Algebra homologiczna

Zima 2023-24

Spis rozmaitości treściowalnych

04.10.23 : Podstawowe definicje **3**

1.1. Co to kategoria . . . 3
1.2. Kompleksy . . . 4
1.3. Funktory kowariantne i kontrawariantne . . . 5

09.10.23 : Równoważność kategorii **10**

2.1. Presnop i snop . . . 10
2.2. Funktory wierne, pełne . . . 11
2.3. Naturalne przekształcenia funktorów . . . 12
2.4. Równoważność kategorii . . . 15

16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice **18**

3.1. Kategoria funktorów . . . 18
3.2. Granice i kogranice . . . 20

23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors] **22**

4.1. Kategorie addytywne i abelowe . . . 24

30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie **31**

5.1. Kompleks łańcuchowy i sympleksy . . . 31
5.2. Homologie . . . 32
5.3. Pull-back i push-out . . . 33

Wykład 04.10.23 : Podstawowe definicje

1.1 Co to kategoria

Rozważmy układ danych $\mathbf{C}$ zawierający:

- klasę *obiektów* Ob $\mathbf{C}$
- dla dowolnej pary $X, Y \in$ Ob $\mathbf{C}$ zbiór $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, którego elementy nazywany *morfizmami* i zapisujemy $\varphi : X \to Y$ lub $X \xrightarrow{\varphi} Y$
- kolekcję odwzorowań, zwanych *złożeniami*, dla wszystkich $X, Y, Z \in$ Ob $\mathbf{C}$ takich, że

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) & \times & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (\ \varphi, & & \psi\ ) & \longmapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

Definicja 1.1 : kategoria (mała).
Układ danych $\mathbf{C}$ jak wyżej nazywamy **kategorią**, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Zbiory $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ dla $X, Y \in$ Ob $\mathbf{C}$ są parami rozłączne (tzn. morfizmy mają dobrze określone dziedziny i przeciwdziedziny).
2. Dla każdego $A \in$ Ob $\mathbf{C}$ istnieje $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ takie, że $\varphi \circ \mathrm{Id}_A = \varphi$ oraz $\mathrm{Id}_A \circ \psi = \psi$.
3. Złożenie morfizmów jest łączne, tzn. dla morfizmów

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\eta} W$$

   zawsze zachodzi równość $(\eta\psi)\varphi = \eta(\psi\varphi)$.

Dodatkowo, jeśli Ob $\mathbf{C}$ jest zbiorem, to $\mathbf{C}$ nazywamy *małą kategorią*.

Przykład(y) 1.1

1. Kategorię wszystkich pierścieni wektorowych nad ciałem K oznaczamy $\mathbf{Vect}_K$. Jeśli interesują nas przestrzenie tylko skończonego wymiaru, to istnieje kategoria $\mathbf{Vect}_K^{\mathrm{fin}}$ przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych.

   Obiektami obu tych kategorii są przestrzenie liniowe (skończonego wymiaru), a morfizmami są przekształcenia liniowe między nimi.

2. Wszystkie zbiory wraz z funkcjami między nimi jako morfizmami tworzą kategorią **Set** zbiorów.
3. Jeśli rozważamy jako obiekty tylko zbiory z określonym dobrym porządkiem, to morfizmami mogą być funkcje słabo monotoniczne. Taką kategorię oznaczamy $\mathbf{Set}_{\leq}$.
4. Kategoria wszystkich grup wraz z homomorfizmami jako morfizmami jest oznaczana **Grp**, natomiast kategoria, której obiekty to tylko grupy abelowe jest oznaczana **Ab**.
5. Pojedyncza grupa G może tworzyć sama w sobie jednoobiektową kategorię $\mathbf{C}_G$ taką, że
   - $\mathrm{Ob}\,\mathbf{C}_G = \{\star\}$
   - $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star) = G$, a złożenia działa jak mnożenie elementów G.
6. Dla dowolnego pierścienia R istnieje kategoria, której obiektami są (lewe) R-moduły, a morfizmami są homomorfizmy między tymi modułami. Oznaczamy to $R-\mathbf{mod}$.
7. Wszystkie przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi nazywamy kategorią przestrzeni topologicznych **Top**.
8. Wszystkie gładkie rozmaitości są obiektami kategorii **Diff**, a morfizmy to gładkie odwzorowania między rozmaitościami.
9. Kategoria $\mathbf{Rep}_{G,K}$ posiada jako obiekty reprezentacje grupy G na przestrzeniach liniowych nad K, a jako morfizmy wszystkie przekształcenia G-ekwiwariantne.
10. Rozważmy kategorię Δ taką, że jej obiektami są zbiory kolejnych liczb naturalnych:

$$\mathrm{Ob}\,\Delta = \{[n] \;:\; n \in \mathbb{N}\},$$

    $[n] = \{0, 1, ..., n\}$. Zdefiniujmy zbiory morfizmów jako $\Delta([m], [n])$ = wszystkie niemalejące funkcje z $[m]$ w $[n]$.

    Tak zdefiniowaną kategorię nazywamy **kategorię symplicjalną**.

1.2 Kompleksy

Definicja 1.2 : kompleksy łańcuchowe (grup abelowych).
Jeśli ciąg (grup abelowych) A.

$$\ldots \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} \ldots$$

jest taki, że dla każdego n $\mathbb{Z}$ (dopuszczamy ujemne indeksy) złożenie $d_{n+1} \circ d_n = 0$, to nazywamy go **kompleksem łańcuchowym**.

Możemy rozważać kategorię, której obiektami są kompleksy łańcuchowe obiektów z jednej kategorii **C**, np. grup abelowych. Morfizmem między kompleksem $A_\cdot$ a kompleksem $B_\cdot$ nazwiemy wówczas ciąg homomorfizmów $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A_i, B_i)$ taki, że w diagramie

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "d_0^A"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & A_1 \arrow[r, "d_1^A"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "d_2^A"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "d_0^B"] & B_1 \arrow[r, "d_1^B"] & B_2 \arrow[r, "d_2^B"] & \dots
\end{tikzcd}$$

każdy prostokąt komutuje, tzn.

$$d_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n^A$$

dla każdego n.

1.3 Funktory kowariantne i kontrawariantne

Definicja 1.3 : funktor.
Funktorem z kategorii **C** w kategorię **D** nazywamy dwa przyporządkowania: między obiektami tych kategorii i między morfizmami takie, że:

- $\mathrm{Ob}\,\mathbf{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}$
- dla każdej pary $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \ni \varphi \mapsto F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

  zachowuje składanie morfizmów, tzn. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Takie przyporządkowania między kategoriami nazywa się też, bardziej precyzyjnie, *funktorami kowariantnymi*.

Przykład(y) 1.2

1. Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_K$ zdefiniujmy tak, że dowolny $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ przechodzi ma przestrzeń wektorową nad ciałem K o bazie X, tzn.:

$$F(X) = \left\{ \sum_{x \in X} a_x x \ : \ \alpha_x \in K, \text{tylko skończenie wiele } \neq 0 \right\}$$

2. Dużą grupą funktorów są tzw. *funktory zapominające*, które gubią część informacji o strukturze obiektów w wyjściowej kategorii.

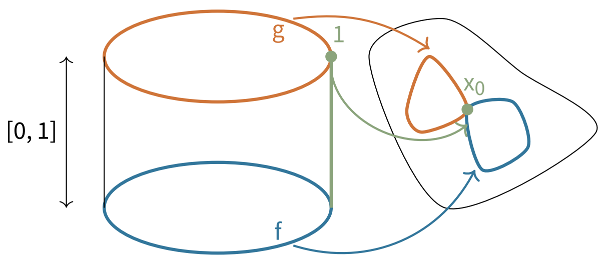
   Na przykład funktor
   $$F : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \to \mathbf{Set}$$
   przeprowadza przestrzeń liniową na zbiór jej elementów bez struktury liniowej. Przekształcenia liniowe między przestrzeniami liniowymi są wówczas przeprowadzane na zwykłe funkcje między zbiorami.

   Innym funktorem zapominającym jest n.p. $F : R-\mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$, który dla dowolnego $N \in \text{Ob}\, R-\mathbf{mod}$ przypisuje $F(N) = \text{Hom}_R(M,N)$ dla pewnego $M \in \text{Ob}\, R-\mathbf{mod}$.

3. Homomorfizm $\varphi : G \to H$ indukuje funktor $\Phi : \mathbf{C}_G \to \mathbf{C}_H$, który jedyny obiekt $\star \in \text{Ob}\,\mathbf{C}_G$ posyła na jedyny obiekt $\heartsuit \in \text{Ob}\,\mathbf{C}_H$. Natomiast morfizmy $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star,\star)$, odpowiadające mnożeniu przez elementy grupy G, przesyła na morfizmy odpowiadające mnożeniu przez $\varphi(g) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_H}(\heartsuit,\heartsuit)$

4. Przez $\mathbf{Top}_*$ oznaczamy kategorię *przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem*, w której morfizmami są odwzorowania ciągłe respektujące wybrane punkty. Funktor
   $$\Pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$$
   taki, że dla $X \in \text{Ob}\,\mathbf{Top}_*$ z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$ przypisuje
   $$\Pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$
   czyli klasę homotopii odwzorowań ciągłych $(S^1, 1) \to (X, x_0)$, nazywamy **grupą podstawową**.

   Dwa odwzorowania
   $$f, g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$$
   są homotopijne, jeśli istnieje $H : S^1 \times [0,1] \to X$ ciągłe takie, że
   $$H(z,0) = f(z) \text{ i } H(z,1) = g(z) \text{ i } H(1,t) = x_0$$



Grupa fundamentalna okręgu z wyróżnionym punktem jest izomorficzna z liczbami całkowitymi:

$$\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}\,.$$

Mając dwie przestrzenie topologiczne (X, x_0) i (Y, y_0) oraz ciągłą funkcję między nimi f, mamy

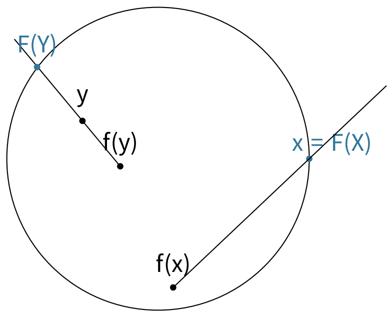
$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \ni & [\sigma] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_1(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_1(f)} \\ \Pi_1(Y, y_0) & \ni & [f \circ \sigma] \end{array}$$

Twierdzenie 1.1.
Każde ciągłe odwzorowanie $f : D^2 \to D^2$ ma punkt stały.

Dowód
A raczej jego szkic.

Załóżmy nie wprost, że istnieje funkcja ciągła $f : D^2 \to D^2$, która nie posiada punktu stałego.

Możemy wówczas zdefiniować funkcję $F : D^2 \to \partial D^2 = S^1$, która punktowi $y \in D^2$ przypisuje punkt przecięcia wychodzącej z $f(y)$ przechodzącej przez y z obwodem D^2:



Obcięcie takiej funkcji do brzegu ∂D^2 daje oczywiście identyczność na ∂D^2 (punkt x wyżej). Powstaje więc diagram

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{S^1}"'] & & D^2 \arrow[dl, "F"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

na który możemy nałożyć funktor Π_1:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = \Pi_1(S^1) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = \Pi_1(\mathrm{id}_{S^1})"'] & & \Pi_1(D^2) = S^1 \arrow[dl, "\Pi_1(F)"] \\ & \Pi_1(S^1) = \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

NIE ROZUMIEM CO TO DAJE

Definicja 1.4 : kategoria dualna.
Dla kategorii $\mathbf{C}$ możemy zdefiniować nową kategorię, $\mathbf{C}^{op}$ w której każdy morfizm $\varphi^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(Y, X)$ zostaje odwrócony:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & Y \arrow[l, bend left, "\varphi^{op}"] \end{tikzcd}$$

Wtedy Ob $\mathbf{C}^{op}$ to obiekty dualne do elementów znajdujących się w Ob $\mathbf{C}$. Tak zdefiniowaną kategorię $\mathbf{C}^{op}$ nazywamy **kategorią dualną**.

Przykład(y) 1.3

1. Kategoria dualna do kategorii przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K^{op}$ jest kategorią, której obiekty to przestrzenie sprzężone, $V^* \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_K^{op}$, zawierające funkcjonały liniowe $V \to K$. Każdy morfizm $\varphi : V \to W$ w $\mathbf{Vect}_K$ indukuje wówczas odwzorowanie $\varphi^* : W^* \to V^*$ takie, że dla $f \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : V \to W \to K$.

   Kojarzenie funkcjonału $\varphi^* \in V^*$ z elementem $v \in V$ jest czasem oznaczane przez $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$.

Definicja 1.5 : funktor kontrawariantny.
Funktor (kowariantny) z kategorii $\mathbf{C}^{op}$ do kategorii $\mathbf{D}$ jest nazywamy **funktorem kontrawariantnym** z $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$.

Oznacza to, że jeśli $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ i $\varphi : X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, to funktor kontrawariantny $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ przeprowadza X na $F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}$, a $\varphi \mapsto F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(Y), F(X))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & & F(X) \\
Y \arrow[d, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\rightsquigarrow}"] & & F(Y) \arrow[u, "F(\varphi)"'] \\
Z \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\rightsquigarrow}"] & & F(Z) \arrow[u, "F(\psi)"']
\end{tikzcd}$$

Składanie morfizmów również zmienia kolejność, tzn.

$$F(\psi\varphi) = F(\varphi)F(\psi)$$

Wykład 09.10.23 : Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = $\{U \subseteq X \;:\; U \text{ - zbiór otwarty}\}$
- morfizmy to włożenia identycznościowe (tzn. istnieje morfizm $X \hookrightarrow Y$ jeśli $X \subseteq Y$)

Tak zdefiniowany funktor kontrawariantny $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to \mathbf{C}$ nazywamy **presnopem** na przestrzeni topologicznej X.

Kategoria **C** może być kategorią zbiorów **Set**, ale możemy też przeprowadzać zbiory otwarte oraz morfizmy między nimi na kategorię **Ab**, $\mathbf{Vect}_K$ czy R–**mod**. Wtedy taki funktor będziemy nazywać odpowiednio *presnopem grup abelowych, przestrzeni liniowych czy* R-*modułów*.

Przykład(y) 2.1

1. Zaczniemy od przetestowania presnopu na przestrzeni topologicznej w akcji.

   Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to C(X)$ definiujemy na obiektach jako

   $$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

   Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

   $$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ C(U) & \longleftarrow & C(V) \end{array}$$

   co w widoczny sposób spełnia $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$.

   Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : presnop, snop.
Presnopem na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop taki, że jeśli dla dowolnego zbioru $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ oraz dla dowolnych $i, j \in I$ spełniony jest warunek

$$s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j),$$

gdzie $s_i \in F(U_i)$ jest nazywane *cięciem presnopu*, to wówczas istnieje dokładnie jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że

$$s \restriction U_i = s_i.$$

Zapisując to za pomocą kwantyfikatorów mamy:

$$(\forall\ U = \bigcup_{i\in I} U_i)(\forall\ s_i \in F(U_i))\ \ \big[(\forall i, j \in I)\ s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)\big] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[(\exists!\ s \in F(U))(\forall i \in I)\ s \restriction U_i = s_i\big]$$

Przykład(y) 2.2

1. Presnop na przestrzeni topologicznej X spełnia również warunek opisany wyżej.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria C' kategorii C.
To kategoria spełniająca następujące warunki:

- $\mathrm{Ob}\mathbf{C}' \subseteq \mathrm{Ob}\mathbf{C}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$
- $\mathrm{id}_X^{\mathbf{C}'} = \mathrm{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}'$
- złożenie morfizmów w $\mathbf{C}'$ zachowuje się tak samo jak w $\mathbf{C}$

Mówimy, że podkategoria $\mathbf{C}'$ jest *pełna*, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}'$ zachodzi $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria przestrzeni skończonego wymiaru $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K$. Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych **Ab** jest pełną podkategorią kategorii **Grp**
3. Kategoria gładkich rozmaitości $\mathbf{C}^\infty$ – **rozm** jest podkategorią kateogorii wszystkich

przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.
Funkctor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest

- **wierny** gdy $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest injekcją
- **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ przekształcenie $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.
Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \to G$ w $\mathbf{D}$ taki, że dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \to G(X)$ i dla każdego $\varphi : X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G.

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\mathrm{Id}, \mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\mathrm{ab}(G) = G/[G, G]$).

   Rozważmymy $f : \mathrm{Id} \to \mathrm{ab}$, wtedy $\mathrm{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}(G) = G \arrow[r, "f(G)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}(\varphi)=\varphi"'] & G/[G,G] = \mathrm{ab}(G) \arrow[d, "\mathrm{ab}(\varphi)"] \\ \mathrm{Id}(H) = H \arrow[r, "f(H)"] & H/[H,H] = \mathrm{ab}(H) \end{tikzcd}$$

Dla każdego $G \in \mathrm{Ob}\mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : \mathrm{Id}(G) \to \mathrm{ab}(G)$ jako

$$f(G) : G \to G^{alb} = G/[G,G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Aby więc diagram komutował, czyli

$$f(H) \circ \mathrm{Id}(\varphi) = \mathrm{ab}(\varphi) \circ f(G),$$

wystarczy sprawdzić, że komutant grupy G przechodzi przez dowolny homomorfizm na komutant w H:

$$(\forall\ g, h \in [G,G])\ \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg).$$

Skoro tak jest, to nie ma znaczenia, czy najpierw abelianizujemy grupę, a potem nakładamy na to homomorfizm, czy najpierw nakładamy homomorfizm, a potem abelianizujemy.

2. Można pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów z kategorii przestrzeni topologicznych z wybranym punktem bazowym ($\mathbf{Top}_*$) w kategorię grup

$$H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp},$$

gdzie Π_n to funktor przypisujący przestrzeni n-tą homotopię (Π_1 w szczególności przyporządkowuje przestrzeni topologicznej jej grupę fundamentalną), a H_n to funktor n-tej homologii.

3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\mathrm{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$.

Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \Psi & & \Psi \\ v & \longrightarrow & (V^* \ni \varphi^* \mapsto \varphi^*(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

to znaczy, dla $v \in V$ mamy element $f(V)(v) = \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$, który elementowi $\varphi^* \in V^*$ przyporządkowuje $\langle \varphi^*, v \rangle = \varphi^*(v) \in K$.

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f(V)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\
W \arrow[r, "f(W)"'] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

komutuje, czyli pokazać, że $f(V) \circ \varphi^{**} = \varphi \circ f(W)$.

Troszkę przypomnienia z algebry liniowej. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ indukuje funkcjonał liniowy $\varphi^* : W^* \to V^*$ taki, że dla $f : W \to K \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in V^*$. W takim razie, przekształcenie $\varphi^{**} : V^{**} \to W^{**}$ dla $f^* : V^* \to K \in V^{**}$ przyporządkuje

$$\varphi^{**}(f^*) = f^* \circ \varphi^* : W^* \to K$$

$$\begin{aligned}
(\varphi^{**} \circ f(V))(v) &= \varphi^{**}(f(V)(v)) = \varphi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\
&= \langle \cdot, v \rangle \circ \varphi^* = \langle \varphi^*(\cdot), v \rangle = \\
&= \langle \cdot \circ \varphi, v \rangle = \langle \cdot, \varphi(v) \rangle = f(W)(\varphi(v)) = \\
&= (f(W) \circ \varphi)(v)
\end{aligned}$$

element W^{**}.

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze tworzą zbiory w takim przypadku. Taki twór oznaczamy **Funct**$(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ oraz $\varphi : X \to Y$ rysujemy

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "a(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[r, "b(X)"] \arrow[d, "G(\varphi)"] & H(X) \arrow[d, "H(\varphi)"] \\
F(Y) \arrow[r, "a(Y)"'] & G(Y) \arrow[r, "b(Y)"'] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.
W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa,

równoważne, sposoby:

- naturalne przekształcenia $f : F \to G$ dla których istnieje $g : G \to F$ takie, że $f \circ g = id_G$ oraz $g \circ f = id_F$
- przekształcenie $f : F \to G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathbf{D}$.

Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów Id, $**$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ oraz naturalne przekształcenia funktorów $f : F \circ G \to Id_{\mathbf{D}}$ i $g : G \circ F \to Id_{\mathbf{C}}$

Równoważność kategorii jest nieco słabszym warunkiem niż istnienie izomorfizmu między nimi - złożenie $F \circ G$ niekoniecznie musi być równe $Id_{\mathbf{D}}$, wystarczy tylko żeby istniało naturalne przekształcenie między tymi dwoma funktorami.

Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ jest równoważna kategorii $\mathbf{S_K}$, której obiektami są $Ob\mathbf{S_K} = \{K^0, K^1, ..., K^n, ...\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

   Funktor włożenia

   $$F : \mathbf{S_K} \to \mathbf{Vect}_K^{fin}$$

   jest oczywistym wyborem na pierwszy funktor, gdyż każdy obiekt z $\mathbf{S_K}$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru.

   Aby znaleźć funktor

   $$G : \mathbf{Vect}_K^{fin} \to \mathbf{S_K}$$

   zaczniemy od rozważenia na co przechodzi $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$. Wiemy, że $\dim \mathbf{Vect}_K^{fin} = \infty$, możemy więc zdefiniować

   $$G(V) = K^{\dim \mathbf{Vect}_K^{fin}}.$$

Pozostaje zastanowić się nad przekształceniem morfizmów. W każdym V możemy wyróżnić pewną bazę, a każde przekształcenie liniowe $V \to W$ będzie macierzą o wyrazach w K zapisaną w tych wyróżnionych bazach. Wystarczy więc przekształceniu $V \to W$ zadanemu macierzą przyporządkować przekształcenie wyznaczone przez taką samą macierz na $K^{\dim V} \to K^{\dim W}$.

Twierdzenie 2.1.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje równoważność kategorii $\iff$ jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall\ Y \in \operatorname{Ob} \mathbf{D})(\exists\ X \in \operatorname{Ob} \mathbf{C})\ F(X) \underset{\mathbf{D}}{\cong} Y$.

Dowód
$\Leftarrow$

Wiemy, że funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest wierny, pełny i w zasadzie suriektywny i na podstawie tej wiedzy skonstruujemy $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ jak w definicji równoważności kategorii.

Dla $Y \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \operatorname{Ob} \mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \to F(G(Y))$. Możemy tak zrobić, gdyż F jest w zasadzie suriektywny.

Niech $\varphi : Y \to Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii $\mathbf{D}$. Chcemy sprawdzić istnienie $G(\varphi)$ takie, że mamy naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \leftrightarrow F \circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathbf{D}}(Y) = Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & Y' = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}(Y') \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\
F(G(Y)) \arrow[r, "F(G(\varphi))?"'] & F(G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Ponieważ ι_Y jest izomorfizmem, dolną strzałkę $F(G(Y)) \to F(G(Y'))$ możemy podpisać jako $\iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$. Chcemy pokazać, że da się dobrać $G(\varphi)$ tak, żeby $F(G(\varphi)) = \iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$, tzn. żeby diagram na górze komutował.

F jest wierny i pełny, więc przejście

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest jednocześnie bijekcją i inijekcją, czyli możemy je odwracać. Istnieje więc jedyne

$$\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \varphi \iota_Y^{-1}) : G(Y) \to G(Y')$$

które możemy przypisać do $G(\varphi) = \psi$. Zbiór izomorfizmów ι_Y zadaje więc naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \to F \circ G$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & & Y' \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\
F(G(Y)) \arrow[rr, "F(G(\varphi))=F(\psi)=\iota_{Y'}\varphi\iota_Y^{-1}"'] & & F(G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla tak zdefiniowanego G istnieje również naturalne przekształcenie $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \to G \circ F$.

Dla $X, X' \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ oraz $\psi : X \to X'$ istnieje izomorfizm $F(X) \cong F(G(F(X)))$, gdyż tak właśnie zdefiniowaliśmy funktor G. Aby utrzymać konwencję z powyższego fragmentu dowodu, naziwjmy te izomorfizmy odpowiednio $\iota_{F(X)}$ i $\iota_{F(X')}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\iota_{F(X)}"] \arrow[d, "F(\psi)"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "F(G(F(\psi)))"] \\
F(X') \arrow[r, "\iota_{F(X')}"'] & F(G(F(X')))
\end{tikzcd}$$

Ponieważ F jest wiernym i pełnym funktorem, to możemy najbardziej zewnętrzne F zdjąć, by otrzymać diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F^{-1}(\iota_{F(X)})"] \arrow[d, "\psi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(\psi))"] \\
X' \arrow[r, "F^{-1}(\iota_{F(X')})"'] & G(F(X'))
\end{tikzcd}$$

Ponieważ diagram przed zdjęciem F był przemienny, to również diagram niżej musi taki być - w końcu to zwykłe nałożenie F^{-1} na wszystkie elementy i strzałki. W takim razie, morfizmy $F^{-1}(\iota_{F(X)})$ zadają naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \to G \circ F$.

$\Rightarrow$

Dowód drugiej implikacji zostaje pozostawiony jako ćwiczenie.

Wykład 16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice

3.1 Kategoria funktorów

W kategorii **Set** zbiór $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ możemy widzieć jako $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$ gdzie 1 jest singletonem. Robimy to utożsamiając element $x \in X$ z morfizmem $1 \mapsto x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$.

Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii **C** obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \ (\star)$$

gdzie $(\star)$ zapisujemy czasem jako $X(Y)$.

Ponieważ nie we wszystkich kategoriach istnieje odpowiednich singletona 1, musimy rozważać wszystkie obiekty Y i morfizmy:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\alpha \circ f"] \\ X \arrow[r, squiggly, dash, "h_X(f)"'] & X \end{tikzcd}$$

dobrane tak, że diagram komutuje.

Oczywiście, możemy też definiować funktor kowariantny $g : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ taki, że $g_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.
Kategorię funktorów $(C^{op}, \mathbf{Set})$, której obiektami są h_X jak w przykładzie wyżej, oznaczamy $\widehat{\mathbf{C}}$.

Funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest **reprezentowalny**, jeśli $F \cong h_X$ dla pewnego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$. Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dla morfizmu $X \xrightarrow{\varphi} X'$ w **C** określamy morfizm $h_\varphi : h_X \to h_{X'}$ w $\widehat{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longrightarrow & \varphi \circ \alpha \end{array}$$

Funktor h_X można również oznaczyć jako $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$. Wówczas dla morfizmu $\varphi : Y \to Y'$ mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, X)(\alpha) = \varphi \circ \alpha$$

dla $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$

Przykład(y) 3.1

1. $\mathcal{P}(X) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo $\mathcal{P}(X) \cong \mathrm{Hom}(X, 2)$.

   Dla dowolnego zbioru $X \in \mathbf{Set}$ naturalne przekształcenie $f(X) : \mathrm{Hom}(X, 2) \to \mathcal{P}(X)$ przypisze funkcji $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, 2)$ zbiór tych elementów $x \in X$ dla których $\alpha(x) = 2$. Przekształcenie odwrotne do tego przypisze zbiorowi $A \in \mathcal{P}(X)$ funkcję $\alpha : X \to 2$ taką, że $\alpha(x) = 1$ jeśli $x \notin A$ i $\alpha(x) = 2$ wpp.

2. Funktor homotopii $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ jest w oczywisty sposób funktorem reprezentowalnym.

3. wiązki $\mathrm{Vect}_n(X) = [X, G^\infty]$????

Przyporządkowania $X \mapsto h_X$ oraz $\varphi \mapsto h_\varphi$ dają funktor $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$.

> **Lemat 3.1 : Yoneda lemma.**
> Przyporządkowanie $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$ zadaje równoważność kategorii $\mathbf{C}$ z pełną podkategorią kategorii $\widehat{\mathbf{C}}$, której obiektami są funktory reprezentowalne.

Dowód
Musimy pokazać, że

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \Cup & & \Cup \\ \varphi & \longrightarrow & h_\varphi \end{array}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ h_X \arrow[rr, squiggly, bend left, "\star\star"] & & h_{X'} \end{tikzcd}$$

$$X \xrightarrow{\quad\star\quad} X'$$

izomorfizm $\star$ pojawia się bezpośrednio po tym, że $F \to h_X$ i $F \to h_{X'}$ są izmorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm $\star\star$.

Niech teraz $F \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$.

Jeśli $F = h_{\mathbf{C}}$, to mamy

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \ni \mathrm{id}_X \arrow[r, bend left, "h_\varphi"] \arrow[r, bend right, "f"'] & h_{X'}(X) \end{tikzcd}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE

3.2 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a $F : I \to \mathbf{C}$ będzie funktorem.

> **Definicja 3.2 : granica funktora F.**
> Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów) $\Pi_i : X \to F(i)$ dla $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$, które spełniają
>
> - *[zgodność]* dla dowolnych $i \xrightarrow{\alpha} j$ w I diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Pi_i"'] \arrow[dr, "\Pi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

komutuje, tzn. $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$.

- *[uniwersalność]* dla każdego układu (X', Π_i') spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm $\lambda : X' \to X$ taki, że dla każdego $i \in I$ diagram

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\Pi_i'"] & & X \arrow[dl, "\Pi_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

komutuje

jest nazywany **granicą funktora** F i oznaczamy ją jako lim F.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład(y) 3.2

1. Dla $I = \{0, 1\}$ oraz $F : I \to \mathbf{C}$ granicę lim F nazywamy *produktem* obiektów F(0) i F(1)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Pi_1"] \arrow[d, "\Pi_0"] \arrow[dr, dashed] & F(1) \\ F(0) & X' \arrow[l, "\Pi_0'"] \arrow[u, "\Pi_1'"'] \end{tikzcd}$$

Definicja 3.3 : granica odwrotna.

Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

Definicja 4.1 : funktory sprzężone.
Para funktorów $L : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ i $R : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem **A** jak i **B**)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy $L \dashv R$

Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktorem zapominającym*
   - jeśli $R : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, wtedy

     $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\underbrace{\star}_{\text{grupa}}, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, \underbrace{B}_{\text{grupa jako zbiór}})$$

     $\star$ będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy F_A.
   - $R : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}$ z bijekcjami zdefiniowanymi jako

     $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

     gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.
2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

   $$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

   dla $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$ mamy

   $$(a \otimes x \mapsto (\varphi(a))(x)) \mapsto \varphi$$

   Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły: $L = - \otimes X$ oraz $R = \mathrm{Hom}(X, -)$
3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym funktor sprzężonym.

- Włożenie kategorii **Ab** $\hookrightarrow$ **Grp** posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm $\varphi : A \to B$ na element neutralny, więc od razu indukwoane mamy przekształcenie $A^{op} \to B$, stąd $\star = A^{op}$.

- Włożenie kategorii ciał w dziedziny wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciala}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K, to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciała ułamków ciała R w ciało K:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, hook] & & K \ni \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)} \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

stąd $\star = R_0$

- Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne $\mathbf{Cpt}T_0 \hookrightarrow$ **Top** mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpf}T_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc $\star = \beta X$ czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w $[0, 1]$ i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.
Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód
Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgryźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

R(B) to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{op} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).
Jeśli $L \dashv R$, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

Dowód
OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt $A \in \mathbf{A}$ i sprawdzić, czy $\Pi_i' : A \to (R \circ F)(I)$ sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na $R \circ R(\Pi_i)$. Musimy wziąć obiekt $LA \in \mathbf{B}$ i tutaj dostajemy jedyną strzałkę $LA \to X$, gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami **A** a elementami **B**.

4.1 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2 : kategoria addytywna.
Kategoria addytywna **A** to kategoria

- Dla każdej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ na $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje *obiekt zerowy* 0 taki, że $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(0,0) = 0$ jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ istnieje obiekt C (zwykle oznaczany $A \oplus B$), który jest ich *produktem* i *koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \underset{P_A}{\overset{i_A}{\leftrightarrow}} C \underset{i_B}{\overset{P_B}{\leftrightarrow}} B$$

  takie, że $P_a \circ i_A = id_A$ i $P_A \circ i_B = 0$ (analogicznie gdy przestawimy A i B). Dodatkowo, $i_A P_A + i_B P_B = id_C$.

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strałka $D \to C$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "f_b"] \arrow[dd, bend right, "f_A"'] & & \\
& C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "P_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Zauważmy że $i_A f_A + i_B f_B : D \to C$, wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja $D \to C$ sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z P_A i P_B:

$$P_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_A i_A}_{id_A} f_A + \underbrace{P_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$P_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{P_B i_B}_{id_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dd, bend right, "0"'] & & \\
& C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "f_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
u &= id_C \circ 0 = \\
&= i_A P_A u + i_B P_B u = \\
&= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

> **Dygresja : parę słów o zerach.**
> Dla dowolnego obiektu $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ mamy $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$ i $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$, bo dla $f : A \to 0$ jest $\mathrm{id}_0 \circ f = f$, czyli $f = 0 \circ f$, a więc
>
> $$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

   Pre – **snop/AB**(X) i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

> **Definicja 4.3 : kategoria abelowa.**
> Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i kojądro i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

Kilka wyjaśnień:

- Jądro f to ekwalizator $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$. Inaczej, jest to $K \xrightarrow{k} A$ taki, że

  1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
  2. Zachodzi własność uniwersalna:

  $$\begin{tikzcd}
  \forall K' \arrow[r, "k'"] \arrow[rr, bend left, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
  K \arrow[u, "\exists!\, u"] \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
  \end{tikzcd}$$

- Kojądro f to koekwalizator $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$ jak w następującym diagramie:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"] & C \arrow[d, "\exists!"] \\
& & C'
\end{tikzcd}$$

- Niech $f : A \to B$, wówczas
  - $\operatorname{im} f = \ker(B \to \operatorname{Coker} f)$
  - $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\ker f \to A)$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "c"] & C \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed] & \operatorname{im} f \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działaby w kategorii abelowej.

Definicja 4.4 : mono-, epi-.
Morfizm $f : X \to Y$ jest

- **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 : Z \to X$ zachodzi
$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$
W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego $g : Z \to X$ $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$
- **epimorfizmem** nazywamy morfizm $f : A \to B$ taki, że mając $h_1, h_2 : B \to W$ zachodzi
$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$
W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając $f : A \to B$ i $h : B \to W$ to
$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to $\ker f = 0$, a jeśli f jest epimorfizmem, to $\operatorname{Coker} f = 0$.

Lemat 4.3.
Jądra są monomorfizmami, a kojądra są epimorfizmami.

Dowód
W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
Z \arrow[u, "g"'] \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[ur, "0"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

i zauważyć, że jedyność odwzorowania $Z \to K$ wymaga, aby $g = 0$.

Uwaga 4.4.
Dla każdego morfizmu $f : A \to B$ w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow[\text{epi}]{i} I \xrightarrow[\text{mono}]{j} B \xrightarrow{c} C$$

w którym $k = \ker f$, $c = \operatorname{Coker} f$, $i = \operatorname{Coker} k$ oraz $j = \ker c$ i $f = j \cdot i$.

Dowód
Załóżmy, że istnieją dwa takie rozkłady:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, dashed] & & I \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed] & & C \arrow[dd, dashed] \\
& A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"] & & B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c'"] & \\
K' \arrow[ur, "k'"] & & I' \arrow[ur, "j'"] & & C'
\end{tikzcd}$$

Strzałki niebieska i czerwona są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę zieloną dobbieramy w taki sposób, aby diagram

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, "j"] & \\
& B \\
I' \arrow[ur, "j'"] &
\end{tikzcd}$$

komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, "j"] & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & B \\
& I' \arrow[ur, "j'"'] &
\end{tikzcd}$$

> **Lemat 4.5.**
> W kategorii abelowej, jeśli f jest epimorfizmem, to $f = \mathrm{Coker}\ker f$, a jeśli f jest monomofizmem, to $f = \ker \mathrm{Coker} f$.

Dowód
Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$K \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{0} 0$$

wiemy, że j jest $\ker(B \to 0)$, czyli funkcji zerowej. Czyli musi być $j = id_B$, możemy więc przerysować

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & I \arrow[r, "j"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & B \arrow[r, "0"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & 0 \\
K' \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "id_B"] & B \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

ale przecież $i : A \to I$ było $i = \mathrm{Coker}\ker f$, z drugiej strony ponieważ $A \to I \to B$ jest równe f, a w tym konkretnym przypadku jest to równe $A \to B \to B$ gdzie druga strzałka to id_B, to musi być $i : A \to I = f : A \to B$.

Uwaga 4.6.
W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i kojądro oraz zachodzi lemat 4.5

Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro $\ker f$ to algebraiczne jądro f z dziedziczoną topologią, a $\mathrm{Coker}\, f$ to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu $\overline{\mathrm{im}\, f}$.

   $$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/\overline{f[A]}$$

   Przez taką definicję Coker mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

   Wystarczy sprawdzić

   $$0 \longrightarrow \mathbb{R}^\delta \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

   gdzie $\mathbb{R}^\delta$ ma topologię dyskretną, a $\mathbb{R}$ traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między kojądrami JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria R-modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii R-modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

   Dygresja : twierdzenie Freyd-Mitchella.
   Mała kategoria belowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię R-modułów dla pewnego R.

Wykład 30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

Definicja 5.1 : kompleks łańcuchowy.
Kompleks (ko)łańcuchowy w kategorii abelowej **A** to ciąg obiektów i morfizmów

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

taki, że dla każdego n $d^n \circ d^{n-1} = 0$

Przykład(y) 5.1 : kompleksów łańcuchowych

1. Niech X będzie *kompleksem symplicjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stowarzyszyć kompleks symplicjalny z obiektami

$$C_n X = \bigoplus_{\sigma - n\text{-sympleks}} \mathbb{Z}$$

i wtedy $\partial : C_n X \to C_{n-1} X$ jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

$$\partial[\sigma^n] = \sum_{\tau^{n-1} < \sigma^n} \pm[\tau^{n-1}]$$

gdzie σ^n to generator składniku $\mathbb{Z}$ odpowiadający sympleksowi σ^n. Jeśli mamy sympleks $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$ to przez ścianę τ^{n-1} rozumiemy

$$\tau^{n-1} = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

gdzie przez $\widehat{v_i}$ rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

$$S_n X = \bigoplus_{\sigma : \Delta^n \to X} \mathbb{Z}$$

gdzie $\sigma : \Delta^n \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w X. To się nazywa *kompleks singularny*.

Odwzorowanie brzegu $\partial : S_n X \to S_{n-1} X$ na $\sigma : \Delta^n \to X$ przyjmuje wartość

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \restriction_{i\text{-ta ściana}})$$

3. **Kompleks de Rhama**

   Niech M będzie gładką rozmaitością, $A^n = \Omega^n M$ będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas $d : \Omega^n M \to \Omega^{n+1} M$ jest pochodną zewnętrzną.

   W szczególności, jeśli $M = T^2$, to $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^2 = \mathbb{R}$ oraz $H^{>2} = 0$.

5.2 Homologie

Skoro $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$, to $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$, więc możemy zastanowić się nad

$$H_n X = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}.$$

Tak zdefiniowane $H_n X$ nazywamy **homologiami**.

Definicja 5.2 : ogólna definicja (kohomologii).
Niech $A^\cdot$ będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzymy na jego wycinek

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "a"] & A^n \arrow[r, "d^n"] & A^{n+1} \arrow[r] & \dots \\
 & K \arrow[ur, "\ker d^n"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Ponieważ $d^n \circ d^{n-1} = 0$, to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra $a : A^{n-1} \to K$. Chcemy więc nazwać

$$H^n(A^\cdot) = \operatorname{Coker} a$$

homologią.

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[d, "b"] & \\
\dots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[ur, "\operatorname{Coker} d^{n-1}"] & A^{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

i zdefiniować $H^n(A^\cdot) = \ker b$.

Lemat 5.1.
W definicji jak wyżej $H^n(A^\cdot) : \operatorname{Coker} a \cong \ker b$.

Dowód

- Przy dodatkowym założeniu, że d^{n-1} jest monomorfizmem, a d^n jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = \mathrm{Coker}\ker d^n = \mathrm{Coker}\, k$$

$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że $a = \ker ck$ oraz $b = \mathrm{Coker}\, ck$, z czego od razu wynika teza:

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "a"] & K \arrow[r, "ck"] \arrow[d] & C \arrow[r, "b"] & A^n \\
& \mathrm{Coker}\, a \arrow[r, "\star"] & \ker b \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

i strzałka $\star$ jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia

- Bez dodatkowych założeń

ZDJĘCIA

5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

Definicja 5.3.

- Pull-back to granica diagramu

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

- Push-out to z kolei kogranica diagramu

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Fakt 5.2.
W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

Dowód
Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania.