Algebra homologiczna

Zima 2023-24

Spis rozmaitości treściowalnych

Wykład 04.10.23 : Podstawowe definicje

1.1 Co to kategoria

Rozważmy układ danych **C** zawierający:

- klasę *obiektów* Ob **C**
- dla dowolnej pary X, Y $\in$ Ob **C** zbiór $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, którego elementy nazywany *morfizmami* i zapisujemy $\varphi : X \to Y$ lub $X \xrightarrow{\varphi} Y$
- kolekcję odwzorowań, zwanych *złożeniami*, dla wszystkich X, Y, Z $\in$ Ob **C** takich, że

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \\ (\varphi, \psi) \arrow[r, mapsto] & \psi \circ \varphi \end{tikzcd}$$

Definicja 1.1 : kategoria (mała).
Układ danych **C** jak wyżej nazywamy **kategorią**, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Zbiory $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ dla X, Y $\in$ Ob **C** są parami rozłączne (tzn. morfizmy mają dobrze określone dziedziny i przeciwdziedziny).
2. Dla każdego A $\in$ Ob **C** istnieje $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ takie, że $\varphi \circ \mathrm{Id}_A = \varphi$ oraz $\mathrm{Id}_A \circ \psi = \psi$.
3. Złożenie morfizmów jest łączne, tzn. dla morfizmów

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\eta} W$$

zawsze zachodzi równość $(\eta\psi)\varphi = \eta(\psi\varphi)$.

Dodatkowo, jeśli Ob **C** jest zbiorem, to **C** nazywamy *małą kategorią*.

Przykład(y) 1.1

1. Kategorię wszystkich pierścieni wektorowych nad ciałem K oznaczamy $\mathbf{Vect}_K$. Jeśli interesują nas przestrzenie tylko skończonego wymiaru, to istnieje kategoria $\mathbf{Vect}_K^{\mathrm{fin}}$ przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych.

   Obiektami obu tych kategorii są przestrzenie liniowe (skończonego wymiaru), a morfizmami są przekształcenia liniowe między nimi.

2. Wszystkie zbiory wraz z funkcjami między nimi jako morfizmami tworzą kategorią **Set** zbiorów.
3. Jeśli rozważamy jako obiekty tylko zbiory z określonym dobrym porządkiem, to morfizmami mogą być funkcje słabo monotoniczne. Taką kategorię oznaczamy $\mathbf{Set}_{\leq}$.
4. Kategoria wszystkich grup wraz z homomorfizmami jako morfizmami jest oznaczana **Grp**, natomiast kategoria, której obiekty to tylko grupy abelowe jest oznaczana **Ab**.
5. Pojedyncza grupa G może tworzyć sama w sobie jednoobiektową kategorię $\mathbf{C}_G$ taką, że
   - Ob $\mathbf{C}_G = \{\star\}$
   - $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star) = G$, a złożenia działa jak mnożenie elementów G.
6. Dla dowolnego pierścienia R istnieje kategoria, której obiektami są (lewe) R-moduły, a morfizmami są homomorfizmy między tymi modułami. Oznaczamy to R – **mod**.
7. Wszystkie przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi nazywamy kategorią przestrzeni topologicznych **Top**.
8. Wszystkie gładkie rozmaitości są obiektami kategorii **Diff**, a morfizmy to gładkie odwzorowania między rozmaitościami.
9. Kategoria $\mathbf{Rep}_{G,K}$ posiada jako obiekty reprezentacje grupy G na przestrzeniach liniowych nad K, a jako morfizmy wszystkie przekształcenia G-ekwiwariantne.
10. Rozważmy kategorię Δ taką, że jej obiektami są zbiory kolejnych liczb naturalnych:

$$\mathrm{Ob}\,\Delta = \{[n] \;:\; n \in \mathbb{N}\},$$

$[n] = \{0, 1, ..., n\}$. Zdefiniujmy zbiory morfizmów jako $\Delta([m], [n])$ = wszystkie niemalejące funkcje z [m] w [n].

Tak zdefiniowaną kategorię nazywamy **kategorię symplicjalną**.

1.2 Kompleksy

Definicja 1.2 : kompleksy łańcuchowe (grup abelowych).
Jeśli ciąg (grup abelowych) A.

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "d_0"] & A_1 \arrow[r, "d_1"] & A_2 \arrow[r, "d_2"] & \ldots \end{tikzcd}$$

jest taki, że dla każdego n $\mathbb{Z}$ (dopuszczamy ujemne indeksy) złożenie $d_{n+1} \circ d_n = 0$, to nazywamy go **kompleksem łańcuchowym**.

Możemy rozważać kategorię, której obiektami są kompleksy łańcuchowe obiektów z jednej kategorii **C**, np. grup abelowych. Morfizmem między kompleksem $A_\cdot$ a kompleksem $B_\cdot$ nazwiemy wówczas ciąg homomorfizmów $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A_i, B_i)$ taki, że w diagramie

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "d_0^A"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & A_1 \arrow[r, "d_1^A"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "d_2^A"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_0 \arrow[r, "d_0^B"] & B_1 \arrow[r, "d_1^B"] & B_2 \arrow[r, "d_2^B"] & \dots
\end{tikzcd}$$

każdy prostokąt komutuje, tzn.

$$d_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n^A$$

dla każdego n.

1.3 Funktory kowariantne i kontrawariantne

Definicja 1.3 : funktor.
Funktorem z kategorii **C** w kategorię **D** nazywamy dwa przyporządkowania: między obiektami tych kategorii i między morfizmami takie, że:

- $\mathrm{Ob}\,\mathbf{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}$
- dla każdej pary $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \ni \varphi \mapsto F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

  zachowuje składanie morfizmów, tzn. $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Takie przyporządkowania między kategoriami nazywa się też, bardziej precyzyjnie, *funktorami kowariantnymi*.

Przykład(y) 1.2

1. Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_K$ zdefiniujmy tak, że dowolny $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}$ przechodzi ma przestrzeń wektorową nad ciałem K o bazie X, tzn.:

$$F(X) = \left\{ \sum_{x \in X} a_x x \ : \ \alpha_x \in K, \text{tylko skończenie wiele } \neq 0 \right\}$$

2. Dużą grupą funktorów są tzw. *funktory zapominające*, które gubią część informacji o strukturze obiektów w wyjściowej kategorii.

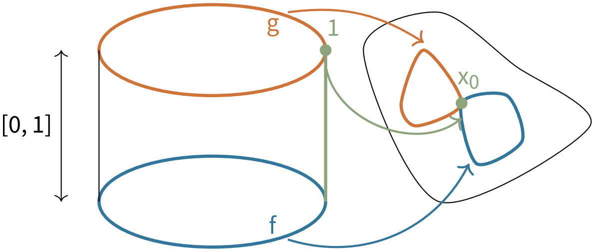
   Na przykład funktor
   $$F : \mathbf{Vect}_K^{\mathrm{fin}} \to \mathbf{Set}$$
   przeprowadza przestrzeń liniową na zbiór jej elementów bez struktury liniowej. Przekształcenia liniowe między przestrzeniami liniowymi są wówczas przeprowadzane na zwykłe funkcje między zbiorami.

   Innym funktorem zapominającym jest n.p. $F : R-\mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$, który dla dowolnego $N \in \mathrm{Ob}\, R-\mathbf{mod}$ przypisuje $F(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ dla pewnego $M \in \mathrm{Ob}\, R-\mathbf{mod}$.

3. Homomorfizm $\varphi : G \to H$ indukuje funktor $\Phi : \mathbf{C}_G \to \mathbf{C}_H$, który jedyny obiekt $\star \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{C}_G$ posyła na jedyny obiekt $\heartsuit \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{C}_H$. Natomiast morfizmy $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star)$, odpowiadające mnożeniu przez elementy grupy G, przesyła na morfizmy odpowiadające mnożeniu przez $\varphi(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_H}(\heartsuit, \heartsuit)$

4. Przez $\mathbf{Top}_*$ oznaczamy kategorię *przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem*, w której morfizmami są odwzorowania ciągłe respektujące wybrane punkty. Funktor
   $$\Pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$$
   taki, że dla $X \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{Top}_*$ z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$ przypisuje
   $$\Pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$
   czyli klasę homotopii odwzorowań ciągłych $(S^1, 1) \to (X, x_0)$, nazywamy **grupą podstawową**.

   Dwa odwzorowania
   $$f, g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$$
   są homotopijne, jeśli istnieje $H : S^1 \times [0, 1] \to X$ ciągłe takie, że
   $$H(z, 0) = f(z) \text{ i } H(z, 1) = g(z) \text{ i } H(1, t) = x_0$$



Grupa fundamentalna okręgu z wyróżnionym punktem jest izomorficzna z liczbami całkowitymi:

$$\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}\,.$$

Mając dwie przestrzenie topologiczne (X, x_0) i (Y, y_0) oraz ciągłą funkcję między nimi f, mamy

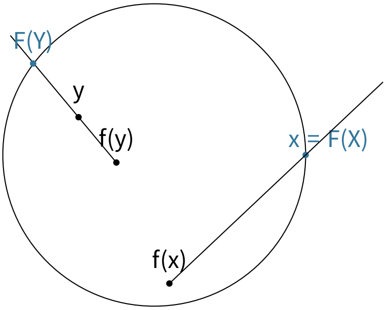
$$\begin{tikzcd}\Pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\Pi_1(f)"'] & \ni & {[\sigma]} \arrow[d, "\Pi_1(f)"] \\ \Pi_1(Y, y_0) & \ni & {[f \circ \sigma]}\end{tikzcd}$$

Twierdzenie 1.1.
Każde ciągłe odwzorowanie $f : D^2 \to D^2$ ma punkt stały.

Dowód
A raczej jego szkic.

Załóżmy nie wprost, że istnieje funkcja ciągła $f : D^2 \to D^2$, która nie posiada punktu stałego.

Możemy wówczas zdefiniować funkcję $F : D^2 \to \partial D^2 = S^1$, która punktowi $y \in D^2$ przypisuje punkt przecięcia wychodzącej z f(y) przechodzącej przez y z obwodem D^2:



Obcięcie takiej funkcji do brzegu ∂D^2 daje oczywiście identyczność na ∂D^2 (punkt x wyżej). Powstaje więc diagram

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{S^1}"'] & & D^2 \arrow[dl, "F"] \\
& S^1 &
\end{tikzcd}$$

na który możemy nałożyć funktor Π_1:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = \Pi_1(S^1) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}=\Pi_1(\mathrm{id}_{S^1})"'] & & \Pi_1(D^2) = S^1 \arrow[dl, "\Pi_1(F)"] \\
& \Pi_1(S^1) = \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

NIE ROZUMIEM CO TO DAJE

🍻

Definicja 1.4 : kategoria dualna.
Dla kategorii **C** możemy zdefiniować nową kategorię, $\mathbf{C}^{op}$ w której każdy morfizm $\varphi^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(Y, X)$ zostaje odwrócony:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & Y \arrow[l, bend left, "\varphi^{op}"]
\end{tikzcd}$$

Wtedy Ob $\mathbf{C}^{op}$ to obiekty dualne do elementów znajdujących się w Ob **C**. Tak zdefiniowaną kategorię $\mathbf{C}^{op}$ nazywamy **kategorią dualną**.

Przykład(y) 1.3

1. Kategoria dualna do kategorii przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K^{op}$ jest kategorią, której obiekty to przestrzenie sprzężone, $V^* \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_K^{op}$, zawierające funkcjonały liniowe $V \to K$. Każdy morfizm $\varphi : V \to W$ w $\mathbf{Vect}_K$ indukuje wówczas odwzorowanie $\varphi^* : W^* \to V^*$ takie, że dla $f \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : V \to W \to K$.

   Kojarzenie funkcjonału $\varphi^* \in V^*$ z elementem $v \in V$ jest czasem oznaczane przez $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$.

Definicja 1.5 : funktor kontrawariantny.
Funktor (kowariantny) z kategorii $\mathbf{C}^{op}$ do kategorii $\mathbf{D}$ jest nazywamy **funktorem kontrawariantnym** z $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$.

Oznacza to, że jeśli $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathbf{C}$ i $\varphi : X \to Y \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, to funktor kontrawariantny $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ przeprowadza X na $F(X) \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}$, a $\varphi \mapsto F(\varphi) \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(Y), F(X))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "\varphi"'] & & & F(X) \\
& {} \arrow[r, rightsquigarrow, "F"] & {} & \\
Y \arrow[dd, "\psi"'] & & & F(Y) \arrow[uu, "F(\varphi)"'] \\
& {} \arrow[r, rightsquigarrow, "F"] & {} & \\
Z & & & F(Z) \arrow[uu, "F(\psi)"']
\end{tikzcd}$$

Składanie morfizmów również zmienia kolejność, tzn.

$$F(\psi\varphi) = F(\varphi)F(\psi)$$

Wykład 09.10.23 : Równoważność kategorii

2.1 Presnop i snop

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię **Otw**(**X**) zdefiniujemy tak, że

- Ob **Otw**(**X**) = $\{U \subseteq X \ : \ U$ - zbiór otwarty$\}$
- morfizmy to włożenia identycznościowe (tzn. istnieje morfizm $X \hookrightarrow Y$ jeśli $X \subseteq Y$)

Tak zdefiniowany funktor kontrawariantny $\mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to \mathbf{C}$ nazywamy **presnopem** na przestrzeni topologicznej X.

Kategoria **C** może być kategorią zbiorów **Set**, ale możemy też przeprowadzać zbiory otwarte oraz morfizmy między nimi na kategorię **Ab**, $\mathbf{Vect}_K$ czy R–**mod**. Wtedy taki funktor będziemy nazywać odpowiednio *presnopem grup abelowych, przestrzeni liniowych czy* R*-modułów*.

Przykład(y) 2.1

1. Zaczniemy od przetestowania presnopu na przestrzeni topologicznej w akcji.

   Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor $F : \mathbf{Otw}(\mathbf{X})^{op} \to C(X)$ definiujemy na obiektach jako

   $$F(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \ | \ f \text{ ciągła}\}$$

   Dla $V \subseteq U \subseteq X$ otwartych zbiorów mamy

   $$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & F(V) \arrow[l, "\text{obcięcie}"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ C(U) & C(V) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

   co w widoczny sposób spełnia $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$.

   Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

> **Definicja 2.1 : presnop, snop.**
> **Presnopem** na kategorii **C** nazywamy dowolny funktor
>
> $$F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

Snopem nazywamy presnop taki, że jeśli dla dowolnego zbioru $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ oraz dla dowolnych $i, j \in I$ spełniony jest warunek

$$s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j),$$

gdzie $s_i \in F(U_i)$ jest nazywane *cięciem presnopu*, to wówczas istnieje dokładnie jedyne cięcie $s \in F(U)$ takie, że

$$s \restriction U_i = s_i.$$

Zapisując to za pomocą kwantyfikatorów mamy:

$$(\forall\ U = \bigcup_{i\in I} U_i)(\forall\ s_i \in F(U_i))\ \ \left[(\forall i, j \in I)\ s_i \restriction (U_i \cap U_j) = s_j \restriction (U_i \cap U_j)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[(\exists!\ s \in F(U))(\forall i \in I)\ s \restriction U_i = s_i\right]$$

Przykład(y) 2.2

1. Presnop na przestrzeni topologicznej X spełnia również warunek opisany wyżej.

2.2 Funktory wierne, pełne

Definicja 2.2 : podkategoria C' kategorii C.
To kategoria spełniająca następujące warunki:

- $\mathrm{Ob}\mathbf{C}' \subseteq \mathrm{Ob}\mathbf{C}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$
- $\mathrm{id}_X^{\mathbf{C}'} = \mathrm{id}_X^{\mathbf{C}}$ zawsze gdy $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}'$
- złożenie morfizmów w $\mathbf{C}'$ zachowuje się tak samo jak w $\mathbf{C}$

Mówimy, że podkategoria $\mathbf{C}'$ jest *pełna*, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}'$ zachodzi $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

Przykład(y) 2.3

1. Kategoria przestrzeni skończonego wymiaru $\mathbf{Vect}_K^{\mathrm{fin}}$ jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych $\mathbf{Vect}_K$. Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych **Ab** jest pełną podkategorią kategorii **Grp**
3. Kategoria gładkich rozmaitości $\mathbf{C}^\infty$ – **rozm** jest podkategorią kateogorii wszystkich

przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.
Funkctor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest

- **wierny** gdy $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest injekcją
- **pełny**, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ przekształcenie $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ jest surjekcją

Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.
Dla dwóch funktorów $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ układ morfizmów $f : F \to G$ w $\mathbf{D}$ taki, że dla każdego $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ $f(X) : F(X) \to G(X)$ i dla każdego $\varphi : X \to Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ diagram

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów** F i G.

Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory $\mathrm{Id}, \mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ (identyczność i abelianizacja $\mathrm{ab}(G) = G/[G, G]$).

   Rozważmymy $f : \mathrm{Id} \to \mathrm{ab}$, wtedy $\mathrm{Id}(G) = G$, więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(G) = G \arrow[r, "f(G)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}(\varphi)=\varphi"'] & G/\,[G, G] = \mathrm{ab}(G) \arrow[d, "\mathrm{ab}(\varphi)"] \\
\mathrm{Id}(H) = H \arrow[r, "f(H)"] & H/\,[H, H] = \mathrm{ab}(H)
\end{tikzcd}$$

Dla każdego $G \in \mathrm{Ob}\mathbf{Grp}$ zdefiniujemy $f(G) : \mathrm{Id}(G) \to \mathrm{ab}(G)$ jako

$$f(G) : G \to G^{alb} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Aby więc diagram komutował, czyli

$$f(H) \circ \mathrm{Id}(\varphi) = \mathrm{ab}(\varphi) \circ f(G),$$

wystarczy sprawdzić, że komutant grupy G przechodzi przez dowolny homomorfizm na komutant w H:

$$(\forall\ g, h \in [G, G])\ \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg).$$

Skoro tak jest, to nie ma znaczenia, czy najpierw abelianizujemy grupę, a potem nakładamy na to homomorfizm, czy najpierw nakładamy homomorfizm, a potem abelianizujemy.

2. Można pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów z kategorii przestrzeni topologicznych z wybranym punktem bazowym ($\mathbf{Top}_*$) w kategorię grup

   $$H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp},$$

   gdzie Π_n to funktor przypisujący przestrzeni n-tą homotopię (Π_1 w szczególności przyporządkowuje przestrzeni topologicznej jej grupę fundamentalną), a H_n to funktor n-tej homologii.

3. Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów $\mathrm{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$.

   Dla $V \in \mathbf{Vect}_K$ definiujemy

   $$\begin{tikzcd}
   f(V) : V \arrow[r] & V^{**} \\
   \Cup & \Cup \\
   v \arrow[r] & (V^* \ni \varphi^* \mapsto \varphi^*(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle
   \end{tikzcd}$$

   to znaczy, dla $v \in V$ mamy element $f(V)(v) = \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$, który elementowi $\varphi^* \in V^*$ przyporządkowuje $\langle \varphi^*, v \rangle = \varphi^*(v) \in K$.

   Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f(V)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "f(W)"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

komutuje, czyli pokazać, że $f(V) \circ \varphi^{**} = \varphi \circ f(W)$.

Troszkę przypomnienia z algebry liniowej. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ indukuje funkcjonał liniowy $\varphi^* : W^* \to V^*$ taki, że dla $f : W \to K \in W^*$ mamy $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in V^*$. W takim razie, przekształcenie $\varphi^{**} : V^{**} \to W^{**}$ dla $f^* : V^* \to K \in V^{**}$ przyporządkuje

$$\varphi^{**}(f^*) = f^* \circ \varphi^* : W^* \to K$$

$$\begin{aligned}(\varphi^{**} \circ f(V))(v) &= \varphi^{**}(f(V)(v)) = \varphi^{**}(\langle \cdot, v\rangle) = \\ &= \langle \cdot, v\rangle \circ \varphi^* = \langle \varphi^*(\cdot), v\rangle = \\ &= \langle \cdot \circ \varphi, v\rangle = \langle \cdot, \varphi(v)\rangle = f(W)(\varphi(v)) = \\ &= (f(W) \circ \varphi)(v)\end{aligned}$$

element W^{**}.

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze tworzą zbiory w takim przypadku. Taki twór oznaczamy **Funct**$(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ i mając naturalne przekształcenia funktorów $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$, dowolne $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ oraz $\varphi : X \to Y$ rysujemy

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "a(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[r, "b(X)"] \arrow[d, "G(\varphi)"] & H(X) \arrow[d, "H(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "a(Y)"'] & G(Y) \arrow[r, "b(Y)"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

gdzie $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$.

> **Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.**
> W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa,

równoważne, sposoby:

- naturalne przekształcenia $f : F \to G$ dla których istnieje $g : G \to F$ takie, że $f \circ g = id_G$ oraz $g \circ f = id_F$
- przekształcenie $f : F \to G$ takie, że dla każdego $X \in \mathbf{C}$ przekształcenie $f(X) : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathbf{D}$.

Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów Id, $**$ na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

2.4 Równoważność kategorii

Definicja 2.6 : równoważność kategorii.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ oraz naturalne przekształcenia funktorów $f : F \circ G \to Id_{\mathbf{D}}$ i $g : G \circ F \to Id_{\mathbf{C}}$

Równoważność kategorii jest nieco słabszym warunkiem niż istnienie izomorfizmu między nimi - złożenie $F \circ G$ niekoniecznie musi być równe $Id_{\mathbf{D}}$, wystarczy tylko żeby istniało naturalne przekształcenie między tymi dwoma funktorami.

Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $\mathbf{Vect}_K^{fin}$ jest równoważna kategorii $\mathbf{S_K}$, której obiektami są $Ob\mathbf{S_K} = \{K^0, K^1, ..., K^n, ...\}$ a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

   Funktor włożenia
   $$F : \mathbf{S_K} \to \mathbf{Vect}_K^{fin}$$
   jest oczywistym wyborem na pierwszy funktor, gdyż każdy obiekt z $\mathbf{S_K}$ jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru.

   Aby znaleźć funktor
   $$G : \mathbf{Vect}_K^{fin} \to \mathbf{S_K}$$
   zaczniemy od rozważenia na co przechodzi $V \in \mathbf{Vect}_K^{fin}$. Wiemy, że $\dim \mathbf{Vect}_K^{fin} = \infty$, możemy więc zdefiniować
   $$G(V) = K^{\dim \mathbf{Vect}_K^{fin}}.$$

Pozostaje zastanowić się nad przekształceniem morfizmów. W każdym V możemy wyróżnić pewną bazę, a każde przekształcenie liniowe $V \to W$ będzie macierzą o wyrazach w K zapisaną w tych wyróżnionych bazach. Wystarczy więc przekształceniu $V \to W$ zadanemu macierzą przyporządkować przekształcenie wyznaczone przez taką samą macierz na $K^{\dim V} \to K^{\dim W}$.

Twierdzenie 2.1.
Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zadaje równoważność kategorii $\iff$ jest on wierny, pełny i w zasadzie surjektywny, tzn. $(\forall\ Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D})(\exists\ X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C})\ F(X) \underset{\mathbf{D}}{\cong} Y$.

Dowód

$\Leftarrow$

Wiemy, że funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest wierny, pełny i w zasadzie suriektywny i na podstawie tej wiedzy skonstruujemy $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ jak w definicji równoważności kategorii.

Dla $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}$ wybieramy $G(Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ takie, że istnieje izomorfizm $\iota_Y : Y \to F(G(Y))$. Możemy tak zrobić, gdyż F jest w zasadzie suriektywny.

Niech $\varphi : Y \to Y'$ będzie morfizmem obiektów w kategorii $\mathbf{D}$. Chcemy sprawdzić istnienie $G(\varphi)$ takie, że mamy naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \leftrightarrow F \circ G$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}(Y) = Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & Y' = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}(Y') \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "F(G(\varphi))?"'] & F(G(Y')) \end{tikzcd}$$

Ponieważ ι_Y jest izomorfizmem, dolną strzałkę $F(G(Y)) \to F(G(Y'))$ możemy podpisać jako $\iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$. Chcemy pokazać, że da się dobrać $G(\varphi)$ tak, żeby $F(G(\varphi)) = \iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$, tzn. żeby diagram na górze komutował.

F jest wierny i pełny, więc przejście

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest jednocześnie bijekcją i inijekcją, czyli możemy je odwracać. Istnieje więc jedyne

$$\psi = F^{-1}(\iota_{Y'}\varphi\iota_Y^{-1}) : G(Y) \to G(Y')$$

które możemy przypisać do $G(\varphi) = \psi$. Zbiór izomorfizmów ι_Y zadaje więc naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{D}} \to F \circ G$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_Y"'] & Y' \arrow[d, "\iota_{Y'}"] \\
F(G(Y)) \arrow[r, "F(G(\varphi))=F(\psi)=\iota_{Y'}\varphi\iota_Y^{-1}"'] & F(G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla tak zdefiniowanego G istnieje również naturalne przekształcenie $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \to G \circ F$.

Dla $X, X' \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ oraz $\psi : X \to X'$ istnieje izomorfizm $F(X) \cong F(G(F(X)))$, gdyż tak właśnie zdefiniowaliśmy funktor G. Aby utrzymać konwencję z powyższego fragmentu dowodu, naziwjmy te izomorfizmy odpowiednio $\iota_{F(X)}$ i $\iota_{F(X')}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\iota_{F(X)}"] \arrow[d, "F(\psi)"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "F(G(F(\psi)))"] \\
F(X') \arrow[r, "\iota_{F(X')}"'] & F(G(F(X')))
\end{tikzcd}$$

Ponieważ F jest wiernym i pełnym funktorem, to możemy najbardziej zewnętrzne F zdjąć, by otrzymać diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F^{-1}(\iota_{F(X)})"] \arrow[d, "\psi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(\psi))"] \\
X' \arrow[r, "F^{-1}(\iota_{F(X')})"'] & G(F(X'))
\end{tikzcd}$$

Ponieważ diagram przed zdjęciem F był przemienny, to również diagram niżej musi taki być - w końcu to zwykłe nałożenie F^{-1} na wszystkie elementy i strzałki. W takim razie, morfizmy $F^{-1}(\iota_{F(X)})$ zadają naturalny izomorfizm $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \to G \circ F$.

$\Rightarrow$

Dowód drugiej implikacji zostaje pozostawiony jako ćwiczenie.

Wykład 16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice

3.1 Kategoria funktorów

W kategorii **Set** zbiór $X \in \text{Ob}\,\mathbf{Set}$ możemy widzieć jako $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$ gdzie 1 jest singletonem. Robimy to utożsamiając element $x \in X$ z morfizmem $1 \mapsto x \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$.

Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii **C** obiektowi X możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)\ (\star)$$

gdzie $(\star)$ zapisujemy czasem jako $X(Y)$.

Ponieważ nie we wszystkich kategoriach istnieje odpowiednich singletona 1, musimy rozważać wszystkie obiekty Y i morfizmy:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[d, "\alpha\circ f"] \\
X \arrow[r, squiggly, "h_X(f)"'] & X
\end{tikzcd}$$

dobrane tak, że diagram komutuje.

Oczywiście, możemy też definiować funktor kowariantny $g : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ taki, że $g_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.
Kategorię funktorów $(C^{op}, \mathbf{Set})$, której obiektami są h_X jak w przykładzie wyżej, oznaczamy $\widehat{\mathbf{C}}$.

Funktor $F \in \widehat{\mathbf{C}}$ jest **reprezentowalny**, jeśli $F \cong h_X$ dla pewnego $X \in \text{Ob}\mathbf{C}$. Takie X jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dla morfizmu $X \xrightarrow{\varphi} X'$ w **C** określamy morfizm $h_\varphi : h_X \to h_{X'}$ w $\widehat{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \arrow[r, "h_\varphi"] & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\
\alpha \arrow[u, phantom, "\Cup" description] \arrow[r] & \varphi\circ\alpha \arrow[u, phantom, "\Cup" description]
\end{tikzcd}$$

Funktor h_X można również oznaczyć jako $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)$. Wówczas dla morfizmu $\varphi : Y \to Y'$ mamy

$$h_\varphi(\alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, X)(\alpha) = \varphi \circ \alpha$$

dla $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)$

Przykład(y) 3.1

1. $\mathcal{P}(X) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem, który przypisuje X jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo $\mathcal{P}(X) \cong \mathrm{Hom}(X,2)$.

   Dla dowolnego zbioru $X \in \mathbf{Set}$ naturalne przekształcenie $f(X) : \mathrm{Hom}(X,2) \to \mathcal{P}(X)$ przypisze funkcji $\alpha \in \mathrm{Hom}(X,2)$ zbiór tych elementów $x \in X$ dla których $\alpha(x) = 2$. Przekształcenie odwrotne do tego przypisze zbiorowi $A \in \mathcal{P}(X)$ funkcję $\alpha : X \to 2$ taką, że $\alpha(x) = 1$ jeśli $x \notin A$ i $\alpha(x) = 2$ wpp.

2. Funktor kohomologii $H^n : \mathbf{C} \to \mathbf{Ab}$ z kategorii CW-kompleksów w grupy abelowe taki, że $H^n(X,G) = [X, K(G,n)]$ jest funktorem reprezentowalnym. Pokazuje to twierdzenie Browna o reprezentowalności o którym uczy się przy okazji topologii algebraicznej.

3. co tutaj mają do roboty wiązki styczne? $\mathrm{Vect}_n(X) = [X, C^\infty]$????

Przyporządkowania $X \mapsto h_X$ oraz $\varphi \mapsto h_\varphi$ dają w oczywisty sposób funktor $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$.

> **Lemat 3.1 : Yoneda lemma.**
> Przyporządkowanie $h : \mathbf{C} \to \widehat{\mathbf{C}}$ zadaje równoważność kategorii $\mathbf{C}$ z pełną podkategorią kategorii $\widehat{\mathbf{C}}$, której obiektami są funktory reprezentowalne.

Dowód
Wystarczy pokazać, że h jest funktorem wiernym, pełnym i w zasadzie surjektywnym.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h(X)"] \arrow[d, "\varphi"'] & h_X = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) \arrow[d, "h_\varphi"] \\
X' \arrow[r, "h(X')"] & h_{X'} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X')
\end{tikzcd}$$

Chcemy pokazać, że przekształcenie h

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\
\Cup & \Cup \\
\varphi \arrow[r, "h"] & h_\varphi
\end{tikzcd}$$

jest bijekcją.

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE

3.2 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech I będzie małą kategorią, a $F : I \to \mathbf{C}$ będzie funktorem.

Definicja 3.2 : granica funktora F.
Obiekt X z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów) $\Pi_i : X \to F(i)$ dla $X \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$, które spełniają

- *[zgodność]* dla dowolnych $i \xrightarrow{\alpha} j$ w I diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Pi_i"'] \arrow[dr, "\Pi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

  komutuje, tzn. $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$.

- *[uniwersalność]* dla każdego układu (X', Π_i') spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm $\lambda : X' \to X$ taki, że dla każdego $i \in I$ diagram

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed, "\exists!\lambda"] \arrow[dr, "\Pi_i'"'] & & X \arrow[dl, "\Pi_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

  komutuje

jest nazywany **granicą funktora** F i oznaczamy ją jako $\lim F = X$.

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład(y) 3.2

1. Dla I = {0, 1} oraz $F : I \to \mathbf{C}$ granicę lim F nazywamy *produktem* obiektów F(0) i F(1)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Pi_1"] \arrow[d, "\Pi_0"'] \arrow[dr, dashed] & F(1) \\
F(0) & X' \arrow[l, "\Pi'_0"] \arrow[u, "\Pi'_1"']
\end{tikzcd}$$

2. Jeśli rozważymy zbiór liniowo uporządkowany, gdzie obiekty to zbiory, a morfizm $A \to B$ oznacza, że $A \leq B$. Wtedy granicą jest element maksymalny tego zbioru (jeśli istnieje).

Definicja 3.3 : granica odwrotna.
Analogicznie jak w definicji granicy, obiekt X wraz z rodziną odwzorowań $\Pi_i : F(i) \to X$ takich, że jeśli dla $i, j \in I$ oraz morfizmu $i \xrightarrow{\alpha} j$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
F(i) \arrow[ur, "\Pi_i"] \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & F(j) \arrow[ul, "\Pi_j"']
\end{tikzcd}$$

nazywamy granicą odwrotną i oznaczamy colim F, jeśli spełnia ona warunek uniwersalności, tzn. jeśli istnieje X′ oraz przekształcenia Π, to istnieje dokładnie jeden morfizm $\lambda : X' \to X$:

$$\begin{tikzcd}
& F(i) \arrow[dl, "\Pi'_i"'] \arrow[dr, "\Pi_i"] & \\
X & & X' \arrow[ll, dashed, "\exists!\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Przykład(y) 3.3

1. W kategorii **Set** koprodukt to suma mnogościowa zbiorów.

2. Rozważając zbiór liniowo uporządkowany z morfizmami odpowiadającymi porządkowi, to kogranicą takiej kategorii jest element minimalny.

3. W kategorii **Grp** granicą odwrotną jest koprodukt dwóch grup zdefiniowany za pomocą ich reprezentacji:

$$G_0 = \wedge g_1, g_2, ..., g_k \mid r_1, ..., r_n \rangle$$

$$G_1 = \wedge h_1, h_2, ..., h_l \mid s_1, ...s_m \rangle$$

$$G_1 \star G_0 = \langle g_1, ..., g_k, h_1, ..., h_l \mid r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m \rangle$$

   gdzie $g_1, ..., g_k$ to generatory G_0, a $r_1, ...r_n$ to relacje w grupie G_0 (co daje element neutralny).

Wykład 23.10.23 : Kategorie abelowe i addytywne, jądra

4.1 Funktory sprzężone [adjoint functors]

Definicja 4.1 : funktory sprzężone.
Para funktorów $L : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ i $R : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem **A** jak i **B**)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy $L \dashv R$

Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktorem zapominającym*
   - jeśli $R : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, wtedy

     $$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\star, B) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B) & \\ \text{grupa} \arrow[u, bend right] & & \text{grupa jako zbiór} \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

     $\star$ będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy F_A.
   - $R : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}$ z bijekcjami zdefiniowanymi jako

     $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

     gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.
2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

   $$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

   dla $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$ mamy

   $$(a \otimes x \mapsto (\varphi(a))(x)) \mapsto \varphi$$

   Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły: $L = - \otimes X$ oraz $R = \mathrm{Hom}(X, -)$
3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym funktor sprzężonym.

- Włożenie kategorii **Ab** ↪ **Grp** posiada funktor sprzężony:

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

  komutant dowolnej grupy A przechodzi przez każdy homomorfizm $\varphi : A \to B$ na element neutralny, więc od razu indukwoane mamy przekształcenie $A^{op} \to B$, stąd $\star = A^{op}$.

- Włożenie kategorii ciał w dziedziny wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciala}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

  Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia R w ciało K, to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciała ułamków ciała R w ciało K:

  $$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, hook] & & K \ni \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)} \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  stąd $\star = R_o$

- Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne $\mathbf{Cpt}T_0$ ↪ **Top** mamy

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpf}T_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

  więc $\star = \beta X$ czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

  Bierzemy przestrzeń X i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z X w [0, 1] i potem odwzorowujemy diagonalnie X w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

> **Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.**
> Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód
Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgryźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

R(B) to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{op} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$

Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).
Jeśli $L \dashv R$, to R zachowuje granicę, a L kogranicę.

Dowód
OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt $A \in \mathbf{A}$ i sprawdzić, czy $\Pi_i' : A \to (R \circ F)(I)$ sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na $R \circ R(\Pi_i)$. Musimy wziąć obiekt $LA \in \mathbf{B}$ i tutaj dostajemy jedyną strzałkę $LA \to X$, gdyż X jest granicą. Ale sprzężoność R z L mówi, że mamy jedyność odpowiadania strzałek między elementami **A** a elementami **B**.

4.2 Kategorie addytywne i abelowe

Definicja 4.2 : kategoria addytywna.
Kategoria addytywna **A** to kategoria

- Dla każdej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ na $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje *obiekt zerowy* 0 taki, że $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(0,0)=0$ jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ istnieje obiekt C (zwykle oznaczany $A \oplus B$), który jest ich *produktem* i *koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i_A"] & C \arrow[l, shift left, "P_A"] \arrow[r, shift left, "P_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

takie, że $P_a \circ i_A = id_A$ i $P_A \circ i_B = 0$ (analogicznie gdy przestawimy A i B). Dodatkowo, $i_AP_A + i_BP_B = id_C$.

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strałka $D \to C$:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rrd, bend left, "f_b"] \arrow[rd, dashed] \arrow[rdd, bend right, "f_A"'] & & \\ & C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "P_A"] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

Zauważmy że $i_Af_A + i_Bf_B : D \to C$, wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja $D \to C$ sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z P_A i P_B:

$$P_A(i_Af_A + i_Bf_B) = \underbrace{P_Ai_A}_{id_A} f_A + \underbrace{P_Ai_B}_{0} f_B = f_A$$

$$P_B(i_Af_A + i_Bf_B) = \underbrace{P_Bi_A}_{0} f_A + \underbrace{P_Bi_B}_{id_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rrd, bend left, "0"] \arrow[rd, "u"] \arrow[rdd, bend right, "0"'] & & \\ & C \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "f_A"] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} u &= id_C \circ 0 = \\ &= i_AP_Au + i_BP_Bu = \\ &= i_A0 + i_B0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

> **Dygresja : parę słów o zerach.**
> Dla dowolnego obiektu $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ mamy $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$ i $\mathrm{Hom}(0, A) = 0$, bo dla $f : A \to 0$ jest $\mathrm{id}_0 \circ f = f$, czyli $f = 0 \circ f$, a więc
>
> $$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

   Pre – **snop/AB**(X) i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

> **Definicja 4.3 : kategoria abelowa.**
> Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i kojądro i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

4.3 Monomorfizm, epimorfizm i jądra

> **Definicja 4.4 : jądro, kojądro i przyjaciele.**
> Kilka wyjaśnień:
>
> - Jądro f to ekwalizator $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \end{tikzcd}$. Inaczej, jest to $K \xrightarrow{k} A$ taki, że
>
>   1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
>   2. Zachodzi własność uniwersalna:

$$\begin{tikzcd}
\forall K' \arrow[r, "k'"] \arrow[rr, bend left, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
K \arrow[u, "\exists! u"] \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

- Kojądro f to koekwalizator $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$ jak w następującym diagramie:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[rrd, bend right, "0"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[rd, "c'"] & C \arrow[d, "\exists!"] \\
& & C'
\end{tikzcd}$$

- Niech $f : A \to B$, wówczas
  - $\operatorname{im} f = \ker(B \to \operatorname{Coker} f)$
  - $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\ker f \to A)$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "c"] & C \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed] & \operatorname{im} f \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działaby w kategorii abelowej.

Ekwalizator strzałek $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ to obiekt E oraz strzałka $e : E \to A$ taka, że $fe = ge$ oraz jeśli $U \xrightarrow{u} A$ również to spełnia, to istnieje jedyna strzałka $\varphi : U \to E$ taka, że $u = e\varphi$.

Definicja 4.5 : mono-, epi-.
Morfizm $f : X \to Y$ jest

- **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 : Z \to X$ zachodzi
$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego $g : Z \to X$ $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

- **epimorfizmem** nazywamy morfizm $f : A \to B$ taki, że mając $h_1, h_2 : B \to W$ zachodzi
$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$
W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając $f : A \to B$ i $h : B \to W$ to
$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

Można pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to $\ker f = 0$, a jeśli f jest epimorfizmem, to $\mathrm{Coker}\, f = 0$.

Lemat 4.3.
Jądra są monomorfizmami, a kojądra są epimorfizmami.

Dowód
W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
Z \arrow[u, "g"'] \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[ur, "0"] \arrow[urr, "0"] & &
\end{tikzcd}$$

i zauważyć, że jedyność odwzorowania $Z \to K$ wymaga, aby $g = 0$.

Uwaga 4.4.
Dla każdego morfizmu $f : A \to B$ w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "i", "\text{epi}"'] & I \arrow[r, "j", "\text{mono}"'] & B \arrow[r, "c"] & C
\end{tikzcd}$$

w którym $k = \ker f$, $c = \mathrm{Coker}\, f$, $i = \mathrm{Coker}\, k$ oraz $j = \ker c$ i $f = j \cdot i$.

Dowód
Załóżmy, że istnieją dwa takie rozkłady:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, dashed] & & I \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed] & & C \arrow[dd, dashed] \\
& A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"] & & B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c'"] & \\
K' \arrow[ur, "k'"] & & I' \arrow[ur, "j'"] & & C'
\end{tikzcd}$$

Strzałki niebieska i czerwona są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę zieloną dobbieramy w taki sposób, aby diagram

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed] & \\
& B \\
I' \arrow[ur, "j'"] &
\end{tikzcd}$$

komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"] & & B \\
& I' \arrow[ur, "j'"] &
\end{tikzcd}$$

> **Lemat 4.5.**
> W kategorii abelowej, jeśli f jest epimorfizmem, to f = Coker ker f, a jeśli f jest monomofizmem, to f = ker Coker f.

Dowód

Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & A \arrow[r] & I \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

wiemy, że j jest $\ker(B \to 0)$, czyli funkcji zerowej. Czyli musi być $j = \mathrm{id}_B$, możemy więc przerysować

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & I \arrow[r, "j"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & B \arrow[r, "0"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & 0 \\ K' \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] & B \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

ale przecież $i : A \to I$ było $i = \mathrm{Coker}\ker f$, z drugiej strony ponieważ $A \to I \to B$ jest równe f, a w tym konkretnym przypadku jest to równe $A \to B \to B$ gdzie druga strzałka to id_B, to musi być $i : A \to I = f : A \to B$.

🍻

> **Uwaga 4.6.**
> W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i kojądro oraz zachodzi lemat 4.5

Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro ker f to algebraiczne jądro f z dziedziczoną topologią, a Coker f to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu $\overline{\mathrm{im}\, f}$.

   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & B/\overline{f[A]} \end{tikzcd}$$

   Przez taką definicję Coker mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

   Wystarczy sprawdzić

   $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R}^{\delta} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

gdzie $\mathbb{R}^\delta$ ma topologię dyskretną, a $\mathbb{R}$ traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między kojądrami JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria R-modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii R-modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

> **Dygresja : twierdzenie Freyd-Mitchella.**
> Mała kategoria belowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię R-modułów dla pewnego R.

Wykład 30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

Definicja 5.1 : kompleks łańcuchowy.
Kompleks (ko)łańcuchowy w kategorii abelowej **A** to ciąg obiektów i morfizmów

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

taki, że dla każdego n $d^n \circ d^{n-1} = 0$

Przykład(y) 5.1 : kompleksów łańcuchowych

1. Niech X będzie *kompleksem symplicjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stowarzyszyć kompleks symplicjalny z obiektami

   $$C_nX = \bigoplus_{\sigma-\text{n-sympleks}} \mathbb{Z}$$

   i wtedy $\partial : C_nX \to C_{n-1}X$ jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

   $$\partial[\sigma^n] = \sum_{\tau^{n-1}<\sigma^n} \pm[\tau^{n-1}]$$

   gdzie σ^n to generator składniku $\mathbb{Z}$ odpowiadający sympleksowi σ^n. Jeśli mamy sympleks $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$ to przez ścianę τ^{n-1} rozumiemy

   $$\tau^{n-1} = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

   gdzie przez $\widehat{v_i}$ rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

   $$S_nX = \bigoplus_{\sigma:\Delta^n \to X} \mathbb{Z}$$

   gdzie $\sigma : \Delta^n \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w X. To się nazywa *kompleks singularny*.

   Odwzorowanie brzegu $\partial : S_nX \to S_{n-1}X$ na $\sigma : \Delta^n \to X$ przyjmuje wartość

   $$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \restriction_{\text{i-ta ściana}})$$

3. **Kompleks de Rhama**

   Niech M będzie gładką rozmaitością, $A^n = \Omega^n M$ będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas $d : \Omega^n M \to \Omega^{n+1} M$ jest pochodną zewnętrzną.

   W szczególności, jeśli $M = T^2$, to $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^2 = \mathbb{R}$ oraz $H^{>2} = 0$.

5.2 Homologie

Skoro $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$, to $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$, więc możemy zastanowić się nad

$$H_n X = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}.$$

Tak zdefiniowane $H_n X$ nazywamy **homologiami**.

Definicja 5.2 : ogólna definicja (kohomologii).
Niech $A^{\cdot}$ będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzymy na jego wycinek

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "a"] & A^n \arrow[r, "d^n"] & A^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& K \arrow[ur, "\ker d^n"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Ponieważ $d^n \circ d^{n-1} = 0$, to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra $a : A^{n-1} \to K$. Chcemy więc nazwać

$$H^n(A^{\cdot}) = \operatorname{Coker} a$$

kohomologią.

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

$$\begin{tikzcd}
& & & C \arrow[d, "b"] & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[ur, "\operatorname{Coker} d^{n-1}"] & A^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

i zdefiniować $H^n(A^{\cdot}) = \ker b$.

Lemat 5.1.
W definicji jak wyżej $H^n(A^{\cdot}) : \operatorname{Coker} a \cong \ker b$.

Dowód

- Przy dodatkowym założeniu, że d^{n-1} jest monomorfizmem, a d^n jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = \mathrm{Coker}\,\ker d^n = \mathrm{Coker}\,k$$

$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że $a = \ker ck$ oraz $b = \mathrm{Coker}\,ck$, z czego od razu wynika teza:

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "a"] & K \arrow[r, "ck"] \arrow[d] & C \arrow[r, "b"] & A^n \\
& \mathrm{Coker}\,a \arrow[r, "\star"] & \ker b \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

i strzałka $\star$ jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia

$$\begin{tikzcd}
& & & C \arrow[dr, "b"] & \\
A^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "a"'] & & A^n \arrow[ur, "c"] \arrow[rr] & & A^{n+1} \\
& K \arrow[ur, "k"'] & & & \\
& U \arrow[u, "\theta"'] \arrow[uul, "\exists!"] \arrow[uuurr, bend right, "0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Wiemy, że k jest jądrem d^n, a z kolei $c = \mathrm{Coker}\,d^{n-1}$.

Z dodatkowego założenia wiemy, że

$$cka = cd^{n-1} = c\ker c = 0$$

więc jeśli weźmiemy $\theta : U \longrightarrow K$ takie, że również

$$k\theta = 0$$

to musi się ono faktoryzować w jedyny sposób przez $\theta' : U \longrightarrow A^{n-1}$ tak, że

$$k\theta = d^{n-1}\theta'.$$

W takim razie, mamy

$$ka\theta' = d^{n-1}\theta' = k\theta$$

a ponieważ $k = \ker d^n$, to jest monomorfizmem i musi zachodzić $a\theta' = \theta$. Ale θ działało jak jądro odwzorowania ck, czyli $a\theta' = \theta = \ker ck$.

- Bez dodatkowych założeń

  ZDJĘCIA

5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

Definicja 5.3.

- Pull-back to granica diagramu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

- Push-out to z kolei kogranica diagramu

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Fakt 5.2.
W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

Dowód

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \oplus B \arrow[r, "P_B"] \arrow[d, "P_A"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania

$$E := \ker(fP_A - gP_B).$$

Pokażemy, że E jest granicą diagramu po lewej.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed] \arrow[drrr, bend left, "\beta"] \arrow[dddr, bend right, "\alpha"'] & & & \\
 & E \arrow[dr, "e"] & & B \arrow[dd, "g"] \\
 & & A \oplus B \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
 & A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Załóżmy, że D również jest stożkiem nad diagramem wyżej (spełnia warunek na granicę diagramu), tzn. $f\alpha = g\beta$. Chcemy pokazać, że D jest jądrem $fP_A - gP_B$, wówczas strzałkę zaznaczoną przerywaną linią otrzymamy za darmo z uniwersalności jądra.

Popatrzmy na odwzorowanie $D \to A \oplus B$ zadane jako $i_A\alpha + i_B\beta$. Chcemy sprawdzić, czy zerem jest przekształcenie

$$\begin{aligned}
(fP_A - gP_B)(i_A\alpha + i_B\beta) &= fP_A(i_A\alpha + i_B\beta) - gP_B(i_A\alpha + i_B\beta) = \\
&= fP_Ai_A\alpha + fP_Ai_B\beta - gP_Bi_A\alpha - gP_Bi_B\beta = \\
&= f\alpha + f0\beta - g0\alpha - g\beta = f\alpha - g\beta = 0
\end{aligned}$$

ale ponieważ D jest stożkiem nad diagramem, to wiem, że $f\alpha = g\beta \Rightarrow f\alpha - g\beta = 0$, czyli faktycznie mamy 0. W takim razie D jak i E są jądrami $fP_A - gP_B$, czyli istnieje jedyne przekształcenie $D \to E$. Czyli E jak i D zachowują się jak granice.

JESZCZE PUSH OUTY

Wykład 06.11.23 : Lemat o wężu i przyjaciele (kwadraty kartezjańskie)

Na tym wykładzie trzymamy z tyłu głowy, że jesteśmy w kategorii abelowej.

6.1 Epimorfizm (i jądro) przenosi się przez pull-back

> **Lemat 6.1 : epimorfizm przenosi się przez pull back.**
> Jeśli mamy dany pull-back (kwadrat kartezjański, tzn. Z wraz z g' i g jest granicą początku alfabetu)
>
> $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$
>
> wtedy jeśli f jest epimorfizmem, to f' też takie jest.

Dowód
Zaczniemy naszą przygodę od powiększenia diagramu tak, aby było widać jak konstruowany jest pull-back.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "g'"'] \arrow[dr, "m"] & & B \arrow[dl, shift left, "i_B"] \arrow[dd, "g"] \\ & A \oplus B \arrow[ur, shift left, "P_B"] \arrow[dl, shift right, "P_A"'] \arrow[dr, "fP_A-gP_B"] & \\ A \arrow[ur, shift right, "i_A"'] \arrow[rr, "f"'] & & C \end{tikzcd}$$

Wiemy, że m jest jądrem odwzorowania $(fP_A - gP_B)$, czyli musi być monomorfizmem. Przejdziemy przez kilka etapów, żeby wyciągnąć bycie epimorfizmem przez f do bycia epimorfizmem przez f'.

1. f jest epimorfizmem $\Rightarrow fP_A - gP_B$

   Weźmy sobie dowolny D i wyobraźmy sobie, że mamy strzałkę $\alpha : C \to D$ taka, że $\alpha(fP_A - gP_B) = 0$. Musimy więc pokazać, że wtedy α musi być 0.

$$0 = \alpha(fP_A - gP_B)i_A = \alpha f \overbrace{P_A id_A}^{id_A} - \alpha g \overbrace{P_B id_A}^{0} =$$
$$= \alpha f\ id_A = \alpha f$$

Skoro więc $\alpha f = 0$, a f jest epimorfizmem, to na pewno wiemy, że $\alpha = 0$.

2. f' jest epimorfizmem

Wyobraźmy sobie, że teraz z kolei istnieje E oraz strzałka $h : B \to E$ taka, że $hf' = 0$. Tak jak wcześniej, musimy pokazać, że $h = 0$.

Zauważmy, że $f' = P_B m$, czyli możemy napisać

$$0 = hf' = hP_B m$$

czyli hP_B faktoryzuje się przez Coker m, ale czym tak właściwie jest Coker m? Otóż Coker m = C! W takim razie możemy znaleźć $h' : C \to E$ takie, że

$$h'(fP_A - gP_B) = hP_B,$$

czyli znowu szukając zera dostaniemy

$$\begin{aligned} 0 = h\,\overbrace{P_B i_A}^{0} = h'(fP_A - gP_B)i_A = \\ = h'fP_A i_A - h'gP_B i_A = h'f \end{aligned}$$

Wiemy, że f jest epimorfizmem, czyli $h' = 0$. W takim razie

$$0 = h'(fP_A - gP_B) = hP_B$$

ale z drugiej strony $h = hP_B i_B$, czyli mamy

$$h = hP_B i_B = 0 i_B = 0$$

i dostajemy to co chcieliśmy.

🍻

Lemat 6.2 : jądro przenosi się przez pull-back.
Rozważamy diagram

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[dr, dashed, "g'k"'] & Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

gdzie $K \xrightarrow{k} Z$ jest jądrem f', to wówczas $K \xrightarrow{g'k} A$ jest jądrem f.

Dowód

Musimy pokazać, że $fg'k = 0$ oraz że takie $g'k$ spełnia warunek uniwersalności.

- $fg'k = 0$

  Wystarczy zobaczyć rysunek:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"'] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[rrd, bend left=60] \arrow[rrd, bend right=40] & Z \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

  Zielona strzałka na górze jest złożeniem funkcji 0 z g, czyli sama jest 0, a ponieważ pomarańczowa strzałka niżej jest jej równa (diagram komutuje), to ona również jest zerem.

- $g'k$ spełnia uniwersalną własność jądra

  Wyobraźmy sobie, że istnieje U takie, że mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
U \arrow[u, dashed, "\exists ! u''?"] \arrow[ur, "\exists ! u'"] \arrow[r, "u"'] & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

  CO TU SIĘ TAK WŁAŚCIWIE STANEŁO?

6.2 Czym są elementy obiektu?

Definicja 6.1 : element obiektu.
Jeśli **A** jest kategorią abelową i $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$, to elementem Y nazywamy **klasę równoważności morfizmów** $X \xrightarrow{h} Y$ względem relacji

$$(X \xrightarrow{h} Y) \qquad \sim \qquad (X' \xrightarrow[h']{Y})$$

$$\Updownarrow$$

$$(\exists u, u' : Z \to X) \qquad Z \xrightarrow{u} X$$

$$Z \xrightarrow{u'} X'$$

$$hu = h'u'$$

to znaczy, że istnieją u, u' takie, że komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "u'"'] \arrow[dr, "u"] & \\
X \arrow[dr, "h"'] & & X' \arrow[dl, "h'"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Powyższa relacja jest relacją równoważności, bo biorąc Z'' jako pullback

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & X'
\end{tikzcd}$$

oraz korzystając z lematu 6.1, dostajemy przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & Z'' \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & Z' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[drr] & & X' \arrow[d] & & X'' \arrow[dll] \\
 & & Y & &
\end{tikzcd}$$

O elementach możemy nadal myśleć jako o elementach "zbioru" Y i podmieniać to myślenie na klasy abstrakcji relacji wyżej, jeśli jest to dla nas bardziej wygodne.

Własności elementów Y

1. Odwzorowanie $Y \xrightarrow{f} Y'$ jest monomorfizmem $\iff$ dla wszystkich elementów $y \in Y$ $f(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ $\iff$ dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ jeśli $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.
2. $Y \xrightarrow{f} Y'$ jest epimorfizmem $\iff$ dla każdego $y' \in Y'$ istnieje $y \in Y$ taki, że $f(y) = y'$.
3. $Y \xrightarrow{f} Y'$ jest odwzorowaniem zerowym $\iff$ $(\forall y \in Y)\ f(y) = 0$
4. Ciąg $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Y''$ jest dokładny $\iff$ $gf = 0$ oraz dla każdego $y' \in Y'$ takiego, że $g(y') = 0$ istnieje $y \in Y$ taki, że $y' = f(y)$.

Dowód

Najpierw zastanówmy się, co to znaczy, że $y = 0$?

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "0"] & \\
X \arrow[dr, "y"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Skoro $y = 0$, to powyższy diagram komutuje. Wiemy, że u jest epimorfizmem oraz $yu = 0$, więc $y = 0$. Czyli $y = 0$ jako normalny element $\iff$ $y = 0$ jako morfizm.

Pokażemy punkt 1, tzn. f jest monomorfizmem $\iff$ dla wszystkich elementów $y \in Y$ $f(y) = 0 \Rightarrow y = 0$.

$\Rightarrow$ jeśli $Y \xrightarrow{f} Y'$ jest monomorfizmem oraz $f(y) = 0$, to możemy narysować

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, "0"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Z niego wiemy, że $fy = 0$, a skoro f jest monomorfizmem, to $y = 0$ jako morfizm. Wcześniej pokazaliśmy, że $y = 0$ jako morfizm $\iff$ $y = 0$ jako element. Czyli dostajemy to czego oczekiwaliśmy.

$\Leftarrow$

Zakładamy, że $fy = 0$ i pytamy, czy wynika z tego, że f jest monomorfizmem? Wiemy, że $fy = 0 \Rightarrow y = 0$ jako element, ale $y = 0$ jako element $\iff$ $y = 0$ jako morfizm. Czyli $fy = 0 \Rightarrow y = 0$ oznacza, że f spełnia warunek na monomorfizm.

🍻

6.3 Lemat o wężu 🐍

Definicja 6.2 : ciąg dokładny.
W kategorii abelowej kompleks łańcuchowy

$$A^\cdot \qquad \dots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \longrightarrow \dots$$

jest dokładny w A^i, jeśli $d^i d^{i-1} = 0$ oraz i-ta grupa kohomologii $H^i(A^\cdot) = 0$.

Lemat 6.3.
Ciąg jest dokładny w A^i $\iff$ $\operatorname{im} d^{i-1} = \ker d^i$.

Dowód
$\Leftarrow$ Wiemy, że $\operatorname{im} d^{i-1} = \ker d^i$, czyli narysujmy diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, dashed, "b"] \\
A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[dr, dashed, "a\ \mathrm{epi}"'] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[ur, "c"] & A^{i+1} \\
 & K \arrow[u, "k\ \mathrm{mono}"'] &
\end{tikzcd}$$

Przykład(y) 6.1

1. Ciąg $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ jest dokładny $\iff$ f jest monomorfizmem
2. Ciąg $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ jest dokładny $\iff$ f jest epimorfizmem
3. Jeśli mamy ciąg $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ to jest on dokładny $\iff$ f jest izomorfizmem
4. Klasyczny ciąg dokładny to:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

gdzie f jest monomorfizmem, a g jest epimorfizmem.

> **Lemat 6.4 : o wężu.**
> Załóżmy, że dany jest diagram
>
> $$\begin{tikzcd}
> & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
> 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
> \end{tikzcd}$$
>
> gdzie wiersze są dokładne, a wszystkie kwadraty komutują.

> Wtedy istnieje odwzorowanie $\ker\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$ takie, że ciąg
>
> $$\begin{tikzcd}
> \ker\alpha \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \ker\gamma \arrow[dll, rounded corners] \\
> \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma
> \end{tikzcd}$$
>
> jest dokładny.

Dowód

Dowód to polowanie po diagramie, którego nie będę pisać. Narysuję za to bardziej czytelny diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma &
\end{tikzcd}$$

🍻

Wykład Wężowe homologie i kohomologie

7.1 Ciąg dokładny kompleksów

Lemat 7.1.
W kategorii abelowej, krótki ciąg dokładny kompleksów

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$$

indukuje długi ciąg dokładny kohomologii:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \\
H^{n+1}(A) \arrow[r] & H^{n+1}(B) \arrow[r] & H^{n+1}(C) \arrow[u, rounded corners] \\
H^{n}(A) \arrow[r] & H^{n}(B) \arrow[r] & H^{n}(C) \arrow[llu, rounded corners] \\
 & \cdots & H^{n-1}(C) \arrow[llu, rounded corners]
\end{tikzcd}$$

Dygresja.
Jeśli jesteśmy w kategorii abelowej, to kategoria jej kompleksów również jest abelowa.

Dowód
Potrzebujemy dwóch diagramów i troszkę polowania:

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker} d_A^n \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_B^n \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_C^n \arrow[r] & 0 \\
 & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & B^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[u] & B^n \arrow[r] \arrow[u] & C^n \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_A^n \arrow[r] \arrow[u] & \ker d_B^n \arrow[r] \arrow[u] & \ker d_C^n \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(B) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(C) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & \mathrm{Coker}\, d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_A^{n+1}"] & \mathrm{Coker}\, d_B^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_B^{n+1}"] & \mathrm{Coker}\, d_C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_B^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_C^{n+1} \arrow[d] & \\
 & H^{n+1}(A) \arrow[r] & H^{n+1}(B) \arrow[r] & H^{n+1}(C) &
\end{tikzcd}$$

pomarańczowa strzałka wynika z lematu węża, natomiast różniczki dopisaliśmy, ponieważ "przenosi się" na dół.

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "\text{epi}"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] & \dots \\
 & \mathrm{Coker}\, d_A^{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[ur, dashed] & \ker d_A^{n+1} \arrow[u, "\text{mono}"] &
\end{tikzcd}$$

7.2 Quasi-izomorfizmy i kategoria pochodna

Definicja 7.1 : quasi-izomorfizm.
Morfizm $f : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ na kompleksach jest **quasi-izomorfizmem** (qis), jeśli indukuje izomorfizm na kohomologiach, tzn dla każdego i odwzorowanie

$$H^i(f) : H^i(A^{\cdot}) \to H^i(B^{\cdot})$$

jest izomorfizmem.

Przykład(y) 7.1

1. Dla bardzo ubogiego kompleksu

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & A \arrow[r, "id_A"] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

mamy $H^{\cdot} = 0$ i jeśli przyrównany do niego kompleks złożony tylko z 0, to quasi-izomorfizmem między tymi dwoma kompleksami jest odwzorowanie zerowe.

2. Mniej trywialny przykład to rozważenie ciągu dokładnego:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\times"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Możemy go podmienić na dwa kompleksy z odwzorowaniem między nimi jak niżej

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\times"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "epi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Jedyna nietrywialna grupa kohomologii w obu kompleksach pojawia się w miejscu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i jest równa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Czy odwzorowanie, które prawie wszędzie jest zerowe, ale na wysokości nietrywialnej grupy kohomologii staje się epimorfizmem jest quasi-izomorfizmem kompleksów.

Twierdzenie 7.2 : kategoria pochodna.
Niech $\mathbf{A}$ będzie kategorią abelową, natomiast $Kom(\mathbf{A})$ kategorią jej kompleksów. Istnieje **kategoria pochodna** $D(\mathbf{A})$ i funktor $Q : Kom(\mathbf{A}) \to D(\mathbf{A})$ taki, że

1. jeśli f jest qis w kom($\mathbf{A}$), to $D(f)$ jest izomorfizmem w $D(\mathbf{A})$
2. jeśli $F : Kom(\mathbf{A}) \to D(\mathbf{A})$ spełnia warunek 1, to faktoryzuje się przez Q:

$$\begin{tikzcd} Kom(\mathbf{A}) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "F"] & & D(\mathbf{A}) \arrow[dl, "\exists! G"] \\ & D(\mathbf{A}) & \end{tikzcd}$$

Kategorię $D(\mathbf{A})$ czasem oznaczamy D'.