Mathestützkurs für MB
Übung: Matrizenrechnung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Rechnen mit Matrizen:	$A = (a_{ij})\,;B = (b_{ij})\,;(m,n) -$ Matrizen ; $i -$ Zeile, $j -$ Spalte $m \widehat{=}$ Anzahl der Zeilen; $n \widehat{=}$ Anzahl der Spalten $A^T = (a_{ji})$ transponierte Matrix $c \cdot A = c \cdot a_{ij},$ für $c \in \mathbb{R}$ $A + B = a_{ij} + b_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$ $(A+B)^T = \left(A^T + B^T\right)$
Produkt von Matrizen: Es sei $A = (a_{ij})$ eine (m,n) - Matrix und $B = (b_{ij})$ eine (n,r) - Matrix $A \cdot B = (c_{ij})$ ist dann eine $(m,r)-$ Matrix c_{iy} ist das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B ACHTUNG: Matrizenmultiplikation ist i.A: nicht kommutativ! D.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$.	
Rang einer Matrix: Der Rang einer Matrix A ist die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraumes. Bestimmung des Ranges einer Matrix: Folgende Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht: 1.) Vertauschen von Zeilen 2.) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null 3.) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile Mittels dieser elementaren Umformungen bringt man die Matrix auf Zeilenstufenform und liest ihren Rang ab. Per Definition hat eine $n \times n$-Matrix mit einer Determinante $\neq 0$ (siehe unten) den Rang n. Ist die Determinante gleich Null, muss der Rang kleiner n sein.	
Determinanten von quadratischen $n \times n$-Matrizen: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$ Befindet sich die Matrix in der Dreiecksform, so gilt: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ Es gilt: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$; $\det A^T = \det A$	

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Matrizen A, B und C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Bevor eine der folgenden Rechnungen durchgeführt wird, ist zu überlegen welche Dimensionen die Ergebnisse aufweisen!

a) Berechne die Matrizen $D = A \cdot C$ und $E = C \cdot B$
b) Berechne die Matrix $F = A \cdot B^T$

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Matrizen A, B und C.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Rang der Matrizen A und B, sowie den Rang von C in Abhängigkeit von a

---

Aufgabe 3:

Gegeben sind die Matrizen A und B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Determinanten der Matrizen A, B sowie $A \cdot B$. Welchen Rang haben die 3 Matrizen?

Aufgabe 4:

Gegeben sind die Matrizen A und B. Für welche a sind die Determinanten gleich Null?

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 0 & -1 \\ 0 & 2-a & 0 \\ -1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & -2 \\ 1 & 2-a & 2 \\ -2 & 2 & -1-a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

In diversen Fahrassistenzsystemen als auch dem autonomen Fahren werden Kamerasysteme eingesetzt. Diese erfassen das Umfeld des Fahrzeugs und geben Informationen über Objekte und deren ungefähren Abstand an das Fahrzeug. Dabei müssen die Koordinaten eines Objekts, das die Kamera erfasst, vom Koordinatensystem der Kamera in das Koordinatensystem des Fahrzeugs transformiert werden.

Hierzu stehen zwei Abbildungsmatrizen zur Verfügung:

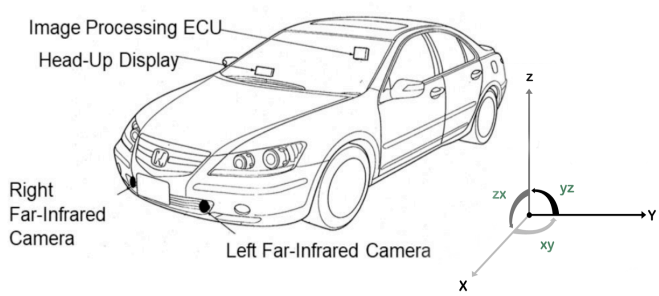
Translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die Höhenachse z:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun die linke Infrarotkamera des abgebildeten Fahrzeugs. Diese ist um 2 m in Längsrichtung und 30 cm in Querrichtung vom Schwerpunkt des Fahrzeugs entfernt. Zusätzlich ist sie entlang der Horizontalen um 2° von der Fahrzeuglängsachse gedreht.



Wie werden die Koordinaten eines erfassten Objektes entsprechend in das Koordinatensystem des Fahrzeugs transformiert? (Transformation vom Koordinatensystem der linken Kamera zum Koordinatensystem des Autos.)

Tipp:

Zur einfacheren Rechnung wurden 4×4 Abbildungsmatrizen verwendet. Ein entsprechender Koordinatenvektor lautet daher $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$.

Kontrolllösungen

Aufgabe 1: a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 34 & 12 & 16 \\ 0 & 40 & 8 & 24 \\ 5 & 25 & 18 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 30 & 27 & 11 \\ -2 & 1 & -7 \\ 16 & 13 & 9 \end{pmatrix}$, b) F nicht lösbar.

Aufgabe 2: Rang(A)=2, Rang(B)=3, für $\{a = 0, a = -5\}$: Rang $(C) = 2$, für $a \neq \{0, -5\}$: Rang$(C) = 3$

Aufgabe 3: det$(A) = 4$, Rang$(A) = 3$, det$(B) = 2$, Rang$(B) = 2$, det$(A \cdot B) = 0$, Rang$(A \cdot B) < 3$

Aufgabe 4: det$(A) = 0$, für $a = 1, 2, 3$, det$(B) = 0$ für $a = 3, 3, -3$.

Aufgabe 5: Gesamte Abbildungsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,99 & -0,03 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,99 & -0,03 & 0 & 2 \\ 0,03 & 0,99 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$