# Rachunek prawdopodobieństwa 2R 2023
## lista 1: Definicja warunkowej wartości oczekiwanej

1. Rzucamy 8 razy kostką sześcienną. Niech $X$ oznacza sumę wyrzuconych oczek, a $Y$ sumę oczek w pierwszych trzech rzutach. Znajdź $\mathbb{E}[X|Y]$.

2. Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Oblicz
$$\mathbb{E}\left[\min\{X, Y\}|Y\right].$$

3. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P}$ będzie miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$. Znajdź $\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]$, jeżeli $f(x) = x^3$ i $\mathcal{G} = \sigma\{[0, 1/4), [1/3, 1]\}$.

4. Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarowym wektorem losowym z gęstością $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ i niech $g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y)dx$ będzie gęstością zmiennej losowej $Y$. Pokaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej $h$ na $\mathbb{R}$ zachodzi
$$\mathbb{E}[h(X)|Y] = \int_{\mathbb{R}} h(x) g_{X|Y}(x, Y)\mathrm{d}x,$$
gdzie
$$g_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{g(x,y)}{g_Y(y)} & \text{jeżeli } g_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } g_Y(y) = 0 \end{cases}.$$

5. Wektor losowy $(X, Y)$ ma gęstość $g(x, y) = x^3 e^{-x(y+1)}/2 \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}$. Wyznacz $\mathbb{E}[Y|X]$.

6. Podaj przykład zmiennych losowych $X$ i $Y$, które nie są niezależne dla których zachodzi
$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X].$$

7. Niech $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{Q}$ będą prawdopodobieństwami na $(\Omega, \mathcal{F})$. Załóżmy, że $\mathbb{Q}$ ma gęstość $Z$ względem $\mathbb{P}$, czyli $\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}$ dla $A \in \mathcal{F}$. Rozważmy zmienną losową $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ oraz jej rozkłady $\mu_{\mathbb{P}}$ oraz $\mu_{\mathbb{Q}}$ względem $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{Q}$ odpowiednio. Dokładniej
$$\mu_{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}[X \in \cdot], \quad \mu_{\mathbb{Q}}(\cdot) = \mathbb{Q}[X \in \cdot].$$
Pokaż, że $\mu_{\mathbb{P}} \gg \mu_{\mathbb{Q}}$ oraz $\mathbb{E}[Z|X] = \frac{\mathrm{d}\mu_{\mathbb{Q}}}{\mathrm{d}\mu_{\mathbb{P}}}(X)$.

8. Niech $\mathcal{G}$ będzie pod $\sigma$-ciałem $\mathcal{F}$. Załóżmy że zmienna losowa $X$ spełnia
$$\mathbb{E}[e^{itX}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[e^{itX}]$$
dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Pokaż, że $X$ jest niezależna od $\mathcal{G}$.