Algebra homologiczna

Zima 2023-24

Spis rozmaitości treściowalnych

Wykład Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R-modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \to C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy.
Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ R-modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n =]d \circ d : C_n \to C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami** C, a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy *n-cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany *n-granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia.
n-tym modułem homologii kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1
Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ *dla* $n \geq 0$ *i* $C_n = 0$ *dla* $n < 0$. *Dla* $n > 0$ *niech* d_n *posyła* $x \mod 8$ *do* $4x \mod 8$. *Pokaż, że tak zdefiniowane C jest kompleksem łańcuchowym* $\mathbb{Z}/8$*-modułów i policz moduły homologii.*

Rozwiązanko

Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \to C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \mod 8$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \mod 8) = 16x \mod 8 = 8 \cdot (2x) \mod 8 = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.

Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_1]{} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_2]{} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1. W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

Wykład Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = $\{U \subseteq X \;:\; U$ - zbiór otwarty$\}$
- morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funkctor kontrwariantny $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to \mathbf{Set}$ to **presnop** na przestrzeni topologicznej X.

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to C(X)$ definiujemy na obiektach jako

   $$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

   Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

   $$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[d, equal] & F(V) \arrow[l, "\text{obcięcie}"'] \arrow[d, equal] \\ C(U) & C(V) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

   co w widoczny sposób spełnia $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$.

   Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : Presnop, snop.
Presnopem na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i dla wszystkich $s_i \in F(U_i)$ (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych

$i, j \in I$ mamy $s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)$, to istnieje jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że dla wszystkich $i \in I$ $s \restriction U_i = s_i$. Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$(\forall\ U = \bigcup_{i \in I} U_i)(\forall\ s_i \in F(U_i))\ \ \left[(\forall i, j \in I)\ s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[(\exists!\ s \in F(U))(\forall i \in I)\ s \restriction U_i = s_i\right]$$

Przykład(y) 2.2

1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzą kiełki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe źdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria C' kategorii C.
To kategoria spełniająca następujące warunki:

- $\mathrm{Ob}\mathbf{C}' \subseteq \mathrm{Ob}\mathbf{C}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$
- $\mathrm{id}_X^{\mathbf{C}'} = \mathrm{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}'$
- złożenie morfizmów w $\mathbf{C}'$ zachowuje się tak samo jak w $\mathbf{C}$

Mówimy, że podkategoria $\mathbf{C}'$ jest *pełna*, gdy $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem K $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K$. Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych **Ab** jest pełną podkategorią kategorii **Grp**
3. Kategoria gładkich rozmaitości $\mathbf{C}^\infty$ – **rozm** jest podkategorią kateogorii wszystkich przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.
Funkctor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest

- **wierny** gdy $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest bijekcją
- **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ przekształcenie $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.
Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \to G$ w $\mathbf{D}$ taki, że dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \to G(X)$ i dla każdego $\phi : X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"] \\
F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G.

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\mathrm{Id}, ab : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $ab(G) = G/[G, G]$).

   Rozważmymy $f : \mathrm{Id} \to ab$, wtedy $\mathrm{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(G) = G \arrow[r, "f(G)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}(\phi)=\phi"'] & G/[G, G] = ab(G) \arrow[d, "ab(\phi)"] \\
\mathrm{Id}(H) = H \arrow[r, "f(H)"] & H/[H, H] = ab(H)
\end{tikzcd}$$

   Dla każdego $G \in \mathrm{Ob}\mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : \mathrm{Id}(G) \to ab(G)$ jako

$$f(G) : G \to G^{alb} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w G przechodzi przez dowolny homomorfizm $\phi : G \to H$ na komutant w H:

$$(\forall\ g, h \in [G, G])\ \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(h)\phi(g) = \phi(hg)$$

2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów $H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$. Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.

3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\mathrm{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$. Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \Cup & & \Cup \\ v & \longrightarrow & (V^* \ni \phi \mapsto \phi(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f(V)"] \arrow[d, "\phi"'] & V^{**} \arrow[d, "\phi^{**}"] \\ W \arrow[r, "f(W)"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

komutuje, czyli $f(V)\phi^{**} = \phi f(W)$.

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ f(V))(v) &= \phi^{**}(f(V)(v)) = \phi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\ &= \langle \cdot, v \rangle \circ \phi^* = \langle \phi^*(\cdot), v \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \phi, v \rangle = \langle \cdot, \phi(v) \rangle = f(W)(\phi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy $\mathbf{Funct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ oraz $\phi : X \to Y$ rysujemy

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "a(X)"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[r, "b(X)"] \arrow[d, "G(\phi)"] & H(X) \arrow[d, "H(\phi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "a(Y)"'] & G(Y) \arrow[r, "b(Y)"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.
W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

- naturalne przekształcenia $f : F \to G$ dla których istnieje $g : G \to F$ takie, że $f \circ g = id_G$ oraz $g \circ f = id_F$
- przekształcenie $f : F \to G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathbf{D}$.

Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów Id, $**$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ takie, że $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ i $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$

Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ jest równoważna kategorii $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$, której obiektami są $Ob\mathbf{S}_{\mathbf{K}} = \{K^0, K^1, ..., K^n, ...\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

   Włożenie $F : \mathbf{S}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z $\mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć $G : \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}} \to \mathbf{S}_{\mathbf{K}}$ do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ znaleźć bazę $b(V)$, którą poślemy w bazę standardową, tzn dostajemy

$$G(V) : V \to K^{\dim V}.$$

Morfizmami na $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ są macierze, więc wystarczy posłać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

Twierdzenie 2.1.
Funktor $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest równoważnością kategorii $\iff$ jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall\ Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{D})(\exists\ X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C})\ F(X) \underset{\mathbf{D}}{\cong} Y$.

Dowód

$\Leftarrow$

Mając wiedzę o F będziemy konstruować G.

Dla $Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \to F(G(Y))$. Niech $\phi : Y \to Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii $\mathbf{D}$. Chcemy sprawdzić istnienie $G(\phi)$ takie, że $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & Y' \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\
F(G(Y)) \arrow[r, "\iota_{Y'} \circ \phi \circ \iota_Y^{-1}"'] & F(G(Y'))
\end{tikzcd}$$

F jest wierny i pełny, więc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne $\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \phi \iota_Y^{-1})$

Wykład 16.10.2023 : Tymczasowe

Przykład(y) 3.1

1. W kategorii zbiorów element $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{Set}$ możemy widzieć jako elementy zbioru $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$ gdzie 1 jest jednoelementowych zbiorem.

2. Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii $\mathbf{C}$ obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \ (\star)$$

ponieważ nie zawsze istnieje odpowiednik 1, dlatego rozważamy wszystkie obiekty i morfizmy:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\alpha\circ f"] \\ X \arrow[r, squiggly, "h_X(f)"'] & X \end{tikzcd}$$

Tutaj równanie $(\star)$ można również zapisać jako $X(Y)$, czyli rozumieć jako Y-punkty obiektu X.

Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.
Kategorię funktorów $(C^{op}, \mathbf{Set})$, której obiektami są h_X jak w przykładzie wyżej, oznaczamy $\widehat{\mathbf{C}}$.

Funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest **reprezentowalny**, jeśli $F \cong h_X$ dla pewnego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$. Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Dla morfizmu $X \xrightarrow{\phi} X'$ w $\mathbf{C}$ określamy morfizm $h_\phi : h_X \to h_{X'}$ w $\widehat{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_\phi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \alpha & \longrightarrow & \phi \circ \alpha \end{array}$$

Przykład(y) 3.2

1. $\mathcal{P}(X)$ jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo $\mathcal{P}(X) \cong \mathrm{Hom}(X, 2)$

2. $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ *NIE JESTEM PEWNA CO TO OZNACZA? chyba nie homotopie*
3. wiązki $\mathrm{Vect}_n(X) = [X, G^\infty]$????

Przyporządkowania $X \mapsto h_X$ oraz $\phi \mapsto h_\phi$ dają funktor $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$.

> **Lemat 3.1 : Yoneda lemma.**
> Przyporządkowanie $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$ zadaje równoważność kategorii $\mathbf{C}$ z pełną podkategorią kategorii $\widehat{\mathbf{C}}$, której obiektami są funktory reprezentowalne.

Dowód
Musimy pokazać, że

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\[-20pt] \Cup & \Cup \\[-20pt] \phi \arrow[r] & h_\phi \end{tikzcd}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ h_X \arrow[rr, squiggly, "\star\star"] & & h_{X'} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\star"] & X' \end{tikzcd}$$

izomorfizm $\star$ pojawia się bezpośrednio po tym, że $F \to h_X$ i $F \to h_{X'}$ są izmorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm $\star\star$.

Niech teraz $F \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$.

Jeśli $F = h_{\mathbf{C}}$, to mamy

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \ni \mathrm{id}_X \arrow[r, bend left, "h_\phi"] \arrow[r, bend right, "f"'] & h_{X'}(X) \end{tikzcd}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE

3.1 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a $F : I \to \mathbf{C}$ będzie funktorem.

Definicja 3.2 : granica funktora F.
Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów) $\Pi_i : X \to F(i)$ dla $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$, które spełniają

- *[zgodność]* dla dowolnych $i \xrightarrow{\alpha} j$ w I diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Pi_i"'] \arrow[dr, "\Pi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

  komutuje, tzn. $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$.

- *[uniwersalność]* dla każdego układu (X', Π'_i) spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm $\lambda : X' \to X$ taki, że dla każdego $i \in I$ diagram

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\Pi'_i"] & & X \arrow[dl, "\Pi_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

  komutuje

jest nazywany **granicą funktora** F i oznaczamy ją jako lim F.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład(y) 3.3

1. Dla $I = \{0, 1\}$ oraz $F : I \to \mathbf{C}$ granicę $\lim F$ nazywamy *produktem* obiektów $F(0)$ i $F(1)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Pi_1"] \arrow[d, "\Pi_0"] \arrow[dr, dashed] & F(1) \\ F(0) & X' \arrow[l, "\Pi_0'"] \arrow[u, "\Pi_1'"'] \end{tikzcd}$$

Definicja 3.3 : granica odwrotna.

Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

Definicja 4.1 : funktory sprzężone.
Para funktorów $L : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ i $R : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem **A** jak i **B**)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy $L \dashv R$

Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktorem zapominającym*

   - jeśli $R : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, wtedy

     $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$$

     grupa   grupa jako zbiór

     $\star$ będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy F_A.

   - $R : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}$ z bijekcjami zdefiniowanymi jako

     $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

     gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.

2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

   $$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

   dla $\phi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$ mamy

   $$(a \otimes x \mapsto (\phi(a))(x)) \mapsto \phi$$

   Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły: $L = - \otimes X$ oraz $R = \mathrm{Hom}(X, -)$

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym funktor sprzężonym.

- Włożenie kategorii **Ab** $\hookrightarrow$ **Grp** posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm $\phi : A \to B$ na element neutralny, więc od razu indukwoane mamy przekształcenie $A^{op} \to B$, stąd $\star = A^{op}$.

- Włożenie kategorii ciał w dziedziny wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciala}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K, to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciała ułamków ciała R w ciało K:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, hook] & & K \ni \frac{\phi(p)}{\phi(q)} \\
& R_0 \ni \frac{p}{q} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

stąd $\star = R_0$

- Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne $\mathbf{Cpt}T_0 \hookrightarrow$ **Top** mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpf}T_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc $\star = \beta X$ czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w $[0, 1]$ i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.
Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód
Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgryźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

R(B) to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{op} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).
Jeśli $L \dashv R$, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

Dowód
OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt $A \in \mathbf{A}$ i sprawdzić, czy $\Pi_i' : A \to (R \circ F)(I)$ sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na $R \circ R(\Pi_i)$. Musimy wziąć obiekt $LA \in \mathbf{B}$ i tutaj dostajemy jedyną strzałkę $LA \to X$, gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami $\mathbf{A}$ a elementami $\mathbf{B}$.

4.1 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2 : kategoria addytywna.
Kategoria addytywna $\mathbf{A}$ to kategoria

- Dla każdej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ na $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje *obiekt zerowy* 0 taki, że $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(0,0) = 0$ jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ istnieje obiekt C (zwykle oznaczany $A \oplus B$), który jest ich *produktem* i *koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \underset{P_A}{\overset{i_A}{\longleftrightarrow}} C \underset{i_B}{\overset{P_B}{\longleftrightarrow}} B$$

takie, że $P_a \circ i_A = id_A$ i $P_A \circ i_B = 0$ (analogicznie gdy przestawimy A i B). Dodatkowo, $i_A P_A + i_B P_B = id_C$.

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strałka $D \to C$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "f_b"] \arrow[ddr, bend right, "f_A"'] & & \\
& C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "P_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Zauważmy że $i_A f_A + i_B f_B : D \to C$, wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja $D \to C$ sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z P_A i P_B:

$$P_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_A i_A}_{id_A} f_A + \underbrace{P_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$P_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{P_B i_B}_{id_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\
& C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "f_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
u &= id_C \circ 0 = \\
&= i_A P_A u + i_B P_B u = \\
&= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

> **Dygresja : parę słów o zerach.**
> Dla dowolnego obiektu $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ mamy $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$ i $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$, bo dla $f : A \to 0$ jest $id_0 \circ f = f$, czyli $f = 0 \circ f$, a więc
>
> $$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

   Pre – **snop/AB**(X) i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

> **Definicja 4.3 : kategoria abelowa.**
> Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i kojądro i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

Kilka wyjaśnień:

- Jądro f to ekwalizator $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$. Inaczej, jest to $K \xrightarrow{k} A$ taki, że

  1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
  2. Zachodzi własność uniwersalna:

  $$\begin{tikzcd} \forall K' \arrow[r, "k'"] \arrow[rr, bend left, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K \arrow[u, "\exists! u"] \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

- Kojądro f to koekwalizator $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$ jak w następującym diagramie:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"] & C \arrow[d, "\exists!"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

- Niech $f : A \to B$, wówczas
  - $\operatorname{im} f = \ker(B \to \operatorname{Coker} f)$
  - $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\ker f \to A)$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "c"] & C \\ & \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed] & \operatorname{im} f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Definicja 4.4 : mono-, epi-.
Morfizm $f : X \to Y$ jest

- **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 : Z \to X$ zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

  W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego $g : Z \to X$ $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

- **epimorfizmem** nazywamy morfizm $f : A \to B$ taki, że mając $h_1, h_2 : B \to W$ zachodzi

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

  W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając $f : A \to B$ i $h : B \to W$ to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to $\ker f = 0$, a jeśli f jest epimorfizmem, to $\operatorname{Coker} f = 0$.

Lemat 4.3.
Jądra są monomorfizmami, a kojądra są epimorfizmami.

Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
Z \arrow[u, "g"'] \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[ur, "0"] \arrow[urr, "0"] & &
\end{tikzcd}$$

i zauważyć, że jedyność odwzorowania $Z \to K$ wymaga, aby $g = 0$.