Rachunek prawdopodobieństwa 2R 2023
lista 2: Własności wwo

1. Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Rozważmy $\mathcal{G}$-mierzalną zmienną losową X oraz niezależną od $\mathcal{G}$ zmienną losową Y. Załóżmy, że $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją mierzalną, że $\mathbb{E}[|\psi(X,Y)|] < \infty$. Pokaż, że
$$\mathbb{E}[\psi(X,Y)|\mathcal{G}] = \Psi(X), \qquad \text{gdzie} \qquad \Psi(x) = \mathbb{E}[\psi(x,Y)].$$

2. Niech (X,Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na kwadracie o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Oblicz $\mathbb{P}[X > 1/2|Y]$.

3. Niech $\{X_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie z wartością oczekiwaną m. Niech N będzie dyskretną zmienną losową o wartościach w $\mathbb{N}$ niezależną od ciągu $\{X_n\}$ z wartością oczekiwaną M. Zdefiniujmy $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Znajdź
$$\mathbb{E}[S_N|N] \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{E}[S_N].$$

4. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathrm{Exp}(1)$.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}[X+Y|X]$
   (b) Oblicz $\mathbb{E}[X|X+Y]$

5. Pokaż, że jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że X oraz XY są całkowalne oraz Y jest zmienną losową mierzalną względem $\mathcal{G}$, to
$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

6. Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Niech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ będzie π-układem generującym σ-ciało $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Załóżmy, że pewna $\mathcal{G}$ mierzalna zmienna losowa spełnia
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_C] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_C]$$
dla dowolnego $C \in \mathcal{C}$. Pokaż, że $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

7. Niech $\mathcal{G}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ będą niezależnymi σ-ciałami. Niech X będzie całkowalną zmienną losową.
   (a) Załóżmy, że X jest niezależna od σ-ciała $\mathcal{D}$. Czy prawdą jest, że
$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{D})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]? \tag{*}$$
   (b) Pokaż, że jeżeli $\mathcal{D}$ jest niezależne od $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{G})$, to (*) zachodzi.