Zadanie dodatkowe 2

Weronika Jakimowicz

15.12.2023

Niech $\{\xi_k\}$ będzie ciągiem zmiennych iid. o symetrycznym rozkładzie ($\xi_k, -\xi_k$ mają ten sam rozkład). Niech $S_0 = 0$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad k \geq 1.$$

Rozważmy funkcję ogonową F_k zmiennej S_k, czyli

$$F_k(x) = \mathbb{P}\left[S_k \geq x\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

Zadanie 1 **Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ ciąg zmiennych losowych**

$$X_k = F_{n-k}(a - S_k), \quad k = 0, 2, \dots, n$$

jest martyngałem względem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k\}$ danej przez $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ dla $k \geq 1$.

Zaczęłam to pisać na ćwiczeniach z listy 4, gdzie studenci prezentujący przy tablicy są bici po rękach jeśli zapomną sprawdzić całkowalności tego co wsadzamy do wwo, w tym całkowalności składników martyngału. Stąd postaram się zrobić to tak dokładnie jak tylko potrafię.

1. X_k jest całkowalne, bo jest ograniczone

$$X_k = F_{n-k}(a - S_k) = \mathbb{P}\left[S_{n-k} \geq a - S_k\right] \in [0, 1].$$

2. X_k jest $\mathcal{F}_k$-mierzalne

$$X_k = \mathbb{P}\left[S_{n-k} \geq a - S_k\right] = \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{n-k} \xi_j \geq a - \sum_{j=1}^{k} \xi_j\right]$$

ale ponieważ ξ_i są symetryczne, to

$$\mathbb{P}\left[\xi_j \geq x\right] = \mathbb{P}\left[-\xi_j \geq x\right]$$

czy da się to uogólnić na dowolną sumę ξ_j?

$$\mathbb{P}\left[\xi_j + \xi_i \geq x\right] = \mathbb{P}\left[\xi_j \geq x - \xi_i\right] = \mathbb{P}\left[-\xi_j \geq x - \xi_i\right] = \mathbb{P}\left[-\xi_j + \xi_i \geq x\right]$$