Lista 1

Charakterystyka Eulera

2023

1. Nerw pokrycia.
   Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni topologicznej (zbioru) X, czyli pewną rodziną podzbiorów X, których suma mnogościowa jest równa X. Przykładami są otwarte pokrycie przestrzeni topologicznej lub domknięte pokrycie brzegu wypukłego wielościanu przez ściany maksymalnego wymiaru. Załóżmy, że pokrycie $\mathcal{U}$ jest skończone. Nerwem pokrycia $\mathcal{U}$ nazywamy kompleks symplicjalny, którego wierzchołki to zbiory pokrycia i w którym podzbiór wierzchołków rozpina sympleks, jeśli ich przekrój jest niepusty.

   a) Uzasadnić, że jest to istotnie kompleks symplicjalny.
   b) Opisać nerw pokrycia ośmiościanu/sześcianu jego ścianami.
   c) Dla kompleksu symplicjalnego X znaleźć pokrycie (otwarte/domknięte), którego nerw jest izomorficzny i) z X ii) z podrozbiciem barycentrycznym X.

2. Łącznościan $\mathrm{As}(n)$ - wersja symplicjalna.

   a) To kompleks symplicjalny, którego k-sympleksy to $k+1$ przekątniowania $(n+3)$-kąta wypukłego.
   b) To kompleks symplicjalny, którego wierzchołki to pododcinki $[1, .., n]$, które rozpinają sympleks, jeśli każda para jest zagnieżdżona lub silnie rozłączna rozpina pełny podkompleks.
   c) Częściowe nawiasowania.

   - Pokazać, że te opisy dają izomorficzne kompleksy symplicjalne.
   - Zliczyć ilości d-sympleksów.
   - Policzyć charakterystykę Eulera łącznościanu.

3. Permutościan wymiaru n, to wielościan wypukły rozpięty przez punkt $(0, 1, 2, ..., n)$ i jego permutacje.

a) Narysować permutościany wymiarów 2, 3.

b) Uzasadnić, że permutościan to "ucięty sympleks" (użyć punktu $(a^0,\ldots,a^n)$ i jego permutacji).

c) Pokazać, że nerw pokrycia brzegu permutościanu jego ścianami jest kompleksem symplicjalnym wymiaru $n-1$ i jest kawałkami liniowo homeomorficzny z wyjściowym permutościanem.

4. Realizacja posetu P (mówią geometryczna, ale raczej symplicjalna), to kompleks symplicjalny, którego k-sympleksy to $k+1$ łańcuchy w P.

   a) Opisać realizację geometryczną posetu wszystkich właściwych podprzestrzeni liniowych przestrzeni 3-wymiarowej nad ciałami charakterystyki 2, 3.

   b) Przekątniowania z zadania 2. tworzą poset. Opisać jego realizację.

   c) Kompleks symplicjalny tworzy poset. Opisać jego realizację.

   d) Policzyć charakterystykę Eulera realizacji posetu podprzestrzeni liniowych d-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem charakterystyki p.

5. Wypukły wielościan w $\mathbb{R}^d$ jest symplicjalny, jeśli każda jego właściwa ściana jest sympleksem. Wypukły wielościan w $\mathbb{R}^d$ jest prosty, jeśli każdy wierzchołek ma otoczenie izomorficzne z $\mathbb{R}^d_+$ (izomorficzne oznacza, że istnieje afiniczny izomorfizm $\mathbb{R}^d$, który przekształca otwarte otoczenie tego wierzchołka w wielościanie na otwarte otoczenie punktu 0 w $\mathbb{R}^d_+$).

   a) Zapoznać się z pojęciem dualności wielościanów wypukłych i pokazać, że wielościany proste i symplicjalne są wzajemnie dualne.

   b) Pokazać, że gwiazdy wierzchołków w wielościanie prostym są sympleksami, a gwiazdy wierzchołków w wielościanie symplicjalnym są izomorficzne ze ścianami jego wielościanu dualnego.

6. Triangulacje.

   a) Pokazać, że triangulacja sfery S^2 ma co najmniej 4 wierzchołki, a każda triangulacja powierzchni o 5 wierzchołkach jest triangulacją sfery.

   b) Pokazać, że istnieje jedyna z dokładnoscią do izomorfizmu triangulacja płaszczyzny rzutowej RP^2 o 6 wierzchołkach.

   c) Pokazać, że triangulacje torusa T^2 i butelki Kleina mają co najmniej 7 wierzchołków.

7. Policzyć charakterystykę Eulera kompleksu, którego wierzchołkami są niezerowe wektory przestrzeni wektorowej wymiaru d nad ciałem charakterystyki p i w którym zbiór wierzchołków rozpina sympleks, jeśli wektory są liniowo niezależne.

8. Niech X bedzie kompleksem symplicjalnym na zbiorze wierzchołków V. W przestrzeni $\mathbb{R}^V$ mamy sympleks (geometryczny/topologiczny) σ^V kombinacji liniowych

$$\sum_{v\in V} t_v e_v,$$

gdzie $t_v \geq 0$ i $\sum_{v\in V} t_v = 1$. Sympleks geometryczny jest zwarty. Opisać jego ściany.

W sympleksie σ^V mamy podzbior zadany przez X: kombinacji wypukłych postaci

$$\sum_{v\in A} t_v e_v$$

gdzie A jest dowolnym elementem (=sympleksem) X.

Pokazać, że jest to domkniety ograniczony podzbiór w $\mathbb{R}^V$ (czyli jest zwarty). Nazywamy go geometryczną realizacją kompleksu X. Pokazać że symplicjane odwzorowania $X \to Y$ zadają ciągłe odwzorowania realizacji geometrycznych.

Pokazać, ze realizacja X i realizacja jego podrozbicia barycentrycznego są homeomorficzne. Wskazówka: Wystarczy zrobić to dla pojedynczego sympleksu.

9. Niech $f = (f_0, f_1, ...f_n)$ bedzie f wektorem kompleksu X. Wielomian

$$f_X(t) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^{i+1}$$

nazywamy f-wielomianem X. Pokazać

   a) $f_{X\cup_A Y}(t) = f_X(t) + f_Y(t) - f_A(t)$
   b) $f_{X*Y}(t) = f_X(t) f_Y(t)$.

   Przedyskutować jak podrozbić produkt realizacji geometrycznych $X \times Y$ do kompleksu symplicjalnego. Wyliczyć $f_{X\times Y}(t)$ w terminach $f_X(t)$ i $f_Y(t)$.

10. Zaproponować definicję pojęcia "kompleksu kostkowego", wyliczyć charakterystykę Eulera jakiegoś podrozbicia kompleksu kostkowego do kompleksu symplicjalnego.

11. Znaleźć kompleks łańcuchowy nieskończenie wymiarowych przestrzeni liniowych o skończenie wymiarowych homologiach.