Algebra homologiczna

Zima 2023-24

1 Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R-modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \to C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy.
Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ R-modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n =] d \circ d : C_n \to C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami** C, a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy n-*cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany n-*granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia.
n-**tym modułem homologii** kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1
Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ dla $n \geq 0$ i $C_n = 0$ dla $n < 0$. Dla $n > 0$ niech d_n posyła $x \mod 8$ do $4x \mod 8$. Pokaż, że tak zdefiniowane C jest kompleksem łańcuchowym $\mathbb{Z}/8$-modułów i policz moduły homologii.

Rozwiązanko
Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \to C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \mod 8$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \mod 8) = 16x \mod 8 = 8 \cdot (2x) \mod 8 = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.
Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_1]{} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_2]{} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1. W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

2 Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = $\{U \subseteq X \ : \ U$ - zbiór otwarty$\}$
- morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funkctor kontrwariantny $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to \mathbf{Set}$ to **presnop** na przestrzeni topologicznej X.

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to C(X)$ definiujemy na obiektach jako

   $$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

   Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

   $$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & F(V) \arrow[l, "\text{obcięcie}"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ C(U) & C(V) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

   co w widoczny sposób spełnia $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$.

   Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : Presnop, snop.
Presnopem na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ i dla wszystkich $s_i \in F(U_i)$ (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych $i, j \in I$ mamy $s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)$, to istnieje jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że dla wszystkich $i \in I$ $s \restriction U_i = s_i$. Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$(\forall\ U = \bigcup_{i\in I} U_i)(\forall\ s_i \in F(U_i))\ \left[(\forall i, j \in I)\ s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(\exists!\ s \in F(U))(\forall i \in I)\ s \restriction U_i = s_i\right]$$

Przykład(y) 2.2

1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzą kiełki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe źdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria C' kategorii C.
To kategoria spełniająca następujące warunki:

- $\mathrm{Ob}\mathbf{C}' \subseteq \mathrm{Ob}\mathbf{C}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$
- $\mathrm{id}_X^{\mathbf{C}'} = \mathrm{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}'$
- złożenie morfizmów w $\mathbf{C}'$ zachowuje się tak samo jak w $\mathbf{C}$

Mówimy, że podkategoria $\mathbf{C}'$ jest *pełna*, gdy $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria skończonych przestrzeni wektorowych nad ciałem K $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K$. Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych **Ab** jest pełną podkategorią kategorii **Grp**
3. Kategoria gładkich rozmaitości $\mathbf{C}^\infty$ – **rozm** jest podkategorią kateogorii wszystkich przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.
Funkctor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest

- **wierny** gdy $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest bijekcją
- **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ przekształcenie $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.
Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \to G$ w $\mathbf{D}$ taki, że dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \to G(X)$ i dla każdego $\phi : X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G.

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\mathrm{Id}, \mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\mathrm{ab}(G) = G/[G, G]$).

Rozważmymy $f : Id \to ab$, wtedy $Id(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} Id(G) = G \arrow[r, "f(G)"] \arrow[d, "Id(\phi)=\phi"'] & G/[G,G] = ab(G) \arrow[d, "ab(\phi)"] \\ Id(H) = H \arrow[r, "f(H)"] & H/[H,H] = ab(H) \end{tikzcd}$$

Dla każdego $G \in Ob\mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : Id(G) \to ab(G)$ jako

$$f(G) : G \to G^{alb} = G/[G,G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Wystarczy więc sprawdzić, że komutant w G przechodzi przez dowolny homomorfizm $\phi : G \to H$ na komutant w H:

$$(\forall\ g, h \in [G,G])\ \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \phi(h)\phi(g) = \phi(hg)$$

2. Z odrobiną znajomości topologii algebraicznej możemy pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów $H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$. Jednak nie znam się na topologii algebraicznej, więc ja tego nie zrobię.
3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $Id, \star\star : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$. Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \cup & & \cup \\ v & \longrightarrow & (V^* \ni \phi \mapsto \phi(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f(V)"] \arrow[d, "\phi"'] & V^{**} \arrow[d, "\phi^{**}"] \\ W \arrow[r, "f(W)"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

komutuje, czyli $f(V)\phi^{**} = \phi f(W)$.

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ f(V))(v) &= \phi^{**}(f(V)(v)) = \phi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\ &= \langle \cdot, v \rangle \circ \phi^* = \langle \phi^*(\cdot), v \rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \phi, v \rangle = \langle \cdot, \phi(v) \rangle = f(W)(\phi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze są zbiorami w takim przypadku. Taki twór oznaczamy $\mathbf{Funct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in Ob\mathbf{C}$ oraz $\phi : X \to Y$ rysujemy

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "a(X)"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[r, "b(X)"] \arrow[d, "G(\phi)"] & H(X) \arrow[d, "H(\phi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "a(Y)"'] & G(Y) \arrow[r, "b(Y)"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.
W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa, równoważne, sposoby:

- naturalne przekształcenia $f : F \to G$ dla których istnieje $g : G \to F$ takie, że $f \circ g = id_G$ oraz $g \circ f = id_F$
- przekształcenie $f : F \to G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathbf{D}$.

Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów Id, $**$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ takie, że $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ i $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$

Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ jest równoważna kategorii $\mathbf{S_K}$, której obiektami są $Ob\mathbf{S_K} = \{K^0, K^1, ..., K^n, ...\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

   Włożenie $F : \mathbf{S_K} \to \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ jest oczywisty, gdyż każdy obiekt z $\mathbf{S_K}$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Aby znaleźć $G : \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}} \to \mathbf{S_K}$ do niego odwrotne, musimy najpierw w każdej przestrzeni $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ znaleźć bazę $b(V)$, którą poślemy w bazę standardową, tzn dostajemy
   $$G(V) : V \to K^{\dim V}.$$

   Morfizmami na $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{fin}}$ są macierze, więc wystarczy posłać je na ich odpowiedniki po zamianie bazy.

Twierdzenie 2.1.
Funktor $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest równoważnością kategorii $\iff$ jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall\ Y \in Ob\mathbf{D})(\exists\ X \in Ob\mathbf{C})\ F(X) \underset{\mathbf{D}}{\cong} Y$.

Dowód
$\Leftarrow$

Mając wiedzę o F będziemy konstruować G.

Dla $Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \to F(G(Y))$. Niech $\phi : Y \to Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii $\mathbf{D}$. Chcemy sprawdzić istnienie $G(\phi)$ takie, że $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & Y' \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\
F(G(Y)) \arrow[r, "\iota_{Y'} \circ \phi \circ \iota_Y^{-1}"'] & F(G(Y'))
\end{tikzcd}$$

F jest wierny i pełny, więc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest bijekcją, a więc istnieje jedyne $\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \phi \iota_Y^{-1})$