Mathestützkurs für MB Übung: Differentialrechnung - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

$$a'(x) = 2\cos x - 3\sin x$$

$$b'(x) = -\frac{2s}{x^3} - \frac{t}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \Rightarrow c'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^5}$$

$$d'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$$

$$e'(x) = (2x+2)\sqrt{x} + \left(x^2+2x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = (2x+2)\cos x + \left(x^2+2x\right)(-\sin x)$$

$$g'(x) = \frac{-\sin x(1+x) - \cos x \cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{\sin x}{1+x} - \frac{\cos x}{(1+x)^2}$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$i'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{2\cdot\sqrt{1+4x^2} - 2x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\cdot 8x}{\left(\sqrt{1+4x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{1+4x^2}}} \cdot \frac{2\cdot\sqrt{1+4x^2} - 8x^2\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}}{(1+4x^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+4x^2-4x^2}{1+4x^2}}} \cdot \frac{2\left(1+4x^2\right) - 8x^2}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}}$$

$$= \sqrt{1+4x^2} \cdot \frac{2+8x^2-8x^2}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}} = \frac{2}{1+4x^2}$$

$$j'(x) = \frac{-2}{\sin^2(2x)}$$

Aufgabe 2:

$$y = \cos(v) \quad v = u^5 \quad u = (x^2 - 3)$$

$$\frac{dy}{dv} = -\sin(v) \quad \frac{dv}{du} = 5u^4 \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$f'(x) = -\sin(v) \cdot 5u^4 \cdot 2x = -\sin\left(\left(x^2 - 3\right)^5\right) \cdot 5\left(x^2 - 3\right)^4 \cdot 2x$$

Aufgabe 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

b)

$\lim_{x\to-2} f(x) \to +\infty \quad (x < -2) \qquad$ „von unten“

$\lim_{x\to-2} f(x) \to -\infty \quad (x > -2) \qquad$ „von oben“

$\lim_{x\to2} f(x) \to -\infty \quad (x < 2) \qquad$ „von unten“

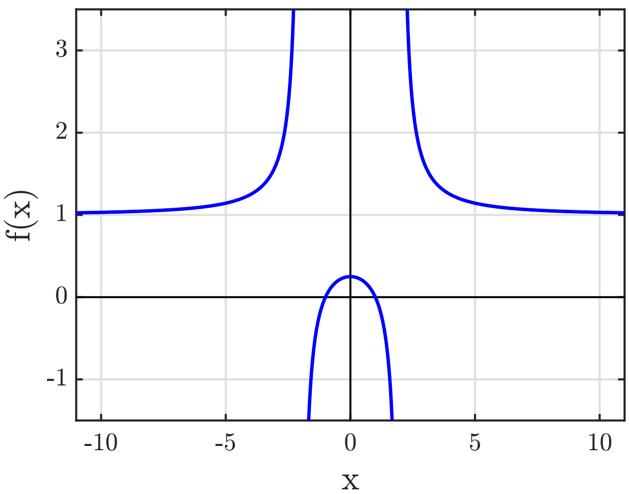
$\lim_{x\to2} f(x) \to +\infty \quad (x > 2) \qquad$ „von oben“

c) Maxima: $f'(x) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Also Maximum bei $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

d) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} \to 1 \Rightarrow$ Es existiert eine Asymptote $y = 1$

e)



Aufgabe 4:

Mit Ansatz:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Die Bedingungen sind: $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f(1) = -1$, $f''(1) = 0$.

Damit lassen sich vier Gleichungen aufstellen:

$$\left| \begin{aligned} 1 &= -a + b - c + d \\ 0 &= 3a - 2b + c \\ -1 &= a + b + c + d \\ 0 &= 6a + 2b \end{aligned} \right|$$

Lösung des Gleichungssystemes:

Die gesuchte kubische Funktion lautet: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{3}{8}}}$

Aufgabe 5:

$$\underline{v}_{30} = \begin{pmatrix} -l_2\dot{\beta}_1 \sin\beta_1 \cos\beta_2 - l_2\dot{\beta}_2 \cos\beta_1 \sin\beta_2 \\ l_2\beta_2 \cos\beta_2 \\ l_2\dot{\beta}_2 \sin\beta_1 \sin\beta_2 - l_2\dot{\beta}_1 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \end{pmatrix}$$