05: Wielomian Jonesa węzłów alternujących

Weronika Jakimowicz

27.03.2024

Spis sznurków

Definicja węzła i linku alternującego 1
Linki rozszczepione (ang. *split*) i pierwsze 3
Po co nam to wszystko? Czyli o jeżach (między innymi) 5
Wielomian Jonesa 8

Definicja węzła i linku alternującego

Mówimy, że diagram regularny D węzła K jest alternujący, jeśli poruszając dowolny punkt $P \in D$ wzdłuż D, ciągle w jedną stronę, będziemy na zmianę pokonywać skrzyżowania górą i dołem.

> **Definicja : węzeł alternujący.**
> Węzeł K jest alternujący, jeśli posiada przynajmniej jeden diagram alternujący.

Najprostszy (o najmniejszej liczbie skrzyżowań) węzeł niealternujący to np. 8_{19} (ale też 8_{20} i 8_{21}), który widać na fig. 1. Do pokazania, że naprawdę nie kłamię jeśli chodzi o jego niealternującą naturę, wrócimy przy okazji powierzchni Seiferta i *sygnatury węzła*.

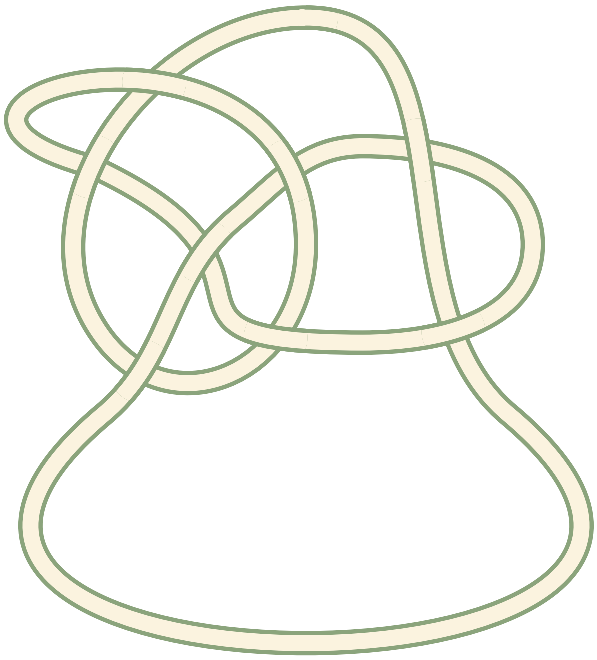


Figure 1: Przykładowy diagram węzła 8_{19}.

> **Fakt : alternująca suma spójna.**
> Jeśli K_1 i K_2 są węzłami alternującymi o alternujących diagramach mających odpowiednio n_1 i n_2 skrzyżowań, to ich suma spójna $K_1 \# K_2$ ma diagram alternujący o dokładnie $(n_1 + n_2)$ skrzyżowaniach.

Dowód
Wiemy, że "na zewnątrz" węzła K_1 istnieje segment, pod którym przechodzi dokładnie jeden inny segment. Tak samo w przypadku diagramu K_2. Mamy dwie opcje, jak widać na fig. 2.

Pierwsza z nich jest raczej oczywista. Druga wymaga zauważenia, że konsekwentnie przyglądając się łuczkom na zewnątrz diagramu po lewej, w końcu przejście "nad" będzie musiało występować na górze. Wtedy wystarczy taki łuczek przeciągnąć nad całym węzłem w przestrzeń pomiędzy węzłami i skorzystać z niego do połączenia K_1 i K_2 tak jak na obrazku na dole fig. 2.

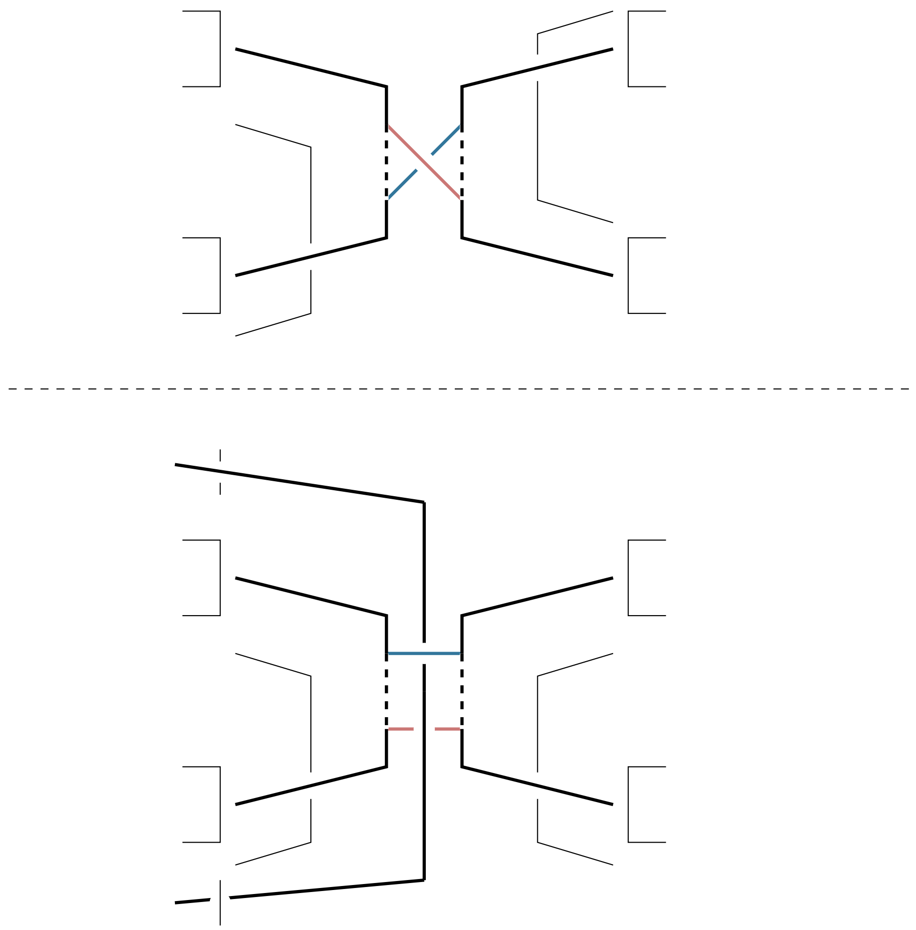


Figure 2: Dwa możliwe ułożenie łuczków na zewnątrz alternujących diagramów K_1 i K_2.

Zadanie 1.
Rozważmy węzeł wielokątny K oraz prostą l, wzdłuż której K rzutujemy. Niech K będzie położony w sposób regularny (tzn. co najwyżej dwa punkty mogą leżeć na jednej prostej równoległej do osi rzutu).

Pokaż, że istnieje wówczas węzeł alternujący K' w pozycji regularnej taki, że rzuty wzdłuż l obu węzłów są identyczne. W rzucie nie rozróżniamy który segment w skrzyżowaniu biegnie górą.

Szukany w zadaniu wyżej węzeł alternujący niekoniecznie musi być nietrywialny. Aby więc skonstruować węzeł K' wystarczy wybrać punkt startowy na K i przemieszczać się wzdłuż niego konsekwentnie w jedną stronę, na zmianę wymagając, by segment w danych skrzyżowaniu szedł górą lub dołem. Nietrywialną częścią tego podejścia jest pokazanie, że na końcu uda nam się zamknąć tak zatoczoną drogę.

Drugi sposób to użycie indukcji po ilości skrzyżowań K, rozcinanie go tak, by dostać co najmniej dwa rozłączne węzły, do których możemy przyłożyć założenie indukcyjne. Następnie wystarczy połączyć te węzły korzystając z faktu wyżej.

Definicja bycia alternującym linkiem jest analogiczna jak bycia alternującym węzłem, więc ją pominiemy. Powiemy natomiast o kilku ciekawych przypuszczeniach i o Szkotach.

Twierdzenie : hipotezy Tait'a.
Chociaż poniższe trzy stwierdzenia nazywają się hipotezami, to zostały udowodnione w 1987 (dwa pierwsze) i 1991 (ostatnie), ale nie przez Tait'a.

1. Dowolny zredukowany diagram alternujący ma najmniejszą możliwą liczbę skrzyżowań.
2. Dowolne dwa zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła mają tę samą sumę ważoną skrzyżowań (ang. *writhe*)
3. Dowolne dwa zredukowane alternujące diagramy D_1 i D_2 zorientowanego, pierwszego linku (co to znaczy dowiemy się za chwilę) można przekształcić przy pomocy skończonej liczby ruchów *flype*.

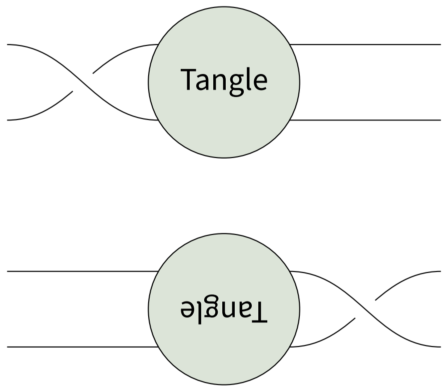


Figure 3: Wywracanie skarpety na lewą stronę, czyli *flype*.

Słowo *flype* pochodzi ze szkockiego i oznacza wywracanie skarpetki na lewą stronę. Chodzi o obracanie kołtuna (ang. *tangle*) o 180 stopni (patrz. fig. 3 lub wikipedia <3). Kołtun to włożenie n łuczków w S^3 tak, że ich 2n końców jest przyklejonych do 2n punktów zaznaczonych na granicy S^3.

Linki rozszczepione (ang. *split*) i pierwsze

Definicja : link i diagram rozszczepiony.
Powiemy, że **link** L (o co najmniej dwóch komponentach) zanurzony w S^3 jest **rozszczepiony**, jeśli możemy S^3 podzielić na dwie kule S^2 tak, że każda ma po przynajmniej jednym komponencie L.

Definicja ta przenosi się na diagram $D \in S^2$ poprzez spłaszczenie tych sfer S^2 do zamkniętych krzywych. To znaczy, **diagram** D **jest rozszczepiony**, jeśli istnieje prosta krzywa zamknięta w $S^2 \setminus D$, która dzieli je na dwa rozłączne dyski, każdy zawierający przynajmniej jeden komponent D.

Link trywialny, czyli O O, jest w oczywisty sposób rozszczepialny.

Link Whitehead'a (patrz fig. 4) nie jest rozszczepialny. Aby to pokazać, wystarczy zauważyć, że link Whitehead'a składa się z dwóch trywialnych węzłó O. Gdyby więc był rozszczepialny, to moglibyśmy przekształcić fig. 4 w diagram O O, którego wielomian Jonesa wynosi $V(O\ O) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$. Wielomian Jonesa linku Whitehead'a wynosi natomiast $V(\text{Whitehead}) = t^{-\frac{3}{2}}(-1+t-2t^2+t^3-2t^4+t^5)$. Ewidentnie coś się nie zgadza.

Figure 4: Link Whiteead'a nie jest rozszczepialny, ale jest alternujący.

Twierdzenie .
Link L o alternującym diagramie D jest rozszczepialny $\iff$ D jest rozszczepialnym diagramem.

Dowód
W książce Pana Lickorisha p.t. *An Introduction To Knot Theory*, str. 36. Są ciekawsze rzeczy do powiedzenia.

Na pierwszych zajęciach dowiedzieliśmy się, że nietrywialny węzeł K jest pierwszy (ang. *prime*), jeśli nie jest sumą spójną dwóch nietrywialnych węzłów. Moglibyśmy powiedzieć, że każda kula $S^2 \subseteq S^3 \setminus K$ przecinająca węzeł K w dwóch punktach dzieli S^3 na dwa fragmenty, z czego jeden posiada "trywialny łuczek", tj. łuczek który bez problemu możemy rozsupłać przy pomocy ruchów Reidenmeistera. W podobny sposób możemy przenieść definicję pierwszości na linki i ich diagramy.

Definicja : link i diagram pierwszy.
Link $L \subseteq S^3$, różny od linku (i węzła) trywialnego, jest **pierwszy**, jeśli każda sfera S^2 przecinająca go w dwóch punktach dzieli S^3 na dwa fragmenty, z których jeden zawiera jeden trywialny łuczek L.

Diagram $D \subseteq S^2$ **jest pierwszy**, jeśli każda prosta krzywa zamknięta w S^2 przecinająca D w dwóch punktach zawiera w swoim wnętrzu lub na zewnątrz diagram odpowiadający rozwiązywalnemu łuczkowi. Takie D jest *silnie pierwszy*, jeśli zawsze po takim rozcięciu znajdziemy diagram z zerową liczbą skrzyżowań.

Tutaj warto zauważyć, że jedynym linkiem, który jest jednocześnie pierwszy i rozszczepiony jest link trywialny O O.

Kolejne twierdzenie, na którego dowód musimy troszkę poczekać, które pozwala nam badać pierwszość linków alternujących przez pryzmat ich diagramów.

Twierdzenie .
Załóżmy, że L jest linkiem o alternującym diagramie D. Wtedy L jest linkiem pierwszym $\iff$ D jest diagramem pierwszym.

Dowód
Tak jak i wcześniej, odsyłam do książki pana Lickorisha.

Po co nam to wszystko? Czyli o jeżach (między innymi)

Zacznijmy od szybkiej informacji co to znaczy być powierzchnią. Oczywiście mówiąc powierzchnia mamy na myśli 2-rozmaitość, czyli przestrzeń której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$. Zamkniętych powierzchni nie ma bardzo dużo i każda taka powierzchnia jest wymieniona niżej

1. sfera S^2
2. suma spójna n torusów $\mathbb{T}^2$
3. suma spójna n płaszczyzn rzutowych $\mathbb{R}P^2$

Poza tym jest m.in. butelka Kleina (nieorientowalna, bez brzegu) czy wstęga Möbiusa (nieorientowalna, z brzegiem).

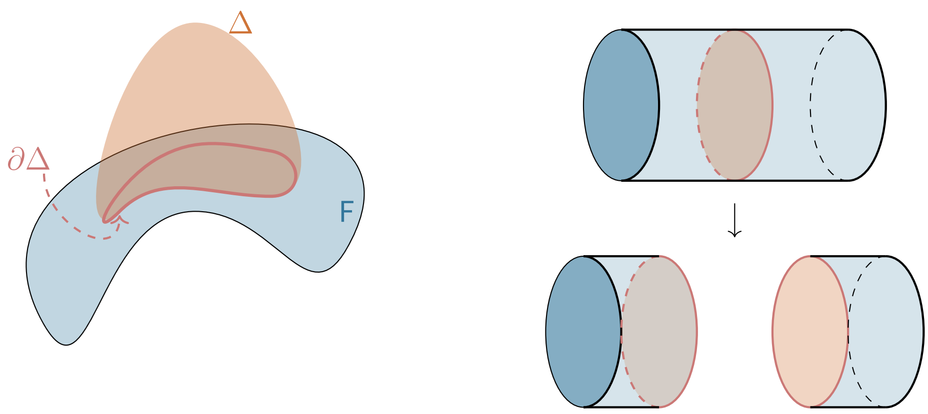
Powiemy teraz, co to znaczy, że powierzchnia $F \subseteq M$, gdzie M jest 3-rozmaitością, jest niekompresowalna. Przy okazji dowiemy się, co to znaczy być dyskiem rozpinającym powierzchnię.

Definicja : powierzchnia niekompresowalna.
Niech F będzie powierzchnią różną od S^2 zanurzoną w 3-rozmaitość M. Powiemy, że F jest **niekompresowalna**, jeśli każdy dysk $\Delta \subseteq M$ taki, że $\Delta \cap F = \partial\Delta$ (tzn. Δ *rozpina* powierzchnię F) ogranicza dysk w F (patrz fig. 5).

Sfera S^2 jest niekompresowalna, jeśli nie ogranicza D^3 w M.

Fakt .
Niech L będzie nierozszczepialnym, pierwszym i alternującym linkiem, a F niech będzie zamkniętą niekompresowalną powierzchnią w $S^3 \setminus L$. Wówczas istnieje dysk Δ rozpinający F w S^3, który przecina L w dokładnie jednym punkcie.

Żeby to zobaczyć, trzeba wyobrazić sobie *najeżenie węzła/linku* L, czyli jego otoczenie tubularne (zamiast nitki mamy sznurek bawełniany o średnicy 5mm). Takich otoczeń mamy dużo, dla każdego $\varepsilon > 0$. Możemy więc wybierać otoczenia U_n o średnicy $\frac{1}{n}$. Kiedy wyjmujemy z S^3 węzeł K duża część



(a) powierzchnia niekompresowalna

(b) powierzchnia kompresowalna

Figure 5: Powierzchnię (b) możemy rozciąć wzdłuż $\partial\Delta$ i zakleić dwoma kopiami Δ, by dostać dwie "zakrętki". Jest tak, ponieważ otoczenie tubularne Δ ma ciekawy przekrój z F. W przypadku powierzchni (a) otoczenie tubularne Δ daje po prostu annulus na F.

U_n zostaje, więc możemy wybierać duszczki Δ_n, które mają przekrój z otocznеiem U_n o średnicy $\frac{1}{n}$ na wysokości tylko jednego segmentu. Granica tych dyszczków nie jest już w $S^3 \setminus L$, bo zahacza o otoczenie średnicy 0, tzn. przecina się z węzłem L w jednym punkcie.

Fakt .
Niech L będzie nierozszczepialnym, pierwszym i alternującym linkiem. Każdy niekompresowalny torus T zawarty w $S^3 \setminus L$ jest równoległy do granicy najeżenia pewnego komponentu L.

Na przykład dla L będącego linkiem o jednym elemencie, zawierającym tylko węzeł 3_1, torusem równoległym do granicy jego najeżenia jest powierzchnia widoczna na fig. 6. Tak się składa, że link wyżej jest linkiem trywialnym, nierozszczepialnym i alternującym, więc tylko torus zawierające L w swoim środku są niekompresowalne.

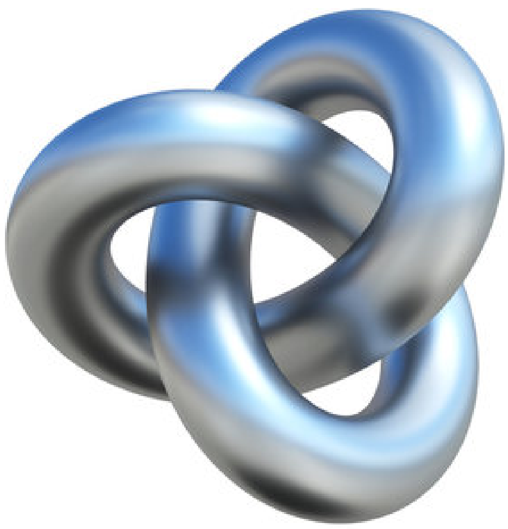


Figure 6: Najeżenie węzła 3_1.

Może nas to interesować, gdyż 3-rozmaitości M, w których wszystkie niekompresowalne torusy są granicami najeżenia pewnego linku, zwykle posiadają strukturę hiperboliczną (pisał o tym pan W. P. Thurston i po przepisaniu do LaTeXwyszło 379 stron pdf, który można znaleźć tutaj). Hiperboliczność 3-rozmaitości definiujemy przy pomocy metryki riemannowskiej i krzywizn, ale można to uprościć do stwierdzenia, że hiperboliczność oznacza brak materiału (sformułowanie ukradzione A. Karolakowi), czyli m.in. trójkąciki wtedy mają kąty sumujące się do mniej niż π.

Definicja : sfera Conwaya.
Dla linku L $\subseteq$ S^3 2-sferę Σ (tzn. Σ = S^2), która przecina L w 4 punktach nazywamy **sferą Conwaya**, jeśli

1. $\Sigma \setminus$ L jest niekompresowalne w S$^3 \setminus$ L
2. każde S$^2 \subseteq$ S$^3 \setminus \Sigma$ przecinające L w dwóch punktach odcina niezawiązany segment L.

Tutaj moglibyśmy temat drążyć dalej, ale niestety pojawia się następujący fragment tekstu w Lickorishu

They [Bonahon and Siebenmann] *show*
that for any knot that is not a satellite,
there is a well-defined maximal collection
of Conway spheres that divides the knot
into an arborescent part and a part in
which any Conway sphere is pairwise
parallel to a boundary component.

po przeczytaniu którego autor tej notatki postanowił ograniczyć się do wklejenia przykładu sfery Conwaya w fig. 7, zaczerpniętego z wikipedii

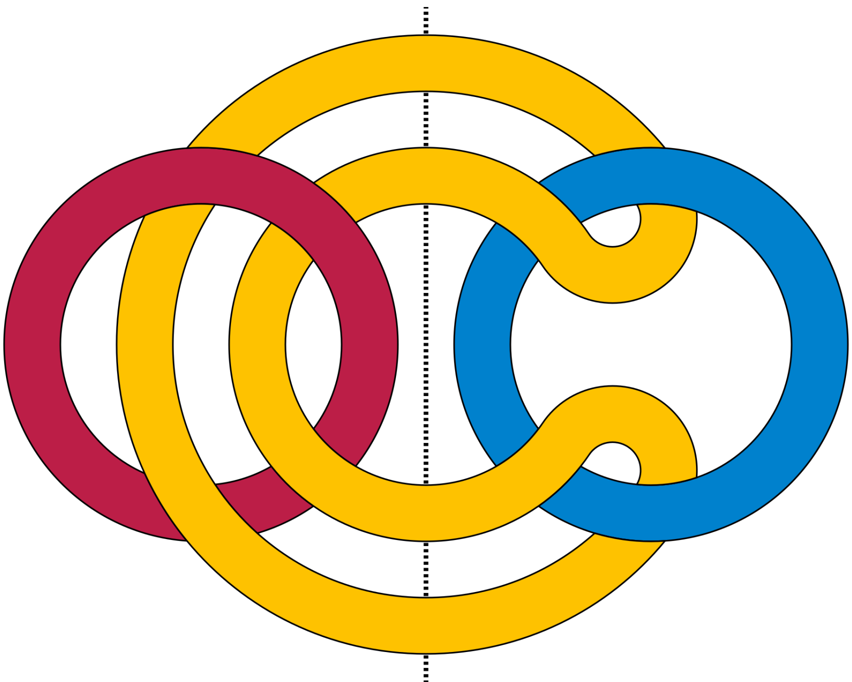


Figure 7: Przerywana linia to sfera Conwaya dla L =pierścienie boromejskie.

Wielomian Jonesa

Tydzień temu przypisywaliśmy skrzyżowaniom wartość ± 1. Dzisiaj nazwiemy taką właśnie funkcję $s : [n] \to \{1, -1\}$, gdzie n to ilość skrzyżowań badanego diagramu linku D.

> **Definicja .**
> Niech D będzie diagramem linku L o n skrzyżowaniach. Funkcję $s : \{1, \dots, n\} \to \{1, -1\}$ nazywamy **stanem** diagramu D.

Stanów jest 2^n, ale spośród nich wyróżniają się dwa konkretne: s_+ i s_-, przypisujące odpowiednio 1 i -1 wszystkim skrzyżowaniom.

Mając dany stan s i diagram D możemy określić nowy diagram sD, który przypisuje i-temu skrzyżowaniu odpowiednie jego odkrzyżowanie, w zależności od wartości $s(i)$ w sposób zdefiniowany na fig. 8.

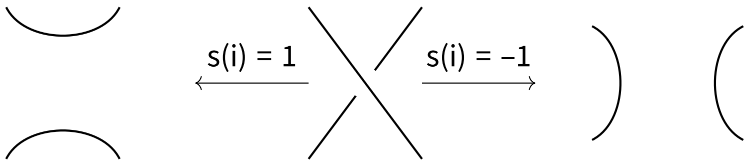


Figure 8: Zasada zamiany skrzyżowań w sD.

Wynikowy diagram sD nie posiada skrzyżowań (wszystkie wycięliśmy), ale posiada $|sD|$ zamkniętych krzywych.

Teraz możemy zdefiniować, w dość bolesny sposób, **nawias Kauffmanna** przy pomocy stanów diagramu D:

$$\langle D \rangle = \sum_s \left[A^{\sum_{i\geq 1} s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} \right]. \qquad (\star)$$

Zauważmy, że jest to dokładnie to samo, co pisaliśmy tydzień temu, z tym że tym razem nie wykorzystujemy rekurencji.

> **Fakt .**
> Wzór $(\star)$ jest naprawdę nawiasem Kauffmanna sprzed tygodnia.

Dowód
Oznaczając wartość $(\star)$ przez $[D]$ mamy do pokazania 3 kroki

1. $[O] = 1$
2. $[D \sqcup O] = (-A^{-2} - A^2)[D]$
3. $[\times] = A[)\,(] + A^{-1}[\asymp]$

(1) wychodzi od razu z faktu, że O ma dokładnie jeden stan pusty, czyli $\sum_{i\geq 1} s(i) = 0$ i $|sO| = 1$. Równość numer (2) wynika z faktu, że $D \sqcup O$ na D zachowuje się dokładnie tak samo jak D, ale z racji O dochodzi jedna krzywa zamknięta. Stąd

$$[D \sqcup O] = \sum_s \left[A^{\sum_{i\geq 1} s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|+1-1} = \sum_s [A^{\sum_{i\geq 1} s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} (-A^{-2} - A^2). \right.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że diagramy $\asymp$ i) (nie mają stanów różnych od s_+ i s_- diagramu $\times$

$$
\begin{aligned}
A[)\,(] &= A(-A^{-2} - A^2)^{2-1}A \\
&= A(-A^{-2} - A^2)^{|\times|-1}A^{s_-(x)-1} = \\
&= (-A^{-2} - A^2)^{||-1}A^{s_-(x)} \\
A^{-1}[\asymp] &= A^{-1}(-A^{-2} - A^2)^{2-1}A^{-1} = \\
&= A^{-1}(-A^{-2} - A^2)^{|\times|-1}A^{s_+(x)+1} \\
&= (-A^{-2} - A^2)^{||-1}A^{s_+(x)}
\end{aligned}
$$

gdzie x to jedyne skrzyżowanie w $\times$. Po dodaniu wszystko się zgadza.

Wprowadźmy teraz kolejne pojęcie dotyczące diagramów, tj. ich fajności (po angielsku nazywamy to *adequate*, ale wydaje mi się to dojść niemiłym określeniem diagramów, które naprawdę się starają).

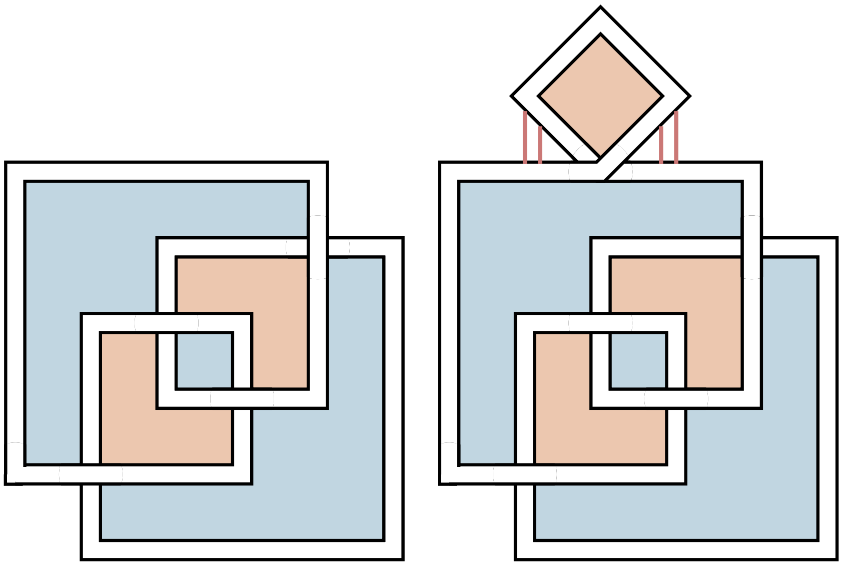
Definicja : diagram fajny.
Powiemy, że diagram D jest **fajny**, jeśli dla wszystkich stanów s takich, że $\sum_{i\geq 1} s(i) = n - 2$ zachodzi $|s_-D| > |sD|$ i $|s_+D| > |sD|$. Jeśli tylko jedna nierówność to jest on odpowiednio – lub + fajny.

Po co nam to wszystko? Okazuje się, że najmniejsze diagramy alternujące są zawsze fajne c:

Fakt .
Zredukowany diagram alternujący D jest zawsze fajny.

Dowód
Pomalujmy wnętrze diagramu na niebiesko i pomarańczowo naprzemiennie, jak np. widać na fig. 9 (a). Ponieważ węzeł jest alternujący, to wiemy, że s_+D zachowa tylko fragmenty pomalowane na jeden kolor, np. czerwony jak na rysunku niżej. Z kolei s_-D otrzyma tylko połacie niebieskie. Dzięki brakowi zbędnych krawędzi nie będziemy mieli dwóch fragmentów, które zleją się w jedność, jak np. na fig. 9 (b) po rozcięciu zaznaczonym na czerwono.

Zamieniając dwa skrzyżowania na przeciwną wartość s połączymy dwa lub więcej fragmenty różnego koloru w jeden, więc dostaniemy ich zawsze mniej niż w przypadku gdy wszystkie skrzyżowania miały tę samą wartość s.



(a) diagram bez zbytku (b) diagram ze zbytkiem

Figure 9: Pomalowany diagram (węzła 4_1).

Fakt .

Niech D będzie nierozszczepionym diagramem o n skrzyżowaniach. Wówczas

$$|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2,$$

z równością jeśli D jest zredukowanym diagramem alternującym.