Lista 1 z notatek

Charakterystyka Eulera

2023

1. Niech $V(X)$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji $X \to \mathbb{K}$ ze zbioru skończonego X w ciało $\mathbb{K}$. Uzasadnić, że $V(X)$ jest przestrzenią liniową i

$$\dim V(X) = |X|$$

2. Niech $V = \bigoplus_{i<n} V_i$, $W = \bigoplus_{j<m} W_j$ będą zgradowanymi przestrzeniami liniowymi. Obliczyć $\chi(V \oplus W)$ oraz $\chi(V \otimes W)$ w terminach $\chi(V)$ i $\chi(W)$. Przypomnijmy, że dla zgradowanej przestrzeni liniowej V jak wyżej, definiujemy

$$\chi(V) = \sum_{i<n} (-1)^i \dim V_i.$$

3.
   - Czym jest stożek n-sympleksu?
   - Opisać realizację geometryczną stożka nad kompleksem symplicjalnym $\mathcal{K}$ (można zacząć od sympleksu).
   - Zdefiniować pojęcie stożka nad przestrzenią topologiczną.
   - Policzyć charakterystykę Eulera stożka.

4. Czym jest realizacja symplicjalna skończonego zbioru liniowo uporządkowanego? Pokazać, że realizacja symplicjalna posetu jest kompleksem flagowym.

5. Podać definicję podrozbicia barycentrycznego kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ opisując zbiór wierzchołków oraz warunek na bycie n-sympleksem, w terminach sympleksów $\mathcal{K}$.

6.
   - Opisać sympleksy geometryczne w realizacji geometrycznej n-sympleksu.
   - Przeanalizować definicję geometrycznego podrozbicia barycentrycznego kompleksu symplicjalnego.
   - Pokazać, że $\widehat{\mathcal{K}}$ jest homeomorficzny z $\widehat{\mathcal{K}'}$.

7. - Pokazać, że realizacja geometryczna gwiazdy $\mathrm{St}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą kulą wokół v w $\widehat{\mathcal{K}}$.
   - Pokazać, że realizacja geometryczna linku $\mathrm{Lk}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą sferą wokół v w $\widehat{\mathcal{K}}$.

8. - Pokazać, że liczba n-sympleksów w kompleksie symplicjalnym $f_n(\cdot)$ jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.
   - Pokazać, że kombinacja liniowa addytywnych niezmienników kompleksów jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.