Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. Opisz grupę automorfizmów triangulacji $\mathbb{R}P^2$ o najmniejszej liczbie wierzchołków.

Wiemy, że jeśli X ma triangulację o V wierzchołkach, E krawędziach i T trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T$$

a ponieważ $2E = 3T$, to możemy podstawić

$$\chi(X) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym: $E \leq \binom{V}{2}$ czyli

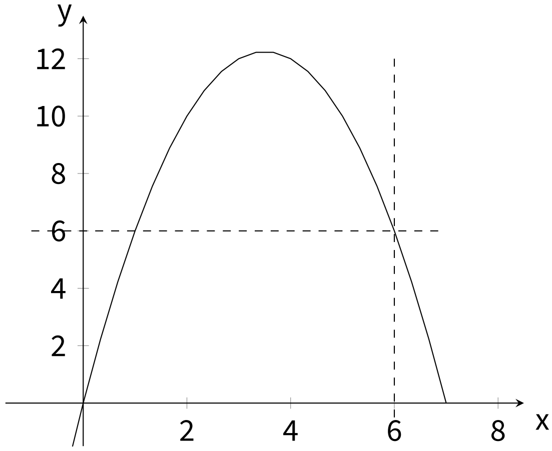
$$V = \chi(X) + \frac{1}{3}E \leq \chi(X) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla $\mathbb{R}P^2$ dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

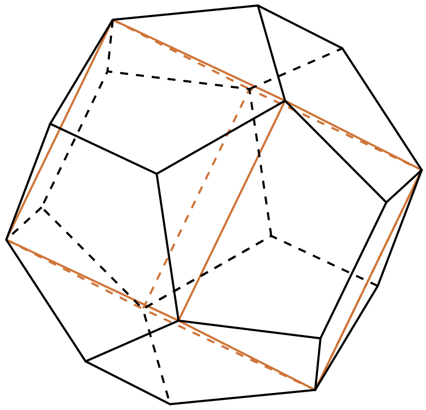
$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7-V)$$

Powyższa nierówność dla $V = 6$ staje się równością. Tak samo dla $V = 1$ mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na $\mathbb{R}P^2$. Pozostałe liczby naturalne z przedziału $(0, 7)$ nie mają szansy spełniać powyższe równanie



Z listy 1 wiemy, że 6 wierzchołkowa triangulacja $\mathbb{R}P^2$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulacje opisujemy.

Działając podobnie jak przy próbie skonstruowania triangulacji na butelce Klein, zauważmy, że $\mathbb{R}P^2$ to S^2 wydzielona przez działanie $x \sim -x$. Żeby dostać 6 wierzchołkową triangulację na $\mathbb{R}P^2$ możemy więc zacząć od znalezienia 12 wierzchołkowej triangulacji na S^2, którą będzie np. dwunastościan:



Zaczniemy od uzasadnienia, że Aut(20-ścian) = $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ (bo Wikipedia nie jest tutaj uważanym źródłem informacji ☹).

Oznaczmy 20-ścian przez D. Wiemy, że jeśli v jest dowolnym wierzchołkiem D, to $|Orb(v) = 20|$, bo wierzchołek może przejść na dowolny inny. Pozostaje znaleźć $|Stab(v)|$. W Stab(v) mamy permutacje wierzchołków przyległych do v, czyli permutacje zbioru o 3 elementach. W takim razie $|Stab(v)| = |S_3| = 6$. Daje to $|Aut(D)| = |Orb(v)||Stab(v)| = 20 \cdot 6 = 120$. Jak na razie zgadza się.

Zauważmy, że automorfizmem D są zwykłe obroty i rotacje, ale też symetria przez punkt w samym środku (odwzorowanie antypodalne, co jest przyjemne). Ten drugi automorfizm powinien odpowiadać za czynnik $\mathbb{Z}_2$ - to chyba on mówi czy sąsiedzi wierzchołka są ponumerowani zgodnie z ruchem wskazówek zegara czy też przeciwnie. W takim razie wystarczy pokazać, że symetrie i obroty D tworzą grupę A_5.

Sztuczką na pokazanie, że symetrie D to A_5 jest zauważenie 5 sześcianów w środku D. Sześciany możemy wyciągnąć biorąc dowolną krawędź i łącząc wszystkich sąsiadów końców tej krawędzi. Powtarzając tę samą akcję z krawędzią po przeciwnej stronie D dostajemy drugą ścianę i wystarczy je teraz połączyć. Jeden sześcian możemy otrzymać na 6 sposobów, a w D jest 30 krawędzi. Mamy więc 5 grup krawędzi, które dają ten sam sześcian.

Ponumerujmy sześciany od 1 do 5 - możemy teraz je permutować. Najbardziej leniwym sposobem na zauważenie, że grupa uzyskana przez porządne permutacje tych sześcianów to A_5 jest podzielenie $|Aut(D)| = 120$ przez 2, które oznacza, że wyrzucamy symetrię względem punktu w środku D (element rzędu 2). Zostawia to nam 60 automorfizmów, które będą permutować te sześciany i które powinniśmy móc włożyć w S_5. Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) podgrupa S_5 o 60 elementach to A_5.