Charakterystyka Eulera

Notatki z wykładu

2023

1 Wprowadzenie

Charakterystyka Eulera to liczba, którą przypisujemy obiektom pojawiającym się w wielu dziedzinach matematyki: kombinatoryce, topologii, geometrii. Jest ona niezmiennikiem tych obiektów. To znaczy, jest to wielkość, która nie zmienia się przy wykonywaniu na tych obiektach pewnych przekształceń zachowujących ich strukturę. Jest więc ona ważnym narzędziem służącym do charakteryzacji takich obiektów- pozwala ona na ich rozróżnianie wewnątrz jakichś rodzin. Obiektami, dla których opiszemy charakterystykę Eulera w pierwszej kolejności są kompleksy symplicjalne.

2 Kompleksy symplicjalne

Będziemy mówić o charakterystyce Eulera, czyli o $\chi(X)$. Musimy zatem wiedzieć, co to jest X. Zaczniemy od $X = \mathcal{K}$, czyli od kompleksów symplicjlanych.

2.1 Kompleks symplicjalny

Definicja 2.1.

1. *Kompleks symplicjalny* $\mathcal{K}$ na zbiorze V to rodzina niepustych podzbiorów V spełniająca

   - Dla każdego $v \in V$ singleton $\{v\} \in \mathcal{K}$
   - Dla każdego $A \subset V$ i dla każdego podzbioru $B \subset A$ jeśli $A \in \mathcal{K}$, to $B \in \mathcal{K}$.

   Zbiór V nazywamy *zbiorem wierzchołków*. Często utożsamiamy v z $\{v\}$. Będziemy zajmować się kompleksami skończonymi, to znaczy przyjmujemy $|V| < \infty$.

2. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym na zbiorze V. Rodzinę $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ nazywamy *podkompleksem* kompleksu $\mathcal{K}$, gdy jest ona kompleksem symplicjalnym na zbiorze wierzchołków $V(\mathcal{L}) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L \subset V$.

3. Elementy $\sigma \in \mathcal{K}$ jak i podkompleksy $\mathcal{K}$ złożone z wszystkich niepustych podzbiorów σ nazywamy *sympleksami*. *Wymiarem* sympleksu σ nazywamy liczbę

$$\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$$

Gdy $|\sigma| = n+1$, to σ nazywamy n-sympleksem (sympleksem n-wymiarowym).

4. *Wymiarem* kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ nazywamy liczbę

$$\dim(\mathcal{K}) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}$$

Czyli wymiar największego sympleksu w $\mathcal{K}$.

Przykłady 2.2.

1. Gdy $\mathcal{K} = \mathcal{P}(V)$, to $\mathcal{K}$ nazywamy *sympleksem* $(|V|-1)$-wymiarowym. Oznaczamy go (między innymi) Δ^V lub Δ^n, gdy $|V| = n+1$.

2. Podkompleks sympleksu Δ^V złożony z właściwych podzbiorów V nazywamy *brzegiem* Δ^V i oznaczamy go $\partial\Delta^V$.

3. W zależności od konwencji *ścianami* sympleksu Δ^n nazywamy sympleksy jego brzegu $\partial\Delta^n$ lub jego $(n-1)$-wymiarowe sympleksy.

4. Podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ złożony ze zbiorów o co najwyżej $k+1$ elementach, nazywamy *k-szkieletem* kompleksu $\mathcal{K}$.

5. Kompleksy 1-wymiarowe nazywamy *grafami symplicjalnymi*. Są to grafy bez pętli i bez wielokrotnych krawędzi.

6. *Stożkiem* nad kompleksem $\mathcal{K} = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ o wierzchołku w v (który nie jest wierzchołkiem kompleksu $\mathcal{K}$) nazywamy kompleks

$$C_v(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{\{v\}, \sigma_1 \cup \{v\}, ..., \sigma_n \cup \{v\}\}$$

nad zbiorem wierzchołków $V \cup \{v\}$.
Zadanie: Czym jest stożek n-sympleksu?

7. *Gwiazdą* wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ złożony z tych sympleksów, które zawierają wierzchołek v. Oznaczamy ją przez $\mathrm{St}(v)$.

8. *Linkiem* wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy podkompleks $\mathrm{St}(v)$ złożony z tych sympleksów, które nie zawierają v. Oznaczamy go przez $\mathrm{Lk}(v)$.

9. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni topologicznej (zbioru) X, czyli pewną rodziną podzbiorów X, której suma mnogościowa jest równa X. Najcześciej spotyka się pokrycie otwarte przestrzeni topologicznej, czyli pokrycie, którego zbiory są otwarte. Załóżmy, że pokrycie $\mathcal{U}$ jest skończone. *Nerwem* pokrycia $\mathcal{U}$ nazywamy kompleks symplicjalny, którego wierzchołki to zbiory pokrycia i w którym podzbiór zbioru wierzchołków rozpina sympleks, gdy przekrój zbiorów, którymi są te wierzchołki, jest niepusty.

   Zadanie: Sprawdzić, że nerw pokrycia rzeczywiście jest kompleksem symplicjalnym

   Zadanie: Opisać nerw pokrycia n-sympleksu przez jego ściany (w obu konwencjach).

Rozważmy jeszcze jeden ważny przykład.

Definicja 2.3. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany (poset) $P = (P, \leq)$. *Realizacja symplicjalna* posetu P to kompleks symplicjalny, którego n-sympleksami są łańcuchy o $n+1$ elementach.

Definicja 2.4. Kompleks symplicjalny $\mathcal{K}$ na zbiorze wierzchołków V nazywamy *flagowym*, jeśli dla każdego $S \subset V$, jeśli każdy dwuelementowy podzbiór zbioru S jest elementem $\mathcal{K}$, to S też jest. To znaczy, jeśli jakiś jednowymiarowy podkompleks $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ jest izomorficzny z 1-szkieletem sympleksu (potem zdefiniujemy formalnie, co oznacza "izomorficzny"), to w $\mathcal{K}$ jest sympleks, którego 1-szkieletem jest $\mathcal{L}$.

Zadanie: Pokazać, że realizacja symplicjalna posetu jest kompleksem flagowym.

Zadanie: Czy nerw pokrycia kwadratu $[0, 10] \times [0, 10]$ kołami o promieniu 1 jest kompleksem flagowym? (A kostki $[0, 10]^n$ n-wymiarowymi kulami o promieniu 1?)*

Definicja 2.5. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym. Zauważmy, że ($\mathcal{K}$,$\subset$) jest posetem. Realizację symplicjalną $\mathcal{K}$ jako posetu nazywamy *podrozbiciem barycentrycznym* $\mathcal{K}$ i oznaczamy między innymi $\mathcal{K}'$. (**Zadanie**) Podać inną (równoważną) definicję podrozbicia barycentrycznego.

2.2 Realizacja geometryczna kompleksu symplicjalnego

Kompleksy symplicjalne wygodnie jest przedstawiać geometrycznie. Służy do tego ich *geometryczna realizacja.*

Definicja 2.6. Niech Δ^V będzie sympleksem o zbiorze wierzchołków V i niech $\mathbb{R}^V$ będzie przestrzenią wektorową o bazie V. *Realizacją geometryczną* $\widehat{\Delta^V}$ sympleksu Δ^V, nazywamy otoczkę wypukłą zbioru V, czyli

$$\widehat{\Delta^V} = \mathrm{Conv}(V) = \{\sum_{v\in V} t_v v :\ t_v \in [0,1],\ \sum_{v\in V} t_v = 1\}$$

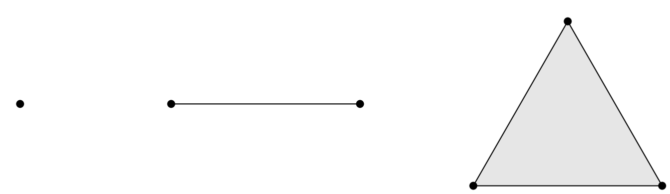
Zadanie: Opsiać ściany (sympleksy) sympleksu Δ^V w jego realizacji geometrycznej.

Realizacja geometryczna $\hat{\mathcal{K}}$ kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ na zbiorze wierzchołków V to suma realizacji geometrycznych sympleksów $\sigma \in \mathcal{K}$ w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^V$:

$$\hat{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \hat{\sigma}.$$

Taką przestrzeń nazywać też będziemy *geometrycznym kompleksem symplicjalnym.* Analogicznie definijuemy geometryczne sympleksy.
Rozważamy $\hat{\mathcal{K}}$ jako przestrzeń topologiczną (metryczną) z topologią (metryką) dziedziczoną z $\mathbb{R}^V$.
Ogólniej realizacją geometryczną kompleksu $\mathcal{K}$ nazywamy dowolną przestrzeń topologiczną homeomorficzną z wyżej skonstruowaną przestrzenią $\hat{\mathcal{K}}$. Z kontekstu wynikać będzie do czego się odnosimy mówiąc realizacja geometryczna kompleksu.

Przykład 2.7. Realizacje geometryczne 0-,1- i 2-sympleksu to odpowiednio punkt, odcinek i trójkąt:



Zadanie: Opisać realizację geometryczną stożka nad kompleksem $\mathcal{K}$.

Zadanie: Zdefiniować pojęcie stożka nad przestrzenią topologiczną X.

Zadanie: Pokazać, że realizacja geometryczna gwiazdy $\mathrm{St}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą kulą w $\mathcal{K}'$ o środku w v. Pokazać, że realizacja geometryczna linku $\mathrm{Lk}(v)$ wierzchołka v kompleksu $\mathcal{K}$ jest homeomorficzna z małą sferą w $\mathcal{K}'$ o środku w v.

Wspomniane wcześniej podrozbicie barycentryczne kompleksu symplicjalnego można przeprowadzić na geometrzycznej realizacji kompleksu:
Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym. Realizacje geometryczne $\widehat{\sigma}$ sympleksów

$\sigma \in \mathcal{K}$ nazywać będziemy sympleksami realizacji geometrycznej $\widehat{\mathcal{K}}$. Podrozbiciem barycentrycznym $\widehat{\mathcal{K}}$ będzie skonstruowany poniżej geometryczny kompleks symplicjalny $\widehat{\mathcal{K}}'$. Konstrukcję przeprowadzimy dla $\mathcal{K} = \Delta^V$. Rozszerza się ona na ogólne kompleksy tak, jak definicja realizacji geometrycznej. Mamy

$$\widehat{\Delta^V} = \{\sum_{v \in V} t_v v : \ t_v \in [0,1], \ \sum_{v \in V} t_v = 1\}$$

- Wierzchołkami $(\widehat{\Delta^V})'$ są te punkty z $\widehat{\Delta^V}$, których niezerowe współczynniki t_v w przedstawieniu jako kombinacja wypukła elementów V są wszystkie równe, czyli punkty postaci
$$\sum_{v \in A} \frac{1}{|A|} v$$
gdzie $A \subset V$. Punkty te nazywamy barycentrami ścian $\widehat{\Delta^V}$.

- n-sympleksy $(\widehat{\Delta^V})'$ to otoczki wypukłe zbiorów $A = \{w_0, ..., w_n\}$ wierzchołków $(\widehat{\Delta^V})'$ o tej własności, że dla każdych $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, jeśli
$$w_i = \sum_{v \in V} t_v v$$
$$w_j = \sum_{v \in V} s_v v$$
to istnieje $v \in V$ taki, że $t_v \neq 0 \neq s_v$.

Zadanie: Sprawdzić, czy rzeczywiście da się rozszerczyć tę konstrukcję na ogólne kompleksy $\mathcal{K}$.

Zadanie: Sprawdzić, że $\widehat{\mathcal{K}'}$ jest homeomorficzny z $(\widehat{\mathcal{K}})'$, czyli jest też homeomorficzny z $\widehat{\mathcal{K}}$.

2.3 Wielościany

Do uzupełnienia: definicja i przykłady z listy zadań.

Przykłady 2.8.

1. *Permutościan* wymiaru n to wielościan wypukły rozpięty przez zbiór punktów
$$\{(\sigma(1), ..., \sigma(n)) : \sigma \in S_n\}$$

3 Niezmienniki kompleksów symplicjalnych

Definicja 3.1. Niech $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ będą kompleksami symplicjalnymi na zbiorach V_1, V_2 odpowiednio.
Mówimy, że $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ są *izomorficzne* ($\mathcal{K}_1 \simeq \mathcal{K}_2$), gdy istnieje bijekcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że

$$\forall A \in \mathcal{P}(V_1)\, (A \in \mathcal{K}_1 \iff f[A] \in \mathcal{K}_2)$$

Ta bijekcja zadaje *izomorfizm* $F : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ przez

$$F(A) = f[A]$$

Izomorfizm kompleksów symplicjalnych możemy zdefiniować w inny sposób. Odwzorowanie $F : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ nazywamy *odwzorowaniem symplicjalnym*, gdy $F(\sigma) \in \mathcal{K}_2$ dla każdego $\sigma \in \mathcal{K}_1$. W szczególności obrazami wierzchołków są wierzchołki. Odwzorowanie symplicjalne F nazywamy izomorfizmem, gdy jest ono bijekcją.

Zadanie: Sprawdzić, że odwzorowanie odwrotne do symplicjalnego jest symplicjalne.

Powyższa definicja jest oczywista i wystarczy nam do zdefiniowania niezmienników kompleksów symplicjalnych. W przyszłości będziemy jednak chcieli rozszerzyć tę definicję, aby umożliwić istnienie pewnej odpowiedniości między odwzorowaniami symplicjalnymi kompleksów symplicjalnych, a odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni topologicznych.

Definicja 3.2. $I(\cdot)$ nazywamy *niezmiennikiem kompleksów*, gdy dla dowolnych kompleksów symplicjalnych $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ mamy

$$\mathcal{K}_1 \simeq \mathcal{K}_2 \implies I(\mathcal{K}_1) = I(\mathcal{K}_2)$$

Fakt 3.3. *(**Zadanie**) Każde dwa n-sympleksy są izomorficzne.*

Wniosek 3.4. *Jeśli $I(\cdot)$ jest niezmiennikiem kompleksów, to dla każdego n istnieje wartość x_n taka, że dla każdego n-sympleksu Δ^n mamy $I(\Delta^n) = x_n$.*

Fakt 3.5. *(Zadanie) Niech $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ będą podkompleksami kompleksu $\mathcal{K}$. Wtedy $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ też są podkompleksami $\mathcal{K}$.*

Definicja 3.6. Mówimy, że niezmiennik kompleksów $I(\cdot)$ jest *addytywny*, gdy dla każdego kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ i dla każdych podkompleksów $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2 < \mathcal{K}$ jeśli $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, to

$$I(\mathcal{K}) = I(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = I(\mathcal{K}_1) + I(\mathcal{K}_2) - I(K_1 \cap \mathcal{K}_2)$$

Przykłady 3.7.

1. (**Zadanie**) Liczba n-sympleksów w kompleksie $\mathcal{K}$ oznaczana przez $f_n(\mathcal{K})$ jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów. Dla każdego kompleksu $\mathcal{K}$ definiujemy jego f-wektor $f(\mathcal{K}) = (f_0(\mathcal{K}), f_1(\mathcal{K}), ..., f_{\dim(\mathcal{K})}(\mathcal{K}), 0, 0, ...)$.

2. (**Zadanie**) Kombinacja liniowa addytywnych niezmienników kompleksów jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.

Twierdzenie 3.8. *Każdy addytywny niezmiennik kompleksów $I(\cdot)$ jest kombinacją liniową niezmienników $f_n(\cdot)$, czyli istnieje ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$I(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(\cdot)$$

Dowód. Niech $I(\cdot)$ będzie addytywnym niezmiennikiem kompleksów. Niech $\mathcal{K}$ będzie kompleksem symplicjalnym nad zbiorem wierzchołków V. Najpierw pokażemy indukcyjnie, że $I(\mathcal{K})$ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje wartości na sympleksach. Indukcję przeprowadzimy po złożoności $\mathcal{K}$. Kompleks $\mathcal{K}_1$ jest mniej złożony od $\mathcal{K}$, gdy jest jego właściwym podkompleksem.

- $\mathcal{K}$ – sympleks, OK.

- $\mathcal{K}$ nie jest sympleksem. Niech $\Delta \in \mathcal{P}(V)$ będzie sympleksem nienależącym do $\mathcal{K}$ o najmniejszym wymiarze. Niech $\Delta = \{v_0, ..., v_k\} \subset V$. Oznaczmy przez $\mathrm{St}(v_0)$ gwiazdę wierzchołka v_0 w $\mathcal{K}$. Mamy dwa przypadki

  1. $k = 1$, wtedy $\{v_1\} \notin \mathrm{St}(v_0)$, bo $\Delta = \{v_0, v_1\} \notin \mathcal{K}$.
  2. $k > 1$, wtedy sympleks $\Delta_0 = \{v_1, ..., v_k\}$ należy do $\mathcal{K}$, bo $\dim(\Delta_0) < \dim(\Delta)$.

  Dla każdego z przypadków niech $\mathcal{K}_0$ będzie największym podkompleksem $\mathcal{K}$ o wierzchołkach $V \setminus \{v_0\}$. Niech $\mathcal{K}_1$ będzie podkompleksem kompleksu $\mathcal{K}$, który jest komponentą spójności $\mathcal{K}_0$ (po przejściu do realizacji geometrycznych) zawierającą sympleks Δ_0 (dla $k = 1$ mamy $\Delta_0 = v_1$). Wtedy niech $\mathcal{K}_2$ będzie sumą $\mathrm{St}(v_0)$ i pozostałych komponent spójności $\mathcal{K}_0$. Mamy wtedy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ oraz $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$. Z addytywności $I(\cdot)$ mamy

  $$I(\mathcal{K}) = I(\mathcal{K}_1) + I(\mathcal{K}_2) - I(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$$

  Kompleksy $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ oraz $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ są mniej złożone niż $\mathcal{K}$, czyli z kroku indukcyjnego mamy, że $I(\mathcal{K}_1)$, $I(\mathcal{K}_2)$, $I(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$ zależą od wartości na sympleksach, a więc i wartość $I(\mathcal{K})$ zależy od wartości na sympleksach.

- Korzystając z podobnego rozumowania możemy pokazać, że $\mathcal{K}$ można rozbić na sumę sympleksów
$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$$
taką, że dla każdych $i \neq j$ z $\{1, ..., k\}$ mamy $\sigma_i \nsubseteq \sigma_i \cap \sigma_j$, bo w indukcji mamy $\mathcal{K}_1 \nsubseteq \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$ oraz $\mathcal{K}_2 \nsubseteq \mathcal{K}_1 \cap \mathrm{St}(v_0)$, co wynika z $\Delta_0 \notin \mathrm{St}(v_0)$ oraz $\{v_0\} \notin \mathcal{K}_1$. Zauważmy, że suma ta jest wyznaczona jednoznacznie, co wynika z tego, że $f_n(\cdot)$ są niezmiennikami kompleksów. Rzeczywiście niech $\dim(\mathcal{K}) = N$. Liczba N-sympleksów w tak zdefiniowanej sumie musi być równa $f_N(\mathcal{K})$. Wtedy liczba $(N-1)$-sympleksów w tej sumie musi być równa $f_{N-1}(\mathcal{K}) - f_{N-1}(\bar{\mathcal{K}})$, gdzie $\bar{\mathcal{K}}$ jest najmniejszym podkompleksem $\mathcal{K}$ zawierającym wszystkie $(N-1)$-sympleksy z $\mathcal{K}$, itd.
Jednoznaczność wynika też z tego, że f-wektory sympleksów tworzą bazę przestrzeni liniowej ciągów o skończenie wielu niezerowych wyrazach.

□

3.1 Charakterystyka Eulera - pierwsza odsłona

Definicja 3.9. Charakterystyką Eulera nazywamy addytywny niezmiennik kompleksów symplicjalnych przyjmujący wartość 1 na każdym sympleksie. Oznaczamy ją przez $\chi(\cdot)$.

Twierdzenie 3.10. *Charakterystyka Eulera jest jedynym addytywnym niezmiennikiem kompleksów przyjmującym wartość 1 na każdym sympleksie.*

Twierdzenie 3.11.
$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{dim(\mathcal{K})} (-1)^n f_n(\mathcal{K}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} (-1)^{dim(\sigma)}$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\bar{\chi}(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\dim(\mathcal{K})} (-1)^n f_n(\mathcal{K})$ jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów przyjmującym wartość 1 na każdym sympleksie. Równość $\bar{\chi} = \chi$ wyniknie z poprzedniego twierdzenia.

1. $\bar{\chi}$ jest kombinacją liniową addytywnych niezmienników kompleksów, zatem z przykładu 3.7 podpunkt 2. mamy, że sam jest addytywnym niezmiennikiem kompleksów.

2. Dla każdych $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ oraz dla każdego n-sympleksu Δ^n mamy
$$f_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1}$$

Zatem

$$\bar{\chi}(\Delta^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(\Delta^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n+1}{i+1} = 1$$

□

Twierdzenie 3.12. *Charakterystyka Eulera jest jedynym z dokładnością do mnożenia przez stałą addytywnym niezmiennikiem kompleksów symplicjalnych niezmienniczym na podrozbicia (barycentryczne).*

Dowód. Zaczniemy od pomocniczego faktu

Fakt 3.13. *Charakterystyka Eulera stożka jest równa 1.*

Dowód faktu. Niech $C_{v_0}(\mathcal{K})$ będzie stożkiem nad kompleksem $\mathcal{K} = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o wierzchołku w v_0, czyli $C_{v_0}(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{\{v_0\}, \sigma_1 \cup \{v_0\}, ..., \sigma_n \cup \{v_0\}\}$. Obliczymy $\chi(C_{v_0}(\mathcal{K}))$ korzystając z postaci z twierdzenia 3.11:

$$\chi(C_{v_0}(\mathcal{K})) = \sum_{\sigma \in C_{v_0}(\mathcal{K})} (-1)^{\dim(\sigma)} = (-1)^{\dim(v_0)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} ((-1)^{\dim(\sigma)} + (-1)^{\dim(\sigma \cup \{v_0\})}) = 1$$

□

Możemy teraz łatwo udowodnić część twierdzenia mówiącą, że charakterystyka Eulera jest niezmiennicza na podrozbicia barycentryczne korzystając z powyższego faktu i następującego indukcyjnego sposobu konstruowania podrozbicia barycentrycznego kompleksu. Indukcja po k-szkieletach.

- W pierwszym kroku mamy 0-szkielet: zbiór wierzchołków V kompleksu $\mathcal{K}$.
- Mając podrozbicie barycentryczne $\mathcal{K}'(k)$ k-szkieletu rozbijamy $(k+1)$-szkielet w następujący sposób: dla każdego $(k+1)$-sympleksu σ w $\mathcal{K}$ dodajemy nowy wierzchołek v_σ, a następnie do podrozbicia k-szkieletu dołączamy stożek nad brzegiem σ o wierzchołku w v_σ, czyli rozbicie $k+1$-szkieletu to

$$\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{K} \\ \dim(\sigma) = k+1}} C_{v_\sigma}(\mathcal{K}'(k))$$

Zrobimy to również przez indukcję, po wymiarze kompleksu:

- Podrozbicie barycentryczne kompleksu 0-wymiarowego jest jemu równe, zatem równe są ich charakterystyki Eulera

- Rozważmy teraz $(k+1)$-wymiarowy kompleks $\mathcal{K}$. Oznaczmy przez $\mathcal{K}(k+1)$ najmniejszy podkompleks kompleksu $\mathcal{K}$ zawierający zbiór $\{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = k+1\}$. Wtedy kompleks $\mathcal{K}$ możemy rozbić na sumę

  $$\mathcal{K} = \mathcal{K}_k \cup \mathcal{K}(k+1)$$

  Mamy

  $$\mathcal{K}_k \cap \mathcal{K}(k+1) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma$$

  Zatem $\chi(\mathcal{K}) = \chi(\mathcal{K}_k) + \chi(\mathcal{K}(k+1)) - \chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma)$ Z założenia indukcyjnego mamy

  $$\chi(\mathcal{K}_k) = \chi((\mathcal{K}_k)')$$

  oraz

  $$\chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma) = \chi((\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} \partial\sigma)') = \chi(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}(k+1)} (\partial\sigma)')$$

  a z faktu:

  $$\chi(\mathcal{K}(k+1)) = \chi(\bigcup\{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = k+1\}) = \chi(\bigcup\{C_{v_\sigma}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K},\ \dim(\sigma) = k+1\}$$

$\square$