

人體動作與力學分析：作業三

一、前言

動作捕捉系統所量測的運動學資料，最後皆會以離散的三維座標資料型態輸出，這些離散的資料型態在作業二、三中可直接用來計算旋轉矩陣、位置向量、與尤拉角，然而如果要計算對時間微分後的數值，無法對離散的資料直接做處理，必須先將其還原成可用方程式描述的連續型態，再對方程式微分，之後還原成離散的資料型態。Curve fitting 具有三種目的：1. 將離散的資料連續化；2. 降低量測本身的雜訊誤差；3. 將資料適當的平滑化 (smooth)。為達到這三項目的，必須選擇一個最適合描述該資料形態的數學模型，不同的數學模型也會有不同的參數用以調校擬合後的結果。以多項式而言，方程式的階數會影響擬合後的多項式曲線與資料點間有多相似，若為一階代表使用直線擬合。擬合本身就帶有最佳化的目的，最常見的便是使用最小平方方法的概念做最佳化的擬合，不論使用什麼數學方法做最佳化擬合，連續化後的方程式曲線與真值間仍有誤差存在，而以微分的特性而言，數值的變動愈劇烈，代表有愈多的峰值 (Peaks) 發生，微分後在峰值發生處的結果將會愈容易失真，為了避免因峰值造成的微分誤差，建議提升取樣頻率，並使用更好的濾波器來解決。本次作業的習題一，將會練習使用多項式數學模型對一筆離散數值資料做擬合、微分、與取值。

逆向動力學分析最後一步，是代入牛頓第二運動定律，從遠端已知的關節受力與關節力矩計算出近端關節的受力與力矩，平衡方程式的一側會是目前該物體的動量或角動量 (Angular momentum) 對時間的一次微分。要取得角動量的變化，必須知道該物體的慣性矩 (Moment of inertia) 與角加速度，角加速度可從角速度微分求得，而角速度可透過相對不動的 global 座標系統的尤拉角換算求得，也可以從尤拉參數 (Euler parameters)、或是螺旋軸 (Helical axis) 定理取得。本作業習題二中將會使用第一種方法，銜接作業三取得的關節尤拉角，搭配習題一的 Curve fitting 進一步換算成相對該肢段局部座標系統的角速度與角加速度。

二、 預期目標

1. 瞭解使用多項式方程式實做 Curve fitting 的流程；
2. 瞭解使用旋轉矩陣與尤拉角計算剛體局部角速度、角加速度的計算方法；
3. 瞭解計算角速度、角加速度可能遭遇的數值問題與解決方法；
4. 比較由公式微分與離散數值微分兩者之差異。

三、 作業附件說明

- subcali.c3d：動作資料檔案。該檔紀錄了一位健康兒童在 10 米長的人行道上靜態站立（static standing）時黏貼在肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值與力板訊號；
- walking.c3d：動作資料檔案。該檔紀錄了一位健康兒童在 10 米長的人行道上平地行走（level walking）時黏貼在肢段上的每顆反光標記點三維動態座標值與力板訊號；
- Main.py：主程式，用來提取 .c3d 檔中的反光標記點動態座標值與力板訊號並抓取一個步態週期的起始幀和結束幀，可以呼叫 Function.py 中的函式計算習題一與習題二要求的變數；
- Function.py：自編模組，包含 readc3d（提取 .c3d 檔中的反光標記點動態座標值與力板訊號）、gait_cycle（抓取一個步態週期的起始幀和結束幀）與同學們在習題一與習題二被要求完成的函式；
- requirements.txt：readc3d 與 gait_cycle 需要的套件，可以利用此檔安裝。

四、 作業變數定義說明

- `vicon_data`：為 .c3d 檔中的 markers 與力板資料，資料型態為 dictionary。力板的資料結構為一維的 list，大小為 [`nframes`]；markers 的資料結構為二維的 list，大小為 [`nframes`×5(前三個值為 xyz，後兩個值代表該 marker 在該 frame 是否遺漏，遺漏時值為-1,127)]。
- `vicon_data_name`：為 .c3d 檔中的變數名稱，資料型態為一維 list，包含 `vicon_data` 中的所有 key，可用於提取 `vicon_data` 的 markers 與力板資料。
- `frame_rate`：為 .c3d 檔中 markers 的取樣頻率，資料型態為 int。
- `analog_rate`：為 .c3d 檔中力板的取樣頻率，資料型態為 int。
- `start_frame`：為步態週期的起始幀，資料型態為 int，可用來取得一步態週期開始時各 marker 的位置向量。
- `end_frame`：為步態週期的結束幀，資料型態為 int，可用來取得一步態週期結束時各 marker 的位置向量。

五、 習題一

1. 習題目標

試由附件計算一步態周期骨盆相對全局座標系統的尤拉角，旋轉順序 ZXY，並求出使用最小平方方法擬合 Z 軸旋轉角隨時間變化曲線的五階多項式方程式係數，並計算 Z 軸旋轉角對時間微分一次及二次的值。

2. 函式名稱

- PolyFit：使用最小平方方法計算擬合離散資料的方程式；
- PolyDer：計算多項式方程式 n 次微分後的方程式係數；
- PolyVal：從多項式方程式係數反求對應的函數值。

3. 函式語法格式

- $p = \text{PolyFit}(xi, yi, n)$
- $dp = \text{PolyDer}(p, dorder)$
- $yi = \text{PolyVal}(p, xi)$

4. 函式輸入與輸出

- xi ：一維離散資料的 x 值，維度 $[nframes \times 1]$
- yi ：一維離散資料的 y 值，維度 $[nframes \times 1]$
- n ：指定要擬合的多項式最高次的次方值，維度 $[1]$
- p 、 dp ：多項式方程式的係數，由最高次至最低次，最後一項是常數，維度 $[(n+1)]$
- $dorder$ ：指定微分的階數，維度 $[1]$

5. 函式說明

撰寫時要自己想演算法，不可直接呼叫套件的 functions，大家做完之後可以使用套件的 functions 來驗證數值是否正確。

六、 習題二

1. 習題目標

- 試由附件計算下肢六個肢段（左大腿、右大腿、左小腿、右小腿、左足部、右足部）在動態過程相對各自局部座標系統的角速度、角加速度，並將角速度繪圖呈現；
- 繪圖比較若由參考公式計算的右足部角加速度與將角速度經離散資料數值微分一次的結果是否相同；
- 使用 Ang2LocalAngular 函式比較右大腿在 12 種旋轉順序下所得之局部座標系統角速度，彼此之差異；
- 依據第二點與第三點所得之結果，撰寫 Rot2LocalAngular 函式。

2. 函式名稱

- Derivative：使用最小平方法與計算一維離散資料 n 次微分後所對應的離散資料值；
- Ang2LocalAngular：可依不同的旋轉順序與旋轉角，計算對應該局部座標系統的角速度；
- Rot2LocalAngular：從動態的旋轉矩陣求解對應該局部座標系統的角速度、角加速度。

3. 函式語法格式

- $dyi = \text{Derivative}(xi, yi, dorder);$
- $[\text{AngVel}, \text{AngAcc}] = \text{Ang2LocalAngular}(\theta, seq, smprate);$
- $[\text{AngVel}, \text{AngAcc}] = \text{Rot2LocalAngular}(Rg2l, smprate);$

4. 函式輸入

- xi ：一維離散資料的 x 值，維度為 $[nframes \times 1]$ or $[1 \times nframes]$ ；
- yi ：一維離散資料的 y 值，維度為 $[nframes \times 1]$ or $[1 \times nframes]$ ；
- $dorder$ ：指定微分的階數，維度為 $[1]$ ；
- θ ：從 global 到 local 依 function 第二項輸入的旋轉順序所計算求得的尤拉角，維度為 $[nframes \times 3]$ ；
- seq ：求解尤拉角時所使用之旋轉順序，字串形態 ' 1×3 '；
- $smprate$ ：動態捕捉過程所設定之取樣頻率(Hz)，維度為 $[1]$ ；
- $Rg2l$ ：從不動的 global 座標系統至動態的 local 座標系統，每個瞬間的旋轉矩陣值，維度為 $[nframes \times 3 \times 3]$ 。

5. 函式輸出

- dyi ：一維離散資料微分後所對應之 y 值，維度為 $[nframes \times 1]$ or $[1 \times nframes]$

×nframes] ;

- AngVel: 該肢段相對其局部座標系統三軸的角速度, 維度為 [nframes × 3] ;
- AngAcc: 該肢段相對其局部座標系統三軸的角加速度, 維度為 [nframes × 3] 。

6. 函式說明

Derivative 此函式的功能為對離散的數值資料做微分, 輸出微分後的離散數值資料, 由於微分時必須先知道每個資料點間的時間差, 因此需輸入取樣頻率, 輸入之 xi, yi, 與輸出之 dyi 必須是相同維度。

Ang2LocalAngular 此函式的功能是從 global 座標系統轉至肢段局部座標系統的尤拉角轉換成相對該肢段局部座標系統的角速度、與角加速度。角加速度的計算可從公式, 亦可將角速度再次微分, 不過理論上是從公式取得會較為準確, 因為角速度微分需再次 curve fitting, 就會再失真一次。

Rot2LocalAngular 此函式的功能是把旋轉矩陣直接轉成角速度。撰寫此程式需注意, 某些旋轉順序第二個旋轉角會跨越 gimbal lock 發生的角度, 可能造成數值的不精確, 因此必須避免採用這些可能造成數值問題的旋轉順序。

7. 參考公式

若旋轉順序為 zxy (Cardan Angle), 旋轉角依序為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_2\sin\theta_3 \\ 0 & 1 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_2\cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (一)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3\sin\theta_3 & 0 & \dot{\theta}_2\sin\theta_2\sin\theta_3 - \dot{\theta}_3\cos\theta_2\cos\theta_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ \dot{\theta}_3\cos\theta_3 & 0 & -\dot{\theta}_2\sin\theta_2\cos\theta_3 - \dot{\theta}_3\cos\theta_2\sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (二)$$

$$+ \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_2\sin\theta_3 \\ 0 & 1 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_2\cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

若旋轉順序為 yxy (Euler Angle), 旋轉角依序為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & 1 \\ -\cos\theta_3\sin\theta_2 & \sin\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (三)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 \\ -\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & 1 \\ -\cos \theta_3 \sin \theta_2 & \sin \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (四)$$

七、問答題

1. 在習題一中，使用最小平方法擬合離散的曲線資料，請問擬合的目標為何？
(1).讓每個資料點與多項式曲線在 x 分量的差值平方和最小；(2).讓每個資料點與多項式曲線在 y 分量的差值平方和最小；(3).讓每個資料點與多項式曲線的距離平方和最小。
2. 計算每個肢段局部座標系統相對 global 座標系統的尤拉角時，若發生數值不連續的情況，其原因為何？該如何修正？
3. 定義不同的旋轉順序，是否影響角速度的計算結果？
4. 試從物理上來解釋 gimbal lock 發生的原因。
5. 當 gimbal lock 發生時角速度的數值會發生異常跳動，試解釋數值的跳動從何而來？