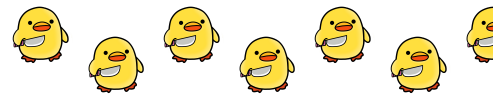




# 05: Wielomian Jonesa węzłów alternujących



Weronika Jakimowicz

27.03.2024

## Spis sznurków

Definicja węzła i linku alternującego . . . . .	1
Linki rozszczepione (ang. <i>split</i> ) i pierwsze . . . . .	3
Po co nam to wszystko? Czyli o jeżach (między innymi) . . . . .	5

## Definicja węzła i linku alternującego

Mówimy, że diagram regularny  $D$  węzła  $K$  jest alternujący, jeśli poruszając dowolny punkt  $P \in D$  wzdłuż  $D$ , ciągle w jedną stronę, będziemy na zmianę pokonywać skrzyżowania górą i dołem.

### Definicja : węzeł alternujący.

Węzeł  $K$  jest alternujący, jeśli posiada przynajmniej jeden diagram alternujący.

Najprostszy (o najmniejszej liczbie skrzyżowań) węzeł niealternujący to np.  $8_{19}$  (ale też  $8_{20}$  i  $8_{21}$ ), który widać na fig. 1. Do pokazania, że naprawdę nie kłamię jeśli chodzi o jego niealternującą naturę, wrócimy przy okazji powierzchni Seiferta i *sygnatury węzła*.

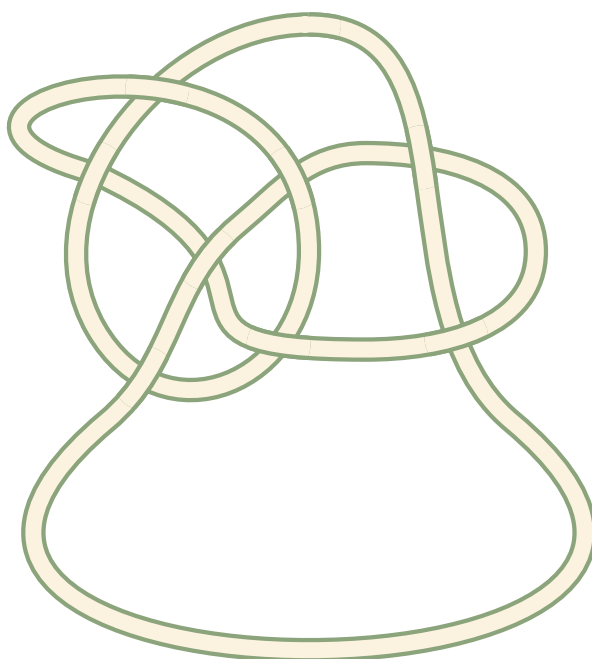


Figure 1: Przykładowy diagram węzła  $8_{19}$ .

### Fakt : alternująca suma spójna.

Jeśli  $K_1$  i  $K_2$  są węzłami alternującymi o alternujących diagramach mających odpowiednio  $n_1$  i  $n_2$  skrzyżowań, to ich suma spójna  $K_1 \# K_2$  ma diagram alternujący o dokładnie  $(n_1 + n_2)$  skrzyżowaniach.

### Dowód

Wiemy, że "na zewnątrz" węzła  $K_1$  istnieje segment, pod którym przechodzi dokładnie jeden inny segment. Tak samo w przypadku diagramu  $K_2$ . Mamy dwie opcje, jak widać na fig. 2.

Pierwsza z nich jest raczej oczywista. Druga wymaga zauważenia, że konsekwentnie przyglądając się łuczkom na zewnątrz diagramu po lewej, w końcu przejście "nad" będzie musiało występować na górze. Wtedy wystarczy taki łuczek przeciągnąć nad całym węzłem w przestrzeń pomiędzy węzłami i skorzystać z niego do połączenia  $K_1$  i  $K_2$  tak jak na obrazku na dole fig. 2.

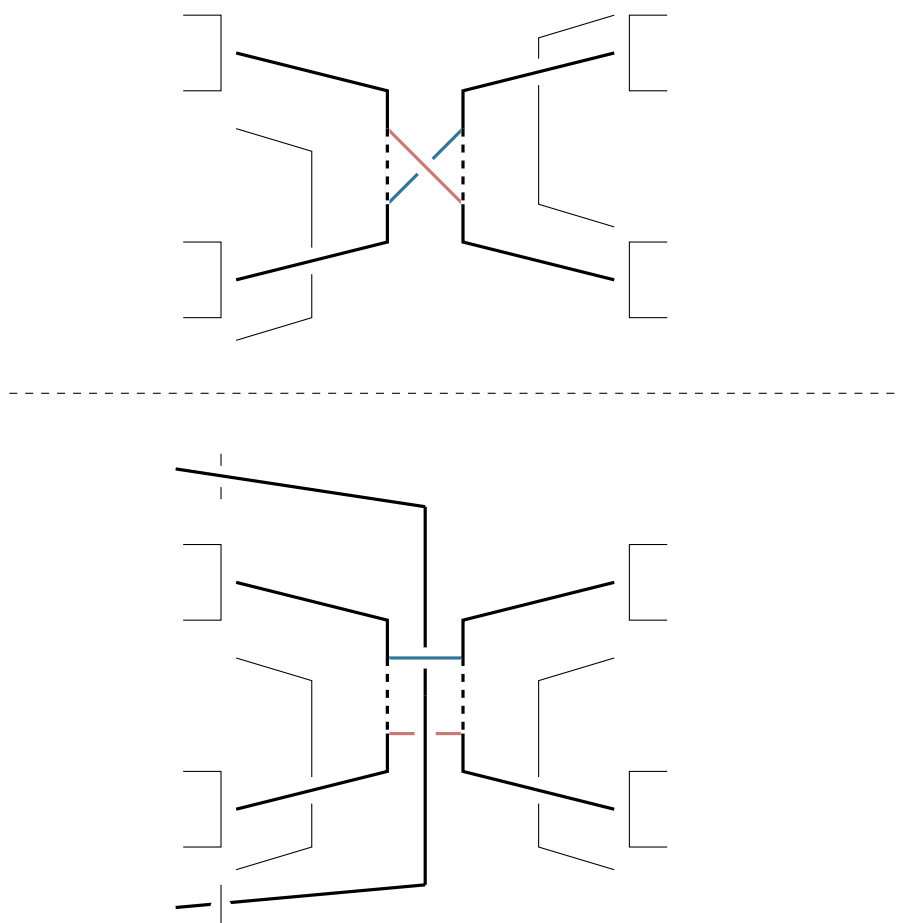


Figure 2: Dwa możliwe ułożenie łuczków na zewnątrz alternujących diagramów  $K_1$  i  $K_2$ .



### Zadanie 1.

Rozważmy węzeł wielokątny  $K$  oraz prostą  $l$ , wzdłuż której  $K$  rzutujemy. Niech  $K$  będzie położony w sposób regularny (tzn. co najwyżej dwa punkty mogą leżeć na jednej prostej równoległej do osi rzutu).

Pokaż, że istnieje wówczas węzeł alternujący  $K'$  w pozycji regularnej taki, że rzuty wzdłuż  $l$  obu węzłów są identyczne. W rzucie nie rozróżniamy który segment w skrzyżowaniu biegnie górą.

Szukany w zadaniu wyżej węzeł alternujący niekoniecznie musi być nietrywialny. Aby więc skonstruować węzeł  $K'$  wystarczy wybrać punkt startowy na  $K$  i przemieszczać się wzdłuż niego konsekwentnie w jedną stronę, na zmianę wymagając, by segment w danych skrzyżowaniu szedł górą lub dołem. Nietrywialną częścią tego podejścia jest pokazanie, że na końcu uda nam się zamknąć tak zatoczoną drogę.

Drugi sposób to użycie indukcji po ilości skrzyżowań  $K$ , rozcinanie go tak, by dostać co najmniej dwa rozłączne węzły, do których możemy przyłożyć założenie indukcyjne. Następnie wystarczy połączyć te węzły korzystając z faktu wyżej.

Definicja bycia alternującym linkiem jest analogiczna jak bycia alternującym węzłem, więc ją pominiemy. Powiemy natomiast o kilku ciekawych przypuszczeniach i o Szkotach.

### Twierdzenie : hipotezy Tait'a.

Chociaż poniższe trzy stwierdzenia nazywają się hipotezami, to zostały udowodnione w 1987 (dwa pierwsze) i 1991 (ostatnie), ale nie przez Tait'a.

1. Dowolny zredukowany diagram alternujący ma najmniejszą możliwą liczbę skrzyżowań.
2. Dowolne dwa zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła mają tę samą sumę ważoną skrzyżowań (ang. *writhe*)
3. Dowolne dwa zredukowane alternujące diagramy  $D_1$  i  $D_2$  zorientowanego, pierwszego linku (co to znaczy dowiemy się za chwilę) można przekształcić przy pomocy skończonej liczby ruchów *flype*.

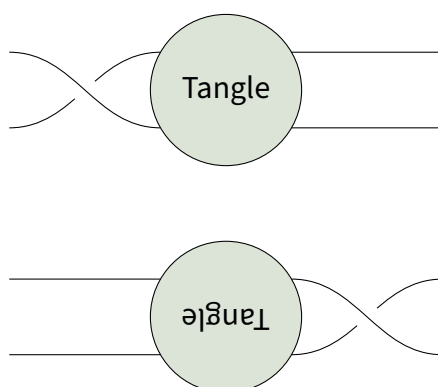


Figure 3: Wywracanie skarpety na lewą stronę, czyli *flype*.

Słowo *flype* pochodzi ze szkockiego i oznacza wywracanie skarpetki na lewą stronę. Chodzi o obracanie kółtuna (ang. *tangle*) o 180 stopni (patrz. fig. 3 lub wikipedia <3). Kółtun to włożenie  $n$  łuczków w  $S^3$  tak, że ich  $2n$  końców jest przyklejonych do  $2n$  punktów zaznaczonych na granicy  $S^3$ .

### Linki rozszczepione (ang. *split*) i pierwsze

#### Definicja : link i diagram rozszczepiony.

Powiemy, że **link L** (o co najmniej dwóch komponentach) zanurzony w  $S^3$  jest **rozszczepiony**, jeśli możemy  $S^3$  podzielić na dwie kule  $S^2$  tak, że każda ma po przynajmniej jednym komponencie L.

Definicja ta przenosi się na diagram  $D \in S^2$  poprzez spłaszczenie tych sfer  $S^2$  do zamkniętych krzywych. To znaczy, **diagram D jest rozszczepiony**, jeśli istnieje prosta krzywa zamknięta w  $S^2 \setminus D$ , która dzieli je na dwa rozłączne dyski, każdy zawierający przynajmniej jeden komponent D.

Link trywialny, czyli  $O \cup O$ , jest w oczywisty sposób rozszczepialny.

Link Whitehead'a (patrz fig. 4) nie jest rozszczepialny. Aby to pokazać, wystarczy zauważyć, że link Whitehead'a składa się z dwóch trywialnych węzłów  $O$ . Gdyby więc był rozszczepialny, to moglibyśmy przekształcić fig. 4 w diagram  $O \cup O$ , którego wielomian Jonesa wynosi  $V(O \cup O) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ . Wielomian Jonesa linku Whitehead'a wynosi natomiast  $V(\text{Whitehead}) = t^{-\frac{3}{2}}(-1 + t - 2t^2 + t^3 - 2t^4 + t^5)$ . Ewidentnie coś się nie zgadza.



Figure 4: Link Whitehead'a nie jest rozszczepialny, ale jest alternujący.

### Twierdzenie .

Link  $L$  o alternującym diagramie  $D$  jest rozszczepialny  $\iff D$  jest rozszczepialnym diagramem.

Dowód tego twierdzenia zostanie podany na koniec sekcji.

Na pierwszych zajęciach dowiedzieliśmy się, że nietrywialny węzeł  $K$  jest pierwszy (ang. *prime*), jeśli nie jest sumą spójną dwóch nietrywialnych węzłów. Moglibyśmy powiedzieć, że każda kula  $S^2 \subseteq S^3 \setminus K$  przecinająca węzeł  $K$  w dwóch punktach dzieli  $S^3$  na dwa fragmenty, z czego jeden posiada "trywialny tuczek", tj. tuczek który bez problemu możemy rozsuwać przy pomocy ruchów Reidemeistera. W podobny sposób możemy przenieść definicję pierwszości na linki i ich diagramy.

#### Definicja : link i diagram pierwszy.

**Link**  $L \subseteq S^3$ , różny od linku (i węzła) trywialnego, jest **pierwszy**, jeśli każda sfera  $S^2$  przecinająca go w dwóch punktach dzieli  $S^3$  na dwa fragmenty, z których jeden zawiera jeden trywialny tuczek  $L$ .

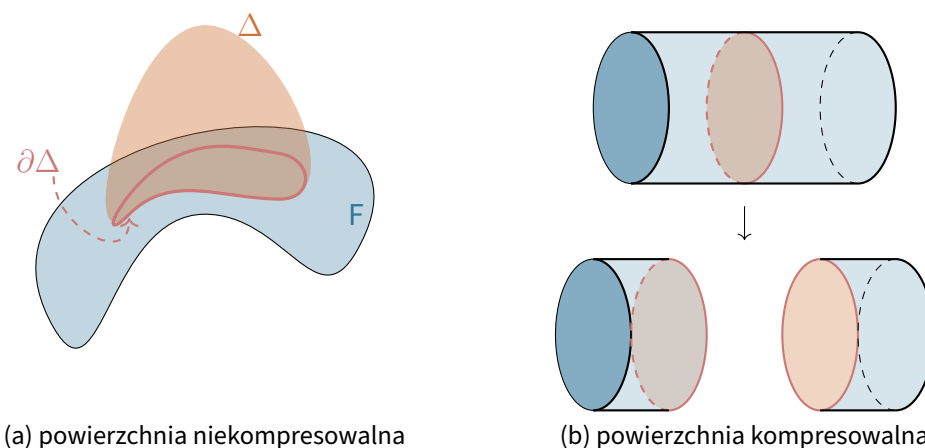
**Diagram**  $D \subseteq S^2$  jest **pierwszy**, jeśli każda prosta krzywa zamknięta w  $S^2$  przecinająca  $D$  w dwóch punktach zawiera w swoim wnętrzu lub na zewnątrz diagram odpowiadający rozwiązywalnemu tuczkiowi. Takie  $D$  jest **silnie pierwszy**, jeśli zawsze po takim rozcięciu znajdziemy diagram z zerową liczbą skrzyżowań.

Tutaj warto zauważyć, że jedynym linkiem, który jest jednocześnie pierwszy i rozszczepiony jest link trywialny  $O$ .

Kolejne twierdzenie, na którego dowód musimy troszkę poczekać, które pozwala nam badać pierwszość linków alternujących przez pryzmat ich diagramów.

### Twierdzenie .

Założmy, że  $L$  jest linkiem o alternującym diagramie  $D$ . Wtedy  $L$  jest linkiem pierwszym  $\iff D$



(a) powierzchnia niekompresowalna

(b) powierzchnia kompresowalna

Figure 5: Powierzchnię (b) możemy rozciąć wzdłuż  $\partial\Delta$  i zakleić dwoma kopiami  $\Delta$ , by dostać dwie "zakrętki". Jest tak, ponieważ otoczenie tubularne  $\Delta$  ma ciekawy przekrój z  $F$ . W przypadku powierzchni (a) otoczenie tubularne  $\Delta$  daje po prostu annulus na  $F$ .

jest diagramem pierwszym.

WRÓCIĆ TUTAJ, BO MI SIĘ CHWILOWO NIE CHCE

## Po co nam to wszystko? Czyli o jeżach (między innymi)

Zacznijmy od szybkiej informacji co to znaczy być powierzchnią. Oczywiście mówiąc powierzchnia mamy na myśli 2-rozmaitość, czyli przestrzeń której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ . Zamkniętych powierzchni nie ma bardzo dużo i każda taka powierzchnia jest wymieniona niżej

1. sfera  $S^2$
2. suma spójna  $n$  torusów  $\mathbb{T}^2$
3. suma spójna  $n$  płaszczyzn rzutowych  $\mathbb{R}P^2$

Poza tym jest m.in. butelka Kleina (nieorientowalna, bez brzegu) czy wstęga Möbiusa (nieorientowalna, z brzegiem).

Powiemy teraz, co to znaczy, że powierzchnia  $F \subseteq M$ , gdzie  $M$  jest 3-rozmaitością, jest niekompresowalna. Przy okazji dowiemy się, co to znaczy być dyskiem rozpinającym powierzchnię.

### Definicja : powierzchnia niekompresowalna.

Niech  $F$  będzie powierzchnią różną od  $S^2$  zanurzoną w 3-rozmaitość  $M$ . Powiemy, że  $F$  jest **niekompresowalna**, jeśli każdy dysk  $\Delta \subseteq M$  taki, że  $\Delta \cap F = \partial\Delta$  (tzn.  $\Delta$  *rozpina* powierzchnię  $F$ ) ogranicza dysk w  $F$  (patrz fig. 5).

Sfera  $S^2$  jest niekompresowalna, jeśli nie ogranicza  $D^3$  w  $M$ .

### Fakt .

Niech  $L$  będzie nierozszczepialnym, pierwszym i alternującym linkiem, a  $F$  niech będzie zamkniętą niekompresowalną powierzchnią w  $S^3 \setminus L$ . Wówczas istnieje dysk  $\Delta$  rozpinający  $F$  w  $S^3$ , który przecina  $L$  w dokładnie jednym punkcie.

Żeby to zobaczyć, trzeba wyobrazić sobie *najeżenie węzła/linku*  $L$ , czyli jego otoczenie tubularne

(zamiast nitki mamy sznurek bawełniany o średnicy 5mm). Takich otoczeń mamy dużo, dla każdego  $\varepsilon > 0$ . Możemy więc wybierać otoczenia  $U_n$  o średnicy  $\frac{1}{n}$ . Kiedy wyjmujemy z  $S^3$  węzeł  $K$  duża część  $U_n$  zostaje, więc możemy wybierać dyszczki  $\Delta_n$ , które mają przekrój z otoczeniem  $U_n$  o średnicy  $\frac{1}{n}$  na wysokości tylko jednego segmentu. Granica tych dyszczków nie jest już w  $S^3 \setminus L$ , bo zahacza o otoczenie średnicy 0, tzn. przecina się z węzłem  $L$  w jednym punkcie.

### Fakt .

Niech  $L$  będzie nierozszczepialnym, pierwszym i alternującym linkiem. Każdy niekompresowalny torus  $T$  zawarty w  $S^3 \setminus L$  jest równoległy do granicy najeżenia pewnego komponentu  $L$ .

Na przykład dla  $L$  będącego linkiem o jednym elemencie, zawierającym tylko węzeł  $3_1$ , torusem równoległym do granicy jego najeżenia jest powierzchnia widoczna na fig. 6. Tak się składa, że link wyżej jest linkiem trywialnym, nierozszczepialnym i alternującym, więc tylko torus zawierające  $L$  w swoim środku są niekompresowalne.

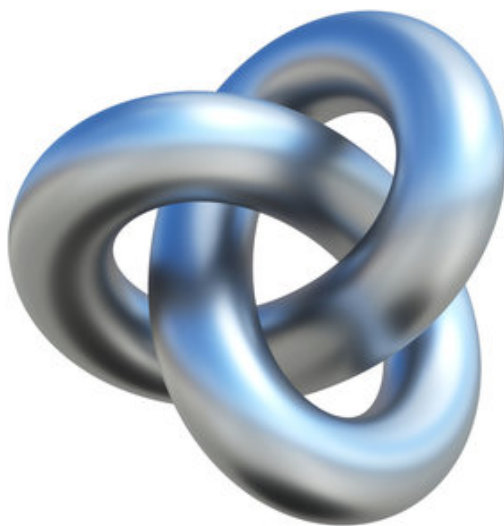


Figure 6: Najeżenie węzła  $3_1$ .

Może nas to interesować, gdyż 3-rozmaitości  $M$ , w których wszystkie niekompresowalne torusy są granicami najeżenia pewnego linku, zwykle posiadają strukturę hiperboliczną (pisał o tym pan W. P. Thurston i po przepisaniu do  $\text{\LaTeX}$  wyszło 379 stron pdf, który można znaleźć tutaj). Hiperboliczność 3-rozmaitości definiujemy przy pomocy metryki riemannowskiej i krzywizn, ale można to uprościć do stwierdzenia, że hiperboliczność oznacza brak materiału (sformułowanie ukradzione A. Karolakowi), czyli m.in. trójkąciiki wtedy mają kąty sumujące się do mniej niż  $\pi$ .

### Definicja : sfera Conwaya.

Dla linku  $L \subseteq S^3$  2-sferę  $\Sigma$  (tzn.  $\Sigma = S^2$ ), która przecina  $L$  w 4 punktach nazywamy **sferą Conwaya**, jeśli

1.  $\Sigma \setminus L$  jest niekompresowalne w  $S^3 \setminus L$
2. każde  $S^2 \subseteq S^3 \setminus \Sigma$  przecinające  $L$  w dwóch punktach odcina niezawiązany segment  $L$ .