Charakterystyka Eulera

Weles & Kycia

Semestr zimowy 2023-24

Contents

1 Preliminaria

Zacznijmy od przyjżenia się, czym jest **charakterystyka Eulera**, $\chi(X)$, dla poznanych już przestrzeni X:

- dla przestrzeni skończonych mamy $\chi(X) = |X|$
- jeśli zajmujemy się przestrzenią wektorową nad ciałem K, to $\chi(X) = \dim_K(X)$.

Poza tym, będziemy przyglądać się kompleksom symplikacyjnym (poniżej) oraz kompleksom łańcuchowym (czyli uogólnieniom przestrzeni wektorowej).

1.1 Kompleksy symplikacyjne

Definicja 1.1 : Kompleks symplikacyjny
Rozważmy zbiór (wierzchołków) V. Zbiór $\mathcal{K} \subseteq 2^V$ nazywamy **kompleksem symplikacyjnym** na zbiorze V, jeśli
- dla każdego $v \in V$ mamy $\{v\} \in \mathcal{K}$
- dla każdych $B \subseteq A \subseteq V$ zachodzi $A \in \mathcal{K} \implies B \in \mathcal{K}$

Będziemy głównie zajmować się $|V| < \infty$. Dla wygody często v będziemy utożsamiać z $\{v\}$.

Rodzinę $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ nazywamy *podkompleksem* kompleksu $\mathcal{K}$, jeśli jest on kompleksem symplikacyjnym na zbiorze wierzchołków $V(\mathcal{L}) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$.

Definicja 1.2 : Sympleks
Elementy $\sigma \in \mathcal{K}$ oraz podkompleksy zawierające wszystkie niepuste podzbiory σ są **sympleksami**. Wymiar sympleksu to $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$.

Przykłady 1.1

1. $\mathcal{K} = \mathcal{P}(V)$ jest sympleksem $|V| - 1$-wymiarowym i oznaczamy jako Δ^V lub Δ^n gdy $|V| = n + 1$.
2. **Brzegiem** sympleksu Δ^V nazywamy podkompleks złożony z właściwych podzbiorów V i oznaczamy go $\partial\Delta^V$. Sympleksy brzegu $\partial\Delta^n$ (lub, w zależności od konwencji, $(n-1)$-wymiarowe sympleksy) nazywamy *ścianami* sympleksu Δ^n.
3. Podkompleks $\mathcal{K}$ złożony z co najmniej $(k+1)$-elementów nazywamy k-szkieletem kompleksu $\mathcal{K}$
4. Grafy symplikacyjne to 1-wymiarowe kompleksy będące grafami bez pętli i bez wielokrotnych krawędzi.
5. *Stożkiem* nad kompleksem $\mathcal{K} = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ o wierzchołku