Zadanie dodatkowe 2

Weronika Jakimowicz

15.12.2023

Niech $\{\xi_k\}$ będzie ciągiem zmiennych iid. o symetrycznym rozkładzie ($\xi_k, -\xi_k$ mają ten sam rozkład). Niech $S_0 = 0$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad k \geq 1.$$

Rozważmy funkcję ogonową F_k zmiennej S_k, czyli

$$F_k(x) = \mathbb{P}\left[S_k \geq x\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

Zadanie 1 **Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ ciąg zmiennych losowych**

$$X_k = F_{n-k}(a - S_k), \quad k = 0, 2, \dots, n$$

jest martyngałem wględem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k\}$ danej przez $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ dla $k \geq 1$.

Niech μ będzie rozkładem zmiennych ξ_i. Wprowadźmy nową zmienną Y_k o rozkładzie

$$\mu_{Y_k} = \underbrace{\mu * \dots * \mu}_{\text{k razy}}$$

tzn. Y_k ma taki sam rozkład jak zmienna $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$. To oznacza, że aby nie pomieszać tego zadania, możemy napisać

$$X_k = F_{n-k}(a - S_k) = \mathbb{P}\left[Y_{n-k} \geq a - S_k\right] = \int_{a-S_k}^{\infty} d\mu_{Y_{n-k}} = \int_{a-S_k}^{\infty} \mu_{Y_{n-k}}(x)dx.$$

Jak już to zostało ustalone, przejdźmy do treści tego zadania:

1. X_k jest całkowalny, bo

$$\mathbb{E}\left[|X_k|\right] = \mathbb{E}\left[|\mathbb{P}\left[Y_{n-k} \geq a - S_k\right]|\right] \leq \mathbb{E}\left[|1|\right] = 1$$

2. X_k jest mierzalne względem $F_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$, bo X_k to złożenie

$$F_{n-k}(a - S_k),$$

gdzie $a - S_k$ jest zmienną losową mierzalną względem F_k jako kombinacja liniowa $\xi_1, \dots, \xi_k$ i borelowskiej funkcji $\mathbb{P}\left[\cdot\right]$.

3. $\mathbb{E}\left[X_{k+1} \mid F_k\right] = X_k$, czyli sedno sprawy.

   Zauważmy, że gęstość $Y_{n-k-1} + \xi_{k+1}$ to splot $\mu_{Y_{n-k-1}} * \mu$, czyli

$$\mu_{Y_{n-k-1}} * \mu = \underbrace{\mu * \dots * \mu}_{n-k-1 \text{ razy}} * \mu = \mu_{Y_{n-k}}.$$

   W takim razie wyliczając wwo dostajemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{k+1} \mid F_k\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[Y_{n-k-1} \geq a - S_{k+1}\right] \mid F_k\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[Y_{n-k-1} \geq a - S_k - \xi_{k+1}\right] \mid F_k\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[Y_{n-k-1} + \xi_{k+1} \geq a - S_k\right] \mid F_k\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{a-S_k} (\mu * \mu_{Y_{n-k-1}})(x)dx \mid F_k\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{a-S_k} \mu_{Y_{n-k}}(x)dx \mid F_k\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X_k \mid F_k\right] = X_k
\end{aligned}$$

   zupełnie tak jak w martyngaleniu!

Zadanie 2 **Pokaż, że dla** $a > 0$ **mamy**

$$\mathbb{P}\left[\max_{0\leq k\leq n} S_k > a\right] \leq 2\mathbb{P}\left[S_n > a\right].$$

Wskazówka: rozważ czas zatrzymania $\tau = \inf\{k \in \mathbb{N} \ : \ S_k > a\}$**.**

Po pierwsze zauważmy, że

$$\mathbb{P}\left[S_n > a\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[S_n > a - S_0\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$$

a z twierdzenia Doobe'a o zatrzymaniu wiemy, że dla czasu zatrzymania τ jak w treści zadania

$$\mathbb{P}\left[S_n > a\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] = \mathbb{E}\left[X_{n\wedge\tau}\right].$$

Po drugie, jeśli ξ_i są symetryczne, to również $S_k = \sum_{i\leq k} \xi_i$ jest symetryczna. Pokażemy to szybciutko za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ $S_1 = \xi_1$ i faktycznie jest to symetryczne. W przejściu $(k-1) \Rightarrow k$ sprawdzamy:

$$\begin{aligned}
\mu_{S_k}(t) = \mu * \mu_{S_{k-1}}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{S_{k-1}}(t)\mu(x-t)dx = \\
&\overset{\text{indukcja}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{S_{k-1}}(-t)\mu(-x+t)dx = \begin{bmatrix} z = -x \\ dz = -dx \end{bmatrix} \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} \mu_{S_{k-1}}(-t)\mu(z-(-t))dz = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{S_{k-1}}(-t)\mu(z-(-t))dz = \mu * \mu_{S_{k-1}}(-t) = \mu_{S_k}(-t)
\end{aligned}$$

czyli $\mu_{S_k}(t) = \mu_{S_k}(-t)$ jest rozkładem symetryczny.

Idąc więc od prawej strony równości, którą mamy pokazać mamy

$$\begin{aligned}
2\mathbb{P}\left[S_n > a\right] = 2\mathbb{E}\left[X_0\right] &= 2\mathbb{E}\left[X_{n\wedge\tau}\right] = \\
&= 2\mathbb{E}\left[X_{n\wedge\tau}\mathbb{1}_{\{\max S_k > a\}} + X_{n\wedge\tau}\mathbb{1}_{\{\max S_k \leq a\}}\right] \geq \\
&\geq 2\mathbb{E}\left[X_{n\wedge\tau}\mathbb{1}_{\{\max S_k > a\}}\right] = \star
\end{aligned}$$

ostatnie przejście jest możliwe, ponieważ $X_k \in [0, 1]$ dla każdego k. Dalej zauważmy, że na zbiorze $\{\max S_k > a\}$ czas zatrzymania τ jest skończony. W takim razie

$$X_{n\wedge T} = X_T = \mathbb{P}[Y_{n-T} > a - S_T] \geq \mathbb{P}[Y_{n-T} \geq 0],$$

ponieważ $a < S_T$, czyli $a - S_T \leq 0$ i to co jest po prawej stronie jest całką po troszeczkę mniejszym zbiorze niż $\mathbb{P}[Y_{n-T} > a - S_T]$. Wracając do tego co zaczęliśmy wyżej, mamy

$$\begin{aligned}\star &= 2\mathbb{E}\left[\mathbb{P}[Y_{n-T} > a - S_T]\mathbb{1}_{\{\max S_k > a\}}\right] \geq 2\mathbb{E}\left[\mathbb{P}[Y_{n-T} \geq 0]\mathbb{1}_{\{\max S_k > a\}}\right] = \\ &= 2\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\max S_k > a\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\max S_k > a\}}\right] = \mathbb{P}\left[\max S_k > a\right]\end{aligned}$$

przejście między linijkami wynika z tego, że gęstość Y_{n-T} jest taka sama jak zmiennej S_{n-T}, a na samym początku pokazaliśmy, że S_{n-T} jest symetryczna. Całkując symetryczną zmienną tylko po dodatnich wartościach daje pewność, że dostaniemy tylko połowę całości - czyli połowę 1.

PSEUDO-APPENDIX

Zad 1.

Zbiór $[a - S_k, \infty)$ zapisuje się jako

$$\begin{aligned}[a - S_k, \infty) &= \{x \geq a - S_k\} = \{a - x \leq S_k\} = \{a - x \leq \sum_{i=1}^{k} \xi_i\} = \\ &= \bigcup_{s_k \in \mathbb{Q}} \{\xi_k \geq s_k \ \wedge \ a - x \leq \sum_{i=1}^{k} \xi_i \leq s_k + \sum_{i \leq k-1} \xi_i\} = \\ &= \bigcup_{s_k \in \mathbb{Q}} \{s_k \leq \xi_k \ \wedge \ a - x - s_k \leq \sum_{i \leq k-1} \xi_i\} = \dots \\ \dots &= \bigcup_{s_k \in \mathbb{Q}} \dots \bigcup_{s_2 \in \mathbb{Q}} \{s_k \leq \xi_k \ \wedge \ \dots \ \wedge \ s_2 \leq \xi_2 \ \wedge \ a - x - \sum_{i=2}^{k} s_i \leq \xi_1\} = \\ &= \bigcup_{s_2, \dots, s_k \in \mathbb{Q}} \{s_k \leq \xi_k\} \cap \dots \{s_2 \leq \xi_2\} \cap \{a - x - \sum_{i=2}^{k} s_i \leq \xi_1\}\end{aligned}$$

Czyli mamy przeliczalną sumę skończonych przekrojów zbiorów z $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$, więc $[a - S_k, \infty) \in \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ bardzo mocno. Można oczywiście powiedzieć po prostu, że to jest zbiór $\{a - x \geq S_k\}$, a S_k jest w oczywisty sposób mierzalna względem $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$, ale kto by nie chciał czytać równań wyżej.