Zadanie dodatkowe 1

Weronika Jakimowicz

30.10.2023

Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $\mathcal{G}$ będzie podσ-ciałem $\mathcal{F}$. Niech $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ będą równoważnymi miarami probabilistycznymi na $(\Omega, \mathcal{F})$. Dokładniej $\mathbb{P}$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{Q}$ (na $\mathcal{F}$) i $\mathbb{Q}$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{P}$ (na $\mathcal{F}$). Oznaczmy przez X_0 pochodną Radona-Nikodyma $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$. Przez $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznaczać będziemy wartość oczekiwaną wyznaczoną odpowiednią przez $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$.

Zadanie 1.

Uzasadnij, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] > 0$ **$\mathbb{P}$-p.w.**

Zacznijmy od małej powtórki miary i całki, czyli powiedzenia, że jeśli $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są miarami równoważnymi, to $X_0 = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ prawie wszędzie. Rozważmy zbiór

$$A = \{\omega \ : \ X_0(\omega) \leq 0\}.$$

Wówczas

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X_0 d\mathbb{P} \leq 0$$

gdyż całkujemy funkcję na zbiorze, na którym przyjmuje ona wyłącznie niedodatnie wartości. Z drugiej strony, $\mathbb{Q}(A) \geq 0$, czyli $\mathbb{Q}(A) = 0$, a ponieważ $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, to również $\mathbb{P}(A) = 0$.

Powiedzenie teraz, że skoro $X_0 > 0$ to $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] > 0$ wynika teraz wprost z własności wwo.

Zadanie 2.

Pokaż, że dla każdej ograniczonej, $\mathcal{F}$-mierzalnej zmiennej Y,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

Zacznijmy od zauważenia, że $X_0' = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$, gdzie X_0' jest pochodna Radona-Nikodyma $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ na $\mathcal{G}$. Z definicji X_0' jest $\mathcal{G}$-mierzalne, wystarczy więc sprawdzić (W2) w definicji wykładowej. Niech więc $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0\mathbb{1}_G] = \int_G X_0 d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(G)$$

ale ponieważ X_0' jest pochodną na ciele $\mathcal{G}$, a my jesteśmy w $\mathcal{G}$, to z drugiej strony

$$\mathbb{Q}(G) = \int_G X_0' d\mathbb{P}.$$

Przechodząc już do sedna sprawy, przypomnijmy sobie, razem z Wikipedią, że jeśli g jest $\mathbb{Q}$-całkowalną funkcją, to

$$\int_A g \, d\,\mathbb{Q} = \int_A g \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \, d\mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$$

Ustalmy $G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] &\overset{\star\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]X_0'\mathbb{1}_G] \\
&\overset{\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0X_0' \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0X_0'\mathbb{1}_G] = \\
&\overset{\star\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0'\mathbb{1}_G] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0' \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G] = \\
&\overset{\star}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]X_0'\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{1}_G]
\end{aligned}$$

Wystarczy więc uzasadnić równości zaznaczone gwiazdką i dowód jest gotowy.

Przejścia $\star\star$ najpierw "wypluwają" X_0', żeby zamienić całkę na $G \in \mathcal{G}$ względem $\mathbb{Q}$ na całkę względem $\mathbb{P}$, a potem zjadają X_0 żeby zamienić całkę względem $\mathbb{P}$ na całkę względem $\mathbb{Q}$ (tutaj myślimy już w kontekście całego $\mathcal{F}$, bo i tak nie ma to różnicy gdy jesteśmy na $G \in \mathcal{G}$).

Przejścia oznaczone $\star$ wymagają, żeby YX_0X_0' było całkowalne względem $\mathbb{P}$ oraz żeby YX_0' było całkowalne względem $\mathbb{Q}$.

W pierwszym zadaniu powiedzieliśmy już, że $X_0 > 0$, a ponieważ X_0' też jest pochodną Radona-Nikodyma, to $X_0' > 0$ ze względu na ten sam argument.

Niech więc M będzie taką stałą, że dla każdego ω $|Y(\omega)| \leq M$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|YX_0X_0'|] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0X_0'] = M \int X_0' \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = M \int X_0' \, d\,\mathbb{Q} = \\
= M \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \, |\mathcal{G}] d\,\mathbb{Q} = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = M \cdot 1 < \infty
\end{aligned}$$

gdyż $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = \int_\Omega X_0 \, d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(\Omega) = 1$. Korzystając z tych wyliczeń dostajemy analogiczny wynik dla YX_0':

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YX_0'] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_0'] = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0'X_0] < \infty$$

Zadanie 3.

Załóżmy, że $X' = GX_0$ dla pewnej ograniczonej $\mathcal{G}$-mierzalnej zmiennej losowej G. Pokaż, że spełnione są

(a) X' **jest $\mathbb{P}$-całkowalna**

(b) Dla każdej ograniczonej, $\mathcal{F}$-mierzalnej zmiennej Y**,**

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

(a)

Niech M będzie takie, że $M \geq |G(\omega)|$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Stosując to samo rozumowanie co wyżej dostajemy:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = M\int \frac{d\,\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\,d\mathbb{P} = M\int d\,\mathbb{Q} = M\cdot 1 = M < \infty$$

(b)

Po pierwsze zauważmy, że skoro Y jak i G są ograniczone, to również YG są ograniczone. Wprost z poprzedniego zadania dostajemy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(YG)X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(YG) \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

I wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|YG|] = \int |YG|\,d\,\mathbb{Q} \leq \int M\,d\,\mathbb{Q} = M < \infty$$

jeśli $M = \max|YG|$, czyli możemy użyć 6 własności wwo (na którą już się powoływałam), żeby dostać

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}] = G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}].$$

Wiemy też, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] < \infty$, czyli można również napisać

$$G\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}].$$

Łącząc oba te kroki dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] =\\ = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Załóżmy, że zmienna X' spełnia warunki (a) i (b). Pokaż, że $X' = GX_0$ dla pewnej $\mathcal{G}$-mierzalnej zmiennej G.

Z zadania drugiego łatwo otrzymać

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]}$$

W takim razie musi istnieć niezerowa funkcja f taka, że

$$\begin{cases}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G} = f\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}] = f\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]\end{cases}$$

i ponieważ zadanie pierwsze mówi, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] > 0$ prawie wszędzie, to

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]} = f$$

czyli f jest funkcją $\mathcal{G}$-mierzalną jako iloczyn dwóch $\mathcal{G}$-mierzalnych funkcji z dzielnikiem > 0 prawie zawsze.

Chcemy teraz sprawdzić, czy $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f \cdot YX_0|] < \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|fYX_0|] &\leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|fX_0|] = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f|X_0] = \\ &= M\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|f|] = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f|X_0'] = \\ &= M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]|] = \\ &= M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]|] \leq \\ &\leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X'| \mid \mathcal{G}]] = M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X'|]\infty\end{aligned}$$

Po dokonaniu tej formalności, możemy wciągnąć f do środka wwo:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[fYX_0 \mid \mathcal{G}]$$

co daje, że

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[fYX_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y(X' - fX_0) \mid \mathcal{G}]$$

dla dowolnej ograniczonej $\mathcal{F}$-mierzalnej funkcji Y. Możemy teraz wybrać

$$Y = \begin{cases} 1 & X' - fX_0 \geq 0 \\ -1 & X' - fX_0 < 0 \end{cases}$$

co jest funkcją mierzalną jako kombinacja dwóch funkcji prostych.

Wystarczy teraz zauważyć, że $Y(X' - fX_0) = |X' - fX_0|$, czyli

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X' - fX_0| \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X' - fX_0|]$$

funkcja $|X' - fX_0|$ nie zmienia znaku, więc skoro całka z niej jest zerem, to $|X' - fX_0| = 0$ prawie wszędzie, czyli $X' = fX_0$ prawie wszędzie.

Zadanie 5.

Znajdź warunek konieczny i dostateczny (w terminach X_0) na to, aby

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]$$

dla każdej ograniczonej zmiennej Y**.**

Warunek konieczny to będzie p takie, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] \Rightarrow p$. Warunek dostateczny to z kolei będzie q taki, że $q \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]$.

Próbując znaleźć warunek dostateczny ciekawszy niż $X_0 \equiv 1$, z przykrością stwierdziłam, że może on być praktycznie taki sam jak warunek konieczny. Z tego powodu, mogę napisać, że

$$X_0 \textit{ jest } \mathcal{G}\textit{-mierzalny} \iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] \textit{ dla każdego ograniczonej zmiennej } Y.$$

$\Rightarrow$ jest dość prostym kierunkiem implikacji. Jeśli X_0 jest $\mathcal{G}$-mierzalne, to $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = X_0$. To, połączone z wcześniej już zauważonym faktem, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|YX_0|] < \infty$ daje

$$X_0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] X_0$$

Wystarczy teraz przypomnieć sobie, że $X_0 > 0$ jeśli miary $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$ są sobie równoważne (co jest prawdą w tym zadaniu), aby dostać pozwolenie na podzielenie obu stron równości przez X_0 i otrzymanie

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}].$$

$\Leftarrow$ jest bardzo podobny do tego co się stało w zadaniu 4, tzn. zaczynamy od

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]}$$

biorąc dowolny $G \in \mathcal{G}$ i całkując obie strony na G względem miary $\mathbb{Q}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0' \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] \mathbb{1}_G] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]} \mathbb{1}_G\right] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{X_0'} X_0' \mathbb{1}_G\right] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mathbb{1}_G] \end{aligned}$$

Ponieważ $G \in \mathcal{G}$ był wybrany dowolnie, to

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0' \mid \mathcal{G}] \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 - YX_0' \mid \mathcal{G}] = 0$$

a więc

$$0 = \int YX_0 - YX_0' d\mathbb{P} = \int Y(X_0 - X_0') d\mathbb{P}$$

biorąc

$$Y = \begin{cases} 1 & X_0 - X_0' \geq 0 \\ -1 & X_0 - X_0' < 0 \end{cases}$$

mamy $Y(X_0 - X_0') = |X_0 - X_0'|$, a więc

$$0 = \int |X_0 - X_0'| d\mathbb{P} \Rightarrow X_0 = X_0' \ \mathbb{P} - \text{p.w.}$$

Wiedząc, że X_0' było $\mathcal{G}$-mierzalne dowiadujemy się w taki sposób, że X_0 też jest $\mathcal{G}$-mierzalne.