人體動作與力學分析：作業二

一、 前言

在作業一中我們已經練習了如何透過動作捕捉系統所量測的反光標記點全局座標值，取得每個肢段局部座標系統相對全局座標系統的轉換關係。在本次的作業中將更進一步瞭解如何描述空間中兩座標系統間的相對旋轉關係。根據尤拉旋轉定理（Euler's Rotation Theorem），空間中任意方向的旋轉最少可用三個參數來描述，目前若要描述兩個座標系統之間相對的旋轉關係，常用的方法有旋轉矩陣、尤拉角、尤拉參數、以及螺旋軸定理（Helical axis），這幾種數值方法彼此間可以相互轉換，在本次的作業中將練習運用程式建立旋轉矩陣與尤拉角之間的轉換關係。臨床上常用尤拉角代表關節對應三個解剖平面的角度，原因在於定義之局部座標系統方向與三個解剖平面一致，並且採用合理的旋轉順序計算對應之尤拉角。

本次作業共有四個習題，習題一將練習推導出各種旋轉順序下所對應之矩轉矩陣代數式。利用習題一的結果，將可獲得從旋轉矩陣轉尤拉角，與從尤拉角轉換回旋轉矩陣的公式，撰寫成函式。並練習計算另一種描述旋轉的角度（Fix Angles），習題三中則會練習計算扣除靜態姿勢下初始角度前、後之關節角度變化，並比較結果。

二、 預期目標

1. 瞭解由旋轉矩陣換算尤拉角的公式推導過程；
2. 瞭解 Euler angle 與 Fix angle 在公式推導過程的差異；
3. 建立旋轉矩陣、尤拉角與 Fix angle 互換的子程式；
4. 瞭解扣除初始關節角度的計算方法，並繪圖瞭解扣除前後之差異。

三、 作業附件說明

- subcali.c3d：動作資料檔案。該檔紀錄了一位健康兒童在 10 米長的人行道上靜態站立（static standing）時黏貼在肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值與力板訊號；

- walking.c3d：動作資料檔案。該檔紀錄了一位健康兒童在 10 米長的人行道上平地行走（level walking）時黏貼在肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值與力板訊號；

- Main.py：主程式，用來提取 .c3d 檔中的反光標記點動態座標值與力板訊號並抓取一個步態週期的起始幀和結束幀，可以呼叫 Function.py 中的函式計算習題一與習題二要求的變數；

- Function.py：自編模組，包含 readc3d（提取 .c3d 檔中的反光標記點動態座標值與力板訊號）、gait_cycle（抓取一個步態週期的起始幀和結束幀）與同學們在習題一與習題二被要求完成的函式；

- requirements.txt：readc3d 與 gait_cycle 需要的套件，可以利用此檔安裝。

四、 作業變數定義說明

- vicon_data：為 .c3d 檔中的 markers 與力板資料，資料型態為 dictionary。力板的資料結構為一維的 list，大小為 [nframes]；markers 的資料結構為二維的 list，大小為 [nframes×5(前三個值為 xyz，後兩個值代表該 marker 在該 frame 是否遺漏，遺漏時值為-1,127)]。

- vicon_data_name：為 .c3d 檔中的變數名稱，資料型態為一維 list，包含 vicon_data 中的所有 key，可用於提取 vicon_data 的 markers 與力板資料。

- frame_rate：為 .c3d 檔中 markers 的取樣頻率，資料型態為 int。

- analog_rate：為 .c3d 檔中力板的取樣頻率，資料型態為 int。

- start_frame：為步態週期的起始幀，資料型態為 int，可用來取得一步態週期開始時各 marker 的位置向量。

- end_frame：為步態週期的結束幀，資料型態為 int，可用來取得一步態週期結束時各 marker 的位置向量。

五、 習題一

1. 習題目標

試由 Python 推導計算尤拉角時 12 種旋轉順序的旋轉矩陣公式，將 12 種公式顯示在 Command Window。

2. 函式名稱

- RotFormula：依照 12 種可能的旋轉順序，產生對應的旋轉矩陣公式。

3. 函式語法格式

- R = RotFormula (sequence)

4. 函式輸入

- sequence：字串形態，如 'zxy'，維度 '1 × 3'

5. 函式輸出

- R：為一內含三個尤拉角的 Symbolic variable 所構成之矩陣，維度為 [3 × 3]
  三個尤拉角符號變數命名方式，統一依旋轉順序所對應之旋轉角為 t1, t2, t3

6. 函式說明

RotFormula 此函式會依照輸入之尤拉角旋轉順序推導出對應的旋轉矩陣代數式，由於計算的法則不變，因此嚴格來說此函式並不需限定容許的旋轉順序只限 12 種，而應該是 xyz 所組合而成的任意長度字串皆可。

六、 習題二

1. 習題目標

試遵照作業一所使用之下肢局部座標系統定義方式，計算描述下肢六個關節的旋轉矩陣：lRp2t、rRp2t、lRt2s、rRt2s、lRs2f、rRs2f，與其各別的三個尤拉角，旋轉順序為 ZXY。撰寫四個函式，依照語法指定之輸入輸出格式。

- 比較 RotAngConvert(RotAngConvert (rRp2t, 'zxy'), 'zxy') 與 rRp2t 結果是否一致；
- 比較 RotAngConvert (rRp2t, 'zxy') 與 RotAngConvert (rRt2p, 'yxz') 三個旋轉角是否一致（記得要先排成相同旋轉軸的旋轉角再相減）；
- 比較 RotAngConvert (rRg2t, 'zxy') 與 RotAngConvFix (rRg2t, 'yxz') 三個旋轉角是否一致（記得要先排成相同旋轉軸的旋轉角再相減）。

2. 函式名稱

- Rot2Ang：計算旋轉矩陣所對應之尤拉角；
- Ang2Rot：計算尤拉角所對應之旋轉矩陣；
- RotAngConvert：依輸入之格式計算所對應之旋轉矩陣或尤拉角；
- RotAngConvFix：依輸入之格式計算所對應之旋轉矩陣或 Fix angle。

3. 函式語法格式

- theta = Rot2Ang(Rot, sequence)
- Rot = Ang2Rot(theta, sequence)
- Output = RotAngConvert(Input, sequence)
- Output = RotAngConvFix(Input, sequence)

4. 函式輸入與輸出

- Rot：旋轉矩陣，維度為 [nframes × 3 × 3]；
- theta：尤拉角，三個 column 的排列順序依照旋轉順序，維度為 [nframes × 3]；
- sequence：字串形態，如 'zxy'，維度為 ' 1 × 3 '；
- Input：旋轉矩陣或尤拉角，維度為 [nframes × 3 × 3] 或 [nframes × 3]；
- Onput：旋轉矩陣或尤拉角，維度為 [nframes × 3 × 3] 或 [nframes × 3]。

5. 函式說明

RotAngConvert 此函式整合了 Rot2Ang 與 Ang2Rot 兩項功能，讓使用者可以只用一個函式就達到將旋轉矩陣與尤拉角兩者之間做轉換的目的。因此程式必須可以自動判別第一個輸入的變數形態是何者，撰寫判別式時需考慮若尤拉角幀的數量剛好等於 3，程式應該如何正確識別，而不是誤判輸入的格式為一個幀的旋

轉矩陣資料（維度皆為[3 × 3]）。

RotAngConvFix 此函式的功能與 RotAngConvert 非常接近，但計算的是 Fix angles 與旋轉矩陣之間的轉換，撰寫時若考慮沿用 Rot2Ang 與 Ang2Rot 兩個函式，需注意旋轉軸的次序性與 Fix Angles 第二維度的排列順序是否一致。

6. 參考公式

設 R_x、R_y、R_z 為三旋轉矩陣，如式（一）、（二）、（三）所示：

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{（一）}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{（二）}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{（三）}$$

若 sequence 為 zxy（Cardan Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3，則R_{zxy}如下所示：

$$R_{zxy} = R_z R_x R_y \quad \text{（四）}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{（五）}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & -cos\theta_2 sin\theta_1 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_3 sin\theta_1 sin\theta_2 \\ cos\theta_3 sin\theta_1 + cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 cos\theta_2 & sin\theta_1 sin\theta_3 - cos\theta_1 cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_2 sin\theta_3 & sin\theta_2 & cos\theta_2 cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{（六）}$$

若θ_2落在一、四象限（$cos\theta_2 > 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\theta_2 = sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right] \quad \text{（七）}$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(1,2)}{R_{zxy}(2,2)}\right] \quad \text{（八）}$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{zxy}(3,1)}{R_{zxy}(3,3)}\right] \quad \text{（九）}$$

若θ_2落在二、三象限（$cos\theta_2 < 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\begin{cases} \theta_2 = \pi - sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right],\ (sin^{-1}(sin\theta_2) > 0) \\ \theta_2 = -\pi - sin^{-1}\left[R_{zxy}(3,2)\right],\ (sin^{-1}(sin\theta_2) < 0) \end{cases} \quad \text{（十）}$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(1,2)}{-R_{zxy}(2,2)}\right] \quad \text{（十一）}$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{zxy}(3,1)}{-R_{zxy}(3,3)}\right] \quad （十二）$$

若 sequence 為 yxy（Euler Angle），旋轉角依序為θ_1、θ_2、θ_3，則R_{yxy}如下所示：

$$R_{yxy} = R_y R_x R_y \quad （十三）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & 0 & sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_1 & 0 & cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\theta_3 & 0 & sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta_3 & 0 & cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad （十四）$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 cos\theta_3 - cos\theta_2 sin\theta_1 sin\theta_3 & sin\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 sin\theta_3 + cos\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_1 \\ sin\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_2 & -cos\theta_3 sin\theta_2 \\ -cos\theta_3 sin\theta_1 - cos\theta_1 cos\theta_2 sin\theta_3 & cos\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 - sin\theta_1 sin\theta_3 \end{bmatrix} \quad （十五）$$

若θ_2落在一、二象限（$sin\theta_2 > 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\theta_2 = cos^{-1}\left[R_{yxy}(2,2)\right] \quad （十六）$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(1,2)}{R_{yxy}(3,2)}\right] \quad （十七）$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{R_{yxy}(2,1)}{-R_{yxy}(2,3)}\right] \quad （十八）$$

若θ_2落在三、四象限（$sin\theta_2 < 0$），則θ_1、θ_2、θ_3如下所示：

$$\theta_2 = -cos^{-1}\left[R_{yxy}(2,2)\right] \quad （十九）$$

$$\theta_1 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_1}{cos\theta_1}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(1,2)}{-R_{yxy}(3,2)}\right] \quad （二十）$$

$$\theta_3 = tan^{-1}\left[\frac{sin\theta_3}{cos\theta_3}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-R_{yxy}(2,1)}{R_{yxy}(2,3)}\right] \quad （二十一）$$

七、 習題三

1. 習題目標

試遵照作業一所使用之下肢局部座標系統定義方式，計算下肢六個關節相對靜態校正時的初始角度，在動態過程各別的三個尤拉角變化，旋轉順序為 ZXY，並將兩側下肢關節角度（髖關節、膝關節、踝關節）繪圖，比較與習題二所得結果之差異。圖片內含三個軸對應每個旋轉角，每個軸內含兩條線，為有無扣除靜態校正初始值的旋轉角曲線，使用箭頭標出差異最大的時間點。撰寫一個函式，依照語法指定之輸入輸出格式。

2. 函式名稱

- JointAngOffset：計算扣除靜態校正初始角度後的關節旋轉矩陣。

3. 函式語法格式

- Rc = JointAngOffset (Rs, Rd)

4. 函式輸入

- Rs：靜態校正所得之關節初始旋轉矩陣，維度為 [3 × 3]；
- Rd：尤拉角，三個 column 的排列順序依照旋轉順序，維度為 [nframes × 3 × 3]。

5. 函式輸出

- Rc：經扣除初始角度之關節旋轉矩陣，維度為 [nframes × 3 × 3]；

6. 參考公式

以計算髖關節角度為例，下標p_s、p_d代表骨盆座標系統分別在靜態與動態時的方向，t_s、t_d代表大腿座標系統分別在靜態與動態時的方向。式（二十二）概念上先將p_s與p_d對齊，描述t_s旋轉至t_d。式（二十三）則是將t_d與t_s對齊，描述p_d旋轉至p_s

$$\boldsymbol{R}_{c1} = \boldsymbol{R}_{p_s 2 t_s}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{R}_{p_d 2 t_d} \quad \text{（二十二）}$$

$$\boldsymbol{R}_{c2} = \boldsymbol{R}_{p_d 2 t_d} \cdot \boldsymbol{R}_{p_s 2 t_s}^{\boldsymbol{T}} \quad \text{（二十三）}$$

八、 問答題

1. 將旋轉矩陣轉換成尤拉角的計算方法中，尤拉角是否為唯一解？若否，其原因為何？該如何計算出另一組解？
2. 我們知道，透過定義旋轉順序可將一個旋轉矩陣拆解成沿三個非正交軸向上的旋轉，並計算出尤拉角。試問，扣除初始角度後的旋轉矩陣，採用三個相同的旋轉順序拆解時，其旋轉軸的方向是否與扣除前相同？
3. 習題三中二個參考公式所算出來的旋轉矩陣與尤拉角是否相同？若否，試說明原因。