

Rachunek prawdopodobieństwa 2R

Kycia

Spis różnorodności treściowych

06.10.23 : Warunkowa wartość oczekiwana	3
1.1. Prawdopodobieństwo warunkowe	3
1.2. Konstrukcja warunkowej wartości oczekiwanej	3
1.3. Prawdopodobieństwo warunkowe	6
09.10.23 : Własności WWO	8
2.1. Poprawność: istnienie i jedyność	8
2.2. Własności wwo	10
2.3. Zadania	16
23.10.23 : Interpretacje geometryczne WWO	20
3.1. Regularne rozkłady warunkowe	23
3.2. Zadania	26
30.10.23 : Martyngały	29
4.1. Transformata martyngałowa	32
4.2. Zadania	33
	35

Wykład 06.10.23 : Warunkowa wartość oczekiwana

1.1 Prawdopodobieństwo warunkowe

Tak jak zwykle do tej pory, pracować będziemy na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Przypomnijmy definicję **prawdopodobieństwa warunkowego** z Rachunku Prawdopodobieństwa 1 (i z liceum). Dla zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mathbb{P}[A] \in (0, 1)$ definiujemy prawdopodobieństwo warunkowe jako

$$\mathbb{P}[B | A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}.$$

Wartość ta informuje nas o zajściu B wtedy, gdy jesteśmy pewni, że A zaszło. Ale co, jeśli nasza wiedza dotycząca A jest mniej pewna? To znaczy, *co jeśli* $\mathbb{P}[A] = 0$? Dość naturalne wydaje się rozważenie zdarzenia przeciwnego i zsumowania obu prawdopodobieństw:

$$\mathbb{1}_A \mathbb{P}[B | A] + \mathbb{1}_{A^c} \mathbb{P}[B | A^c].$$

Zauważmy od razu, że wyrażenie $\mathbb{1}_A \mathbb{P}[B | A]$ jest zmienną losową.

W przypadku, gdy mamy dwa zbiory, $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, i chcemy zbadać $\mathbb{P}[B | A_1 \cap A_2]$ możemy powyższe rozumowanie rozszerzyć na wszystkie możliwe kombinacje A_1, A_2 i ich dopełnień:

$$\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} \mathbb{P}[B | A_1 \cap A_2] + \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2^c} \mathbb{P}[B | A_1 \cap A_2^c] + \mathbb{1}_{A_1^c \cap A_2} \mathbb{P}[B | A_1^c \cap A_2] + \mathbb{1}_{A_1^c \cap A_2^c} \mathbb{P}[B | A_1^c \cap A_2^c].$$

Działanie jak wyżej daje pełną informację o każdym zdarzeniu z ciała generowanego przez zdarzenia A_1 i A_2 . Nazywamy je **rozbiciem** względem σ -ciała generowanego przez A_1 i A_2 .

Analogicznie możemy zdefiniować $\mathbb{E}[X | A]$ dla całkującej zmiennej losowej X (tzn. $\mathbb{E}[|X|] < \infty$):

$$\mathbb{E}[X | A] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}[d\omega | A] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A],$$

gdzie całka wyżej tłumaczy się na całkę po X względem miary $\mathbb{P}[B | A]$.

Uzasadnimy, dlaczego wzór wyżej jest zasadną definicją prawdopodobieństwa warunkowego przy ograniczonej wiedzy o zdarzeniu A.

1.2 Konstrukcja warunkowej wartości oczekiwanej

Zanim zdefiniujemy **warunkową wartość oczekiwaną [wwo]** zmiennej losowej X, zaczniemy od przyjrzenia się bliżej motywacji i konstrukcji stojącej za tym pojęciem.

Niech Z będzie całkującą zmienną losową przyjmującą przeliczalnie wiele wartości. Zdefiniujmy funkcję

$$h(z) = \begin{cases} \mathbb{E}[X | Z = z] & \mathbb{P}[Z = z] > 0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

oraz zmienną losową $Y = h(Z)$. Weźmy dowolny $C \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ i zbadajmy $\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{\{Z \in C\}}]$. Zaczniemy od skorzystania z faktu, że Z przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, więc możemy zapisać sumę po

nich wszystkich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{Z \in C\}}] &= \sum_{z \in C} h(z) \mathbb{P}[Z = z] = \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{z \in C} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}] \frac{1}{\mathbb{P}[Z = z]} \mathbb{P}[Z = z] = \\ &= \sum_{z \in C} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{z \in C} X\mathbb{1}_{\{Z=z\}}\right] = \\ &= \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Z \in C\}}]\end{aligned}$$

Równość $*$ wynika ze sposobu w jaki zdefiniowaliśmy $\mathbb{E}[X | A]$ w poprzednim podrozdziale.

Zauważmy, że dowolne zdarzenie $F \in \sigma(Z)$ jest postaci $F = \{z \in C\}$ dla pewnego $C \in \text{Bor}(\mathbb{R})$. Wyprowadziliśmy więc równość:

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_F] \quad F \in \sigma(Z).$$

Pozostaje zapytać, co z tej zależności wynika?

Dla $F = \Omega$ dostajemy

$$\mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X].$$

Dygresja.

W tym miejscu kuszące byłoby rozpisanie $Y = h(Z)$ wprost z definicji, tzn. $h(Z) = \mathbb{E}[X | Z = Z]$, ale jest to całkowitą brednią. W definicji funkcji h podanej na samym początku przykładu z jest teoretycznym punkcikiem, natomiast przy definiowaniu $Y = h(Z)$ ów Z jest już obserwowaną przez nas, konkretną zmienną losową. W takim razie, bardziej poprawny byłby zapis

$$h(Z(\omega)) = \mathbb{E}[X | \{\omega' : Z(\omega') = Z(\omega)\}].$$

Przykład(y) 1.1

1. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy w sposób jednostajny liczbę i oznaczamy ją jako N . W drugim losowaniu, również w sposób jednostajny, wybieramy liczbę ze zbioru $\{1, \dots, N\}$ i nazywamy ją M . Chcemy znaleźć średnią wartość liczby M . Oczywiście, nie jest trudno zrobić to metodami poznanymi na poprzednich przygodach probabilistycznych, jednak w tym przypadku użyjemy konstrukcji wyżej.

Funkcja h będzie wyglądać następująco:

$$h(n) = \mathbb{E}[M | N = n] = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

czyli $h(N) = \frac{N+1}{2}$.

Stosując notację jak wyżej, mamy

$$\begin{aligned}Z &= N \\ X &= M\end{aligned}$$

czyli podstawiając do wzoru:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[h(N)] = \mathbb{E}\left[\frac{N+1}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[N] + 1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq i \leq 10} \frac{i}{10} + 1\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + 1\right) = \frac{13}{4}\end{aligned}$$

Rozbicie jak wyżej można w elegancki sposób zamienić w bardziej abstrakcyjną definicję warunkowej wartości oczekiwanej.

Definicja 1.1.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem, a X całkowalną zmienną losową.

Zmienną losową Y nazywamy **warunkową wartością oczekiwaną** [wwo] X pod warunkiem \mathcal{G} , jeśli następujące warunki są spełnione:

(W1) Y jest \mathcal{G} -mierzalne

(W2) $(\forall G \in \mathcal{G}) \mathbb{E}[X1_G] = \mathbb{E}[Y1_G]$

Nasuwać się teraz pytania o poprawność Y zdefiniowanego jak wyżej. Czy zawsze istnieje i czy jest on jedyny?

Przykład(y) 1.2

1. Niech $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, gdzie Z jest zmienną losową przyjmującą przeliczalnie wiele wartości. Wówczas $Y = h(Z)$ dla $h(z) = \mathbb{E}[X | Z = z]$ jest wwo X względem \mathcal{G} .

Twierdzenie 1.1 : poprawność wwo.

Dla σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i całkowalnej zmiennej losowej X **istnieje jedyna zmienna losowa** Y będąca wwo X względem \mathcal{G} . Będziemy ją oznaczać

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = Y.$$

Jeśli Y, Y' są wwo X względem \mathcal{G} , to $Y = Y'$ prawie wszędzie.

Dowód

Dowód na następnym wykładzie.



Uwaga 1.2.

O wwo X pod warunkiem \mathcal{G} należy myśleć jako o przybliżeniu X na podstawie informacji zawartych w \mathcal{G} (więcej na wykładzie 3).

Przykład(y) 1.3

1. Jeśli X i \mathcal{G} są niezależne, to znaczy dla każdego $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ i dla każdego $G \in \mathcal{G}$ zachodzi

$$\mathbb{P}[X \in B, G] = \mathbb{P}[X \in B] \mathbb{P}[G],$$

to wtedy $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] = Y$.

Warunek (W1) jest oczywiście spełniony, bo Y jest funkcją stałą, więc jego przeciwobraz to całość lub \emptyset (czyli jest \mathcal{G} -mierzalny). Warunek (W2) sprawdzamy dla dowolnego $G \in \mathcal{G}$:

$$\mathbb{E}[X 1_G] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[1_G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] 1_G] = \mathbb{E}[Y 1_G].$$

2. Rozważmy pokrycie Ω rozłącznymi zbiorami $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $A_i \in \mathcal{F}$ dla każdego i . Niech $\mathcal{G} = \sigma(A_i : i \in \mathbb{N})$ będzie σ -ciałem rozpinanym przez to pokrycie. Wówczas

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \sum_{i \in \mathbb{N}} 1_{A_i} \mathbb{E}[X | A_i]$$

Spełnianie pierwszego warunku jest oczywiste, bo mamy doczynienia z funkcją prostą. Warunek (W2) wystarczy sprawdzić dla atomów, czyli $G = A_j$, bo wszystkie zmienne losowe \mathcal{G} -mieralne są stałe na A_j .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left[\sum 1_{A_i} \mathbb{E}[X | A_i]\right] 1_{A_j}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X | A_j] 1_{A_j}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[1_{A_j} \frac{\mathbb{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbb{P}[A_j]}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[1_{A_j}\right] \frac{\mathbb{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbb{P}[A_j]} = \mathbb{E}[X 1_{A_j}], \end{aligned}$$

gdyż $\mathbb{E}[1_{A_j}] = \mathbb{P}[A_j]$.

3. Jeśli w przykładzie wyżej weźmiemy $A_1 = A$, $A_2 = A^c$ i $A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$ oraz $\mathcal{G} = \sigma(A)$, to dostajemy to samo co na samym początku tego wykładu:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = 1_A \mathbb{E}[X | A] + 1_{A^c} \mathbb{E}[X | A^c].$$

1.3 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2 : prawdopodobieństwo warunkowe.

Dla σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ definiujemy **prawdopodobieństwo warunkowe** pod warunkiem \mathcal{G} jako

$$\mathbb{P}[A | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}]$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}[A | \mathcal{G}]$ jest zmienną losową taką, że:

☕ $\mathbb{P}[A | \mathcal{G}]$ jest \mathcal{G} -mierzalna (ze względu na wwo w definicji)

$$\mathbb{E} [\mathbb{P} [A | \mathcal{G}] \mathbb{1}_G] = \mathbb{E} [\mathbb{1}_A \mathbb{1}_G] = \mathbb{P} [A \cap G]$$

Przykład(y) 1.4

1. Niech E_1, E_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem $\exp(1)$. Chcemy się zastanowić jak wygląda prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P} [E_1 + E_2 > t | \sigma(E_1)]$$

dla $t > 0$. Ponieważ liczymy to prawdopodobieństwo względem $\sigma(E_1)$, to tak naprawdę wszystkie informacje o E_1 mamy w ręku, gdyż tę zmienną obserwujemy. Czyli E_1 możemy w takim przypadku potraktować jako zwykłą stałą i zgadnąć, że

$$\mathbb{P} [E_1 + E_2 > t | \sigma(E_1)] = e^{-(t-E_1)}.$$

Dla pewności, przeliczymy cały ten przykład wprost z definicji, żeby przekonać się że strzał był poprawny.

Niech $G \in \sigma(E_1)$, wtedy zgodnie z wcześniejszą obserwacją istnieje pewne $C \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że G jest postaci $G = \{E_1 \in C\}$. Policzmy $\mathbb{E} [\mathbb{P} [\{E_1 + E_2 > t\} | \sigma(E_1)]]$ gdyż jak wyżej zauważyliśmy, $\mathbb{P} [A | \mathcal{G}]$ jest zmienną losową. Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbb{P} [E_1 + E_2 > t | \sigma(E_1)] \mathbb{1}_G] &\stackrel{*}{=} \mathbb{P} [\{E_1 + E_2 > t\} \cap G] = \\ &= \mathbb{P} [\{E_1 + E_2 > t\} \cap \{E_1 \in C\}] = \\ &= \iint_{\substack{C \times \mathbb{R}_+ \\ x+y>t}} e^{-x} e^{-y} dx dy = \\ &= \int_C e^{-x} \underbrace{\left[\int_{x+y>t} e^{-y} dy \right]}_{**} dx = \\ &= \int_C e^{-x} e^{-(t-x)+} dx = \mathbb{E} \left[e^{-(t-E_1)+} \mathbb{1}_{\{E_1 \in C\}} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-(t-E_1)+} \mathbb{1}_G \right] \end{aligned}$$

Równość $*$ wynika z uwagi pod definicją prawdopodobieństwa warunkowego. Całka $**$ jest równa 1 gdy $x > t$ (gdyż wtedy dla każdego y mamy $x + y > t$), natomiast dla $x \leq t$ wynosi ona $e^{-(t-x)}$.

Wykład 09.10.23 : Własności WWO

Na tym wykładzie zajmiemy się dowodzeniem własności wwo, w tym pokażemy jej istnienie i jedyność.

2.1 Poprawność: istnienie i jedyność

Lemat 2.1 : WWO jest całkowalna.

To znaczy, że mając całkowalną zmienną losową X oraz σ -ciąto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, to zachodzi $\mathbb{E} [|\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]|] < \infty$.

Dowód

Rozważmy zbiór

$$A = \{\omega : \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] (\omega) > 0\} = \{\omega : \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \in (0, \infty)\} = [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]]^{-1}((0, \infty))$$

jako przeciwobraz zbioru $(0, \infty) \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ przez funkcję \mathcal{G} -mierzalną $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ wiemy, że $A \in \mathcal{G}$. Ponieważ $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ jest wwo X pod warunkiem \mathcal{G} , to musi warunek (W2):

$$0 \leq \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] = \mathbb{E} [X 1_A] \leq \mathbb{E} [|X| 1_A] < \infty$$

bo X jest całkowalna.

Analogicznie postępujemy dla zbioru A^c :

$$0 \leq \mathbb{E} [-\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{A^c}] = \mathbb{E} [-X 1_{A^c}] \leq \mathbb{E} [|X| 1_{A^c}] < \infty.$$

Zauważmy, że

$$|\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]| = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{A^c}$$

Dodając obie te nierówności (i korzystając z liniowości wartości oczekiwanej) uzyskujemy

$$0 \leq \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{A^c}] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{A^c}] = \mathbb{E} [|\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]|] < \infty$$



Lemat 2.2 : jedyność p.w..

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciątem. Jeśli Y i Y' są obie wersjami $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$, to $Y = Y'$ p.w..

Dowód

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i rozważmy zdarzenie

$$A_\varepsilon = \{Y - Y' > \varepsilon\} \in \mathcal{G}$$

które jest \mathcal{G} -mierzalne, bo Y i Y' takie są.

$$\begin{aligned}
\varepsilon \mathbb{P}[A_\varepsilon] + \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] &= \mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] + \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] = \\
&= \mathbb{E}[(\varepsilon + Y') \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] \leq \\
&\stackrel{*}{\leq} \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] \stackrel{(W2)}{=} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] = \\
&= \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_{A_\varepsilon}]
\end{aligned}$$

gdzie $*$ wynika z tego, że na zbiorze A_ε $Y > Y' + \varepsilon$.

Dostajemy więc, że

$$\varepsilon \mathbb{P}[A_\varepsilon] + \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_{A_\varepsilon}]$$

co po przeniesieniu \mathbb{E} na jedną stronę daje

$$\varepsilon \mathbb{P}[A_\varepsilon] \leq 0$$

a ponieważ $\varepsilon > 0$, to musi być $\mathbb{P}[A_\varepsilon] = 0$.

Wówczas

$$\mathbb{P}[Y > Y'] = \underbrace{\mathbb{P}\left[\left(\exists n\right) Y \geq Y' + \frac{1}{n}\right]}_{\mathbb{P}\left[A_{\frac{1}{n}}\right]} = \mathbb{P}\left[\bigcup A_{\frac{1}{n}}\right] = \lim \mathbb{P}\left[A_{\frac{1}{n}}\right] = 0$$

ponieważ $A_{\frac{1}{n}} \subseteq A_{\frac{1}{n+1}}$.

Zamieniając miejscami Y i Y' w dowodzie dostaniemy $\mathbb{P}[Y' > Y] = 0$, czyli obie możliwości są miary zero.



Twierdzenie 2.3 : o istnieniu WWO.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem, a X jest całkowalną zmienną losową. Istnieje zmienna losowa Y spełniająca oba postulaty wwo X pod warunkiem \mathcal{G} .

Jest to Twierdzenie 1.1 z poprzedniego wykładu.

Zanim jednak przejdziemy do dowodu 2.3, przypomnijmy *twierdzenie Radona-Nikodyma* z teorii miary:

Dygresja : twierdzenie Radona-Nikodyma.

Niech μ i ν będą σ -miarami na przestrzeni (Ω, \mathcal{G}) takimi, że ν jest *absolutnie ciągła* względem μ [$\nu \ll \mu$], tzn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Wówczas istnieje \mathcal{G} -mierzalna funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\nu(A) = \int_A f(x) \mu(dx)$$

Funkcję f jak wyżej często oznaczamy $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ i nazywamy *pochodną Radona-Nikodyma*.

Dowód

Wracając do dowodu twierdzenia 2.3. Najpierw pokażemy prostszy przykład, gdy $X \geq 0$, a potem uogólnimy go do dowolnego X .

Założmy, że $X \geq 0$ p.w. Wtedy możemy rozważyć miary $\mu = \mathbb{P} \upharpoonright \mathcal{G}$ oraz $\nu(A) = \mathbb{E}[X1_A]$. Od razu widać, że w takim ułożeniu $\nu \ll \mu$, więc na mocy twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje f \mathcal{G} -mierzalna taka, że

$$\mathbb{E}[f1_A] = \int_A f(\omega) \mu(d\omega) = \nu(A) = \mathbb{E}[X1_A].$$

Funkcja f spełnia (W1) z definicji wwo, bo jest \mathcal{G} -mierzalna, a (W2) jest potwierdzone przez rachunek wyżej. Czyli f jest wwo X pod warunkiem \mathcal{G} .

Niech teraz X będzie dowolną zmienną losową. Możemy ją rozbić jako

$$X = X^+ - X^-,$$

gdzie $X^+ = \max(0, X) \geq 0$ oraz $X^- = -\min(0, X) \geq 0$. Do obu tych zmiennych możemy zastosować pierwszą część dowodu, by dostać zmienne $\mathbb{E}[X^+ | \mathcal{G}]$ oraz $\mathbb{E}[X^- | \mathcal{G}]$. Wystarczy zauważyć, że dzięki liniowości \mathbb{E} możemy w prosty sposób pokazać

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^+ | \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^- | \mathcal{G}]$$



2.2 Własności wwo

Twierdzenie 2.4 : o arytmetyce wwo.

Niech $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ będą σ -ciałami, a X, X_1, X_2 całkowalnymi zmiennymi losowymi

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
2. Jeśli $X \geq 0$, to również $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \geq 0$
3. $\mathbb{E}[aX_1 + bX_2 | \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X_1 | \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[X_2 | \mathcal{G}]$
4. $|\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| | \mathcal{G}]$
5. Jeśli $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, to wówczas

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$$

To znaczy, że mając informacje o X w dwóch zawartych w sobie ciałach, to mniejsze zawsze wygrywa.

6. Jeśli Y jest \mathcal{G} -mierzalna i XY jest całkowalna, to $\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$, czyli Y możemy traktować jako stałą.

Dowód

1. Wystarczy wstawić $G = \Omega$ w warunek (W2):

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{\Omega}] \stackrel{(W2)}{=} \mathbb{E} [X 1_{\Omega}] = \mathbb{E} [X]$$

2. Wynika z dowodu twierdzenia o istnieniu, bo $\frac{d\nu}{d\mu} = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$. Gdyby $A = \{\omega : \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] < 0\}$, to wówczas

$$\mathbb{E} [X 1_A] = \nu(A) = \int_A \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] (\omega) \mu(d\omega) = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] < 0$$

ale przecież $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E} [X 1_A] \geq 0$, więc $A = \emptyset$.

3. Można to zrobić na dwa sposoby: licząc wszystko pokolei, albo można sprawdzić, czy $Y = a\mathbb{E} [X_1 | \mathcal{G}] + b\mathbb{E} [X_2 | \mathcal{G}]$ spełnia warunki wwo tej samej zmiennej co $\mathbb{E} [aX_1 + bX_2 | \mathcal{G}]$. Wówczas obie te zmienne są równe prawie wszędzie.

Warunek \mathcal{G} -mierzalności dla Y jest spełniony, bo Y jest kombinacją liniową dwóch funkcji \mathcal{G} -mierzalnych. Wystarczy więc sprawdzić warunek (W2). W tym celu ustalmy $A \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y 1_A] &\stackrel{*}{=} a\mathbb{E} [\mathbb{E} [X_1 | \mathcal{G}] 1_A] + b\mathbb{E} [\mathbb{E} [X_2 | \mathcal{G}] 1_A] = \\ &= a\mathbb{E} [X_1 1_A] + b\mathbb{E} [X_2 1_A] = \\ &= \mathbb{E} [(aX_1 + bX_2) 1_A] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [aX_1 + bX_2 | \mathcal{G}] 1_A] \end{aligned}$$

4. Wiemy, że $-|X| \leq X \leq |X|$. Korzystając z punktu 2 dostajemy

$$0 \leq X + |X| \Rightarrow 0 \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}] + \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \Rightarrow -\mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$$

$$0 \leq |X| - X \Rightarrow 0 \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}] - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \Rightarrow \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}]$$

Po złożeniu tych dwóch nierówności:

$$-\mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}]$$

wiemy, że $-\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$, więc musi być

$$|\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}].$$

5. Zaczniemy od sprawdzenia, że $\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1]$. Wybierzmy $A \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$:

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1] 1_A] = \mathbb{E} [X 1_A] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_2] 1_A]$$

co potwierdza warunek (W2). \mathcal{G}_1 -mierzalność $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_2]$ jest oczywista, gdyż $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_2]$ jest \mathcal{G}_2 -mierzalne, a po obcięciu do \mathcal{G}_1 dostajemy funkcję \mathcal{G}_1 -mierzalną.

Pozostaje nam sprawdzić czym jest $\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2]$. Roboczo nazwiemy $Y = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1]$. Jest to funkcja \mathcal{G}_1 -mierzalna, ale dzięki $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ mamy też \mathcal{G}_2 -mierzalność. W takim razie (tak jak w jednym z przykładów z pierwszego wykładu) $\mathbb{E} [Y | \mathcal{G}_2] = Y$. Pisząc bez używania litery Y dostajemy

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}_1]$$

6. Ćwiczenie, a poniżej moja próba.

Jeśli Y jest \mathcal{G} -mierzalne, to $Y\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ też takie jest jako iloczyn dwóch funkcji \mathcal{G} -mierzalnych. Pozostaje sprawdzić warunek (W2).

Zaczniemy od $Y = \sum a_i 1_{A_i}$ dla $A_i \in \mathcal{G}$, czyli od funkcji prostej. Wybierając $A \in \mathcal{G}$ możemy ograniczyć się do zbiorów A_i , gdyż są one rozłączne i na dowolnym innym zbiorze $Y = 0$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbb{E} [XY | \mathcal{G}] 1_{A_i}] &\stackrel{(W2)}{=} \mathbb{E} [XY 1_{A_i}] = \mathbb{E} [a_i X 1_{A_i}] = a_i \mathbb{E} [X 1_{A_i}] = \\ &= a_i \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_{A_i}] = \mathbb{E} [(a_i \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]) 1_{A_i}] = \\ &= \mathbb{E} [(Y \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]) 1_{A_i}] \end{aligned}$$

Czyli $\mathbb{E} [XY | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ dla przypadku gdy Y jest funkcją prostą.

Jeśli teraz Y jest dowolną nieujemną funkcją mierzalną, to istnieje ciąg funkcji prostych

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \quad \lim s_i = Y$$

Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbb{E} [XY] 1_A] &= \mathbb{E} [XY 1_A] = \mathbb{E} [X \lim s_i 1_A] \stackrel{*}{=} \lim \mathbb{E} [X s_i 1_A] = \\ &\stackrel{**}{=} \lim \mathbb{E} [s_i \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] = \mathbb{E} [\lim s_i \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] = \\ &= \mathbb{E} [Y \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] 1_A] \end{aligned}$$

* można zrobić na mocy twierdzenia o monotoniczności ciągu s_i dla zwykłej \mathbb{E} , natomiast ** stosuje poprzedni przypadek Y .

Pozostaje przypadek, gdy Y jest dowolną \mathcal{G} -mierzalną zmienną losową. Wówczas możemy rozbić $Y = Y^+ - Y^-$ i skorzystać z liniowości wwo:

$$\mathbb{E} [XY | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [XY^+ | \mathcal{G}] - \mathbb{E} [XY^- | \mathcal{G}] = Y^+ \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] - Y^- \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$$



Twierdzenie 2.5 : o zbieżności i ciągłości.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem, a X, X_1, X_2, \dots będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych. Wówczas

1. Jeśli $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ oraz $X_n \nearrow X$, to $\mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \nearrow \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ p.w. (twierdzenie o zbieżności monotonicznej)
2. Jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E} [\liminf_n X_n | \mathcal{G}] \leq \liminf_n \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$ (lemat Fatou).
3. Jeśli $|X_n| \leq Y$ oraz Y jest całkowalny i $X_n \rightarrow X$ p.w., to $\mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \rightarrow \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ (twierdzenie o zbieżności ograniczonej)

Dowód

1. Zauważamy, że ciąg $\mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$ jest niemalejący i ograniczony przez $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ (na mocy punktu 2 z poprzedniego twierdzenia).

Niech $Y = \lim \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$. Wystarczy, że pokażemy $Y = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ p.w., czyli sprawdzimy warunki (W1) i (W2). Oczywiście, warunek (W1) wynika z faktu, że granica ciągu funkcji \mathcal{G} -mierzalnych jest nadal \mathcal{G} -mierzalna. Dla sprawdzenia warunku (W2) wybierzmy $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y 1_A] &= \mathbb{E} [\lim \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] 1_A] \stackrel{*}{=} \lim \mathbb{E} [\mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] 1_A] = \\ &= \lim \mathbb{E} [X_n 1_A] = \mathbb{E} [\lim X_n 1_A] = \mathbb{E} [X 1_A] \end{aligned}$$

czyli $Y = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ p.w.

2. Zaczniemy od dwóch obserwacji:

☕ Dla ciągu $\{a_n\}$ $\liminf a_n$ to najmniejszy z jego punktów skupienia, równoważnie:

$$\liminf_n a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} a_n$$

✿ Dla dowolnej przeliczalnej rodziny zmiennych losowych $\{Z_n\}_{n \in T}$ i dla dowolnego $t \in T$ mamy

$$\begin{aligned} \inf_{s \in T} Z_s &\leq Z_t \\ \mathbb{E} \left[\inf_{s \in T} Z_s \right] &\leq \mathbb{E} [Z_t] \\ \mathbb{E} \left[\inf_{s \in T} Z_s \right] &\leq \inf_{t \in T} \mathbb{E} [Z_t] \end{aligned}$$

(co jest tak naprawdę wersją lematu Fatou dla \mathbb{E} z RP1R).

Stosując obserwację \rightsquigarrow w przejściach $*$, obserwację \otimes w przejściu $***$ oraz pkt 1. ($\inf_{n>k} X_n \leq \inf_{n>k+1} X_n$) w $***$, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\liminf_n X_n | \mathcal{G} \right] &\stackrel{*}{=} \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n>k} X_n | \mathcal{G} \right] \stackrel{***}{=} \lim_k \mathbb{E} \left[\inf_{n>k} X_n | \mathcal{G} \right] \leq \\ &\stackrel{**}{\leq} \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n>k} \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \stackrel{*}{=} \liminf_n \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \end{aligned}$$

3. Rozważmy zmienne $X'_n = Y + X_n$. Ponieważ $|X_n| \leq Y$, to $Y + X_n \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y + \liminf X_n | \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [\liminf (X_n + Y) | \mathcal{G}] \stackrel{3.}{\leq} \liminf \mathbb{E} [Y + X_n | \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{E} [Y] + \liminf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \end{aligned}$$

To daje nam, że $\mathbb{E} [\liminf X_n | \mathcal{G}] \leq \liminf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$.

Postępując analogicznie dla $X''_n = Y - X_n$ (które dalej jest ≥ 0) dostaniemy $\mathbb{E} [\limsup X_n | \mathcal{G}] \geq \limsup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y - \limsup X_n | \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [\limsup (Y - X_n) | \mathcal{G}] = \\ &= -\mathbb{E} [\liminf (X_n - Y) | \mathcal{G}] \stackrel{3.}{\geq} -\liminf \mathbb{E} [X_n - Y | \mathcal{G}] = \\ &= \limsup \mathbb{E} [Y - X_n | \mathcal{G}] \end{aligned}$$

Ale wiemy, że $\liminf X_n = X$ oraz $\limsup X_n = X$, czyli

$$\liminf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E} [\liminf X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [\limsup X_n | \mathcal{G}] \geq \limsup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$$

ale przecież $\liminf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \leq \limsup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$, czyli musi być

$$\liminf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] = \limsup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$$

i ponieważ $\liminf = \limsup = \lim$ to mamy

$$\lim \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}].$$



Twierdzenie 2.6.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem. Załóżmy, że

- ☕ X jest \mathcal{G} -mierzalna
- ☕ Y jest niezależna od \mathcal{G}
- ☕ funkcja $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna taka, że

$$\mathbb{E} [|\psi(X, Y)|] < \infty.$$

Wówczas

$$\mathbb{E} [\psi(X, Y) | \mathcal{G}] = \Psi(X),$$

gdzie funkcja $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako $\Psi(x) = \mathbb{E} [\psi(x, Y)]$.

Dowód

Tak jak w dowodzie ostatniego punktu twierdzenia 2.4 zaczniemy od funkcji φ prostych i stopniowo przejdziemy do dowolnych funkcji mierzalnych.

Zaczniemy od funkcji φ postaci $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y)$ dla pewnych $A, B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli X jest \mathcal{G} -mierzalna, to $\mathbb{1}_A(X)$ też takie jest. Analogicznie, jeśli Y jest niezależna od \mathcal{G} , to $\mathbb{1}_B(Y)$ też jest niezależne i wtedy $\mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y) | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y)]$. Korzystając z 2.4 w przejściu \star , dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varphi(X, Y) | \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [\mathbb{1}_A(X) \mathbb{1}_B(Y) | \mathcal{G}] = \\ &\stackrel{\star}{=} \mathbb{1}_A(X) \mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{1}_A(X) \mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y)] \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \mathbb{E} [\varphi(x, Y)] = \mathbb{E} [\mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(Y)] = \\ &= \mathbb{1}_A(x) \mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y)] \end{aligned}$$

czyli $\Psi(X) = \mathbb{1}_A(X) \mathbb{E} [\mathbb{1}_B(Y)]$ tak jak chcieliśmy.

Chcemy przejść teraz do funkcji postaci $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_C(x, y)$ dla $C \in \text{Bor}(\mathbb{R}^2)$. Skorzystamy przy tym z lematu o $\pi - \lambda$ układach:

Dygresja : lemat o $\pi - \lambda$ układach.

Niech P będzie π -układem (tzn. $A, B \in P \Rightarrow A \cap B \in P$) oraz niech $P \subseteq L$ będzie λ -układem ($\Omega \in L, A \subseteq B \in L \Rightarrow B \setminus A \in L$ i $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in L \Rightarrow \bigcup A_i \in L$).

Wówczas L jest σ -ciałem i w szczególności zawiera σ -ciąto generowane przez π -układ P .

Rozważmy zbiór

$$D = \{C \in \text{Bor } \mathbb{R}^2 : \mathbb{E} [1_C(X, Y) | \mathcal{G}] = \Psi_C(X)\}.$$

Oczywiście, zbiór wszystkich "kwadratów" $A \times B$ dla $A, B \subseteq \mathbb{R}$ jest π -układem zbiorów z \mathbb{R}^2 i zgodnie z tym co już pokazaliśmy, zawiera się on w D . Chcemy więc pokazać, że D jest λ -układem.

1. $\Omega \in D$

Jest to prawdą, bo w tym przypadku $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, czyli podlega pod przypadek udowodniony wyżej.

2. $A \subseteq B \in D \Rightarrow B \setminus A \in D$

Niech $A \subseteq B \in D$, wówczas

$$1_{B \setminus A}(X, Y) = 1_B(X, Y) - 1_A(X, Y)$$

czyli wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [1_{B \setminus A}(X, Y) | \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [1_B(X, Y) - 1_A(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{E} [1_B(X, Y) | \mathcal{G}] - \mathbb{E} [1_A(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \Psi_B(X) - \Psi_A(X) = \mathbb{E} [1_B(X, Y)] - \mathbb{E} [1_A(X, Y)] = \\ &= \mathbb{E} [1_{B \setminus A}(X, Y)] = \Psi_{B \setminus A}(X) \end{aligned}$$

i tym samym dostajemy $B \setminus A \in D$

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup A_i \in D$

Wystarczy zauważyć, że przy wstępującym ciągu zbiorów A_i mamy $1_{A_n} \geq 1_{A_{n-1}}$ oraz $1_{\bigcup A_i} = \lim 1_{A_i}$, a następnie zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\bigcup 1_{A_i}(X, Y) | \mathcal{G} \right] &= \mathbb{E} [\lim 1_{A_i}(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \lim \mathbb{E} [1_{A_i}(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \lim \Psi_{A_i}(X) = \lim \mathbb{E} [1_{A_i}(X, Y)] = \\ &= \mathbb{E} [\lim 1_{A_i}(X, Y)] = \\ &= \mathbb{E} [1_{\bigcup A_i}(X, Y)] \end{aligned}$$

W ten sposób pokazaliśmy już, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji prostych $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Przejdziemy teraz do przypadku, gdy φ jest nieujemną funkcją mierzalną, czyli istnieje ciąg funkcji prostych $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq \varphi$ taki, że $\varphi = \lim s_i$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varphi(X, Y) | \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [\lim s_i(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &\stackrel{\heartsuit}{=} \lim \mathbb{E} [s_i(X, Y) | \mathcal{G}] = \\ &= \lim \mathbb{E} [s_i(X, Y)] = \\ &= \mathbb{E} [\lim s_i(X, Y)] = \mathbb{E} [\varphi(X, Y)] \end{aligned}$$

W przejściu ♡ skorzystaliśmy ponownie z twierdzenia o zbieżności monotonicznej.

Pozostaje jedynie przypadek, gdy φ jest dowolną funkcją mierzalną. Wtedy możemy zapisać $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ dla φ^+ oraz φ^- nieujemnych. Wtedy, korzystając z wcześniej już pokazanych form funkcji mierzalnych dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\varphi(X, Y) \mid \mathcal{G}] &= \mathbb{E} [\varphi^+(X, Y) - \varphi^-(X, Y) \mid \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{E} [\varphi^+(X, Y) \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E} [\varphi^-(X, Y) \mid \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{E} [\varphi^+(X, Y)] - \mathbb{E} [\varphi^-(X, Y)] = \\ &= \mathbb{E} [\varphi^+(X, Y) - \varphi^-(X, Y)] = \mathbb{E} [\varphi(X, Y)]\end{aligned}$$



2.3 Zadania

Zadanie 1.

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem. Rozważmy \mathcal{G} -mierzalną zmienną losową X oraz niezależną od \mathcal{G} zmienną losową Y . Załóżmy, że $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją mierzalną, że $\mathbb{E} [|\psi(X, Y)|] < \infty$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} [\psi(X, Y) \mid \mathcal{G}] = \Psi(X) \quad \Psi(x) = \mathbb{E} [\psi(x, Y)]$$

Rozwiązanie.

Patrz dowód twierdzenia 2.6.

Zadanie 2.

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowych o rozkładzie jednostajnym na kwadracie o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Oblicz $\mathbb{P} \left[X > \frac{1}{2} \mid \mathcal{Y} \right]$.

Rozwiązanie.

Zacniemy od znalezienia gęstości rozkładu Y .

Oczywiście, gęstość rozkładu wektora $(X, Y) = \frac{1}{2}$ gdyż kwadrat ma pole 2. W takim razie, gęstość zmiennej Y to

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \begin{cases} \int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2} dx & y \geq 0 \\ \int_{-y-1}^{1+y} \frac{1}{2} dx & y < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1-y & y \geq 0 \\ 1+y & y < 0 \end{cases} = 1 - |y|\end{aligned}$$

Skorzystamy z zadania 4 z listy 1, gdzie pokazaliśmy, że

$$\mathbb{E} [h(X) \mid \mathcal{Y}] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Y}(x, Y) dx$$

gdzie

$$f_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} & f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

W tym zadaniu chcemy wyliczyć

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[2X > 1 \mid Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{2X > 1\}} \mid Y] = \int_{1/2}^1 \mathbb{1}_{\square}(x, Y) \frac{1}{2 - 2|Y|} dx = \\ &= \int_{1/2}^{1-|Y|} \frac{\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(Y)}{2 - 2|Y|} dx = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(Y) \frac{1/2 - |Y|}{2 - 2|Y|} \end{aligned}$$

Zadanie 3.

Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie z wartością oczekiwaną m . Niech N będzie dyskretną zmienną losową o wartościach w \mathbb{N} niezależną od ciągu $\{X_n\}$ z wartością oczekiwaną M . Zdefiniujmy $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Znajdź

$$\mathbb{E}[S_N \mid N] \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[S_N]$$

Rozwiązanie.

Możemy od razu zacząć od tezy, że

$$\mathbb{E}[S_N \mid N] = N \cdot m$$

ale spróbujemy rozwiązać to w bardziej metodyczny sposób.

Niech $G \in \sigma(N)$, czyli $G = \{N \in C\}$ dla $C \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N \mid N] \mathbb{1}_G] &= \mathbb{E}[S_N \mathbb{1}_G] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{N \in C\}}\right] = \\ &= \sum_{n \in C} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] \mathbb{P}[N = n] = \\ &= \sum_{n \in C} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[N = n] \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \\ &= m \sum_{n \in C} n \cdot \mathbb{P}[N = n] = \\ &= m \cdot \mathbb{E}[N \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[N \cdot m \mathbb{1}_G] \end{aligned}$$

Czyli warunek (W2) jest spełniony przez Nm , a warunek $\sigma(N)$ -mierzalności jest spełniony przez fakt, że N jest $\sigma(N)$ -mierzalne.

Korzystając z 1. własności wwo (2.4) wiemy, że

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N \mid N]] = \mathbb{E}[N \cdot m] = m \cdot M$$

Zadanie 4.

Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład $\text{Exp}(1)$.

- (a) Oblicz $\mathbb{E}[X + Y | X]$
- (b) Oblicz $\mathbb{E}[X | X + Y]$

Rozwiązanie.

- (a) Zaczniemy od szybkiego przypomnienia, że jeśli X i Y są niezależne, to Y jest niezależne od $\sigma(X)$. Dla $A, B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ i $G = \{X \in B\} \in \sigma(X)$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y \in A | G] &= \mathbb{P}[Y \in A | X \in B] = \\ &= \mathbb{P}[Y \in A] \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[Y \in A] \mathbb{P}[G]\end{aligned}$$

Czyli wracając do treści zadania

$$\mathbb{E}[X + Y | X] = \mathbb{E}[X | X] + \mathbb{E}[Y | X] = X + \mathbb{E}[Y] = X + 1$$

gdyż X jest mierzalne względem $\sigma(X)$, więc $\mathbb{E}[X | X] = X$, a z drugiej strony ponieważ Y jest niezależne od $\sigma(X)$, to $\mathbb{E}[Y | X] = \mathbb{E}[Y]$.

- (b) Zaczniemy od obserwacji, że

$$\mathbb{E}[X | X + Y] = \mathbb{E}[Y | X + Y]$$

ponieważ

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | X + Y] \mathbb{1}_{\{X+Y \in C\}}] &= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X+Y \in C\}}] = \\ &= \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{\{X+Y \in C\}}] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | X + Y] \mathbb{1}_{\{X+Y \in C\}}]\end{aligned}$$

W takim razie

$$\mathbb{E}[X | X + Y] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X | X + Y] + \mathbb{E}[Y | X + Y]) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X + Y | X + Y] = \frac{1}{2}(X + Y)$$

Zadanie 5.

Pokaż, że jeśli X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że X oraz XY są całkowalne oraz Y jest zmienną losową mierzalną względem \mathcal{G} , to

$$\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$$

Rozwiązanie.

Patrz dowód twierdzenia 2.4.

Zadanie 6.

Niech X będzie całkowną zmienną losową. Niech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ będzie π -układem generującym

σ -ciąto $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Rozwiązanie.

Zadanie sprowadza się do skorzystania z lematu o $\pi - \lambda$ układach i sprawdzeniu czy zbiór

$$D = \{A : \mathbb{E}[X1_A] = \mathbb{E}[Z1_A]\}$$

zawierający π -układ \mathcal{C} jest λ -układem. Wówczas D samo w sobie będzie σ -układem, w szczególności zawierającym ciąto \mathcal{G} .

1. $\Omega \in D$ bo aby \mathcal{C} generowało σ -ciąto, to musi zawierać Ω .
2. $A \subseteq B \in D \Rightarrow B \setminus A \in D$

Niech $A \subseteq B \in D$, wówczas $1_{B \setminus A} = 1_B - 1_A$. Daje to:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X1_{B \setminus A}] &= \mathbb{E}[X(1_B - 1_A)] = \\ &= \mathbb{E}[X1_B] - \mathbb{E}[X1_A] = \\ &= \mathbb{E}[Z1_B] - \mathbb{E}[Z1_A] = \\ &= \mathbb{E}[Z(1_B - 1_A)] = \\ &= \mathbb{E}[Z1_{B \setminus A}]\end{aligned}$$

czyli z $B \setminus A$ zaspokaja warunek należenia do D .

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in D \Rightarrow \bigcup A_i \in D$

Dla pokazania tego warunku będziemy korzystać z twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $X1_{\bigcup A_i} \geq X1_{A_n}$ oraz $X1_{A_1} \leq X1_{A_2} \leq \dots$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X1_{\bigcup A_i}] &= \mathbb{E}[X \lim 1_{A_i}] = \\ &= \lim \mathbb{E}[X1_{A_i}] = \\ &= \lim \mathbb{E}[Z1_{A_i}] = \\ &+ \mathbb{E}[Z \lim 1_{A_i}] = \mathbb{E}[Z1_{\bigcup A_i}]\end{aligned}$$

Czyli tak długo jak Z jest \mathcal{G} -mierzalne, to jest ono wwo X pod warunkiem że \mathcal{G} .

Zadanie 7.

Niech $\mathcal{G}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ będą niezależnymi σ -ciętami. Niech X będzie całkowaną zmienną losową.

- (a) Załóżmy, że X jest niezależna od σ -ciała \mathcal{D} . Czy prawdą jest, że

$$\mathbb{E}[X | \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{D})] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]? \quad (*)$$

- (b) Pokaż, że jeżeli \mathcal{D} jest niezależne od $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{G})$, to $(*)$ zachodzi.

Wykład 23.10.23 : Interpretacje geometryczne WWO

Rozważmy zmienną losową X taką, że $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Interesuje nas zagadnienie regresji, mianowicie obserwując inną zmienną losową Z chcemy móc X aproksymować. Przez przybliżanie X rozumiemy przybliżanie średniokwadratowe.

Szukamy więc funkcji mierzalnej $h_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, żeby

$$\mathbb{E}[(X - h_0(Z))^2] = \inf_{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X - h(Z))^2]$$

Fakt 3.1.

Dla każdej zmiennej losowej Y mierzalnej względem $\sigma(Z)$ (co w skrócie będziemy notować $Y \in \sigma(Z)$) istnieje h takie, że $Y = h(Z)$.

Dowód

Zadanie, moja próba poniżej.

Zaczynamy od Y będącego funkcją prostą i przechodzimy do coraz to bardziej skomplikowanych postaci funkcji mierzalnych.

Jeżeli $Y = \mathbb{1}_A$, to ponieważ Y jest $\sigma(Z)$ -mierzalne, mamy $A \in \sigma(Z)$. To znaczy, że istnieje $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ taki, że $Z(A) = B$, czyli $A = Z^{-1}[B]$ i wówczas

$$Y = \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{Z^{-1}[B]} = \mathbb{1}_B(Z)$$

Zrobimy tutaj jeszcze krok $Y = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Dla każdego i wiemy, że $\mathbb{1}_{A_i} = h_i(Z)$, gdyż są to funkcje $\sigma(Z)$ -mierzalne. W takim razie:

$$Y = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum a_i \cdot h_i(Z) = \left[\sum a_i \cdot h_i \right] (Z)$$

a więc szukane $h = \sum a_i \cdot h_i$.

Teraz założmy, że istnieje ciąg funkcji prostych $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq Y$ taki, że $Y = \lim s_i$. Wówczas pokazaliśmy już, że każda funkcja $s_i = h_i(Z)$ dla pewnego borelowskiego $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ciąg s_i jest zbieżny, więc również ciąg h_i musi zbiegać do pewnego h . Wówczas dla dowolnego $\omega \in \Omega$

$$Y(\omega) = \lim s_i(\omega) = \lim h_i(Z(\omega)) = h(Z(\omega))$$

czyli $Y = h(Z)$ dla $h = \lim h_i$.

Dla formalności należy rozważyć jeszcze $Y = Y^+ - Y^-$, gdzie Y^+ oraz Y^- podlegają pod poprzedni podpunkt.



$$\mathbb{E}[(X - h(Z))^2] = \inf_{Y \in \sigma(Z)} \mathbb{E}[(X - Y)^2]$$

mając pewną wiedzę o przestrzeniach Hilberta jest do tego dość naturalne podejście: rzut ortogonalny.

Dla σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będziemy rozważać

$$L^2(\mathcal{G}) = \{Y \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[Y^2] < \infty\}$$

wówczas $L^2(\mathcal{G})$ jest przestrzenią Euklidesową z iloczynem skalarnym $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$, który z kolei zadaje normę

$$\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Używając tego języka będziemy wiedzieli jak szukać Y z początku wykładu, ale najpierw fakt pomocniczy do twierdzenia które nadejdzie lada moment.

Fakt 3.2 : warunkowa wersja nierówności Cauchy'ego-Schwartz.

Dla zmiennych X, Y takich, że $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ i σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ zachodzi

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}]^{\frac{1}{2}}$$

Dowód

Zadanie, tutaj moje podejście.

Zauważmy na początku, że

$$XY = \underbrace{\frac{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/4}}{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/4}} X}_{X_n} \cdot \underbrace{\frac{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/4}}{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/4}} Y}_{Y_n}$$

przy czym korzystamy z $\frac{1}{n}$, żeby na pewno nie dzielić przez 0 gdy np. $\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] = 0$.

Dalej zauważmy, że ponieważ $(X_n - Y_n)^2 \geq 0$, to również

$$0 \leq \mathbb{E}[(X_n - Y_n)^2 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2 - 2X_n Y_n \mid \mathcal{G}]$$

czyli korzystając z liniowości i przenosząc $\mathbb{E}[X_n Y_n \mid \mathcal{G}]$ na lewą stronę nierówności dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] &= \mathbb{E}[X_n Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_n^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[Y_n^2 \mid \mathcal{G}] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\frac{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}} X^2 \mid \mathcal{G}\right] + \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\frac{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}} Y^2 \mid \mathcal{G}\right] = (\heartsuit) \end{aligned}$$

a ponieważ $\frac{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}$ jest \mathcal{G} -mieralne, to możemy wyciągnąć je przed nawias:

$$\begin{aligned} (\heartsuit) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}} \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}}{(\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] + \frac{1}{n})^{1/2}} \mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}] \rightarrow \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{G}])^{1/2} (\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}])^{1/2} \end{aligned}$$



Z tego nierówności w fakcie 3.2 wynika, że dla $Y = 1$ mamy

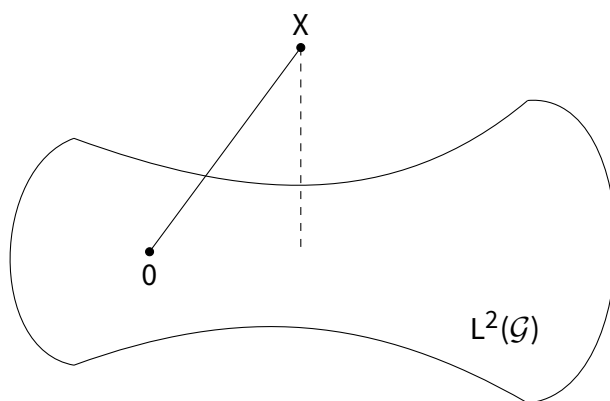
$$\mathbb{E} [|X| | \mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E} [X^2 | \mathcal{G}] \Rightarrow \mathbb{E} [\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]^2] < \infty$$

Twierdzenie 3.3 : wwo jest rzutem ortogonalnym na $L^2(\mathcal{G})$.

Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E} [X^2] < \infty$, a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ jest σ -ciałem. Wówczas

$$\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \in L^2(\mathcal{G})$$

jest *rzutem ortogonalnym* X na $L^2(\mathcal{G})$.



Dokładniej, $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}]$ daje minimum zbioru $\{\mathbb{E} [(X - Y)^2] : Y \in L^2(\mathcal{G})\}$. Z faktu 3.1 dla $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, $\mathbb{E} [X | \mathcal{G}] = h_0(Z)$ dla pewnego h_0 .

Dowód

Dla $Y \in L^2(\mathcal{G})$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X - Y)^2] &= \mathbb{E} \left[((X - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]) - \overbrace{(Y - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}])}^{=Y'})^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}])^2] - 2\mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}])Y'] + \mathbb{E} [(Y')^2] = \\ &\stackrel{*}{=} \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X | \mathcal{G}])^2] + \mathbb{E} [(Y')^2] \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y'X | \mathcal{G}] &= Y' \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \\ \mathbb{E} [\mathbb{E} [Y'X | \mathcal{G}]] &= \mathbb{E} [Y'X] = \mathbb{E} [Y' \mathbb{E} [X | \mathcal{G}]] \end{aligned}$$



Przykład(y) 3.1

1. Niewiele mający z tym co przed chwilą było. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \text{Bor}([0, 1])$ i $\mathbb{P} = \lambda$. Chcemy rozważyć $t \in (0, 1)$ oraz $\mathcal{G} = \sigma(\text{Bor}([0, t]))$.

Dla całkowanej zmiennej losowej X szukamy $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$.

Dowolny $G \in \mathcal{G}$ ma postać $G = A \cup B$, gdzie $A \in \text{Bor}([0, t])$ i $B \in \{(t, 1], \emptyset\}$. W takim razie, jeśli $Y \in \mathcal{G}$, to Y jest stała na $(t, 1]$. Czyli żeby $Y = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ to zapewne będzie postaci:

$$Y(\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_{[0,t]}(\omega) + c\mathbb{1}_{(t,1]}(\omega)$$

gdzie c jest pewną stałą.

Musimy sprawdzić, czy (i kiedy) $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_G]$. Widać od razu, że dla $G = A \cup B$ jak wyżej, mamy

$$X\mathbb{1}_A = Y\mathbb{1}_A,$$

czyli $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]$. Zostaje nam uzgodnić część B kiedy jest on niepusty:

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \int_t^1 X(s)ds$$

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_B] = c(1 - t),$$

czyli c musi być średnią X na przedziale $(t, 1]$:

$$c = \frac{1}{1-t} \int_t^1 X(s)ds.$$

3.1 Regularne rozkłady warunkowe

Dla zmiennej losowej Y i całkowanej zmiennej losowej X napis

$$\mathbb{E}[X | Y] := \mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$$

będzie wwo X względem σ -ciała generowanego przez Y .

Zadanie dla dociekliwych:

Jeśli $\mathbb{P}[Y = y] > 0$ dla $y \in \mathbb{R}$, to biorąc $\omega \in \{Y = y\}$ dostajemy:

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X | Y = y] = \frac{1}{\mathbb{P}[Y = y]} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Y=y\}}]$$

Definicja 3.1 : wwo X pod warunkiem $\{Y = y\}$.

Po pierwsze zauważamy, że istnieje funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\mathbb{E}[X | Y] = h(Y)$. (\star)

Niech X i Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi, przy czym od X wymagamy całkowości. Dla $y \in \mathbb{R}$ warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem $\{Y = y\}$ definiujemy przez

$$\mathbb{E}[X | Y = y] = h(y)$$

gdzie h spełnia warunek $(*)$.

Podobnie definiujemy prawdopodobieństwo zbioru A pod warunkiem $\{Y = y\}$:

$$\mathbb{P}[A \mid Y = y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid Y = y]$$

Przykład(y) 3.2

1. Jeżeli X i Z są niezależne, to chcemy zapytać o

$$\mathbb{P}[X + Z \in B \mid X = x] \stackrel{?}{=} \mathbb{P}[Z + x \in B] = \mu_Z(B - x)$$

Wystawiając tę wartość w terminach całego X :

$$\mathbb{P}[X + Z \in B \mid X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X+Z \in B} \mid X] \stackrel{*}{=} \mathbb{E}[\varphi(X, Z) \mid X] = \Phi(X)$$

w $*$ definiujemy: $\varphi(x, z) = \mathbb{1}_{x+Z \in B}$. Dla ustalonego x mamy więc:

$$h(x) = \mathbb{E}[\varphi(x, Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{x+Z \in B}] = \mathbb{P}[Z + x \in B]$$

2. Niech wektor losowy (X, Y) ma gęstość łączną $f(x, y)$. Wówczas

$$\mathbb{P}[X \in B \mid Y = y] = \int_B f_{X|Y}(x, y) dx,$$

gdzie

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{\int f(t, y) dt}.$$

3. Rozważmy $\mathbb{P}[E_1 \in \bullet \mid E_1 + E_2 = y]$ dla E_1, E_2 niezależnych o rozkładzie $\text{Exp}(1)$.

Przyłożymy do tego przypadku wzór z przykładu 2. Wektor losowy $(E_1, E_1 + E_2)$ ma rozkład losowy o łącznej gęstości $f(x, y) = e^{-x}e^{-(y-x)}\mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}$.

$$\int f(s, y) ds = \int_0^y e^{-y} ds = y,$$

czyli

$$f_{E_1|E_1+E_2}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}$$

co daje rozkład jednostajny:

$$\mathbb{P}[E_1 \in \bullet \mid E_1 + E_2 = y] = U[0, y](\bullet)$$

Można zadać sobie pytanie, czy

$$\mathbb{P}[A \mid Y = y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid Y = y]$$

zawsze zadaje miarę probabilistyczną? Okazuje się, że tak faktycznie jest.

Definicja 3.2 : regularny rozkład warunkowy.

Niech X będzie zmienną losową, a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem. Funkcja

$$\kappa_{X,\mathcal{G}} : \Omega \times \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

nazywa się **regularnym rozkładem warunkowym** [rrw] X pod warunkiem \mathcal{G} , jeżeli

(R1) Dla każdego $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ zmienna losowa $\kappa_{X,\mathcal{G}}(\bullet, B)$ jest \mathcal{G} -mierzalna

(R2) Dla każdej $\omega \in \Omega$ $\kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, \bullet)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej.

(R3) Dla każdego $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ i \mathbb{P} -p.w. $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}[X \in B \mid \mathcal{G}](\omega) = \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, B)$$

Twierdzenie 3.4 : rrw istnieje.

Dla każdego X i dla każdego \mathcal{G} istnieje rrw X pod warunkiem \mathcal{G}

Dowód

W notatkach



Fakt 3.5.

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i zmiennej losowej X takiej, że $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ mamy

$$\mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)$$

Pisząc to mówię "weź $f(x)$ i weź miarę κ w punkcie ω i scałkuj κ ".

Dowód

Ćwiczenia.

Będziemy przechodzić od najprostszych możliwych funkcji f do coraz to bardziej skomplikowanych konstrukcji.

W pierwszym kroku niech $f(x) = 1_B(x)$ dla $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}](\omega) &= \mathbb{E}[1_B(X) \mid \mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[1_{\{X \in B\}} \mid \mathcal{G}](\omega) = \\ &= \mathbb{P}[X \in B \mid \mathcal{G}](\omega) = \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, B) = \\ &= \int_B \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} 1_B(x) \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) \end{aligned}$$

Dalej, niech $f(x) = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}](\omega) &= \mathbb{E}\left[\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(X) | \mathcal{G}\right](\omega) = \sum a_i \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X) | \mathcal{G}](\omega) = \\ &= \sum a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_i}(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Teraz niech $f(x) = \lim s_i(x)$ dla $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$ dla prostych funkcji s_i jak z poprzednich podpunktów. Zauważmy, że mamy tutaj predyspozycje do skorzystania z twierdzenia o zbieżności monotonicznej.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}](\omega) &= \mathbb{E}[\lim s_i(X) | \mathcal{G}](\omega) = \lim \mathbb{E}[s_i(X) | \mathcal{G}](\omega) = \\ &= \lim \int_{\mathbb{R}} s_i(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} \lim s_i(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$

Ostatni krok w dowodzie to $f = f^+ - f^-$ i korzysta się tutaj już tylko z poprzednich podpunktów oraz liniowości wwo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}](\omega) &= \mathbb{E}[f^+(X) - f^-(X) | \mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[f^+(X) | \mathcal{G}](\omega) - \mathbb{E}[f^-(X) | \mathcal{G}](\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f^+(x) - f^-(x)) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \kappa_{X, \mathcal{G}}(\omega, dx)\end{aligned}$$



Jeżeli $G = \sigma(Z)$, to pojęcie rrw troszkę się upraszcza (z naciskiem na trochę):

Definicja 3.3.

Dla zmiennych losowych X, Y funkcję $\kappa_{X, Y} : \mathbb{R} \times \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ nazywamy rrw X pod warunkiem Y , jeżeli:

- (P1) Dla każdego $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ funkcja $\kappa_{X, Y}(\bullet, B)$ jest borelowska
- (P2) Dla każdego $y \in \mathbb{R}$, $\kappa_{X, Y}(y, \bullet)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej.
- (P3) $\mathbb{P}[X \in B | Y = y] = \kappa_{X, Y}(y, B)$

3.2 Zadania

Zadanie 1.

Niech Y i Z będą dowolnymi zmiennymi losowymi. Pokaż, że jeżeli zmienna Y jest $\sigma(Z)$ -mierzalna,

to istnieje borelowska funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $Y = h(Z)$.

Rozwiązanie.

Treść dowodu faktu 3.1.

Zadanie 2.

Pokaż, że dla zmiennych X i Y takich, że $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ i σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ zachodzi

$$|\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}]| \leq [\mathbb{E}[X^2 | \mathcal{G}]]^{1/2} [\mathbb{E}[Y^2 | \mathcal{G}]]^{1/2}$$

Rozwiązanie.

Patrz dowód twierdzenia 3.2.

Zadanie 3.

Niech $\kappa_{X,\mathcal{G}}$ będzie regularnym rozkładem warunkowym X pod warunkiem σ -ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Pokaż, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx)$$

Rozwiązanie.

Kolejne rozwiązanie jako dowód faktu 3.5.

Zadanie 4.

(Nierówność Jensena) Dana jest funkcja wypukła $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz \mathcal{G} pod- σ -ciało \mathcal{F} . Załóżmy, że zmienne losowe X i $\varphi(X)$ są całkowalne. Pokaż, że

$$\varphi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) | \mathcal{G}]$$

Rozwiązanie.

Korzystając z faktu 3.5 możemy powiedzieć, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X) | \mathcal{G}](\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) \geq \\ &\geq \varphi \left[\int_{\mathbb{R}} \kappa_{X,\mathcal{G}}(\omega, dx) \right] = \varphi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \end{aligned}$$

nierówność wynika z twierdzenia Jensena dla całek (które mówi, że $\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(\int f d\mu)$) a ostatnie przejście to ponowne zastosowanie faktu 3.5, tym razem dla $\mathbb{E}[\text{id}(X) | \mathcal{G}]$.

Zadanie 5.

Założmy, że wektor losowy (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny.

(a) Znajdź $a \in \mathbb{R}$ takie, że zmienne $X - aY$ i Y są niezależne.

(b) Pokaż, że

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mu_X + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(Y(\omega) - \mu_Y),$$

gdzie $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ oraz $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$.

(c) Dla $y \in \mathbb{R}$ znajdź rozkład X pod warunkiem $Y = y$.

Rozwiązanie.

(a) Z Rachunku Prawdopodobieństwa 1R wiemy, że jeśli wektor losowy ma rozkład normalny, a jego poszczególne elementy są nieskorelowane, to są one również niezależne. Patrzymy więc na kowariancję

$$\text{Cov}(X - aY, Y) = \text{Cov}(X, Y) - a\text{Cov}(Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - a\text{Var}(Y)$$

i przyrównujemy ją do 0

$$0 = \text{Cov}(X, Y) - a\text{Var}(Y) \Rightarrow a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

(b) Zauważmy, że korzystając z poprzedniego punktu możemy przepisać równość jako

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[Y] + aY(\omega) = \mathbb{E}[X - aY] + a\mathbb{E}[Y | Y]$$

gdzie $Y = \mathbb{E}[Y | Y]$, bo Y jest $\sigma(Y)$ -mierzalne.

Kolejne przekształcenia dają

$$\mathbb{E}[X | Y] - a\mathbb{E}[Y | Y] = \mathbb{E}[X - aY]$$

co jest prawdą, gdyż po skorzystaniu z liniowości wwo po lewej stronie mamy

$$\mathbb{E}[X - aY | Y] = \mathbb{E}[X - aY]$$

a ponieważ $X - aY$ dobraliśmy tak, żeby było niezależne od Y , to jest ono również niezależne od $\sigma(Y)$. Czyli wwo jest równe wartości oczekiwanej $X - aY$.

(c) Rozkład X pod warunkiem $Y = y$ to $\kappa_{X,Y}(y, B) = \mathbb{P}[X \in B | Y = y]$. Wiemy, że

$$\mathbb{P}[X \in B | Y = y] = \frac{\mathbb{P}[X \in B \text{ i } Y = y]}{\mathbb{P}[Y = y]}$$

czyli można wydedukować, że szukamy

$$\mathbb{P}[X | Y = y] = f_{X|Y=y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

co jest zbyt dużą liczbą brzydkich obliczeń żeby nawet mi się chciało to dokładnie spisywać. Wystarczy podstawić pod gęstość (X, Y) na górze i do gęstości Y na dole.

Wykład 30.10.23 : Martyngały

Mają coś wspólnego z jazdą konną (podobno).

Przykład(y) 4.1

1. Rozważmy dowolną grę i dla uproszczenia niech polega ona na rzucaniu monetą, na której orzeł wypada z $\mathbb{P} = p \in (0, 1)$. Obstawiamy według zasady double or nothing:

☞ jeśli wypada orzeł, to podwajamy nasz kapitał

☞ jeżeli wypada reszka, to tracimy wszystko

Czy taka gra jest sprawiedliwa?

Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ o tym samym rozkładzie

$$\mathbb{P}[\xi_k = 2] = 1 - \mathbb{P}[\xi_k = 0] = p.$$

Wówczas ciąg

$$X_n = \xi_n \cdot \xi_{n-1} \cdot \dots \cdot \xi_1 \cdot X_0$$

reprezentuje stan konta po n -tym rzucie, gdzie X_0 to jakaś stała.

Rozważmy σ -ciało $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \dots, \xi_1, X_0)$ generowane przez pierwszych n rzutów i stan początkowy. Zadajmy sobie teraz pytanie, ile wynosi

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]?$$

Mamy zależność rekurencyjną $X_{n+1} = \xi_{n+1}X_n$, stąd możemy powiedzieć, że

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1}X_n \mid \mathcal{F}_n]$$

samo X_n jest w \mathcal{F}_n , więc możemy je wyciągnąć przed \mathbb{E} . Dodatkowo, ξ_{n+1} jest niezależne od \mathcal{F}_n , więc

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = (2p) \cdot X_n$$

☞ Jeżeli $p > \frac{1}{2}$, to wówczas

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$$

i wtedy taka gra jest korzystna, bo z coraz to kolejnym rzutem oczekiwania rosną.

☞ Jeżeli $p < \frac{1}{2}$, to wówczas

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

i gra jest korzystna, ale dla kasyna a nie gracza.

☞ Jeżeli $p = \frac{1}{2}$, to wówczas

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

i w takim przypadku powiemy, że gra jest sprawiedliwa.

Ten ostatni, uczciwy przypadek to jest jeden ze sposobów, na które możemy myśleć o martyngałach.

Definicja 4.1 : o martyngałach słów kilka.

☞ Wstępującą rodzinę σ -ciat

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, nazywamy **filtracją**

☕ Powiemy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest **\mathbb{F} -adaptowalny**, jeżeli $X_n \in \mathcal{F}_n$.

☕ Adaptowalny i całkowalny ciąg $\{X_n\}$ nazywamy **nadmartyngatem**, jeśli

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

☕ Adaptowalny i całkowalny ciąg $\{X_n\}$ nazywamy **podmartyngatem**, jeśli

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$$

☕ Z kolei ciąg $\{X_n\}$ jest **martyngatem**, jeśli jest jednocześnie nadmartyngatem i podmartyngatem, czyli zachodzi równość

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

Przykład(y) 4.2

1. Niech $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będą niezależne takie, że $\mathbb{E}[\eta_k] = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas jako filtrację możemy rozważyć

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \dots, \eta_n)$$

a jako nowy ciąg zmiennych losowych zdefiniujemy jako $M_0 = 0$ i

$$M_n = \sum_{k=1}^n \eta_k.$$

Tak zdefiniowany ciąg $\{M_n\}$ jest $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ -martyngatem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\eta_{n+1} + M_n \mid \mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E}[\eta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E}[\eta_{n+1}] + M_n = 0 + M_n = M_n \end{aligned}$$

2. Dla dowolnej filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ i całkowalnej zmiennej losowej X rozważmy

$$M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n].$$

Wówczas

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] = M_n$$

Uwaga 4.1.

Jeżeli $\{X_n\}$ jest martyngatem, to

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

czyli mamy dwie zmienne losowe które są sobie równe, czyli

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n]$$

W szczególności, jeśli zastosujemy indukcję, to dostaniemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

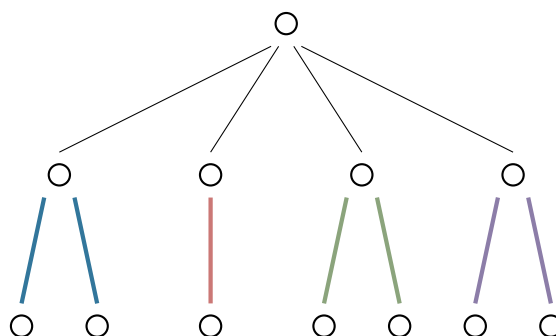
$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$$

Przykład(y) 4.3

1. Proces Gaultona-Watsona

Rozważmy populację, w której osobniki rozmnażają się bezpłciowo, niezależnie od siebie. Można myśleć o tym jako o obserwacji populacji pantofelków z pomiarami w jakiś określonych odstępach czasu.

Myślimy o tym jako o drzewie, w którym liczba krawędzi z danego wierzchołka oznacza liczbę potomstwa, a ilość wierzchołków na danej głębokości oznacza ilość pantofelków po n -tym pokoleniu.



Niech μ będzie dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Rozważmy zmienne losowe losowo indeksowane parami liczb naturalnych $\{Y_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$. Kładziemy

$$Z_1 = 1$$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n+1,k}$$

Z_1 to liczba pantofelków na samym początku, $Z_2 = Y_{2,1}$ to liczba dzieci pierwszego pantofelka, z kolei

$$Z_3 = Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3} + Y_{3,4},$$

co odpowiada kolorom na rysunku. To znaczy, że $Y_{n+1,k}$ to liczba potomstwa w generacji $n+1$ zrodzona z k -tego pantofelka w generacji n .

Filtracją będzie dla nas ciąg o elementach $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_{j,k} : k \in \mathbb{N}, j \leq n)$. Chcemy zapytać się o wartość oczekiwaną Z_{n+1}

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n+1,k} | \mathcal{F}_n\right] = h(Z_n)$$

gdzie

$$h(z) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^z Y_{n+1,k}\right] = z \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n,k}]}_m = m \cdot z,$$

bo wszystkie $Y_{n,k}$ mają taką samą średnią. Oznacza to, że

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = m \cdot Z_n.$$

Jeżeli $m < 1$, to dostajemy w ten sposób nadmartyngał, jeśli $m > 1$ to mamy podmartyngał, a w krytycznym przypadku $m = 1$, to $\{Z_n\}$ jest martyngałem.

Jeśli pomnożymy

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = mZ_n$$

oboma stronami przez m^{-n-1} , to dostajemy

$$\mathbb{E}[m^{-n-1}Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = m^{-n}Z_n$$

i wtedy $W_n = m^{-n}Z_n$ jest zawsze martyngałem, bo

$$\mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] = W_n$$

4.1 Transformata martyngałowa

Stan konta gracza wynosi X_n po n -tej sprawiedliwej grze. Przychodzi drugi gracz i obstawia on wyniki w grze tego pierwszego. Wypłata drugiego gracza wynosi $B_n \cdot (X_n - X_{n-1})$, tzn. za każdy przychód pierwszego gracza dostaje jakąś część tej wygranej.

Dla ciągu funkcji $B_n \in \mathcal{F}_{n+1} = \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$. Żeby było łatwiej, niech drugi gracz zaczyna z tym samym kapitałem co pierwszy. Stan konta drugiego gracza po n -tej grze wynosi

$$W_n = \sum_{k=1}^n B_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + X_0.$$

Tak zdefiniowany ciąg $\{Q_n\}$ jest również martyngałem, bo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[B_{n+1} \cdot (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[W_n | \mathcal{F}_n] = \\ &= B_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] + W_n = \\ &= B_{n+1}(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] - X_n) + W_n = W_n \end{aligned}$$

bo X_n sam w sobie był martyngałem, więc $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$.

Definicja 4.2.

Niech \mathbb{F} będzie filtracją. Zmienną losową $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ nazywamy **\mathbb{F} -czasem zatrzymania**, jeżeli zdarzenie $\{T = n\}$ jest mierzalne względem \mathcal{F}_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład(y) 4.4

1. Rzucamy 10-krotnie monetą. Zdefiniujmy zmienną losową

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{orzeł w } n\text{-tym} \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Filtracją niech będzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Jeśli T będzie momentem wypadnięcia pierwszego orła, a S - wypadnięcia ostatniego orła, to T jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T = n\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 1\} \in \mathcal{F}_n$$

a S nim nie jest, bo wymaga informacji wybiegającej w przyszłość:

$$\{S = n\} = \{X_n = 1, X_{n+1} = 0, \dots\} \notin \mathcal{F}_n$$

2. Rozważmy \mathbb{F} -adaptowalny ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$. Dla $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ kładziemy

$$T(B) = \inf\{n : X_n \in B\}.$$

Tak zdefiniowane T jest czasem zatrzymania:

$$\{T = n\} = \{X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

3. Jeżeli $T = n_0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$, to taka stała funkcja nadal jest czasem zatrzymania, bo

$$\{T = n\} = \begin{cases} \emptyset & n \neq n_0 \\ \Omega & n = n_0 \end{cases}$$

4.2 Zadania

Zadanie 1.

Założmy, że $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie, średniej 0 i skończonej wariancji. Rozważmy filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ zadaną przez $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Udowodnij, że ciąg

$$Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \dots + X_{n-1}X_n, \quad Z_0 = 0$$

jest \mathbb{F} -martyngąłem.

Rozwiązanie.

Chcemy pokazać, że

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Z_n$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Z_n + X_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}] + \mathbb{E}[X_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \\ &= Z_n + X_n \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

ponieważ X_n jest \mathcal{F}_n -mierzalne oraz

$$\mathbb{E}[|X_n X_{n+1}|] \leq \mathbb{E}[X_n^2]^{1/2} \mathbb{E}[X_{n+1}^2]^{1/2} < \infty$$

gdzie nierówność wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, a $\mathbb{E}[X_n^2] = \text{Var}(X_n) < \infty$.

Zauważmy teraz, że X_{n+1} jest niezależne od \mathcal{F}_n , gdyż X_n jest niezależne od każdej ze zmiennych X_1, \dots, X_n . W takim razie, $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$, a więc ostatecznie dostajemy

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Z_n + X_n \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Z_n + X_n \cdot 0 = Z_n$$

Czyli Z_n faktycznie jest martyngąłem.

Zadanie 2.

Ustalmy $\theta \in \mathbb{R}$. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie takich, że

$$\mathbb{E}[e^{\theta X_1}] < \infty.$$

Pokaż, że

$$M_n = \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-n} \prod_{j=1}^n e^{\theta X_j}$$

jest \mathbb{F} -martingałem dla filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ danej przez $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Rozwiązanie.

Zacznijmy od obserwacji, że

$$M_{n+1} = \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-n-1} \prod_{j=1}^{n+1} e^{\theta X_j} = M_n \cdot \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-1} e^{\theta X_{n+1}}$$

w takim razie, wwo M_{n+1} to jest

$$\mathbb{E} [M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-1} \cdot \mathbb{E} [M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]$$

Od razu widać, że M_n jest mierzalne względem \mathcal{F}_n , bo zależy tylko od zmiennych X_1, \dots, X_n które \mathcal{F}_n generują. Chcemy teraz sprawdzić, czy $\mathbb{E} [M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}}] < \infty$, wówczas możemy wyciągnąć M_n przed wwo.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}}] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-1} \cdot \prod_{j=1}^n e^{\theta X_j} \cdot e^{\theta X_{n+1}} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-n} \cdot \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{n+1} e^{\theta X_j} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-n} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \mathbb{E} [e^{\theta X_j}] = \\ &= \mathbb{E} [e^{\theta X_{n+1}}] = \mathbb{E} [e^{\theta X_1}] < \infty \end{aligned}$$

ponieważ jeśli $\{X_n\}$ są niezależne, to e^{X_n} też są niezależne, a dla niezależnych X, Y zachodzi $\mathbb{E} [XY] = \mathbb{E} [X] \mathbb{E} [Y]$. W takim razie dostajemy

$$\mathbb{E} [M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-1} \mathbb{E} [M_n \cdot e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \mathbb{E} \left[e^{\theta X_1} \right]^{-1} \mathbb{E} [e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]$$

ale ponieważ \mathcal{F}_n nie zawiera ani grama informacji o X_{n+1} , to $e^{\theta X_{n+1}}$ jest niezależne od \mathcal{F}_n , więc

$$\mathbb{E} [e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]$$

a to już daje to co chcieliśmy.

Wykład

Dla $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ i procesu $\{X_n\}$ definiujemy zmienną X_T wzorem

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

Dla martyngału $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i czasu zatrzymania T rozważamy ciąg zmiennych $\{X_{n \wedge T}\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$X_{n \wedge T}(\omega) = \begin{cases} X_n & n \leq T(\omega) \\ X_{T(\omega)}(\omega) & n \geq T(\omega) \end{cases}$$

Tutaj dla $X, y \in \mathbb{R}$ piszemy $x \wedge y$ aby przekazać, że interesuje nas $\min\{x, y\}$. To znaczy $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Czyli gramy w pewną uczciwą grę i mamy strategię wyjścia T , ale musimy np. zdążyć na obiad, więc chcemy wyjść po co najwyżej n rundach.

Twierdzenie 5.1 : Dooba o zatrzymaniu (uproszczone).

Niech $\{X_n\}$ będą odpowiednio martyngałem i czasu zatrzymania względem tej samej filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$. Wówczas proces (ciąg) $\{X_{n \wedge T}\}$ zdefiniowany wyżej jest martyngałem. W szczególności

$$\mathbb{E}[X_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[X_0]$$

dla każdego n (średnia jest stała w czasie).

Dowód

Mamy

$$X_{n \wedge T} = \sum_{k=1}^{n \wedge T} (X_k - X_{k-1}) + X_0 = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{T \geq k} (X_k - X_{k-1}) + X_0$$

gdzie

$$\mathbb{1}_{T \geq k} = 1 - \mathbb{1}_{T < k} = 1 - \mathbb{1}_{T \leq k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

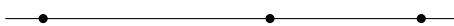
i teza wynika z przykładu o transformacie martyngałowej.



Przykład(y) 5.1

1. Gracz rozpoczyna grę z kapitałem $j\$$. W każdym rozdaniu może z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zyskać jednego dolara lub go stracić. Celem gracza jest wzbogacenie się o k dolarów. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu $p_{k,j}$?

Zaczynamy w punkcie j i chcemy dojść do punktu $j + k$, a boimy się punktu 0



Niech $\{\xi_k\}$ będą niezależne o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}[\xi_k = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Rozważmy

$$X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Żeby rozwiązać to zadanie to chcemy rozważyć funkcję

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$$

Teraz szukane przez nas prawdopodobieństwo to

$$p_{k,j} = \mathbb{P}[X_T = k]$$

Rozważamy filtrację $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ciąg $\{X_n\}$ jest \mathbb{F} -adaptowany, więc T jest \mathbb{F} -czasem zatrzymania.

Ciąg $\{X_n\}$ jest \mathbb{F} -martingalem, co wynika z faktu, że ξ_{n+1} są niezależne od \mathcal{F}_n i mają \mathbb{E} równą 0:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1} + X_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1}] + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = 0 + X_n$$

Z twierdzenia o zatrzymaniu wiemy więc, że

$$\mathbb{E}[X_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[X_0] = 0$$

i tutaj szkopuł jest taki, że nas interesuje X_T a nie $X_{n \wedge T}$. Musimy więc przejść z n do nieskończoności.

W pierwszej kolejności chcemy się upewnić, że $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$, bo

$$\mathbb{P}[T \geq n] \leq \mathbb{P}[|X_n| \leq k+j] = \mathbb{P}\left[\frac{|X_n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{j+k}{\sqrt{n}}\right] \xrightarrow{\text{CTG}} 0$$

a ponieważ

$$\mathbb{P}[T = \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T \geq n] = 0.$$

W takim razie ciąg $X_{n \wedge T}$ zbiega prawie wszędzie do ciągu X_T . Mało tego, dla pewnego n się zacznie stabilizować. Pozostaje uzasadnić, że możemy wejść z granicą pod całkę, ale to wynika z faktu, że

$$|X_{n \wedge T}| \leq j+k,$$

więc mamy

$$0 = \mathbb{E}[X_0] = \lim \mathbb{E}[X_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[\lim X_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T].$$

Rozpisując już na końcu

$$0 = \mathbb{E}[X_T] = k\mathbb{P}[X_T = k] - j\mathbb{P}[X_T = -j] = k \cdot p_{k,j} - j(1 - p_{k,j})$$

co pozwala nam wyliczyć

$$p_{k,j} = \frac{j}{k+j}.$$

W szczególności mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{X_n\} \text{ osiągnie } k] &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\{X_k\} \text{ osiągnie } k \text{ przed osiągnięciem } -j] = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} p_{k,j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{j+k} = 1 \end{aligned}$$

2. Gracz rozpoczyna grę z kapitałem $j\$$. W każdym rozdaniu może z prawdopodobieństwem p zyskać jednego dolara lub stracić go z prawdopodobieństwem $(1 - p)$. Celem gracza jest wzbogacenie się o k dolarów. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu $p_{k,j}$ gdy $p > \frac{1}{2}$?

Jest to niemalże takie samo zadanie jak wcześniej, z tym że tym razem nie mamy martyngału. Niemniej jednak modelować będziemy to w niemalże identyczny sposób.

Niech $\{\eta_k\}$ będą iid takie, że $\mathbb{P}[\eta_k = 1] = p$ oraz $\mathbb{P}[\eta_k = -1] = 1 - p$. Określamy $X_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$. Mamy wówczas

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\eta_{n+1}] + X_n = X_n + (2p - 1) > X_n$$

czy $\{X_n\}$ jest podmartyngałem. Określmy czas zatrzymania

$$T = \inf\{n : X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}.$$

Chcemy sobie zorganizować nowy martynał postaci

$$M_n = f(X_n)$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[f(X_n + \eta_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \\ &= F(X_n), \end{aligned}$$

gdzie $F(x) = \mathbb{E}[f(x + \eta_{n+1})] = pf(x + 1) + (1 - p)f(x - 1)$ jest oznaczeniem pomocniczym przy "odcałkowaniu niezależnej η_{n+1} ".

Aby $\{M_n\}$ był martyngałem musi zachodzić

$$M_n = f(X_n) = pf(X_n + 1) + (1 - p)f(X_n - 1) = F(X_n) = \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

f musi zatem spełniać rekurencję

$$f(x) = pf(x + 1) + (1 - p)f(x - 1)$$

Szukamy rozwiązania postaci $f(x) = \gamma^x$. Mamy więc

$$\gamma^x = p\gamma^{x+1} + (1 - p)\gamma^{x-1}$$

$$\gamma = p\gamma^2 + (1 - p)$$

i istnieją dwa rozwiązania: $\gamma = 1$ oraz $\gamma = \frac{1-p}{p}$. Wówczas

$$M_n = f(X_n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_n}$$

jest martyngałem. Znowu $M_{n \wedge T} \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+j}$, a z twierdzenia Dooba

$$\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$$

i poprzez przejście graniczne

$$\mathbb{E}[M_T] = 1$$

Oznaczamy $\mathbb{P}[X_T = k] = r_{j,k}$ i mamy

$$1 = \mathbb{E}[M_T] = \gamma^{-j}(1 - r_{k,j}) + \gamma^k r_{k,j}$$

gdzie

$$r_{k,j} = \frac{1 - \gamma^{-j}}{\gamma^k - \gamma^{j-1}}$$

w szczególności

$$\mathbb{P}[\{X_n\} \text{ osiągnie } k] = \lim_{j \rightarrow \infty} r_{j,k} = 1$$

$$\mathbb{P}[\{X_n\} \text{ osiągnie } j] = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - r_{k,j}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dots = \gamma^j$$

3. Rozważmy $X_n = \sum Y_k$, gdzie Y_k są iid takie, że $\mathbb{P}[Y_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$. To znaczy, że jeden gracz bierze udział w uczciwej grze i obstawiamy.