Charakterystyka Eulera

Notatki z wykładu

2023

1 Wprowadzenie

Charakterystyka Eulera to liczba, którą przypisujemy obiektom pojawiającym się w wielu dziedzinach matematyki: kombinatoryce, topologii, geometrii. Jest ona niezmiennikiem tych obiektów. To znaczy, jest to wielkość, która nie zmienia się przy wykonywaniu na tych obiektach pewnych przekształceń zachowujących ich strukturę. Jest więc ona ważnym narzędziem służącym do charakteryzacji takich obiektów- pozwala ona na ich rozróżnianie wewnątrz jakichś rodzin. Użyjemy jej na przykład do charakteryzacji powierzchni zamkniętych. Zanim przejdziemy do ścisłych definicji, zapoznamy się z kilkoma przykładami obiektów, którym można przypisać charakterystykę Eulera i które pokażą, z czym mamy do czynienia.

Przykłady 1.1.

1. *Zbiór skończony.* Charakterystykę Eulera definiujemy dla zbioru skończonego X jako jego moc.
$$\chi(X) = |X|$$
Przekształceniem, które zachowuje strukturę zbioru jest bijekcja. Jeśli istnieje bijekcja
$$f : X \to Y$$
pomiędzy zbiorami skończonymi X i Y, to mamy
$$\chi(X) = |X| = |Y| = \chi(Y).$$
Moc zbioru zostaje zachowana przez bijekcje, czyli jest ona jakimś niezmiennikiem. Mamy proste własności:
   - addytywność
$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$$

- multiplikatywność
$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$$
- normalność
$$\chi(\emptyset) = 0$$

Nie jest to jednak jedyny sposób na zdefiniowanie niezmiennika zbiorów skończonych. Równie dobrze moglibyśmy zdefiniować go tak:

$$\chi(X) = |X| + 7$$

lub tak:

$$\chi(X) = 37 \cdot |X|$$

Zadanie: Czy to rzeczywiście są niezmienniki zbiorów skończonych? Czy są addytywne, multiplikatywne, normalne? Jeśli nie, to jak dopasować te własności do powyższych χ?

Samo bycie niezmiennikiem nie mówi nam zatem tak dużo. Potrzebujemy właśnie tych dodatkowych własności, które go dookreślają.

2. *Przestrzeń liniowa.* Zbiory same w sobie nie są dla nas interesujące. Chcemy więcej struktury. Ciekawszym przykładem są przestrzenie liniowe. Dla przestrzeni liniowej V zdefiniujmy charakterystykę Eulera jako jej wymiar:

$$\chi(V) = \dim V$$

Wymiar jest zachowywany przez izomorfizm przestrzeni liniowych, czyli jest to niezmiennik. Mamy też podobne własności:

- addytywność:
$$\chi(V \oplus W) = \chi(V) + \chi(W)$$
- multiplikatywność:
$$\chi(V \otimes W) = \chi(V) \cdot \chi(W)$$

Mamy dodatkowo pewien związek pomiędzy pierwszym, a drugim przykładem. Rozważmy zbiór skończony X. Rozważmy zbiór $V(X)$ wszystkich funkcji z X w ciało $\mathbb{K}$. Jest to przestrzeń liniowa z punktowym dodawaniem i mnożeniem przez stałe. Z powyższymi definicjami charakterystyki Eulera mamy:

$$\chi(X) = \chi(V(X))$$

Zadanie: Udowodnić powyższą równość.

Możemy podejść do tematu inaczej. Zamiast ogólnych przestrzeni liniowych, rozważmy pewien ich rodzaj, czyli *zgradowane* przestrzenie liniowe. Zgradowana przestrzeń liniowa, to przestrzeń liniowa V wraz z wyznaczonymi jej podprzestrzeniami V_i, $i \in \mathbb{N}$, takimi że

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus ...$$

Znanym przykładem takiej przestrzeni jest przestrzeń wielomianów jednej zmiennej, powiedzmy o współczynnikach w $\mathbb{R}$, czyli $\mathbb{R}[X]$. Oznaczając przez

$$\mathbb{R}_i[X] = \{aX^i : a \in \mathbb{R}\}$$

przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia i możemy napisać

$$\mathbb{R}[X] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_i[X],$$

dostając w ten sposób gradację $\mathbb{R}[X]$. Zauważmy, że zgradowaną przestrzeń liniową możemy określić podając bazę każdego z V_i. W przypadku $\mathbb{R}[X]$ bazą $\mathbb{R}_i[X]$ jest singleton $\{X^i\}$.

Zadanie: Zaproponować sposob na przedstawienie dowolnej przestrzeni liniowej jako zgradowanej.

Charakterystykę Eulera dla zgradowanej przestrzeni liniowej zdefiniujemy przez

$$\chi(V) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim V_i$$

Możemy dla ułatwienia przyjąć, że $V_i = 0$ dla $i > n$, by mieć pewność, że powyższy szereg jest zbieżny.
Skąd taka definicja? O tym przekonamy się później. Tymczasem zaznaczmy jeszcze, że przyjmując, że dwie zgradowane przestrzenie liniowe są izomorficzne, gdy izomorficzne są ich poszczególne składowe, czyli

$$V \cong W \iff \forall_{i \in \mathbb{N}} V_i \cong W_i,$$

powinniśmy łatwo zauważyć, że tak zdefiniowane χ jest niezmiennikiem zgradowanych przestrzeni liniowych.

Zadanie: Zapoznać się z definicją $\oplus$ i $\otimes$ dla zgradowanych przestrzeni liniowych i sformułować warunek addytywności i multiplikatywności niezmiennika χ dla tych operacji, czyli obliczyć $\chi(V \oplus W)$ oraz $\chi(V \otimes W)$ w terminach $\chi(V)$ i $\chi(W)$, gdzie V i W są zgradowanymi przestrzeniami liniowymi skończonego stopnia, czyli $V_i = W_j = 0$ dla $i > n$ oraz $j > m$.

3. *Kompleks łańcuchowy.* Kolejny przykład jest pewnym uogólnieniem poprzedniego. Kompleksem łańcuchowym nazywamy ciąg przestrzeni liniowych i homomorfizmów (przekształceń liniowych) pomiędzy nimi:

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

które spełniają $\partial_i \partial_{i+1} = 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Homomorfizmy ∂_i nazywamy *brzegowaniami* lub *różniczkami* i często odnosimy się do wszystkich na raz pisząc ∂ bez wyróżniania indeksu. Podobnie możemy odnieść się do całego kompleksu pisząc C i możemy pisać $\partial : C \to C$. Zauważmy, że mając ciąg przestrzeni liniowych, możemy w oczywisty sposób dostać z nich zgradowaną przestrzeń liniową biorąc sumę prostą wyrazów tego ciągu. Oznaczmy

$$\bigoplus C = \bigoplus_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Charakterystykę Eulera kompleksu łańcuchowego C zdefiniujemy jako charakterystykę Eulera zgradowanej przestrzeni liniowej $\bigoplus C$, czyli

$$\chi(C) = \chi(\bigoplus C) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{dim } C_i.$$

Kompleksy łańcuchowe możemy definiować ogólniej oraz możemy przypisywać je przestrzeniom topologicznym tak, by zwracały nam one o nich jakąś informację. Do związku z przestrzeniami topologicznymi wrócimy później, a teraz rozważymy jeszcze obiekt, który nazywamy *homologiami* kompleksu łańcuchowego i który służy do pozyskiwania tych informacji. Warunek $\partial_i \partial_{i+1} = 0$ kompleksu łańcuchowego, który w skrócie zapisujemy $\partial^2 = 0$ możemy sformułować inaczej, mianowicie:

$$\text{im } \partial_{i+1} \subset \text{ker } \partial_i$$

To oznacza, że $\text{im } \partial_{i+1}$ jest podprzestrzenią $\text{ker } \partial_i$, co pozwala nam zdefiniować iloraz

$$H_i(C) = \frac{\text{ker } \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}},$$

który nazywamy i-tymi homologiami kompleksu C. Policzmy homologie bardzo prostego kompleksu łańcuchowego:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} V \xrightarrow{\partial_1} W \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

- $H_0 = \frac{\text{ker } \partial_0}{\text{im } \partial_1} = \frac{W}{\text{im } \partial_1} = \text{coker } \partial_1$
- $H_1 = \frac{\text{ker } \partial_1}{\text{im } \partial_2} = \frac{\text{ker } \partial_1}{0} = \text{ker } \partial_1$

- $H_2 = 0$ (przyjmujemy, że z lewej strony mamy ciąg zerowych przestrzeni i homomorfizmów).

Z algebry liniowej mamy, że

$$\dim W = \dim(\mathrm{im}\ \partial_1) + \dim(\mathrm{coker}\ \partial_1)$$

oraz

$$\dim V = \dim(\mathrm{im}\ \partial_1) + \dim(\ker \partial_1)$$

Stąd charakterystyka Eulera tego kompleksu, to

$$\dim V - \dim W = \dim H_1 - \dim H_0$$

Przekonamy się, że w ogólnym przypadku homologie też niosą informację o charakterystyce Eulera kompleksu łańcuchowego.
Jednym z naszych głównych celów będzie badanie przestrzeni topologicznych za pomocą charakterystyki Eulera. Pokażemy, że zarówno charakterystyka Eulera, jak i homologie niosą bardzo przydatne informacje o przestrzeniach topologicznych i w piękny sposób ze sobą współgrają. Pierwszym krokiem do zdefiniowania charakterystyki Eulera dla przestrzeni topologicznych będzie zdefiniowanie jej dla kompleksów symplicjalnych, które możemy rozumieć jako schematyczne przedstawienie przestrzeni topologicznej. Dobrą analogią może tu być przybliżanie funkcji ciągłych funkcjami ciągłymi, częściowo liniowymi. Przejdźmy zatem do definicji kompleksów symplicjalnych.

2 Kompleksy symplicjalne

Definicja 2.1.

1. *Kompleks symplicjalny* $\mathcal{K}$ na zbiorze V to rodzina niepustych podzbiorów V spełniająca

   - Dla każdego $v \in V$ singleton $\{v\} \in \mathcal{K}$
   - Dla każdego $A \subset V$ i dla każdego podzbioru $B \subset A$ jeśli $A \in \mathcal{K}$, to $B \in \mathcal{K}$.

   Zbiór V nazywamy *zbiorem wierzchołków*. Często utożsamiamy v z $\{v\}$. Będziemy zajmować się kompleksami skończonymi, to znaczy przyjmujemy $|V| < \infty$.

2. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym na zbiorze V. Rodzinę $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ nazywamy *podkompleksem* kompleksu $\mathcal{K}$, gdy jest ona kompleksem symplicjalnym na zbiorze wierzchołków $V(\mathcal{L}) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L \subset V$.

3. Elementy $\sigma \in \mathcal{K}$ jak i podkompleksy $\mathcal{K}$ złożone z wszystkich niepustych podzbiorów σ nazywamy *sympleksami*. *Wymiarem* sympleksu σ nazywamy liczbę

$$\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$$

   Gdy $|\sigma| = n + 1$, to σ nazywamy n-sympleksem (sympleksem n-wymiarowym).

4. *Wymiarem* kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ nazywamy liczbę

$$\dim(\mathcal{K}) = \max \{\dim(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}$$

   Czyli wymiar największego sympleksu w $\mathcal{K}$.

Przykłady 2.2.

1. Gdy $\mathcal{K} = \mathcal{P}(V)$, to $\mathcal{K}$ nazywamy *sympleksem* $(|V|-1)$-wymiarowym. Oznaczamy go (między innymi) Δ^V lub Δ^n, gdy $|V| = n + 1$.

2. Podkompleks sympleksu Δ^V złożony z właściwych podzbiorów V nazywamy *brzegiem* Δ^V i oznaczamy go $\partial\Delta^V$.

3. W zależności od konwencji *ścianami* sympleksu Δ^n nazywamy sympleksy jego brzegu $\partial\Delta^n$ lub jego $(n-1)$-wymiarowe sympleksy.

4. Podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ złożony ze zbiorów o co najwyżej $k + 1$ elementach, nazywamy *k-szkieletem* kompleksu $\mathcal{K}$.

5. Kompleksy 1-wymiarowe nazywamy *grafami symplicjalnymi*. Są to grafy bez pętli i bez wielokrotnych krawędzi.

6. *Stożkiem* nad kompleksem $\mathcal{K} = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ o wierzchołku w v (który nie jest wierzchołkiem kompleksu $\mathcal{K}$) nazywamy kompleks

$$C_v(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{\{v\}, \sigma_1 \cup \{v\}, ..., \sigma_n \cup \{v\}\}$$

   nad zbiorem wierzchołków $V \cup \{v\}$.

   Zadanie: Czym jest stożek n-sympleksu?

7. *Gwiazdą* wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ złożony z tych sympleksów, które zawierają wierzchołek v. Oznaczamy ją przez $\mathrm{St}(v)$.

8. *Linkiem* wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy podkompleks $\mathrm{St}(v)$ złożony z tych sympleksów, które nie zawierają v. Oznaczamy go przez $\mathrm{Lk}(v)$.

9. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni topologicznej (zbioru) X, czyli pewną rodziną podzbiorów X, której suma mnogościowa jest równa X. Najcześciej spotyka się pokrycie otwarte przestrzeni topologicznej, czyli pokrycie, którego zbiory są otwarte. Załóżmy, że pokrycie $\mathcal{U}$ jest skończone. *Nerwem* pokrycia $\mathcal{U}$ nazywamy kompleks symplicjalny, którego wierzchołki to zbiory pokrycia i w którym podzbiór zbioru wierzchołków rozpina sympleks, gdy przekrój zbiorów, którymi są te wierzchołki, jest niepusty.

   Zadanie: Sprawdzić, że nerw pokrycia rzeczywiście jest kompleksem symplicjalnym

   Zadanie: Opisać nerw pokrycia n-sympleksu przez jego ściany (w obu konwencjach).

Rozważmy jeszcze jeden ważny przykład, jakim jest *podrozbicie barycentryczne* kompleksu symplicjalnego.

Definicja 2.3. Rozważmy (skończony) zbiór częściowo uporządkowany (poset)

$$P = (P, \leq).$$

Realizacja symplicjalna posetu P to kompleks symplicjalny, którego n-sympleksami są łańcuchy o $n+1$ elementach.

Zadanie: Czym jest realizacja symplicjalna skończonego zbioru liniowo uporządkowanego?

Definicja 2.4. Kompleks symplicjalny $\mathcal{K}$ na zbiorze wierzchołków V nazywamy *flagowym*, jeśli dla każdego $S \subset V$, jeśli każdy dwuelementowy podzbiór zbioru S jest elementem $\mathcal{K}$, to S też jest. To znaczy, jeśli jakiś jednowymiarowy podkompleks $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ jest izomorficzny z 1-szkieletem sympleksu (potem zdefiniujemy formalnie, co oznacza "izomorficzny"), to w $\mathcal{K}$ jest sympleks, którego 1-szkieletem jest $\mathcal{L}$.

Zadanie: Pokazać, że realizacja symplicjalna posetu jest kompleksem flagowym.

Zadanie: Czy nerw pokrycia kostki $[0, 10]^n$ n-wymiarowymi kulami o promieniu 1 jest kompleksem flagowym? A kostkami $[0, 1]^n$?

Definicja 2.5. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym. Zauważmy, że $(\mathcal{K},\subset)$ jest posetem. Realizację symplicjalną $\mathcal{K}$ jako posetu nazywamy *podrozbiciem barycentrycznym* $\mathcal{K}$ i oznaczamy między innymi $\mathcal{K}'$.

Zadanie: Podać inną (równoważną) definicję podrozbicia barycentrycznego.

2.1 Realizacja geometryczna kompleksu symplicjalnego

Kompleksy symplicjalne wygodnie jest przedstawiać geometrycznie. Służy do tego ich *geometryczna realizacja*.

Definicja 2.6. Niech Δ^V będzie sympleksem o zbiorze wierzchołków V i niech $\mathbb{R}^V$ będzie przestrzenią wektorową o bazie V. *Realizacją geometryczną* $\widehat{\Delta^V}$ sympleksu Δ^V, nazywamy otoczkę wypukłą zbioru V, czyli

$$\widehat{\Delta^V} = \mathrm{Conv}(V) = \{\sum_{v \in V} t_v v : \; t_v \in [0,1], \; \sum_{v \in V} t_v = 1\}$$

Kobinację liniową, której współczynniki spełniają warunki takie, jak t_v powyżej, nazywamy *kombinacją wypukłą*.

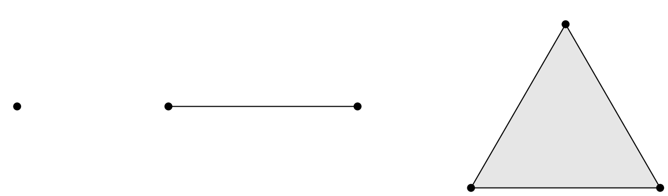
Zadanie: Opsiać ściany (sympleksy) sympleksu Δ^V w jego realizacji geometrycznej.

Realizacja geometryczna $\hat{\mathcal{K}}$ kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ na zbiorze wierzchołków V to suma realizacji geometrycznych sympleksów $\sigma \in \mathcal{K}$ w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^V$:

$$\hat{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \hat{\sigma}.$$

Taką przestrzeń nazywać też będziemy *geometrycznym kompleksem symplicjalnym.* Analogicznie definijuemy geometryczne sympleksy.
Rozważamy $\hat{\mathcal{K}}$ jako przestrzeń topologiczną (metryczną) z topologią (metryką) dziedziczoną z $\mathbb{R}^V$.
Ogólniej realizacją geometryczną kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy dowolną przestrzeń topologiczną homeomorficzną z wyżej skonstruowaną przestrzenią $\hat{\mathcal{K}}$, a geometrycznym kompleksem symplicjalnym nazwyać będziemy przestrzeń topologiczną X z wyróżnioną rodziną podzbiorów $\mathcal{X}$, która jest kompleksem symplicjalnym i której realizacja geometryczna $\widehat{\mathcal{X}}$ jest homeomorficzna z wyjściową przestrzenią topologiczną X. Z kontekstu wynikać będzie do czego się odnosimy mówiąc realizacja geometryczna kompleksu.

Przykład 2.7. Realizacje geometryczne 0-,1- i 2-sympleksu to odpowiednio punkt, odcinek i trójkąt:



Zadanie: Opisać realizację geometryczną stożka nad kompleksem $\mathcal{K}$.

Zadanie: Zdefiniować pojęcie stożka nad przestrzenią topologiczną X.

Zadanie: Pokazać, że realizacja geometryczna gwiazdy $\mathrm{St}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą kulą w $\mathcal{K}'$ o środku w v. Pokazać, że realizacja geometryczna linku $\mathrm{Lk}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą sferą w $\mathcal{K}'$ o środku w v.

Wspomniane wcześniej podrozbicie barycentryczne kompleksu symplicjalnego można przeprowadzić na geometrzycznej realizacji kompleksu:
Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym. Realizacje geometryczne $\widehat{\sigma}$ sympleksów $\sigma \in \mathcal{K}$ nazywać będziemy sympleksami realizacji geometrycznej $\widehat{\mathcal{K}}$. Podrozbiciem barycentrycznym $\widehat{\mathcal{K}}$ będzie skonstruowany poniżej geometryczny kompleks symplicjalny $(\widehat{\mathcal{K}})'$. Konstrukcję przeprowadzimy dla $\mathcal{K} = \Delta^V$. Rozszerza się ona na ogólne kompleksy tak, jak definicja realizacji geometrycznej. Mamy

$$\widehat{\Delta^V} = \{\sum_{v\in V} t_v v :\ t_v \in [0,1],\ \sum_{v\in V} t_v = 1\}$$

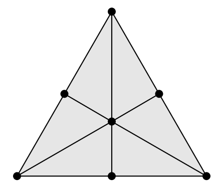
- Wierzchołkami $(\widehat{\Delta^V})'$ są te punkty z $\widehat{\Delta^V}$, których niezerowe współczynniki t_v w przedstawieniu jako kombinacja wypukła elementów V są wszystkie równe, czyli punkty postaci
$$\sum_{v\in A} \frac{1}{|A|} v$$
gdzie $A \subset V$. Punkty te nazywamy barycentrami ścian $\widehat{\Delta^V}$.

- n-sympleksy $(\widehat{\Delta^V})'$ to otoczki wypukłe zbiorów $A = \{w_0, ..., w_n\}$ wierzchołków $(\widehat{\Delta^V})'$ o tej własności, że dla każdych $0 \le i, j \le n$, $i \ne j$, jeśli
$$w_i = \sum_{v\in V} t_v v$$
$$w_j = \sum_{v\in V} s_v v$$
i istnieje $x \in V$ taki, że $t_x = 0 \ne s_x$, to nie istnieje $y \in V$ taki, że $s_y = 0 \ne t_y$. oraz istnieje $v \in V$ taki, że dla każdego i oraz w_i jak wyżej $t_v \ne 0$.

Zadanie: Sprawdzić, czy rzeczywiście da się rozszerczyć tę konstrukcję na ogólne kompleksy $\mathcal{K}$.

Zadanie: Sprawdzić, że $\widehat{\mathcal{K}'}$ jest homeomorficzny z $(\widehat{\mathcal{K}})'$, czyli jest też homeomorficzny z $\widehat{\mathcal{K}}$.

Przykład 2.8. (Geometryczne) podrozbicie barycentryczne trójkąta:



2.2 Wielościany

Do uzupełnienia: definicja i przykłady z listy zadań.

Przykłady 2.9.

1. *Permutościan* wymiaru n to wielościan wypukły rozpięty przez zbiór punktów

$$\{(\sigma(1), ..., \sigma(n)) : \sigma \in S_n\}$$

3 Niezmienniki kompleksów symplicjalnych

Definicja 3.1. Niech $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ będą kompleksami symplicjalnymi na zbiorach V_1, V_2 odpowiednio.
Mówimy, że $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ są *izomorficzne* ($\mathcal{K}_1 \simeq \mathcal{K}_2$), gdy istnieje bijekcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że

$$\forall A \in \mathcal{P}(V_1)\ (A \in \mathcal{K}_1 \iff f[A] \in \mathcal{K}_2)$$

Ta bijekcja zadaje *izomorfizm* $F : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ przez

$$F(A) = f[A]$$

Izomorfizm kompleksów symplicjalnych możemy zdefiniować w inny sposób. Odwzorowanie $F : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ nazywamy *odwzorowaniem symplicjalnym*, gdy $F(\sigma) \in \mathcal{K}_2$ dla każdego $\sigma \in \mathcal{K}_1$. W szczególności obrazami wierzchołków są wierzchołki. Odwzorowanie symplicjalne F nazywamy izomorfizmem, gdy jest ono bijekcją.

Zadanie: Sprawdzić, że odwzorowanie odwrotne do symplicjalnego jest symplicjalne.

Powyższa definicja jest oczywista i wystarczy nam do zdefiniowania niezmienników kompleksów symplicjalnych. W przyszłości będziemy jednak chcieli rozszerzyć tę definicję, aby umożliwić istnienie pewnej odpowiedniości między odwzorowaniami symplicjalnymi kompleksów symplicjalnych, a odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni topologicznych.

Definicja 3.2. $I(\cdot)$ nazywamy *niezmiennikiem kompleksów*, gdy dla dowolnych kompleksów symplicjalnych $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ mamy

$$\mathcal{K}_1 \simeq \mathcal{K}_2 \implies I(\mathcal{K}_1) = I(\mathcal{K}_2)$$

Fakt 3.3. *(**Zadanie**) Każde dwa n-sympleksy są izomorficzne.*

Wniosek 3.4. *Jeśli $I(\cdot)$ jest niezmiennikiem kompleksów, to dla każdego n istnieje wartość x_n taka, że dla każdego n-sympleksu Δ^n mamy $I(\Delta^n) = x_n$.*

Fakt 3.5. *(**Zadanie**) Niech $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ będą podkompleksami kompleksu $\mathcal{K}$. Wtedy $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ też są podkompleksami $\mathcal{K}$.*

Definicja 3.6. Mówimy, że niezmiennik kompleksów $I(\cdot)$ jest *addytywny*, gdy dla każdego kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ i dla każdych podkompleksów $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2 < \mathcal{K}$ jeśli $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, to

$$I(\mathcal{K}) = I(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = I(\mathcal{K}_1) + I(\mathcal{K}_2) - I(K_1 \cap \mathcal{K}_2)$$

Przykłady 3.7.

1. (**Zadanie**) Liczba n-sympleksów w kompleksie $\mathcal{K}$ oznaczana przez $f_n(\mathcal{K})$ jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów. Dla każdego kompleksu $\mathcal{K}$ definiujemy jego f-wektor $f(\mathcal{K}) = (f_0(\mathcal{K}), f_1(\mathcal{K}), ..., f_{\dim(\mathcal{K})}(\mathcal{K}), 0, 0, ...)$.

2. (**Zadanie**) Kombinacja liniowa addytywnych niezmienników kompleksów jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.

Twierdzenie 3.8. *Każdy addytywny niezmiennik kompleksów $I(\cdot)$ jest kombinacją liniową niezmienników $f_n(\cdot)$, czyli istnieje ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$I(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(\cdot)$$

Dowód. Niech $I(\cdot)$ będzie addytywnym niezmiennikiem kompleksów. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym nad zbiorem wierzchołków V. Wystarczy pokazać, że $I(\mathcal{K})$ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje wartości na sympleksach. Pokażemy to przez indukcję przeprowadzoną po złożoności $\mathcal{K}$. Kompleks $\mathcal{K}_1$ jest mniej złożony od $\mathcal{K}$, gdy jest jego właściwym podkompleksem.

- $\mathcal{K}$ – sympleks, OK.

- $\mathcal{K}$ nie jest sympleksem. Niech $\Delta \in \mathcal{P}(V)$ będzie sympleksem nienależącym do $\mathcal{K}$ o najmniejszym wymiarze. Niech $\Delta = \{v_0, ..., v_k\} \subset V$. Oznaczmy przez $\mathrm{St}(v_0)$ gwiazdę wierzchołka v_0 w $\mathcal{K}$. Mamy dwa przypadki

  1. $k = 1$, wtedy $\{v_1\} \notin \mathrm{St}(v_0)$, bo $\Delta = \{v_0, v_1\} \notin \mathcal{K}$.
  2. $k > 1$, wtedy sympleks $\Delta_0 = \{v_1, ..., v_k\}$ należy do $\mathcal{K}$, bo $\dim(\Delta_0) < \dim(\Delta)$.

Dla każdego z przypadków niech $\mathcal{K}_0$ będzie największym podkompleksem $\mathcal{K}$ o wierzchołkach $V \setminus \{v_0\}$. Niech $\mathcal{K}_1$ będzie podkompleksem kompleksu $\mathcal{K}$, który jest komponentą spójności $\mathcal{K}_0$ (po przejściu do realizacji geometrycznych) zawierającą sympleks Δ_0 (dla $k = 1$ mamy $\Delta_0 = v_1$). Wtedy niech $\mathcal{K}_2$ będzie sumą $\mathrm{St}(v_0)$ i pozostałych komponent spójności $\mathcal{K}_0$. Mamy wtedy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ oraz $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$. Z addytywności $I(\cdot)$ mamy

$$I(\mathcal{K}) = I(\mathcal{K}_1) + I(\mathcal{K}_2) - I(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$$

Kompleksy $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ oraz $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ są mniej złożone niż $\mathcal{K}$, czyli z kroku indukcyjnego mamy, że $I(\mathcal{K}_1)$, $I(\mathcal{K}_2)$, $I(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$ zależą od wartości na sympleksach, a więc i wartość $I(\mathcal{K})$ zależy od wartości na sympleksach.

- Korzystając z podobnego rozumowania możemy pokazać, że $\mathcal{K}$ można rozbić na sumę sympleksów
$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$$
taką, że dla każdych $i \neq j$ z $\{1, ..., k\}$ mamy $\sigma_i \nsubseteq \sigma_i \cap \sigma_j$, bo w indukcji mamy $\mathcal{K}_1 \nsubseteq \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$ oraz $\mathcal{K}_2 \nsubseteq \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$, co wynika z $\Delta_0 \notin \mathrm{St}(v_0)$ oraz $\{v_0\} \notin \mathcal{K}_1$. Zauważmy, że suma ta jest wyznaczona jednoznacznie, co wynika z tego, że $f_n(\cdot)$ są niezmiennikami kompleksów. Rzeczywiście niech $\dim(\mathcal{K}) = N$. Liczba N-sympleksów w tak zdefiniowanej sumie musi być równa $f_N(\mathcal{K})$. Wtedy liczba $(N-1)$-sympleksów w tej sumie musi być równa $f_{N-1}(\mathcal{K}) - f_{N-1}(\bar{\mathcal{K}})$, gdzie $\bar{\mathcal{K}}$ jest najmniejszym podkompleksem $\mathcal{K}$ zawierającym wszystkie N-sympleksy z $\mathcal{K}$, itd. Jednoznaczność wynika też z tego, że f-wektory sympleksów tworzą bazę przestrzeni liniowej ciągów o skończenie wielu niezerowych wyrazach.

$\square$

3.1 Charakterystyka Eulera - pierwsza odsłona

Definicja 3.9. Charakterystyką Eulera nazywamy addytywny niezmiennik kompleksów symplicjalnych przyjmujący wartość 1 na każdym sympleksie. Oznaczamy ją przez $\chi(\cdot)$.

Twierdzenie 3.10. *Charakterystyka Eulera jest jedynym addytywnym niezmiennikiem kompleksów przyjmującym wartość 1 na każdym sympleksie.*

Twierdzenie 3.11.

$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{dim(\mathcal{K})} (-1)^n f_n(\mathcal{K}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} (-1)^{dim(\sigma)}$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\bar{\chi}(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\dim(\mathcal{K})}(-1)^n f_n(\mathcal{K})$ jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów przyjmującym wartość 1 na każdym sympleksie. Równość $\bar{\chi} = \chi$ wyniknie z poprzedniego twierdzenia.

1. $\bar{\chi}$ jest kombinacją liniową addytywnych niezmienników kompleksów, zatem z przykładu 3.7 podpunkt 2. mamy, że sam jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.

2. Dla każdych $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ oraz dla każdego n-sympleksu Δ^n mamy

$$f_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1}$$

   Zatem

$$\bar{\chi}(\Delta^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(\Delta^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n+1}{i+1} = 1$$

□

Twierdzenie 3.12. *Charakterystyka Eulera jest jedynym z dokładnością do mnożenia przez stałą addytywnym niezmiennikiem kompleksów symplicjalnych niezmienniczym na podrozbicia (barycentryczne).*

Dowód. Zaczniemy od pomocniczego faktu

Fakt 3.13. ***(Zadanie)*** *Charakterystyka Eulera stożka jest równa 1.*

Możemy teraz łatwo udowodnić część twierdzenia mówiącą, że charakterystyka Eulera jest niezmiennicza na podrozbicia barycentryczne korzystając z powyższego faktu i następującego indukcyjnego sposobu konstruowania podrozbicia barycentrycznego kompleksu. Indukcja po k-szkieletach.

- W pierwszym kroku mamy 0-szkielet: zbiór wierzchołków V kompleksu $\mathcal{K}$.

- Mając podrozbicie barycentryczne $\mathcal{K}'(k)$ k-szkieletu rozbijamy $(k+1)$-szkielet w następujący sposób: dla każdego $(k+1)$-sympleksu σ w $\mathcal{K}$ dodajemy nowy wierzchołek v_σ, a następnie do podrozbicia k-szkieletu dołączamy stożek nad brzegiem σ o wierzchołku w v_σ, czyli rozbicie $k+1$-szkieletu to

$$\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{K} \\ \dim(\sigma) = k+1}} C_{v_\sigma}(\mathcal{K}'(k))$$

Zrobimy to również przez indukcję, po wymiarze kompleksu:

- Podrozbicie barycentryczne kompleksu 0-wymiarowego jest jemu równe, zatem równe są ich charakterystyki Eulera

- Rozważmy teraz $(k+1)$-wymiarowy kompleks $\mathcal{K}$. Oznaczmy przez $\mathcal{K}(k+1)$ najmniejszy podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ zawierający zbiór $\{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = k+1\}$. Wtedy kompleks $\mathcal{K}$ możemy rozbić na sumę

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_k \cup \mathcal{K}(k+1)$$

Mamy

$$\mathcal{K}_k \cap \mathcal{K}(k+1) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma$$

Zatem $\chi(\mathcal{K}) = \chi(\mathcal{K}_k) + \chi(\mathcal{K}(k+1)) - \chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma)$ Z założenia indukcyjnego mamy

$$\chi(\mathcal{K}_k) = \chi((\mathcal{K}_k)')$$

oraz

$$\chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma) = \chi((\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma)') = \chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} (\partial\sigma)')$$

a z faktu:

$$\chi(\mathcal{K}(k+1)) = \chi(\bigcup\{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = k+1\}) = \chi(\bigcup\{C_{v_\sigma}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K},\ \dim(\sigma) = k+1\}$$

$\square$