

# Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

**Zadanie 1.** Opisz grupę automorfizmów triangulacji  $\mathbb{R}P^2$  o najmniejszej liczbie wierzchołków.

## Ile wierzchołków?

Zacznijmy od zauważenia, że patrzymy na triangulację na 2-rozmaitości. To znaczy, że dowolny punkt triangulacji ma otoczenie, które wygląda jak mała sfera w  $\mathbb{R}^2$ . Na  $\mathbb{R}^2$  każda krawędź przylega do 2 trójkątów, a każdy trójkąt ma 3 krawędzie, stąd

$$2E = 3T.$$

Wiemy, że jeśli  $X$  ma triangulację o  $V$  wierzchołkach,  $E$  krawędziach i  $T$  trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T.$$

Jak wcześniej zauważyliśmy, dla  $\mathbb{R}P^2$   $2E = 3T$ , więc mamy

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym:  $E \leq \binom{V}{2}$  czyli

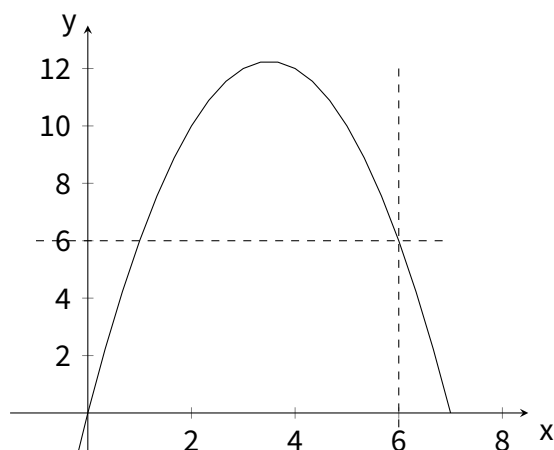
$$V = \chi(\mathbb{R}P^2) + \frac{1}{3}E \leq \chi(\mathbb{R}P^2) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla  $\mathbb{R}P^2$   $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ , dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7 - V)$$

Powyższa nierówność dla  $V = 6$  staje się równością. Tak samo dla  $V = 1$  mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na  $\mathbb{R}P^2$ . Pozostałe liczby naturalne z przedziału  $(0, 7)$  nie mają szansy spełniać powyższe równanie (widać na obrazku)



Z listy 1 wiemy, że 6-wierzchołkowa triangulacja  $\mathbb{R}P^2$  jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulację opisujemy.

### Plan działania

Płaszczyzna rzutowa  $\mathbb{R}P^2$  to  $S^2$  wydzielona przez antypodyczne działanie  $\mathbb{Z}_2$ . W takim razie, 6-wierzchołkowa triangulacja na  $\mathbb{R}P^2$  pochodzi od triangulacji na  $S^2$ . Dwudziestościan ma 12 wierzchołków i 20 ścian i jest to interesująca nas triangulacja sfery. Łatwiejsze jest jednak badanie grupy automorfizmów bryły dualnej do dwudziestościanu - dwunastościanu o 12 ścianach i 20 wierzchołkach.

Ponieważ dwudziestościan i dwunastościan są bryłami dualnymi, to grupy ich automorfizmów są sobie równe. Grupa automorfizmów jest generowana przez antypodyzm i symetrie:

czzerwone symetrie w dwunastościanie nakrywają się na krawędzie w dwudziestościanie, które również dają symetrie. Tak samo różowe krawędzie nakrywają się z wysokościami ścian w dwudziestościanie, które również dają osie symetrii. Czyli dwudziestościan i dwunastościan dzielą ze sobą osie symetrii. Oznaczmy dwunastościan przez  $D$ . Pokażemy, że  $\text{Aut}(D) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$ .

### Czy zgadza się rząd?

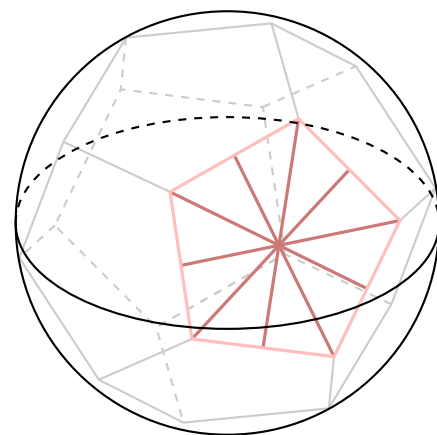
Niech  $v \in D$  będzie wierzchołkiem dwunastościanu (odpowiada ścianie dwudziestościanu).

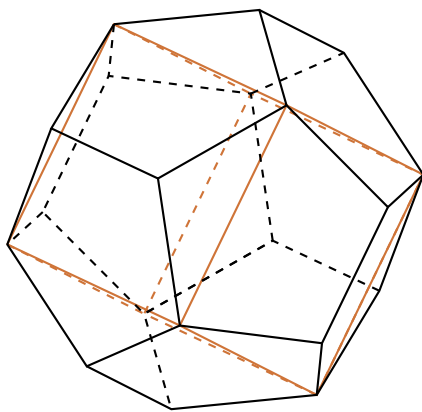
☕  $|\text{Orb}(v)| = 20$ , bo automorfizm może postać wierzchołek na dowolny inny spośród 20 które  $D$  posiada.

☕  $|\text{Stab}(v)| = 3! = 6$ , gdyż są to permutacje 3 sąsiadów tego wierzchołka przy trzymaniu  $v$  w miejscu.

W takim razie dostajemy

$$|\text{Aut}(D)| = |\text{Orb}(v)| \cdot |\text{Stab}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 = |A_5 \times \mathbb{Z}_2|.$$





## Wpisywanie sześciąt

Zauważmy, że w każdy dwudziestokąt możemy włożyć 5 kostek. Każda kostka powstaje przez:

- ☕ wybranie krawędzi
- ☕ połączenie wierzchołków sąsiadujących z tą krawędzią w kwadrat
- ☕ wzięcie krawędzi po przeciwnej stronie dwudziestokąta
- ☕ połączenie wierzchołków tej krawędzi w kolejny kwadrat
- ☕ połączenie obu kwadratów w sześciąt.

Co więcej, każdy sześciąt możemy ustawić tak, aby jedna jego krawędź była przekątną ściany dwudziestokąta, która patrzy w naszą stronę. Ponumerujmy teraz te sześciąty wybierając

jeden i idąc dalej po przekątnych ścianach zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

## Odwzorowanie $\text{Aut}(D) \rightarrow S_5$

Oś symetrii, która przechodzi przez przeciwległe wierzchołki sześciąta jest też osią symetrii dwudziestokąta. Taka symetria dwudziestokąta będzie trzymać sześciąty, których jedna ściana jest przekątną wychodzącą z tego samego wierzchołka. Pozostałe 3 sześciąty będą permutować ze sobą. To pozwala nam napisać odwzorowanie

$$\varphi : \text{Aut}(D) \rightarrow S_5$$

które symetrii przypisuje odpowiadającą jej permutację 3 sześciątów. Podgrupą  $S_5$  generowaną przez wszystkie 3-cykle jest podgrupa  $S_5$  mająca  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  elementów, która jest jedyna i wynosi  $A_5$ . Stąd

$$\text{im}(\varphi) = A_5.$$

Pozostaje nam sprawdzić jądro tego odwzorowania. Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba sprawdzić, jaki automorfizm zachowuje wszystkie sześciąty. Oczywistym kandydatem jest identyczność, a drugim jest antypodyzm. Pozostałe automorfizmy muszą poruszyć dwudziestokąt wzdłuż którejś osi symetrii przynajmniej raz, czyli indukuje permutację sześciątów. Stąd,

$$\ker(\varphi) = \{\text{id}, \text{antypodyzm}\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Korzystając z twierdzeń o izomorfizmach, dostajemy

$$\text{Aut}(D) \cong \text{im}(\varphi) \times \ker \varphi \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ponieważ dwudziestokąt  $D$  ma tę samą grupę automorfizmów co dwunastokąt, to szukana grupa automorfizmów triangulacji  $\mathbb{R}P^2$  wynosi

$$\text{Aut}(D)/\mathbb{Z}_2 = (A_5 \times \mathbb{Z}_2)/\mathbb{Z}_2 \cong A_5.$$

**Zadanie 4.** Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną. Definiujemy przestrzeń konfiguracji  $\text{Conf}_n(X)$  jako przestrzeń położeń  $n$  różnych punktów w  $X$  (zakładamy, że dwa punkty nie mogą leżeć w tym samym miejscu). Definiujemy też przestrzeń konfiguracji  $\text{conf}_n(X)$  jako przestrzeń położeń  $n$  nierozróżnialnych punktów w  $X$ , czyli

$$\text{Conf}_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j, \text{ gdy } i \neq j\}$$

$$\text{conf}_n(X) = \frac{\text{Conf}_n(X)}{S_n}$$

gdzie  $S_n$  działa na  $\text{Conf}_n(X)$  przez permutacje współrzędnych.

Oblicz charakterystykę Eulera  $\text{conf}_n(\mathbf{Y})$ , gdzie  $\mathbf{Y}$  to drzewo o 4 wierzchołkach, z czego 3 to liście, dla  $n = 2, 3, 4$ .

.....

**n = 2**

Formuła Riemanna-Hurwitza mówi, że jeśli mamy funkcję  $f : \text{Conf}_2(\mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{Y}$ , to wtedy

$$\chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) = \int_{\mathbf{Y}} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X).$$

W tym konkretnym przypadku od razu w oczy rzuca się funkcja

$$f(x, y) = x,$$

w której przeciwobrazem dowolnego punktu jest  $\mathbf{Y}$  bez punktu  $(\mathbf{Y} - \bullet)$ . Charakterystyka Eulera  $\mathbf{Y}$  wynosi 1, więc jeśli korzystamy z addytywnej definicji, to

$$\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 - 1 = 0.$$

W takim razie

$$\chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) = \chi(\mathbf{Y})\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Kolejną funkcją, którą użyjemy do liczenia  $\text{conf}_2(\mathbf{Y})$ , będzie przypisanie punktowi jego orbity, czyli funkcja

$$g : \text{Conf}_2(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Conf}_2(\mathbf{Y})/S_2.$$

Dowolny punkt  $(x, y) \in \text{Conf}_2(\mathbf{Y})$  posiada orbitę dwuelementową:  $\{(x, y), (y, x)\}$ . W takim razie, formuła Riemanna-Hurwitza mówi, że

$$\chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) = \int_{\text{conf}_2(\mathbf{Y})} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X) = 2 \cdot \chi(\text{conf}_2(\mathbf{Y}))$$

$$\chi(\text{conf}_2(\mathbf{Y})) = \frac{1}{2} \chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

**n = 3** .....

Rozważmy teraz funkcję

$$f : \text{Conf}_3(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Conf}_2(\mathbf{Y})$$

taką, że

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

W tym przypadku charakterystyką Eulera dowolnego punktu w  $\text{Conf}_2(\mathbf{Y})$  jest  $\mathbf{Y}$  bez dwóch punktów - z nie może przyjąć wartości  $x$  ani  $y$ . Charakterystyka Eulera takiego przeciwobrazu to

$$\chi(\mathbf{Y} - \bullet - \bullet) = \chi(\mathbf{Y} - \bullet) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Używając wzoru Riemanna-Hurwitza dostajemy

$$\chi(\text{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \int_{\text{Conf}_2(\mathbf{Y})} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X) = \chi(\text{Conf}_2(\mathbf{Y})) \cdot \chi(\mathbf{Y} - \bullet - \bullet) = -1 \cdot 0 = 0.$$

Oczywiste jest również odwzorowanie  $g : \text{Conf}_3(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{conf}_3(\mathbf{Y})$ , w którym przeciwbrazem dowolnego punktu z  $\text{conf}_3(\mathbf{Y})$  jest dowolna permutacja współrzędnych reprezentanta wybranej orbity. Każdy reprezentant ma 3 współrzędne, więc przeciwbraz punktu ma moc  $3! = 6$ .

Stosując do tego odwzorowanie Riemanna-Hurwitza dostajemy

$$\chi(\text{conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4} \chi(\text{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

**n = 4** . . . . .

Analogicznie jak wcześniej, funkcja  $f : \text{Conf}_4(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Conf}_3(\mathbf{Y})$  wraz z całką Riemanna-Hurwitza mówi, że

$$\chi(\text{Conf}_4(\mathbf{Y})) = 0.$$

Ponieważ odwzorowanie  $g : \text{Conf}_4(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{conf}_4(\mathbf{Y})$  jest  $4!$ -krotne, to

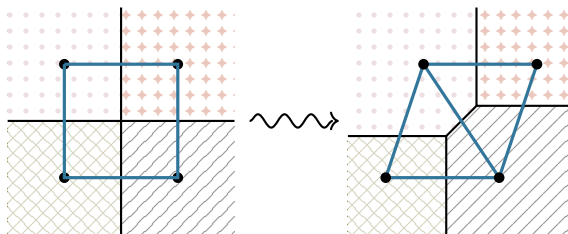
$$\chi(\text{conf}_4(\mathbf{Y})) = \frac{0}{4!} = 0.$$

**Zadanie 5.** Mapą na powierzchni  $M$  nazywamy podział powierzchni na komórki homeomorficzne z dyskami, których przekroje są zawarte w ich brzegach. Z takim podziałem mamy związany graf dualny, którego wierzchołki, to komórki, a krawędź istnieje pomiędzy wierzchołkami, gdy odpowiadające im komórki mają niepusty przekrój. Kolorowaniem mapy nazywać będziemy funkcję ze zbioru komórek w pewien skończony zbiór kolorów, która przyjmuje różne wartości na krojących się niepusto komórkach.

- Jak mogą wyglądać mapy na powierzchniach? Czy da się uprościć je tak, by graf dualny był 1-szkieletem triangulacji? Rozważyc mapę o sześciu krajach na butelce Kleina.
- Twierdzenie o  $k$  barwach dla powierzchni  $M$  mówi, że każdą mapę na powierzchni  $M$  można pokolorować co najwyżej  $k$  kolorami. Udowodnić twierdzenie o 5 barwach dla sfery  $S^2$ , o 6 barwach dla  $\mathbb{RP}^2$  o 7 barwach dla torusa  $T^2$  i o 6 barwach dla butelki Kleina.

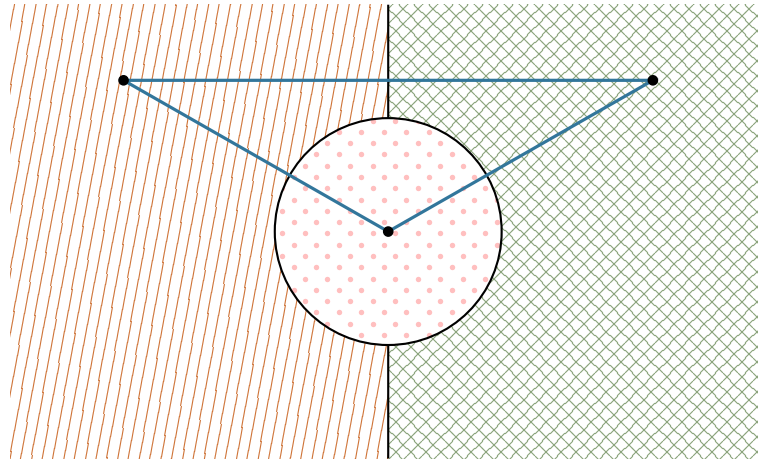
. . . . .

- W mapie pozwalamy, aby w jednym punkcie spotykały się co najwyżej 3 kraje. Jeśli istnieje punkt, w którym spotykają się 4 kraje, wtedy ten punkt zamieniamy na krawędź:



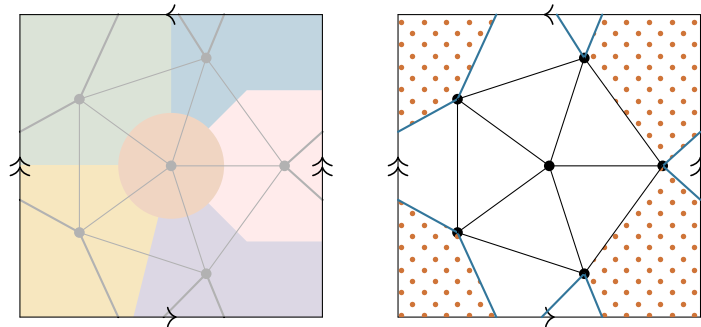
W ten sposób z grafu  $C_4$  dostajemy graf mający trójkąty jako ściany.

W przypadku, gdy widzimy na mapie Andorę, to ignorujemy jedną granicę między Francją i Hiszpanią przy rysowaniu grafu dualnego:



Unikamy w ten sposób krawędzi wielokrotnych i dostajemy miejsce na dwuwymiarowy sympleks ( $\triangle$ ).

Niestety, nie każdy graf pochodzący od takich map na powierzchni da się rozszerzyć do triangulacji. Rozważmy na przykład mapę, do której graf dualny to  $K_6$  na butelce Kleina:



Obszar zacieniowany kółeczkami po prawej stronie rysunku zawiera 5 wierzchołków zamiast 3 zwyczajowo obecnych w  $\triangle$ . Nie możemy tego pięciokąta przekroić by otrzymać trójkąty, bo  $K_6$  jest już grafem pełnym i takie działanie dałoby wielokrotną krawędź.

## (b) Torus $T^2$ . . . . .

Zacznijmy od tego, że 7 kolorów na torusie jest koniecznych. Wynika to z faktu, że triangulacja torusa o minimalnej ilości wierzchołków to  $K_7$ .

Po pierwsze, minimalna ilość wierzchołków w triangulacji na torusie to 7. Ponieważ torus jest rozmaitością 2 wymiarową, to

$$\begin{aligned} 2E &= 3T \\ \frac{2}{3}E &= T \end{aligned}$$

z formuły Gaussa-Bonnet wiemy, że

$$0 = V - E + F = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E. \quad (*)$$

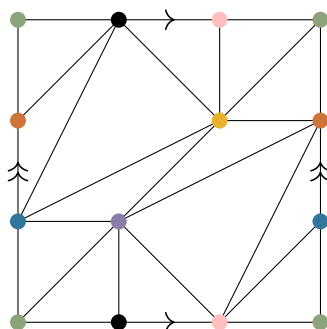
Górne szacowanie na ilość wierzchołków to

$$E \leq \binom{V}{2} = \frac{V(V-1)}{2},$$

co po podstawieniu do (\*) daje

$$0 = V - \frac{1}{3}E \geq V - \frac{V(V-1)}{6} = \frac{7V - V^2}{6} = \frac{V(7-V)}{6}$$

co implikuje, że  $V \geq 7$ .



Pokażemy teraz, przy pomocy indukcji po ilości wierzchołków, że dla każdego grafu  $G$  na torusie wystarczy 7 kolorów, by go pomalować.

Przypadek bazowy, to znaczy  $|G| \leq 7$ , jest dość oczywisty. Załóżmy teraz, że każdy graf o co najwyżej  $n$  wierzchołkach potrafimy pokolorować 7 kolorami. Niech  $G$  będzie grafem na torusie, który ma  $(n + 1)$  wierzchołków. Rozważamy przypadki:

1. Istnieje wierzchołek  $v \in G$  taki, że  $\deg(v) \leq 6$ .

Możemy wtedy wierzchołek  $v$  wyjąć, tzn. rozważyć graf  $G' = G \setminus v$  w którym ze zbioru wierzchołków usunięty został  $v$ , a ze zbioru krawędzi usunięto wszystkie krawędzie  $e$  takie, że  $e \cap v \neq \emptyset$ .

Na mocy założenia indukcyjnego graf  $G'$  możemy pokolorować 7 kolorami. Sąsiedzi wierzchołka  $v$ , jako że było ich 6 sztuk, korzystają z maksymalnie 6 kolorów. Możemy więc wybrać kolor, który nie jest przez nich użyty i pomalować nim  $v$ .

2. Jeśli wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej 7, to wtedy mamy

$$E = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \frac{7V}{2} \Rightarrow \frac{2}{7}E \geq V$$

krawędzi.

Graf  $G$  niekoniecznie jest triangulacją, ale na pewno nie zawiera przecinających się krawędzi. Możemy więc nieco zmodyfikować to, co wiemy o zależności między liczbą krawędzi a liczbą ścian. Jesteśmy na rozmaitości dwuwymiarowej, więc jedna krawędź trafia do dwóch ścian. Każda ściana z kolei ma co najmniej 3 krawędzie. Dostajemy więc zależność

$$2E \geq 3T \Rightarrow \frac{2}{3}E \geq T.$$

Charakterystyka Eulera torusa wynosi 0, więc możemy użyć formuły Gaussa-Bonneta

$$\begin{aligned} 0 &= V - E + T \leq V - E + \frac{2}{3}E = \\ &= V - \frac{1}{3}E \leq \frac{2}{7}E - \frac{1}{3}E = \\ &= \frac{6-7}{21}E = -\frac{E}{21} \end{aligned}$$

z tego wynika, że

$$0 \geq -\frac{E}{21}$$

co daje sprzeczność z  $E > 0$ . W takim razie w grafie narysowanym na torusie zawsze znajdziemy wierzchołek stopnia  $\leq 6$ .

## Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$ . . . . .

Zacniemy znowu od pokazania, że istnieje na  $\mathbb{R}P^2$  graf, który potrzebuje 6 kolorów do bycia pomalowanym.

Triangulacja  $\mathbb{R}P^2$  o najmniejszej liczbie wierzchołków to  $K_6$ . Wnioskujemy to z formuły Gaussa-Bonnet uzupełnionej o fakt, że  $\mathbb{R}P^2$  jest rozmaitością wymiaru 2

$$1 = V - E + T = V - \frac{1}{3}E$$

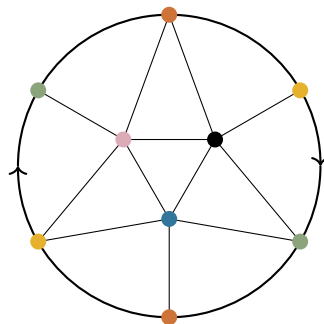
dokładamy jeszcze górne ograniczenie na liczbę krawędzi, czyli  $E \leq \binom{V}{2}$ , by dostać

$$1 = V - \frac{1}{3}E \geq V - \frac{V(V-1)}{6} = \frac{V(7-V)}{6}$$

$$0 \leq \frac{6+V(V-7)}{6}$$

$V = 6$  jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem tej nierówności.

Dla  $V = 6$  wymagamy  $E = 15$ , czyli 6-wierzchołkowa triangulacja  $\mathbb{R}P^2$  jest grafem  $K_6$ :



Założmy teraz, że wszystkie grafy o co najwyżej  $n$  wierzchołkach narysowane na  $\mathbb{R}P^2$  potrafimy pomalować używając 6 kolorów. Niech  $G$  będzie grafem o  $(n+1)$  wierzchołkach.

1. Jeśli istnieje wierzchołek  $v \in G$  taki, że  $\deg(v) \leq 5$ , to podobnie jak w przypadku torusa, możemy ten wierzchołek wyjąć, pokolorować graf  $G' = G \setminus v$  i znajdziemy dla  $v$  kolor niewykorzystywany przez jego sąsiadów.
2. W tym przypadku zakładamy, że wszystkie wierzchołki  $v \in G$  mają stopień  $\deg(v) \geq 6$ . Tak jak i wcześniej, mamy

$$2E \geq 3T$$

$$2E \geq 6V.$$

Płaszczyzna rzutowa ma charakterystykę Eulera 1, w takim razie

$$1 = V - E + T$$

$$3 = 3V - 3E + 3T \leq E - 3E + 2E = 0$$

co jest sprzecznością. W takim razie w grafie narysowanym na  $\mathbb{R}P^2$  zawsze znajdziemy wierzchołek  $\deg(v) \leq 5$  i wykonamy kroki z pierwszego punktu.

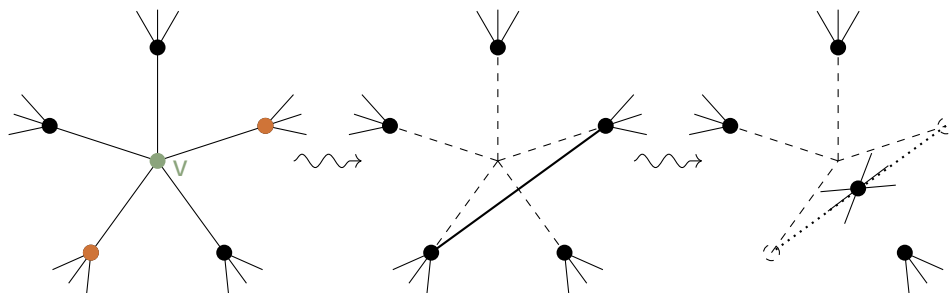
## Sfera $S^2$ . . . . .

W przypadku sfery próżno szukać grafu, którego nie pokolorujemy 4 kolorami - prawdziwe jest twierdzenie o 4 barwach.



Oczywiście grafy, które mają nie więcej niż 5 wierzchołków pokolorujemy bez problemu. Załóżmy więc, że każdy graf o co najwyżej  $n$  wierzchołkach możemy pokolorować i niech  $G$  będzie  $(n + 1)$ -wierzchołkowym grafem.

- 1 Jeśli znajdziemy wierzchołek stopnia  $\leq 4$  lub mniej to robimy to co w przypadku torusa i płaszczyzny rzutowej.
- 2 Jeśli istnieje wierzchołek  $v \in G$  stopnia 5.
  - i. Jeśli  $v$  ma 2 sąsiadów, którzy nie są ze sobą połączeni, wtedy po wyjęciu  $v$  możemy złączyć ich w jeden wierzchołek:



Po takiej operacji nadal mamy graf narysowany na  $S^2$ , bo tylko wciągnęliśmy w pustkę pozostawioną przez  $v$  krawędzie.

Taki graf jak na skrajnie prawym rysunku ma  $(n - 2)$  wierzchołki, więc możemy go pomalować 5 kolorami. Dwóch sąsiadów  $v$  zlepiliśmy w jedno i pokolorowaliśmy tym samym kolorem, więc po ich rozczepieniu nadal mogą mieć ten sam kolor.  $v$  miało 5 sąsiadów, którzy używają nie więcej niż 4 kolorów - możemy pozostały kolor użyć na  $v$ .

- ii. Jeśli wszyscy sąsiedzi  $v$  są ze sobą połączeni, to wtedy  $G$  ma podgraf będący  $K_5$ .

Sfera to tak naprawdę punkt z doczepionym dyskiem  $D^2$ , czyli jeśli wytniemy wokół  $v$  dysk zawierający wszystkich jego sąsiadów, to możemy go rozprostować i patrzeć na ten podgraf narysowany na płaszczyźnie. Jednak twierdzenie Kuratowskiego (o grafach) mówi, że na płaszczyźnie możemy narysować graf  $\iff$  nie zawiera podgrafu izomorficznego z  $K_5$  ani z  $K_{3,3}$ . Stąd ten przypadek jest niemożliwy.

- 3 Jeśli każdy wierzchołek  $v \in G$  ma stopień  $> 5$ , to dostaniemy sprzeczność z formułą Gaussa-Bonnet. Ilość krawędzi szacujemy z jednej strony przez stopień wierzchołków:

$$2E = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6V$$

$$E \geq 3V$$

a z drugiej przez fakt, że każda krawędź leży w dwóch ścianach, a każda ściana ma co najmniej 3 krawędzie:

$$2E \geq 3T.$$

Wstawiając to do formuły Gaussa-Bonnet z pamięcią, że  $\chi(S^2) = 2$ , dostajemy

$$2 = V - E + T$$

$$6 = 3V - 3E + 3T \leq E - 3E + 2E = 0$$

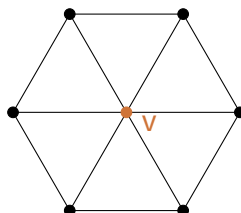
czyli sprzeczność.

## Butelka Kleina . . . . .

Rozważmy graf  $G$  na butelce Kleina. Jeśli  $|G| \leq 6$ , to bez problemu pokolorujemy go 6 kolorami (fakt, że potrzebujemy co najmniej 6 kolorów wynika z rysunku w pkt (a) zadania).

Niech więc  $G$  będzie grafem na butelce Kleina.

- 1 Jeśli istnieje wierzchołek  $v \in G$  taki, że  $\deg(v) \leq 5$ , to możemy ten wierzchołek wyjąć, pokolorować 6 kolorami graf  $G \setminus \{v\}$ , wierzchołek  $v$  pomalować kolorem, który nie pojawia się wśród jego  $\leq 5$  sąsiadów i włożymy go z powrotem do  $G$  nie psując kolorowania.
- 2 Zadanie komplikuje się natomiast, jeśli  $G$  jest 6-regularny. Wybierzmy wierzchołek  $v \in G$ . Ma on 6 sąsiadów, czyli jest wierzchołkiem 6 trójkątów w triangulacji którą stał się  $G$ :



Jeżeli istnieje para sąsiadów, która nie jest ze sobą połączona, to możemy pomalować je na jeden kolor. Wtedy sąsiedzi  $v$  wykorzystują tylko 5 kolorów i ostatni, szósty, pozostaje wolny do kolorowania  $v$ .

Jeśli natomiast wszyscy sąsiedzi  $v$  są ze sobą połączeni, to oznacza, że mamy  $K_7$  zanurzone w  $G$ , które z kolei jest narysowane na butelce Kleina. Wiemy, że  $K_7$  nie można narysować na butelce Kleina, więc dochodzimy do sprzeczności w tym punkcie.

- 3 Jeśli wszystkie wierzchołki  $v \in G$  mają stopień  $\deg(v) > 6$ , to możemy użyć Gaussa-Bonnet, by dostać sprzeczność.

Tak jak wcześniej, szacujemy ilość krawędzi na dwa sposoby:

$$2E \geq \sum_{v \in V} 7 = 7V$$

$$2E \geq 3T$$

wstawiamy to do formuły Gaussa-Bonneta i dostajemy

$$0 = V - E + T$$

$$0 = 21V - 21E + 21T \leq 6E - 21E + 14E = -E$$

co jest sprzeczne z  $E > 0$ .

**Zadanie 6.** Niech  $\mathbb{K}$  będzie ciałem. Grassmannian  $\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, n)$  to przestrzeń  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni  $\mathbb{K}^n$ . Jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  to jest to rozmaitość. Oblicz charakterystykę Eulera Grassmannianu  $\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$  korzystając z uogólnionej formuły Riemanna-Hurwitza i działania torusa  $T^n$  na  $\mathbb{C}^n$ .

. . . . .

Każdą  $k$ -wymiarową podprzestrzeń  $\mathbb{C}^n$  możemy utożsamić z macierzą rzutu ortogonalnego na tę podprzestrzeń, która ma rząd  $k$ . Jeśli  $V \in \text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$ , to macierz z nią utożsamioną będziemy oznaczać  $A_V$ .

## Działanie torusa - definicja

Działanie torusa  $T^n$  na  $\mathbb{C}^n$  to mnożenie przez macierze diagonalne z wyrazami długości 1 na przekątnej. Możemy to działanie przenieść na Grassmannian - torus będzie działał na podprzestrzeń  $k$ -wymiarową  $V$  macierzą  $T$ :

$$TVT^{-1}.$$

### Macierze ortogonalne są hermitowskie

Macierze rzutu zawsze spełniają  $A^2 = A$ . Jeśli ten rzut jest ortogonalny, to dodatkowo wymagamy, aby  $A^T = A$ . Macierz rzutu ortogonalnego na zespolonej przestrzeni wektorowej jest jednocześnie macierzą hermitowską, tzn. dla wszystkich  $x, y$  spełnia  $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle - \langle x, Ay \rangle &= \langle Ax, y \rangle - \langle x - Ax + Ax, Ay \rangle = \\ &= \langle Ax, y \rangle - \langle Ax, Ay \rangle + \langle Ax - x, Ay \rangle = \\ &= \langle Ax, (I - A)y \rangle + \langle (A - I)x, Ay \rangle = 0, \end{aligned}$$

bo dla  $A$  ortogonalnej  $\langle Ax, (I - A)y \rangle = 0$ . Skoro wiemy już, że  $A_V$  jest zawsze macierzą hermitowską, to wiemy, że  $\overline{A_V^T} = A_V^T$ .

### Działanie torusa jest dobrze określone

Wiemy też, że każda hermitowska macierz jest diagonalizowalna przez unitarne macierze z rzeczywistymi wartościami własnymi. Dzięki tej własności macierzy hermitowskich działanie torusa zdefiniowane wcześniej jest dobrze określone.

Jeśli  $V \in \text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$  i  $A_V = PDP^{-1}$ , to po działaniu na  $A_V$  macierzą z torusa też jest diagonalizowalna przez macierze unitarne:

$$TA_VT^{-1} = TPDP^{-1}T^{-1} = (TP)D(TP)^{-1},$$

gdyż  $T$  również jest macierzą unitarną, czyli  $TP$  też takie jest.

### Orbity działania torusa i $\chi$

Torus  $T^n$  jest produktem  $n$  okręgów  $S^1$ . Jeśli działamy okręgiem na przestrzeni, to punkty mają albo trywialny stabilizator, albo trywialną orbitę. Stąd, jeśli  $T^n$  działa na  $\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$  to punkty mają albo trywialną orbitę, albo ich orbita to produkt okręgów.

Jeśli więc określimy odwzorowanie  $f : \text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n) \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)/T^n$ , to wzór Riemanna-Hurwitza podpowiada, że tylko punkty stacjonarne liczą się do charakterystyki Eulera Grassmannianu:

$$\chi(\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)) = \int_{\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)/T^n} \chi(f^{-1}(X)) d\chi(X)$$

będzie zerować się na podzbiorach będących okręgami, bo  $\chi(S^1) = 0$ . Natomiast punkty stałe, których orbity są punktami, będą liczyć się do charakterystyki Eulera po jeden raz. Stąd

$$\chi(\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)) = \#\{\text{punkty stałe działania } T^n\}$$

### Jak wyglądają punkty stałe?

Punkt stały działania torusa musi spełniać

$$TA_VT^{-1} = A_V$$

$$TA_V = A_VT$$

dla wszystkich możliwych  $T$ .

Macierz  $A_V$  jest punktem stałym działania torusa  $\iff$  jest macierzą diagonalną o  $k$  jedynkach i  $(n - k)$  zerach na przekątnej.

$\Rightarrow$

Założmy nie wprost, że istnieje macierz  $A_V$  hermitowska, która nie jest diagonalna, ale jest punktem stałym działania  $T^n$ . Taka macierz musi posiadać niediagonalną macierz unitarną  $P$  w diagonalizacji  $A_V = PDP^{-1}$ . Jako, że  $A_V$  jest punktem stałym, to dla każdego  $T$  przychodzącego z torusa musi zachodzić

$$TPDP^{-1}T^{-1} = PDP^{-1}$$

$$D = (P^{-1}TP)D(P^{-1}TP)^{-1}.$$

Ostatnia równość nie ma szans być spełniona dla wszystkich unitarnych, diagonalnych  $T$  - sprzeczność.

$\Leftarrow$

Wszystkie macierze diagonalne  $A_V$  mające  $k$  jedynek i  $(n - k)$  zer na przekątnej będą punktami stałymi działania torusa. Macierz

$$TA_V$$

to "obcięcie"  $T$  do  $k$  wyrazów na przekątnej, a domnożenie do tego  $T^{-1}$  zwróci 1 w kolumnach, które zostały zachowane oryginalnie przez  $A_V$ . Stąd

$$TA_VT^{-1} = A_V.$$

### Ile jest punktów stałych?

Jeśli macierz rzutu ortogonalnego jest macierzą diagonalną, to musi ona mieć tylko 1 i 0 na przekątnej. Z jej macierzy możemy wywnioskować, że jeśli  $i_1, \dots, i_k$  to numery kolumn, które mają niezerowy wyraz, to przestrzeń na którą jest wykonywany rzut wynosi

$$\text{Lin}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}.$$

W takim razie, obrazem wektorów  $e_{i_j}$  musi być on sam. Czyli na przekątnej będą 1 tam, gdzie jest kolumna odpowiadająca wektorom z bazy przestrzeni i 0 dla pozostałych wektorów.

Stąd, albo przestrzeń z Grassmannianu jest punktem stałym działania, albo nie jest diagonalna. Macierzy z  $k$  jedynkami i  $(n - k)$  zerami na przekątnej jest  $\binom{n}{k}$ , czyli charakterystyka Eulera Grassmannianu wynosi

$$\chi(\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)) = \binom{n}{k}.$$

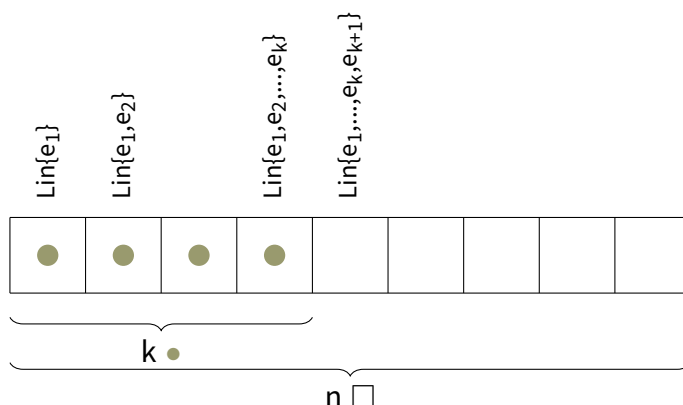
**Zadanie 7.** Grassmannian  $\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$  ma pewien podział na komórki, który możemy opisać za pomocą szufladek i groszków. Rozważmy  $n$  szufladek, w których umieszczamy  $k$  groszków, co najwyżej po jednym w danej szufladzie. Takie rozmieszczenie groszków reprezentuje zbiór  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni  $\mathbb{C}^n$ . Kolejne  $l$  szufladek od lewej reprezentuje podprzestrzeń  $\mathbb{C}^n$  rozpiętą przez pierwsze  $l$  wektorów bazowych  $e_1, e_2, \dots, e_l$ , a liczba groszków leżących w  $l$  pierwszych  $l$  szufladkach to wymiar przekroju  $k$ -wymiarowej podprzestrzeni z tego zbioru z podprzestrzenią rozpiętą przez  $e_1, \dots, e_l$ .

- (a) Pokaż, że konkretne rozmieszczenie groszków w szufladach reprezentuje przestrzeń  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni  $\mathbb{C}^n$  izomorficzna z  $\mathbb{C}^m$ , gdzie  $m$  to liczba przesunięć groszków w lewo o jedną szufladkę dopóki to możliwe.

- (b) Przestrzeń  $\mathbb{C}^m$  z poprzedniego podpunktu to otwarta komórka wspomnianego rozkładu. Komórka odpowiadająca rozmieszczeniu groszków A zawiera się w domknięciu komórki odpowiadającej rozmieszczeniu B, gdy A można otrzymać z B poprzez kolejne przesunięcia groszków w lewo o jedną szufladkę. Domknięcie komórki odpowiadającej rozmieszczeniu A nazywamy (A) rozmaitością Schuberta. Policz charakterystykę Eulera rozmaitości Schuberta. Policz charakterystykę Eulera  $Gr_{\mathbb{C}}(k, n)$  zliczając te komórki

.....

- (a) Zaczniemy od rozmieszczenia groszków tak, że nie możemy już żadnego przesunąć w lewo.

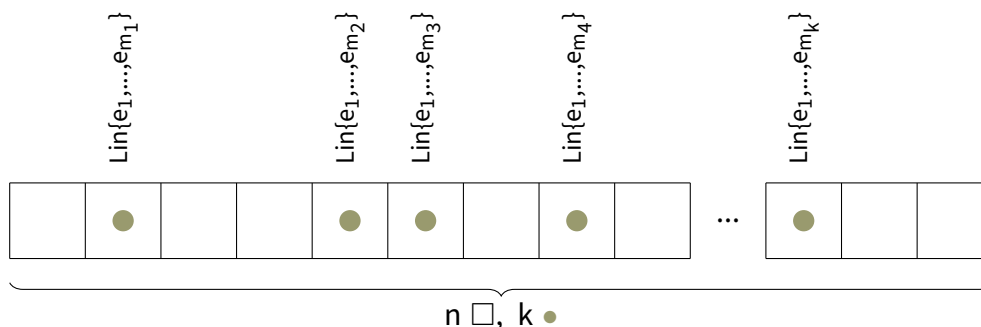


To znaczy, że podprzestrzenie które są kodowane przez to ustawienie groszków kroją się niepusta z podprzestrznią rozpinaną przez pierwszy wektor bazowy  $e_1$ , z podprzestrznią rozpiętą przez dwa pierwsze wektory bazowe  $e_1, e_2$  i tak dalej. W takim razie, typowa podprzestrzeń reprezentowana przez takie ustawienie jest generowana przez wektory

$$\begin{aligned} &e_1 \\ &a_1^1 e_1 + e_2 \\ &\dots \\ &a_1^k e_1 + a_2^k e_2 + \dots + e_k \end{aligned}$$

Interesuje nas przestrzeń rozpinana przez takie wektory, więc w  $i$ -tym wektorze możemy usunąć część przychodzącą z  $j < i$  wektorami. W ten sposób dostaniemy przestrzeń rozpiętą przez  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Nie mamy żadnego parametru, więc jest to izomorficzne z punktem, czyli z  $\mathbb{C}^0$ .

Założmy, że mamy  $k$  groszków umieszczonych odpowiednio w szufladkach o numerze  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .



Dzięki pierwszemu groszkowi możemy do naszej  $k$ -wymiarowej podprzestrzeni  $\mathbb{C}^n$  wybrać wektor

$$a_1^{m_1} e_1 + a_2^{m_1} e_2 + \dots + e_{m_1}.$$

Kolejny groszek, na  $m_2 > m_1$  miejscu pozwoli nam dołożyć wektor

$$a_1^{m_2} e_1 + a_2^{m_2} e_2 + \dots + a_{m_1}^{m_2} e_{m_1} + \dots + e_{m_2}.$$

Ze współczynników pojawiających się przy kolejnych  $e_i$  możemy stworzyć macierz

$$\begin{bmatrix} a_1^{m_1} & a_2^{m_1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_1^{m_2} & a_2^{m_2} & \dots & a_{m_1}^{m_2} & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_1^{m_k} & a_2^{m_k} & \dots & a_{m_1}^{m_k} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

która ma  $m_k$  kolumn i  $k$  wierszy. Możemy skorzystać z algorytmu eliminacji Gaussa, by dostać w pierwszych  $k$  kolumnach kwadratową macierz górnotrójkątną z 1 na przekątnej.

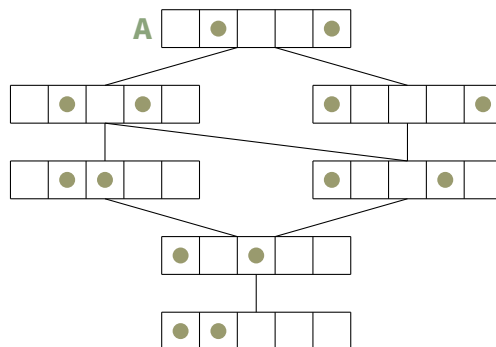
W pierwszym wierszu zostaje nam  $(m_1 - 1)$  zmiennych, w drugim wierszu mamy  $(m_2 - 2)$  nowych zmiennych i tak dalej. Sumarycznie dostajemy

$$\sum_{i=1}^k (m_i - i)$$

parametrów w takiej macierzy, co jest równe ilości potencjalnych przesunięć groszków:  $i$ -ty groszek może przejść przez co najwyżej  $(m_i - i)$  szufladek, niekoniecznie za jednym zamachem.

Pokazaliśmy, że jeśli możemy dokonać  $m$  przesunięć groszków, to takie ustawienie możemy zapisać jako przestrzeń liniową przy pomocy  $m$  parametrów. Jest to więc przestrzeń izomorficzna z  $\mathbb{C}^m$ .

- (b)** Przejścia od dowolnego ułożenia groszków  $A$  do ułożenia, gdzie nie możemy już wykonać ruchów możemy przedstawić jako graf, gdzie wierzchołki to ułożenia pośrednie:



Przez  $a_i$  oznaczmy ilość wierzchołków w wierszu  $i$ , liczonym od dołu. Najniższy wiersz liczymy jako wiersz zerowy. Charakterystyka Eulera ( $A$ ), jeśli ustawienie  $A$  jest na wierszu  $m$  od dołu, wyniesie

$$\chi((A)) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \cdot a_i.$$

Czyli dla rysunku wyżej,  $\chi((A)) = 1 - 1 + 2 - 2 + 1 = 1$ .

Wprost najłatwiej jest wyliczyć charakterystykę Eulera ( $A$ ) dla  $A$  z małą liczbą przesunięć. Np. dla ustawienia trywialnego, tzn.



charakterystyka Eulera rozmaitości Schuberta to 1.

Jeśli możemy wykonać tylko jeden ruch, tzn. mamy ustawienie

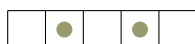


to rozmaitość Schuberta ma charakterystykę 0. Ustawienie gdzie możemy wykonać dwa ruchy to z kolei 1, gdyż po pierwszym ruchu wyładujemy z powrotem w przypadku narysowanym wyżej. Będziemy więc mieli trzy wiersze w grafie, każdy mający tylko jeden element.

Jeśli z A możemy wykonać 3 ruchy, mamy już o wiele bardziej skomplikowaną pozycję. Jeśli A ma ostatni groszek oddalony o 3 szufladki od pozostałych, to dostajemy prosty graf



i charakterystykę Eulera 0. Możemy też mieć ustawienie



wtedy pierwszy ruch wykonujemy na dwa sposoby - charakterystyka Eulera wyniesie

$$\chi = -1 + 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 1$$

Ostatnim możliwym ustawieniem skrajnie prawych groszków na 3 ruchy jest



z charakterystyką Eulera równą 0.

Charakterystykę Eulera całego Grassmanianu liczymy dodając charakterystykę Eulera kolejnych komórek Schuberta:

$$\chi(\text{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)) = \sum_{(A): A \in \text{Gr}} \chi((A)) = \binom{n}{k}$$

gdyż jest to ilość wierzchołków w grafie kolejnych przejść od ustawienia wszystkich k groszków skrajnie po prawej stronie do ustawienia skrajnie po lewej stronie.