

Algebra homologiczna

Zima 2023-24

Spis rozmaitości treściowalnych

04.10.23 : Podstawowe definicje	3
1.1. Co to kategoria	3
1.2. Kompleksy	4
1.3. Funktory kowariantne i kontrawariantne	5
09.10.23 : Równoważność kategorii	10
2.1. Presnop i snop	10
2.2. Funktory wierne, pełne	11
2.3. Naturalne przekształcenia funktorów	12
2.4. Równoważność kategorii	15
16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice	18
3.1. Kategoria funktorów	18
3.2. Granice i kogranice	21
23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]	23
4.1. Kategorie addytywne i abelowe	25
30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie	32
5.1. Kompleks łańcuchowy i sympleksy	32
5.2. Homologie	33
5.3. Pull-back i push-out	34
06.11.23 : Lemat o wężu i przyjaciela	36

Wykład 04.10.23 : Podstawowe definicje

1.1 Co to kategoria

Rozważmy układ danych \mathbf{C} zawierający:

- ☞ klasę *obiektów* $\text{Ob } \mathbf{C}$
- ☞ dla dowolnej pary $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ zbiór $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, którego elementy nazywamy *morfizmami* i zapisujemy $\varphi : X \rightarrow Y$ lub $X \xrightarrow{\varphi} Y$
- ☞ kolekcję odwzorowań, zwanych *złożeniami*, dla wszystkich $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathbf{C}$ takich, że

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z) \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

Definicja 1.1 : kategoria (mała).

Układ danych \mathbf{C} jak wyżej nazywamy **kategorią**, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Zbiory $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ dla $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ są parami rozłączne (tzn. morfizmy mają dobrze określone dziedziny i przeciwdziedziny).
2. Dla każdego $A \in \text{Ob } \mathbf{C}$ istnieje $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ takie, że $\varphi \circ \text{Id}_A = \varphi$ oraz $\text{Id}_A \circ \psi = \psi$.
3. Złożenie morfizmów jest łączne, tzn. dla morfizmów

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\eta} W$$

zawsze zachodzi równość $(\eta\psi)\varphi = \eta(\psi\varphi)$.

Dodatkowo, jeśli $\text{Ob } \mathbf{C}$ jest zbiorem, to \mathbf{C} nazywamy *małą kategorią*.

Przykład(y) 1.1

1. Kategorię wszystkich pierścieni wektorowych nad ciałem K oznaczamy \mathbf{Vect}_K . Jeśli interesują nas przestrzenie tylko skończonego wymiaru, to istnieje kategoria $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ przestrzeni wektorowych skończonego wymiaru.

Obiektami obu tych kategorii są przestrzenie liniowe (skończonego wymiaru), a morfizmami są przekształcenia liniowe między nimi.

2. Wszystkie zbiory wraz z funkcjami między nimi jako morfizmami tworzą kategorię **Set** zbiorów.
3. Jeśli rozważamy jako obiekty tylko zbiory z określonym dobrym porządkiem, to morfizmami mogą być funkcje słabo monotoniczne. Taką kategorię oznaczamy **Set**_≤.
4. Kategoria wszystkich grup wraz z homomorfizmami jako morfizmami jest oznaczana **Grp**, natomiast kategoria, której obiekty to tylko grupy abelowe jest oznaczana **Ab**.
5. Pojedyncza grupa G może tworzyć sama w sobie jednoobiektową kategorię **C** _{G} taką, że
 - ☞ $\text{Ob } \mathbf{C}_G = \{\star\}$
 - ☞ $\text{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star) = G$, a złożenia działa jak mnożenie elementów G .
6. Dla dowolnego pierścienia R istnieje kategoria, której obiektami są (lewe) R -moduły, a morfizmami są homomorfizmy między tymi modułami. Oznaczamy to R – **mod**.
7. Wszystkie przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi nazywamy kategorią przestrzeni topologicznych **Top**.
8. Wszystkie gładkie rozmaitości są obiektami kategorii **Diff**, a morfizmy to gładkie odwzorowania między rozmaitościami.
9. Kategoria **Rep** _{G, K} posiada jako obiekty reprezentacje grupy G na przestrzeniach liniowych nad K , a jako morfizmy wszystkie przekształcenia G -ekwiwariantne.
10. Rozważmy kategorię Δ taką, że jej obiektami są zbiory kolejnych liczb naturalnych:

$$\text{Ob } \Delta = \{[n] : n \in \mathbb{N}\},$$

$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$. Zdefiniujmy zbiory morfizmów jako $\Delta([m], [n]) =$ wszystkie niemalejące funkcje z $[m]$ w $[n]$.

Tak zdefiniowaną kategorię nazywamy **kategorią symplecjialną**.

1.2 Kompleksy

Definicja 1.2 : kompleksy łańcuchowe (grup abelowych).

Jeśli ciąg (grup abelowych) A .

$$\dots \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

jest taki, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ (dopuszczamy ujemne indeksy) złożenie $d_{n+1} \circ d_n = 0$, to nazywamy go **kompleksem łańcuchowym**.

Mozemy rozważać kategorię, której obiektami są kompleksy łańcuchowe obiektów z jednej kategorii \mathbf{C} , np. grup abelowych. Morfizmem między kompleksem A a kompleksem B nazwiemy wówczas ciąg homomorfizmów $\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_i, B_i)$ taki, że w diagramie

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{d_0^A} & A_1 & \xrightarrow{d_1^A} & A_2 \xrightarrow{d_2^A} \dots \\ & & \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ \dots & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{d_0^B} & B_1 & \xrightarrow{d_1^B} & B_2 \xrightarrow{d_2^B} \dots \end{array}$$

każdy prostokąt komutuje, tzn.

$$d_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n^A$$

dla każdego n .

1.3 Funktory kowariantne i kontrawariantne

Definicja 1.3 : funktor.

Funktorem z kategorii \mathbf{C} w kategorię \mathbf{D} nazywamy dwa przyporządkowania: między obiektami tych kategorii i między morfizmami takie, że:

$$\text{Ob } \mathbf{C} \ni X \mapsto F(X) \in \text{Ob } \mathbf{D}$$

dla każdej pary $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ odwzorowanie

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \ni \varphi \mapsto F(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

zachowuje składanie morfizmów, tzn. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Takie przyporządkowania między kategoriami nazywa się też, bardziej precyzyjnie, *funktorami kowariantnymi*.

Przykład(y) 1.2

1. Funktor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ zdefiniujemy tak, że dowolny $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$ przechodzi na przestrzeń wektorową nad ciałem K o bazie X , tzn.:

$$F(X) = \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x x : \alpha_x \in K, \text{ tylko skończenie wiele } \neq 0 \right\}$$

2. Dużą grupą funktorów są tzw. *funktory zapominające*, które gubią część informacji o strukturze obiektów w wyjściowej kategorii.

Na przykład funktor

$$F : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

przeprowadza przestrzeń liniową na zbiór jej elementów bez struktury liniowej. Przekształcenia liniowe między przestrzeniami liniowymi są wówczas przeprowadzane na zwykłe funkcje między zbiorami.

Innym funktorem zapominającym jest n.p. $F : R - \mathbf{mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$, który dla dowolnego $N \in \text{Ob } R - \mathbf{mod}$ przypisuje $F(N) = \text{Hom}_R(M, N)$ dla pewnego $M \in \text{Ob } R - \mathbf{mod}$.

3. Homomorfizm $\varphi : G \rightarrow H$ indukuje funktor $\Phi : \mathbf{C}_G \rightarrow \mathbf{C}_H$, który jedyny obiekt $\star \in \text{Ob } \mathbf{C}_G$ posyła na jedyny obiekt $\heartsuit \in \text{Ob } \mathbf{C}_H$. Natomiast morfizmy $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star)$, odpowiadające mnożeniu przez elementy grupy G , przesyła na morfizmy odpowiadające mnożeniu przez $\varphi(g) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_H}(\heartsuit, \heartsuit)$
4. Przez \mathbf{Top}_* oznaczamy kategorię *przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem*, w której morfizmami są odwzorowania ciągłe respektujące wybrane punkty. Funktor

$$\Pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

taki, że dla $X \in \text{Ob } \mathbf{Top}_*$ z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$ przypisuje

$$\Pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

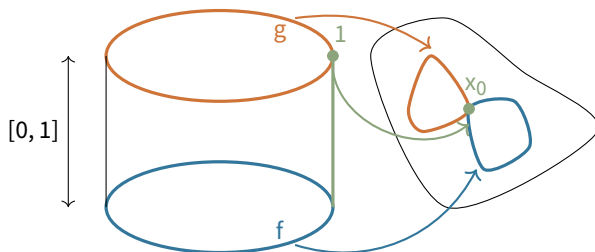
czyli klasę homotopii odwzorowań ciągłych $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$, nazywamy **grupą podstawową**.

Dwa odwzorowania

$$f, g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$$

są homotopijne, jeśli istnieje $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ ciągłe takie, że

$$H(z, 0) = f(z) \text{ i } H(z, 1) = g(z) \text{ i } H(1, t) = x_0$$



Grupa fundamentalna okręgu z wyróżnionym punktem jest izomorficzna z liczbami całkowitymi:

$$\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}.$$

Mając dwie przestrzenie topologiczne (X, x_0) i (Y, y_0) oraz ciągłą funkcję między nimi f , mamy

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \ni & [\sigma] \\ \Pi_1(f) \downarrow & & \downarrow \Pi_1(f) \\ \Pi_1(Y, y_0) & \ni & [f \circ \sigma] \end{array}$$

Twierdzenie 1.1.

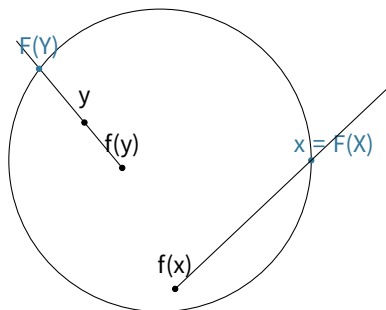
Każde ciągłe odwzorowanie $f : D^2 \rightarrow D^2$ ma punkt stały.

Dowód

A raczej jego szkic.

Założmy nie wprost, że istnieje funkcja ciągła $f : D^2 \rightarrow D^2$, która nie posiada punktu stałego.

Możemy wówczas zdefiniować funkcję $F : D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$, która punktowi $y \in D^2$ przypisuje punkt przecięcia wychodzącej z $f(y)$ przechodzącej przez y z obwodem D^2 :



Obcięcie takiej funkcji do brzegu ∂D^2 daje oczywiście identyczność na ∂D^2 (punkt x wyżej). Powstaje więc diagram

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xleftarrow{\quad} & D^2 \\ & \searrow \text{id}_{S^1} & \swarrow F \\ & S^1 & \end{array}$$

na który możemy nałożyć funktor Π_1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = \Pi_1(S^1) & \xleftarrow{\quad} & \Pi_1(D^2) = S^1 \\ & \searrow \text{id}_{\mathbb{Z}} = \Pi_1(\text{id}_{S^1}) & \swarrow \Pi_1(F) \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

NIE ROZUMIEM CO TO DAJE



Definicja 1.4 : kategoria dualna.

Dla kategorii \mathbf{C} możemy zdefiniować nową kategorię, \mathbf{C}^{op} w której każdy morfizm $\varphi^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(Y, X)$ zostaje odwrócony:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightleftharpoons[\varphi^{\text{op}}]{\varphi} & Y \end{array}$$

Wtedy $\text{Ob } \mathbf{C}^{\text{op}}$ to obiekty dualne do elementów znajdujących się w $\text{Ob } \mathbf{C}$. Tak zdefiniowaną kategorię \mathbf{C}^{op} nazywamy **kategorią dualną**.

Przykład(y) 1.3

1. Kategoria dualna do kategorii przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K^{\text{op}}$ jest kategorią, której obiekty to przestrzenie sprzężone, $V^* \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_K^{\text{op}}$, zawierające funkcjonały liniowe $V \rightarrow K$. Każdy morfizm $\varphi : V \rightarrow W$ w \mathbf{Vect}_K indukuje wówczas odwzorowanie $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ takie, że dla $f \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : V \rightarrow K$.

Kojarzenie funkcjonału $\varphi^* \in V^*$ z elementem $v \in V$ jest czasem oznaczane przez $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$.

Definicja 1.5 : funktor kontrawariantny.

Funktor (kowariantny) z kategorii \mathbf{C}^{op} do kategorii \mathbf{D} jest nazywany **funktorem kontrawariantnym** z \mathbf{C} do \mathbf{D} .

Oznacza to, że jeśli $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ i $\varphi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, to funktor kontrawariantny $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ przeprowadza X na $F(X) \in \text{Ob } \mathbf{D}$, a $\varphi \mapsto F(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(Y), F(X))$.

$$\begin{array}{ccc} X & & F(X) \\ \varphi \downarrow & \xrightarrow{\quad F \quad} & \uparrow F(\varphi) \\ Y & & F(Y) \\ \psi \downarrow & \xrightarrow{\quad F \quad} & \uparrow F(\psi) \\ Z & & F(Z) \end{array}$$

Składanie morfizmów również zmienia kolejność, tzn.

$$F(\psi\varphi) = F(\varphi)F(\psi)$$

Wykład 09.10.23 : Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię $\mathbf{Otw}(X)$ zdefiniujemy tak, że

☕ Ob $\mathbf{Otw}(X) = \{U \subseteq X : U \text{ - zbiór otwarty}\}$

☕ morfizmy to włożenia identycznościowe (tzn. istnieje morfizm $X \hookrightarrow Y$ jeśli $X \subseteq Y$)

Tak zdefiniowany funktor kontrawariantny $\mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ nazywamy **presnopem** na przestrzeni topologicznej X .

Kategoria \mathbf{C} może być kategorią zbiorów **Set**, ale możemy też przeprowadzać zbiory otwarte oraz morfizmy między nimi na kategorię **Ab**, **Vect_K** czy **R-mod**. Wtedy taki funktor będziemy nazywać odpowiednio *presnopem grup abelowych*, *przestrzeni liniowych* czy *R-modułów*.

Przykład(y) 2.1

1. Zaczniemy od przetestowania presnopu na przestrzeni topologicznej w akcji.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}(X)$ definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \parallel & & \parallel \\ C(U) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & C(V) \end{array}$$

co w widoczny sposób spełnia $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$.

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : presnop, snop.

Presnopem na kategorii \mathbf{C} nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop taki, że jeśli dla dowolnego zbioru $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ oraz dla dowolnych $i, j \in I$ spełniony jest warunek

$$s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j),$$

gdzie $s_i \in F(U_i)$ jest nazywane **cięciem presnopu**, to wówczas istnieje dokładnie jedno cięcie $s \in F(U)$ takie, że

$$s \upharpoonright U_i = s_i.$$

Zapisując to za pomocą kwantyfikatorów mamy:

$$\begin{aligned} (\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall s_i \in F(U_i)) \quad & [(\forall i, j \in I) s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)] \Rightarrow \\ & \Rightarrow [(\exists! s \in F(U)) (\forall i \in I) s \upharpoonright U_i = s_i] \end{aligned}$$

Przykład(y) 2.2

1. Presnop na przestrzeni topologicznej X spełnia również warunek opisany wyżej.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria \mathbf{C}' kategorii \mathbf{C} .

To kategoria spełniająca następujące warunki:

$$\text{Ob } \mathbf{C}' \subseteq \text{Ob } \mathbf{C}$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$$

$$\text{id}_X^{\mathbf{C}'} = \text{id}_X^{\mathbf{C}} \text{ zawsze gdy } X \in \text{Ob } \mathbf{C}'$$

złożenie morfizmów w \mathbf{C}' zachowuje się tak samo jak w \mathbf{C}

Mówimy, że podkategoria \mathbf{C}' jest **pełna**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}'$ zachodzi $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria przestrzeni skończonego wymiaru $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych \mathbf{Vect}_K . Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych \mathbf{Ab} jest pełną podkategorią kategorii \mathbf{Grp}
3. Kategoria gładkich rozmaitości \mathbf{C}^∞ – **rozm** jest podkategorią kategorii wszystkich

przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest

☕ **wierny** gdy $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest injekcją

☕ **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ przekształcenie $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.

Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \rightarrow G$ w \mathbf{D} taki, że dla każdego $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ i dla każdego $\varphi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G .

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\text{Id}, \text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\text{ab}(G) = G/[G, G]$).

Rozważymy $f : \text{Id} \rightarrow \text{ab}$, wtedy $\text{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}(G) = G & \xrightarrow{f(G)} & G/[G, G] = \text{ab}(G) \\ \text{Id}(\varphi) = \varphi \downarrow & & \downarrow \text{ab}(\varphi) \\ \text{Id}(H) = H & \xrightarrow{f(H)} & H/[H, H] = \text{ab}(H) \end{array}$$

Dla każdego $G \in \text{Ob} \mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : \text{Id}(G) \rightarrow \text{ab}(G)$ jako

$$f(G) : G \rightarrow G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Aby więc diagram komutował, czyli

$$f(H) \circ \text{Id}(\varphi) = \text{ab}(\varphi) \circ f(G),$$

wystarczy sprawdzić, że komutant grupy G przechodzi przez dowolny homomorfizm na komutant w H :

$$(\forall g, h \in [G, G]) \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg).$$

Skoro tak jest, to nie ma znaczenia, czy najpierw abelianizujemy grupę, a potem nakładamy na to homomorfizm, czy najpierw nakładamy homomorfizm, a potem abelianizujemy.

- Można pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów z kategorii przestrzeni topologicznych z wybranym punktem bazowym (\mathbf{Top}_*) w kategorię grup

$$H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp},$$

gdzie Π_n to funktor przypisujący przestrzeni n -tą homotopię (Π_1 w szczególności przyporządkowuje przestrzeni topologicznej jej grupę fundamentalną), a H_n to funktor n -tej homologii.

- Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\text{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$.

Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v & \longrightarrow & (V^* \ni \varphi^* \mapsto \varphi^*(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

to znaczy, dla $v \in V$ mamy element $f(V)(v) = \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$, który elementowi $\varphi^* \in V^*$ przyporządkowuje $\langle \varphi^*, v \rangle = \varphi^*(v) \in K$.

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^{**} \\
 W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**}
 \end{array}$$

komutuje, czyli pokazać, że $f(V) \circ \varphi^{**} = \varphi \circ f(W)$.

Troszkę przypomnienia z algebry liniowej. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ indukuje funkcjonal liniowy $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ taki, że dla $f : W \rightarrow K \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in V^*$. W takim razie, przekształcenie $\varphi^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$ dla $f^* : V^* \rightarrow K \in V^{**}$ przyporządkuje

$$\varphi^{**}(f^*) = f^* \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi^{**} \circ f(V))(v) &= \varphi^{**}(f(V)(v)) = \varphi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\
 &= \langle \cdot, v \rangle \circ \varphi^* = \langle \varphi^*(\cdot), v \rangle = \\
 &= \langle \cdot \circ \varphi, v \rangle = \langle \cdot, \varphi(v) \rangle = f(W)(\varphi(v)) = \\
 &= (f(W) \circ \varphi)(v)
 \end{aligned}$$

element W^{**} .

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze tworzą zbiory w takim przypadku. Taki twór oznaczamy **Funct(C, D)** i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ oraz $\varphi : X \rightarrow Y$ rysujemy

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{a(X)} & G(X) & \xrightarrow{b(X)} & H(X) \\
 F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) & & \downarrow H(\varphi) \\
 F(Y) & \xrightarrow{a(Y)} & G(Y) & \xrightarrow{b(Y)} & H(Y)
 \end{array}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa,

równoważne, sposoby:

- 🌿 naturalne przekształcenia $f : F \rightarrow G$ dla których istnieje $g : G \rightarrow F$ takie, że $f \circ g = \text{id}_G$ oraz $g \circ f = \text{id}_F$
- 🌿 przekształcenie $f : F \rightarrow G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii \mathbf{D} .

Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów $\text{Id}, **$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ oraz naturalne przekształcenia funktorów $f : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$ i $g : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{C}}$

Równoważność kategorii jest nieco słabszym warunkiem niż istnienie izomorfizmu między nimi - złożenie $F \circ G$ niekoniecznie musi być równe $\text{Id}_{\mathbf{D}}$, wystarczy tylko żeby istniało naturalne przekształcenie między tymi dwoma funktorami.

Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ jest równoważna kategorii \mathbf{S}_K , której obiektami są $\text{Ob} \mathbf{S}_K = \{K^0, K^1, \dots, K^n, \dots\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Funktor włożenia

$$F : \mathbf{S}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$$

jest oczywistym wyborem na pierwszy funktor, gdyż każdy obiekt z \mathbf{S}_K jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru.

Aby znaleźć funktor

$$G : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{S}_K$$

zaczniemy od rozważenia na co przechodzi $V \in \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$. Wiemy, że $\dim \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} = \infty$, możemy więc zdefiniować

$$G(V) = K^{\dim \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}}.$$

Pozostaje zastanowić się nad przekształceniem morfizmów. W każdym V możemy wyróżnić pewną bazę, a każde przekształcenie liniowe $V \rightarrow W$ będzie macierzą o wyrazach w K zapisaną w tych wyróżnionych bazach. Wystarczy więc przekształceniu $V \rightarrow W$ zadanemu macierzą przyporządkować przekształcenie wyznaczone przez taką samą macierz na $K^{\dim V} \rightarrow K^{\dim W}$.

Twierdzenie 2.1.

Funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ zadaje równoważność kategorii \iff jest on wierny, pełny i w zasadzie suriektywny, tzn. $(\forall Y \in \text{Ob } \mathbf{D})(\exists X \in \text{Ob } \mathbf{C}) F(X) \cong_Y Y$.

Dowód

\Leftarrow

Wiemy, że funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest wierny, pełny i w zasadzie suriektywny i na podstawie tej wiedzy skonstruujemy $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ jak w definicji równoważności kategorii.

Dla $Y \in \text{Ob } \mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \text{Ob } \mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \rightarrow F(G(Y))$. Możemy tak zrobić, gdyż F jest w zasadzie suriektywny.

Niech $\varphi : Y \rightarrow Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii \mathbf{D} . Chcemy sprawdzić istnienie $G(\varphi)$ takie, że mamy naturalny izomorfizm $\text{Id}_{\mathbf{D}} \leftrightarrow F \circ G$

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathbf{D}}(Y) = Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' = \text{Id}_{\mathbf{D}}(Y') \\ \iota_Y \downarrow & & \downarrow \iota_{Y'} \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{F(G(\varphi))} & F(G(Y')) \end{array}$$

Ponieważ ι_Y jest izomorfizmem, dolną strzałkę $F(G(Y)) \rightarrow F(G(Y'))$ możemy podpisać jako $\iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$. Chcemy pokazać, że da się dobrać $G(\varphi)$ tak, żeby $F(G(\varphi)) = \iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$, tzn. żeby diagram na górze komutował.

F jest wierny i pełny, więc przejście

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest jednocześnie bijekcją i iniekcją, czyli możemy je odwracać. Istnieje więc jedyne

$$\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \varphi \iota_Y^{-1}) : G(Y) \rightarrow G(Y')$$

które możemy przypisać do $G(\varphi) = \psi$. Zbiór izomorfizmów ι_Y zadaje więc naturalny izomorfizm $\text{Id}_{\mathbf{D}} \rightarrow F \circ G$:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\
 \downarrow \iota_Y & & \downarrow \iota_{Y'} \\
 F(G(Y)) & \xrightarrow{F(G(\varphi))=F(\psi)=\iota_{Y'} \varphi \iota_Y^{-1}} & F(G(Y'))
 \end{array}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla tak zdefiniowanego G istnieje również naturalne przekształcenie $\text{Id}_{\mathbf{C}} \rightarrow G \circ F$.

Dla $X, X' \in \text{Ob } \mathbf{C}$ oraz $\psi : X \rightarrow X'$ istnieje izomorfizm $F(X) \cong F(G(F(X)))$, gdyż tak właśnie zdefiniowaliśmy funktor G . Aby utrzymać konwencję z powyższego fragmentu dowodu, nazwijmy te izomorfizmy odpowiednio $\iota_{F(X)}$ i $\iota_{F(X')}$:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\iota_{F(X)}} & F(G(F(X))) \\
 \downarrow F(\psi) & & \downarrow F(G(F(\psi))) \\
 F(X') & \xrightarrow{\iota_{F(X')}} & F(G(F(X')))
 \end{array}$$

Ponieważ F jest wiernym i pełnym funktorem, to możemy najbardziej zewnętrzne F zdjąć, by otrzymać diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F^{-1}(\iota_{F(X)})} & G(F(X)) \\
 \downarrow \psi & & \downarrow G(F(\psi)) \\
 X' & \xrightarrow{F^{-1}(\iota_{F(X')})} & G(F(X'))
 \end{array}$$

Ponieważ diagram przed zdjęciem F był przemienny, to również diagram niżej musi taki być - w końcu to zwykłe nałożenie F^{-1} na wszystkie elementy i strzałki. W takim razie, morfizmy $F^{-1}(\iota_{F(X)})$ zadają naturalny izomorfizm $\text{Id}_{\mathbf{C}} \rightarrow G \circ F$.

\Rightarrow

Dowód drugiej implikacji zostaje pozostawiony jako ćwiczenie.



Wykład 16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice

3.1 Kategoria funktorów

W kategorii **Set** zbiór $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$ możemy widzieć jako $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$ gdzie 1 jest singletonem. Robimy to utożsamiając element $x \in X$ z morfizmem $1 \mapsto x \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$.

Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii **C** obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \quad (*)$$

gdzie $(*)$ zapisujemy czasem jako $X(Y)$.

Ponieważ nie we wszystkich kategoriach istnieje odpowiednik singletona 1, musimy rozważać wszystkie obiekty Y i morfizmy:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ f \\ X & \xrightarrow{h_X(f)} & X \end{array}$$

dobrane tak, że diagram komutuje.

Oczywiście, możemy też definiować funktor kowariantny $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ taki, że $g_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.

Kategorię funktorów $(\mathbf{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$, której obiektami są h_X jak w przykładzie wyżej, oznaczamy $\widehat{\mathbf{C}}$.

Funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest **reprezentowalny**, jeśli $F \cong h_X$ dla pewnego $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$. Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dla morfizmu $X \xrightarrow{\varphi} X'$ w **C** określamy morfizm $h_{\varphi} : h_X \rightarrow h_{X'}$ w $\widehat{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_{\varphi}} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & \varphi \circ \alpha \end{array}$$

Funktor h_X można również oznaczyć jako $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$. Wówczas dla morfizmu $\varphi : Y \rightarrow Y'$ mamy

$$h_\varphi(\alpha) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, X)(\alpha) = \varphi \circ \alpha$$

dla $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$

Przykład(y) 3.1

1. $\mathcal{P}(X) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo $\mathcal{P}(X) \cong \text{Hom}(X, 2)$.

Dla dowolnego zbioru $X \in \mathbf{Set}$ naturalne przekształcenie $f(X) : \text{Hom}(X, 2) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ przypisze funkcji $\alpha \in \text{Hom}(X, 2)$ zbiór tych elementów $x \in X$ dla których $\alpha(x) = 2$. Przekształcenie odwrotne do tego przypisze zbiorowi $A \in \mathcal{P}(X)$ funkcję $\alpha : X \rightarrow 2$ taką, że $\alpha(x) = 1$ jeśli $x \notin A$ i $\alpha(x) = 2$ wpp.

2. Funktor kohomologii $H^n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ z kategorii CW-kompleksów w grupy abelowe taki, że $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ jest funktorem reprezentowalnym. Pokazuje to twierdzenie Browna o reprezentowalności o którym uczy się przy okazji topologii algebraicznej.
3. **co tutaj mają do roboty wiązki stycznne?** $\text{Vect}_n(X) = [X, C^\infty]????$

Przyporządkowania $X \mapsto h_X$ oraz $\varphi \mapsto h_\varphi$ dają w oczywisty sposób funktor $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$.

Lemat 3.1 : Yoneda lemma.

Przyporządkowanie $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ zadaje równoważność kategorii \mathbf{C} z pełną podkategorią kategorii $\widehat{\mathbf{C}}$, której obiektami są funktory reprezentowalne.

Dowód

Wystarczy pokazać, że h jest funktorem wiernym, pełnym i w zasadzie surjektywnym.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h(X)} & h_X = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h_\varphi \\ X' & \xrightarrow{h(X')} & h_{X'} = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X') \end{array}$$

Chcemy pokazać, że przekształcenie h

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \Psi & & \Psi \\ \varphi & \xrightarrow{h} & h_\varphi \end{array}$$

jest bijekcją.

Musimy pokazać, że

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \xrightarrow{\quad} & h_\varphi \end{array}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \cong & & \searrow \cong \\ h_X & \xrightarrow{\quad \star \star \quad} & h_{X'} \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad \star \quad} X'$$

izomorfizm \star pojawia się bezpośrednio po tym, że $F \rightarrow h_X$ i $F \rightarrow h_{X'}$ są izomorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm $\star\star$.

Niech teraz $F \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$.

Jeśli $F = h_{\varphi}$, to mamy

$$\begin{array}{ccc} & h_\varphi & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ h_X(X) \ni \mathrm{id}_X & & h_{X'}(X) \\ & f & \\ & \curvearrowright & \end{array}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE



3.2 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ będzie funktorem.

Definicja 3.2 : granica funktora F .

Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów) $\Pi_i : X \rightarrow F(i)$ dla $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$, które spełniają

☕ [zgodność] dla dowolnych $i \xrightarrow{\alpha} j$ w I diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Pi_i \swarrow & & \searrow \Pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \end{array}$$

komutuje, tzn. $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$.

☕ [uniwersalność] dla każdego układu (X', Π'_i) spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm $\lambda : X' \rightarrow X$ taki, że dla każdego $i \in I$ diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\exists! \lambda} & X \\ \Pi'_i \searrow & & \swarrow \Pi_i \\ & F(i) & \end{array}$$

komutuje

jest nazywany **granicą funktora F** i oznaczamy ją jako $\lim F = X$.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład(y) 3.2

1. Dla $I = \{0, 1\}$ oraz $F : I \rightarrow \mathbf{C}$ granicę $\lim F$ nazywamy **produktem** obiektów $F(0)$ i $F(1)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Pi_1} & F(1) \\ \Pi_0 \downarrow & \searrow \text{dashed} & \uparrow \Pi'_1 \\ F(0) & \xleftarrow{\Pi'_0} & X' \end{array}$$

Definicja 3.3 : granica odwrotna.

Analogicznie jak w definicji granicy, obiekt X wraz z rodziną odwzorowań $\Pi_i : F(i) \rightarrow X$ takich, że jeśli dla $i, j \in I$ oraz morfizmu $i \xrightarrow{\alpha} j$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Pi_i \nearrow & & \nwarrow \Pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \end{array}$$

Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

Definicja 4.1 : funktory sprzężone.

Para funktorów $L : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ i $R : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem \mathbf{A} jak i \mathbf{B})

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy $L \dashv R$

Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktorem zapominającym*

☕ jeśli $R : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, wtedy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(*, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$$

grupa ↗
grupa jako zbiór ↖

* będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy F_A .

☕ $R : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Set}$ z bijekcjami zdefiniowanymi jako

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.

2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

dla $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$ mamy

$$(a \otimes x \mapsto (\varphi(a))(x)) \mapsto \varphi$$

Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły: $L = - \otimes X$ oraz $R = \mathrm{Hom}(X, -)$

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym functor sprzężonym.

☕ Włożenie kategorii **Ab** \hookrightarrow **Grp** posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm $\varphi : A \rightarrow B$ na element neutralny, więc od razu indukowane mamy przekształcenie $A^{\mathrm{op}} \rightarrow B$, stąd $\star = A^{\mathrm{op}}$.

☕ Włożenie kategorii ciał w dziedzinę wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciała}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K , to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciał ułamków ciała R w ciało K :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & K \ni \begin{matrix} \varphi(p) \\ \varphi(q) \end{matrix} \\ & \searrow & \nearrow \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} & \end{array}$$

stąd $\star = R_0$

☕ Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne **CptT**₀ \hookrightarrow **Top** mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CptT}_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc $\star = \beta X$ czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w $[0, 1]$ i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.

Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgrzyźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

$R(B)$ to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.



Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).

Jeśli $L \dashv R$, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

Dowód

OBRAZEK


Musimy wziąć dowolny obiekt $A \in \mathbf{A}$ i sprawdzić, czy $\Pi'_i : A \rightarrow (R \circ F)(I)$ sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na $R \circ R(\Pi_i)$. Musimy wziąć obiekt $LA \in \mathbf{B}$ i tutaj dostajemy jedyną strzałkę $LA \rightarrow X$, gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jednoznaczność odpowiadania strzałek między elementami \mathbf{A} a elementami \mathbf{B} .



4.1 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2 : kategoria addytywna.

Kategoria addytywna \mathbf{A} to kategoria

 Dla każdej pary obiektów $A, B \in \text{Ob } \mathbf{A}$ na $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f'} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

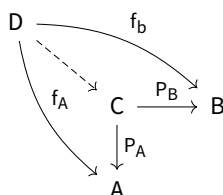
$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje *obekt zerowy* 0 taki, że $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(0, 0) = 0$ jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \text{Ob } \mathbf{A}$ istnieje obiekt C (zwykle oznaczany $A \oplus B$), który jest ich *produktem i koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \begin{matrix} \xleftarrow{i_A} \\ \xrightarrow{P_A} \end{matrix} C \begin{matrix} \xleftarrow{P_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{matrix} B$$

takie, że $P_A \circ i_A = \text{id}_A$ i $P_A \circ i_B = 0$ (analogicznie gdy przestawimy A i B).
Dodatkowo, $i_A P_A + i_B P_B = \text{id}_C$.

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strzałka $D \rightarrow C$:

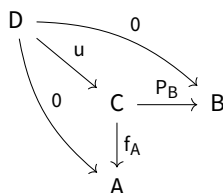


Zauważmy że $i_A f_A + i_B f_B : D \rightarrow C$, wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja $D \rightarrow C$ sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z P_A i P_B :

$$P_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_A i_A}_{\text{id}_A} f_A + \underbrace{P_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$P_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{P_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{P_B i_B}_{\text{id}_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram



Zauważmy, że

$$\begin{aligned} u &= \text{id}_C \circ 0 = \\ &= i_A P_A u + i_B P_B u = \\ &= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

Dygresja : parę słów o zerach.

Dla dowolnego obiektu $A \in \text{Ob } \mathbf{A}$ mamy $\text{Hom}(0, A) = 0$ i $\text{Hom}(0, A) = 0$, bo dla $f : A \rightarrow 0$ jest $\text{id}_0 \circ f = f$, czyli $f = 0 \circ f$, a więc

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

Pre – snop/ $\mathbf{AB}(X)$ i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

Definicja 4.3 : kategoria abelowa.

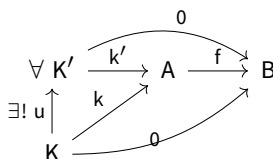
Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i коядро i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

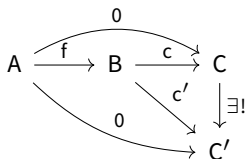
Kilka wyjaśnień:

☞ Jądro f to ekwalizator $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$. Inaczej, jest to $K \xrightarrow{k} A$ taki, że

1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
2. Zachodzi własność uniwersalna:



☞ Kоядро f to koekwalizator $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$ jak w następującym diagramie:



☕ Niech $f : A \rightarrow B$, wówczas

- $\text{im } f = \ker(B \rightarrow \text{Coker } f)$
- $\text{Coim } f = \text{Coker}(\ker f \rightarrow A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{c} & C \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{Coim } f & \dashrightarrow & \text{im } f & &
 \end{array}$$

Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działamy w kategorii abelowej.

Definicja 4.4 : mono-, epi-.

Morfizm $f : X \rightarrow Y$ jest

☕ **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego $g : Z \rightarrow X$ $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

☕ **epimorfizmem** nazywamy morfizm $f : A \rightarrow B$ taki, że mając $h_1, h_2 : B \rightarrow W$ zachodzi

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając $f : A \rightarrow B$ i $h : B \rightarrow W$ to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

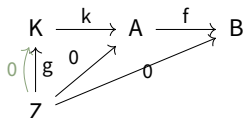
Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to $\ker f = 0$, a jeśli f jest epimorfizmem, to $\text{Coker } f = 0$.

Lemat 4.3.

Jądra są monomorfizmami, a коядра są epimorfizmami.

Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:



i zauważyć, że jedyność odwzorowania $Z \rightarrow K$ wymaga, aby $g = 0$.



Uwaga 4.4.

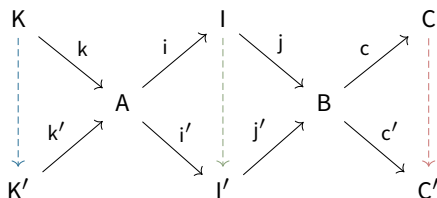
Dla każdego morfizmu $f : A \rightarrow B$ w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow[\text{epi}]{i} I \xrightarrow[\text{mono}]{j} B \xrightarrow{c} C$$

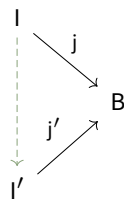
w którym $k = \ker f$, $c = \text{Coker } f$, $i = \text{Coker } k$ oraz $j = \ker c$ i $f = j \cdot i$.

Dowód

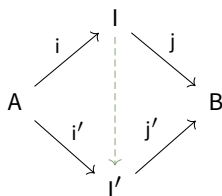
Założmy, że istnieją dwa takie rozkłady:



Strzałki **niebieska** i **czerwona** są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę **zieloną** dobieramy w taki sposób, aby diagram



komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem



Lemat 4.5.

W kategorii abelowej, jeśli f jest epimorfizmem, to $f = \text{Coker } \ker f$, a jeśli f jest monomorfizmem, to $f = \ker \text{Coker } f$.

Dowód

Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$K \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{0} 0$$

wiemy, że j jest $\ker(B \rightarrow 0)$, czyli funkcji zerowej. Czyli musi być $j = \text{id}_B$, możemy więc przerysować

$$\begin{array}{ccccccc} K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \xrightarrow{j} & B \xrightarrow{0} 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ K' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \xrightarrow{0} 0 \end{array}$$

ale przecież $i : A \rightarrow I$ było $i = \text{Coker } \ker f$, z drugiej strony ponieważ $A \rightarrow I \rightarrow B$ jest równe f , a w tym konkretnym przypadku jest to równe $A \rightarrow B \rightarrow B$ gdzie druga strzałka to id_B , to musi być $i : A \rightarrow I = f : A \rightarrow B$.



Uwaga 4.6.

W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i коядро oraz zachodzi lemat 4.5

Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro $\ker f$ to algebraiczne jądro f z dziedziczną topologią, a $\text{Coker } f$ to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu $\overline{\text{im } f}$.

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/\overline{f[A]}$$

Przez taką definicję Coker mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

Wystarczy sprawdzić

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^\delta \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

gdzie \mathbb{R}^δ ma topologię dyskretną, a \mathbb{R} traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między коядрами **JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD**

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria R -modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii R -modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

Dygresja : twierdzenie Freyd-Mitchella.

Mała kategoria abelowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię R -modułów dla pewnego R .

Wykład 30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

Definicja 5.1 : kompleks łańcuchowy.

Kompleks (ko)łańcuchowy w kategorii abelowej \mathbf{A} to ciąg obiektów i morfizmów

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

taki, że dla każdego n $d^n \circ d^{n-1} = 0$

Przykład(y) 5.1 : kompleksów łańcuchowych

1. Niech X będzie *kompleksem symplecjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stworzyć kompleks symplecjalny z obiektami

$$C_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

σ - n -sympleks

i wtedy $\partial : C_n X \rightarrow C_{n-1} X$ jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

$$\partial[\sigma^n] = \sum_{\tau: \Delta^{n-1} \rightarrow X} \pm [\tau^{n-1}]$$

gdzie σ^n to generator składnika \mathbb{Z} odpowiadający sympleksowi σ^n . Jeśli mamy sympleks $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$ to przez ścianę τ^{n-1} rozumiemy

$$\tau^{n-1} = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

gdzie przez $\widehat{v_i}$ rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

$$S_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

gdzie $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w X . To się nazywa *kompleks singularny*.

Odwzorowanie brzegu $\partial : S_n X \rightarrow S_{n-1} X$ na $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ przyjmuje wartość

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \upharpoonright_{i\text{-ta ściana}})$$

3. Kompleks de Rhama

Niech M będzie gładką rozmaitością, $A^n = \Omega^n M$ będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas $d : \Omega^n M \rightarrow \Omega^{n+1} M$ jest pochodną zewnętrzną.

W szczególności, jeśli $M = T^2$, to $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^2 = \mathbb{R}$ oraz $H^{>2} = 0$.

5.2 Homologie

Skoro $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$, to $\text{im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$, więc możemy zastanowić się nad

$$H_n X = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Tak zdefiniowane $H_n X$ nazywamy **homologiami**.

Definicja 5.2 : ogólna definicja (kohomologii).

Niech A^\cdot będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzmy na jego wycinek

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow a & \nearrow \ker d^n & & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

Ponieważ $d^n \circ d^{n-1} = 0$, to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra $a : A^{n-1} \rightarrow K$. Chcemy więc nazwać

$$H^n(A^\cdot) = \text{Coker } a$$

kohomologią.

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C & & \\ & & & \nearrow \text{Coker } d^{n-1} & \downarrow b & & \\ \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

i zdefiniować $H^n(A^\cdot) = \ker b$.

Lemat 5.1.

W definicji jak wyżej $H^n(A^\cdot) : \text{Coker } a \cong \ker b$.

Dowód

☕ Przy dodatkowym założeniu, że d^{n-1} jest monomorfizmem, a d^n jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = \text{Coker } \ker d^n = \text{Coker } k$$

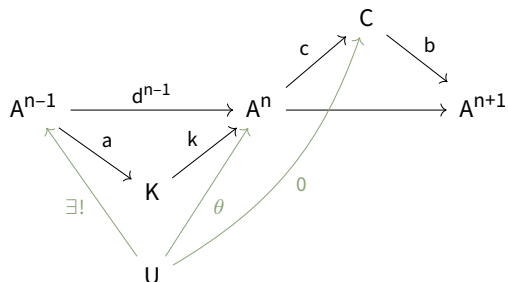
$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że $a = \ker ck$ oraz $b = \text{Coker } ck$, z czego od razu wynika teza:

$$\begin{array}{ccccc} A^{n-1} & \xrightarrow{a} & K & \xrightarrow{ck} & C & \xrightarrow{b} & A^n \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Coker } a & \xrightarrow{\star} & \ker b & & \end{array}$$

i strzałka \star jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia



☕ Bez dodatkowych założeń

ZDJĘCIA



5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

Definicja 5.3.

☕ Pull-back to granica diagramu

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

☕ Push-out to z kolei kogranica diagramu

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Fakt 5.2.

W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

Dowód

Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania.



Wykład 06.11.23 : Lemat o wężu i przyjaciele

Lemat 6.1.

Jeśli mamy dany pull-back (kwadrat kartezjański, tzn. Z wraz z g' i g jest granicą początku alfabetu)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

wtedy jeśli f jest epimorfizmem, to f' też takie jest.

Dowód

Zacniemy naszą przygodę od powiększenia diagramu tak, aby było widać jak konstruowany jest pull-back.

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & B \\ & \searrow m & & \swarrow P_B & \\ & & A \oplus B & & \\ & \swarrow P_A & & \searrow fP_A - gP_B & \\ A & & & & C \\ & \nearrow i_A & & \nwarrow f & \\ & & & & \end{array}$$

Wiemy, że m jest jądrem odwzorowania $(fP_A - gP_B)$, czyli musi być monomorfizmem. Przejdziemy przez kilka etapów, żeby wyciągnąć bycie epimorfizmem przez f do bycia epimorfizmem przez f' .

1. f jest epimorfizmem $\Rightarrow fP_A - gP_B$

Weźmy sobie dowolny D i wyobraźmy sobie, że mamy strzałkę $\alpha : C \rightarrow D$ taką, że $\alpha(fP_A - gP_B) = 0$. Musimy więc pokazać, że wtedy α musi być 0.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(fP_A - gP_B)i_A = \alpha \underbrace{fP_A i_A}_{\text{id}_A} - \underbrace{\alpha gP_B}_{0} i_A = \\ &= \alpha f \text{id}_A = \alpha f \end{aligned}$$

Skoro więc $\alpha f = 0$, a f jest epimorfizmem, to na pewno wiemy, że $\alpha = 0$.

2. f' jest epimorfizmem

Wyobraźmy sobie, że teraz z kolei istnieje E oraz strzałka $h : B \rightarrow E$ taka, że $hf' = 0$. Tak jak wcześniej, musimy pokazać, że $h = 0$.

Zauważmy, że $f' = P_B m$, czyli możemy napisać

$$0 = hf' = hP_B m$$

czyli hP_B faktoryzuje się przez Coker m , ale czym tak właściwie jest Coker m ? Otóż $\text{Coker } m = C$! W takim razie możemy znaleźć $h' : C \rightarrow E$ takie, że

$$h'(fP_A - gP_B) = hP_B,$$

czyli znowu szukając zera dostaniemy

$$\begin{aligned} 0 &= h^{P_B i_A} 0 = h'(fP_A - gP_B)i_A = \\ &= h'fP_A i_A - h'gP_B i_A = h'f \end{aligned}$$

Wiemy, że f jest epimorfizmem, czyli $h' = 0$. W takim razie

$$0 = h'(fP_A - gP_B) = hP_B$$

ale z drugiej strony $h = hP_B i_B$, czyli mamy

$$h = hP_B i_B = 0 i_B = 0$$

i dostajemy to co chcieliśmy.

