Mathestützkurs für MB Übung: Logarithmus- und Exponentialfunktionen - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

a)

$$\begin{aligned} e^{(\ln y - 2\ln y)} &= x \\ e^{\left(\ln y - \ln y^2\right)} &= x \\ e^{\ln \frac{y}{y^2}} &= x \\ e^{\ln \frac{1}{y}} &= x \\ \frac{1}{y} &= x \\ y &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \ln\left(e^{2\ln y}\right) &= x \\ \ln\left(e^{\ln y^2}\right) &= x \\ \ln y^2 &= x \\ 2\ln y &= x \\ \ln y &= \frac{x}{2} \\ y &= e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) $f'(x) = -e^{-x+4}$

b) $f'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$

Aufgabe 3:

a)

$$e^{3x}\left(e^{x}\right)^2 = \sqrt{\frac{e^{-8}}{e^{2x}}} \Rightarrow e^{3x}e^{2x} = \sqrt{e^{-8-2x}} \Rightarrow \left(e^{5x}\right)^2 = e^{-8-2x} \Rightarrow \frac{e^{10x}}{e^{-8-2x}} = 1 \Rightarrow e^{10x-(-8-2x)} = 1$$

$$\Rightarrow e^{12x+8} = 1 \Rightarrow 12x+8 = \frac{\ln 1}{\ln e} \Rightarrow 12x+8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

b)

$$\ln\sqrt{7^{12-x}} + 11\cdot\ln 2 = 11\cdot\ln 16 \Rightarrow \ln\sqrt{7^{12-x}} = 11(\ln 16 - \ln 2) \Rightarrow \ln\sqrt{7^{12-x}} = 11\cdot\ln 8$$

$$\Rightarrow \ln\sqrt{7^{12-x}} = \ln 8^{11} \Rightarrow 7^{12-x} = 8^{22} \Rightarrow 12 - x = \frac{\ln 8^{22}}{\ln 7} \Rightarrow x = 12 - 22\frac{\ln 8}{\ln 7} \Rightarrow x \approx -11,51$$

Aufgabe 4:

Ansatz: $f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$

Randbedingungen:

$$t = 0 : 1979 \widehat{=} 3600\text{FM} \Rightarrow f(0) = 3600$$

$$t = 10 : 1989 \widehat{=} 4500\text{FM} \Rightarrow f(10) = 4500$$

Daraus ergibt sich:

$$4500 = 3600 \cdot e^{k \cdot 10}$$

$$1,25 = e^{k \cdot 10}$$

$$\ln 1,25 = 10k$$

$$\frac{\ln 1,25}{10} = k \approx 0,0223 \Rightarrow f(t) = 3600 \cdot e^{0,0223 \cdot t}$$

Was wächst von 1990 nach 1991 nach?

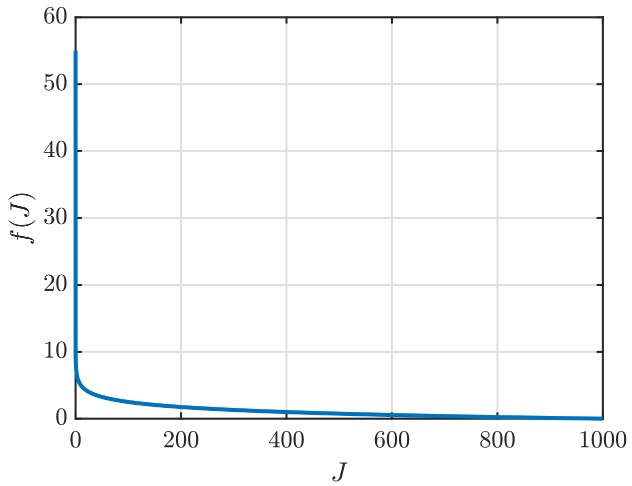
$$f(11) = 3600 \cdot e^{0,0223 \cdot 11} = 4600,82$$

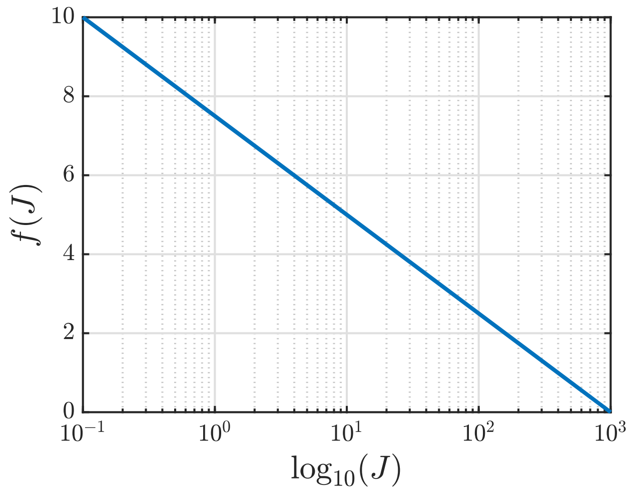
$$f(12) = 4704,57$$

$$f(12) - f(11) = \underline{\underline{103,75\,\text{FM}}}$$

Aufgabe 5:

Stellt man diese Funktion mit linearer x-Achse dar, so fällt der Bereich bis ca. $x = 10$ steil ab und verläuft ab dann ziemlich flach. Das Ergebnis dieser Funktion wird somit im Bereich $50 < x$ ziemlich schlecht ablesbar, siehe folgender Beispielplot (links):





Stellt man die x-Achse hingegen logarithmisch dar (rechts), wird der Graph besser ablesbar.

Es wird somit ersichtlich, dass (doppelt-)logarithmische Darstellungen vor allem bei Funktionen Sinn ergeben, in denen einer oder beide Wertebereiche g entweder sehr eng oder über mehrere Größenordnungen hinweg sehr weit liegen.