

# Algebra homologiczna

Zima 2023-24

## Spis rozmaitości treściowalnych

<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
1.1. Kompleksy łańcuchowe . . . . .	3
<b>Równoważność kategorii</b>	<b>5</b>
2.1. Presnop i snop . . . . .	5
2.2. Funktory wierne, pełne . . . . .	6
2.3. Naturalne przekształcenia funktorów . . . . .	7
2.4. Równoważność kategorii . . . . .	9
<b>16.10.2023 : Tymczasowe</b>	<b>11</b>
3.1. Granice i kogranice . . . . .	13
<b>23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]</b>	<b>15</b>
4.1. Kategorie addytywne i abelowe . . . . .	17
<b>30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie</b>	<b>24</b>
5.1. Kompleks łańcuchowy i sympleksy . . . . .	24
5.2. Homologie . . . . .	25
5.3. Pull-back i push-out . . . . .	26

## Wykład Wstęp

### 1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech  $R$  będzie dowolnym pierścieniem, natomiast  $A, B, C$  będą  $R$ -modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli  $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$ . W szczególności implikuje to, że  $g \circ f = gf : A \rightarrow C$  jest homomorfizmem zerowym.

#### Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy.

Rozważmy rodzinę  $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $R$ -modułów wraz z mapami  $d = d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n]d : C_n \rightarrow C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę  $d_n$  nazywamy **różniczkami**  $C$ , a rodzina  $C$  jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego  $d_n$  nazywamy *n-cyklami*  $C$  i oznaczamy  $Z_n = Z_n(C)$ , natomiast obraz każdego  $d_{n+1}$  jest nazywany *n-granicą*  $C$  i oznacza się jako  $B_n = B_n(C)$ . Ponieważ  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ , to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

#### Definicja 1.2 : Homologia.

**n-tym modułem homologii** kompleksu  $C$  nazywamy iloraz  $H_n(C) = Z_n/B_n$ .

#### Problem 1.1

Ustalmy  $C_n = \mathbb{Z}/8$  dla  $n \geq 0$  i  $C_n = 0$  dla  $n < 0$ . Dla  $n > 0$  niech  $d_n$  posyła  $x \pmod{8}$  do  $4x \pmod{8}$ . Pokaż, że tak zdefiniowane  $C$  jest kompleksem łańcuchowym  $\mathbb{Z}/8$ -modułów i policz moduły homologii.

### Rozwiązanko

Zauważyć, że  $d_{n-1}d_n = 0$  jest nietrudno dla  $n \leq 1$  ( $d_{n-1}d_n : C_n \rightarrow C_{n-2} = 0$ ). Z kolei dla dowolnego  $n > 1$  i dowolnego  $x \in C_n$  wiemy, że  $d_n(x) = 4x \pmod{8}$ . Jeśli  $x$  było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że  $d_n(x) = 0$ . Z kolei gdy  $x$  jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \pmod{8}) = 16x \pmod{8} = 8 \cdot (2x) \pmod{8} = 0,$$

a więc  $d_{n-1}d_n = 0$ .

Homologie dla  $n < 2$  są trywialne, natomiast dla  $n \geq 2$  wszystkie są takie same (gdyż funkcje  $d_n$  jak i moduły  $C_n$  nie ulegają zmianie wraz z  $n$ ). Wystarczy więc przyjrzeć się  $Z_1/B_1$

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_1} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_2} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

$Z_1$  to liczby parzyste w  $\mathbb{Z}/8$  (kernel  $d_1$ ), natomiast  $B_1$  to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w  $C_1$ . W takim razie,  $Z_1/B_1 = \{4\}$ .

## Wykład Równoważność kategorii

### 2.1 Presnop i snop

Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię  $\mathbf{Otw}(X)$  zdefiniujemy tak, że

 Ob  $\mathbf{Otw}(X) = \{U \subseteq X : U \text{ - zbiór otwarty}\}$

 morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funktor kontrwariantny  $\mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  to **presnop** na przestrzeni topologicznej  $X$ .

Zamiast kategorii  $\mathbf{Set}$  zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

#### Przykład(y) 2.1

1. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, a  $U \subseteq X$  będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor  $F : \mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow C(X)$  definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla  $V \subseteq U \subseteq X$  otwartych zbiorów mamy

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \parallel & & \parallel \\ C(U) & \xleftarrow{\quad} & C(V) \end{array}$$

co w widoczny sposób spełnia  $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$ .

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

#### Definicja 2.1 : Presnop, snop.

**Presnopem** na kategorii  $\mathbf{C}$  nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

**Snopem** nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  i dla wszystkich  $s_i \in F(U_i)$  (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych

$i, j \in I$  mamy  $s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)$ , to istnieje jedyne cięcie  $s \in F(U)$  takie, że dla wszystkich  $i \in I$   $s \upharpoonright U_i = s_i$ . Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$\begin{aligned} (\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall s_i \in F(U_i)) \quad [(\forall i, j \in I) s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)] &\Rightarrow \\ &\Rightarrow [(\exists! s \in F(U)) (\forall i \in I) s \upharpoonright U_i = s_i] \end{aligned}$$

### Przykład(y) 2.2


1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzi kietki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe żdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.


## 2.2 Funktory wierne, pełne


### Definicja 2.2 : podkategoria $\mathbf{C}'$ kategorii $\mathbf{C}$ .

To kategoria spełniająca następujące warunki:

  $\text{Ob } \mathbf{C}' \subseteq \text{Ob } \mathbf{C}$

  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

  $\text{id}_X^{\mathbf{C}'} = \text{id}_X^{\mathbf{C}}$  zawsze gdy  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}'$

 złożenie morfizmów w  $\mathbf{C}'$  zachowuje się tak samo jak w  $\mathbf{C}$


Mówimy, że podkategoria  $\mathbf{C}'$  jest **pełna**, gdy  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$


### Przykład(y) 2.3

1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem  $K$   $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$  jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych  $\mathbf{Vect}_K$ . Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych  $\mathbf{Ab}$  jest pełną podkategorią kategorii  $\mathbf{Grp}$
3. Kategoria gładkich rozmaitości  $\mathbf{C}^\infty$  – **rozm** jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni topologicznych  $\mathbf{Top}$ . Nie jest to jednak pełna podkategoria.

### Definicja 2.3 : functor wierny, pełny.

Funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  jest

 **wierny** gdy  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  jest bijekcją

 **pełny**, gdy dla wszystkich  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  przekształcenie  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  jest surjekcją

## Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

## 2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

### Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.

Dla dwóch funktorów  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  układ morfizmów  $f : F \rightarrow G$  w  $\mathbf{D}$  taki, że dla każdego  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$   $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$  i dla każdego  $\phi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów**  $F$  i  $G$ .

## Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory  $\text{Id}, \text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$  (identyczność i abelianizacja  $\text{ab}(G) = G/[G, G]$ ).

Rozważmy  $f : \text{Id} \rightarrow \text{ab}$ , wtedy  $\text{Id}(G) = G$ , więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}(G) = G & \xrightarrow{f(G)} & G/[G, G] = \text{ab}(G) \\ \text{Id}(\phi) = \phi \downarrow & & \downarrow \text{ab}(\phi) \\ \text{Id}(H) = H & \xrightarrow{f(H)} & H/[H, H] = \text{ab}(H) \end{array}$$

Dla każdego  $G \in \text{Ob } \mathbf{Grp}$  zdefiniujemy  $f(G) : \text{Id}(G) \rightarrow \text{ab}(G)$  jako

$$f(G) : G \rightarrow G^{\text{alb}} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w  $G$  przechodzi przez dowolny homomorfizm  $\phi : G \rightarrow H$  na komutant w  $H$ :

$$(\forall g, h \in [G, G]) \quad \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(h)\phi(g) = \phi(hg)$$

2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów  $H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ . Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.
3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów  $\text{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ . Dla  $V \in \mathbf{Vect}_K$  definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \xrightarrow{\quad} & V^{**} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v & \xrightarrow{\quad} & (V^* \ni \phi \mapsto \phi(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi^{**} \\ W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**} \end{array}$$

komutuje, czyli  $f(V)\phi^{**} = \phi f(W)$ .

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ f(V))(v) &= \phi^{**}(f(V)(v)) = \phi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\ &= \langle \cdot, v \rangle \circ \phi^* = \langle \phi^*(\cdot), v \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \phi, v \rangle = \langle \cdot, \phi(v) \rangle = f(W)(\phi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy  $\mathbf{Funct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$  i mając naturalne przekształcenia funktorów  $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$ , dowolne  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  oraz  $\phi : X \rightarrow Y$  rysujemy





$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{a(X)} & G(X) & \xrightarrow{b(X)} & H(X) \\
 F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) & & \downarrow H(\phi) \\
 F(Y) & \xrightarrow{a(Y)} & G(Y) & \xrightarrow{b(Y)} & H(Y)
 \end{array}$$

gdzie  $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$ .

## Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

-  naturalne przekształcenia  $f : F \rightarrow G$  dla których istnieje  $g : G \rightarrow F$  takie, że  $f \circ g = \text{id}_G$  oraz  $g \circ f = \text{id}_F$
-  przekształcenie  $f : F \rightarrow G$  takie, że dla każdego  $X \in \mathbf{C}$  przekształcenie  $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$  jest izomorfizmem w kategorii  $\mathbf{D}$ .

## Przykład(y) 2.6

- Przekształcenie funktorów  $\text{Id}, **$  na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

## 2.4 Równoważność kategorii

### Definicja 2.6 : równoważność kategorii.

Funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  oraz naturalne przekształcenia funktorów  $f : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$  i  $g : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{C}}$

## Przykład(y) 2.7

- Kategoria skończone wymiarowych przestrzeni wektorowych  $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$  jest równoważna kategorii  $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ , której obiektami są  $\text{Ob} \mathbf{S}_{\mathbf{K}} = \{K^0, K^1, \dots, K^n, \dots\}$  a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Włożenie  $F : \mathbf{S}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$  jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z  $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$  jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć  $G : \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{K}}$  do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni  $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$  znaleźć bazę  $b(V)$ , którą pošłemy

w bazę standardową, tzn dostajemy

$$G(V) : V \rightarrow K^{\dim V}.$$

Morfizmami na  $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$  są macierze, więc wystarczy postać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

### Twierdzenie 2.1.

Funktor  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  jest równoważnością kategorii  $\iff$  jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn.  $(\forall Y \in \text{Ob} \mathbf{D})(\exists X \in \text{Ob} \mathbf{C}) F(X) \cong_{\mathbf{D}} Y$ .

### Dowód

$\Leftarrow$

Mając wiedzę o  $F$  będziemy konstruować  $G$ .

Dla  $Y \in \text{Ob} \mathbf{D}$  wybieramy  $G(Y) \in \text{Ob} \mathbf{C}$  takie, że istnieje izomorfizm  $\iota_Y : Y \rightarrow F(G(Y))$ . Niech  $\phi : Y \rightarrow Y'$  będzie morfizmem obiektów w kategorii  $\mathbf{D}$ . Chcemy sprawdzić istnienie  $G(\phi)$  takie, że  $\text{Id}_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \iota_Y \downarrow & & \downarrow \iota_{Y'} \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{\iota_{Y'} \circ \phi \circ \iota_Y^{-1}} & F(G(Y')) \end{array}$$

$F$  jest wierny i pełny, więc

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne  $\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \phi \iota_Y^{-1})$



## Wykład 16.10.2023 : Tymczasowe

### Przykład(y) 3.1

1. W kategorii zbiorów element  $X \in \text{ObSet}$  możemy widzieć jako elementy zbioru  $\text{Hom}_{\text{Set}}(1, X)$  gdzie 1 jest jednoelementowym zbiorem.
2. Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii  $\mathbf{C}$  obiektowi  $X$  możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \quad (*)$$

ponieważ nie zawsze istnieje odpowiednik 1, dlatego rozważamy wszystkie obiekty i morfizmy:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ f \\ X & \xrightarrow{h_X(f)} & X \end{array}$$

Tutaj równanie (\*) można również zapisać jako  $X(Y)$ , czyli rozumieć jako  $Y$ -punkty obiektu  $X$ .

### Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.

*Kategorię funktorów*  $(\mathbf{C}^{\text{op}}, \text{Set})$ , której obiektami są  $h_X$  jak w przykładzie wyżej, oznaczamy  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

Funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest **reprezentowalny**, jeśli  $F \cong h_X$  dla pewnego  $X \in \text{Ob}\mathbf{C}$ . Takie  $X$  jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Dla morfizmu  $X \xrightarrow{\phi} X'$  w  $\mathbf{C}$  określamy morfizm  $h_\phi : h_X \rightarrow h_{X'}$  w  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_\phi} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & \phi \circ \alpha \end{array}$$

### Przykład(y) 3.2

1.  $\mathcal{P}(X)$  jest funktorem, który przypisuje  $X$  jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo  $\mathcal{P}(X) \cong \text{Hom}(X, 2)$

2.  $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$  *NIE JESTEM PEWNA CO TO OZNACZA? chyba nie homotopie*
3. wiązki  $\text{Vect}_n(X) = [X, G^\infty]$ ????

Przyporządkowania  $X \mapsto h_X$  oraz  $\phi \mapsto h_\phi$  dają funktor  $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ .

### Lemat 3.1 : Yoneda lemma.

Przyporządkowanie  $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$  zadaje równoważność kategorii  $\mathbf{C}$  z pełną podkategorią kategorii  $\widehat{\mathbf{C}}$ , której obiektami są funktory reprezentowalne.

### Dowód

Musimy pokazać, że

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \phi & \xrightarrow{\quad} & h_\phi \end{array}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \cong & & \searrow \cong \\ h_X & \xrightarrow{\quad \star \star \quad} & h_{X'} \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad \star \quad} X'$$

izomorfizm  $\star$  pojawia się bezpośrednio po tym, że  $F \rightarrow h_X$  i  $F \rightarrow h_{X'}$  są izomorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm  $\star\star$ .

Niech teraz  $F \in \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$ .

Jeśli  $F = h_\phi$ , to mamy

$$\begin{array}{ccc} & h_\phi & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ h_X(X) \ni \text{id}_X & & h_{X'}(X) \\ \curvearrowleft & f & \curvearrowright \end{array}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE




## 3.1 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech  $I$  będzie małą kategorią, a  $F : I \rightarrow \mathbf{C}$  będzie funktorem.


### Definicja 3.2 : granica funktora $F$ .

Obiekt  $X$  z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów)  $\Pi_i : X \rightarrow F(i)$  dla  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ , które spełniają

 [zgodność] dla dowolnych  $i \xrightarrow{\alpha} j$  w  $I$  diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Pi_i \swarrow & & \searrow \Pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \end{array}$$

komutuje, tzn.  $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$ .

 [uniwersalność] dla każdego układu  $(X', \Pi'_i)$  spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm  $\lambda : X' \rightarrow X$  taki, że dla każdego  $i \in I$  diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\lambda} & X \\ & \Pi'_i \searrow & \swarrow \Pi_i \\ & F(i) & \end{array}$$

komutuje

jest nazywany **granicą funktora  $F$**  i oznaczamy ją jako  $\lim F$ .

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

### Przykład(y) 3.3

1. Dla  $I = \{0, 1\}$  oraz  $F : I \rightarrow \mathbf{C}$  granicę  $\lim F$  nazywamy *produktem* obiektów  $F(0)$  i  $F(1)$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Pi_1} & F(1) \\
 \downarrow \Pi_0 & \searrow & \uparrow \Pi'_1 \\
 F(0) & \xleftarrow{\Pi'_0} & X'
 \end{array}$$

**Definicja 3.3 : granica odwrotna.**

## Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

### Definicja 4.1 : funktory sprzężone.

Para funktorów  $L : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  i  $R : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem  $\mathbf{A}$  jak i  $\mathbf{B}$ )

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy  $L \dashv R$

### Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktorem zapominającym*

🐸 jeśli  $R : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , wtedy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(*, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$$

grupa ↗
↖ grupa jako zbiór

\* będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy  $F_A$ .

🐸  $R : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Set}$  z bijekcjami zdefiniowanymi jako

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.

2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

dla  $\phi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$  mamy

$$(a \otimes x \mapsto (\phi(a))(x)) \mapsto \phi$$

Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły:  $L = - \otimes X$  oraz  $R = \mathrm{Hom}(X, -)$

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym functor sprzężony.

Włożenie kategorii  $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$  posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy  $A$  przechodzi przez każdy homomorfizm  $\phi : A \rightarrow B$  na element neutralny, więc od razu indukowane mamy przekształcenie  $A^{\mathrm{op}} \rightarrow B$ , stąd  $\star = A^{\mathrm{op}}$ .

Włożenie kategorii ciał w dziedzinę wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciała}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia  $R$  w ciało  $K$ , to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciał ułamków ciała  $R$  w ciało  $K$ :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & K \ni \frac{\phi(p)}{\phi(q)} \\ & \searrow & \nearrow \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} & \end{array}$$

stąd  $\star = R_0$

Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne  $\mathbf{CptT}_0 \hookrightarrow \mathbf{Top}$  mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CptT}_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc  $\star = \beta X$  czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń  $X$  i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z  $X$  w  $[0, 1]$  i potem odwzorowujemy diagonalnie  $X$  w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

#### Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.

Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

#### Dowód

Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgrzyźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

$R(B)$  to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$



Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.



### Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).

Jeśli  $L \dashv R$ , to  $R$  zachowuje granicę, a  $L$  kogranicę.

#### Dowód

#### OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt  $A \in \mathbf{A}$  i sprawdzić, czy  $\Pi'_i : A \rightarrow (R \circ F)(I)$  sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na  $R \circ R(\Pi_i)$ . Musimy wziąć obiekt  $LA \in \mathbf{B}$  i tutaj dostajemy jedyną strzałkę  $LA \rightarrow X$ , gdyż  $X$  jest granicą. Ale sprzężoność  $R$  z  $L$  mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami  $\mathbf{A}$  a elementami  $\mathbf{B}$ .



## 4.1 Kategorie addytywne i abelowe

### Definicja 4.2 : kategoria addytywna.

**Kategoria addytywna**  $\mathbf{A}$  to kategoria



Dla każdej pary obiektów  $A, B \in \text{Ob}\mathbf{A}$  na  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$  jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$



Istnieje *obekt zerowy*  $0$  taki, że  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(0, 0) = 0$  jest grupą trywialną

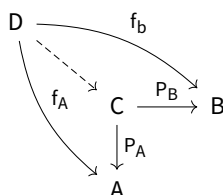


Dla dowolnej pary obiektów  $A, B \in \text{Ob} \mathbf{A}$  istnieje obiekt  $C$  (zwykle oznaczany  $A \oplus B$ ), który jest ich *produktem i koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{i_A} \\ \xrightarrow{p_A} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{array} B$$

takie, że  $p_A \circ i_A = \text{id}_A$  i  $p_A \circ i_B = 0$  (analogicznie gdy przestawimy  $A$  i  $B$ ).  
Dodatkowo,  $i_A p_A + i_B p_B = \text{id}_C$ .

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strzałka  $D \rightarrow C$ :

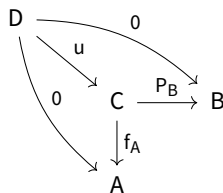


Zauważmy że  $i_A f_A + i_B f_B : D \rightarrow C$ , wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja  $D \rightarrow C$  sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z  $p_A$  i  $p_B$ :

$$p_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_A i_A}_{\text{id}_A} f_A + \underbrace{p_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$p_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{p_B i_B}_{\text{id}_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram



Zauważmy, że

$$\begin{aligned} u &= \text{id}_C \circ 0 = \\ &= i_A p_A u + i_B p_B u = \\ &= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

## Dygresja : parę słów o zerach.

Dla dowolnego obiektu  $A \in \text{Ob } \mathbf{A}$  mamy  $\text{Hom}(0, A) = 0$  i  $\text{Hom}(0, A) = 0$ , bo dla  $f : A \rightarrow 0$  jest  $\text{id}_0 \circ f = f$ , czyli  $f = 0 \circ f$ , a więc

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

## Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)


**Pre – snop**/ $\mathbf{AB}(X)$  i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

## Definicja 4.3 : kategoria abelowa.

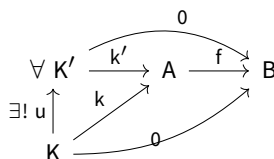
Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i коядро i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.


Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

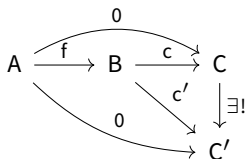
Kilka wyjaśnień:

 Jądro  $f$  to ekwalizator  $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$ . Inaczej, jest to  $K \xrightarrow{k} A$  taki, że

1.  $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
2. Zachodzi własność uniwersalna:

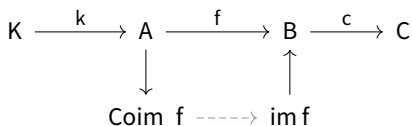


 Kоядро  $f$  to koekwalizator  $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$  jak w następującym diagramie:



🐟 Niech  $f : A \rightarrow B$ , wówczas

- $\text{im } f = \ker(B \rightarrow \text{Coker } f)$
- $\text{Coim } f = \text{Coker}(\ker f \rightarrow A)$



Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działamy w kategorii abelowej.

#### Definicja 4.4 : mono-, epi-.

Morfizm  $f : X \rightarrow Y$  jest

🐟 **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań  $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$  zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego  $g : Z \rightarrow X$   $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

🐟 **epimorfizmem** nazywamy morfizm  $f : A \rightarrow B$  taki, że mając  $h_1, h_2 : B \rightarrow W$  zachodzi

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając  $f : A \rightarrow B$  i  $h : B \rightarrow W$  to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

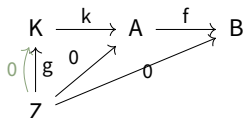
Można pokazać, że jeśli  $f$  jest monomorfizmem, to  $\ker f = 0$ , a jeśli  $f$  jest epimorfizmem, to  $\text{Coker } f = 0$ .

## Lemat 4.3.

Jądra są monomorfizmami, a коядра są epimorfizmami.

## Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:



i zauważyć, że jedyność odwzorowania  $Z \rightarrow K$  wymaga, aby  $g = 0$ .



## Uwaga 4.4.

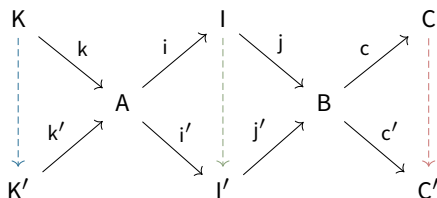
Dla każdego morfizmu  $f : A \rightarrow B$  w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow[\text{epi}]{i} I \xrightarrow[\text{mono}]{j} B \xrightarrow{c} C$$

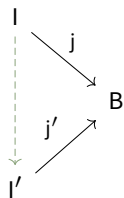
w którym  $k = \ker f$ ,  $c = \text{Coker } f$ ,  $i = \text{Coker } k$  oraz  $j = \ker c$  i  $f = j \cdot i$ .

## Dowód

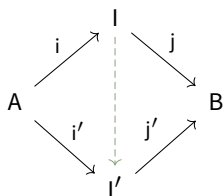
Założmy, że istnieją dwa takie rozkłady:



Strzałki **niebieska** i **czerwona** są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę **zieloną** dobieramy w taki sposób, aby diagram



komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem



#### Lemat 4.5.

W kategorii abelowej, jeśli  $f$  jest epimorfizmem, to  $f = \text{Coker } \ker f$ , a jeśli  $f$  jest monomorfizmem, to  $f = \ker \text{Coker } f$ .

#### Dowód

Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$K \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{0} 0$$

wiemy, że  $j$  jest  $\ker(B \rightarrow 0)$ , czyli funkcji zerowej. Czyli musi być  $j = \text{id}_B$ , możemy więc przerysować

$$\begin{array}{ccccccc} K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \xrightarrow{j} & B \xrightarrow{0} 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ K' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \xrightarrow{0} 0 \end{array}$$

ale przecież  $i : A \rightarrow I$  było  $i = \text{Coker } \ker f$ , z drugiej strony ponieważ  $A \rightarrow I \rightarrow B$  jest równe  $f$ , a w tym konkretnym przypadku jest to równe  $A \rightarrow B \rightarrow B$  gdzie druga strzałka to  $\text{id}_B$ , to musi być  $i : A \rightarrow I = f : A \rightarrow B$ .



### Uwaga 4.6.

W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i коядро oraz zachodzi lemat 4.5

### Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro  $\ker f$  to algebraiczne jądro  $f$  z dziedziczną topologią, a  $\text{Coker } f$  to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu  $\overline{\text{im } f}$ .

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/\overline{f[A]}$$

Przez taką definicję  $\text{Coker}$  mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

Wystarczy sprawdzić

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^\delta \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

gdzie  $\mathbb{R}^\delta$  ma topologię dyskretną, a  $\mathbb{R}$  traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między коядрами **JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD**

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria  $R$ -modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii  $R$ -modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

### Dygresja : twierdzenie Freyd-Mitchella.

Mała kategoria belowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię  $R$ -modułów dla pewnego  $R$ .

## Wykład 30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

## 5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

**Definicja 5.1 : kompleks łańcuchowy.**

**Kompleks (ko)łańcuchowy** w kategorii abelowej  $\mathbf{A}$  to ciąg obiektów i morfizmów

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

taki, że dla każdego  $n$   $d^n \circ d^{n-1} = 0$

**Przykład(y) 5.1 : kompleksów łańcuchowych**

1. Niech  $X$  będzie *kompleksem symplecjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stworzyć kompleks symplecjalny z obiektami

$$C_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

$\sigma$ - $n$ -sympleks

i wtedy  $\partial : C_n X \rightarrow C_{n-1} X$  jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

$$\partial[\sigma^n] = \sum_{\tau: \Delta^{n-1} \rightarrow X} \pm [\tau^{n-1}]$$

gdzie  $\sigma^n$  to generator składnika  $\mathbb{Z}$  odpowiadający sympleksowi  $\sigma^n$ . Jeśli mamy sympleks  $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$  to przez ścianę  $\tau^{n-1}$  rozumiemy

$$\tau^{n-1} = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

gdzie przez  $\widehat{v_i}$  rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

$$S_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

gdzie  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w  $X$ . To się nazywa *kompleks singularny*.

Odwzorowanie brzegu  $\partial : S_n X \rightarrow S_{n-1} X$  na  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  przyjmuje wartość

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \upharpoonright_{i\text{-ta ściana}})$$



## 3. Kompleks de Rhama

Niech  $M$  będzie gładką rozmaitością,  $A^n = \Omega^n M$  będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas  $d : \Omega^n M \rightarrow \Omega^{n+1} M$  jest pochodną zewnętrzną.

W szczególności, jeśli  $M = T^2$ , to  $H^1 = \mathbb{R}^2$ ,  $H^2 = \mathbb{R}$  oraz  $H^{>2} = 0$ .

## 5.2 Homologie

Skoro  $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$ , to  $\text{im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ , więc możemy zastanowić się nad

$$H_n X = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Tak zdefiniowane  $H_n X$  nazywamy **homologiami**.

### Definicja 5.2 : ogólna definicja (kohomologii).

Niech  $A^\cdot$  będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzmy na jego wycinek

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow a & \nearrow \ker d^n & & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

Ponieważ  $d^n \circ d^{n-1} = 0$ , to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra  $a : A^{n-1} \rightarrow K$ . Chcemy więc nazwać

$$H^n(A^\cdot) = \text{Coker } a$$

**homologią.**

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C & & \\ & & & \nearrow \text{Coker } d^{n-1} & \downarrow b & & \\ \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

i zdefiniować  $H^n(A^\cdot) = \ker b$ .

### Lemat 5.1.

W definicji jak wyżej  $H^n(A^\cdot) : \text{Coker } a \cong \ker b$ .

**Dowód**

➡ Przy dodatkowym założeniu, że  $d^{n-1}$  jest monomorfizmem, a  $d^n$  jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = \text{Coker } \ker d^n = \text{Coker } k$$

$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że  $a = \ker ck$  oraz  $b = \text{Coker } ck$ , z czego od razu wynika teza:

$$\begin{array}{ccccccc} A^{n-1} & \xrightarrow{a} & K & \xrightarrow{ck} & C & \xrightarrow{b} & A^n \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Coker } a & \xrightarrow{\star} & \ker b & & \end{array}$$

i strzałka  $\star$  jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia

➡ Bez dodatkowych założeń

ZDJĘCIA



### 5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

#### Definicja 5.3.

➡ Pull-back to granica diagramu

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$



Push-out to z kolei kogranica diagramu

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Y \end{array}$$

### Fakt 5.2.

W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

### Dowód

Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania.

