Algebra homologiczna

Zima 2023-24

1 Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R-modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \to C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy
Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ R-modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n =]d \circ d : C_n \to C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami** C, a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy *n-cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany *n-granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia
n-tym modułem homologii kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1
Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ dla $n \geq 0$ i $C_n = 0$ dla $n < 0$. Dla $n > 0$ niech d_n posyła $x \mod 8$ do $4x \mod 8$. Pokaż, że tak zdefiniowane C jest kompleksem łańcuchowym $\mathbb{Z}/8$-modułów i policz moduły homologii.

Rozwiązanko
Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \to C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \mod 8$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \mod 8) = 16x \mod 8 = 8 \cdot (2x) \mod 8 = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.
Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_1]{} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_2]{} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1. W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

2 Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Definicja 2.1 : Presnop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = $\{U \subseteq X \ : \ U$ - zbiór otwarty$\}$
- morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funkctor kontrwariantny **Otw**(**X**)$^{op} \to$ **Set** to **presnop** na przestrzeni topologicznej X.

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.