Zadanie dodatkowe 1

Weronika Jakimowicz

30.10.2023

Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $\mathcal{G}$ będzie podσ-ciałem $\mathcal{F}$. Niech $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ będą równoważnymi miarami probabilistycznymi na $(\Omega, \mathcal{F})$. Dokładniej $\mathbb{P}$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{Q}$ (na $\mathcal{F}$) i $\mathbb{Q}$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{P}$ (na $\mathcal{F}$). Oznaczmy przez X_0 pochodną Radona-Nikodyma $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$. Przez $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznaczać będziemy wartość oczekiwaną wyznaczoną odpowiednią przez $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$.

Zadanie 1.

Uzasadnij, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] > 0$ $\mathbb{P}$-p.w.

Rozważmy zbiór $A = \{\omega \ : \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}](\omega) \le 0\}$. Wówczas

$$0 \ge \int_A \max_{\omega \in A} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}](\omega)\ d\mathbb{P} =$$
$$= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\ d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mathbb{1}_A] =$$
$$= \int_A X_0\ d\mathbb{P} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} =$$
$$= \int_A d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(A) \ge 0$$

Skoro więc $0 \ge \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_A] \ge 0$, to $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_A] = 0$, a ponieważ jest to całka po zbiorze na którym funkcja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$ nie zmienia znaku, to zbiór A musi być miary zero, co jest chcianym przez nas rezultatem.

Zadanie 2.

Pokaż, że dla każdej ograniczonej, $\mathcal{F}$-mierzalnej zmiennej Y,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

Zacznijmy od zauważenia, że $X_0' = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$, gdzie X_0' jest pochodna Radona-Nikodyma $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ na $\mathcal{G}$. Z definicji X_0' jest $\mathcal{G}$-mierzalne, wystarczy więc sprawdzić (W2) w definicji wykładowej. Niech więc $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mathbb{1}_G] = \int_G X_0 d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(G)$$

ale ponieważ X_0' jest pochodną na ciele $\mathcal{G}$, a my jesteśmy w $\mathcal{G}$, to z drugiej strony

$$\mathbb{Q}(G) = \int_G X_0' d\mathbb{P}.$$

Przechodząc już do sedna sprawy, przypomnijmy sobie, razem z Wikipedią, że jeśli g jest $\mathbb{Q}$-całkowalną funkcją, to

$$\int_A g\, d\,\mathbb{Q} = \int_A g \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\, d\mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$$

Ustalmy $G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] &\overset{\star\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]X_0'\mathbb{1}_G] \\
&\overset{\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0X_0' \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0X_0'\mathbb{1}_G] = \\
&\overset{\star\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0'\mathbb{1}_G] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0' \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \\
&\overset{\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]X_0'\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G]
\end{aligned}$$

Przejścia $\star\star$ najpierw "wypluwają" X_0', żeby zamienić całkę na $G \in \mathcal{G}$ względem $\mathbb{Q}$ na całkę względem $\mathbb{P}$, a potem zjadają X_0 żeby zamienić całkę względem $\mathbb{P}$ na całkę względem $\mathbb{Q}$ (tutaj myślimy już w kontekście całego $\mathcal{F}$, bo i tak nie ma to różnicy gdy jesteśmy na $G \in \mathcal{G}$).

Przejścia oznaczone $\star$ wymagają, żeby YX_0X_0' było całkowalne względem $\mathbb{P}$ oraz żeby YX_0' było całkowalne względem $\mathbb{Q}$. Od razu przypomnijmy, ponownie z pomocą Wikipedii, że

$$\frac{d|\,\mathbb{Q}\,|}{d\mathbb{P}} = \left|\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|$$

a ponieważ $\mathbb{Q}(\omega) \in [0, 1]$, to w naszym przypadku

$$\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \left|\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|$$

Z uwagi wyżej wynika więc, że $|X_0| = X_0$ oraz $|X_0'| = X_0'$. Spróbujmy teraz pokazać, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|YX_0X_0'|] < \infty$, oznaczając $M = \sup_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|YX_0X_0'|] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0X_0'] = M \int X_0' \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = M \int X_0'\, d\,\mathbb{Q} = \\
= M \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0\, |\mathcal{G}] d\,\mathbb{Q} = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = M \cdot 1 < \infty
\end{aligned}$$

gdyż $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = \int_\Omega X_0\, d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(\Omega) = 1$. Korzystając z tych wyliczeń dostajemy analogiczny wynik dla YX_0':

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0'] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_0'] = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0'X_0] < \infty$$

Zadanie 3.

Załóżmy, że $X' = GX_0$ dla pewnej ograniczonej $\mathcal{G}$-mierzalnej zmiennej losowej G. Pokaż, że spełnione są

(a) X' **jest** $\mathbb{P}$**-całkowalna**

(b) Dla każdej ograniczonej, $\mathcal{F}$**-mierzalnej zmiennej** Y**,**

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

(a)

Niech M będzie takie, że $M \geq |G(\omega)|$ dla $\omega \in \Omega$, co jest przyjemniejszym zapisaniem tego co już robiłam w zadaniu 2. Wówczas korzystając ze wszystkiego co już tam wyżej napisałam (być może rozpisując bardziej czytelnie):

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = M \int \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\, d\mathbb{P} = M \int d\,\mathbb{Q} = M \cdot 1 = M < \infty$$

(b)

Po pierwsze zauważmy, że skoro Y jak i G są ograniczone, to również YG są ograniczone. Wprost z poprzedniego zadania dostajemy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(YG)X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(YG) \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

I wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|YG|] = \int |YG|\, d\,\mathbb{Q} \leq \int M\, d\,\mathbb{Q} = M < \infty$$

jeśli $M = \max |YG|$, czyli możemy użyć 6 własności wwo (na którą już się powoływałam), żeby dostać

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}] = G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}].$$

Wiemy też, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] < \infty$, czyli można również napisać

$$G\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}].$$

Łącząc oba te kroki dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] =& \\ = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]&\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Załóżmy, że zmienna X' **spełnia warunki (a) i (b). Pokaż, że** $X' = GX_0$ **dla pewnej** $\mathcal{G}$**-mierzalnej zmiennej** G**.**

Z zadania drugiego łatwo dostać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

czyli

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]}$$

W takim razie musi istnieć funkcja f taka, że

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]} = \frac{f \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{f \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]}$$

co w szczególności oznacza, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}] = f \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

i ponieważ zadanie pierwsze mówi, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] > 0$ prawie wszędzie, to

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]} = f$$

czyli f jest funkcją $\mathcal{G}$-mierzalną jako iloczyn dwóch $\mathcal{G}$-mierzalnych funkcji z dzielnikiem > 0 prawie zawsze.

Zauważmy teraz, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X'|] < \infty$$

gdyż X' spełnia warunek (a). Z drugiej strony,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]f|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_0' \cdot f|] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|f|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}|[X_0 f|]$$

a ponieważ obie jest to nałożenie $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[| \cdot |]$ na obie strony równości wyżej, to wiemy, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_0 f|] < \infty$.

W takim razie mamy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[fX_0 \mid \mathcal{G}]$$

a więc całka z X' i z fX_0 zgadza się na każdym zbiorze z $\mathcal{G}$, czyli $X' = fX_0$ $\mathbb{P}$-p.w. *(całkiem szczerze, to mam wrażenie że gdzieś po drodze coś źle zakładam)*

Zadanie 5.

Znajdź warunek konieczny i dostateczny (w terminach X_0) na to, aby

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]$$

dla każdej ograniczonej zmiennej Y.