

# Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

**Zadanie 1.** Opisz grupę automorfizmów triangulacji  $\mathbb{R}P^2$  o najmniejszej liczbie wierzchołków. usunąć kolokwializmy, pokazać, że jądro  $\text{Aut}(D) \rightarrow S_5 = \mathbb{Z}_2$ , na początku uzasadnić  $2E = 3T$ , ładniej pokazać, że sześciiany są trzymane przez automorfizmy

## Ile wierzchołków?

Zacznijmy od obserwacji, że każdy  $m$ -sympleks  $\sigma^m$  zawiera dokładnie  $\binom{m+1}{n+1}$   $n$ -sympleksów. W takim razie, jeśli  $K$  jest kompleksem symplecjajalnym, a  $f_m(K)$  oznacza liczbę  $m$ -sympleksów w  $K$ , to wówczas

$$\deg_m(n) \cdot f_n(K) = \frac{m+1}{n+1} f_m(K),$$

gdzie  $\deg_m(n)$  mówi do ilu  $m$ -sympleksów może należeć  $n$ -sympleks w kompleksie  $K$ . Jeśli rozważamy  $K$  będące triangulacją 2-rozmaitości oraz  $m = 2, n = 1$ , to wtedy  $\deg_2(1) = 2$ , tzn.  $2f_1(K) = 3f_2(K)$ . Oznacza to, że na płaszczyźnie krawędź należy do 2 trójkątów, a każdy trójkąt ma 3 krawędzie.

Wiemy, że jeśli  $X$  ma triangulację o  $V$  wierzchołkach,  $E$  krawędziach i  $T$  trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T.$$

Krawędzie to 1-sympleksy, a trójkąty to 2-sympleksy. Mamy więc  $2E = 2f_1(K) = 3f_2(K) = 3T$ , co po podstawieniu daje

$$\chi(X) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym:  $E \leq \binom{V}{2}$  czyli

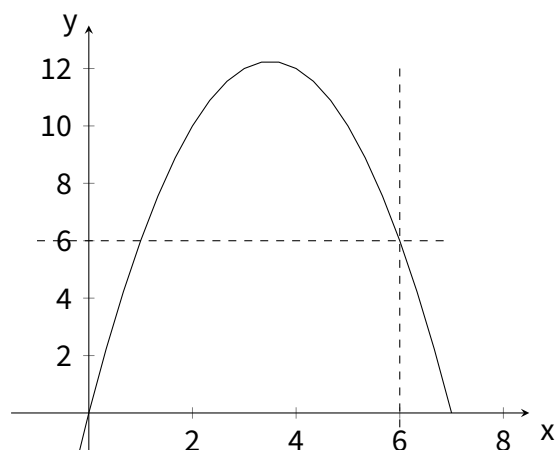
$$V = \chi(X) + \frac{1}{3}E \leq \chi(X) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla  $\mathbb{R}P^2$  dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7 - V)$$

Powyższa nierówność dla  $V = 6$  staje się równością. Tak samo dla  $V = 1$  mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na  $\mathbb{R}P^2$ . Pozostałe liczby naturalne z przedziału  $(0, 7)$  nie mają szansy spełniać powyższe równanie (widać na obrazku)



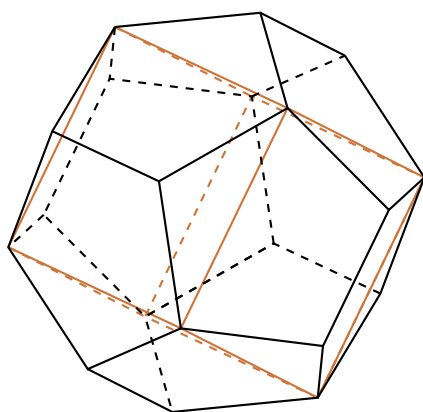
Z listy 1 wiemy, że 6-wierzchołkowa triangulacja  $\mathbb{R}P^2$  jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulację opisujemy.

### Plan działania

Płaszczyzna rzutowa  $\mathbb{R}P^2$  to  $S^2$  wydzielona przez antypodyczne działanie  $\mathbb{Z}_2$ . W takim razie, 6-wierzchołkowa triangulacja na  $\mathbb{R}P^2$  pochodzi od triangulacji na  $S^2$ . Dwudziestościan ma 12 wierzchołków i 20 ścian i jest to interesująca nas triangulacja sfery. Łatwiejsze jest jednak badanie grupy automorfizmów bryły dualnej do dwudziestościanu - dwunastościanu o 12 ścianach i 20 wierzchołkach.

### narysować na sferze z osiami symetrii

Z dodekahedronu możemy dostać icosahedron - wystarczy postawić wierzchołek na każdej ścianie i połączyć odpowiednio wierzchołkami. W ten sam sposób można z icosahedronu wrócić do dodekahedronu. Stąd grupy automorfizmów obu tych brył będą równe i wystarczy popatrzeć na dodekahedron D:



Uzasadnimy teraz to, co mówi Wikipedia, mianowicie, że  $\text{Aut}(D) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$ .

### Czy zgadza się rząd?

Niech  $v \in D$  będzie wierzchołkiem dodekahedronu (odpowiada ścianie icosahedronu).

- ☕  $|\text{Obr}(v)| = 20$ , bo automorfizm może postawić wierzchołek na dowolny inny spośród 20 które D posiada.
- ☕  $|\text{Stab}(v)| = 3! = 6$ , gdyż są to permutacje 3 sąsiadów tego wierzchołka przy trzymaniu  $v$  w miejscu.

W takim razie dostajemy

$$|\text{Aut}(D)| = |\text{Obr}(v)| \cdot |\text{Stab}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 = |A_5 \times \mathbb{Z}_2|.$$

### Pozbycie się $\mathbb{Z}_2$

Wśród automorfizmów dodekahedronu D mamy dwa "rodzaje" odwzorowań

- ☕ rotacje i symetrie, które zachowują ruch wskazówek zegara przy numerowaniu sąsiadów dowolnego wierzchołka,
- ☕ odwzorowanie antypodyczne tudzież symetria względem punktu w samym środku D, która

przewraca tę kolejność do góry nogami.

Ten drugi rodzaj odwzorowania będzie odpowiadać za czynnik  $\mathbb{Z}_2$  w  $\text{Aut}(D)$ . Wystarczy więc zająć się samą grupą symetrii i rotacji i pokazać, że to  $A_5$ .

### Symetrie i obroty

Sztuczką na pokazanie, że symetrie  $D$  to  $A_5$  jest zauważenie 5 sześciątów w środku  $D$ . Sześciąty możemy narysować idąc krokami:

- ☕ weź krawędź w  $D$
- ☕ połącz wszystkie sąsiady tej krawędzi w ścianę
- ☕ weź krawędź po przeciwnej stronie  $D$
- ☕ połącz jej wszystkie sąsiady w ścianę
- ☕ połącz te dwie ściany w sześciąt.

Z tej metody wytwarzania sześciątów można od razu wywnioskować, że automorfizm przeprowadza sześciąty na sześciąty, ponieważ sąsiedztwo wierzchołków musi być zachowane, a to ono było podstawą wyciskania sześciątów z  $D$ .

Ponumerujmy sześciąty od 1 do 5 - możemy teraz je permutować. Najbardziej leniwym sposobem na zauważenie, że grupa uzyskana przez porządne permutacje tych sześciątów to  $A_5$  jest podzielenie  $|\text{Aut}(D)| = 120$  przez 2, które oznacza, że wyrzucamy antypodyzm (element rzędu 2). Zostawia to nam 60 automorfizmów, które będą permutować te sześciąty i które powinniśmy móc włożyć w  $S_5$ . Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) podgrupa  $S_5$  o 60 elementach jest  $A_5$  tak jak chcieliśmy.

Uzasadniliśmy, że  $A_5 \times \mathbb{Z}_2 = \text{Aut}(\text{dodecahedron}) = \text{Aut}(\text{icosahedron})$  bo tak jak już wspomniałam, bryły te są dualne. Po wydzieleniu  $S^2$  z triangulacją będącą icosahedronem przez działanie antypodyczne dostajemy grupę automorfizmów triangulacji  $\Delta \mathbb{R} P^2$  o 6 wierzchołkach:

$$\text{Aut}(\Delta \mathbb{R} P^2) = A_5 \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 = A_5$$