Mathestützkurs für MB
Übung: Differentialrechnung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachschaft Maschinenbau
Wintersemester 2021/2022

Summenregel:	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$	$(u+v)' = u'+v'$
Produktregel:	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$(uv)' = u'v+uv'$
Quotientenregel:	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
Kettenregel:	$(f(\phi(x)))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{d\phi}\frac{d\phi}{dx}$

Einige häufig benötigte Ableitungen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Extremwerte:

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Extremwert

$f''(x_{\text{Extrem}}) > 0 \rightarrow$ Minimum

$f''(x_{\text{Extrem}}) < 0 \rightarrow$ Maximum

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt

$f'''(x_{WP}) > 0 \rightarrow$ Rechts – links – Wendestelle

$f'''(x_{WP}) < 0 \rightarrow$ Links – rechts – Wendestelle

$f'''(x_{WP}) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt

Grenzwert:

Für den Limes $\lim_{x\to\infty} f(x)$ teile $f(x)$ durch die größte Potenz Alle Terme $\frac{a}{x^n}$ werden null, der Rest bildet den Wert gegen den die Funktion im Unendlichen strebt

Aufgabe 1:

Berechne jeweils die erste Ableitung:

$a(x) = 2\sin x + 3\cos x$

$b(x) = \frac{s}{x^2} + \frac{t}{x}, x \neq 0$

$c(x) = \frac{x^3-2x+1}{x^4}, x \neq 0$

$d(x) = x^2 \sin x$

$e(x) = \left(x^2 + 2x\right)\sqrt{x}$

$f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\cos x$

$g(x) = \frac{\cos x}{1+x}$

$h(x) = \tan x$

$i(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right)$

$j(x) = \cot(2x)$

Aufgabe 2:

Berechne die erste Ableitung mit Hilfe der Kettenregel!

$$f(x) = \cos\left(\left(x^2-3\right)^5\right)$$

Hinweis: $f(x) \Rightarrow y = \cos(v); v = u^5; u = x^2 - 3$ und $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Aufgabe 3:

Die gebrochen rationale Funktion $y = f(x)$ ist zu diskutieren: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

a) Bestimme die Nullstellen.

b) Bestimme die Definitionslücken der Funktion.

Wie verhält sich die Funktion, wenn man sich der Stelle von links oder von rechts annähert?

c) Bestimme die Maxima.

d) Bestimme den Funktionswert für $x \to \pm\infty$.

e) Skizziere die Funktion.

Aufgabe 4:

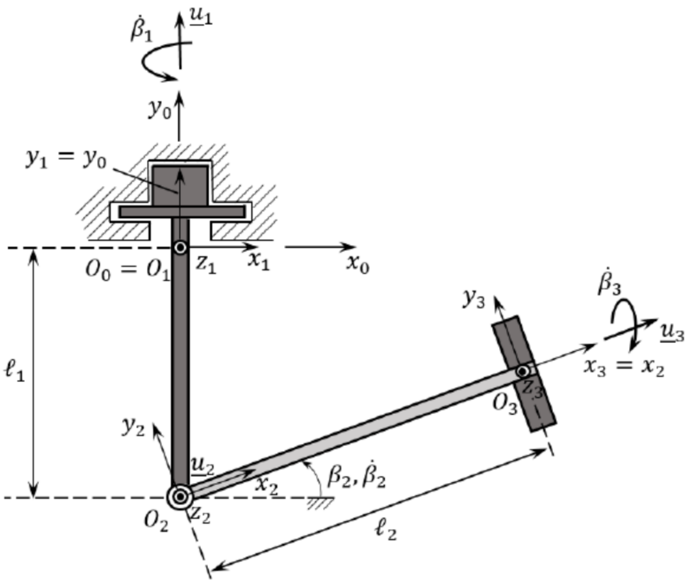
Man bestimme die Gleichung der kubischen Funktion, die im Punkt P$(-1, 1)$ ein Maximum und im Punkt Q$(1, -1)$ einen Wendepunkt hat.

Tipp: allgemeine kubische Funktion: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Aufgabe 5:

Der Raumvektor von O_0 zu O_3 wird beschrieben durch:

$$\underline{r_{30}} = \begin{pmatrix} l_2 \cos(\beta_1)\cos(\beta_2) \\ -l_1 + l_2 \sin(\beta_2) \\ -l_2 \sin(\beta_1)\cos(\beta_2) \end{pmatrix}$$



Berechne durch Differentiation der Vektoreinträge mit Hilfe der Produktregel und Kettenregel die Geschwindigkeit $\underline{v_{30}}$ des Punktes O_3.
Beachte $\beta_1 = \beta_1(t)$ und $\beta_2 = \beta_2(t)$ sind zeitabhängig, die Ableitung dieser ergeben die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_1$ und $\dot{\beta}_2$.

Hinweise:

- Aus der Kinematik ergibt sich die Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus der zeitlichen Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}$: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.
- Aus der Vektoranalysis ergibt sich die Ableitung eines Vektors aus der Ableitung seiner einzelnen Komponenten:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} \\ .. \end{pmatrix}, \text{ für } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ .. \end{pmatrix}.$$

Kontrolllösungen

Aufgabe 1: $a'(x) = 2\cos x - 3\sin x$, $b'(x) = -\frac{2s}{x^3} - \frac{t}{x^2}$, $c'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^5}$, $d'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$, $e'(x) = \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}$, $f'(x) = (2x+2)\cos x + \left(x^2+2x\right)(-\sin x)$, $g'(x) = -\frac{\sin x}{1+x} - \frac{\cos x}{(1+x)^2}$, $h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $i'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$, $j'(x) = \frac{-2}{\sin^2(2x)}$
Aufgabe 2: $f'(x) = -\sin\left(\left(x^2-3\right)^5\right) \cdot 5\left(x^2-3\right)^4 \cdot 2x$
Aufgabe 3: a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, b) $\lim_{x\to-2} f(x) \to +\infty (x < -2)$ $\lim_{x\to-2} f(x) \to -\infty (x > -2)$ $\lim_{x\to 2} f(x) \to -\infty (x < 2)$ $\lim_{x\to 2} f(x) \to +\infty (x > 2)$, c) Maximum bei $(0, \frac{1}{4})$, d) Asymptote bei $y = 1$, e) keine Angabe.
Aufgabe 4: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{3}{8}$

Aufgabe 5: $\underline{v}_{30} = \begin{pmatrix} -l_2\dot{\beta}_1 \sin\beta_1 \cos\beta_2 - l_2\dot{\beta}_2 \cos\beta_1 \sin\beta_2 \\ l_2\beta_2 \cos\beta_2 \\ l_2\dot{\beta}_2 \sin\beta_1 \sin\beta_2 - l_2\dot{\beta}_1 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \end{pmatrix}$