Zima 2023-24

## Spis rozmaitości treściowalnych

04.10.2	3 : Wstęp	3
1.1.	Co to kategoria	3
1.2.	Kompleksy	4
	Funktory kowariantne i kontrawariantne	5
09.10.2	3 : Równoważność kategorii	7
2.1.	Presnop i snop	7
2.2.	Funktory wierne, pełne	8
2.3.		9
2.4.	Równoważność kategorii	11
	023 : Tymczasowe	13
3.1.	Granice i kogranice	15
23.10.2	3 : Funktory sprzężone [adjoint functors]	17
4.1.	Kategorie addytywne i abelowe	19
30.10.2	023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie	26
	Kompleks łańcuchowy i sympleksy	26
	Homologie	27
	Pull-back i push-out	28

## Wykład 04.10.23: Wstęp

#### 1.1 Co to kategoria

Rozważmy układ danych **C** zawierający:

- klasę obiektów Ob C
- dla dowolnej pary X, Y ∈ Ob **C** zbiór Hom**c**(X, Y), którego elementy nazywany *morfiz-mami* i zapisujemy  $\varphi$  : X → Y lub X  $\xrightarrow{\varphi}$  Y
- kolekcję odwzorowań, zwanych złożeniami, dla wszystkich X, Y, Z ∈ Ob C takich, że

#### Definicia 1.1: kategoria (mała).

Układ danych **C** jak wyżej nazywamy **kategorią**, jeśli spełnione są następujące warunki:

- 1. Zbiory  $\mathsf{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$  dla  $X,Y\in\mathsf{Ob}\,\mathbf{C}$  są parami rozłączne (tzn. morfizmy mają dobrze określone dziedziny i przeciwdziedziny).
- 2. Dla każdego A  $\in$  Ob **C** istnieje Id<sub>A</sub>  $\in$  Hom<sub>**C**</sub>(A, A) takie, że  $\varphi \circ$  Id<sub>A</sub> =  $\varphi$  oraz Id<sub>A</sub>  $\circ \psi = \psi$ .
- 3. Złożenie morfizmów jest łączne, tzn. dla morfizmów

$$\mathsf{X} \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} \mathsf{Y} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \mathsf{Z} \stackrel{\eta}{\longrightarrow} \mathsf{W}$$

zawsze zachodzi równość  $(\eta\psi)\varphi = \eta(\psi\varphi)$ .

Dodatkowo, jeśli Ob C jest zbiorem, to C nazywamy małą kategorią.

## Przykład(y) 1.1

 Kategorię wszystkich pierścieni wektorowych nad ciałem K oznaczamy Vect<sub>k</sub>. Jeśli interesują nas przestrzenie tylko skończonego wymiaru, to istnieje kategoria Vect<sup>fin</sup> przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych.

Obiektami obu tych kategorii są przestrzenie liniowe (skończonego wymiaru), a morfizmami są przekształcenia liniowe miedzy nimi.

- Wszystkie zbiory wraz z funkcjami między nimi jako morfizmami tworzą kategorią Set zbiorów.
- Jeśli rozważamy jako obiekty tylko zbiory z określonym dobrym porządkiem, to morfizmami mogą być funkcje słabo monotoniczne. Taką kategorię oznaczamy Set<.</li>
- 4. Kategoria wszystkich grup wraz z homomorfizmami jako morfizmami jest oznaczana **Grp**, natomiast kategoria, której obiekty to tylko grupy abelowe jest oznaczana **Ab**.
- 5. Pojedyncza grupa G może tworzyć sama w sobie jednoobiektową kategorię  $\mathbf{c}_{\mathrm{G}}$  taką, że
  - **⇒** Ob  $C_G = \{ * \}$
  - $\longrightarrow$  Hom $_{\mathbf{C}_G}(\star,\star)=$  G, a złożenia działa jak mnożenie elementów G.
- 6. Dla dowolnego pierścienia R istnieje kategoria, której obiektami są (lewe) R-moduły, a morfizmami są homomorfizmy między tymi modułami. Oznaczamy to R **mod**.
- 7. Wszystkie przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi nazywamy kategorią przestrzeni topologicznych **Top**.
- 8. Wszystkie gładkie rozmaitości są obiektami kategorii **Diff**, a morfizmy to gładkie odwzorowania między rozmaitościami.
- 9. Kategoria  $\mathbf{Rep}_{G,K}$  posiada jako obiekty reprezentacje grupy G na przestrzeniach liniowych nad K, a jako morfizmy wszystkie przekształcenia G-ekwiwariantne.

## 1.2 Kompleksy

**Definicja 1.2: kompleksy łańcuchowe (grup abelowych).**Jeśli ciąg (grup abelowych) A.

$$... \, \longrightarrow \, A_0 \, \stackrel{d_0}{\longrightarrow} \, A_1 \, \stackrel{d_1}{\longrightarrow} \, A_2 \, \stackrel{d_2}{\longrightarrow} \, ...$$

jest taki, że dla każdego n  $\mathbb{Z}$  (dopuszczamy ujemne indeksy) złożenie  $d_{n+1} \circ d_n = 0$ , to nazywamy go kompleksem tańcuchowym.

Możemy rozważać kategorię, której obiektami są kompleksy łańcuchowe obiektów z jednej kategorii  ${\bf C}$ , np. grup abelowych. Morfizmem między kompleksem A. a kompleksem B. nazwiemy wówczas ciąg homomorfizmów  $\varphi_i \in {\sf Hom}_{\bf C}({\sf A}_i, {\sf B}_i)$  taki, że w diagramie

każdy prostokąt komutuje, tzn.

$$d_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n^A$$

dla każdego n.

#### 1.3 Funktory kowariantne i kontrawariantne

#### Definicja 1.3: funktor.

**Funktorem** z kategorii **C** w kategorię **D** nazywamy dwa przyporządkowania: między obiektami tych kategorii i między morfizmami takie, że:

- $\blacksquare$  Ob  $\mathbf{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathsf{Ob} \, \mathbf{D}$

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\ni\varphi\mapsto\mathsf{F}(\varphi)\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(\mathsf{X}),\mathsf{F}(\mathsf{Y}))$$

zachowuje składanie morfizmów, tzn.  $\mathsf{F}(\varphi \circ \psi) = \mathsf{F}(\varphi) \circ \mathsf{F}(\psi)$ .

Takie przyporządkowania między kategoriami nazywa się też, bardziej precyzyjnie, funktorami kowariantnymi.

## Przykład(y) 1.2

1. Funktor F: **Set**  $\to$  **Vect**<sub>K</sub> zdefiniujmy tak, że dowolny  $X \in Ob$  **Set** przechodzi ma przestrzeń wektorową nad ciałem K o bazie X, tzn.:

$$F(X) = \left\{ \sum_{x \in X} a_x x : \alpha_x \in K, \text{tylko skończenie wiele } \neq 0 \right\}$$

## Definicja 1.4: kategoria dualna.

Dla kategorii **C** możemy zdefiniować nową kategorię,  $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$  w której każdy morfizm  $\varphi^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(Y, X)$  zostaje odwrócony:

$$X \xrightarrow{\varphi} Y$$

Wtedy Ob  $\mathbf{C}^{op}$  to obiekty dualne do elementów znajdujących się w Ob  $\mathbf{C}$ . Tak zdefiniowaną kategorię  $\mathbf{C}^{op}$  nazywamy **kategorią dualną**.

## Przykład(y) 1.3

1. Kategoria dualna do kategorii przestrzeni liniowych  $\mathbf{Vect}^{op}_{K}$  jest kategorią, której obiekty to przestrzenie sprzężone,  $V^* \in \mathsf{Ob}\, \mathbf{Vect}^{op}_{K}$ , zawierające funkcjonały liniowe  $V \to K$ . Każdy morfizm  $\varphi: V \to W$  w  $\mathbf{Vect}_{K}$  indukuje wówczas odwzorowanie  $\varphi^*: W^* \to V^*$  takie, że dla  $f \in W^*$  mamy  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi: V \to W \to K$ .

Kojarzenie funkcjonału  $\varphi^* \in V^*$  z elementem  $v \in V$  jest czasem oznaczane przez  $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$ .

#### Definicja 1.5: funktor kontrawariantny.

Funktor (kowariantny) z kategorii  $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$  do kategorii  $\mathbf{D}$  jest nazywamy **funktorem kontrawariantnym** z  $\mathbf{C}$  do  $\mathbf{D}$ .

## Wykład 09.10.23: Równoważność kategorii

#### 2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię  $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})$  zdefiniujemy tak, że

- $\blacksquare$  Ob **Otw**(**X**) = {U  $\subseteq$  X : U zbiór otwarty}
- morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funktor kontrawariantny  $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$  to  $\mathbf{presnop}$  na przestrzeni topologicznej X.

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

#### Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a U  $\subseteq$  X będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor F :  $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}(\mathbf{X})$  definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}\$$

Dla  $V \subseteq U \subseteq X$  otwartych zbiorów mamy

$$F(U) \xleftarrow{\text{obciecie}} F(V)$$
 $C(U) \xleftarrow{} C(V)$ 

co w widoczny sposób spełnia  $F(\varphi \psi) = F(\varphi)F(\psi)$ .

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

## Definicja 2.1: Presnop, snop.

Presnopem na kategorii C nazywamy dowolny funktor

$$F: \textbf{C}^{op} \to \textbf{Set}$$

**Snopem** nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  i dla wszystkich  $s_i \in F(U_i)$  (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych

 $i,j \in I$  mamy  $s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)$ , to istnieje jedyne cięcie  $s \in F(U)$  takie, że dla wszystkich  $i \in I$  s  $\upharpoonright U_i = s_i$ . Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$\begin{split} (\forall \ U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall \ s_i \in F(U_i)) \ \left[ (\forall i, j \in I) \ s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[ (\exists ! \ s \in F(U)) (\forall i \in I) \ s \upharpoonright U_i = s_i \right] \end{split}$$

#### Przykład(y) 2.2

1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzą kiełki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe źdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.

#### 2.2 Funktory wierne, pełne

#### Definicja 2.2: podkategoria C' kategorii C.

To kategoria spełniająca następujące warunki:

- riangle Ob**C** $' \subseteq$  Ob**C**
- $\twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}'}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$
- $\implies id_X^{\mathbf{C}'} = id_X^{\mathbf{C}}$  zawsze gdy  $X \in Ob\mathbf{C}'$
- ⇒ złożenie morfizmów w **C**′ zachowuje się tak samo jak w **C**

Mówimy, że podkategoria  $\mathbf{C}'$  jest *pełna*, gdy  $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}'}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ 

## Przykład(y) 2.3

- 1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem K **Vect**<sup>fin</sup> jest podkategoria kategorii wszystkich przestrzeni liniowych **Vect**<sub>K</sub>. Jest to pełna podkategoria.
- 2. Analogicznie, kategoria grup abelowych **Ab** jest pełną podkategorią kategorii **Grp**
- 3. Kategoria gładkich rozmaitości  $\mathbf{C}^{\infty}$  **rozm** jest podkategorią kateogorii wszystkich przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

## Definicja 2.3: funktor wierny, pełny.

Funkctor  $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  jest

- wierny gdy F:  $Hom_{\mathbf{C}}(X,Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X),F(Y))$  jest bijekcją
- **pełny**, gdy dla wszystkich X,Y  $\in$  Ob**C** przekształcenie F :  $Hom_{\mathbf{C}}(X,Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X),F(Y))$  jest surjekcją

#### Przykład(y) 2.4

- 1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
- 2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

#### 2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

#### Definicja 2.4: naturalne przekształcenie funktorów.

Dla dwóch funktorów F, G:  $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$  układ morfizmów f: F  $\to$  G w  $\mathbf{D}$  taki, że dla każdego X  $\in$  Ob $\mathbf{C}$  f(X): F(X)  $\to$  G(X) i dla każdego  $\varphi$ : X  $\to$  Y  $\in$  Hom $_{\mathbf{C}}$ (X, Y) diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \stackrel{f(X)}{---} & G(X) \\ F(\varphi) & & & \downarrow G(\varphi) \\ F(Y) & \stackrel{f(Y)}{---} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy naturalnym przekształceniem funktorów F i G.

## Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory Id, ab :  $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$  (identyczność i abelianizacja ab(G) = G/[G,G]).

Rozważmymy  $f: Id \rightarrow ab$ , wtedy Id(G) = G, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{split} \mathsf{Id}(\mathsf{G}) &= \mathsf{G} & \xrightarrow{\qquad \mathsf{f}(\mathsf{G}) \qquad} \mathsf{G}/\left[\mathsf{G},\mathsf{G}\right] = \mathsf{ab}(\mathsf{G}) \\ \mathsf{Id}(\varphi) &= \varphi \downarrow & & \downarrow \mathsf{ab}(\varphi) \\ \mathsf{Id}(\mathsf{H}) &= \mathsf{H} & \xrightarrow{\qquad \mathsf{f}(\mathsf{H}) \qquad} \mathsf{H}/\left[\mathsf{H},\mathsf{H}\right] = \mathsf{ab}(\mathsf{H}) \end{split}$$

Dla każdego  $G \in \mathsf{Ob}\mathbf{Grp}$  zdefiniujemy  $\mathsf{f}(G) : \mathsf{Id}(G) \to \mathsf{ab}(G)$  jako

$$f(G): G \rightarrow G^{alb} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w G przechodzi przez dowolny homomorfizm  $\varphi: G \to H$  na komutant w H:

$$(\forall \mathsf{g},\mathsf{h} \in [\mathsf{G},\mathsf{G}]) \ \varphi(\mathsf{gh}) = \varphi(\mathsf{g})\varphi(\mathsf{h}) = \varphi(\mathsf{h})\varphi(\mathsf{g}) = \varphi(\mathsf{hg})$$

- 2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów  $H_n$ ,  $\Pi_n$ : **Top** $_* \to \mathbf{Grp}$ . Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.
- 3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów Id,  $\star\star$ :  $\mathbf{Vect}_{K}\to\mathbf{Vect}_{K}$ . Dla  $V\in\mathbf{Vect}_{K}$  definiujemy

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{c} V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^{**} \\ W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**} \end{array}$$

komutuje, czyli f(V) $\varphi^{**} = \varphi$ f(W).

$$\begin{split} (\varphi^{**} \circ \mathsf{f}(\mathsf{V}))(\mathsf{v}) &= \varphi^{**}(\mathsf{f}(\mathsf{V})(\mathsf{v})) = \varphi^{**}(\langle \cdot, \mathsf{v} \rangle) = \\ &= \langle \cdot, \mathsf{v} \rangle \circ \varphi^* = \langle \varphi^*(\cdot), \mathsf{v} \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \varphi, \mathsf{v} \rangle = \langle \cdot, \varphi(\mathsf{v}) \rangle = \mathsf{f}(\mathsf{W})(\varphi(\mathsf{v})) = \\ &= (\mathsf{f}(\mathsf{W}) \circ \varphi)(\mathsf{v}) \end{split}$$

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy **Funct**( $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ) i mając naturalne przekształcenia funktorów  $\mathbf{F} \overset{\mathrm{a}}{\to} \mathbf{G} \overset{\mathrm{b}}{\to} \mathbf{H}$ , dowolne X, Y  $\in$  Ob $\mathbf{C}$  oraz  $\varphi: \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$  rysujemy

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{& a(X) &} & G(X) & \xrightarrow{& b(X) &} & H(X) \\ F(\varphi) & & & & \downarrow G(\varphi) & & & \downarrow H(\varphi) \\ F(Y) & \xrightarrow{& a(Y) &} & & G(Y) & \xrightarrow{& b(Y) &} & H(Y) \end{array}$$

 $gdzie (b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X).$ 

## Definicja 2.5: izomorfizm funktorów.

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

- ⇒ naturalne przekształcenia  $f: F \to G$  dla których istnieje  $g: G \to F$  takie, że  $f \circ g = id_G$  oraz  $g \circ f = id_F$
- ⇒ przekształcenie  $f: F \to G$  takie, że dla każdego  $X \in \mathbf{C}$  przekształcenie  $f(X): F(X) \to G(X)$  jest izomorfizmem w kategorii  $\mathbf{D}$ .

#### Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów Id, \*\* na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

## 2.4 Równoważność kategorii

## Definicja 2.6: równoważność kategorii.

Funktor  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor  $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$  oraz naturalne przekształcenia funktorów  $f: F \circ G \to Id_{\mathbf{D}}$  i  $g: G \circ F \to Id_{\mathbf{C}}$ 

## Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych **Vect** $_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$  jest równoważna kategorii  $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ , której obiektami są Ob $\mathbf{S}_{\mathbf{K}} = \{\mathsf{K}^0, \mathsf{K}^1, ..., \mathsf{K}^n, ...\}$  a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Włożenie  $F: \mathbf{S_K} \to \mathbf{Vect_K^{fin}}$  jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z  $\mathbf{S_K}$  jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć  $G: \mathbf{Vect_K^{fin}} \to \mathbf{S_K}$  do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni  $V \in \mathbf{Vect_K^{fin}}$  znaleźć bazę b(V), którą poślemy

w bazę standardową, tzn dostajemy

$$G(V):V\to K^{\dim V}.$$

Morfizmami na **Vect<sup>fin</sup>** są macierze, więc wystarczy posłać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

#### Twierdzenie 2.1.

Funktor  $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$  jest równoważnością kategorii  $\iff$  jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn.  $(\forall \ Y \in \mathsf{Ob}\mathbf{D})(\exists \ X \in \mathsf{Ob}\mathbf{C}) \ \mathsf{F}(X) \cong \mathsf{Y}.$ 

#### Dowód



Mając wiedzę o F będziemy konstruować G.

Dla Y  $\in$  Ob**D** wybieramy G(Y)  $\in$  Ob**C** takie, że istnieje izomorfizm  $\iota_Y: Y \to F(G(Y))$ . Niech  $\varphi: Y \to Y'$  będzie morfizmem obiektów w kategorii **D**. Chcemy sprawdzić istnienie G( $\varphi$ ) takie, że Id $_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$ 

F jest wierny i pełny, więc

$$\mathsf{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathsf{G}(\mathsf{Y}),\mathsf{G}(\mathsf{Y}')) \stackrel{\mathsf{F}}{\to} \mathsf{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(\mathsf{Y})),\mathsf{F}(\mathsf{G}(\mathsf{Y}')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne  $\psi$  =  $\mathrm{F}^{-1}(\iota_{\mathrm{Y'}}\varphi\iota_{\mathrm{Y}}^{-1})$ 



## Wykład 16.10.2023: Tymczasowe

#### Przykład(y) 3.1

- 1. W kategorii zbiorów element  $X \in \mathsf{ObSet}$  możemy widzieć jako elementy zbioru  $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(1,X)$  gdzie 1 jest jednoelementowych zbiorem.
- Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii C obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X: \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Set}$$
 
$$h_X(Y) = Hom_{\boldsymbol{C}}(Y,X) \ (\star)$$

ponieważ nie zawsze istnieje odpowiednik 1, dlatego rozważamy wszystkie obiekty i morfizmy:

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{f} & Y' \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ f \\
X & \xrightarrow{h_{\nu}(f)} & X
\end{array}$$

Tutaj równanie (\*) można również zapisać jako X(Y), czyli rozumieć jako Y-punkty obiektu X.

Definicja 3.1: Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.

*Kategorię funktorów* ( $C^{op}$ , **Set**), której obiektami są  $h_X$  jak w przykładzie wyżej, oznaczamy  $\hat{\mathbf{C}}$ .

Funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest **reprezentowalny**, jeśli  $F \cong h_X$  dla pewnego  $X \in Ob\mathbf{C}$ . Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Dla morfizmu  $X \xrightarrow{\varphi} X'$  w  $\mathbf{C}$  określamy morfizm  $h_{\varphi} : h_X \to h_{X'}$  w  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{Y},\mathbf{X}) & \stackrel{\mathsf{h}_{\varphi}}{-\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!\!-} & \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{Y},\mathbf{X}') \\ \overset{\cup}{\alpha} & \overset{\cup}{-\!\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!\!-} & \overset{\cup}{\varphi} \circ \alpha \end{array}$$

## Przykład(y) 3.2

- 1.  $\mathcal{P}(X)$  jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo  $\mathcal{P}(X)\cong \mathsf{Hom}(X,2)$
- 2.  $H^{n}(X, G) = [X, K(G, n)]$  NIE JESTEM PEWNA CO TO OZNACZA? chyba nie homotopie

3. wiązki  $Vect_n(X) = [X, G^{\infty}]????$ 

Przyporządkowania X  $\mapsto$  h<sub>X</sub> oraz  $\varphi \mapsto$  h $_{\varphi}$  dają funktor h :  $\mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$ .

#### Lemat 3.1: Yoneda lemma.

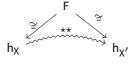
Przyporządkowanie  $h: \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$  zadaje równoważność kategorii  $\mathbf{C}$  z pełną podkategorią kategorii  $\widehat{\mathbf{C}}$ , której obiektami są funktory reprezentowalne.

#### Dowód

Musimy pokazać, że

jest bijekcją.

Jeśli funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo



$$X \xrightarrow{\hspace*{1cm}\star\hspace*{1cm}} X'$$

izomorfizm  $\star$  pojawia się bezpośrednio po tym, że F  $\to$  h $_\chi$  i F  $\to$  h $_{\chi'}$  są izmorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm  $\star\star$ .

Niech teraz  $F \in Hom_{\widehat{\boldsymbol{c}}}(h_X, h_{X'}).$ 

Jeśli  $F = h_{\mathbf{C}}$ , to mamy

$$h_X(X)\ni id_X \qquad h_{X'}(X)$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE



#### 3.1 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a  $F: I \rightarrow \mathbf{C}$  będzie funktorem.

#### **Definicja 3.2:** granica funktora F.

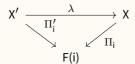
Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów)  $\Pi_{\bf i}:{\sf X}\to{\sf F}({\bf i})$  dla X  $\in{\sf Ob}{\bf C}$  , które spełniają

 $\Rightarrow$  [zgodność] dla dowolnych i  $\xrightarrow{\alpha}$  j w I diagram

$$\mathsf{F}(\mathsf{i}) \xrightarrow{\prod_{\mathsf{j}}} \mathsf{F}(\mathsf{g})$$

komutuje, tzn.  $\Pi_i = F(\alpha) \circ \Pi_i$ .

*[uniwersalność]* dla każdego układu (X',  $\Pi_i'$ ) spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm  $\lambda: X' \to X$  taki, że dla każdego i ∈ I diagram



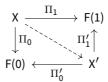
komutuje

jest nazywany granicą funktora F i oznaczamy ją jako lim F.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

## Przykład(y) 3.3

1. Dla I =  $\{0, 1\}$  oraz F : I  $\rightarrow$  **C** granicę lim F nazywamy *produktem* obiektów F(0) i F(1)



Definicja 3.3: granica odwrotna.

## Wykład 23.10.23: Funktory sprzężone [adjoint functors]

#### Definicja 4.1: funktory sprzężone.

Para funktorów L :  $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$  i R :  $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$  nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a Rjest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem **A** jak i **B**)

$$\mathsf{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathsf{L}(\mathsf{A}),\mathsf{B})\longleftrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathsf{A},\mathsf{R}(\mathsf{B}))$$

Funktory sprzężone oznaczamy L ⊢ R

#### Przykład(y) 4.1

- 1. Jest sporo przykładów, gdy R jest funktorem zapominającym
  - $\Rightarrow$  jeśli R : **Grp**  $\rightarrow$  **Set**, wtedy

$$\mathsf{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\star,\mathsf{B}) \longleftrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathsf{A},\mathsf{B})$$
 grupa jako zbiór

- \* będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy F<sub>A</sub>.
- R : Vect<sub>K</sub> → Set z bijekcjami zdefiniowanymi jako

$$\mathsf{Hom}_{\boldsymbol{Vect}_K}(\mathsf{LA},\mathsf{V}) \longleftrightarrow \mathsf{Hom}_{\boldsymbol{Set}}(\mathsf{A},\mathsf{V})$$

gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.

2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

$$Hom_R(A \otimes X, B) \cong Hom_R(A, Hom_R(X, B))$$

dla  $\varphi \in Hom_R(A, Hom_R(X, B))$  mamy

$$(a \otimes x \mapsto (\varphi(a))(x)) \mapsto \varphi$$

Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły: L =  $- \otimes$  X oraz R = Hom(X, -)

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym funktor sprzężonym.

Włożenie kategorii Ab → Grp posiada funktor sprzężony:

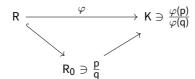
$$Hom_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow Hom_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm  $\varphi: A \to B$  na element neutralny, więc od razu indukwoane mamy przekształcenie  $A^{op} \to B$ , stąd  $\star = A^{op}$ .

Włożenie kategorii ciał w dziedziny wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathsf{Hom}_{\mathbf{Ciala}}(\star,\mathsf{K}) \longleftrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(\mathsf{R},\mathsf{K})$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K, to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciała ułamków ciała R w ciało K:



$$stad \star = R_o$$

$$\mathsf{Hom}_{\textbf{Cpf}\mathsf{T}_0}(\star,\mathsf{Y}) \longleftrightarrow \mathsf{Hom}_{\textbf{Top}}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$$

więc  $\star=\beta X$  czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w [0, 1] i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

## Fakt 4.1: jedyność funktora sprzężonego.

Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

#### Dowód

Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgryźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

R(B) to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{op}\ni A\mapsto Hom_{\boldsymbol{B}}(LA,B)\in \boldsymbol{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.



Fakt 4.2: funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).

Jeśli L ⊢ R, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

#### **Dowód** OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt  $A \in \mathbf{A}$  i sprawdzić, czy  $\Pi_i': A \to (R \circ F)(I)$  sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na  $R \circ R(\Pi_i)$ . Musimy wziąć obiekt  $LA \in \mathbf{B}$  i tutaj dostajemy jedyną strzałkę  $LA \to X$ , gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami  $\mathbf{A}$  a elementami  $\mathbf{B}$ .



## 4.1 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2: kategoria addytywna. Kategoria addytywna A to kategoria

Dla każdej pary obiektów A, B ∈ ObA na HomA (A, B) jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f'} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

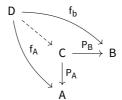
$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje obiekt zerowy 0 taki, że Hom<sub>A</sub>(0, 0) = 0 jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów A, B ∈ Ob**A** istnieje obiekt C (zwykle oznaczany A ⊕ B), który jest ich produktem i koproduktem, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \stackrel{i_A}{\leftarrow} C \stackrel{P_B}{\leftarrow} B$$

takie, że  $P_a \circ i_A = id_A i P_A \circ i_B = 0$  (analogicznie gdy przestawimy A i B). Dodatkowo,  $i_A P_A + i_B P_B = id_C$ .

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna stratka DightarrowC:

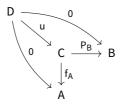


Zauważmy że  $i_A f_A + i_B f_B : D \to C$ , wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja  $D \to C$  sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z  $P_A$  i  $P_B$ :

$$P_A(i_Af_A + i_Bf_B) = \underbrace{P_Ai_A}_{id_A} f_A + \underbrace{P_Ai_B}_{0} f_B = f_A$$

$$\mathsf{P}_\mathsf{B}(\mathsf{i}_\mathsf{A}\mathsf{f}_\mathsf{A}+\mathsf{i}_\mathsf{B}\mathsf{f}_\mathsf{B}) = \underbrace{\mathsf{P}_\mathsf{B}\mathsf{i}_\mathsf{A}}_0 \mathsf{f}_\mathsf{A} + \underbrace{\mathsf{P}_\mathsf{B}\mathsf{i}_\mathsf{B}}_{\mathsf{id}_\mathsf{B}} \mathsf{f}_\mathsf{B} = \mathsf{f}_\mathsf{B}$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram



Zauważmy, że

$$u = id_C \circ 0 =$$
  
=  $i_A P_A u + i_B P_B u =$   
=  $i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0$ 

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

#### Dygresja: parę słów o zerach.

Dla dowolnego obiektu A  $\in$  Ob**A** mamy Hom(0, A) = 0 i Hom(0, A) = 0, bo dla f : A  $\rightarrow$  0 jest id<sub>0</sub>  $\circ$  f = f, czyli f = 0  $\circ$  f, a więc

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

## Przykład(y) 4.2

- 1. AB
- 2. R-moduly
- 3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

**Pre** – **snop/AB**(X) i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

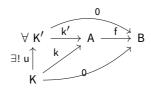
#### Definicia 4.3: kategoria abelowa.

Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i kojądro i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

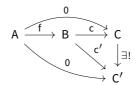
Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

Kilka wyjaśnień:

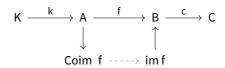
- $\Longrightarrow$  Jądro f to ekwalizator A  $\overset{f}{\underset{0}{\Longrightarrow}}$  B . Inaczej, jest to K  $\overset{k}{\longrightarrow}$  A taki, że
  - 1.  $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
  - 2. Zachodzi własność uniwersalna:



 $\clubsuit$  Kojądro f to koekwalizator A  $\overset{f}{\Longrightarrow}$  B jak w następującym diagramie:



- $\blacksquare$  Niech f : A  $\rightarrow$  B, wówczas
  - im f = ker(B  $\rightarrow$  Coker f)
  - Coim  $f = Coker(ker f \rightarrow A)$



Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działaby w kategorii abelowej.

## Definicja 4.4: mono-, epi-.

Morfizm  $f: X \rightarrow Y$  jest

**monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań  $g_1, g_2: Z \to X$  zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego g : Z o X f  $\circ$  g = 0  $\Rightarrow$  g = 0

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając f : A o B i h : B o W to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

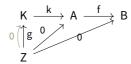
Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to ker f = 0, a jeśli f jest epimorfizmem, to Coker f = 0.

#### Lemat 4.3.

Jądra są monomorfizmami, a kojądra są epimorfizmami.

#### Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:



i zauważyć, że jedyność odwzorowania  $Z \rightarrow K$  wymaga, aby g = 0.



#### Uwaga 4.4.

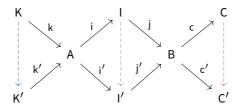
Dla każdego morfizmu f : A  $\to$  B w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j \text{mono}} B \xrightarrow{c} C$$

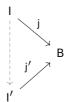
w którym k = ker f, c = Coker f, i = Coker k oraz j = ker c i f =  $j \cdot i$ .

#### Dowód

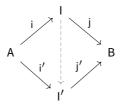
Załóżmy, że istnieją dwa takie rozkłady:



Strzałki niebieska i czerwona są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę zieloną dobbieramy w taki sposób, aby diagram



komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem





#### Lemat 4.5.

W kategorii abelowej, jeśli f jest epimorfizmem, to f = Coker ker f, a jeśli f jest monomofizmem, to f = ker Coker f.

#### Dowód

Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$K \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{0} 0$$

wiemy, że j jest ker(B ightarrow 0), czyli funkcji zerowej. Czyli musi być j = id<sub>B</sub>, możemy więc przerysować

ale przecież i :  $A \to I$  było i = Coker ker f, z drugiej strony ponieważ  $A \to I \to B$  jest równe f, a w tym konkretnym przypadku jest to równe  $A \to B \to B$  gdzie druga strzałka to id<sub>B</sub>, to musi być i :  $A \to I = f$ :  $A \to B$ .



#### Uwaga 4.6.

W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i kojądro oraz zachodzi lemat 4.5

### Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro ker f to algebraiczne jądro f z dziedziczoną topologią, a Coker f to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu im f.

$$\mathsf{A} \stackrel{\mathsf{f}}{\longrightarrow} \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{B}/\overline{\mathsf{f}[\mathsf{A}]}$$

Przez taką definicję Coker mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

Wystarczy sprawdzić

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\delta} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

gdzie  $\mathbb{R}^{\delta}$  ma topologię dyskretną, a  $\mathbb{R}$  traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między kojądrami JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria R-modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii R-modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

## Dygresja: twierdzenie Freyd-Mitchella.

Mała kategoria belowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię R-modułów dla pewnego R.

## Wykład 30.10.2023: Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

#### 5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

Definicja 5.1: kompleks łańcuchowy.

Kompleks (ko)łańcuchowy w kategorii abelowej A to ciąg obiektów i morfizmów

$$... \, \longrightarrow \, A^{n-1} \, \stackrel{d^{n-1}}{\longrightarrow} \, A^n \, \stackrel{d^n}{\longrightarrow} \, A^{n+1} \, \longrightarrow \, ...$$

taki, że dla każdego n  $d^n \circ d^{n-1} = 0$ 

#### Przykład(y) 5.1: kompleksów łańcuchowych

1. Niech X będzie *kompleksem symplicjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stowarzyszyć kompleks symplicjalny z obiektami

$$C_nX = \bigoplus_{\sigma-n\text{-sympleks}} \mathbb{Z}$$

i wtedy  $\partial: C_n X \to C_{n-1} X$  jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

$$\partial [\sigma^{\mathsf{n}}] = \sum_{\tau^{\mathsf{n}-1} < \sigma^{\mathsf{n}}} \pm [\tau^{\mathsf{n}-1}]$$

gdzie  $\sigma^n$  to generator składniku  $\mathbb Z$  odpowiadający sympleksowi  $\sigma^n$ . Jeśli mamy sympleks  $\sigma^n$  =  $(v_0,...,v_n)$  to przez ścianę  $\tau^{n-1}$  rozumiemy

$$\tau^{n-1} = (v_0, ..., \widehat{v_i}, ..., v_n)$$

gdzie przez  $\hat{v_i}$  rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

$$S_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \to X} \mathbb{Z}$$

gdzie  $\sigma:\Delta^{\mathbf{n}}\to {\sf X}$  jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w X. To się nazywa kompleks singularny.

Odwzorowanie brzegu  $\partial: S_n X \to S_{n-1} X$  na  $\sigma: \Delta^n \to X$  przyjmuje wartość

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} (\sigma \mid_{i-ta \text{ sciana}})$$

#### 3. Kompleks de Rhama

Niech M będzie gładką rozmaitością,  $A^n = \Omega^n M$  będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas d :  $\Omega^n M \to \Omega^{n+1} M$  jest pochodną zewnętrzną.

W szczególności, jeśli M =  $T^2$ , to  $H^1 = \mathbb{R}^2$ ,  $H^2 = \mathbb{R}$  oraz  $H^{>2} = 0$ .

#### 5.2 Homologie

Skoro  $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$ , to im  $\partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ , wiec możemy zastanowić się nad

$$H_nX = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$$
.

Tak zdefiniowane H<sub>n</sub>X nazywamy homologiami.

#### Definicja 5.2: ogólna definicja (kohomologii).

Niech A. będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzymy na jego wycinek

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

$$\downarrow^a \qquad \qquad \text{ker } d^n$$

Ponieważ d $^n \circ$  d $^{n-1} = 0$ , to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra a: A $^{n-1} \to K$ . Chcemy więc nazwać

$$H^{n}(A^{\cdot}) = Coker a$$

## homologią.

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

i zdefiniować H<sup>n</sup>(A<sup>-</sup>) = ker b.

#### Lemat 5.1.

W definicji jak wyżej  $H^n(A^{\cdot})$ : Coker  $a \cong \ker b$ .

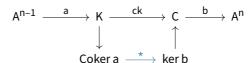
#### Dowód

Przy dodatkowym założeniu, że d<sup>n-1</sup> jest monomorfizmem, a d<sup>n</sup> jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = Coker ker d^n = Coker k$$

$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że a = ker ck oraz b = Coker ck, z czego od razu wynika teza:



i strzałka ★ jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia

Bez dodatkowych założeń

ZDJĘCIA



## 5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

## Definicja 5.3.

Pull-back to granica diagramu



➡ Push-out to z kolei kogranica diagramu



#### Fakt 5.2.

W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

#### Dowód

Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania.

