
RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 2R

ZADANIE DODATKOWE 1

TERMIN: 30.10.2022

Niech (Ω, \mathcal{F}) będzie przestrzenią mierzalną i niech \mathcal{G} będzie pod- σ ciałem \mathcal{F} . Niech \mathbb{P} i \mathbb{Q} będą równoważnymi miarami probabilistycznymi na (Ω, \mathcal{F}) . Dokładniej \mathbb{P} jest absolutnie ciągła względem \mathbb{Q} (na \mathcal{F}) i \mathbb{Q} jest absolutnie ciągła względem \mathbb{P} (na \mathcal{F}). Oznaczmy przez X_0 pochodną Radona-Nikodyma \mathbb{Q} względem \mathbb{P} na \mathcal{F} . Przez $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznaczać będziemy wartość oczekiwaną wyznaczoną odpowiednio przez \mathbb{P} i \mathbb{Q} .

1. Uzasadnij, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] > 0$ \mathbb{P} -p.w.
2. Pokaż, że dla każdej ograniczonej, \mathcal{F} -mierzalnej zmiennej Y ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y | \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}]$$

3. Załóżmy, że $X' = GX_0$ dla pewnej ograniczonej \mathcal{G} -mierzalnej zmiennej losowej G . Pokaż, że spełnione są
 - (a) X' jest \mathbb{P} -całkowalna.
 - (b) Dla każdej ograniczonej, \mathcal{F} -mierzalnej zmiennej Y ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y | \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' | \mathcal{G}].$$

4. Załóżmy, że zmienna X' spełnia warunki (a) i (b). Pokaż, że $X' = GX_0$ dla pewnej \mathcal{G} -mierzalnej zmiennej G .
5. Znajdź warunek konieczny i dostateczny (w terminach X_0) na to aby

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y | \mathcal{G}]$$

dla każdej ograniczonej zmiennej Y .