

Zadanie dodatkowe 1

Weronika Jakimowicz

30.10.2023

Niech (Ω, \mathcal{F}) będzie przestrzenią mierzalną i niech \mathcal{G} będzie pod σ -ciałem \mathcal{F} . Niech \mathbb{P} i \mathbb{Q} będą równoważnymi miarami probabilistycznymi na (Ω, \mathcal{F}) . Dokładniej \mathbb{P} jest absolutnie ciągła względem \mathbb{Q} (na \mathcal{F}) i \mathbb{Q} jest absolutnie ciągła względem \mathbb{P} (na \mathcal{F}). Oznaczmy przez X_0 pochodną Radona-Nikodyma \mathbb{Q} względem \mathbb{P} na \mathcal{F} . Przez $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznaczać będziemy wartość oczekiwaną wyznaczoną odpowiednią przez \mathbb{P} i \mathbb{Q} .

Zadanie 1.

Uzasadnij, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] > 0$ \mathbb{P} -p.w.

Rozważmy zbiór $A = \{\omega : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}](\omega) \leq 0\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_A \max_{\omega \in A} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}](\omega) d\mathbb{P} = \\ &= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] 1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 1_A] = \\ &= \int_A X_0 d\mathbb{P} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \\ &= \int_A d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(A) \geq 0 \end{aligned}$$

Skoro więc $0 \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] 1_A] \geq 0$, to $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] 1_A] = 0$, a ponieważ jest to całka po zbiorze na którym funkcja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}]$ nie zmienia znaku, to zbiór A musi być miary zero, co jest chcianym przez nas rezultatem.

Zadanie 2.

Pokaż, że dla każdej ograniczonej, \mathcal{F} -mierzalnej zmiennej Y ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y | \mathcal{G}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}]$$

Zacznijmy od zauważenia, że $X'_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}]$, gdzie X'_0 jest pochodną Radona-Nikodyma \mathbb{Q} względem \mathbb{P} na \mathcal{G} . Z definicji X'_0 jest \mathcal{G} -mierzalne, wystarczy więc sprawdzić (W2) w definicji wykładowej. Niech więc $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 | \mathcal{G}] 1_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 1_G] = \int_G X_0 d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(G)$$

ale ponieważ X'_0 jest pochodną na ciele \mathcal{G} , a my jesteśmy w \mathcal{G} , to z drugiej strony

$$Q(G) = \int_G X'_0 dP.$$

Przechodząc już do sedna sprawy, przypomnijmy sobie, razem z Wikipedią, że jeśli g jest Q -całkowalną funkcją, to

$$\int_A g dQ = \int_A g \frac{dQ}{dP} dP \Rightarrow E_Q[g] = E_P[g \frac{dQ}{dP}]$$

Ustalmy $G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} E_Q[E_P[YX_0 | \mathcal{G}]1_G] &\stackrel{**}{=} E_P[E_P[YX_0 | \mathcal{G}]X'_0 1_G] \\ &\stackrel{*}{=} E_P[E_P[YX_0 X'_0 | \mathcal{G}]1_G] = \\ &= E_P[YX_0 X'_0 1_G] = \\ &\stackrel{**}{=} E_Q[YX'_0 1_G] = \\ &= E_Q[E_Q[YX'_0 | \mathcal{G}]1_G] = \\ &\stackrel{*}{=} E_Q[E_Q[Y | \mathcal{G}]X'_0 1_G] = E_Q[E_Q[Y | \mathcal{G}]E_P[X_0 | \mathcal{G}]1_G] \end{aligned}$$

Przejścia $**$ najpierw "wypluwają" X'_0 , żeby zamienić całkę na $G \in \mathcal{G}$ względem Q na całkę względem P , a potem zjadają X_0 żeby zamienić całkę względem P na całkę względem Q (tutaj myślimy już w kontekście całego \mathcal{F} , bo i tak nie ma to różnicy gdy jesteśmy na $G \in \mathcal{G}$).

Przejścia oznaczone $*$ wymagają, żeby $YX_0 X'_0$ było całkowalne względem P oraz żeby YX'_0 było całkowalne względem Q . Od razu przypomnijmy, ponownie z pomocą Wikipedii, że

$$\frac{d|Q|}{dP} = \left| \frac{dQ}{dP} \right|$$

a ponieważ $Q(\omega) \in [0, 1]$, to w naszym przypadku

$$\frac{dQ}{dP} = \left| \frac{dQ}{dP} \right|$$

Z uwagi wyżej wynika więc, że $|X_0| = X_0$ oraz $|X'_0| = X'_0$. Spróbujmy teraz pokazać, że $E_P[|YX_0 X'_0|] < \infty$, oznaczając $M = \sup_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)|$

$$\begin{aligned} E_P[|YX_0 X'_0|] &\leq M E_P[X_0 X'_0] = M \int X'_0 \frac{dQ}{dP} dP = M \int X'_0 dQ = \\ &= M \int E_P[X_0 | \mathcal{G}] dQ = M E_P[X_0] = M \cdot 1 < \infty \end{aligned}$$

gdyż $E_P[X_0] = \int_\Omega X_0 dP = Q(\Omega) = 1$. Korzystając z tych wyliczeń dostajemy analogiczny wynik dla YX'_0 :

$$E_Q[YX'_0] \leq M E_Q[X'_0] = M E_P[X'_0 X_0] < \infty$$

Zadanie 3.

Załóżmy, że $X' = GX_0$ dla pewnej ograniczonej \mathcal{G} -mierzalnej zmiennej losowej G . Pokaż, że spełnione są

(a) X' jest \mathbb{P} -całkowalna

(b) Dla każdej ograniczonej, \mathcal{F} -mierzalnej zmiennej Y ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

(a)

Niech M będzie takie, że $M \geq |G(\omega)|$ dla $\omega \in \Omega$, co jest przyjemniejszym zapisaniem tego co już robiłam w zadaniu 2. Wówczas korzystając ze wszystkiego co już tam wyżej napisałam (być może rozpisując bardziej czytelnie):

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] \leq M\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = M \int \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = M \int d\mathbb{Q} = M \cdot 1 = M < \infty$$

(b)

Po pierwsze zauważmy, że skoro Y jak i G są ograniczone, to również YG są ograniczone. Wprost z poprzedniego zadania dostajemy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(YG)X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(YG) \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]$$

I wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|YG|] = \int |YG| d\mathbb{Q} \leq \int M d\mathbb{Q} = M < \infty$$

jeśli $M = \max |YG|$, czyli możemy użyć 6 własności wwo (na którą już się powoływałam), żeby dostać

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}] = G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}].$$

Wiemy też, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|GX_0|] < \infty$, czyli można również napisać

$$G\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}].$$

Łącząc oba te kroki dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[YG \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] &= G\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[GX_0 \mid \mathcal{G}]\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Załóżmy, że zmienna X' spełnia warunki (a) i (b). Pokaż, że $X' = GX_0$ dla pewnej \mathcal{G} -mierzalnej zmiennej G .

Niech Y będzie \mathcal{G} -mierzalne, wówczas $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}] = Y$, czyli

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

Wtedy mamy dla $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]Y\mathbf{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]\mathbf{1}_G] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX'\mathbf{1}_G]$$

Wiem, że $\int_A X_0 d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(A)$, czyli

$$\int_A GX_0 d\mathbb{P} = \int_A G d\mathbb{Q} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G\mathbf{1}_A]$$

czyli

$$\mu(A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G\mathbf{1}_A]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G]}$$

gdy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G] \neq 0$ jest miarą. I w dodatku $\mu \ll \mathbb{Q}$ oraz $\mu \ll \mathbb{P}$.

Z zadania pierwszego łatwo dostać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$$

czyli

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX' \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[YX_0 \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}]}$$

W takim razie musi istnieć jakaś niezerowa funkcja f taka, że

$$f \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 \mid \mathcal{G}] = X'_0$$

A ponieważ X'_0 oraz $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X' \mid \mathcal{G}]$ są \mathcal{G} -mieralne, to wiem już, że f też musi być \mathcal{G} -mieralna.