Rachunek prawdopodobieństwa 2R

Kycia

Spis rozmaitości treściowalnych

Wykład 06.10.23 : Warunkowa wartość oczekiwana

1.1 Prawdopodobieństwo warunkowe

Tak jak zwykle do tej pory, pracować będziemy na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Przypomnijmy definicję **prawdopodobieństwa warunkowego** z Rachunku Prawdopodobieństwa 1 (i z liceum). Dla zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mathbb{P}[A] \in (0,1)$ definiujemy prawdopodobieństwo warunkowe jako

$$\mathbb{P}\left[B \mid A\right] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}.$$

Wartość ta informuje nas o zajściu B wtedy, gdy jesteśmy pewni, że A zaszło. Ale co, jeśli nasza wiedza dotycząca A jest mniej pewna? To znaczy, *co jeśli* $\mathbb{P}[A] = 0$? Dość naturalne wydaje się rozważenie zdarzenia przeciwnego i zsumowania obu prawdopodobieństw:

$$\mathbb{1}_A \mathbb{P}\left[B \mid A\right] + \mathbb{1}_{A^c} \mathbb{P}\left[B \mid A^c\right].$$

Zauważmy od razu, że wyrażenie $\mathbb{1}_A \mathbb{P}\left[B \mid A\right]$ jest zmienną losową.

W przypadku, gdy mamy dwa zbiory, $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, i chcemy zbadać $\mathbb{P}\left[B \mid A_1 \cap A_2\right]$ możemy powyższe rozumowanie rozszerzyć na wszystkie możliwe kombinacje A_1, A_2 i ich dopełnień:

$$\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} \mathbb{P}\left[B \mid A_1 \cap A_2\right] + \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2^c} \mathbb{P}\left[B \mid A_1 \cap A_2^c\right] + \mathbb{1}_{A_1^c \cap A_2} \mathbb{P}\left[B \mid A_1^c \cap A_2\right] + \mathbb{1}_{A_1^c \cap A_2^c} \mathbb{P}\left[B \mid A_1^c \cap A_2^c\right].$$

Działanie jak wyżej daje pełną informacje o każdym zdarzeniu z ciała generowanego przez zdarzenia A_1 i A_2. Nazywamy je **rozbiciem** względem σ-ciała generowanego przez A_1 i A_2.

Analogicznie możemy zdefiniować $\mathbb{E}\left[X \mid A\right]$ dla całkowalnej zmiennej losowej X (tzn. $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$):

$$\mathbb{E}\left[X \mid A\right] = \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}\left[d\omega \mid A\right] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A],$$

gdzie całka wyżej tłumaczy się na całkę po X względem miary $\mathbb{P}\left[B \mid A\right]$.

Uzasadnimy, dlaczego wzór wyżej jest zasadną definicją prawdopodobieństwa warunkowego przy ograniczonej wiedzy o zdarzeniu A.

1.2 Konstrukcja warunkowej wartości oczekiwanej

Zanim zdefiniujemy **warunkową wartość oczekiwaną [wwo]** zmiennej losowej X, zaczniemy od przyjrzenia się bliżej motywacji i konstrukcji stojącej za tym pojęciem.

Niech Z będzie całkowalną zmienną losową przyjmującą przeliczalnie wiele wartości. Zdefiniujmy funkcję

$$h(z) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[X \mid Z = z\right] & \mathbb{P}[Z = z] > 0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

oraz zmienną losową $Y = h(Z)$. Weźmy dowolny $C \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ i zbadajmy $\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{\{Z \in C\}}\right]$. Zaczniemy od skorzystania z faktu, że Z przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, więc możemy zapisać sumę po nich wszystkich

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{\{Z\in C\}}\right] &= \sum_{z\in C} h(z)\mathbb{P}[Z=z] = \\
&\overset{\star}{=} \sum_{z\in C} \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}\right]\frac{1}{\mathbb{P}[Z=z]}\mathbb{P}[Z=z] = \\
&= \sum_{z\in C} \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{z\in C} X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{Z\in C\}}\right]
\end{aligned}
$$

Równość $\star$ wynika ze sposobu w jaki zdefiniowaliśmy $\mathbb{E}\left[X \mid A\right]$ w poprzednim podrozdziale.

Zauważmy, że dowolne zdarzenie $F \in \sigma(Z)$ jest postaci $F = \{z \in C\}$ dla pewnego $C \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Wyprowadziliśmy więc równość:

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_F] \qquad F \in \sigma(Z).$$

Pozostaje zapytać, co z tej zależności wynika?

Dla $F = \Omega$ dostajemy

$$\mathbb{E}\left[h(Z)\right] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X].$$

Dygresja.
W tym miejscu kuszące byłoby rozpisanie $Y = h(Z)$ wprost z definicji, tzn. $h(Z) = \mathbb{E}\left[X \mid Z = Z\right]$, ale jest to całkowitą brednią. W definicji funkcji h podanej na samym początku przykładu z jest teoretycznym punkcikiem, natomiast przy definiowaniu $Y = h(Z)$ ów Z jest już obserwowaną przez nas, konkretną zmienną losową. W takim razie, bardziej poprawny byłby zapis

$$h(Z(\omega)) = \mathbb{E}\left[X \mid \{\omega' \ : \ Z(\omega') = Z(\omega)\}\right].$$

Przykład(y) 1.1

1. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 10\}$ losujemy w sposób jednostajny liczbę i oznaczamy ją jako N. W drugim losowaniu, również w sposób jednostajny, wybieramy liczbę ze zbioru $\{1, ..., N\}$ i nazywamy ją M. Chcemy znaleźć średnią wartość liczby M. Oczywiście, nie jest trudno zrobić to metodami poznanymi na poprzednich przygodach probabilistycznych, jednak w tym przypadku użyjemy konstrukcji wyżej.

   Funkcja h będzie wyglądać następująco:

   $$h(n) = \mathbb{E}\left[M \mid N = n\right] = \sum_{1\leq i\leq n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

   czyli $h(N) = \frac{N+1}{2}$.

   Stosując notację jak wyżej, mamy

   $$\begin{aligned} Z &= N \\ X &= M \end{aligned}$$

czyli podstawiając do wzoru:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}\left[h(N)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{N+1}{2}\right] &= \\
= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[N] + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \le i \le 10} \frac{i}{10} + 1\right) &= \\
= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + 1\right) \frac{13}{4}
\end{aligned}
$$

Rozbicie jak wyżej można w elegancki sposób zamienić w bardziej abstrakcyjną definicję warunkowej wartości oczekiwanej.

Definicja 1.1.
Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem, a X całkowalną zmienną losową.

Zmienną losową Y nazywamy **warunkową wartością oczekiwaną** [wwo] X pod warunkiem $\mathcal{G}$, jeśli następujące warunki są spełnione:

(W1) Y jest $\mathcal{G}$-mierzalne

(W2) $(\forall\ G \in \mathcal{G})\ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_G]$

Nasuwają się teraz pytania o poprawność Y zdefiniowanego jak wyżej. Czy zawsze istnieje i czy jest on jedyny?

Przykład(y) 1.2

1. Niech $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, gdzie Z jest zmienną losową przyjmującą przeliczalnie wiele wartości. Wówczas $Y = h(Z)$ dla $h(z) = \mathbb{E}\left[X \mid Z = z\right]$ jest wwo X względem $\mathcal{G}$.

Twierdzenie 1.1 : poprawność wwo.
Dla σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i całkowalnej zmiennej losowej X **istnieje jedyna zmienna losowa** Y będąca wwo X względem $\mathcal{G}$. Będziemy ją oznaczać

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = Y.$$

Jeśli Y, Y' są wwo X względem $\mathcal{G}$, to $Y = Y'$ prawie wszędzie.

Dowód
Dowód na następnym wykładzie.

Uwaga 1.2.

O wwo X pod warunkiem $\mathcal{G}$ należy myśleć jako o przybliżeniu X na podstawie informacji zawartych w $\mathcal{G}$ (więcej na wykładzie 3).

Przykład(y) 1.3

1. Jeśli X i $\mathcal{G}$ są niezależne, to znaczy dla każdego $B \in Bor(\mathbb{R})$ i dla każdego $G \in \mathcal{G}$ zachodzi
$$\mathbb{P}[X \in B, G] = \mathbb{P}[X \in B]\,\mathbb{P}[G],$$
to wtedy $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[X] = Y$.

   Warunek (W1) jest oczywiście spełniony, bo Y jest funkcją stałą, więc jego przeciwobraz to całość lub $\emptyset$ (czyli jest $\mathcal{G}$-mierzalny). Warunek (W2) sprawdzamy dla dowolnego $G \in \mathcal{G}$:
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\,\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_G].$$

2. Rozważmy pokrycie Ω rozłącznymi zbiorami $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $A_i \in \mathcal{F}$ dla każdego i. Niech $\mathcal{G} = \sigma(A_i\ :\ i \in \mathbb{N})$ będzie σ-ciałem rozpinanym przez to pokrycie. Wówczas
$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{E}\left[X \mid A_i\right]$$
Spełnianie pierwszego warunku jest oczywiste, bo mamy doczynienia z funkcją prostą. Warunek (W2) wystarczy sprawdzić dla atomów, czyli $G = A_j$, bo wszystkie zmienne losowe $\mathcal{G}$-mierzalne są stałe na A_i.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left[\sum \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{E}\left[X \mid A_i\right]\right]\mathbb{1}_{A_j}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid A_j\right]\mathbb{1}_{A_j}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_j}\frac{\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_j}\right]}{\mathbb{P}\left[A_j\right]}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_j}\right]\frac{\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_j}\right]}{\mathbb{P}\left[A_j\right]} = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_j}\right],\end{aligned}$$
gdyż $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_j}\right] = \mathbb{P}\left[A_j\right]$.

3. Jeśli w przykładzie wyżej weźmiemy $A_1 = A$, $A_2 = A^c$ i $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$ oraz $\mathcal{G} = \sigma(A)$, to dostajemy to samo co na samym początku tego wykładu:
$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[X \mid A\right] + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{E}\left[X \mid A^c\right].$$

1.3 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2 : prawdopodobieństwo warunkowe.
Dla σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ definiujemy **prawdopodobieństwo warunkowe** pod warunkiem $\mathcal{G}$ jako
$$\mathbb{P}\left[A \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}\right]$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}\left[A \mid \mathcal{G}\right]$ jest zmienną losową taką, że:

- $\mathbb{P}\left[A \mid \mathcal{G}\right]$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna (ze względu na wwo w definicji)

☕ $\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[A \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_G\right] = \mathbb{P}\left[A \cap G\right]$

Przykład(y) 1.4

1. Niech E_1, E_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem exp(1). Chcemy się zastanowić jak wygląda prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P}\left[E_1 + E_2 > t \mid \sigma(E_1)\right]$$

dla $t > 0$. Ponieważ liczymy to prawdopodobieństwo względem $\sigma(E_1)$, to tak naprawdę wszystkie informacje o E_1 mamy w ręku, gdyż tę zmienną obserwujemy. Czyli E_1 możemy w takim przypadku potraktować jako zwykłą stałą i zgadnąć, że

$$\mathbb{P}\left[E_1 + E_2 > t \mid \sigma(E_1)\right] = e^{-(t-E_1)}.$$

Dla pewności, przerachujemy cały ten przykład wprost z definicji, żeby przekonać się że strzał był poprawny.

Niech $G \in \sigma(E_1)$, wtedy zgodnie z wcześniejszą obserwacją istnieje pewne $C \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że G jest postaci $G = \{E_1 \in C\}$. Policzymy $\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[\{E_1 + E_2 > t\} \mid \sigma(E_1)\right]\right]$ gdyż jak wyżej zauważyliśmy, $\mathbb{P}\left[A \mid \mathcal{G}\right]$ jest zmienną losową. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[E_1 + E_2 > t \mid \sigma(E_1)\right] \mathbb{1}_G\right] &\overset{\star}{=} \mathbb{P}\left[\{E_1 + E_2 > t\} \cap G\right] = \\
&= \mathbb{P}\left[\{E_1 + E_2 > t\} \cap \{E_1 \in C\}\right] = \\
&= \iint\limits_{\substack{C \times \mathbb{R}_+ \\ x+y>t}} e^{-x} e^{-y} dx dy = \\
&= \int_C e^{-x} \underbrace{\left[\int_{x+y>t} e^{-y} dy\right]}_{\star\star} dx = \\
&= \int_C e^{-x} e^{-(t-x)_+} dx = \mathbb{E}\left[e^{-(t-E_1)_+} \mathbb{1}_{\{E_1 \in C\}}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-(t-E_1)_+} \mathbb{1}_G\right]
\end{aligned}$$

Równość $\star$ wynika z uwagi pod definicją prawdopodobieństwa warunkowego. Całka $\star\star$ jest równa 1 gdy $x > t$ (gdyż wtedy dla każdego y mamy $x + y > t$), natomiast dla $x \leq t$ wynosi ona $e^{-(t-x)}$.

Wykład 09.10.23 : Własności WWO

Na tym wykładzie zajmiemy się dowodzeniem własności wwo, w tym pokażemy jej istnienie i jedyność.

2.1 Poprawność: istnienie i jedyność

Lemat 2.1 : WWO jest całkowalna.
To znaczy, że mając całkowalną zmienną losową X oraz σ-ciało $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, to zachodzi $\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right|\right] < \infty$.

Dowód
Rozważmy zbiór

$$A = \{\omega \ : \ \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right](\omega) > 0\} = \{\omega \ : \ \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \in (0, \infty)\} = \left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right]^{-1}((0, \infty))$$

jako przeciwobraz zbioru $(0, \infty) \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ przez funkcję $\mathcal{G}$-mierzalną $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ wiemy, że $A \in \mathcal{G}$. Ponieważ $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ jest wwo X pod warunkiem $\mathcal{G}$, to musi warunek (W2):

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_A\right] < \infty$$

bo X jest całkowalna.

Analogicznie postępujemy dla zbioru A^c:

$$0 \leq \mathbb{E}\left[-\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[-X\mathbb{1}_{A^c}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{A^c}\right] < \infty.$$

Zauważmy, że

$$\left|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right| = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_{A^c}$$

Dodając obie te nierówności (i korzystając z liniowości wartości oczekiwanej) uzyskujemy

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right|\right] < \infty$$

Lemat 2.2 : jedyność p.w..
Niech $\mathcal{G} \subseteq F$ będzie σ-ciałem. Jeśli Y i Y′ są obie wersjami $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$, to $Y = Y'$ p.w..

Dowód
Ustalmy $\varepsilon > 0$ i rozważmy zdarzenie

$$A_\varepsilon = \{Y - Y' > \varepsilon\} \in \mathcal{G}$$

które jest $\mathcal{G}$-mierzalne, bo Y i Y′ takie są.

$$\begin{aligned}\varepsilon\mathbb{P}\left[A_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] &= \mathbb{E}\left[\varepsilon\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[(\varepsilon + Y')\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] \leq \\ &\overset{\star}{\leq} \mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] \overset{(W2)}{=} \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right]\end{aligned}$$

gdzie $\star$ wynika z tego, że na zbiorze A_ε $Y > Y' + \varepsilon$.

Dostajemy więc, że

$$\varepsilon\mathbb{P}\left[A_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\right]$$

co po przeniesieniu $\mathbb{E}$ na jedną stronę daje

$$\varepsilon\mathbb{P}\left[A_\varepsilon\right] \leq 0$$

a ponieważ $\varepsilon > 0$, to musi być $\mathbb{P}\left[A_\varepsilon\right] = 0$.

Wówczas

$$\mathbb{P}\left[Y > Y'\right] = \underbrace{\mathbb{P}\left[(\exists\ n)\ Y \geq Y' + \frac{1}{n}\right]}_{\mathbb{P}\left[A_{\frac{1}{n}}\right]} = \mathbb{P}\left[\bigcup A_{\frac{1}{n}}\right] = \lim \mathbb{P}\left[A_{\frac{1}{n}}\right] = 0$$

ponieważ $A_{\frac{1}{n}} \subseteq A_{\frac{1}{n+1}}$.

Zamieniając miejscami Y i Y' w dowodzie dostaniemy $\mathbb{P}\left[Y' > Y\right] = 0$, czyli obie możliwości są miary zero.

Twierdzenie 2.3 : o istnieniu WWO.
Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem, a X jest całkowalną zmienną losową. Istnieje zmienna losowa Y spełniająca oba postulaty wwo X pod warunkiem $\mathcal{G}$.

Jest to Twierdzenie 1.1 z poprzedniego wykładu.

Zanim jednak przejdziemy do dowodu 2.3, przypomnijmy *twierdzenie Radona-Nikodyma* z teorii miary:

Dygresja : twierdzenie Radona-Nikodyma.
Niech μ i ν będą σ-miarami na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{G})$ takimi, że ν jest *absolutnie ciągła* względem μ $[\nu \ll \mu]$, tzn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Wówczas istnieje $\mathcal{G}$-mierzalna funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$$

Funkcję f jak wyżej często oznaczamy $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ i nazywamy *pochodną Radona-Nikodyma*.

Dowód

Wracając do dowodu twierdzenia 2.3. Najpierw pokażemy prostszy przykład, gdy $X \geq 0$, a potem uogólnimy go do dowolnego X.

Załóżmy, że $X \geq 0$ p.w. Wtedy możemy rozważyć miary $\mu = \mathbb{P} \restriction \mathcal{G}$ oraz $\nu(A) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$. Od razu widać, że w takim ułożeniu $\nu \ll \mu$, więc na mocy twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje f $\mathcal{G}$-mierzalna taka, że

$$\mathbb{E}\left[f\mathbb{1}_A\right] = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) = \nu(A) - \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A].$$

Funkcja f spełnia (W1) z definicji wwo, bo jest $\mathcal{G}$-mierzalna, a (W2) jest potwierdzone przez rachunek wyżej. Czyli f jest wwo X pod warunkiem $\mathcal{G}$.

Niech teraz X będzie dowolną zmienną losową. Możemy ją rozbić jako

$$X = X^+ - X^-,$$

gdzie $X^+ = \max(0, X) \geq 0$ oraz $X^- = -\min(0, X) \geq 0$. Do obu tych zmiennych możemy zastosować pierwszą część dowodu, by dostać zmienne $\mathbb{E}\left[X^+ \mid \mathcal{G}\right]$ oraz $\mathbb{E}\left[X^- \mid \mathcal{G}\right]$. Wystarczy zauważyć, że dzięki liniowości $\mathbb{E}$ możemy w prosty sposób pokazać

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X^+ \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[X^- \mid \mathcal{G}\right]$$

2.2 Własności wwo

Twierdzenie 2.4 : o arytmetyce wwo.

Niech $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ będą σ-ciałami, a X, X_1, X_2 całkowalnymi zmiennymi losowymi

1. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}[X]$
2. Jeśli $X \geq 0$, to również $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \geq 0$
3. $\mathbb{E}\left[aX_1 + bX_2 \mid \mathcal{G}\right] = a\mathbb{E}\left[X_1 \mid \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[X_2 \mid \mathcal{G}\right]$
4. $\left|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right]$
5. Jeśli $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, to wówczas
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right] \mid \mathcal{G}_2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right] \mid \mathcal{G}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$$
To znaczy, że mając informacje o X w dwóch zawartych w sobie ciałach, to mniejsze zawsze wygrywa.
6. Jeśli Y jest $\mathcal{G}$-mierzalna i XY jest całkowalna, to $\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$, czyli Y możemy traktować jako stałą.

Dowód

1. Wystarczy wstawić $G = \Omega$ w warunek (W2):

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_\Omega\right] \overset{(W2)}{=} \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_\Omega\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$$

2. Wynika z dowodu twierdzenia o istnieniu, bo $\frac{d\nu}{d\mu} = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$. Gdyby $A = \{\omega \ : \ \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] < 0\}$, to wówczas
$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] = \nu(A) = \int_A \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right](\omega)\mu(d\omega) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] < 0$$
ale przecież $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] \geq 0$, więc $A = \emptyset$.

3. Można to zrobić na dwa sposoby: licząc wszystko pokolei, albo można sprawdzić, czy $Y = a\mathbb{E}\left[X_1 \mid \mathcal{G}\right] + b\mathbb{E}\left[X_2 \mid \mathcal{G}\right]$ spełnia warunki wwo tej samej zmiennej co $\mathbb{E}\left[aX_1 + bX_2 \mid \mathcal{G}\right]$. Wówczas obie te zmienne są równe prawie wszędzie.

   Warunek $\mathcal{G}$-mierzalności dla Y jest spełniony, bo Y jest kombinacją liniową dwóch funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych. Wystarczy więc sprawdzić warunek (W2). W tym celu ustalmy $A \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_A\right] &\overset{\star}{=} a\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_1 \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] + b\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_2 \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] = \\ &= a\mathbb{E}\left[X_1\mathbb{1}_A\right] + b\mathbb{E}\left[X_2\mathbb{1}_A\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[(aX_1 + bX_2)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[aX_1 + bX_2 \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right]\end{aligned}$$

4. Wiemy, że $-|X| \leq X \leq |X|$. Korzystając z punktu 2 dostajemy

$$0 \leq X + |X| \Rightarrow 0 \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right] + \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \Rightarrow -\mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$$

$$0 \leq |X| - X \Rightarrow 0 \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \Rightarrow \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right]$$

   Po złożeniu tych dwóch nierówności:

$$-\mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right]$$

   wiemy, że $-|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]| \leq \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \leq |\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]|$, więc musi być

$$|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]| \leq \mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right].$$

5. Zaczniemy od sprawdzenia, że $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right] \mid \mathcal{G}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$. Wybierzmy $A \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right] \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right] \mathbb{1}_A\right]$$

   co potwierdza warunek (W2). $\mathcal{G}_1$-mierzalność $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right]$ jest oczywista, gdyż $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right]$ jest $\mathcal{G}_2$-mierzalne, a po obcięciu do $\mathcal{G}_1$ dostajemy funkcję $\mathcal{G}_1$-mierzalną.

   Pozostaje nam sprawdzić czym jest $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right] \mid \mathcal{G}_2\right]$. Roboczo nazwiemy $Y = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$. Jest to funkcja $\mathcal{G}_1$-mierzalna, ale dzięki $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ mamy też $\mathcal{G}_2$-mierzalność. W takim razie (tak jak w jednym z przykładów z pierwszego wykładu) $\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}_2\right] = Y$. Pisząc bez używania litery Y dostajemy
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right] \mid \mathcal{G}_2\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$$

6. Ćwiczenie, a poniżej moja próba.

   Jeśli Y jest $\mathcal{G}$-mierzalne, to $Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ też takie jest jako iloczyn dwóch funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych. Pozostaje sprawdzić warunek (W2).

Zacznijmy od $Y = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ dla $A_i \in \mathcal{G}$, czyli od funkcji prostej. Wybierając $A \in \mathcal{G}$ możemy ograniczyć się do zbiorów A_i, gdyż są one rozłączne i na dowolnym innym zbiorze $Y = 0$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right]\mathbb{1}_{A_i}\right] &\overset{(W2)}{=} \mathbb{E}\left[XY\mathbb{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}\left[a_i X \mathbb{1}_{A_i}\right] = a_i \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_i}\right] = \\ &= a_i \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\mathbb{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}\left[(a_i\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])\mathbb{1}_{A_i}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[(Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])\mathbb{1}_{A_i}\right]\end{aligned}$$

Czyli $\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ dla przypadku gdy Y jest funkcją prostą.

Jeśli teraz Y jest dowolną nieujemną funkcją mierzalną, to istnieje ciąg funkcji prostych

$$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq \ldots \qquad \lim s_i = Y$$

Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY\right]\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[XY\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X \lim s_i \mathbb{1}_A\right] &\overset{\star}{=} \lim \mathbb{E}\left[X s_i \mathbb{1}_A\right] = \\ &\overset{\star\star}{=} \lim \mathbb{E}\left[s_i \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\lim s_i \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\mathbb{1}_A\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\mathbb{1}_A\right]\end{aligned}$$

$\star$ można zrobić na mocy twierdzenia o monotoniczności ciągu s_i dla zwykłej $\mathbb{E}$, natomiast $\star\star$ stosuje poprzedni przypadek Y.

Pozostaje przypadek, gdy Y jest dowolną $\mathcal{G}$-mierzalną zmienną losową. Wówczas możemy rozbić $Y = Y^+ - Y^-$ i skorzystać z liniowości wwo:

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[XY^+ \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[XY^- \mid \mathcal{G}\right] = Y^+\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] - Y^-\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$$

Twierdzenie 2.5 : o zbieżności i ciągłości.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem, a $X, X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych. Wówczas

1. Jeśli $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ oraz $X_n \nearrow X$, to $\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \nearrow \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ p.w. (twierdzenie o zbieżności monotonicznej)
2. Jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n \mid \mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$ (lemat Fatou).
3. Jeśli $|X_n| \leq Y$ oraz Y jest całkowalny i $X_n \to X$ p.w., to $\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \to \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ (twierdzenie o zbieżności ograniczonej)

Dowód

1. Zauważamy, że ciąg $\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$ jest niemalejący i ograniczony przez $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ (na mocy punktu 2 z poprzedniego twierdzenia).

Niech $Y = \lim \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$. Wystarczy, że pokażemy $Y = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ p.w., czyli sprawdzimy warunki (W1) i (W2). Oczywiście, warunek (W1) wynika z faktu, że granica ciągu funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych jest nadal $\mathcal{G}$-mierzalna. Dla sprawdzenia warunku (W2) wybierzmy $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\lim \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] \overset{\star}{=} \lim \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \mathbb{1}_A\right] =$$
$$= \lim \mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\lim X_n\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right]$$

czyli $Y = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ p.w.

2. Zaczniemy od dwóch obserwacji:

   - Dla ciągu $\{a_n\}$ $\liminf a_n$ to najmniejszy z jego punktów skupienia, równoważnie:

$$\liminf_n a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n$$

   - Dla dowolnej przeliczalnej rodziny zmiennych losowych $\{Z_n\}_{n\in T}$ i dla dowolnego $t \in T$ mamy

$$\inf_{s\in T} Z_s \leq Z_t$$
$$\mathbb{E}\left[\inf_{s\in T} Z_s\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_t\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\inf_{s\in T} Z_s\right] \leq \inf_{t\in T} \mathbb{E}\left[Z_t\right]$$

   (co jest tak naprawdę wersją lematu Fatou dla $\mathbb{E}$ z RP1R).

Stosując obserwację w przejściach $\star$, obserwację w przejsciu $\star\star$ oraz ptk 1. ($\inf_{n>k} X_n \leq \inf_{n>k+1} X_n$) w $\star\star\star$, dostajemy

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n \mid \mathcal{G}\right] \overset{\star}{=} \mathbb{E}\left[\lim_k \inf_{n>k} X_n \mid \mathcal{G}\right] \overset{\star\star\star}{=} \lim_k \mathbb{E}\left[\inf_{n>k} X_n \mid \mathcal{G}\right] \leq$$
$$\overset{\star\star}{\leq} \lim_k \inf_{n>k} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \overset{\star}{=} \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

3. Rozważmy zmienne $X'_n = Y + X_n$. Ponieważ $|X_n| \leq Y$, to $Y + X_n \geq 0$.

$$\mathbb{E}\left[Y + \liminf X_n \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\liminf(X_n + Y) \mid \mathcal{G}\right] \overset{3.}{\leq} \liminf \mathbb{E}\left[Y + X_n \mid \mathcal{G}\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[Y\right] + \liminf \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

To daje nam, że $\mathbb{E}\left[\liminf X_n \mid \mathcal{G}\right] \leq \liminf \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$.

Postępując analogicznie dla $X_n" = Y - X_n$ (które dalej jest ≥ 0) dostaniemy $\mathbb{E}\left[\limsup X_n \mid \mathcal{G}\right] \geq \limsup \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$:

$$\mathbb{E}\left[Y - \limsup X_n \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\limsup(Y - X_n) \mid \mathcal{G}\right] =$$
$$= -\mathbb{E}\left[\liminf(X_n - Y) \mid \mathcal{G}\right] \overset{3.}{\geq} -\liminf \mathbb{E}\left[X_n - Y \mid \mathcal{G}\right] =$$
$$= \limsup \mathbb{E}\left[Y - X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

Ale wiemy, że $\liminf X_n = X$ oraz $\limsup X_n = X$, czyli

$$\liminf \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \geq \mathbb{E}\left[\liminf X_n \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\limsup X_n \mid \mathcal{G}\right] \geq \limsup \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

ale przecież $\liminf \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] \leq \limsup \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$, czyli musi być

$$\liminf \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \limsup \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

i ponieważ lim inf = lim sup = lim to mamy

$$\lim \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right].$$

Twierdzenie 2.6.
Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Załóżmy, że

- X jest $\mathcal{G}$-mierzalna
- Y jest niezależna od $\mathcal{G}$
- funkcja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest mierzalna taka, że

$$\mathbb{E}\left[|\psi(X, Y)|\right] < \infty.$$

Wówczas

$$\mathbb{E}\left[\psi(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \Psi(X),$$

gdzie funkcja $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako $\Psi(x) = \mathbb{E}\left[\psi(x, Y)\right]$.

Dowód

Tak jak w dowodzie ostatniego punktu twierdzenia 2.4 zaczniemy od funkcji φ prostych i stopniowo przejdziemy do dowolnych funkcji mierzalnych.

Zaczniemy od funkcji φ postaci $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y)$ dla pewnych $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli X jest $\mathcal{G}$-mierzalne, to $\mathbb{1}_A(X)$ też takie jest. Analogicznie, jeśli Y jest niezależna od $\mathcal{G}$, to $\mathbb{1}_B(Y)$ też jest niezależne i wtedy $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y) \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y)\right]$. Korzystając z 2.4 w przejściu $\star$, dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B(Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &\overset{\star}{=} \mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y)\right]\end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned}\Psi(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(x, Y)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(Y)\right] = \\ &= \mathbb{1}_A(x)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y)\right]\end{aligned}$$

czyli $\Psi(X) = \mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(Y)\right]$ tak jak chcieliśmy.

Chcemy przejść teraz do funkcji postaci $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_C(x, y)$ dla $C \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$. Skorzystamy przy tym z lematu o $\pi - \lambda$ układach:

Dygresja : lemat o $\pi - \lambda$ układach.
Niech P będzie π-układem (tzn. $A, B \in P \Rightarrow A \cap B \in P$) oraz niech $P \subseteq L$ będzie λ-układem ($\Omega \in L, A \subseteq B \in L \Rightarrow B \setminus A \in L$ i $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \in L \Rightarrow \bigcup A_i \in L$).

Wówczas L jest σ-ciałem i w szczególności zawiera σ-ciało generowane przez π-układ P.

Rozważmy zbiór
$$D = \{C \in \mathrm{Bor}\,\mathbb{R}^2 \ : \ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_C(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \Psi_C(X)\}.$$
Oczywiście, zbiór wszystkich "kwadratów" $A \times B$ dla $A, B \subseteq \mathbb{R}$ jest π-układem zbiorów z $\mathbb{R}^2$ i zgodnie z tym co już pokazaliśmy, zawiera się on w D. Chcemy więc pokazać, że D jest λ-układem.

1. $\Omega \in D$

   Jest to prawdą, bo w tym przypadku $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, czyli podlega pod przypadek udowodniony wyżej.

2. $A \subseteq B \in D \Rightarrow B \setminus A \in D$

   Niech $A \subseteq B \in D$, wówczas
   $$\mathbb{1}_{B\setminus A}(X, Y) = \mathbb{1}_B(X, Y) - \mathbb{1}_A(X, Y)$$
   czyli wówczas
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B\setminus A}(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(X, Y) - \mathbb{1}_A(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \Psi_B(X) - \Psi_A(Y) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(X, Y)\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X, Y)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B\setminus A}(X, Y)\right] = \Psi(X)\end{aligned}$$
   i tym samym dostajemy $B \setminus A \in D$

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \Rightarrow \bigcup A_i \in D$

   Wystarczy zauważyć, że przy wstępującym ciągu zbiorów A_i mamy $\mathbb{1}_{A_n} \geq \mathbb{1}_{A_{n-1}}$ oraz $\mathbb{1}_{\bigcup A_i} = \lim \mathbb{1}_{A_i}$, a następnie zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej:
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\bigcup \mathbb{1}_{A_i}(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[\lim \mathbb{1}_{A_i}(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \lim \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_i}(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \lim \Psi_{A_i}(X) = \lim \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_i}(X, Y)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\lim \mathbb{1}_{A_i}(X, Y)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\bigcup A_i}(X, Y)\right]\end{aligned}$$

W ten sposób pokazaliśmy już, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji prostych $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Przejdziemy teraz do przypadku, gdy φ jest nieujemną funkcją mierzalną, czyli istnieje ciąg funkcji prostych $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq ... \leq \varphi$ taki, że $\varphi = \lim s_i$.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[\lim s_i(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &\overset{\heartsuit}{=} \lim \mathbb{E}\left[s_i(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \lim \mathbb{E}\left[s_i(X, Y)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\lim s_i(X, Y)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X, Y)\right]\end{aligned}$$

W przejściu ♡ skorzystaliśmy ponownie z twierdzeniu o zbieżności monotonicznej.

Pozostaje jedynie przypadek, gdy φ jest dowolną funkcją mierzalną. Wtedy możemy zapisać $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ dla φ^+ oraz φ^- nieujemnych. Wtedy, korzystając z wcześniej już pokazanych form funkcji mierzalnych dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi^+(X, Y) - \varphi^-(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi^+(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] - \mathbb{E}\left[\varphi^-(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi^+(X, Y)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi^-(X, Y)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi^+(X, Y) - \varphi^-(X, Y)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X, Y)\right]
\end{aligned}$$

2.3 Zadania

Zadanie 1.
Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Rozważmy $\mathcal{G}$-mierzalną zmienną losową X oraz niezależną od $\mathcal{G}$ zmienną losową Y. Załóżmy, że $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją mierzalną, że $\mathbb{E}\left[|\psi(X, Y)|\right] < \infty$. Pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[\psi(X, Y) \mid \mathcal{G}\right] = \Psi(X) \qquad \Psi(x) = \mathbb{E}\left[\psi(x, Y)\right]$$

Rozwiązanie.
Patrz dowód twierdzenia 2.6.

Zadanie 2.
Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowych o rozkładzie jednostajnym na kwadracie o wierzchołkach $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)$. Oblicz $\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2} \mid \mathcal{Y}\right]$.

Rozwiązanie.
Zaczniemy od znalezienia gęstości rozkładu Y.

Oczywiście, gęstość rozkładu wektora $(X, Y) = \frac{1}{2}$ gdyż kwadrat ma pole 2. W takim razie, gęstość zmiennej Y to

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2} dx & y \geq 0 \\ \int_{-y-1}^{1+y} \frac{1}{2} dx & y < 0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 1 - y & y \geq 0 \\ 1 + y & y < 0 \end{cases} = 1 - |y|
\end{aligned}$$

Skorzystamy z zadania 4 z listy 1, gdzie pokazaliśmy, że

$$\mathbb{E}\left[h(X) \mid Y\right] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Y}(x, Y) dx$$

gdzie

$$f_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

W tym zadaniu chcemy wyliczyć

$$\mathbb{P}\left[2X > 1 \mid Y\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{2X>1\}} \mid Y\right] = \int_{1/2}^{1} \mathbb{1}_{\square}(x, Y)\frac{1}{2-2|Y|}dx =$$
$$= \int_{1/2}^{1-|Y|} \frac{\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(Y)}{2-2|Y|}dx = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(Y)\frac{1/2-|Y|}{2-2|Y|}$$

Zadanie 3.
Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie z wartością oczekiwaną m. Niech N będzie dyskretną zmienną losową o wartościach w $\mathbb{N}$ niezależną od ciągu $\{X_n\}$ z wartością oczekiwaną M. Zdefiniujmy $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Znajdź

$$\mathbb{E}\left[S_N \mid N\right] \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}\left[S_N\right]$$

Rozwiązanie.
Możemy od razu zacząć od tezy, że

$$\mathbb{E}\left[S_N \mid N\right] = N \cdot m$$

ale spróbujemy rozwiązać to w bardziej metodyczny sposób.

Niech $G \in \sigma(N)$, czyli $G = \{N \in C\}$ dla $C \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[S_N \mid N\right]\mathbb{1}_G\right] &= \mathbb{E}\left[S_n \mathbb{1}_G\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \mathbb{1}_{\{N\in C\}}\right] = \\
&= \sum_{n\in C} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \mathbb{P}\left[N = n\right] = \\
&= \sum_{n\in C}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left[N = n\right] \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \\
&= m \sum_{n\in C} n \cdot \mathbb{P}\left[N = n\right] = \\
&= m \cdot \mathbb{E}\left[N\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[N \cdot m\mathbb{1}_G\right]
\end{aligned}$$

Czyli warunek (W2) jest spełniony przez Nm, a warunek $\sigma(N)$-mierzlaności jest spełniony przez fakt, że N jest $\sigma(N)$-mierzalne.

Korzystając z 1. własności wwo (2.4) wiemy, że

$$\mathbb{E}\left[S_N\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[S_N \mid N\right]\right] = \mathbb{E}\left[N \cdot m\right] = m \cdot M$$

Zadanie 4.
Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład Exp(1).

(a) Oblicz $\mathbb{E}\left[X+Y \mid X\right]$

(b) Oblicz $\mathbb{E}\left[X \mid X+Y\right]$

Rozwiązanie.

(a) Zacznijmy od szybkiego przypomnienia, że jeśli X i Y są niezależne, to Y jest niezależne od $\sigma(X)$. Dla $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ i $G = \{X \in B\} \in \sigma(X)$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[Y \in A \mid G\right] &= \mathbb{P}\left[Y \in A \mid X \in B\right] = \\ &= \mathbb{P}\left[Y \in A\right]\mathbb{P}\left[X \in B\right] = \mathbb{P}\left[Y \in A\right]\mathbb{P}\left[G\right]\end{aligned}$$

Czyli wracając do treści zadania

$$\mathbb{E}\left[X+Y \mid X\right] = \mathbb{E}\left[X \mid X\right] + \mathbb{E}\left[Y \mid X\right] = X + \mathbb{E}\left[Y\right] = X + 1$$

gdyż X jest mierzalne względem $\sigma(X)$, więc $\mathbb{E}\left[X \mid X\right] = X$, a z drugiej strony ponieważ Y jest niezależne od $\sigma(X)$, to $\mathbb{E}\left[Y \mid X\right] = \mathbb{E}\left[Y\right]$.

(b) Zaczniemy od obserwacji, że

$$\mathbb{E}\left[X \mid X+Y\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid X+Y\right]$$

ponieważ

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid X+Y\right]\mathbb{1}_{\{X+Y\in C\}}\right] &= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X+Y\in C\}}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{\{X+Y\in C\}}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid X+Y\right]\mathbb{1}_{\{X+Y\in C\}}\right]\end{aligned}$$

W takim razie

$$\mathbb{E}\left[X \mid X+Y\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X \mid X+Y\right] + \mathbb{E}\left[Y \mid X+Y\right]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X+Y \mid X+Y\right] = \frac{1}{2}(X+Y)$$

Zadanie 5.
Pokaż, że jeśli X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że X oraz XY są całkowalne oraz Y jest zmienną losową mierzalną względem $\mathcal{G}$, to

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$$

Rozwiązanie.
Patrz dowód twierdzenia 2.4.

Zadanie 6.
Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Niech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ będzie π-układem generującym

σ-ciało $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Rozwiązanie.
Zadanie sprowadza się do skorzystania z lematu o $\pi - \lambda$ układach i sprawdzeniu czy zbiór

$$D = \{A \ : \ \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_A\right]\}$$

zawierający π-układ $\mathcal{C}$ jest λ-układem. Wówczas D samo w sobie będzie σ-układem, w szczególności zawierającym ciało $\mathcal{G}$.

1. $\Omega \in D$ bo aby $\mathcal{C}$ generowało σ-ciało, to musi zawierać Ω.
2. $A \subseteq B \in D \Rightarrow B \setminus A \in D$

   Niech $A \subseteq B \in D$, wówczas $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$. Daje to:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{B\setminus A}\right] &= \mathbb{E}\left[X(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_B\right] - \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_B\right] - \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_A\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Z(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{B\setminus A}\right]\end{aligned}$$

   czyli z $B \setminus A$ zaspokaja warunek należenia do D.
3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \in D \Rightarrow \bigcup A_i \in D$

   Dla pokazania tego warunku będziemy korzystać z twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $X\mathbb{1}_{\bigcup A_i} \geq X\mathbb{1}_{A_n}$ oraz $X\mathbb{1}_{A_1} \leq X\mathbb{1}_{A_2} \leq ....$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\bigcup A_i}\right] &= \mathbb{E}\left[X \lim \mathbb{1}_{A_i}\right] = \\ &= \lim \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A_i}\right] = \\ &= \lim \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{A_i}\right] = \\ &+ \mathbb{E}\left[Z \lim \mathbb{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\bigcup A_i}\right]\end{aligned}$$

Czyli tak długo jak Z jest $\mathcal{G}$-mierzalne, to jest ono wwo X pod warunkiem że $\mathcal{G}$.

Zadanie 7.
Niech $\mathcal{G}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ będą niezależnymi σ-ciałami. Niech X będzie całkowalną zmienną losową.

(a) Załóżmy, że X jest niezależna od σ-ciala $\mathcal{D}$. Czy prawdą jest, że

$$\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{D})\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]? \quad (\star)$$

(b) Pokaż, że jeżeli $\mathcal{D}$ jest niezależne od $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{G})$, to $(\star)$ zachodzi.

Wykład 23.10.23 : Interpretacje geometryczne WWO

Rozważmy zmienną losową X taką, że $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$. Interesuje nas zagadnienie regresji, mianowicie obserwując inną zmienną losową Z chcemy móc X aproksymować. Przez przybliżanie X rozumiemy przybliżanie średniokwadratowe.

Szukamy więc funkcji mierzalnej $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, żeby

$$\mathbb{E}\left[(X - h_0(Z))^2\right] = \inf_{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X - h(Z))^2\right]$$

> **Fakt 3.1.**
> Dla każdej zmiennej losowej Y mierzalnej względem $\sigma(Z)$ (co w skrócie będziemy notować $Y \in \sigma(Z)$) istnieje h takie, że $Y = h(Z)$.

Dowód
Zadanie, moja próba poniżej.

Zaczynamy od Y będącego funkcją prostą i przechodzimy do coraz to bardziej skomplikowanych postaci funkcji mierzalnych.

Jeżeli $Y = \mathbb{1}_A$, to ponieważ Y jest $\sigma(Z)$-mierzalne, mamy $A \in \sigma(Z)$. To znaczy, że istnieje $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ taki, że $Z(A) = B$, czyli $A = Z^{-1}[B]$ i wówczas

$$Y = \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{Z^{-1}[B]} = \mathbb{1}_B(Z)$$

Zrobimy tutaj jeszcze krok $Y = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Dla każdego i wiemy, że $\mathbb{1}_{A_i} = h_i(Z)$, gdyż są to funkcje $\sigma(Z)$-mierzalne. W takim razie:

$$Y = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum a_i \cdot h_i(Z) = \left[\sum a_i \cdot h_i\right](Z)$$

a więc szukane $h = \sum a_i \cdot h_i$.

Teraz załóżmy, że istnieje ciąg funkcji prostych $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq Y$ taki, że $Y = \lim s_i$. Wówczas pokazaliśmy już, że każda funkcja $s_i = h_i(Z)$ dla pewnego borelowskiego $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ciąg s_i jest zbieżny, więc również ciąg h_i musi zbiegać do pewnego h. Wówczas dla dowolnego $\omega \in \Omega$

$$Y(\omega) = \lim s_i(\omega) = \lim h_i(Z(\omega)) = h(Z(\omega))$$

czyli $Y = h(Z)$ dla $h = \lim h_i$.

Dla formalności należy rozważyć jeszcze $Y = Y^+ - Y^-$, gdzie Y^+ oraz Y^- podlegają pod poprzedni podpunkt.

🍻

$$\mathbb{E}\left[(X - h(Z))^2\right] = \inf_{Y\in\sigma(Z)} \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right]$$

mając pewną wiedzę o przestrzeniach Hilberta jest do tego dość naturalne podejście: rzut ortogonalny.

Dla σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będziemy rozważać

$$L^2(\mathcal{G}) = \{Y \in \mathcal{G} \ : \ \mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty\}$$

wówczas $L^2(\mathcal{G})$ jest przestrzenią Euklidesową z iloczynem skalarnym $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$, który z kolei zadaje normę

$$\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Używając tego języka będziemy wiedzieli jak szukać Y z początku wykładu, ale najpierw fakt pomocniczy do twierdzenia które nadejdzie lada moment.

Fakt 3.2 : warunkowa wersja nierówności Cauchy'ego-Schwartza.
Dla zmiennych X, Y takich, że $\mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty$ i σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left[|XY| \mid \mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Dowód
Zadanie, tutaj moje podejście.

Zauważmy na początku, że

$$XY = \underbrace{\frac{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/4}}{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/4}}X}_{X_n} \cdot \underbrace{\frac{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/4}}{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/4}}Y}_{Y_n}$$

przy czym korzystamy z $\frac{1}{n}$, żeby na pewno nie dzielić przez 0 gdy np. $\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] = 0$.

Dalej zauważmy, że ponieważ $(X_n - Y_n)^2 \geq 0$, to również

$$0 \leq \mathbb{E}\left[(X_n - Y_n)^2 \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X_n^2 + Y_n^2 - 2X_nY_n \mid \mathcal{G}\right]$$

czyli korzystając z liniowości i przenosząc $\mathbb{E}\left[X_nY_n \mid \mathcal{G}\right]$ na lewą stronę nierówności dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[X_nY_n \mid \mathcal{G}\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X_n^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Y_n^2 \mid \mathcal{G}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\frac{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\frac{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}Y^2 \mid \mathcal{G}\right] = (\heartsuit)\end{aligned}$$

a ponieważ $\frac{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}$ jest $\mathcal{G}$-mierzalne, to możemy wyciągnąć je przed nawias:

$$\begin{aligned}(\heartsuit) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{n})^{1/2}}\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] \to \\ &\xrightarrow{n\to\infty} (\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right])^{1/2}(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right])^{1/2}\end{aligned}$$

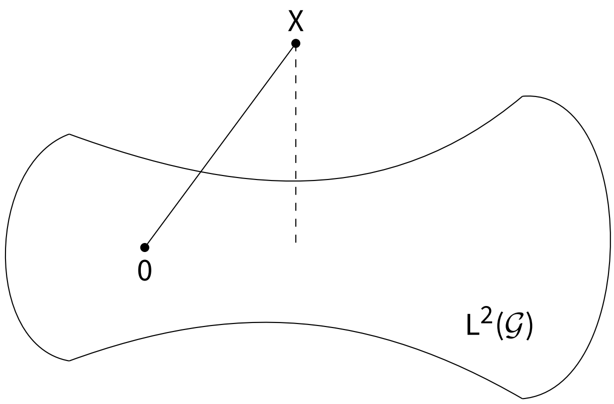
Z tego nierówności w fakcie 3.2 wynika, że dla $Y = 1$ mamy

$$\mathbb{E}\left[|X| \mid \mathcal{G}\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]^2\right] < \infty$$

Twierdzenie 3.3 : wwo jest rzutem ortogonalnym na $L^2(\mathcal{G})$.
Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$, a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ jest σ-ciałem. Wówczas

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \in L^2(\mathcal{G})$$

jest *rzutem ortogonalnym* X na $L^2(\mathcal{G})$.



Dokładniej, $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ daje minimum zbioru $\{\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] \ : \ Y \in L^2(\mathcal{G})\}$. Z faktu 3.1 dla $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = h_0(Z)$ dla pewnego h_0.

Dowód
Dla $Y \in L^2(\mathcal{G})$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left((X - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]) - \overbrace{(Y - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])}^{=Y'}\right)^2\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])^2\right] - 2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])Y'\right] + \mathbb{E}\left[(Y')^2\right] = \\
&\stackrel{\star}{=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y')^2\right]
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E}\left[Y'X \mid \mathcal{G}\right] = Y'\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y'X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y'X\right] = \mathbb{E}\left[Y'\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right]$$

Przykład(y) 3.1

1. Niewiele mający z tym co przed chwilą było. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathrm{Bor}([0,1])$ i $\mathbb{P} = \lambda$. Chcemy rozważyć $t \in (0,1)$ oraz $\mathcal{G} = \sigma(\mathrm{Bor}([0,t])$.

   Dla całkowalnej zmiennej losowej X szukamy $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$.

   Dowolny $G \in \mathcal{G}$ ma postać $G = A \cup B$, gdzie $A \in \mathrm{Bor}([0,t])$ i $B \in \{(t,1], \emptyset\}$. W takim razie, jeśli $Y \in \mathcal{G}$, to Y jest stała na $(t,1]$. Czyli żeby $Y = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ to zapewne będzie postaci:

$$Y(\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_{[0,t]}(\omega) + c\mathbb{1}_{(t,1]}(\omega)$$

   gdzie c jest pewną stałą.

   Musimy sprawdzić, czy (i kiedy) $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_G]$. Widać od razu, że dla $G = A \cup B$ jak wyżej, mamy

$$X\mathbb{1}_A = Y\mathbb{1}_A,$$

   czyli $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]$. Zostaje nam uzgodnić część B kiedy jest on niepusty:

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \int_t^1 X(s)ds$$

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_B] = c(1-t),$$

   czyli c musi być średnią X na przedziale $(t,1]$:

$$c = \frac{1}{1-t}\int_t^1 X(s)ds.$$

3.1 Regularne rozkłady warunkowe

Dla zmiennej losowej Y i całkowalnej zmiennej losowe X napis

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right] := \mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y)\right]$$

będzie wwo X względem σ-ciała generowanego przez Y.

Zadanie dla dociekliwych:

Jeśli $\mathbb{P}[Y=y] > 0$ dla $y \in \mathbb{R}$, to biorąc $\omega \in \{Y=y\}$ dostajemy:

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right](\omega) = \mathbb{E}\left[X \mid Y=y\right] = \frac{1}{\mathbb{P}[Y=y]}\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{Y=y\}}\right]$$

Definicja 3.1 : wwo X pod warunkiem $\{Y=y\}$.
Po pierwsze zauważamy, że istnieje funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $\mathbb{E}\left[X \mid Y\right] = h(Y)$. $(\star)$

Niech X i Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi, przy czym od X wymagamy całkowalności. Dla $y \in \mathbb{R}$ warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem $\{Y=y\}$ definiujemy przez

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y=y\right] = h(y)$$

> gdzie h spełnia warunek ($\star$).

Podobnie definiujemy prawdopodobieństwo zbioru A pod warunkiem $\{Y = y\}$:

$$\mathbb{P}\left[A \mid Y = y\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mid Y = y\right]$$

Przykład(y) 3.2

1. Jeżeli X i Z są niezależne, to chcemy zapytać o

$$\mathbb{P}\left[X + Z \in B \mid X = x\right] \stackrel{?}{=} \mathbb{P}\left[Z + x \in B\right] = \mu_Z(B - x)$$

   Wysławiając tę wartość w terminach całego X:

$$\mathbb{P}\left[X + Z \in B \mid X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X+Z\in B} \mid X\right] \stackrel{\star}{=} \mathbb{E}\left[\varphi(X, Z) \mid X\right] = \Phi(X)$$

   w $\star$ definiujemy: $\varphi(x, z) = \mathbb{1}_{x+z\in B}$. Dla ustalonego x mamy więc:

$$h(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(x, Z)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{x+Z\in B}\right] = \mathbb{P}\left[Z + x \in B\right]$$

2. Niech wektor losowy (X, Y) ma gęstość łączną f(x, y). Wówczas

$$\mathbb{P}\left[X \in B \mid Y = y\right] = \int_B f_{X|Y}(x, y)dx,$$

   gdzie

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{\int f(t, y)dt}.$$

3. Rozważmy $\mathbb{P}\left[E_1 \in \bullet \mid E_1 + E_2 = y\right]$ dla E_1, E_2 niezależnych o rozkładzie Exp(1).

   Przyłożymy do tego przypadku wzór z przykładu 2. Wektor losowy $(E_1, E_1 + E_2)$ ma rozkład losowy o łącznej gęstości $f(x, y) = e^{-x}e^{-(y-x)}\mathbb{1}_{y\geq x\geq 0}$.

$$\int f(s, y)ds = \int_0^y e^{-y}ds = y,$$

   czyli

$$f_{E_1|E_1+E_2}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbb{1}_{y\geq x\geq 0}$$

   co daje rozkład jednostajny:

$$\mathbb{P}\left[E_1 \in \bullet \mid E_1 + E_2 = y\right] = U[0, y](\bullet)$$

Można zadać sobie pytanie, czy

$$\mathbb{P}\left[A \mid Y = y\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mid Y = y\right]$$

zawsze zadaje miarę probabilistyczną? Okazuje się, że tak faktycznie jest.

Definicja 3.2 : regularny rozkład warunkowy.
Niech X będzie zmienną losową, a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Funkcja

$$\kappa_{X,\mathcal{G}} : \Omega \times \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$$

nazywa się **regularnym rozkładem warunkowym** [rrw] X pod warunkiem $\mathcal{G}$, jeżeli

(R1) Dla każdego $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ zmienna losowa $\kappa_{X,\mathcal{G}}(\bullet, B)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna

(R2) Dla każdej $\omega \in \Omega$ $\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, \bullet)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej.

(R3) Dla każdego $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{P}$-p.w. $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}\left[X \in B \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, B)$$

Twierdzenie 3.4 : rrw istnieje.
Dla każdego X i dla każdego $\mathcal{G}$ istnieje rrw X pod warunkiem $\mathcal{G}$

Dowód
W notatkach

Fakt 3.5.
Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zmiennej losowej X takiej, że $\mathbb{E}\left[|f(X)|\right] < \infty$ mamy

$$\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)$$

Pisząc to mówię "weź f(x) i weź miarę κ w punkcie ω i scałkuj κ".

Dowód
Ćwiczenia.

Będziemy przechodzić od najprostszych możliwych funkcji f do coraz to bardziej skomplikowanych konstrukcji.

W pierwszych kroku niech $f(x) = \mathbb{1}_B(x)$ dla $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \in B\}} \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \\ &= \mathbb{P}\left[X \in B \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, B) = \\ &= \int_B \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Dalej, niech $f(x) = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) &= \mathbb{E}\left[\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \sum a_i \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_i}(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \\ &= \sum a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_i}(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Teraz niech $f(x) = \lim s_i(x)$ dla $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ dla prostych funkcji s_i jak z poprzednich podpunktów. Zauważmy, że mamy tutaj predyspozycje do skorzystania z twierdzenia o zbieżności monotonicznej.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) &= \mathbb{E}\left[\lim s_i(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \lim \mathbb{E}\left[s_i(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \\ &= \lim \int_{\mathbb{R}} s_i(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} \lim s_i(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Ostatni krok w dowodzie to $f = f^+ - f^-$ i korzysta się tutaj już tylko z poprzednich podpunktów oraz liniowości wwo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) &= \mathbb{E}\left[f^+(X) - f^-(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \mathbb{E}\left[f^+(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) - \mathbb{E}\left[f^-(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f^+(x) - f^-(x))\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Jeżeli $G = \sigma(Z)$, to pojęcie rrw troszkę się upraszcza (z naciskiem na trochę):

Definicja 3.3.
Dla zmiennych losowych X, Y funkcję $\kappa_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ nazywamy rrw X pod warunkiem Y, jeżeli:

(P1) Dla każdego $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ funkcja $\kappa_{X,Y}(\bullet, B)$ jest borelowska

(P2) Dla każdego $y \in \mathbb{R}$, $\kappa_{X,Y}(y, \bullet)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej.

(P3) $\mathbb{P}\left[X \in B \mid Y = y\right] = \kappa_{X,Y}(y, B)$

3.2 Zadania

Zadanie 1.
Niech Y i Z będą dowolnymi zmiennymi losowymi. Pokaż, że jeżeli zmienna Y jest $\sigma(Z)$-mierzalna,

to istnieje borelowska funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $Y = h(Z)$.

Rozwiązanie.
Treść dowodu faktu 3.1.

Zadanie 2.
Pokaż, że dla zmiennych X i Y takich, że $\mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty$ i σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ zachodzi

$$|\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right]| \leq [\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right]]^{1/2}[\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right]]^{1/2}$$

Rozwiązanie.
Patrz dowód twierdzenia 3.2.

Zadanie 3.
Niech $\kappa_{X,\mathcal{G}}$ będzie regularnym rozkładem warunkowym X pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Pokaż, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $\mathbb{E}\left[|f(X)|\right] < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)$$

Rozwiązanie.
Kolejne rozwiązanie jako dowód faktu 3.5.

Zadanie 4.
(Nierówność Jensena) Dana jest funkcja wypukła $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi$, przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $\mathcal{G}$ pod-σ-ciało $\mathcal{F}$. Załóżmy, że zmienne losowe X i $\varphi(X)$ są całkowalne. Pokaż, że

$$\varphi(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X) \mid \mathcal{G}\right]$$

Rozwiązanie.
Korzystając z faktu 3.5 możemy powiedzieć, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) \geq \\ &\geq \varphi\left[\int_{\mathbb{R}} \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)\right] = \varphi(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])\end{aligned}$$

nierówność wynika z twierdzenia Jensena dla całek (które mówi, że $\int \varphi \circ f \, d\mu \geq \varphi\left(\int f \, d\mu\right)$) a ostatnie przejście to ponowne zastosowanie faktu 3.5, tym razem dla $\mathbb{E}\left[id(X) \mid \mathcal{G}\right]$.

Zadanie 5.
Załóżmy, że wektor losowy (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny.

(a) Znajdź $a \in \mathbb{R}$ takie, że zmienne $X - aY$ i Y są niezależne.

(b) Pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right](\omega) = \mu_X + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(Y)}(Y(\omega) - \mu_Y),$$

gdzie $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ oraz $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$.

(c) Dla $y \in \mathbb{R}$ znajdź rozkład X pod warunkiem $Y = y$.

Rozwiązanie.

(a) Z Rachunku Prawdopodbieństwa 1R wiemy, że jeśli wektor losowy ma rozkład normalny, a jego poszczególne elementy są nieskorelowane, to są one również niezależne. Patrzymy więc na kowariancję

$$\mathrm{Cov}(X - aY, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) - a\mathrm{Cov}(Y, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) - a\mathrm{Var}(Y)$$

i przyrównujemy ją do 0

$$0 = \mathrm{Cov}(X, Y) - a\mathrm{Var}(Y) \Rightarrow a = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$$

(b) Zauważmy, że korzystając z poprzedniego punktu możemy przepisać równość jako

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right](\omega) = \mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[Y] + aY(\omega) = \mathbb{E}[X - aY] + a\mathbb{E}\left[Y \mid Y\right]$$

gdzie $Y = \mathbb{E}\left[Y \mid Y\right]$, bo Y jest $\sigma(Y)$-mierzalne.

Kolejne przekształcenia dają

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y\right] - a\mathbb{E}\left[Y \mid Y\right] = \mathbb{E}[X - aY]$$

co jest prawdą, gdyż po skorzystaniu z liniowości wwo po lewej stronie mamy

$$\mathbb{E}\left[X - aY \mid Y\right] = \mathbb{E}[X - aY]$$

a ponieważ $X - aY$ dobraliśmy tak, żeby było niezależne od Y, to jest ono również niezależne od $\sigma(Y)$. Czyli wwo jest równe wartości oczekiwanej $X - aY$.

(c) Rozkład X pod warunkiem $Y = y$ to $\kappa_{X,Y}(y, B) = \mathbb{P}\left[X \in B \mid Y = y\right]$. Wiemy, że

$$\mathbb{P}\left[X \in B \mid Y = y\right] = \frac{\mathbb{P}[X \in B \text{ i } Y = y]}{\mathbb{P}[Y = y]}$$

czyli można wydedukować, że szukamy

$$\mathbb{P}\left[X \mid Y = y\right] = f_{X|Y=y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

co jest zbyt dużą liczbą brzydkich obliczeń żeby nawet mi się chciało to dokładnie spisywać. Wystarczy podstawić pod gęstość (X, Y) na górze i do gęstości Y na dole.

Wykład 30.10.23 : Martyngały

Mają coś wspólnego z jazdą konną (podobno).

Przykład(y) 4.1

1. Rozważmy dowolną grę i dla uproszczenia niech polega ona na rzucaniu monetą, na której orzeł wypada z $\mathbb{P} = p \in (0,1)$. Obstawiamy według zasady double or nothing:

   - jeśli wypada orzeł, to podwajamy nasz kapitał
   - jeżeli wypada reszka, to tracimy wszystko

   Czy taka gra jest sprawiedliwa?

   Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o tym samym rozkładzie
   $$\mathbb{P}\left[\xi_k = 2\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\xi_k = 0\right] = p.$$
   Wówczas ciąg
   $$X_n = \xi_n \cdot \xi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \xi_1 \cdot X_0$$
   reprezentuje stan konta po n-tym rzucie, gdzie X_0 to jakaś stała.

   Rozważmy σ-ciało $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \ldots, \xi_1, X_0)$ generowane przez pierwszych n rzutów i stan początkowy. Zadajmy sobie teraz pytanie, ile wynosi
   $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]?$$
   Mamy zależność rekurencyjną $X_{n+1} = \xi_{n+1}X_n$, stąd możemy powiedzieć, że
   $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{n+1}X_n \mid \mathcal{F}_n\right]$$
   samo X_n jest w $\mathcal{F}_n$, więc możemy je wyciągnąć przed $\mathbb{E}$. Dodatkowo, ξ_{n+1} jest niezależne od $\mathcal{F}_n$, więc
   $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n\mathbb{E}\left[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n\mathbb{E}\left[\xi_{n+1}\right] = (2p) \cdot X_n$$

   - Jeżeli $p > \frac{1}{2}$, to wówczas
     $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq X_n$$
     i wtedy taka gra jest korzystna, bo z coraz to kolejnym rzutem oczekiwania rosną.
   - Jeżeli $p < \frac{1}{2}$, to wówczas
     $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq X_n$$
     i gra jest korzystna, ale dla kasyna a nie gracza.
   - Jeżeli $p = \frac{1}{2}$, to wówczas
     $$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$$
     i w takim przypadku powiemy, że gra jest sprawiedliwa.

Ten ostatni, uczciwy przypadek to jest jeden ze sposobów, na które możemy myśleć o martyngałach.

Definicja 4.1 : o martyngałach słów kilka.

- Wstępującą rodzinę σ-ciał
  $$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, nazywamy **filtracją**

- Powiemy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest **$\mathbb{F}$-adaptowalny**, jeżeli $X_n \in \mathcal{F}_n$.
- Adaptowalny i całkowalny ciąg $\{X_n\}$ nazywamy *nadmartyngałem*, jeśli

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq X_n$$

- Adaptowalny i całkowalny ciąg $\{X_n\}$ nazywamy *podmartyngałem*, jeśli

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq X_n$$

- Z kolei ciąg $\{X_n\}$ jest **martyngałem**, jeśli jest jednocześnie nadmartyngałem i podmartyngałem, czyli zachodzi równość

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$$

Przykład(y) 4.2

1. Niech $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będą niezależne takie, że $\mathbb{E}\left[\eta_k\right] = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas jako filtrację możemy rozważyć

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$$

a jako nowy ciąg zmiennych losowych zdefiniujemy jako $M_0 = 0$ i

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k.$$

Tak zdefiniowany ciąg $\{M_n\}$ jest $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$-martyngałem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\eta_{n+1} + M_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\eta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\eta_{n+1}\right] + M_n = 0 + M_n = M_n\end{aligned}$$

2. Dla dowolnej filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ i całkowalnej zmiennej losowej X rozważmy

$$M_n = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Wówczas

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{n+1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$$

Uwaga 4.1.
Jeżeli $\{X_n\}$ jest martyngałem, to

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$$

czyli mam dwie zmienne losowe które są sobie równe, czyli

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right]$$

W szczególności, jeśli zastosujemy indukcję, to dostaniemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

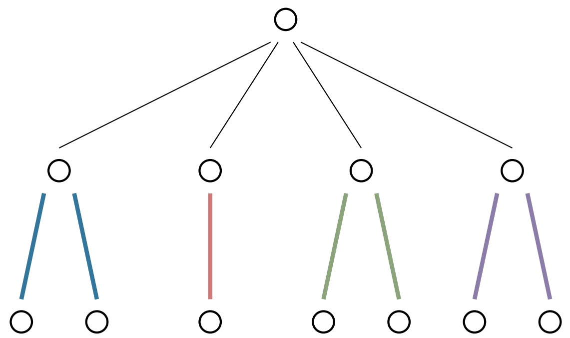
$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$$

Przykład(y) 4.3

1. **Proces Gaultona-Watsona**

   Rozważmy populację, w której osobniki rozmnażają się bezpłciowo, niezależnie od siebie. Można myśleć o tym jako o obserwacji populacji pantofelków z pomiarami w jakiś określonych odstępach czasu.

   Myślimy o tym jako o drzewie, w którym liczba krawędzi z danego wierzchołka oznacza liczbę potomstwa, a ilość wierzchołków na danej głębokości oznacza ilość pantofelków po n-tym pokoleniu.

   Niech μ będzie dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Rozważmy zmienne losowe losowe indeksowane parami liczb naturalnych $\{Y_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$. Kładziemy

$$Z_1 = 1$$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n+1,k}$$

   Z_1 to liczba pantofelków na samym początku, $Z_2 = Y_{2,1}$ to liczba dzieci pierwszego pantofelka, z kolei

$$Z_3 = Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3} + Y_{3,4},$$

   co odpowiada kolorom na rysunku. To znaczy, że $Y_{n+1,k}$ to liczba potomstwa w generacji $n + 1$ zrodzona z k-tego pantofelka w generacji n.

   Filtracją będzie dla nas ciąg o elementach $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_{j,k} \ : \ k \in \mathbb{N}, j \leq n)$. Chcemy zapytać się o wartość oczekiwaną Z_{n+1}

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n+1,k} \mid \mathcal{F}_n\right] = h(Z_n)$$

   gdzie

$$h(z) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{z} Y_{n+1,k}\right] = z \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[Y_{n,k}\right]}_{m} = m \cdot z,$$

   bo wszystkie $Y_{n,k}$ mają taką samą średnią. Oznacza to, że

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = m \cdot Z_n.$$

Jeżeli $m < 1$, to dostajemy w ten sposób nadmartyngał, jeśli $m > 1$ to mamy podmartyngał, a w krytycznym przypadku $m = 1$, to $\{Z_n\}$ jest martyngałem.

Jeśli pomnożymy

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = mZ_n$$

oboma stronami przez m^{-n-1}, to dostajemy

$$\mathbb{E}\left[m^{-n-1}Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = m^{-n}Z_n$$

i wtedy $W_n = m^{-n}Z_n$ jest zawsze martyngałem, bo

$$\mathbb{E}\left[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = W_n$$

4.1 Transformata martyngałowa

Stan konta gracza wynosi X_n po n-tej sprawiedliwej grze. Przychodzi drugi gracz i obstawia on wyniki w grze tego pierwszego. Wypłata drugiego gracza wynosi $B_n \cdot (X_n - X_{n-1})$, tzn. za każdy przychód pierwszego gracza dostaje jakąś część tej wygranej.

Dla ciągu funkcji $B_n \in \mathcal{F}_{n+1} = \sigma(X_0, ..., X_{n-1})$. Żeby było łatwiej, niech drugi gracz zaczyna z tym samym kapitałem co pierwszy. Stan konta drugiego gracza po n-tej grze wynosi

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + X_0.$$

Tak zdefiniowany ciąg $\{Q_n\}$ jest również martyngałem, bo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[B_{n+1} \cdot (X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[W_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= B_{n+1}\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n\right] + W_n = \\ &= B_{n+1}(\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n) + W_n = W_n\end{aligned}$$

bo X_n sam w sobie był martyngałem, więc $X_n = \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$.

Definicja 4.2.
Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją. Zmienną losową $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ nazywamy **$\mathbb{F}$-czasem zatrzymania**, jeżeli zdarzenie $\{T = n\}$ jest mierzalne względem $\mathcal{F}_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład(y) 4.4

1. Rzucamy 10-krotnie monetą. Zdefiniujmy zmienną losową

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{orzeł w n-tym} \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Filtracją niech będzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Jeśli T będzie momentem wypadnięcia pierwszego orła, a S - wypadnięcia ostatniego orła, to T jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T = n\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_n = 1\} \in \mathcal{F}_n$$

a S nim nie jest, bo wymaga informacji wybiegającej w przyszłość:

$$\{S = n\} = \{X_n = 1, X_{n+1} = 0, ...\} \notin \mathcal{F}_n$$

2. Rozważmy $\mathbb{F}$-adaptowalny ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$. Dla $B \in Bor(\mathbb{R})$ kładziemy

$$T(B) = \inf\{n \ : \ X_n \in B\}.$$

Tak zdefiniowane T jest czasem zatrzymania:

$$\{T = n\} = \{X_1 \notin B, ..., X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

3. Jeżeli $T = n_0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$, to taka stała funkcja nadal jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T = n\} = \begin{cases} \emptyset & n \neq n_0 \\ \Omega & n = n_0 \end{cases}$$

4.2 Zadania

Zadanie 1.
Załóżmy, że $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie, średniej 0 i skończonej wariancji. Rozważmy filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ zadaną przez $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$. Udowodnij, że ciąg

$$Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + ... + X_{n-1}X_n, \quad Z_0 = 0$$

jest $\mathbb{F}$-martyngałem.

Rozwiązanie.
Tak naprawdę to sprawdzenie że Z_n są całkowalne powinno być na samym początku, bo inaczej to nie ma sensu.

Chcemy pokazać, że

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = Z_n$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[Z_n + X_nX_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[Z_n \mid \mathcal{F}\right] + \mathbb{E}\left[X_nX_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= Z_n + X_n\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\end{aligned}$$

ponieważ X_n jest $\mathcal{F}_n$-mierzalne oraz

$$\mathbb{E}\left[|X_nX_{n+1}|\right] \leq \mathbb{E}\left[X_n^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right]^{1/2} < \infty$$

gdzie nierówność wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, a $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = Var(X_n) < \infty$.

Zauważmy teraz, że X_{n+1} jest niezależne od $\mathcal{F}_n$, gdyż X_n jest niezależne od każdej ze zmiennych $X_1, ..., X_n$. W takim razie, $\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = 0$, a więc ostatecznie dostajemy

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = Z_n + X_n\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = Z_n + X_n \cdot 0 = Z_n$$

Czyli Z_n faktycznie jest martyngałem.

Zadanie 2.
Ustalmy $\theta \in \mathbb{R}$. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie takich, że

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right] < \infty.$$

Pokaż, że

$$M_n = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-n} \prod_{j=1}^{n} e^{\theta X_j}$$

jest $\mathbb{F}$-martyngałem dla filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ danej przez $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Rozwiązanie.
Tutaj ta sama uwaga co do poprzedniego zadania.

Zacznijmy od obserwacji, że

$$M_{n+1} = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-n-1} \prod_{j=1}^{n+1} e^{\theta X_j} = M_n \cdot \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-1} e^{\theta X_{n+1}}$$

w takim razie, wwo M_{n+1} to jest

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-1} \cdot \mathbb{E}\left[M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

Od razu widać, że M_n jest mierzalne względem $\mathcal{F}_n$, bo zależy tylko od zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ które $\mathcal{F}_n$ generują. Chcemy teraz sprawdzić, czy $\mathbb{E}\left[|M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}}|\right] < \infty$, wówczas możemy wyciągnąć M_n przed wwo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}}|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-1} \cdot \prod_{j=1}^{n} e^{\theta X_j} \cdot e^{\theta X_{n+1}}\right|\right] = \\
&= |\mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]|^{-n} \cdot \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n+1} e^{\theta X_j}\right] = \\
&= |\mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]|^{-n} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \mathbb{E}\left[e^{\theta X_j}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\theta X_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right] < \infty
\end{aligned}$$

ponieważ jeśli $\{X_n\}$ są niezależne, to e^{X_n} też są niezależne, a dla niezależnych X, Y zachodzi $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$. W takim razie dostajemy

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-1} \mathbb{E}\left[M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^{-1} \mathbb{E}\left[e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

ale ponieważ $\mathcal{F}_n$ nie zawiera ani grama informacji o X_{n+1}, to $e^{\theta X_{n+1}}$ jest niezależne od $\mathcal{F}_n$, więc

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]$$

a to już daje to co chcieliśmy.

Zadanie 3.
Niech $\{Y_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej 0 i wariancji σ^2. Pokaż, że ciąg

$$X_n = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 - n\sigma^2$$

jest martyngałem.

Rozwiązanie.
Tutaj powinniśmy sprawdzić jeszcze $\mathbb{F}$-adaptowalność $\{X_n\}$ i jego całkowalność.

Zacznijmy od wyrażenia X_{n+1} przy użyciu X_n

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k\right)^2 - (n+1)\sigma^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k + Y_{n+1}\right)^2 - (n+1)\sigma^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 - n\sigma^2 + 2Y_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) + Y_{n+1}^2 - \sigma^2 = \\ &= X_n + 2\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{n+1}Y_k\right) - \sigma^2 + Y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Rozważmy teraz filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ dla ciągu $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[X_n + 2\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{n+1}Y_k\right) - \sigma^2 + Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_n\right] + 2\sum \mathbb{E}\left[Y_{n+1}Y_n \mid \mathcal{F}_n\right] - \sigma^2 + \mathbb{E}\left[Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = (\star) \end{aligned}$$

Zmienna X_n jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna bo korzysta tylko z informacji zapisywanych przez $Y_1, ..., Y_n$. Zmienna Y_{n+1} jest niezależna od $\mathcal{F}_n$, bo zmienne $\{Y_n\}$ są niezależne. Zmienna $Y_{n+1}Y_k$ jest całkowalna dla dowolnego k, bo $\mathbb{E}\left[|Y_{n+1}Y_k|\right] = \mathbb{E}\left[|Y_{n+1}|\right]\mathbb{E}\left[|Y_k|\right] = 0$. W takim razie wracając do równości wyżej, można napisać

$$\begin{aligned} (\star) &= X_n + 2\sum Y_k \mathbb{E}\left[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - \sigma^2 + \mathbb{E}\left[Y_{n+1}^2\right] = \\ &= X_n + 2\sum Y_k \mathbb{E}\left[Y_{n+1}\right] - \sigma^2 + \sigma^2 = X_n + 2\sum Y_k \cdot 0 = X_n \end{aligned}$$

W takim razie ciąg $\{X_n\}$ jest $\mathbb{F}$-martyngałem.

Zadanie 4.

Niech $\{X_n\}$ będzie $\mathbb{F}$-martyngałem. Pokaż, że dla każdych naturalnych m, n

$$\mathbb{E}\left[X_{m+n} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n.$$

Rozwiązanie.
Dla $m = 1$ działa z definicji martyngału.

Zakładamy teraz, że $\mathbb{E}\left[X_{m+n} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$ i chcemy to samo dostać dla $m + 1$ (indukcja).

Z własnośći wwo 2.4 wiemy, że jeśli mamy dwa zawarte w sobie σ-ciała $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, to

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_2\right] \mid \mathcal{G}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$$

tutaj bierzemy $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_n$ natomiast $\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}_{n+m}$. Mamy więc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{m+n+1} \mid \mathcal{F}_{m+n}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{m+n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

Z faktu, że $\{X_n\}$ jest martyngałem to mamy

$$\mathbb{E}\left[X_{m+n+1} \mid \mathcal{F}_{n+m}\right] = X_{m+n}$$

czyli przechodząc już do sedna sprawy,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{m+n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{m+n+1} \mid \mathcal{F}_{m+n}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[X_{m+n} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n\end{aligned}$$

bo ostatnie przejście wynika z założenia indukcyjnego.

Zadanie 5.
Niech $\{X_n\}$ będzie nadmartyngałem takim, że $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\{X_n\}$ jest martyngałem.

Rozwiązanie.
Nadmartyngał spełnia

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq X_n$$

Po pierwsze zauważmy, że

$$\mathbb{E}\left[X_n - \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0,$$

czyli $\mathbb{E}\left[X_n - \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = 0$, a ponieważ z warunku na nadmartyngał $X_n - \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq 0$ prawie wszędzie, to mamy nieujemną funkcję której całka jest 0 $\Rightarrow$ ta funkcja jest prawie wszędzie równa zero.

Zadanie 6.
Pokaż, że jeżeli T_1, T_2 są czasami zatrzymania, to $\min\{T_1, T_2\}$ i $\max\{T_1, T_2\}$ również są czasami zatrzymania. Czy $T_1^2, T_1 + 1, T_1 + T_2, T_1 - 1, \min\{T_1, 2T_2\}$ są też czasami zatrzymania?

Rozwiązanie.

Przychodzimy do tego zadania z wiedzą, że zdarzenie $\{T_i = n\}$ jest w zbiorze $\mathcal{F}_n$ dla dowolnego n. Od razu zauważmy, że skoro $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ...$, to jeśli $\{T_i = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla dowolnego n, to $\mathcal{F}_n$ nadal trzyma informację o $\{T_i = k\}$ dla $k \leq n$, czyli możemy równoważnie powiedzieć, że $\{T_i \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Zdarzenie $\{\max\{T_1, T_2\} \leq n\}$ jest równoważne zdarzeniu

$$\{\max\{T_1, T_2\} \leq n\} = \{T_1 \leq n \text{ i } T_2 \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cap \{T_2 \leq n\}$$

a ponieważ $\mathcal{F}_n$ jest σ-ciałem, to skoro dwa zbiory do niego należą, to należeć też musi ich przekrój.

Zdarzenie $\{\min\{T_1, T_2\} = n\}$ potencjalnie pyta o czas w nieskończonej przyszłości, bo możemy je zapisać jako

$$\min\{T_1, T_2\} = n \iff (T_1 = n \ \wedge T_2 \geq n) \ \vee \ (T_1 \geq n \ \wedge \ T_2 = n)$$

ale jeśli popatrzymy na zdarzenie

$$\{\min\{T_1, T_2\} \leq n\} = \{T_1 \leq n \text{ lub } T_2 \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cup \{T_2 \leq n\}$$

wiemy, że oba składniki tej sumy są w $\mathcal{F}_n$, więc i cała suma w $\mathcal{F}_n$ siedzi.

1. T_1^2 jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T_1^2 \leq n\} = \{T_1 \leq \sqrt{n} \leq n\}$$

jest elementem $\mathcal{F}_n$.

2. $T_1 + 1$ jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T_1 + 1 = n\} = \{T_1 = n - 1\}$$

co w oczywisty sposób daje nam $\{T_1 = n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$

3. $T_1 + T_2$ jak najbardziej jest czasem zatrzymania, bo dla $i \neq j$ zbiory $\{T_1 = i \ \wedge \ T_2 = n - i\}$ oraz $\{T_1 = j \ \wedge \ T_2 = n - j\}$ są rozłączne, a więc

$$\{T_1 + T_2 = n\} = \bigcup_{k \leq n} \{T_1 = k \text{ i } T_2 = n - k\}$$

każdy element sumy należy do $\mathcal{F}_n$ jak przekrój dwóch jego elementów, więc i cała suma do niego należy.

4. $T_1 - 1$ nie koniecznie jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T_1 - 1 = n\} = \{T_1 = n + 1\}$$

może należeć tylko do $\mathcal{F}_{n+1}$, ale nie trafiać w $\mathcal{F}_n$. Rozważmy choćby modelowanie gry w której wygrywamy i przegrywamy dolara z takim samym prawdopodobieństwem (wykład następny), ale dorzućmy możliwość nie obstawiania, czyli "kroku 0". Załóżmy, że startujemy z zerem dolarów. Innymi słowy, rozważamy skakanie w losowy sposób po $\mathbb{Z}$ z możliwością podskoczenia tylko pionowo w górę. Wtedy jeśli X_i będzie naszym aktualnym położeniem na $\mathbb{Z}$ po i krokach, a $\mathcal{F}_i = \sigma(X_1, ..., X_i)$, to $\mathcal{F}_1$ będzie posiadało tylko informację o zdarzeniu $\{X_1 = -1\}$, $\{X_1 = 0\}$ i $\{X_1 = 1\}$, a więc gdy $T_1 = \inf\{n \;:\; X_n = 1\}$, to zdarzenie

$$\{T_1 - 1 = 1\} = \{T_1 = 2\} = \{X_1 = 1\} \cup \{X_1 = 0 \text{ i } X_2 = 1\}$$

należy do $\mathcal{F}_2$, ale do $\mathcal{F}_1$ już należeć nie ma możliwości.

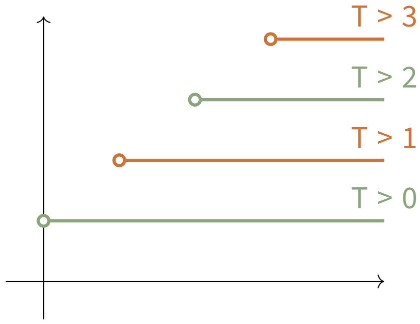
Zadanie 7.
Niech T będzie czasem zatrzymania. Załóżmy, że istnieje $\varepsilon \in (0, 1)$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\mathbb{P}\left[T \leq N + n \mid \mathcal{F}_n\right] > \varepsilon$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Rozwiązanie.
Zaczniemy od obserwacji, że

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}[T = n] = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[T = n] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[T > n]$$



Będziemy chcieli oszacować całe to wyrażenie od góry przez zbieżny szereg. Dokładnie, będzie nam potrzebne oszacowanie go przez $\mathbb{P}[T > kN]$:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[T > n] = \sum_{k\geq 0}\sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}[T > n] \leq \sum_{k\geq 0} N \cdot \mathbb{P}[T > kN] \quad (☕)$$

gdyż funkcja $\mathbb{P}[T > n]$ jest malejąca, a więc przyjmuje ekstremum na lewym krańcu. Dzielimy więc $\sum \mathbb{P}[T > n]$ na odcinki $[kN, (k+1)N)$ i szacujemy sumę na każdym z nich przez $N \cdot \mathbb{P}[T > kN]$.

Żeby jednak dokończyć szacowanie wyżej, potrzebujemy ograniczyć $\mathbb{P}[T > kN]$ od góry. Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego wiemy, że

$$1 \geq \mathbb{P}\left[T \leq N + n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\leq N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] > \varepsilon$$

Funkcja $\mathbb{1}_{\{T\leq N+n\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{T>N+n\}}$, więc mamy

$$1 \geq \mathbb{E}\left[1 - \mathbb{1}_{\{T>N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[1 \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] > \varepsilon$$

Po przerzuceniu ε na lewą stronę, a wwo na prawą stronę, dostajemy

$$1 - \varepsilon > \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] \qquad (\star)$$

co po nałożeniu całki na obie strony implikuje, że

$$1 - \varepsilon > \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}}\right] = \mathbb{P}\left[T > N + n\right]$$

Wróćmy do punktu $(\star)$ i rozważmy zdarzenie

$$G = [\{T \leq n\}]^c = \{T > n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Zdarzenie $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, bo T jest czasem zatrzymania, a jego dopełnienie należy do tego zbioru ze względu na fakt, że $\mathcal{F}_n$ jest σ-ciałem. Jeśli nałożymy na obie strony $(\star)$ całkowanie po G, to dostajemy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[T > n\right](1 - \varepsilon) = \\
&= (1 - \varepsilon)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_G\right] > \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}} \mid \mathcal{F}_n\right]\mathbb{1}_G\right] = \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n\}}\mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T>N+n>n\}}\right] = \\
&\qquad = \mathbb{P}\left[T > N + n\right]
\end{aligned}$$

Dostaliśmy więc

$$\mathbb{P}\left[T > n\right](1 - \varepsilon) > \mathbb{P}\left[T > N + n\right]$$

Niech teraz $n = k \cdot N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[T > (k + 1)N\right] = \mathbb{P}\left[N + kN\right] < \\
&\quad < \mathbb{P}\left[T > k \cdot N\right](1 - \varepsilon) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left[T > n\right](1 - \varepsilon) = \mathbb{P}\left[T > N + (k - 1)N\right](1 - \varepsilon) < \\
&\qquad < (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)\mathbb{P}\left[T > (k - 1)N\right].
\end{aligned}$$

a w szczególności gdy $n = 0$, to $\mathbb{P}\left[T > 1 \cdot N\right] < (1 - \varepsilon)^1 = 1 - \varepsilon$. Sugeruje to, że zachodzi wzór

$$(1 - \varepsilon)^k > \mathbb{P}\left[T > k \cdot N\right]$$

który udowadniamy indukcyjnie. Dla $k = 0$ sprawa jest oczywista, a dla kroku indukcyjnego $k \Rightarrow k + 1$ zaczynamy od góry i kontynuujemy jak w nierówności wyżej aż do czerwonego $\mathbb{P}\left[T > n\right]$.

Wróćmy teraz do (☕) i dokończmy szacowanie $\mathbb{E}\left[T\right]$

$$\mathbb{E}\left[T\right] \leq \sum_{k\geq 0} N\mathbb{P}\left[T > kN\right] \leq N\sum_{k\geq 0}(1 - \varepsilon)^k \leq N\sum e^{-k\varepsilon} < \infty$$

Wykład 06.11.23 : Twierdzenie Dooba o zatrzymaniu, czyli jak uprawiać hazard

Dla $T : \Omega \to \mathbb{N}$ i procesu $\{X_n\}$ definiujemy zmienną X_T wzorem

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

Dla martyngału $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i czasu zatrzymania T rozważamy ciąg zmiennych $\{X_{n\wedge T}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$X_{n\wedge T}(\omega) = \begin{cases} X_n & n \leq T(\omega) \\ X_{T(\omega)}(\omega) & n \geq T(\omega) \end{cases}$$

Tutaj dla $X, y \in \mathbb{R}$ piszemy $x \wedge y$ aby przekazać, że interesuje nas $\min\{x, y\}$. To znaczy $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Czyli gramy w pewna uczciwą grę i mamy strategię wyjścia T, ale musimy np. zdążyć na obiad, więc chcemy wyjść po co najwyżej n rundach.

Twierdzenie 5.1 : Dooba o zatrzymaniu (uproszczone).
Niech $\{X_n\}$ będą odpowiednio martyngałem i czasu zatrzymania względem tej samej filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$. Wówczas proces (ciąg) $\{X_{n\wedge T}\}$ zdefiniowany wyżej jest martyngałem. W szczególności

$$\mathbb{E}\left[X_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$$

dla każdego n (średnia jest stała w czasie).

Dowód
Mamy

$$X_{n\wedge T} = \sum_{k=1}^{n\wedge T}(X_k - X_{k-1}) + X_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{T\geq k}(X_k - X_{k-1}) + X_9$$

gdzie

$$\mathbb{1}_{T\geq k} = 1 - \mathbb{1}_{T<k} = 1 - 1_{T\leq k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

i teza wynika z przykładu o transformacie martyngałowej.

Przykład(y) 5.1

1. Gracz rozpoczyna grę z kapitałem j\$. W każdym rozdaniu może z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zyskać jednego dolara lub go stracić. Celem gracza jest wzbogacenie się o k dolarów. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu $p_{k,j}$?

   Zaczynamy w punkcie j i chcemy dojść do punktu j + k, a boimy się punktu 0

Niech $\{\xi_k\}$ będą niezależne o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}\left[\xi_k = \pm 1\right] = \frac{1}{2}$. Rozważmy

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n.$$

Żeby rozwiązać to zadanie to chcemy rozważyć funkcję

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$$

Teraz szukane przez nas prawdopodobieństwo to

$$p_{k,j} = \mathbb{P}\left[X_T = k\right]$$

Rozważamy filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$. Ciąg $\{X_n\}$ jest $\mathbb{F}$-adaptowalny, więc T jest $\mathbb{F}$-czasem zatrzymania.

Ciąg $\{X_n\}$ jest $\mathbb{F}$-martyngałem, co wynika z faktu, że ξ_{n+1} są niezależne od $\mathcal{F}_n$ i mają $\mathbb{E}$ równą 0:

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{n+1} + X_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{n+1}\right] + \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_n\right] = 0 + X_n$$

Z twierdzenia o zatrzymaniu wiemy więc, że

$$\mathbb{E}\left[X_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] = 0$$

i tutaj szkopuł jest taki, że nas interesuje X_T a nie $X_{n\wedge T}$. Musimy więc przejść z n do nieskończoności.

W pierwszej kolejności chcemy się upewnić, że $\mathbb{P}\left[T < \infty\right] = 1$, bo

$$\mathbb{P}\left[T \geq n\right] \leq \mathbb{P}\left[|X_n| \leq k + j\right] = \mathbb{P}\left[\frac{|X_n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{j+k}{\sqrt{n}}\right] \xrightarrow{CTG} 0$$

a ponieważ

$$\mathbb{P}\left[T = \infty\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[T \geq n\right] = 0.$$

W takim razie ciąg $X_{n\wedge T}$ zbiega prawie wszędzie do ciągu X_T. Mało tego, dla pewnego n się zacznie stabilizować. Pozostaje uzasadnić, że możemy wejść z granicą pod całkę, ale to wynika z faktu, że

$$|X_{n\wedge T}| \leq j + k,$$

więc mamy

$$0 = \mathbb{E}\left[X_0\right] = \lim \mathbb{E}\left[X_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[\lim X_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[X_T\right].$$

Rozpisując już na końcu

$$0 = \mathbb{E}\left[X_T\right] = k\mathbb{P}\left[X_T = k\right] - j\mathbb{P}\left[X_T = -j\right] = k \cdot p_{k,j} - j(1 - p_{k,j})$$

co pozwala nam wyliczyć

$$p_{k,j} = \frac{j}{k+j}.$$

W szczególności mamy

$$\mathbb{P}\left[\{X_n\} \text{ osiągnie } k\right] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\left[\{X_k\} \text{ osiągnie } k \text{ przed osiągnięciem -}j\right] =$$

$$= \lim_{j\to\infty} p_{k,j} = \lim_{j\to\infty} \frac{j}{j+k} = 1$$

2. Gracz rozpoczyna grę z kapitałem j\$. W każdym rozdaniu może z prawdopodobieństwem p zyskać jednego dolara lub stracić go z prawdopodobieństwem $(1-p)$. Celem gracza jest wzbogacenie się o k dolarów. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu $p_{k,j}$ gdy $p > \frac{1}{2}$?

Jest to niemalże takie samo zadanie jak wcześniej, z tym że tym razem nie mamy martyngału. Niemniej jednak modelować będziemy to w niemalże identyczny sposób.

Niech $\{\eta_k\}$ będą iid takie, że $\mathbb{P}\left[\eta_k = 1\right] = p$ oraz $\mathbb{P}\left[\eta_k = -1\right] = 1-p$. Określamy $X_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$. Mamy wówczas

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\eta_{n+1}\right] + X_n = X_n + (2p-1) > X_n$$

czy $\{X_n\}$ jest podmartyngałem. Określmy czas zatrzymania

$$T = \inf\{n \ : \ X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}.$$

Chcemy sobie zorganizować nowy martyngał postaci

$$M_n = f(X_n)$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_n + \eta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= F(X_n),\end{aligned}$$

gdzie $F(x) = \mathbb{E}\left[f(x + \eta_{n+1})\right] = pf(x+1) + (1-p)f(x-1)$ jest oznaczeniem pomocniczym przy "odcałkowaniu niezależnej η_{n+1}".

Aby $\{M_n\}$ był martyngałem musi zachodzić

$$M_n = f(X_n) = pf(X_n+1) + (1-p)f(X_n-1) = F(X_n) = \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

f musi zatem spełniać rekurencję

$$f(x) = pf(x+1) + (1-p)f(x-1)$$

Szukamy rozwiązania postaci $f(x) = \gamma^x$. Mamy więc

$$\gamma^x = p\gamma^{x+1} + (1-p)\gamma^{x-1}$$

$$\gamma = p\gamma^2 + (1-p)$$

i istnieją dwa rozwiązania: $\gamma = 1$ oraz $\gamma = \frac{1-p}{p}$. Wówczas

$$M_n = f(X_n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_n}$$

jest martyngalem. Znowu $M_{n\wedge T} \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+j}$, a z twierdzenia Dooba

$$\mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right] = 1$$

i poprzez przejście graniczne

$$\mathbb{E}[M_T] = 1$$

Oznaczamy $\mathbb{P}[X_T = k] = r_{j,j}$ i mamy

$$1 = \mathbb{E}[M_T] = \gamma^{-j}(1 - r_{k,j}) + \gamma^k r_{k,j}$$

gdzie

$$r_{k,j} = \frac{1 - \gamma^{-j}}{\gamma^k - \gamma^{j-1}}$$

w szczególności

$$\mathbb{P}\left[\{X_n\} \text{ osiągnie } k\right] = \lim_{j\to\infty} r_{j,k} = 1$$

$$\mathbb{P}\left[\{X_n\} \text{ osiągnie } j\right] = \lim_{k\to\infty} (1 - r_{k,j}) = \lim_{k\to\infty} \ldots = \gamma^j$$

3. Rozważmy $X_n = \sum Y_k$, gdzie Y_k są iid takie, że $\mathbb{P}[Y_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$. To znaczy, że jeden gracz bierze udział w uczciwej grze i obstawiamy.

5.1 Zadania

Zadanie 1.
Uzasadnij, że jeżeli $\{X_n\}$ są niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, a T jest czasem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, takim że $\mathbb{E}[T] < \infty$, to

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T] \cdot \mathbb{E}[X_1]$$

gdzie $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Rozwiązanie.
PLAN:

martyngał $Y_n = S_n - n\mathbb{E}[X_1]$

$\downarrow$

T jest prawie wszędzie skończony

$\downarrow$

$Y_{n\wedge T}$ od pewnego momentu jest stale równy Y_T

$\downarrow$

granica $\mathbb{E}[\lim Y_{n\wedge T}] = \lim \mathbb{E}[Y_{n\wedge T}]$ ma sens

$\downarrow$

$\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[S_T - T\mathbb{E}[X_1]] = 0$

Jesteśmy w temacie martyngałów, więc możemy chcemy tego użyć.

Niech $m = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_n]$ dla każdego n. Dobrym początkiem będzie pokazanie, że ciąg $\{S_n - nm\}$ jest martyngałem. W tym celu potrzebujemy całkowalności $[S_n - nm]$, $\mathcal{F}_n$-mierzalności i równości wwo.

1. $[S_n - nm]$ jest całkowalne

$$\mathbb{E}\left[|S_n - nm|\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum X_k - m\right|\right] \le \mathbb{E}\left[\sum |X_k - m|\right] = \sum \mathbb{E}\left[|X_k - m|\right] < \infty$$

2. $[S_n - nm]$ jest $\mathcal{F}_n$-mierzalne, bo jest skończoną sumą $\mathcal{F}_n$-mierzalnych funkcji (wraz z funkcją stałą).
3. $\mathbb{E}\left[S_{n+1} - (n+1)m \mid \mathcal{F}_n\right] = S_n - nm$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{n+1} - (n+1)m \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum^{n+1}(X_i - m) \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[X_{n+1} - m \mid \mathcal{F}_n\right] + \sum(X_i - m) = \\ &= \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] - m + S_n - nm = m - m + S_n - nm = S_n - nm\end{aligned}$$

Dla uładnienia zapisu niech $Y_k = n = S_n - n \cdot m$, wtedy $\{Y_n\}$ jest martyngałem względem filtracji jak w zadaniu. Z twierdzenia Dooba o zatrzymaniu wiemy, że

$$\mathbb{E}\left[Y_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[Y_1\right] = S_1 - m = 0$$

Będziemy chcieli przejść z n do granicy, do czego potrzebujemy aby $\mathbb{P}\left[T \geq n\right] \to 0$, bo wówczas ciąg $X_{n\wedge T}$ zbiega prawie wszędzie do X_T. Wystarczy przypomnieć sobie ostatnie zadanie z poprzedniej listy, aby dostać

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left[T > k\right] < \infty$$

czyli w pewnym momencie wyrazu muszą być dowolnie blisko 0, czyli faktycznie $\mathbb{P}\left[T \geq n\right] \to 0$.

Przechodząc z n do granicy dostajemy

$$\mathbb{E}\left[Y_T\right] = \mathbb{E}\left[\lim Y_{n\wedge T}\right] = \lim \mathbb{E}\left[Y_T\right] = 0$$

ponieważ $Y_{n\wedge T}$ zbiega do Y_T, więc od pewnego momentu jest stały i granica ma sens.

Rozbijając więc Y_T na wzór podany wyżej, dostajemy

$$0 = \mathbb{E}\left[Y_T\right] = \mathbb{E}\left[S_T - Tm\right] = \mathbb{E}\left[S_T\right] - \mathbb{E}\left[T\mathbb{E}\left[X_1\right]\right]$$

czyli

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \mathbb{E}\left[T\mathbb{E}\left[X_1\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right]\mathbb{E}\left[T\right]$$

tak jak chcieliśmy.

Można też zapisać najpierw $\mathbb{E}\left[|S_T|\right] = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|S_T|\mathbb{1}_{\{T=t\}}\right]$. JEDNAK BŁĄD Z $\mathbb{P}\left[T \geq k\right] \to 0$ bo to niekoniecznie musi być prawdą - trzeba by używać $\mathbb{E}\left[S_{n\wedge T}\right]$

Zadanie 2.
Rzucamy kostką tak długo, aż pięciokrotnie wyrzucimy szóstkę. Znajdź średnią wartość sumy wyrzuconych oczek.

Rozwiązanie.
Zadania wygląda bardzo podobnie jak równość udowadniana wyżej. Chcemy tylko znaleźć martyngał i czas zatrzymania.

Niech X_i będzie liczbą oczek wyrzuconych w i-tym rzucie, a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$ będzie sumą oczek wyrzuconych w pierwszych n rzutach. Oczywiście, X_i mają ten sam rozkład jednostajny na zbiorze $\{1, ..., 6\}$ i są od siebie niezależne. Zdefiniujmy teraz funkcję

$$T = \inf\{n \ : \ (X_1, ..., X_n) \text{ posiada 5 szóstek}\}$$

która jest czasem zatrzymania względem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, bo jej definicja opiera się wyłącznie na informacjach o $X_1, ..., X_n$.

Korzystając więc z poprzedniego zadania, dostajemy

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[T] \cdot \frac{7}{2}$$

i jedynym problemem jest obliczenie

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}[T = n].$$

Oczywiście, dla $\mathbb{P}[T = 1] = \mathbb{P}[T = 4] = 0$, a w pozostałych przypadkach jest to stosunek wszystkich ciągów długości $n - 1$ które posiadają dokładnie 4 szóstki do ilości wszystkich ciągów posiadających co najwyżej 4 szóstki.

Zadanie 3.
Niech $\{X_n\}$ będzie niesymetrycznym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$ (tzn. $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, gdzie ξ_k są iid takie, że $\mathbb{P}\left[\xi_k = 1\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\xi_k = -1\right] = p \neq \frac{1}{2}$) i niech $T = \min\{n \ : \ X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$ dla ustalonych $k, j > 0$.

(a) Pokaż, że $M_n = X_n + n(1 - 2p)$ jest martyngałem.

(b) Wykorzystując twierdzenie Dooba oblicz $\mathbb{E}[T]$.

Rozwiązanie.
Filtrem u mnie będzie $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ...\xi_n)$.

(a) Wypadałoby pokazać, że M_n jest całkowalne, czyli

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|M_n|\right] = \mathbb{E}\left[|X_n + n(1 - 2p)|\right] &\leq \mathbb{E}\left[|X_n|\right] + n(1 - 2p) = \\ = \mathbb{E}\left[\left|\sum \xi_k\right|\right] + n(1 - 2p) &\leq \sum \mathbb{E}\left[|\xi_k|\right] + n(1 - 2p) < \infty\end{aligned}$$

Jest $\mathcal{F}_n$-mierzalne bo jest kombinacją funkcji $\mathcal{F}_n$-mierzalnej z funkcją stałą. Pozostaje warunek z wwo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[X_{n+1} + (n+1)(1-2p) \mid \mathcal{F}_n\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + (n+1)(1-2p) = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum^{n+1} \xi_k \mid \mathcal{F}_n\right] + (n+1)(1-2p) = \\
&= \sum^{n+1} \mathbb{E}\left[\xi_k \mid \mathcal{F}_n\right] + (n+1)(1-2p) = \\
&= X_n + n(1-2p) + \mathbb{E}\left[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + (1-2p) = \\
&= X_n + n(1-2p) = M_n
\end{aligned}$$

(b) To jest tak samo jak w zadaniu 1, tylko trzeba pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 w kończenie wielu krokach dojdziemy do $-j$ lub k. A tutaj można użyć Borel-Cantalliego :3

Zadanie 4.
Niech $\{M_n\}$ będzie nieujemnym martyngałem. Pokaż, że dla $m > n$, $\{M_n = 0\} \subseteq \{M_m = 0\}$ prawie wszędzie.

Rozwiązanie.
Rozważmy zbiór $A = \{M_n = 0\} \in \mathcal{F}_n$. Ponieważ $\{M_n\}$ jest martyngałem, to na poprzedniej liście pokazywaliśmy, że

$$\mathbb{E}\left[M_m \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

W takim razie mamy

$$0 = \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_m \mid \mathcal{F}_n\right] \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[M_m \mathbb{1}_A\right]$$

Ponieważ $M_m \geq 0$ oraz $\int_A M_m d\mathbb{P} = 0$, to $M_m = 0$ prawie wszędzie na zbiorze A. Czyli

$$A \subseteq \{M_m = 0\}$$

prawie wszędzie.

Zadanie 5.
Niech $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ będzie filtracją.

(a) Pokaż, że dla każdych $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ i zdarzenia $A \in \mathcal{F}_m$ zmienna losowa

$$\tau = m + (n-m)\mathbb{1}_A$$

jest $\mathbb{F}$-czasem zatrzymania.

(b) Niech $\{X_n\}$ będzie $\mathbb{F}$-adaptowalnym ciągiem całkowalnych zmiennych losowych takim, że

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$$

dla każdego skończonego czasu zatrzymania τ. Pokaż, że $\{X_n\}$ jest $\mathbb{F}$-martyngałem.

Rozwiązanie.

(a) Musimy sprawdzić, że zdarzenie $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Od razu widzimy, że τ ma jedynie dwie możliwe wartości:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} m & \omega \notin A \\ n & \omega \in A \end{cases}$$

Zacznijmy od $\{\tau = m\}$. Ale tak jak wyżej napisaliśmy, to zachodzi tylko dla $\omega \notin A$, czyli $\{\tau = m\} = A^c \in \mathcal{F}_m$, bo $A \in \mathcal{F}_m$.

Z kolei $\{\tau = n\} = A$, a wiemy, że $A \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$ bo $m < n$.

W takim razie τ zachowuje się jak bardzo dziwny czas zatrzymania.

(b) PLAN na ten podpunkt jest taki (pokazujemy $\mathbb{E}\left[X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m\right] = X_m$):

$\tau' = m + (n - m)\mathbb{1}_\emptyset$ z założenia wynika, że $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_m]$

$\downarrow$

nowy czas zatrzymania $\tau = m + (m + 1 - m)\mathbb{1}_A$ dla $A \in \mathbb{1}_m$

$\downarrow$

z wwo wyprowadzamy, że $\mathbb{E}[X_{m+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_A]$

$\downarrow$

$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}\left[X_\tau \mathbb{1}_{A^c}\right]$

$\downarrow$

korzystamy z pierwszego kroku

Zaczniemy od wprowadzenia czasu zatrzymania

$$\tau' = m + (n - m)\mathbb{1}_\emptyset$$

dla dowolnego $n > m$ i użycia założenia z tego punktu, by otrzymać

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}\left[X_{\tau'}\right] = \mathbb{E}\left[X_{\tau'}\mathbb{1}_\emptyset\right] + \mathbb{E}\left[X_{\tau'}\mathbb{1}_{\emptyset^c}\right] = \mathbb{E}\left[X_m \mathbb{1}_\Omega\right] = \mathbb{E}[X_m]$$

gdyż $\mathbb{E}\left[X_{\tau'}\mathbb{1}_\Omega\right] = \int_\Omega X_{\tau'(\omega)}(\omega) = \int X_m$ - całkujemy tę część tylko po zbiorze gdzie $\tau' = m$.

Rozważamy teraz czas zatrzymania

$$\tau = m + (m + 1 - m)\mathbb{1}_A = m + (m + 1)\mathbb{1}_A$$

dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_m$.

Z jednej strony wiemy, że

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m\right]\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}[X_{m+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_A]$$

A z drugiej

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}\left[X_\tau \mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}[X_{m+1}\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}\left[X_m \mathbb{1}_{A^c}\right]$$

czyli korzystając z $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_m]$ mamy

$$\mathbb{E}[X_{m+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_0] - \mathbb{E}\left[X_m\mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}[X_m] - \mathbb{E}\left[X_m\mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}\left[X_m(1 - \mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}[X_m\mathbb{1}_A]$$

i to już wystarczy, bo X_m jest mierzalne względem $\mathcal{F}_m$ ponieważ jest $\mathbb{F}$-adaptowalne.

Zadanie 6.
Niech $\{M_n\}$ będzie nieujemnym martyngałem o wartościach całkowitym takim, że $M_0 = m \geq 1$, $M_n - M_{n-1} \leq 1$ oraz $M_n \to 0$ p.w.. Pokaż, że dla $k \geq m$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq k\right] = \frac{m}{k}$$

Rozwiązanie.
Zacznijmy od rozważenia co znaczy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq k$. Moim skromnym zdaniem jest to powiedzenie, że M_n dojdzie do k. Wiemy, że w każdym przejściu z M_n do M_{n+1} możemy skoczyć w górę o nie więcej niż 1, a w dół możemy skakać aż do 0.

PLAN na to zadanie jest taki:

czas zatrzymania $T = \inf\{n \ : \ M_n \geq k\}$

$\downarrow$

$\sup M_n \geq k \iff T < \infty$, więc $\mathbb{P}[\sup M_n \geq k] = \mathbb{P}[T < \infty]$

$\downarrow$

twierdzenie Dooba daje $m = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{n\wedge T}]$

$\downarrow$

$\lim_n M_{n\wedge T}$ będzie $M_T = k$ jeśli $T < \infty$ i M_n wpp.

$\downarrow$

$M_{n\wedge T} \in \{0, ..., k\}$

$\downarrow$

$\mathbb{P}[M_{n\wedge T} < k] \to 0$, bo jeśli $T = \infty$ to $M_n \to 0$, a jeśli $T < \infty$, to $M_{n\wedge T} \to M_T = k$ jest stałe od pewnego momentu

$\downarrow$

$\lim \mathbb{P}[M_{n\wedge T} = k] = \mathbb{P}[T < \infty]$

$\downarrow$

$m = \sum_{0\leq i\leq k} i\mathbb{P}[M_{n\wedge T}] \to k\mathbb{P}[T < \infty]$

Spróbujmy zobaczyć co się stanie, jeśli wpląsczemy w to zadanie czas zatrzymania

$$T = \inf\{n \ : \ M_n \geq k\}$$

to możemy zauważyć, że

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq k\right] = \mathbb{P}[T < \infty] = \mathbb{P}[M_{n\wedge T} = k]$$

ponieważ $T < \infty$ oznacza, że zbiór $\{n \ : \ M_n \geq k\}$ jest niepusty.

Z twierdzenia Dooba wiemy, że

$$m = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{n\wedge T}]$$

zauważmy, że jeżeli $T(\omega) < \infty$, to $M_{n\wedge T}(\omega) = M_{T(\omega)}(\omega) = k$, a jeśli $T(\omega) = \infty$, to $M_{n\wedge T}(\omega) = M_n(\omega)$.

Oznacza to, że jeśli $M_{n\wedge T} \geq k$, to $M_{n\wedge T} = k$ i jest od tego momentu funkcją stałą. W takim razie

$$m = \mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \sum_{j=0}^{k} j\mathbb{P}[M_{n\wedge T} = j] = k \cdot \mathbb{P}[M_{n\wedge T} = k] + \sum_{j=0}^{k-1} j\mathbb{P}[M_{n\wedge T} = j]$$

przechodząc teraz z n do granicy, albo $M_{n\wedge T} = k$ albo $M_{n\wedge T} = M_n$ i w obu przypadkach $\mathbb{P}[M_{n\wedge T} = j] = 0$ dla $j < k$ (bo $M_n \to 0$). W takim razie, po przejściu do granicy z n zostaje nam

$$m = k \cdot \mathbb{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq k\right]$$

i to jest to co chcieliśmy.

Zadanie 7.
Niech Y_k będą iid takie, że $\mathbb{P}\left[Y_k \in \{-1, 0, 1\}\right] = 1$ oraz $\mathbb{E}\left[Y_k\right] = 0$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + ... + Y_n$. Dla $k \in \mathbb{N}$ rozważmy moment zatrzymania

$$T_{-k} = \inf\{n \ : \ S_n = -k\}.$$

Znajdź rozkład zmiennej losowej

$$\sup_{n\leq T_{-k}} S_n$$

Rozwiązanie.
Zmienna losowa

$$\sup_{n\leq T_{-k}} S_n$$

pyta, jak wysoko możemy dojść, jeśli zatrzymamy się przy pierwszym dojściu do $-k$.

Popatrzmy teraz na $\mathbb{P}\left[Y_k = 1\right]$. Oznaczając $\mathbb{P}\left[Y_k = 0\right] = p$ mamy

$$0 = \mathbb{E}\left[Y_k\right] = \mathbb{P}\left[Y_k = 1\right] - \mathbb{P}\left[Y_k = -1\right]$$

$$\mathbb{P}\left[Y_k = 1\right] = \mathbb{P}\left[Y_k = -1\right] = \frac{1-p}{2}$$

Wykład 13.11.23 : Czyli odrabiam wykład z notatek

6.1 Zadania

Zadanie 1.
PÓŹNIEJ

Zadanie 2.
Niech $\{X_n\}$ będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem ($\mathbb{E}\left[X_n^2\right] < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$). Pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X_m)^2 \mid \mathcal{F}_m\right] = \mathbb{E}\left[X_n^2 \mid \mathcal{F}_m\right] - X_m^2$$

Dodatkowe założenia: $n > m$.

Rozwiązanie.
Po pierwsze, wypadałoby pokazać, że $X_n X_m$ jest całkowalne

$$\mathbb{E}\left[|X_n X_m|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[|X_m|^2\right]^{1/2} < \infty$$

W takim razie, wiedząc, że X_m jest zawsze mierzalna względem $\mathcal{F}_m$ wiemy, że $\mathbb{E}\left[X_n X_m \mid \mathcal{F}_m\right] = X_m \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_m\right]$ i teraz jeśli $n > m$ to i $\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_m\right] = X_m$, co pokazaliśmy już dawno temu na liście. Przechodząc z tą wiedzą do pisania, mamy;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_n - X_m)^2 \mid \mathcal{F}_m\right] &= \mathbb{E}\left[X_n^2 - 2X_n X_m + X_m^2 \mid \mathcal{F}_m\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X_n^2 \mid \mathcal{F}_m\right] + \mathbb{E}\left[X_m^2 \mid \mathcal{F}_m\right] - 2X_m \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_m\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X_n^2 \mid \mathcal{F}_m\right] + X_m^2 - 2X_m^2 = \mathbb{E}\left[X_n^2 \mid \mathcal{F}_m\right] - X_m^2
\end{aligned}$$

Zadanie 3.
Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem Galtona-Watsona dla którego $\mathbb{E}\left[Z_1\right] = \mu$ oraz $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2 < \infty$. Rozważmy martyngał $M_n = \mu^{-n} Z_n$.

(a) Pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = 1 + \sigma^2 \sum_{k=2}^{n+1} \mu^{-k}$$

(b) Uzasadnij, że jeśli $\mu > 1$, to M_n jest zbieżny w L^2

(c) Uzasadnij, że jeśli $\mu < 1$, to M_n nie jest zbieżny w L^2.

Rozwiązanie.
Proces Galtona-Watsona pojawił się w rozdziale 4, gdy chcieliśmy obserwować pantofelki rozmnażające się bezpłciowo, niezależnie od siebie. Rozważaliśmy zmienne losowe $Y_{n,k}$ takie oraz ciąg

$$Z_1 = 1$$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n+1,k}$$

gdzie Z_n to liczba nowych pantofelków w n-tej generacji, a $Y_{n,k}$ to liczba potomstwa w n-tej generacji zrodzona przez k-tego pantofelka w $n-1$ generacji.

(a) Wiem już, że

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z} 0\right] Y_{n,k} = \mathbb{E}\left[Y_{1,1}\right] = \mu$$

Całość pokażemy za pomocą indukcji. Jeśli $n = 1$, to mamy

$$\mathbb{E}\left[M_1^2\right] = \mathbb{E}\left[\mu^{-2}Z_1^2\right] = \mu^{-2}\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] = \mu^{-2}[\mathrm{Var}(Z_1) + \mathbb{E}[Z_1]^2] = \sigma^2\mu^{-2} + 1$$

tak jak chcieliśmy.

Zróbmy teraz krok indukcyjny, czyli $n \Rightarrow n+1$. Będziemy korzystać z zadania 2, więc chcemy wyliczyć $M_{n+1} - M_n$

$$M_{n+1} - M_n = \mu^{-n-1}\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n,k} - \mu^{-n}Z_n = \mu^{-n-1}\sum_{k=1}^{Z_n}(Y_{n,k} - \mu)$$

Wstawiając do równości w zadaniu 2 (po scałkowaniu), dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2\right] &= \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2\right] + \mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\mu^{-n-1}\sum_{k=2}^{Z_n}(Y_{n,k} - \mu)\right)^2\right] + 1 + \sigma^2\sum_{k=1}^{n+1}\mu^{-k} = \\ &= \mu^{-2n-2}\mathbb{E}\left[(Z_{n+1} - \mathbb{E}[Z_{n+1}])^2\right] + 1 + \sigma^2\sum_{k=2}^{n+1}\mu^{-k}\end{aligned}$$

Wiemy już, że jeżeli $\mathbb{E}\left[Y_{n,k}\right] = m$, to

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = m \cdot Z_n$$

czyli

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}\mathcal{F}_n]] = m \cdot \mathbb{E}[Z_n]$$

jeśli $n = 1$, to $\mathbb{E}[Z_2] = m \cdot \mathbb{E}[Z_1] = m \cdot \mu$ Zacznijmy od tego, że

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \mathbb{E}\left[\mu^{-2n}Z_n^2\right]$$

Wykład 18.11.23 : Sobotnia mordęga

7.1 Nierówności maksymalne

Niech $X = \{X_n\}$ będzie $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ podmartyngałem. Wówczas

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq X_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 7.1 : o zatrzymaniu dla podmartyngałów.
Jeżeli X jest $\mathbb{F}$-podmartyngałem, a T $\mathbb{F}$-czasem zatrzymania, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \geq \mathbb{E}\left[X_{n \wedge T}\right]$$

Dowód
Mamy

$$X_n - X_{n\wedge T} = \sum_{k=n\wedge T+1}^{n} (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k \geq n\wedge T+1\}}(X_k - X_{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{1}_{\{k\geq T+1\}}}_{\in \mathcal{F}_{k-1}}(X_k - X_{k-1})$$

Co z własności martyngału da nam

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{k\geq T+1\}}(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{1}_{\{k\geq T+1\}}\mathbb{E}\left[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \geq 0$$

Czyli jak zsumujemy rzeczy ≥ 0, to również dostaniemy wartość ≥ 0, tzn.

$$\mathbb{E}\left[X_n - X_{n\wedge T}\right] \geq 0$$

i to już kończy dowód.

Twierdzenie 7.2 : nierówność maksymalna słabego typu.
Jeżeli X jest podmartyngałem, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda > 0$ mamy

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\dots,n} X_k \geq \lambda\right] \leq \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{\max_{k=0,\dots,n}\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n|\right]$$

(środkowa nierówność nie jest pamiętana przez zdrowych psychicznie ludzi, ale będzie potrzebna do dowodu następnego dowodu)

Dowód
Wybierzmy czas zatrzymania

$$\tau = \inf\{k \ : \ X_k \geq \lambda\}.$$

Z twierdzenia o zatrzymaniu 7.1 wiemy, że

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \geq \mathbb{E}\left[X_{n\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{X_{n\wedge\tau}}_{=X_\tau}\mathbb{1}_{\{\mathbb{A}\,\mathbb{X}_{\mathbb{k}}\geq\lambda\}}\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{X_{n\wedge\tau}}_{=X_n}\mathbb{1}_{\{\max X_k<\lambda\}}\right] = (\star)$$

nawiasy na dole są bo pierwsza całka jest po zbiorze gdzie już mamy max $\geq \lambda$, a druga jest po zbiorze gdzie to nigdy nie dojdzie do λ. Idąc dalej mamy

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \geq (\star) \geq \lambda\mathbb{P}\left[\max X_k \geq \lambda\right] + \mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{\max X_k<\lambda}\right]$$

Stad, jeśli przerzucimy $\mathbb{E}$ na jedną stronę, to dostajemy

$$\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{\max X_k\geq\lambda}\right] \geq \lambda\mathbb{P}\left[\max X_k \geq \lambda\right]$$

Wniosek 7.3.
Jeżeli $M = \{M_n\}$ jest martyngałem takim, że dla pewnego $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] < \infty$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to jeśli zastosuje się nierówność Jensena,

$$X_n = |M_n|^p$$

jest podmartyngałem.

Dowód

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[|M_{n+1}|^p \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \left|\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right|^p = |M_n|^p = X_n$$

Wówczas mamy

$$\lambda\mathbb{P}\left[\max|M_n|^p \geq \lambda\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_n|^p\mathbb{1}_{\{\max|M_k|^p\geq\lambda\}}\right]$$

Czyli dla $s = \lambda^{1/p}$ dostajemy

$$\mathbb{P}\left[\max|M_k| \geq s\right] \leq \frac{1}{s^p}\mathbb{E}\left[|M_n|^p\mathbb{1}_{\{\max|M_k|\geq s\}}\right]$$

Przykład(y) 7.1

1. Nierówność maksymalna Kołmogorowa.

   Niech ξ_k będzie ciągiem niezależnych zmiennych z $\mathbb{E}\left[\xi_k\right] = 0$ i $\mathbb{E}\left[\xi_k^2\right] < \infty$, to oznaczając $S_n = \sum_{k\leq n} \xi_k$ wiemy już, że S_n jest martyngałem. Wówczas

$$\mathbb{P}\left[\max |S_k| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k\leq n}\mathbb{E}\left[\xi_j^2\right]$$

Twierdzenie 7.4 : nierówność maksymalna mocnego typu.
Niech $M = \{M_n\}$ będzie martyngałem takim, że $\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] < \infty$ dla pewnego $p > 1$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wtedy

$$\mathbb{E}\left[\max |M_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right]$$

Dowód
Oznaczmy

$$M_n^* = \max_{k\leq n} |M_k|$$

Mamy dla $k > 0$

$$\mathbb{E}\left[(M_n^* \wedge k)^p\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{M_n^*\wedge k} ps^{p-1}ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^k \mathbb{1}_{\{M_n^*\geq s\}}ps^{p-1}ds\right] =$$

$$= \int_0^k ps^{p-1}\mathbb{P}\left[M_n^* \geq s\right] ds \leq \int_0^k ps^{p-1}\overbrace{\frac{1}{s}\mathbb{E}\left[|M_n|\mathbb{1}_{\{M_n^*\geq s\}}\right]}^{7.2} =$$

$$= \mathbb{E}\left[|M_n| \int_0^k ps^{p-2}\mathbb{1}_{\{M_n^*\geq s\}}ds\right] = \mathbb{E}\left[|M_n| \int_0^{k\wedge M_n^*} ps^{p-2}ds\right] =$$

$$= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M_n|(M_n^* \wedge k)^{p-1}\right] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right]^{1/p}\mathbb{E}\left[|M_n^* \wedge k|^{p/(p-1)}\right]^{(p-1)/p}$$

Przerzucając potworka z $\frac{p}{p-1}$ na lewą stronę, dostajemy

$$\mathbb{E}\left[(M_n^* \wedge k)^p\right]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right]^{1/p}$$

przechodząc z k do nieskończoności. Użycie k było potrzebne przy dzieleniu.

Twierdzenie 7.5.
Niech $p > 1$. Dla martyngału $\{M_n\}$ następujące warunki są równoważne:

1. $\sup \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] < \infty$
2. istnieje zmienna losowa M_∞ taka, że $\mathbb{E}\left[|M_\infty|^p\right] < \infty$ i $M_n \to M_\infty$ prawie wszędzie w L^p

3. Istnieje zmienna losowa M_∞ taka, że $\mathbb{E}\left[|M_\infty|^p\right] < \infty$ i $\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$.

Dygresja.
Zbieżność w L^p oznacza, że $\mathbb{E}\left[|M_n - M_\infty|^p\right] \to 0$ prawie wszędzie.

Dowód

$1 \Rightarrow 2$ Wiemy, że

$$\sup \mathbb{E}\left[M_n^*\right]^p \leq \sup \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] < \infty,$$

zatem istnieje M_∞ taka, że $M_n \to M_\infty$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{E}\left[\max |M_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup \mathbb{E}\left[|M_k|^p\right]$$

przy $n \to \infty$ daje to

$$\mathbb{E}\left[\sup |M_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup \mathbb{E}\left[|M_k|^p\right]$$

Mamy

$$|M_n - M_\infty|^p \leq (|M_n| + |M_\infty|)^p \leq 2^p \sup |M_k|^p$$

z twierdzenia o zbieżności ograniczonej wiemy, że

$$\lim \mathbb{E}\left[|M_n - M_\infty|^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim |M_n - M_\infty|^p\right] = 0$$

$2 \Rightarrow 3$ Chcemy pokazać, że

$$\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$$

czyli, że dla każdego $A \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}\left[M_\infty \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_A\right]$$

Wiemy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left[M_{n+m} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$$

czyli

$$\mathbb{E}\left[M_{n+m} \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_A\right]$$

przy $m \to \infty$ dostajemy

$$\left[\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_{n+m})\mathbb{1}_A\right]\right]^p \leq \mathbb{E}\left[|M_\infty - M_{n+m}|^p\right] to 0$$

Skoro więc

$$\mathbb{E}\left[M_{n+m} \mathbb{1}_A\right] \xrightarrow{m\to\infty} \mathbb{E}\left[M_\infty \mathbb{1}_A\right]$$

$3 \Rightarrow 1$ Z założenia i nierówności Jensena mamy, że

$$|M_n|^p = |\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right]|^p \leq \mathbb{E}\left[|M_\infty|^p \mid \mathcal{F}_n\right]$$

stąd

$$\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_\infty|^p\right]$$

w szczególności $\sup \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \leq \infty$.

Przykład(y) 7.2

1. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją w L^p, tzn.:

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $I_k^{(n)} = (k-1)2^{-n}, k2^{-n})$. Niech teraz $f_k^{(n)} = 2^n \int_{I_k^{(n)}} f(t)dt$ będzie średnią f na przedziale $I_k^{(n)}$.

Niech teraz $f^{(n)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie dana przez

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{2^n} f_k^{(n)} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}}(t)$$

Wówczas funkcje $f^{(n)}$ przybliżają f w $L^p[0,1]$, tzn $f^{(n)} \to f$.

Działamy w przestrzeni z $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P} = \lambda \restriction [0,1]$. Rozważamy rodzinę $\mathcal{F}_n = \sigma(I_k^{(n)} \ : \ k = 1, ..., 2^n)$, w której mamy $I_{2k}^{(n+1)} \cup I_{2k-1}^{(n+1)} = I_k^{(n)}$, więc jest ona filtracją.

$$\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_n\right] = \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}} \mathbb{E}\left[f \mid I_k^{(n)}\right] = \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}} f_k^{(n)}$$

Czyli jesteśmy w 3. punkcie równoważności z twierdzenia wyżej, czyli mamy od razu dane 2, gdzie $M_\infty = f$, $M_n = f^{(n)}$.