Mathestützkurs für MB Übung: Lineare Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

pq-Formel: $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Doppelbrüche: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Polynome dritten Grades: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

1. Erste Lösung raten, diese sind meistens ganzzahlige Teiler von d
2. Durch Polynomdivision quadratische Funktion aufstellen
3. Geteilt wird durch x minus die geratene Lösung

Gauß'scher Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen:

Beispiel: Das LGS $\left| \begin{aligned} a + 3b + c &= 4 \\ -a - b + 2c &= 2 \\ 4b + 2c &= -4 \end{aligned} \right|$

Lässt sich auch wie folgt darstellen und formt es in ein Dreieckssystem um. Dabei ist folgendes erlaubt:
1.) Vertauschen von Zeilen
2.) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null
3.) Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile

(1)	1	3	1	4	(2) und (3) vertauschen
(2)	-1	-1	2	2	
(3)	0	4	2	-4	
(1)	1	3	1	4	(1)+(3)
(2)	0	4	2	-4	
(3)	-1	-1	2	2	
(1)	1	3	1	4	2·(3)-(2)
(2)	0	4	2	-4	
(3)	0	2	3	6	
(1)	1	3	1	4	
(2)	0	4	2	-4	
(3)	0	0	4	16	

Dies lässt sich wieder als LGS lesen: $\left| \begin{aligned} a + 3b + c &= 4 \\ 4b + 2c &= 4 \\ 4c &= 16 \end{aligned} \right|$

Daraus folgt einfach: $c = 4$, $b = -3$, $a = 9$.

Aufgabe 1:

Bestimme die Lösungen dieser Linearen Gleichungssysteme:

a) $\left| \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned} \right|$

b) $\left| \begin{aligned} 6x - 10y &= -6 \\ y - \frac{5}{2}x &= -\frac{1}{30} \end{aligned} \right|$

c) $\left| \begin{aligned} 0 &= 2r - 3s + 5t - \frac{7}{2} \\ 0 &= \frac{1}{2}r + 2s - t - \frac{5}{2} \\ 0 &= 3r + s - 10t - 2 \end{aligned} \right|$

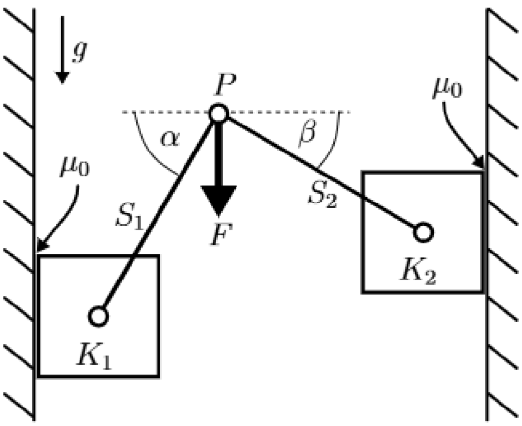
d) $\left| \begin{aligned} 2a + b + c &= 1 \\ 4a + b + 2c &= 0 \\ 2a + c &= -1 \end{aligned} \right|$

Aufgabe 2:

Für welche a hat das untenstehende Gleichungssystem keine, genau eine, mehrere Lösungen?

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 3z &= a \end{aligned}$$

Aufgabe 3:



Durch Freischneiden der Mechanik ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left| \begin{aligned} & -S_1 \cos(\alpha) + S_2 \cos(\beta) = 0 \\ & -S_1 \sin(\alpha) - S_2 \sin(\beta) - F = 0 \\ \\ & N_1 + S_1 \cos(\alpha) = 0 \\ & H_1 + S_1 \sin(\alpha) - m_1 g = 0 \\ \\ & -N_2 - S_2 \cos(\beta) = 0 \\ & H_2 + S_2 \sin(\beta) - m_2 g = 0 \end{aligned} \right|$$

Berechne die Stabkräfte S_1 und S_2, die Haftkräfte H_1 und H_2 sowie die Normalkräfte N_1 und N_2 für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\beta = \frac{\pi}{6}$.
Gegeben / bekannt: $F, m_1, m_2, g, \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 4:

Bestimme jeweils die zwei Lösungen der Gleichungen:

a) $3(x-2)(x+4)=0$

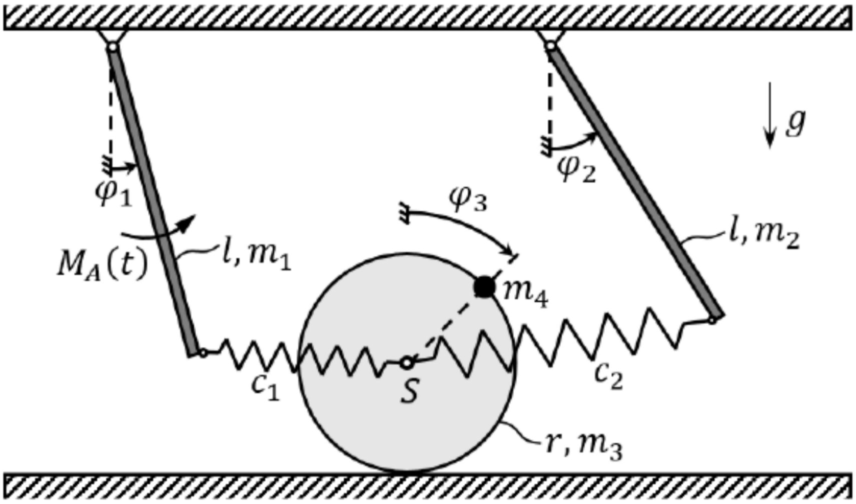
b) $x^2-3x+2=0$

c) $a^2-4=3a$

d) $5=\frac{b^2+11}{b+1}; b \neq -1$

e) $2=\frac{8+c}{4+\sqrt{c}}; c \geq 0$

Aufgabe 5:



Das Federverhalten der obenstehenden Mechanik kann durch das nachstehende Polynom beschrieben werden:

$$\left(cl^2+ml^2\lambda^2\right)^2\left(\frac{5}{32}ml^2\lambda^2+\frac{3}{16}l^2c\right)-\frac{c^2}{8}l^4\left(cl^2+ml^2\lambda^2\right)=0$$

Berechne die Eigenwerte λ_1^2, λ_2^2 und λ_3^2 durch Polynomdivision!

Die Eigenwerte haben die Form $u=\lambda_n^2=k_n\frac{c}{m}$.

Tipp: Bringe das Polynom zunächst in die Form $\lambda^6+C_1\frac{c}{m}\lambda^4+C_2\frac{c^2}{m^2}\lambda^2+C_3\frac{c^3}{m^3}=0$.

Kontrolllösungen

Aufgabe 1: a) $x_1=10/3$, $x_2=-10/3$ b) $x=1/3$, $y=4/5$, c) $r=2$, $s=1$, $t=1/2$, d) $c=t\in\mathbb{R}$, $b=2$, $a=-1/2-t/2$

Aufgabe 2: Keine Lösung für $a\neq 2$. Unendlich viele Lösungen für $a=2$. Kein a für eindeutige Lösung.

Aufgabe 3: $S_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}F$, $S_2=-\frac{1}{2}F$, $N_1=\frac{\sqrt{3}}{4}F$, $H_1=\frac{3}{4}F+m_1g$, $N_2=\frac{\sqrt{3}}{4}F$, $H_2=\frac{1}{4}F+m_1g$

Aufgabe 4: a) $x_1=2$, $x_2=-4$, b) $x_1=2, x_2=1$, c) $a_1=4, a_2=-1$, d) $b_1=3, b_2=2$, e) $c_1=0, c_2=4$

Aufgabe 5: $u_1=\lambda_1^2=-\frac{c}{m}$, $u_2=\lambda_2^2=-\frac{1}{5}\frac{c}{m}$, $u_3=\lambda_3^2=-2\frac{c}{m}$