imaginäre Einheit. Es gilt $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

Kartesische Darstellung:	$z = x + yi$
Polare Darstellung:	$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
Eulersche Darstellung:	$z = r \cdot e^{i\varphi}$



Die Komplexe Zahlenebene mit:

Realteil	x
Imaginärteil	y
Betrag	r
Argument	$\varphi \in (-\pi, \pi]$

Umformung:

$x = r \cos \varphi$	$r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \sin \varphi$	$\tan \varphi = \frac{y}{x}$

Konjugierte komplexe Zahl \bar{z} :

$z = x + iy$	\Leftrightarrow	$\bar{z} = x - iy$
$z = re^{i\varphi}$	\Leftrightarrow	$\bar{z} = re^{-i\varphi}$
$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$		$\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$

Wurzeln komplexer Zahlen:

Die Lösungen der Gleichung $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ sind die n komplexen Zahlen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \exp\left(\frac{i\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi i}{n}\right) \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Aufgabe 1:

Bestimme die Beträge und Winkel! Allgemein gilt: Um bei Winkeln sicher zu gehen, ist es hilfreich die Zahlen in der komplexen Zahlenebene zu zeichnen!

a) $z_a = 3 - i$

b) $z_b = 1 + i$

Berechne z_c und z_d in beliebiger Darstellung.

c) $z_c = z_a - 2z_b$

d) $z_d = \frac{z_a^2 + \bar{z}_b}{z_c}$

Aufgabe 2:

Stelle z_a und z_b in Kartesischer Form dar. Bestimme dazu Real- und Imaginärteil.

a) $z_a = e^{i\frac{3}{4}\pi}$

b) $z_b = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$

Berechne z_c und z_d .

c) $z_c = \bar{z}_a \cdot (-z_b)$

d) $z_d = \frac{2 \cdot e^{\pi i} \cdot z_a}{z_b}$

Aufgabe 3:

Bestimme die 3 Wurzeln der Gleichung und stelle die Ausgangsgleichung und die Wurzeln in der komplexen Zahlenebene dar.

$$z^3 = 8 \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

Hinweis: Zeichne z^3 und die 3 Wurzeln z_0, z_1, z_2 in die komplexe Zahlenebene.

Kontrolllösungen

Aufgabe 1: a) $r = \sqrt{10}$, $\varphi = -0.3218$, b) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -0.785$, c) $z_c = 1 - 3i$, d) $z_d = 3 + 2i = 3.606 \cdot e^{0.588i}$

Aufgabe 2: a) $z_a = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, b) $z_b = -1 - i$, c) $-\sqrt{2}i$, d) $\sqrt{2}i$

Aufgabe 3: $z_0 = 2 \cdot e^{\frac{5}{18}\pi i}$, $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{17}{18}\pi i}$, $z_2 = 2 \cdot e^{\frac{29}{18}\pi i}$