Mathestützkurs für MB Übung: Matrizenrechnung - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

a) $D = A \cdot C \widehat{=} (3 \times 4) \cdot (4 \times 4) \Rightarrow D$ ist eine(3×4) Matrix!

Multiplikation: $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 34 & 12 & 16 \\ 0 & 40 & 8 & 24 \\ 5 & 25 & 18 & 4 \end{pmatrix} = D$

Schema: (oben links ist A, unten rechts ist C, Ergebnis D ist oben rechts)

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 34 & 12 & 16 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 40 & 8 & 24 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 5 & 25 & 18 & 4 \\ \hline & & & & 0 & 5 & 1 & 3 \\ & & & & 1 & 7 & 4 & 2 \\ & & & & -1 & 3 & -2 & 4 \\ & & & & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

b) $E = C \cdot B \widehat{=} (4 \times 4) \cdot (4 \times 3) \Rightarrow E$ ist eine (4×3) Matrix!

Multiplikation: $C \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 30 & 27 & 11 \\ -2 & 1 & -7 \\ 16 & 13 & 9 \end{pmatrix} = E$

Schema:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 5 & 1 & 3 & 14 & 14 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 30 & 27 & 11 \\ -1 & 3 & -2 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 16 & 13 & 9 \\ \hline & & & & 0 & 1 & 3 \\ & & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 4 & 5 & 2 \\ & & & & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

c) $F = A \cdot B^T \widehat{=} (3 \times 4) \cdot (3 \times 4) \Rightarrow$ nicht multiplizierbar! (Dimensionen nicht für Matrizenmultiplikation nicht überein.)

Aufgabe 2:

Matrix A:

(1)	-1	2	5	0	
(2)	2	0	-2	4	$-(2)+2\cdot(3)$
(3)	1	-3	-7	-1	$(1)+(3)$
(4)	3	1	-1	7	$3\cdot(3)-(4)$

(1)	-1	2	5	0	
(2)	0	-6	-12	-6	
(3)	0	-1	-2	-1	$(2)-6\cdot(3)$
(4)	0	-10	-20	-10	$10\cdot(3)-(4)$

(1)	-1	2	5	0	
(2)	0	-6	-12	-6	
(3)	0	0	0	0	$\Rightarrow$ Rang(A)=2
(4)	0	0	0	0	

Matrix B:

(1)	1	-2	2	
(2)	1	0	1	$(1)-(2)$
(3)	-1	1	-3	$(1)+(3)$

(1)	1	-2	2	
(2)	0	-2	1	
(3)	0	-1	-1	$(2)-2\cdot(3)$

(1)	1	-2	2	
(2)	0	-2	1	$\Rightarrow$ Rang(B)=3
(3)	0	0	3	

Matrix C:

(1)	1	-2	-2	
(2)	1	1	a	$(1)-(2)$
(3)	2	$a-1$	-2	$2\cdot(1)+(3)$

(1)	1	-2	-2	
(2)	0	-3	$-2-a$	
(3)	0	$-a-3$	-2	$(-a-3)\cdot(2)+3\cdot(3)$

(1)	1	-2	-2
(2)	0	-3	$-2-a$
(3)	0	0	a^2-5a

Analyse des letzten Eintrages$a^2+5a=a(a+5)=0$:
$\Rightarrow$ für $\{a=0, a=-5\}$: Rang $(C)=2$
$\Rightarrow$ für $a \neq \{0,-5\}$: Rang$(C)=3$

Aufgabe 3:

$$\det A = (1\cdot(-2)\cdot(-1)) + (1\cdot 2\cdot 3) + (2\cdot 0\cdot(-1)) - (3\cdot(-2)\cdot(-1)) - (0\cdot 2\cdot 1) - ((-1)\cdot 2\cdot 1)$$

$$= 2+6-6+2=4$$

Per Definition hat eine $n\times n-$ Matrix mit einer Determinanten $\neq 0$ den Rang n. $\Rightarrow$ Rang$(A)=3$

$$\det B = (1\cdot 1\cdot 1) + (0\cdot(-1)\cdot 2) + (1\cdot 0\cdot 1) - (2\cdot 1\cdot 1) - (1\cdot(-1)\cdot 1) - (1\cdot 0\cdot 0)$$

$=1-2+1=0$

Hier ist die Determinante $=0$. Daher muss der Rang $<n$ sein.

Matrix in Stufenform umrechnen ergibt:

Rang$(B)=2$

$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)=4\cdot 0=0\rightarrow$ Rang$(A\cdot B)<3$

Aufgabe 4:

det $A = (2-a)^3 + 0 + 0 - (2-a) - 0 - 0 = \left(8 - 12a + 6a^2 - a^3\right) - 2 + a = -a^3 + 6a^2 - 11a + 6$

Charakteristisches Polynom $\det(A) = p(a) = -a^3 + 6a^2 - 11a + 6$

Nullstellen von $p(a)$ bestimmen:

Erste Lösung Raten $a_1 = 2$, weiter mit Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\Big(-a^3 + 6a^2 - 11a + 6\Big) \div \Big(a - 2\Big) = -a^2 + 4a - 3 \\
\underline{\;a^3 - 2a^2\;} \\
\qquad 4a^2 - 11a \\
\quad \underline{-4a^2 + 8a} \\
\qquad\qquad -3a + 6 \\
\qquad\qquad \underline{\;3a - 6\;} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Mit PQ-Formel:

$a_{2,3} = +\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm 1$

$\Rightarrow a_2 = 3, a_3 = 1.$

Damit charakteristisches Polynom $p(a) = (a-2)(a-3)(a-1)$ und $\det(A) = 0$, für $a = 1, 2, 3$.

b) det $B = (2-a)^2(-1-a) - 4 - 4 - 4(2-a) - 4(2-a) - (-1-a) = -a^3 + 3a^2 + 9a - 27$

Charakteristisches Polynom $\det(B) = p(a) = -a^3 + 3a^2 + 9a - 27$

Erste Nullstelle raten: $a_1 = 3$

Aus Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\Big(-a^3 + 3a^2 + 9a - 27\Big) \div \Big(a - 3\Big) = -a^2 + 9 \\
\underline{\;a^3 - 3a^2\;} \\
\qquad\qquad 9a - 27 \\
\qquad\quad \underline{-9a + 27} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Weiter: $-a^2 + 9 = 0 \Rightarrow a_{2,3} = \pm 3$

Damit $\det(B) = p(a) = (a-3)(a-3)(a+3)$ und $\det(B) = 0$ für $a = 3, 3, -3$.

Aufgabe 5:

Wie der Aufgabenstellung zu entnehmen ist, ist die Kamera vom Schwerpunkt des Fahrzeugs um 2 m in Längsrichtung und $0,3$ m in Querrichtung entfernt installiert. Dadurch lautet die Abbildungsmatrix der Translation folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich ist die Kamera entlang der Horizontalen um 2° von der Fahrzeuglängsachse gedreht. Daher lautet die Rotationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(2^\circ) & -\sin(2^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(2^\circ) & \cos(2^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,99 & -0,03 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix lautet somit insgesamt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,99 & -0,03 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,99 & -0,03 & 0 & 2 \\ 0,03 & 0,99 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Verkettung der Operationen werden durch Matrizenmultiplikationen realisiert!