

Lista 2

Charakterystyka Eulera

2023

1. Dla poniższych kategorii oraz działań na ich obiektach opisać grupę przemianową, której elementami są klasy izomorfizmów tych obiektów i w której zachodzi podana relacja.

- a) Kategoria zbiorów skończonych: \mathbf{FSet} , działanie: \cup , relacja:

$$[X] + [Y] - [X \cap Y] - [X \cup Y].$$

- b) Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych: \mathbf{FVect} , działanie: \oplus relacja:

$$[X] + [Y] - [X \oplus Y].$$

- c) Kategoria skończonych kompleksów sympleksyjnych: \mathbf{FSC} , działanie: \cup_* , relacja:

$$[X] + [Y] - [A] - [X \cup_A Y].$$

- d) Kategoria skończenie generowanych grup abelowych: \mathbf{FGAb} . Relacja:

$$[A] + [C] - [B],$$

gdy mamy ciąg dokładny

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

- e) Kategoria, której obiektami są skończone przestrzenie wektorowe wraz z endomorfizmami, czyli diagramy postaci

$$V \xrightarrow{E} V$$

i morfizmy to odwzorowania liniowe $f : V \rightarrow W$ komutujące z endomorfizmami, czyli komutuje poniższy diagram.

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{E_V} & V \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
W & \xrightarrow{E_W} & W
\end{array}$$

Definiujemy relację w grupie klas izomorfizmów:

$$[V \xrightarrow{E_V} V] + [W \xrightarrow{E_W} W] - [U \xrightarrow{E_U} U],$$

gdy mamy poniższy ciąg dokładny.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{g} & W & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow E_V & & \downarrow E_U & & \downarrow E_W & & \\
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{g} & W & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

2. Jakie są związki pomiędzy przykładami z poprzedniego zadania? Wyrazić je w terminach teorii kategorii.
3. Dwa grafy są homotopijnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są homeomorficzne po ściągnięciu drzewa maksymalnego.
4. Jakie są pogrubienia ósemki?
5. Podać wszystkie znane Ci opisy płaszczyzny rzutowej $\mathbb{R}P^2$. Jak się one do siebie mają?
6. Pokazać, że następujące ruchy na grafie Reeba są poprawne, to znaczy graf powstały po zastosowaniu tych ruchów opisuje tę samą powierzchnię:
 - "Wchłonięcie nibynóżki",
 - "Przejście krzyżyka przez skrzyżowanie",
 - "Przejście skrzyżowania przez skrzyżowanie".
7. Pokazać, że $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^w \# T^2$ oraz $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = \text{Kl}$.
8. Pokazać, że grupa homeomorfizmów powierzchni spójnej działa na niej tranzytywnie, a nawet działa tranzytywnie na zbiorze dysków w tej powierzchni
9. Pokazać, że charakterystyka Eulera powierzchni jest mniejsza od 3. Pokazać, że dla powierzchni M zachodzi $\chi(M) = 2 \iff M = S^2$.
10. Znaleźć funkcje Morse'a na T^2 i Kl, których grafy Reeba są takie same z dokładnością do znaków.

11. Pokazać, że dwie powierzchnie z brzegiem są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tyle samo składowych brzegu, mają taką samą charakterystykę Eulera oraz obie są orientowalne lub nie.
12. Pokazać, że charakterystyka Eulera powierzchni nie zależy od triangulacji.
13. Dwie powierzchnie są homeomorficzne, gdy po przemnożeniu ich przez odcinek $[0, 1]$ mają te same charakterystyki Eulera i obie są lub nie są orientowalne. To nie jest prawda dla powierzchni z brzegiem. Rozważyć trzy razy nakłutą sferę i nakłuty torus.