Rachunek prawdopodobieństwa 2R 2023
lista 3: Warunkowa wartość oczekiwana i wyższe momenty

1. Niech Y i Z będą dowolnymi zmiennymi losowymi. Pokaż, że jeżeli zmienna Y jest $\sigma(Z)$ mierzalna, to istnieje borelowska funkcja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $Y = h(Z)$.

2. Pokaż, że dla zmiennych X i Y takich, że $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ i σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ zachodzi
$$|\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]}.$$

3. Niech $\kappa_{X,\mathcal{G}}$ będzie regularnym rozkładem warunkowym X pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Pokaż, że dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $\mathbb{E}[|f(X)] < \infty$ zachodzi
$$\mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, \mathrm{d}x).$$

4. (Nierówność Jensena) Dana jest funkcja wypukła $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $\mathcal{G}$ pod-σ-ciało $\mathcal{F}$. Załóżmy, że zmienne losowe X i $\phi(X)$ są całkowalne. Pokaż, że
$$\phi\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right) \leq \mathbb{E}\left[\phi(X)|\mathcal{G}\right].$$

5. Załóżmy, że wektor losowy (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny.
   (a) Znajdź $a \in \mathbb{R}$ takie, że zmienne $X - aY$ i Y są niezależne.
   (b) Pokaż, że
   $$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mu_X + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}\left(Y(\omega) - \mu_Y\right),$$
   gdzie $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ oraz $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$.
   (c) Dla $y \in \mathbb{R}$ znajdź rozkład X pod warunkiem $Y = y$.

6. Załóżmy, że wektor losowy $(X, Y_1, \ldots, Y_n)$ ma $n+1$ wymiarowy rozkład normalny. Oznaczmy przez $C_{X,\mathbf{Y}}$ wektor kowariancji X i $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$:
$$C_{X,\mathbf{Y}} = (Cov(X, Y_1), Cov(X, Y_2), \ldots, Cov(X, Y_n))^T.$$
   Oznaczmy przez $C_{\mathbf{Y}}$ macierz kowariancji wektora $\mathbf{Y}$. Niech $\mathcal{G} = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
   (a) Pokaż, że
   $$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mu_x + \langle C_{XY}, C_Y^{-1}(\mathbf{Y}(\omega) - m_{\mathbf{Y}})\rangle,$$
   gdzie $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ a $m_{\mathbf{Y}}$ jest (pionowym) wektorem średnich $\mathbf{Y}$. Tutaj $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$. Wskazówka: Znajdź wektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ taki, że zmienna losowa $X - \langle \mathbf{z}, \mathbf{Y}\rangle$ jest niezależna od wektora $\mathbf{Y}$.

(b) Dla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ znajdź rozkład X pod warunkiem $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$.

7. Załóżmy, że sygnał X ma jednowymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

   (a) Załóżmy, że obserwator odczytuje wartość sygnału z dokładnością do błędu W o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ niezależnym od X, tj. obserwuje wartość $Y = X + W$. Jaka jest najlepsza estymacja (w sensie średniokwadratowym) X jeżeli obserwator odczytał wartość $Y = y$?

   (b) Obserwator, chcąc znaleźć lepszy estymator dla wartości X, wykonuje dwa pomiary $Y_1 = X + W_1$ i $Y_2 = X + W_2$ dla niezależnych W_1, W_2 o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Jaka powinna być estymacja X jeżeli obserwator odnotował wartości $Y_1 = y_1$ i $Y_2 = y_2$?

   (c) Porównaj wariancję warunkową X pod warunkiem $\{Y = y\}$ (pkt (a)) oraz $\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\}$ (pkt (b))