Mathestützkurs für MB Übung: Logarithmus- und Exponentialfunktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Euler‘sche Zahl e und Exponentialfunktion $e(x)$:

$e = 2,718\ldots$ $\quad e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

$e^{xy} = (e^x)^y = (e^y)^x$ $\quad e^{-x} = (e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x}$

$(e^{ax})' = ae^{ax}$ $\quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

Natürlicher Logarithmus ln und Logarithmusfunktion $\ln(x)$:

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \ln(x^a) = a \ln x$ $\quad a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\quad \ln(1) = 0$

$(\ln|x-a|)' = \frac{1}{x-a}$ $\quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C$

Logarithmus zu beliebiger Basis:

$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$ $\quad \lg x = \log_{10} x$

$a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \log_a(1) = 0$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion:

ln ist Umkehrfunktion zu e^x:

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$ $\quad e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$

$\log_a(a^x) = a^{\log_a x} = x$ $\quad \ln e = 1$

Aufgabe 1:

Bilde $y = f(x)$:

a) $e^{(\ln y - 2\ln y)} = x$

b) $\ln\left(e^{2\ln y}\right) = x$

Aufgabe 2:

Leite folgende Funktionen ab:

a) $f(x) = e^{-x+4}$

b) $f(x) = \ln(xa)$

Aufgabe 3:

Bestimme die Lösung folgender Gleichungen:

a) $e^{3x}\left(e^{x}\right)^2 = \sqrt{\frac{e^{-8}}{e^{2x}}}$

b) $\ln\sqrt{7^{12-x}} + 11 \cdot \ln 2 = 11 \cdot \ln 16$

Aufgabe 4:

In einem gesunden Wald wurde von 1979 bis 1989 kein Holz eingeschlagen. Der Holzbestand betrug 1979 3600 FM (Festmeter) Holz und 1989 4500 FM. Ab 1991 sollen immer zum Jahresende so viele Festmeter geschlagen werden, dass der vorhandene Holzbestand nach dem Holzeinschlagen am Ende eines jeden Jahres konstant auf dem Wert von 1990 bleibt. Wie viel Holz kann ab 1991 jährlich geschlagen werden? Gehe bei Deinen Berechnungen von einem immer gesunden, konstant wachsenden Wald aus nach:

$$f(t) = f(0) \cdot e^{kt} \text{in FM.}$$

Aufgabe 5:

Die vom menschlichen Auge wahrgenommene Helligkeitsunterschied zweier Objekte kann gemäß WeberFechnerschen Gesetz berechnet werden:

$$f(x) = -2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right).$$

Dabei beschreibt J die Strahlungsenergie eines Objekts, und J_0 eine Konstante. Im Rahmen dieser Aufgabe gehen wir davon aus, J_0 habe den Wert 1000.

Zeichnen Sie den Verlauf der Funktion für $J = [0..1000]$, zuerst in einem Koordinatensystem mit linearem Verlauf der X-Achse.

Recherchieren Sie anschließend, wie eine Achse logarithmisch dargestellt werden kann, und zeichnen Sie den gleichen Verlauf in ein Koordinatensystem mit logarithmischer x-Achse. Welche Unterschiede werden erkennbar? Wofür könnte sich eine solche logarithmische Darstellung eignen?

Kontrolllösungen

Aufgabe 1: a) $y = \frac{1}{x}$, b) $y = e^{\frac{x}{2}}$

Aufgabe 2: a) $f'(x) = -e^{-x+4}$ b) $f'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$

Aufgabe 3: a) $x = -\frac{2}{3}$, b) $x = 12 - 22\,\frac{\ln 8}{\ln 7}$

Aufgabe 4: $f(t) = 3600 \cdot e^{0.0223t}$ in FM, 103.75 FM Holz dürfen jährlich geschlagen werden.

Aufgabe 5: keine Angabe.