# Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

**Zadanie 1.** Opisz grupę automorfizmów triangulacji $\mathbb{R}P^2$ o najmniejszej liczbie wierzchołków.

Wiemy, że jeśli X ma triangulację o V wierzchołkach, E krawędziach i T trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T$$

a ponieważ $2E = 3T$, to możemy podstawić

$$\chi(X) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym: $E \leq \binom{V}{2}$ czyli

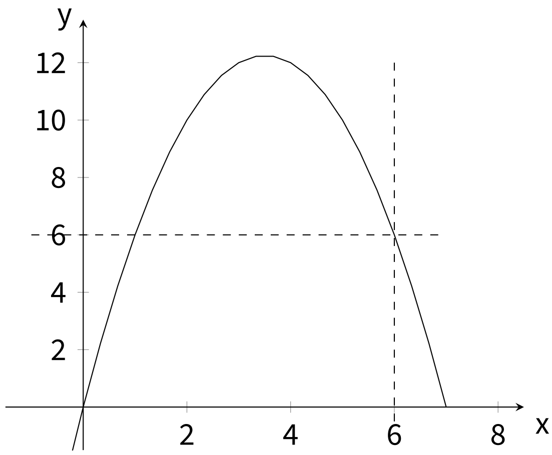
$$V = \chi(X) + \frac{1}{3}E \leq \chi(X) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla $\mathbb{R}P^2$ dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7 - V)$$

Powyższa nierówność dla $V = 6$ staje się równością. Tak samo dla $V = 1$ mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na $\mathbb{R}P^2$. Pozostałe liczby naturalne z przedziału $(0, 7)$ nie mają szansy spełniać powyższe równanie (widać na obrazku)

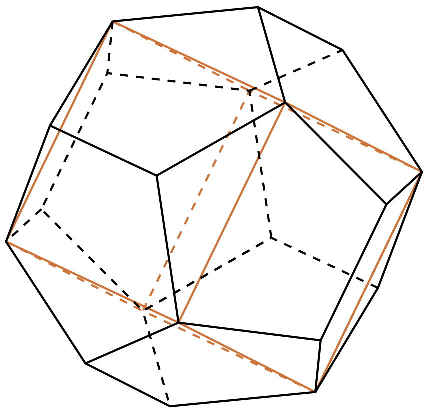



Z listy 1 wiemy, że 6 wierzchołkowa triangulacja $\mathbb{R}P^2$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulacje opisujemy.

Działając podobnie jak przy próbie skonstruowania triangulacji na butelce Klein, zauważmy, że $\mathbb{R}P^2$ to $S^2$ wydzielona przez antypodyczne działanie $\mathbb{Z}_2$. W takim razie, 6 wierzchołkowa triangulacja na $\mathbb{R}P^2$ przychodzi od triangulacji na $S^2$. Dodecahedron ma 12 ścian i 20 wierzchołków, ale pysiek do niego dualny istnieje i ma 12 wierzchołków (20 ścian) i nazywa się D20 lub dla osób niegrających w D&D - icosahedron.

Tutaj od razu zaznaczę, że nie będę tych dwóch brył nazywać po polsku, bo obie mają długie nazwy zaczynające się na "d", a po angielsku przynajmniej pierwsze litery się różnią.

Z dodecahedronu możemy dostać icosahedron - wystarczy postawić wierzchołek na każdej ścianie i połączyć odpowiednio wierzchołkami. W ten sam sposób można z icosahedronu wrócić do dodecahedronu. Stąd grupy automorfizmów obu tych brył będą równe i wystarczy popatrzeć na dodecahedron D:



Uzasadnimy teraz to, co prawi Wikipedia, mianowicie, że $\mathrm{Aut}(D) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

**Czy zgadza się rząd?**

Niech $v \in D$ będzie wierzchołkiem dodecahedronu (odpowiada ścianie icosahedronu).

- $|\mathrm{Obr}(v)| = 20$, bo automorfizm może postać wierzchołek na dowolny inny spośród 20 które D posiada.
- $|\mathrm{Stab}(v)| = 3! = 6$, gdyż są to permutacje 3 sąsiadów tego wierzchołka przy trzymaniu v w miejscu.

W takim razie dostajemy

$$|\mathrm{Aut}(D)| = |\mathrm{Orb}(v)| \cdot |\mathrm{Stab}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 = |A_5 \times \mathbb{Z}_2|.$$

**Pozbycie się $\mathbb{Z}_2$**

Wśród automorfizmów dodecahedronu D mamy dwa "rodzaje" odwzorowań

- rotacje i symetrie, które zachowują ruch wskazówek zegara przy numerowaniu sąsiadów dowolnego wierzchołka,
- odwzorowanie antypodyczne tudzież symetria względem punktu w samym środku D, która przewraca tę kolejność do góry nogami.

Ten drugi rodzaj odwzorowania będzie odpowiadać za czynnik $\mathbb{Z}_2$ w Aut(D). Wystarczy więc zająć się samą grupą symetrii i rotacji i pokazać, że to $A_5$.

**Symetrie i obroty**

Sztuczką na pokazanie, że symetrie D to $A_5$ jest zauważenie 5 sześcianów w środku D. Sześciany możemy narysować idąc krokami:

- weź krawędź w D
- połącz wszystkie sąsiady tej krawędzi w ścianę
- weź krawędź po przeciwnej stronie D
- połącz jej wszystkie sąsiady w ścianę
- połącz te dwie ściany w sześcian.

Z tej metody wytwarzania sześcianów można od razu wywnioskować, że automorfizm przeprowadza sześciany na sześciany, ponieważ sąsiedztwo wierzchołków musi być zachowane, a to ono było podstawą wyciskania sześcianów z D.

Ponumerujmy sześciany od 1 do 5 - możemy teraz je permutować. Najbardziej leniwym sposobem na zauważenie, że grupa uzyskana przez porządne permutacje tych sześcianów to $A_5$ jest podzielenie $|\mathrm{Aut}(D)| = 120$ przez 2, które oznacza, że wyrzucamy antypodyzm (element rzędu 2). Zostawia to nam 60 automorfizmów, które będą permutować te sześciany i które powinniśmy móc włożyć w $S_5$. Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) podgrupa $S_5$ o 60 elementach jest $A_5$ tak jak chcieliśmy.

Uzasadniliśmy, że $A_5 \times \mathbb{Z}_2 = \mathrm{Aut}(\textit{dodecahedron}) = \mathrm{Aut}(\textit{icosahedron})$ bo tak jak już wspomniałam, bryły te są dualne. Po wydzieleniu $S^2$ z triangulacją będącą icosahedronem przez działanie antypodyczne dostajemy grupę automorfizmów triangulacji $\Delta \mathbb{R} P^2$ o 6 wierzchołkach:

$$\mathrm{Aut}(\Delta \mathbb{R} P^2) = A_5 \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 = A_5$$