Algebra homologiczna

Zima 2023-24

1 Wstęp

1.1 Kompleksy łańcuchowe

Niech R będzie dowolnym pierścieniem, natomiast A, B, C będą R-modułami. Mając ciąg

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

mówimy, że jest on *dokładny*, jeśli $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. W szczególności implikuje to, że $g \circ f = gf : A \to C$ jest homomorfizmem zerowym.

Definicja 1.1 : Kompleks łańcuchowy
Rozważmy rodzinę $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ R-modułów wraz z mapami $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$ takimi, że każde złożenie

$$[d_{n-1} \circ d_n =] d \circ d : C_n \to C_{n-2}$$

jest zerowe. Wówczas każdą mapę d_n nazywamy **różniczkami** C, a rodzina C jest **kompleksem łańcuchowym**.

Jądra każdego d_n nazywamy n-*cyklami* C i oznaczamy $Z_n = Z_n(C)$, natomiast obraz każdego d_{n+1} jest nazywany n-*granicą* C i oznacza się jako $B_n = B_n(C)$. Ponieważ $d_n \circ d_{n+1} = 0$, to

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n.$$

Definicja 1.2 : Homologia
n-**tym modułem homologii** kompleksu C nazywamy iloraz $H_n(C) = Z_n/B_n$.

Problem 1.1

Ustalmy $C_n = \mathbb{Z}/8$ *dla* $n \geq 0$ *i* $C_n = 0$ *dla* $n < 0$. *Dla* $n > 0$ *niech* d_n *posyła* $x \mod 8$ *do* $4x \mod 8$. *Pokaż, że tak zdefiniowane* C *jest kompleksem łańcuchowym* $\mathbb{Z}/8$*-modułów i policz moduły homologii.*

Rozwiązanko
Zauważyć, że $d_{n-1}d_n = 0$ jest nietrudno dla $n \leq 1$ ($d_{n-1}d_n : C_n \to C_{n-2} = 0$). Z kolei dla dowolnego $n > 1$ i dowolnego $x \in C_n$ wiemy, że $d_n(x) = 4x \mod 8$. Jeśli x było oryginalnie liczbą parzystą, to od razu widać, że $d_n(x) = 0$. Z kolei gdy x jest nieparzyste, to wówczas

$$d_{n-1}d_n(x) = d_{n-1}(4x \mod 8) = 16x \mod 8 = 8 \cdot (2x) \mod 8 = 0,$$

a więc $d_{n-1}d_n = 0$.
Homologie dla $n < 2$ są trywialne, natomiast dla $n \geq 2$ wszystkie są takie same (gdyż funkcje d_n jak i moduły C_n nie ulegają zmianie wraz z n). Wystarczy więc przyjrzeć się Z_1/B_1

$$C_0 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_1]{} C_1 = \mathbb{Z}/8 \xleftarrow[d_2]{} C_2 = \mathbb{Z}/8$$

Z_1 to liczby parzyste w $\mathbb{Z}/8$ (kernel d_1), natomiast B_1 to liczby podzielne przez 4, ale nie przez 8 w C_1. W takim razie, $Z_1/B_1 = \{4\}$.

2 Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = {U ⊆ X : U - zbiór otwarty}
- morfizmy to włożenia identycznościowe

Wówczas funkctor kontrwariantny $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to \mathbf{Set}$ to **presnop** na przestrzeni topologicznej X.

Zamiast kategorii **Set** zbiorów możemy też mieć snop na kategorię grup abelowych, przestrzeni liniowych etc.

Przykład(y) 2.1

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to C(X)$ definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[d, equal] & F(V) \arrow[l, "\text{obcięcie}"'] \arrow[d, equal] \\ C(U) & C(V) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

co w widoczny sposób spełnia $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$.

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

Definicja 2.1 : Presnop, snop

Presnopem na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop, który dla wszystkich otwartych $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i dla wszystkich $s_i \in F(U_i)$ (które nazywamy *cięciem presnopu*) zachodzi, że jeśli dla dowolnych $i, j \in I$ mamy $s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)$, to istnieje jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że dla wszystkich $i \in I$ $s \restriction U_i = s_i$. Zapisując to na kwantyfikatorach:

$$\left(\forall\, U = \bigcup_{i \in I} U_i\right)(\forall\, s_i \in F(U_i)) \left[(\forall i, j \in I)\ s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[(\exists!\, s \in F(U))(\forall i \in I)\ s \restriction U_i = s_i\right]$$

Przykład(y) 2.2

1. Przykład presnopa z wcześniej spełnia również warunek bycia snopem. Tutaj wchodzą kiełki gromadzące się nad snopem i zbierające się w większe źdźbła, ale ja sobie to odpuszczę.