

Algebra homologiczna

Zima 2023-24



1 Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R -modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \rightarrow C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy

Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ R -modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n =] d \circ d : C_n \rightarrow C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami C** , a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy *n -cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany *n -granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia

n -tym modułem homologii kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1

Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ dla $n \geq 0$ i $C_n = 0$ dla $n < 0$. Dla $n > 0$ niech d_n posyła $x \pmod{8}$ do $4x \pmod{8}$. Pokaż, że tak zdefiniowane C jest kompleksem łańcuchowym $\mathbb{Z}/8$ -modułów i policz moduły homologii.

Rozwiązanko

Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \rightarrow C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \pmod{8}$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \pmod{8}) = 16x \pmod{8} = 8 \cdot (2x) \pmod{8} = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.

Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_1} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_2} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1 . W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

2 Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(X) zdefiniujemy tak, że

🐟 Ob **Otw**(X) = $\{U \subseteq X : U \text{ - zbiór otwarty}\}$

🐟 morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funktor kontrwariantny **Otw**(X)^{op} → **Set** to **presnop** na przestrzeni topologicznej X .

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{C}(X)$ definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \parallel & & \parallel \\ C(U) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & C(V) \end{array}$$

co w widoczny sposób spełnia $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$.

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : Presnop, snop

Presnopem na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i dla wszystkich $s_i \in F(U_i)$ (które nazywamy *cięciami presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych $i, j \in I$ mamy $s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)$, to istnieje jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że dla wszystkich $i \in I$ $s \upharpoonright U_i = s_i$. Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$\begin{aligned} (\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall s_i \in F(U_i)) \left[(\forall i, j \in I) s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j) \right] &\Rightarrow \\ &\Rightarrow [(\exists! s \in F(U)) (\forall i \in I) s \upharpoonright U_i = s_i] \end{aligned}$$

Przykład(y) 2.2

1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzi kietki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe żdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria \mathbf{C}' kategorii \mathbf{C}

To kategoria spełniająca następujące warunki:

$\text{Ob } \mathbf{C}' \subseteq \text{Ob } \mathbf{C}$

$\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

$\text{id}_X^{\mathbf{C}'} = \text{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \text{Ob } \mathbf{C}'$

złożenie morfizmów w \mathbf{C}' zachowuje się tak samo jak w \mathbf{C}

Mówimy, że podkategoria \mathbf{C}' jest **pełna**, gdy $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem K $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych \mathbf{Vect}_K . Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych \mathbf{Ab} jest pełną podkategorią kategorii \mathbf{Grp}
3. Kategoria gładkich rozmaitości \mathbf{C}^∞ – **rozm** jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni topologicznych \mathbf{Top} . Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest

wierny gdy $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest bijekcją

pełny, gdy dla wszystkich $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ przekształcenie $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów

Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \rightarrow G$ w \mathbf{D} taki, że dla każdego $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ i dla każdego $\phi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G .

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\text{Id}, \text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\text{ab}(G) = G/[G, G]$).

Rozważmy $f : \text{Id} \rightarrow \text{ab}$, wtedy $\text{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram

komutuje:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}(G) = G & \xrightarrow{f(G)} & G/[G, G] = \text{ab}(G) \\ \text{Id}(\phi) = \phi \downarrow & & \downarrow \text{ab}(\phi) \\ \text{Id}(H) = H & \xrightarrow{f(H)} & H/[H, H] = \text{ab}(H) \end{array}$$

Dla każdego $G \in \text{ObGrp}$ zdefiniujemy $f(G) : \text{Id}(G) \rightarrow \text{ab}(G)$ jako

$$f(G) : G \rightarrow G^{\text{alb}} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w G przechodzi przez dowolny homomorfizm $\phi : G \rightarrow H$ na komutant w H :

$$(\forall g, h \in [G, G]) \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(h)\phi(g) = \phi(hg)$$

2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów $H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$. Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.
3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\text{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$. Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \xrightarrow{\quad} & V^{**} \\ \Psi & & \Psi \\ v & \xrightarrow{\quad} & (V^* \ni \phi \mapsto \phi(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi^{**} \\ W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**} \end{array}$$

komutuje, czyli $f(V)\phi^{**} = \phi f(W)$.

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ f(V))(v) &= \phi^{**}(f(V)(v)) = \phi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\ &= \langle \cdot, v \rangle \circ \phi^* = \langle \phi^*(\cdot), v \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \phi, v \rangle = \langle \cdot, \phi(v) \rangle = f(W)(\phi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

Czyli wszystko się zgadza!



Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy $\mathbf{Funct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \text{Ob}\mathbf{C}$ oraz $\phi : X \rightarrow Y$ rysujemy

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{a(X)} & G(X) & \xrightarrow{b(X)} & H(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) & & \downarrow H(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{a(Y)} & G(Y) & \xrightarrow{b(Y)} & H(Y) \end{array}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

-  naturalne przekształcenia $f : F \rightarrow G$ dla których istnieje $g : G \rightarrow F$ takie, że $f \circ g = \text{id}_G$ oraz $g \circ f = \text{id}_F$
-  przekształcenie $f : F \rightarrow G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii \mathbf{D} .

Przykład(y) 2.6

- Przekształcenie funktorów $\text{Id}, **$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ takie, że $F \circ G = \text{id}_{\mathbf{D}}$ i $G \circ F = \text{id}_{\mathbf{C}}$

Przykład(y) 2.7

- Kategoria skończone wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest równoważna kategorii \mathbf{S}_K , której obiektami są $\text{Ob } \mathbf{S}_K = \{K^0, K^1, \dots, K^n, \dots\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Włożenie $F : \mathbf{S}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z \mathbf{S}_K jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć $G : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{S}_K$ do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni $V \in \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ znaleźć bazę $b(V)$, którą pošłemy w bazę standardową, tzn dostajemy

$$G(V) : V \rightarrow K^{\dim V}.$$

Morfizmami na $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ są macierze, więc wystarczy postać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

Twierdzenie 2.1

Funktor $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest równoważnością kategorii \iff jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall Y \in \text{Ob } \mathbf{D})(\exists X \in \text{Ob } \mathbf{C}) F(X) \cong_{\mathbf{D}} Y$.

Dowód

\Leftarrow

Mając wiedzę o F będziemy konstruować G .

Dla $Y \in \text{Ob } \mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \text{Ob } \mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \rightarrow F(G(Y))$. Niech $\phi : Y \rightarrow Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii \mathbf{D} . Chcemy sprawdzić istnienie $G(\phi)$ takie, że $\text{Id}_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$



$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \downarrow \iota_Y & & \downarrow \iota_{Y'} \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{\iota_{Y'} \circ \phi \circ \iota_Y^{-1}} & F(G(Y')) \end{array}$$

F jest wierny i pełny, więc

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne $\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \phi \iota_Y^{-1})$

