Mathestützkurs für MB Übung: Integralrechnung - Musterlösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Aufgabe 1:

$A(x) = \int (2\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = -2\cos x - \sin x + C$

$B(x) = \int \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$

$C(x) = \int \left(\frac{a}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x$ mit $u = \frac{x}{2}, x = 2u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2},\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$

$C(u) = \int \frac{a}{4u^2+4} 2\,\mathrm{d}u = \frac{a}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{a}{2}\arctan u + C \Rightarrow C(x) = \frac{a}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$D(x) = \int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x$ mit $f' = e^x, g = x \Rightarrow D(x) = e^x \cdot x - \int (e^x \cdot 1)\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C$

$E(x) = \int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ mit $u = \cos x,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin x,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-\sin x}$

$E(u) = \int \sin x \cdot u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{-\sin x} = -\int u \cdot \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + C \Rightarrow E(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

Achtung: Wenn man $u = \sin x$ wählt, führt dies zu $E(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2} + C$.

Genauso ist es denkbar $\sin x \cos x$ durch $\frac{\sin 2x}{2}$ zuersetzen, was dann zu $E(x) = \frac{-\cos 2x}{4}$ führt.

$F(x) = \int \frac{e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$ mit $u = e^x,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \frac{\mathrm{d}u}{u}$

$F(u) = \int \frac{u}{1-u}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = -\ln|u-1| + C \Rightarrow F(x) = -\ln|1-e^x| + C$

$G(x) = \int \frac{-4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ mit Partialbruchzerlegung: $\frac{-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

mit$(x-1)(x+1)$ multiplizieren und Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow -4 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow 0 = Ax + Bx; -4 = A - B \Rightarrow A = -2; B = 2$

(alternativ mit Nullstellen einsetzen und damit A und B jeweils nacheinander eliminieren

und nach der anderen Variable umstellen, da die Nullstellen verschieden sind.)

$\Rightarrow G(x) = \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -2\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$

$H(x) = \int \frac{8x-1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ mit Partialbruchzerlegung : $\frac{8x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$

mit $(x+3)(x-2)$ multiplizieren und Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow 8x - 1 = A(x-2) + B(x+3) \Rightarrow 8x = Ax + Bx; -1 = -2A + 3B \Rightarrow A = 5; B = 3$

$\Rightarrow H(x) = \int \left(\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-2}\right) \mathrm{d}x = 5 \ln|x+3| + 3 \ln|x-2| + C$

Aufgabe 2:

a)

$F(x) = 2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$ Substitution $: x = \cos\varphi; \frac{dx}{d\varphi} = -\sin\varphi \Rightarrow dx = -\sin\varphi \cdot d\varphi$

$\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\sin^2\varphi} = \sin\varphi$

$\Rightarrow F(\varphi) = 2 \int \frac{-\sin\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = -2 \int 1 \cdot d\varphi = -2\varphi + C$

Rücksubstitution : $\varphi = \arccos(x) \Rightarrow F(x) = -2\arccos(x) + C$

Randbedingung $F(1) = 1 \Rightarrow -2\arccos(1) + C = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

$$\Rightarrow F(x) = -2\arccos(x) + 1$$

$F(x) = a \int \frac{x}{x+a} dx,$ Substitution: $x + a = u \Rightarrow x = u - a \Rightarrow dx = du$

b) $\Rightarrow F(u) = a \int \frac{u-a}{u} du = a \int \left(1 - \frac{a}{u}\right) du = a \left(\int 1du - a \int \frac{1}{u} du\right) = a(u - a\ln|u| + C)$

$\Rightarrow F(u) = au - a^2 \ln|u| + C$

Rücksubstitution : $u = x + a \Rightarrow F(x) = a(x+a) - a^2 \ln|x+a| + C$

Randbedingung $F(0) = 0 \Rightarrow a^2 - a^2 \ln|a| + C = 0 \Rightarrow C = a^2 \ln|a| - a^2$

$$\Rightarrow F(x) = a(x+a) - a^2 \ln|x+a| + a^2 \ln|a| - a^2$$

$$\Rightarrow F(x) = a \cdot x + a^2 \ln\left|\frac{a}{x+a}\right|$$

C)

$F(x) = \int_{-a}^{a} (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \left(a - \frac{1}{3}a^3\right) - \left(-a - \frac{1}{3}(-a)^3\right) = a - \frac{1}{3}a^3 + a - \frac{1}{3}a^3$

$\Rightarrow 2a - \frac{2}{3}a^3 = 0$

$a\left(2-\frac{2}{3}a^2\right)=0 \Rightarrow a_1=0$, entfällt wegen Forderung $a>0$

$2-\frac{2}{3}a^2=0 \Rightarrow 2=\frac{2}{3}a^2 \Rightarrow 3=a^2 \Rightarrow a_2=-\sqrt{3}; a_3=\sqrt{3}$

a_2 entfällt wegen $a>0$

$\Rightarrow \underline{\underline{a=\sqrt{3}}}$

Aufgabe 3:

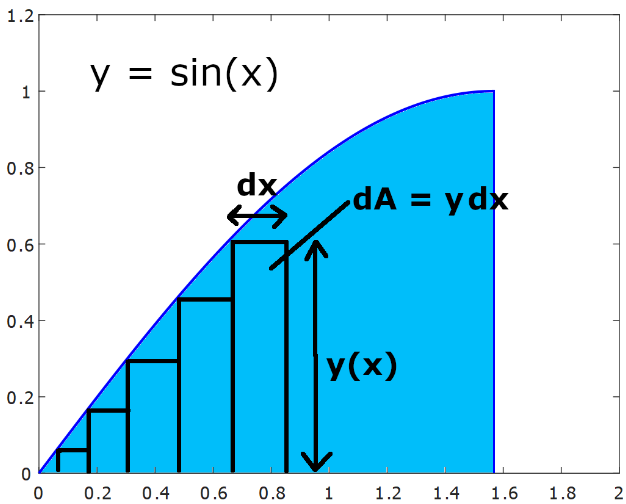
a) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = -0+1=\underline{\underline{1}}$

b)

$x_s = \frac{1}{A}\int x\mathrm{d}A$ mit $A=1$ aus a) und $\underline{\underline{\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x}}$:

$x_s = \frac{1}{1}\int x\cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cdot\cos(x)+\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{1}}$

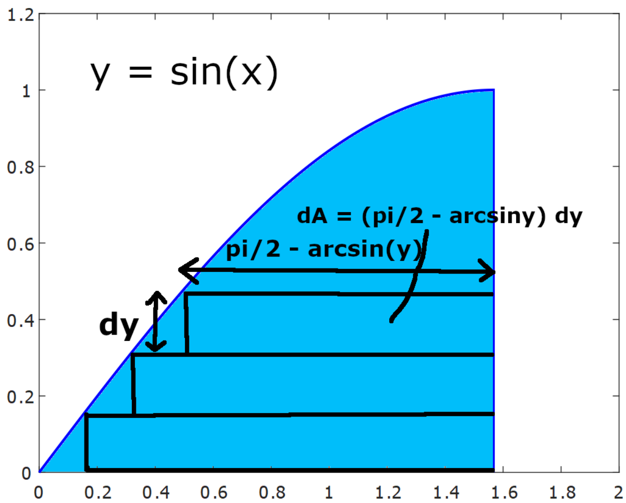
mit partieller Integration für $\int x\cdot\sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)\cdot x + \int\cos(x)\cdot 1\mathrm{d}x = -x\cdot\cos(x)+\sin(x)$



$y_s = \frac{1}{A}\int y\mathrm{d}A$ mit $A=1$ aus a) und $\underline{\underline{\mathrm{d}A = (\frac{\pi}{2}-\arcsin(y))\mathrm{d}y}}$:

$y_s = \frac{1}{1}\int_0^1 y\cdot(\frac{\pi}{2}-\arcsin(y))\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}y - \int_0^1 y\cdot\arcsin(y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}-0.3927 = \underline{\underline{0.3927}}$, wobei der Hinweis für das zweite Integral angewandt wurde.

<u>Obacht</u>: Integral von 0 bis 1 ausgewertet, da für x von $x=0$ bis $\frac{\pi}{2}$ der y-Wert von $y=0$ bis 1 geht!



c) $y_1=x^2$, $y_2=\sqrt{x}$

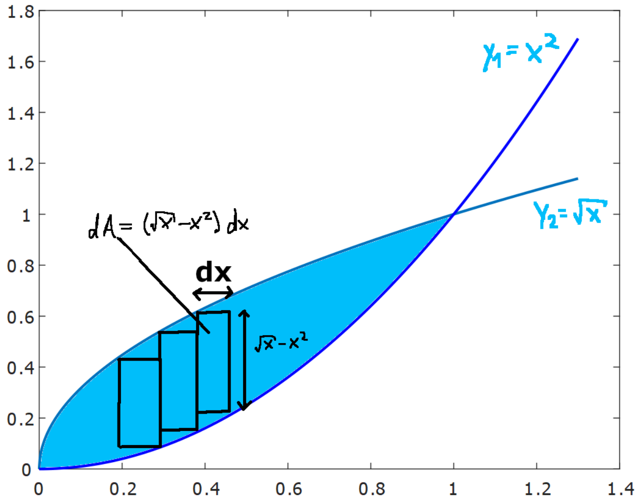
Schnittpunkte: $y_1=y_2 \rightarrow x^2=\sqrt{x} \rightarrow x^4=x \rightarrow x^4-x=0 \rightarrow x(x^2-1)=0$

Schnittpunkte bei $x_1=0$ und $x_2=1$. (Eine Zeichnung der Kurven lässt dies leicht erkennen.)

Fläche $A=\int_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)\mathrm{d}x = \int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

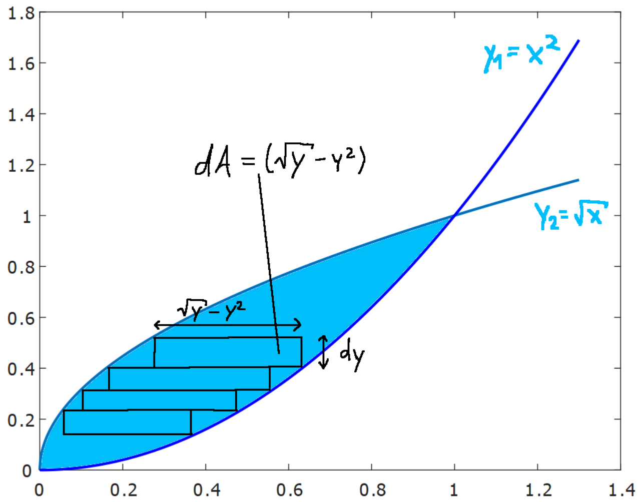
d)

Schwerpunkt der Fläche zwischen $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$:



$x_s = \frac{1}{A}\int x\mathrm{d}A$ mit $A = \frac{1}{3}$ aus c) und $\underline{\underline{\mathrm{d}A = (y_2 - y_1)\mathrm{d}x = (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x}}$:

$x_s = \frac{1}{\frac{1}{3}}\int x\cdot(y_2 - y_1)\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x\cdot(\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^3\,\mathrm{d}x = 3\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 3(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}) = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}$



$y_s = \frac{1}{A}\int y\mathrm{d}A$ mit $A = \frac{1}{3}$ aus c) und $\underline{\underline{\mathrm{d}A = (y_1^{-1}(y) - y_2^{-1}(y))\mathrm{d}y = (\sqrt{y} - y^2)\mathrm{d}y}}$:

$y_s = 3\int_0^1 y\cdot(\sqrt{y} - y^2)\mathrm{d}y = 3\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} - y^3\,\mathrm{d}y = 3\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 3(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}) = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}$

Hierbei sind die $y_1^{-1}(y)$, $y_2^{-1}(y)$ die Umkehrfunktionen der jeweiligen Funktionen.

Alternativ: mit $y_s = \frac{1}{A}\int \frac{1}{2}(y_2(x) - y_1(x))(y_2(x) + y_1(x))\mathrm{d}x$

$y_s = \frac{1}{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)(\sqrt{x} + x^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x - x^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{9}{20}$

Aufgabe 4:

$Q(x) = -\int q(x)\mathrm{d}x = -\int(-\frac{q_0}{l}x + q_0)\mathrm{d}x = \frac{q_0}{2l}x^2 - q_0x + C_1$

$M(x) = \int Q(x)\mathrm{d}x = \int(\frac{q_0}{2l}x^2 - q_0x + C_1)\mathrm{d}x = \frac{q_0}{6l}x^3 - \frac{q_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$

Randbedingungen:

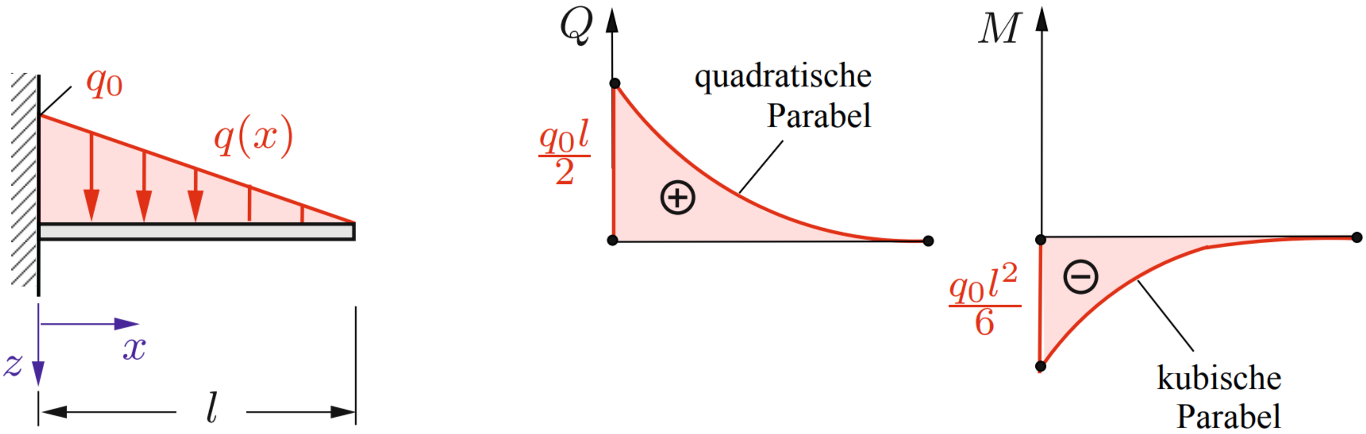
Aus $Q(l) = 0$ folgt: $0 = \frac{q_0}{2l}l^2 - q_0l + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{q_0}{2}l$

Aus $M(l) = 0$ folgt: $0 = \frac{q_0}{6l}l^3 - \frac{q_0}{2}l^2 + \frac{q_0}{2}l\cdot l + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{q_0}{6}l^2$

$Q(x) = \frac{q_0}{2l}x^2 - q_0x + \frac{q_0}{2}l$

$M(x) = \frac{q_0}{6l}x^3 - \frac{q_0}{2}x^2 + \frac{q_0}{2}lx - \frac{q_0}{6}l^2$

Verlauf der Querkraft und des Biegemomentes: Aus „Technische Mechanik 1" von *Gross, Hauger, Schröder, Wall*.

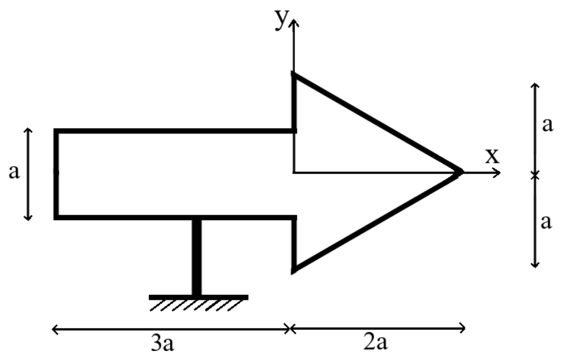


Die Krümmung des Querkraftverlaufes verläuft so wie dargestellt, da in $x = 0$ die Streckenlast $q(x = 0) \neq 0$ ist und somit in $Q(x = 0)$ kein Extremum vorliegen kann. (Voraussetzung für Extremum in $Q(x = 0)$ und damit eine andere Krümmung wäre, dass die 1. Ableitung an der Stelle gleich Null ist.)

Für den Momentenverlauf gilt die selbige Argumentation.

Aufgabe 5:

- Aufteilen der Fläche in zwei Teile: Rechteck A_R und Dreieck A_D



- Funktion zur Beschreibung der Kontur (durch jeweilige Oberseite): Rechteck: $y_R = \frac{a}{2}$, von $x = -3a$ bis $x = 0$
Dreieck: $y_D(x) = -\frac{x}{2} + a$, von $x = 0$ bis $x = 2a$ mit $y(x = 0) = a, y(x = 2a) = 0$ und allg. Ansatz für lineare Funktion: $y = mx+b$.

- Aufteilen der Kraft auf Schild: $F = F_R + F_D$

- Berechnung der Kräfte durch integrieren im gegebenen KOS:

$F_R = 2\int_{x=-3a}^{0} p(x)\mathrm{d}A = 2\int_{-3a}^{0} \left(10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}x + 25\text{ Pa}\right) \cdot \frac{a}{2}\,\mathrm{d}x$

$F_R = 2 \cdot \frac{a}{2}\left[10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\frac{x^2}{2} + 25\text{ Pa} \cdot x\right]_{-3a}^{0} = a\left(-10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\frac{9a^2}{2} + 25\text{ Pa} \cdot 3a\right) = \frac{105}{8}\text{ N}$

$F_D = 2\int_{x=0}^{2a} p(x)\mathrm{d}A = 2\int_{0}^{2a} \left(10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}x + 25\text{ Pa}\right) \cdot \left(-\frac{x}{2} + a\right)\mathrm{d}x$

$F_D = 2\int_{0}^{2a} \left(-\frac{10}{2}\frac{\text{Pa}}{\text{m}}x^2 - \frac{25}{2}\text{ Pa} \cdot x + 10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}x \cdot a + 25\text{ Pa} \cdot a\right)\mathrm{d}x$

$F_D = 2\left[-\frac{10}{2}\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\frac{x^3}{3} - \frac{25}{2}\text{ Pa}\frac{x^2}{2} + 10\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\frac{ax^2}{2} + 25\text{ Pa} \cdot ax\right]_{0}^{2a} = \frac{85}{6}\text{ N}$

$F = F_R + F_D = \frac{105}{8}\text{ N} + \frac{85}{6}\text{ N} = \underline{\underline{27{,}3\text{ N}}}$

Der Faktor 2 stammt aus der Ausnutzung der Symmetrie, da wir nur über die halbe Fläche jeweils integrieren und die Kraft verdoppeln. (Der Winddruck hängt nur von der x Position ab.)

Zusatz-Aufgabe 6:

Approximation:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} f\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2\right) = \frac{15}{\underline{\underline{32}}}$$

Exakter Wert: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

- Differenz (absoluter Fehler): $\left|\frac{15}{32} - \frac{1}{3}\right| = \underline{\underline{0.1354}}$
- Auf Exakten Wert bezogen (relativer Fehler): $\frac{0.1354}{1/3} = 0,4063 = \underline{40,63\%}$