

Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. Opisz grupę automorfizmów triangulacji $\mathbb{R}P^2$ o najmniejszej liczbie wierzchołków. usunąć kolokwializmy, pokazać, że jądro $\text{Aut}(D) \rightarrow S_5 = \mathbb{Z}_2$, na początku uzasadnić $2E = 3T$, ładniej pokazać, że sześciiany są trzymane przez automorfizmy

Ile wierzchołków?

Zacznijmy od obserwacji, że każdy m -sympleks σ^m zawiera dokładnie $\binom{m+1}{n+1}$ n -sympleksów. W takim razie, jeśli K jest kompleksem symplecjajalnym, a $f_m(K)$ oznacza liczbę m -sympleksów w K , to wówczas

$$\deg_m(n) \cdot f_n(K) = \frac{m+1}{n+1} f_m(K),$$

gdzie $\deg_m(n)$ mówi do ilu m -sympleksów może należeć n -sympleks w kompleksie K . Jeśli rozważamy K będące triangulacją 2-rozmaitości oraz $m = 2, n = 1$, to wtedy $\deg_2(1) = 2$, tzn. $2f_1(K) = 3f_2(K)$. Oznacza to, że na płaszczyźnie krawędź należy do 2 trójkątów, a każdy trójkąt ma 3 krawędzie.

Wiemy, że jeśli X ma triangulację o V wierzchołkach, E krawędziach i T trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T.$$

Krawędzie to 1-sympleksy, a trójkąty to 2-sympleksy. Mamy więc $2E = 2f_1(K) = 3f_2(K) = 3T$, co po podstawieniu daje

$$\chi(X) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym: $E \leq \binom{V}{2}$ czyli

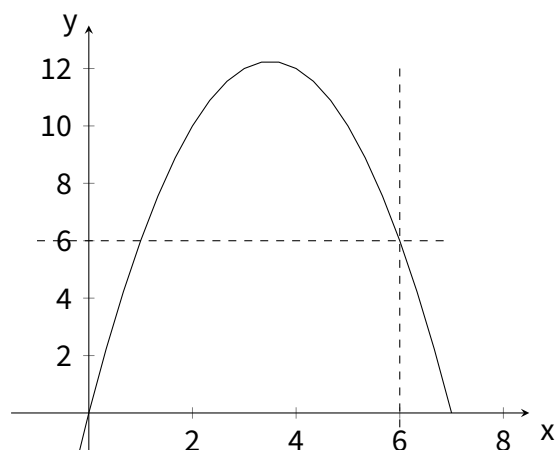
$$V = \chi(X) + \frac{1}{3}E \leq \chi(X) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla $\mathbb{R}P^2$ dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7 - V)$$

Powyższa nierówność dla $V = 6$ staje się równością. Tak samo dla $V = 1$ mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na $\mathbb{R}P^2$. Pozostałe liczby naturalne z przedziału $(0, 7)$ nie mają szansy spełniać powyższe równanie (widać na obrazku)



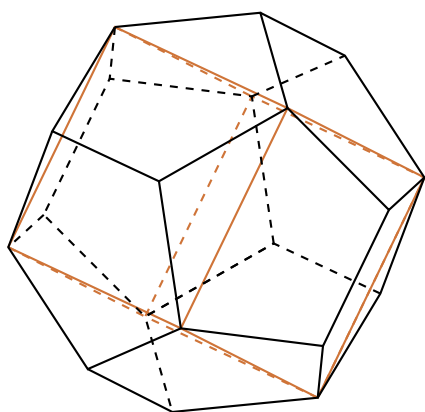
Z listy 1 wiemy, że 6-wierzchołkowa triangulacja $\mathbb{R}P^2$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulację opisujemy.

Plan działania

Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$ to S^2 wydzielona przez antypodyczne działanie \mathbb{Z}_2 . W takim razie, 6-wierzchołkowa triangulacja na $\mathbb{R}P^2$ pochodzi od triangulacji na S^2 . Dwudziestościan ma 12 wierzchołków i 20 ścian i jest to interesująca nas triangulacja sfery. Łatwiejsze jest jednak badanie grupy automorfizmów bryły dualnej do dwudziestościanu - dwunastościanu o 12 ścianach i 20 wierzchołkach.

narysować na sferze z osiami symetrii

Z dodekahedronu możemy dostać icosahedron - wystarczy postawić wierzchołek na każdej ścianie i połączyć odpowiednio wierzchołkami. W ten sam sposób można z icosahedronu wrócić do dodekahedronu. Stąd grupy automorfizmów obu tych brył będą równe i wystarczy popatrzeć na dodekahedron D:



Uzasadnimy teraz to, co prawi Wikipedia, mianowicie, że $\text{Aut}(D) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

Czy zgadza się rząd?

Niech $v \in D$ będzie wierzchołkiem dodekahedronu (odpowiada ścianie icosahedronu).

- ☕ $|\text{Obr}(v)| = 20$, bo automorfizm może postawić wierzchołek na dowolny inny spośród 20 które D posiada.
- ☕ $|\text{Stab}(v)| = 3! = 6$, gdyż są to permutacje 3 sąsiadów tego wierzchołka przy trzymaniu v w miejscu.

W takim razie dostajemy

$$|\text{Aut}(D)| = |\text{Obr}(v)| \cdot |\text{Stab}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 = |A_5 \times \mathbb{Z}_2|.$$

Pozbycie się \mathbb{Z}_2

Wśród automorfizmów dodekahedronu D mamy dwa "rodzaje" odwzorowań

- ☕ rotacje i symetrie, które zachowują ruch wskazówek zegara przy numerowaniu sąsiadów dowolnego wierzchołka,
- ☕ odwzorowanie antypodyczne tudzież symetria względem punktu w samym środku D, która

przewraca tę kolejność do góry nogami.

Ten drugi rodzaj odwzorowania będzie odpowiadać za czynnik \mathbb{Z}_2 w $\text{Aut}(D)$. Wystarczy więc zająć się samą grupą symetrii i rotacji i pokazać, że to A_5 .

Symetrie i obroty

Sztuczką na pokazanie, że symetrie D to A_5 jest zauważenie 5 sześciątów w środku D . Sześciąty możemy narysować idąc krokami:

- ☕ weź krawędź w D
- ☕ połącz wszystkie sąsiady tej krawędzi w ścianę
- ☕ weź krawędź po przeciwnej stronie D
- ☕ połącz jej wszystkie sąsiady w ścianę
- ☕ połącz te dwie ściany w sześciąt.

Z tej metody wytwarzania sześciątów można od razu wywnioskować, że automorfizm przeprowadza sześciąty na sześciąty, ponieważ sąsiedztwo wierzchołków musi być zachowane, a to ono było podstawą wyciskania sześciątów z D .

Ponumerujemy sześciąty od 1 do 5 - możemy teraz je permutować. Najbardziej leniwym sposobem na zauważenie, że grupa uzyskana przez porządne permutacje tych sześciątów to A_5 jest podzielenie $|\text{Aut}(D)| = 120$ przez 2, które oznaczają, że wyrzucamy antypodyzm (element rzędu 2). Zostawia to nam 60 automorfizmów, które będą permutować te sześciąty i które powinniśmy móc włożyć w S_5 . Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) podgrupa S_5 o 60 elementach jest A_5 tak jak chcieliśmy.

Uzasadniliśmy, że $A_5 \times \mathbb{Z}_2 = \text{Aut}(\text{dodecahedron}) = \text{Aut}(\text{icosahedron})$ bo tak jak już wspomniałam, bryły te są dualne. Po wydzieleniu S^2 z triangulacją będącą icosahedronem przez działanie antypodyczne dostajemy grupę automorfizmów triangulacji $\Delta \mathbb{R} P^2$ o 6 wierzchołkach:

$$\text{Aut}(\Delta \mathbb{R} P^2) = A_5 \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 = A_5$$

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Definiujemy przestrzeń konfiguracji $\text{Conf}_n(X)$ jako przestrzeń położeń n różnych punktów w X (zakładamy, że dwa punkty nie mogą leżeć w tym samym miejscu). Definiujemy też przestrzeń konfiguracji $\text{conf}_n(X)$ jako przestrzeń położeń n nierozróżnialnych punktów w X , czyli

$$\text{Conf}_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j, \text{ gdy } i \neq j\}$$

$$\text{conf}_n(X) = \frac{\text{Conf}_n(X)}{S_n}$$

gdzie S_n działa na $\text{Conf}_n(X)$ przez permutacje współrzędnych.

Oblicz charakterystykę Eulera $\text{conf}_n(\mathbf{Y})$, gdzie \mathbf{Y} to drzewo o 4 wierzchołkach, z czego 3 to liście, dla $n = 2, 3, 4$.

.....

$n = 2$

Zauważmy, że w każdym punkcie $\text{Conf}_n(\mathbf{Y})$ leży niemalże identyczna kopia \mathbf{Y} z tym, że brakuje w niej jednego punktu \rightarrow tego, który miałby obie współrzędne równe. Korzystając z addytywnej definicji charakterystyki Eulera, graf \mathbf{Y} ma charakterystykę $\chi(\mathbf{Y}) = 1$. W takim razie, jeśli wyjmemy z niego punkt to dostajemy graf z $\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 - 1 = 0$.

Formuła Riemanna-Hurwitza mówi, że jeśli mamy funkcję $f : \text{Conf}_n(\mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{Y}$, to wtedy

$$\chi(\text{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \int_{\mathbf{Y}} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X)$$

W tym konkretnym przypadku od razu w oczy rzuca się funkcja

$$f(x, y) = x,$$

w której przeciwbrazem dowolnego punktu jest \mathbf{Y} bez punktu. W takim razie

$$\chi(\text{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \chi(\mathbf{Y})\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Zauważmy, że teraz możemy napisać funkcję $g : \text{Conf}_n(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{conf}_n(\mathbf{Y})$ która "skleja" dwa punkty będące swoimi permutacjami. W takim razie nad dowolnym punktem w $\text{conf}_n(\mathbf{Y})$ wiszą dwa punkty w $\text{Conf}_n(\mathbf{Y})$. W takim razie

$$2 \cdot \chi(\text{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \chi(\text{conf}_n(\mathbf{Y}))$$

$$\text{czyli } \chi(\text{conf}_n(\mathbf{Y})) = 0.$$

n = 3

Rozważmy teraz funkcję

$$f : \text{Conf}_3(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Conf}_2(\mathbf{Y})$$

taką, że

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

Teraz nad każdym punktem $\text{Conf}_2(\mathbf{Y})$ wisi kopia \mathbf{Y} bez dwóch punktów. Charakterystyka \mathbf{Y} bez dwóch punktów to -2 , mamy więc

$$\chi(\text{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \int_{\text{Conf}_2(\mathbf{Y})} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X) = \chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) \cdot \chi(\mathbf{Y} - \bullet - \bullet) = -2 \cdot 0 = 0.$$

Oczywiste jest również odwzorowanie $g : \text{Conf}_3(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{conf}_3(\mathbf{Y})$, które skleja 6 punktów mających te same współrzędne w jeden punkt. W takim razie

$$\chi(\text{conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4} \chi(\text{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

n = 4

Analogicznie jak wcześniej, funkcja $f : \text{Conf}_4(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Conf}_3(\mathbf{Y})$ wraz z całką Riemanna-Hurwitza mówi, że

$$\chi(\text{Conf}_4(\mathbf{Y})) = 0.$$

Ponieważ odwzorowanie $g : \text{Conf}_4(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{conf}_4(\mathbf{Y})$ jest $4!$ -krotne, to

$$\chi(\text{conf}_4(\mathbf{Y})) = \frac{0}{4!} = 0.$$

Zadanie 7. Grassmannian $\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$ ma pewien podział na komórki, który możemy opisać za pomocą szufladek i groszków. Rozważmy n szufladek, w których umieszczamy k groszków, co najwyżej po jednym w danej szufladzie. Takie rozmieszczenie groszków reprezentuje zbiór k -wymiarowych podprzestrzeni \mathbb{C}^n . Kolejne l szufladek od lewej reprezentuje podprzestrzeń \mathbb{C}^n rozpiętą przez pierwsze l wektorów bazowych e_1, e_2, \dots, e_l , a liczba groszków leżących w l pierwszych l szufladkach to wymiar przekroju k -wymiarowej podprzestrzeni z tego zbioru z podprzestrzenią rozpiętą przez e_1, \dots, e_l .

- (a) Pokaż, że konkretne rozmieszczenie groszków w szufladach reprezentuje przestrzeń k -wymiarowych podprzestrzeni \mathbb{C}^n izomorficzna z \mathbb{C}^m , gdzie m to liczba przesunięć groszków w lewo o jedną szufladkę dopóki to możliwe.
- (b) Przestrzeń \mathbb{C}^m z poprzedniego podpunktu to otwarta komórka wspomnianego rozkładu. Komórka odpowiadająca rozmieszczeniu groszków A zawiera się w domknięciu komórki odpowiadającej rozmieszczeniu B , gdy A można otrzymać z B poprzez kolejne przesunięcia groszków w lewo o jedną szufladkę. Domknięcie komórki odpowiadającej rozmieszczeniu A nazywamy (A) rozmaitością Schuberta. Policz charakterystykę Eulera rozmaitości Schuberta. Policz charakterystykę Eulera $Gr_{\mathbb{C}}(k, n)$ zliczając te komórki

.....

- (a)** Zaczniemy od rozmieszczenia groszków tak, że nie możemy już żadnego przesunąć w lewo. To znaczy, że podprzestrzenie które są kodowane przez to ustawienie groszków kroją się niepusta z podprzestrzenią rozpinaną przez pierwszy wektor bazowy e_1 , z podprzestrzenią rozpiętą przez dwa pierwsze wektory bazowe e_1, e_2 i tak dalej. W takim razie, typowa podprzestrzeń reprezentowana przez takie ustawienie jest generowana przez wektory

$$\begin{aligned} &e_1 \\ &a_1^1 e_1 + e_2 \\ &\dots \\ &a_1^k e_1 + a_2^k e_2 + \dots + e_k \end{aligned}$$

możemy skasować wektory z poprzedniej linijki, by dostać e_1, e_2, \dots, e_k . Nie mamy żadnego parametru, więc jest to izomorficzne z punktem $(1, 1, 1, \dots, 1)$, czyli o ile to ma sens, to jest to izomorficzne z przestrzenią \mathbb{C}^0 .

Powiedzmy teraz, że możemy m razy przesunąć groszki.