

Algebra homologiczna

Zima 2023-24

Spis rozmaitości treściowalnych

Wstęp	3
1.1. Kompleksy łańcuchowe	3
Równoważność kategorii	5
2.1. Presnop i snop	5
2.2. Funktory wierne, pełne	6
2.3. Naturalne przekształcenia funktorów	7
2.4. Równoważność kategorii	9
16.10.2023 : Tymczasowe	11
3.1. Granice i kogranice	13
23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]	15
4.1. Kategorie addytywne i abelowe	17

Wykład Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R -modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \rightarrow C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy.

Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ R -modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n]d : C_n \rightarrow C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami** C , a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy *n-cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany *n-granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia.

n-tym modułem homologii kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1

Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ dla $n \geq 0$ i $C_n = 0$ dla $n < 0$. Dla $n > 0$ niech d_n posyła $x \pmod{8}$ do $4x \pmod{8}$. Pokaż, że tak zdefiniowane C jest kompleksem łańcuchowym $\mathbb{Z}/8$ -modułów i policz moduły homologii.

Rozwiązanko

Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \rightarrow C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \pmod{8}$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \pmod{8}) = 16x \pmod{8} = 8 \cdot (2x) \pmod{8} = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.

Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_1} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow{d_2} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1 . W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

Wykład Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię $\mathbf{Otw}(X)$ zdefiniujemy tak, że

 Ob $\mathbf{Otw}(X) = \{U \subseteq X : U \text{ - zbiór otwarty}\}$

 morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funktor kontrwariantny $\mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ to **presnop** na przestrzeni topologicznej X .

Zamiast kategorii \mathbf{Set} zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow C(X)$ definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \parallel & & \parallel \\ C(U) & \xleftarrow{\quad} & C(V) \end{array}$$

co w widoczny sposób spełnia $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$.

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : Presnop, snop.

Presnopem na kategorii \mathbf{C} nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i dla wszystkich $s_i \in F(U_i)$ (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych

$i, j \in I$ mamy $s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)$, to istnieje jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że dla wszystkich $i \in I$ $s \upharpoonright U_i = s_i$. Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$(\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall s_i \in F(U_i)) \left[(\forall i, j \in I) s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow [(\exists! s \in F(U)) (\forall i \in I) s \upharpoonright U_i = s_i]$$

Przykład(y) 2.2


1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzi kietki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe żdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.


2.2 Funktory wierne, pełne


Definicja 2.2 : podkategoria \mathbf{C}' kategorii \mathbf{C} .

To kategoria spełniająca następujące warunki:

 $\text{Ob } \mathbf{C}' \subseteq \text{Ob } \mathbf{C}$

 $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

 $\text{id}_X^{\mathbf{C}'} = \text{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \text{Ob } \mathbf{C}'$

 złożenie morfizmów w \mathbf{C}' zachowuje się tak samo jak w \mathbf{C}


Mówimy, że podkategoria \mathbf{C}' jest **pełna**, gdy $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$


Przykład(y) 2.3

1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem K $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych \mathbf{Vect}_K . Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych \mathbf{Ab} jest pełną podkategorią kategorii \mathbf{Grp}
3. Kategoria gładkich rozmaitości \mathbf{C}^∞ – **rozm** jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni topologicznych \mathbf{Top} . Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : functor wierny, pełny.

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest

 **wierny** gdy $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest bijekcją

 **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ przekształcenie $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.

Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \rightarrow G$ w \mathbf{D} taki, że dla każdego $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ i dla każdego $\phi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G .

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\text{Id}, \text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\text{ab}(G) = G/[G, G]$).

Rozważmy $f : \text{Id} \rightarrow \text{ab}$, wtedy $\text{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}(G) = G & \xrightarrow{f(G)} & G/[G, G] = \text{ab}(G) \\ \text{Id}(\phi) = \phi \downarrow & & \downarrow \text{ab}(\phi) \\ \text{Id}(H) = H & \xrightarrow{f(H)} & H/[H, H] = \text{ab}(H) \end{array}$$

Dla każdego $G \in \text{Ob } \mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : \text{Id}(G) \rightarrow \text{ab}(G)$ jako

$$f(G) : G \rightarrow G^{\text{alb}} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w G przechodzi przez dowolny homomorfizm $\phi : G \rightarrow H$ na komutant w H :

$$(\forall g, h \in [G, G]) \quad \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(h)\phi(g) = \phi(hg)$$

2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów $H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$. Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.
3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\text{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$. Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \xrightarrow{\quad} & V^{**} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v & \xrightarrow{\quad} & (V^* \ni \phi \mapsto \phi(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi^{**} \\ W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**} \end{array}$$

komutuje, czyli $f(V)\phi^{**} = \phi f(W)$.

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ f(V))(v) &= \phi^{**}(f(V)(v)) = \phi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\ &= \langle \cdot, v \rangle \circ \phi^* = \langle \phi^*(\cdot), v \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \phi, v \rangle = \langle \cdot, \phi(v) \rangle = f(W)(\phi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

Czyli wszystko się zgadza!



Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy $\mathbf{Funct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ oraz $\phi : X \rightarrow Y$ rysujemy

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{a(X)} & G(X) & \xrightarrow{b(X)} & H(X) \\
 F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) & & \downarrow H(\phi) \\
 F(Y) & \xrightarrow{a(Y)} & G(Y) & \xrightarrow{b(Y)} & H(Y)
 \end{array}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

-  naturalne przekształcenia $f : F \rightarrow G$ dla których istnieje $g : G \rightarrow F$ takie, że $f \circ g = \text{id}_G$ oraz $g \circ f = \text{id}_F$
-  przekształcenie $f : F \rightarrow G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii \mathbf{D} .

Przykład(y) 2.6

- Przekształcenie funktorów $\text{Id}, **$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ oraz naturalne przekształcenia funktorów $f : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$ i $g : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{C}}$

Przykład(y) 2.7

- Kategoria skończone wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ jest równoważna kategorii $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$, której obiektami są $\text{Ob} \mathbf{S}_{\mathbf{K}} = \{K^0, K^1, \dots, K^n, \dots\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Włożenie $F : \mathbf{S}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć $G : \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ znaleźć bazę $b(V)$, którą pošłemy

w bazę standardową, tzn dostajemy

$$G(V) : V \rightarrow K^{\dim V}.$$

Morfizmami na $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ są macierze, więc wystarczy postać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

Twierdzenie 2.1.

Funktor $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest równoważnością kategorii \iff jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall Y \in \text{Ob} \mathbf{D})(\exists X \in \text{Ob} \mathbf{C}) F(X) \cong_D Y$.

Dowód

\Leftarrow

Mając wiedzę o F będziemy konstruować G .

Dla $Y \in \text{Ob} \mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \text{Ob} \mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \rightarrow F(G(Y))$. Niech $\phi : Y \rightarrow Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii \mathbf{D} . Chcemy sprawdzić istnienie $G(\phi)$ takie, że $\text{Id}_D \cong F \circ G$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \iota_Y \downarrow & & \downarrow \iota_{Y'} \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{\iota_{Y'} \circ \phi \circ \iota_Y^{-1}} & F(G(Y')) \end{array}$$

F jest wierny i pełny, więc

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne $\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \phi \iota_Y^{-1})$



Wykład 16.10.2023 : Tymczasowe

Przykład(y) 3.1

1. W kategorii zbiorów element $X \in \text{ObSet}$ możemy widzieć jako elementy zbioru $\text{Hom}_{\text{Set}}(1, X)$ gdzie 1 jest jednoelementowym zbiorem.
2. Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii \mathbf{C} obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \quad (*)$$

ponieważ nie zawsze istnieje odpowiednik 1, dlatego rozważamy wszystkie obiekty i morfizmy:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ f \\ X & \xrightarrow{h_X(f)} & X \end{array}$$

Tutaj równanie (*) można również zapisać jako $X(Y)$, czyli rozumieć jako Y -punkty obiektu X .

Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.

Kategorię funktorów $(\mathbf{C}^{\text{op}}, \text{Set})$, której obiektami są h_X jak w przykładzie wyżej, oznaczamy $\widehat{\mathbf{C}}$.

Funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest **reprezentowalny**, jeśli $F \cong h_X$ dla pewnego $X \in \text{Ob}\mathbf{C}$. Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Dla morfizmu $X \xrightarrow{\phi} X'$ w \mathbf{C} określamy morfizm $h_\phi : h_X \rightarrow h_{X'}$ w $\widehat{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_\phi} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longrightarrow & \phi \circ \alpha \end{array}$$

Przykład(y) 3.2

1. $\mathcal{P}(X)$ jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo $\mathcal{P}(X) \cong \text{Hom}(X, 2)$

2. $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ *NIE JESTEM PEWNA CO TO OZNACZA? chyba nie homotopie*
3. wiązki $\text{Vect}_n(X) = [X, G^\infty]$????

Przyporządkowania $X \mapsto h_X$ oraz $\phi \mapsto h_\phi$ dają funktor $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$.

Lemat 3.1 : Yoneda lemma.

Przyporządkowanie $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ zadaje równoważność kategorii \mathbf{C} z pełną podkategorią kategorii $\widehat{\mathbf{C}}$, której obiektami są funktory reprezentowalne.

Dowód

Musimy pokazać, że

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \phi & \xrightarrow{\quad} & h_\phi \end{array}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \cong & & \searrow \cong \\ h_X & \xrightarrow{\quad \star \star \quad} & h_{X'} \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad \star \quad} X'$$

izomorfizm \star pojawia się bezpośrednio po tym, że $F \rightarrow h_X$ i $F \rightarrow h_{X'}$ są izomorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm $\star\star$.

Niech teraz $F \in \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$.

Jeśli $F = h_\phi$, to mamy

$$\begin{array}{ccc} & h_\phi & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ h_X(X) \ni \text{id}_X & & h_{X'}(X) \\ \curvearrowleft & f & \curvearrowright \end{array}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE




3.1 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ będzie funktorem.


Definicja 3.2 : granica funktora F .

Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów) $\Pi_i : X \rightarrow F(i)$ dla $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$, które spełniają

 [zgodność] dla dowolnych $i \xrightarrow{\alpha} j$ w I diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Pi_i \swarrow & & \searrow \Pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \end{array}$$

komutuje, tzn. $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$.

 [uniwersalność] dla każdego układu (X', Π'_i) spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm $\lambda : X' \rightarrow X$ taki, że dla każdego $i \in I$ diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\lambda} & X \\ & \Pi'_i \searrow & \swarrow \Pi_i \\ & F(i) & \end{array}$$

komutuje

jest nazywany **granicą funktora F** i oznaczamy ją jako $\lim F$.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład(y) 3.3

1. Dla $I = \{0, 1\}$ oraz $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ granicę $\lim F$ nazywamy *produktem* obiektów $F(0)$ i $F(1)$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Pi_1} & F(1) \\
 \downarrow \Pi_0 & \searrow & \uparrow \Pi'_1 \\
 F(0) & \xleftarrow{\Pi'_0} & X'
 \end{array}$$

Definicja 3.3 : granica odwrotna.

Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

Definicja 4.1 : funktory sprzężone.

Para funktorów $L : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ i $R : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem \mathbf{A} jak i \mathbf{B})

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy $L \dashv R$

Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktozem zapominającym*

 jeśli $R : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, wtedy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(*, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$$

grupa ↗
← grupa jako zbiór

$*$ będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A , co oznaczamy F_A .

 $R : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Set}$ z bijekcjami zdefiniowanymi jako

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A .

2. Dla R -modułów A, B, X zachodzi

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

dla $\phi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$ mamy

$$(a \otimes x \mapsto (\phi(a))(x)) \mapsto \phi$$

Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R -modułów w R -moduły: $L = - \otimes X$ oraz $R = \mathrm{Hom}(X, -)$

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym functor sprzężony.

Włożenie kategorii $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$ posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm $\phi : A \rightarrow B$ na element neutralny, więc od razu indukowane mamy przekształcenie $A^{\mathrm{op}} \rightarrow B$, stąd $\star = A^{\mathrm{op}}$.

Włożenie kategorii ciał w dziedzinę wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciała}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K , to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciał ułamków ciała R w ciało K :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & K \ni \frac{\phi(p)}{\phi(q)} \\ & \searrow & \nearrow \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} & \end{array}$$

stąd $\star = R_0$

Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne $\mathbf{CptT}_0 \hookrightarrow \mathbf{Top}$ mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CptT}_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc $\star = \beta X$ czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w $[0, 1]$ i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.

Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgrzyźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

$R(B)$ to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.



Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).

Jeśli $L \dashv R$, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

Dowód

OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt $A \in \mathbf{A}$ i sprawdzić, czy $\Pi'_i : A \rightarrow (R \circ F)(I)$ sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na $R \circ R(\Pi_i)$. Musimy wziąć obiekt $LA \in \mathbf{B}$ i tutaj dostajemy jedyną strzałkę $LA \rightarrow X$, gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami \mathbf{A} a elementami \mathbf{B} .



4.1 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2 : kategoria addytywna.

Kategoria addytywna \mathbf{A} to kategoria



Dla każdej pary obiektów $A, B \in \text{Ob}\mathbf{A}$ na $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$



Istnieje *obiekt zerowy* 0 taki, że $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(0, 0) = 0$ jest grupą trywialną

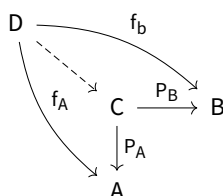


Dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \text{Ob } \mathbf{A}$ istnieje obiekt C (zwykle oznaczany $A \oplus B$), który jest ich *produktem i koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{i_A} \\ \xrightarrow{p_A} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{array} B$$

takie, że $p_A \circ i_A = \text{id}_A$ i $p_A \circ i_B = 0$ (analogicznie gdy przestawimy A i B).
Dodatkowo, $i_A p_A + i_B p_B = \text{id}_C$.

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strzałka $D \rightarrow C$:

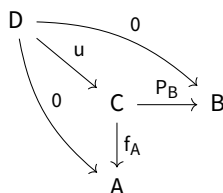


Zauważmy że $i_A f_A + i_B f_B : D \rightarrow C$, wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja $D \rightarrow C$ sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z p_A i p_B :

$$p_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_A i_A}_{\text{id}_A} f_A + \underbrace{p_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$p_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{p_B i_B}_{\text{id}_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram



Zauważmy, że

$$\begin{aligned} u &= \text{id}_C \circ 0 = \\ &= i_A p_A u + i_B p_B u = \\ &= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

Dygresja : parę słów o zerach.

Dla dowolnego obiektu $A \in \text{Ob } \mathbf{A}$ mamy $\text{Hom}(0, A) = 0$ i $\text{Hom}(0, A) = 0$, bo dla $f : A \rightarrow 0$ jest $\text{id}_0 \circ f = f$, czyli $f = 0 \circ f$, a więc

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)


Pre – snop/ $\mathbf{AB}(X)$ i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

Definicja 4.3 : kategoria abelowa.

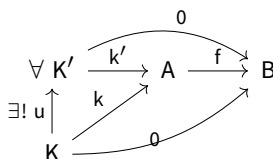
Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i коядро i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.


Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

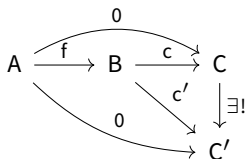
Kilka wyjaśnień:

 Jądro f to ekwalizator $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$. Inaczej, jest to $K \xrightarrow{k} A$ taki, że

1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
2. Zachodzi własność uniwersalna:

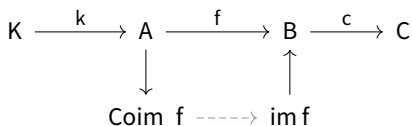


 Kоядро f to koekwalizator $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$ jak w następującym diagramie:



➡ Niech $f : A \rightarrow B$, wówczas

- $\text{im } f = \ker(B \rightarrow \text{Coker } f)$
- $\text{Coim } f = \text{Coker}(\ker f \rightarrow A)$



Definicja 4.4 : mono-, epi-

Morfizm $f : X \rightarrow Y$ jest

➡ **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego $g : Z \rightarrow X$ $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

➡ **epimorfizmem** nazywamy morfizm $f : A \rightarrow B$ taki, że mając $h_1, h_2 : B \rightarrow W$ zachodzi

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając $f : A \rightarrow B$ i $h : B \rightarrow W$ to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to $\ker f = 0$, a jeśli f jest epimorfizmem, to $\text{Coker } f = 0$.

Lemat 4.3.

Jądra są monomorfizmami, a коядра są epimorfizmami.

Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow g & \nearrow 0 & \nearrow 0 & & \\ Z & & & & \end{array}$$

i zauważyć, że jedyność odwzorowania $Z \rightarrow K$ wymaga, aby $g = 0$.

