1. Funkcje analityczne

Liczby zespolone - powtórka

1. Zapisać w postaci $x + iy$ podane liczby.

$$(3+2i)-(4-i) \qquad (2-3i)(-2+i) \qquad i(2-7i) \qquad \frac{1+i}{2-i}$$

$$(1-i)^4 \qquad (3+i)(3-i)\left(\frac{2+i}{10}\right) \qquad \frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i} \qquad \frac{2i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$$

2. Rozwiązać równania

$$z^2-2z+2=0; \qquad 3z^2+2z+1=0.$$

3. Uzasadnić, że jeśli $z_1z_2z_3 = 0$, to jeden z czynników jest równy zeru.

4. Uzasadnić zasady przemienności i łączności mnożenia:

$$z_1z_2 = z_2z_1, \qquad z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3.$$

5. Zaznaczyć na płaszczyźnie liczby $z_1,\ z_2,\ z_1+z_2$ oraz z_1-z_2.

(a) $z_1 = -3+i,\ z_2 = 1+4i.$

(b) $z_1 = 3,\ z_2 = -3+5i.$

6. Pokazać, że wektor przedstawiający sumę $z_1+z_2+z_3$ jest zamykającym bokiem czworokąta, o pozostałych bokach z_1, z_2 i z_3. Jaki jest kierunek tego wektora ?

7. Jaki punkt płaszczyzny przedstawia $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$, w odniesieniu do punktów z_1 i z_2 ?

8. Obliczyć $\overline{z},\ \mathrm{Re}\, z,\ \mathrm{Im}\, z$ oraz $|z|$.

$$z = 3-4i \qquad z=-2i \qquad z=4 \qquad z=2-2i$$

9. Wyprowadzić podane wzory.

$$\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2} \qquad \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0) \qquad |z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \overline{iz} = -i\overline{z} \qquad \overline{(z^4)} = (\overline{z})^4 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\ \overline{z_3}}, \quad z_2z_3 \neq 0$$

10. Pokazać, że jeśli $z^2 = (\overline{z})^2$, to liczba z jest rzeczywista lub czysto urojona.

11. Podać algebraiczny dowód nierówności $|z_1-z_2| \geqslant \Big||z_1|-|z_2|\Big|$.

12. Pokazać, że $|z| \geqslant (|x|+|y|)/\sqrt{2}$.

13. Opisać położenie punktów

(a) $|z| = 1$ (b) $|z-2| = 3$ (c) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$

14. Opisać położenie punktów z spełniających

$$z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} = b\overline{b}$$

dla ustalonych liczb zespolonych a i b.

15. Opisać geometrycznie warunki jakie spełniają liczby z_1 i z_2 jeśli

(a) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ (b) $|z_1+z_2| = |z_1|-|z_2|$

16. Zapisać liczby w postaci trygonometrycznej.

$$1 + i\sqrt{3} \qquad i \qquad -2 \qquad -2-2i \qquad 1-2i$$

17. Wykonać obliczenia korzystając z postaci trygonometrycznej.

$$i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) \qquad \frac{2-2i}{-1-i} \qquad \frac{3}{(\sqrt{3}-i)^2} \qquad (-2-2i)^7 \qquad (1-i)^4 \qquad (\sqrt{3}+i)^{-3}$$

18. Obliczyć podane pierwiastki.

(a) drugi z i (b) trzeci z 1 (c) trzeci z -1 (d) szósty z 64
(e) szósty z $-i$ (f) czwarty z -9 trzeci z $1+i$

19. Rozwiązać $x^4 + 4 = 0$ i rozłożyć wielomian $x^4 + 4$ na iloczyn dwu trójmianów kwadratowych z rzeczywistymi współczynnikami.

20. Pokazać, że te same znane wzory obowiązują przy rozwiązywaniu równania $az^2 + bz + c = 0$, gdzie a, b, c są współczynnikami zespolonymi.

21. Opisać graficznie obszary opisane w płaszczyźnie zespolonej nierównościami.

(a) $|x| < 3$ (b) $\operatorname{Im} z > 1$ (c) $0 \leqslant \arg z < \pi$ (d) $1 < |z-2i| < 2$
(e)$\operatorname{Im}(z^2) > 0$ (f) $|2z-3| > 3$ (g) $|z-1| + |z+1| \leqslant 4$ (h) $|z| < |z-4|$