Charakterystyka Eulera

Zadanie domowe

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. Opisz grupę automorfizmów triangulacji $\mathbb{R}P^2$ o najmniejszej liczbie wierzchołków.

usunąć kolokwializmy, pokazać, że jądro $\mathrm{Aut}(D) \to S_5 = \mathbb{Z}_2$, na początku uzasadnić $2E = 3T$, ładniej pokazać, że sześciany są trzymane przez automorfizmy

Ile wierzchołków?

Zacznijmy od obserwacji, że każdy m-sympleks σ^m zawiera dokładnie $\binom{m+1}{n+1}$ n-sympleksów. W takim razie, jeśli K jest kompleksem symplicjalnym, a $f_m(K)$ oznacza liczbę m-sympleksów w K, to wówczas

$$\deg_m(n) \cdot f_n(K) = \frac{m+1}{n+1} f_m(K),$$

gdzie $\deg_m(n)$ mówi do ilu m-sympleksów może należeć n-sympleks w kompleksie K. Jeśli rozważamy K będące triangulacją 2-rozmaitości oraz $m = 2$, $n = 1$, to wtedy $\deg_2(1) = 2$, tzn. $2f_1(K) = 3f_2(K)$. Oznacza to, że na płaszczyźnie krawędź należy do 2 trójkątów, a każdy trójkąt ma 3 krawędzie.

Wiemy, że jeśli X ma triangulację o V wierzchołkach, E krawędziach i T trójkątach, to

$$\chi(X) = V - E + T.$$

Krawędzie to 1-sympleksy, a trójkąty to 2-sympleksy. Mamy więc $2E = 2f_1(K) = 3f_2(K) = 3T$, co po podstawieniu daje

$$\chi(X) = V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E.$$

Ilość krawędzi szacujemy od góry przez ilość krawędzi w grafie pełnym: $E \leq \binom{V}{2}$ czyli

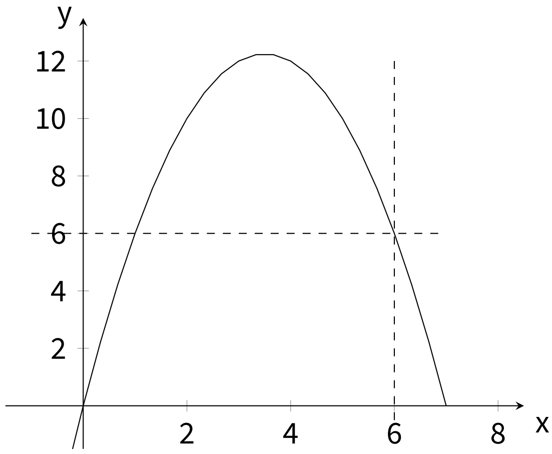
$$V = \chi(X) + \frac{1}{3}E \leq \chi(X) + \frac{V(V-1)}{6}$$

dla $\mathbb{R}P^2$ dostajemy więc ograniczenie

$$V \leq 1 + \frac{V(V-1)}{6}$$

$$6 \geq 6V - V^2 + V = V(7 - V)$$

Powyższa nierówność dla $V = 6$ staje się równością. Tak samo dla $V = 1$ mamy równość, ale z oczywistego powodu nie ma jednowierzchołkowej triangulacji na $\mathbb{R}P^2$. Pozostałe liczby naturalne z przedziału $(0, 7)$ nie mają szansy spełniać powyższe równanie (widać na obrazku)



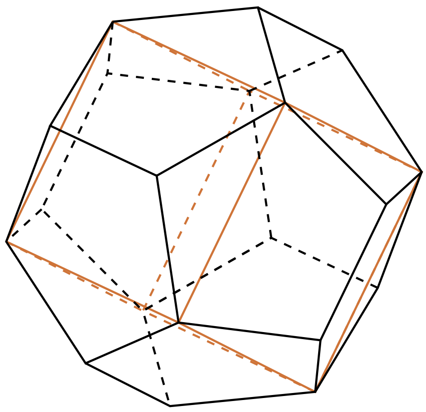
Z listy 1 wiemy, że 6 wierzchołkowa triangulacja $\mathbb{R}P^2$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu, czyli nie musimy się martwić którą triangulacje opisujemy.

Plan działania

Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$ to S^2 wydzielona przez antypodyczne działanie $\mathbb{Z}_2$. W takim razie, 6 wierzchołkowa triangulacja na $\mathbb{R}P^2$ przychodzi od triangulacji na S^2. Dwudziestościan ma 12 wierzchołków i 20 ścian i jest to interesująca nas triangulacja sfery. Łatwiejsze jest jednak badanie grupy automorfizmów bryły dualnej do dwudziestościanu - dwunastościanu o 12 ścianach i 20 wierzchołkach.

narysować na sferze z osiami symetrii

Z dodecahedronu możemy dostać icosahedron - wystarczy postawić wierzchołek na każdej ścianie i połączyć odpowiednio wierzchołkami. W ten sam sposób można z icosahedronu wrócić do dodecahedronu. Stąd grupy automorfizmów obu tych brył będą równe i wystarczy popatrzeć na dodecahedron D:



Uzasadnimy teraz to, co prawi Wikipedia, mianowicie, że $\mathrm{Aut}(D) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

Czy zgadza się rząd?

Niech $v \in D$ będzie wierzchołkiem dodecahedronu (odpowiada ścianie icosahedronu).

- $|\mathrm{Obr}(v)| = 20$, bo automorfizm może postać wierzchołek na dowolny inny spośród 20 które D posiada.
- $|\mathrm{Stab}(v)| = 3! = 6$, gdyż są to permutacje 3 sąsiadów tego wierzchołka przy trzymaniu v w miejscu.

W takim razie dostajemy

$$|\mathrm{Aut}(D)| = |\mathrm{Orb}(v)| \cdot |\mathrm{Stab}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 = |A_5 \times \mathbb{Z}_2|.$$

Pozbycie się $\mathbb{Z}_2$

Wśród automorfizmów dodecahedronu D mamy dwa "rodzaje" odwzorowań

- rotacje i symetrie, które zachowują ruch wskazówek zegara przy numerowaniu sąsiadów dowolnego wierzchołka,
- odwzorowanie antypodyczne tudzież symetria względem punktu w samym środku D, która

przewraca tę kolejność do góry nogami.

Ten drugi rodzaj odwzorowania będzie odpowiadać za czynnik $\mathbb{Z}_2$ w Aut(D). Wystarczy więc zająć się samą grupą symetrii i rotacji i pokazać, że to A_5.

Symetrie i obroty

Sztuczką na pokazanie, że symetrie D to A_5 jest zauważenie 5 sześcianów w środku D. Sześciany możemy narysować idąc krokami:

- weź krawędź w D
- połącz wszystkie sąsiady tej krawędzi w ścianę
- weź krawędź po przeciwnej stronie D
- połącz jej wszystkie sąsiady w ścianę
- połącz te dwie ściany w sześcian.

Z tej metody wytwarzania sześcianów można od razu wywnioskować, że automorfizm przeprowadza sześciany na sześciany, ponieważ sąsiedztwo wierzchołków musi być zachowane, a to ono było podstawą wyciskania sześcianów z D.

Ponumerujmy sześciany od 1 do 5 - możemy teraz je permutować. Najbardziej leniwym sposobem na zauważenie, że grupa uzyskana przez porządne permutacje tych sześcianów to A_5 jest podzielenie $|\mathrm{Aut}(D)| = 120$ przez 2, które oznacza, że wyrzucamy antypodyzm (element rzędu 2). Zostawia to nam 60 automorfizmów, które będą permutować te sześciany i które powinniśmy móc włożyć w S_5. Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) podgrupa S_5 o 60 elementach jest A_5 tak jak chcieliśmy.

Uzasadniliśmy, że $A_5 \times \mathbb{Z}_2 = \mathrm{Aut}(\textit{dodecahedron}) = \mathrm{Aut}(\textit{icosahedron})$ bo tak jak już wspomniałam, bryły te są dualne. Po wydzieleniu S^2 z triangulacją będącą icosahedronem przez działanie antypodyczne dostajemy grupę automorfizmów triangulacji $\Delta\,\mathbb{R}P^2$ o 6 wierzchołkach:

$$\mathrm{Aut}(\Delta\,\mathbb{R}P^2) = A_5 \times \mathbb{Z}_2 \,/\, \mathbb{Z}_2 = A_5$$

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Definiujemy przestrzeń konfiguracji $\mathrm{Conf}_n(X)$ jako przestrzeń położeń n różnych punktów w X (zakładamy, że dwa punkty nie mogą leżeć w tym samym miejscu. Definiujemy też przestrzeń konfiguracji $\mathrm{conf}_n(X)$ jako przestrzeń położeń n nierozróżnialnych punktów w X, czyli

$$\mathrm{Conf}_n(X) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n \ : \ x_i \neq x_j,\ \text{gdy } i \neq j\}$$

$$\mathrm{conf}_n(X) = \frac{\mathrm{Conf}_n(X)}{S_n}$$

gdzie S_n działa na $\mathrm{Conf}_n(X)$ przez permutacje współrzędnych.

Oblicz charakterystykę Eulera $\mathrm{conf}_n(\mathbf{Y})$, gdzie **Y** to drzewo o 4 wierzchołkach, z czego 3 to liście, dla $n = 2, 3, 4$.

. . . .

n = 2

Zauważmy, że w każdym punkcie $\mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y})$ leży niemalże identyczna kopia **Y** z tym, że brakuje w niej jednego punktu -> tego, który miałby obie współrzędne równe. Korzystając z addytywnej definicji charakterystyki Eulera, graf **Y** ma charakterystykę $\chi(\mathbf{Y}) = 1$. W takim razie, jeśli wyjmiemy z niego punkt to dostajemy graf z $\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 - 1 = 0$.

Formuła Riemanna-Hurwitza mówi, że jeśli mamy funkcję $f : \mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y}) \to \mathbf{Y}$, to wtedy

$$\chi(\mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \int_{\mathbf{Y}} \chi(f^{-1}(X))d\chi(X)$$

W tym konkretnym przypadku od razu w oczy rzuca się funkcja

$$f(x, y) = x,$$

w której przeciwobrazem dowolnego punktu jest $\mathbf{Y}$ bez punktu. W takim razie

$$\chi(\mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \chi(\mathbf{Y})\chi(\mathbf{Y} - \bullet) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Zauważmy, że teraz możemy napisać funkcję $g : \mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y}) \to \mathrm{conf}_n(\mathbf{Y})$ która "skleja" dwa punkty będące swoimi permutacjami. W takim razie nad dowolnym punktem w $\mathrm{conf}_n(\mathbf{Y})$ wiszą dwa punkty w $\mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y})$. W takim razie

$$2 \cdot \chi(\mathrm{Conf}_n(\mathbf{Y})) = \chi(\mathrm{conf}_n(\mathbf{Y}))$$

i $\chi(\mathrm{conf}_n(\mathbf{Y})) = 0$.

n = 3 . . . .

Rozważmy teraz funkcję

$$f : \mathrm{Conf}_3(\mathbf{Y}) \to \mathrm{Conf}_2(\mathbf{Y})$$

taką, że

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

Teraz nad każdym punktem $\mathrm{Conf}_2(\mathbf{Y})$ wisi kopia $\mathbf{Y}$ bez dwóch punktów. Charakterystyka $\mathbf{Y}$ bez dwóch punktów to -2, mamy więc

$$\chi(\mathrm{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \int_{\mathrm{Conf}_2(\mathbf{Y})} \chi(f^{-1}(X))d\chi(X) = \chi(\mathrm{Conf}_2(\mathbf{Y})) \cdot \chi(\mathbf{Y} - \bullet - \bullet) = -2 \cdot 0 = 0.$$

Oczywiste jest również odwzorowanie $g : \mathrm{Conf}_3(\mathbf{Y}) \to \mathrm{conf}_3(\mathbf{Y})$, które skleja 6 punktów mających te same współrzędne w jeden punkt. W takim razie

$$\chi(\mathrm{conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4}\chi(\mathrm{Conf}_3(\mathbf{Y})) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

n = 4 . . . .

Analogicznie jak wcześniej, funkcja $f : \mathrm{Conf}_4(\mathbf{Y}) \to \mathrm{Conf}_3(\mathbf{Y})$ wraz z całką Riemanna-Hurwitza mówi, że

$$\chi(\mathrm{Conf}_4(\mathbf{Y})) = 0.$$

Ponieważ odwzorowanie $g : \mathrm{Conf}_4(\mathbf{Y}) \to \mathrm{conf}_4(\mathbf{Y})$ jest 4!-krotne, to

$$\chi(\mathrm{conf}_4(\mathbf{Y})) = \frac{0}{4!} = 0.$$

Zadanie 7. Grassmannian $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n)$ ma pewien podział na komórki, który możemy opisać za pomocą szufladek i groszków. Rozważmy n szufladek, w których umieszczać będziemy k groszków, co najwyżej po jednym w danej szufladzie. Takie rozmieszczenie groszków reprezentuje zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{C}^n$. Kolejne l szufladek od lewej reprezentuje podprzestrzeń $\mathbb{C}^n$ rozpiętą przez pierwsze l wektorów bazowych $e_1, e_2, \ldots, e_l$, a liczba groszków leżących w l pierwszych l szufladkach to wymiar przekroju k-wymiarowej podprzestrzeni z tego zbioru z podprzestrzenią rozpiętą przez $e_1, \ldots, e_l$.

(a) Pokaż, że konkretne rozmieszczenie groszków w szufladach reprezentuje przestrzeń k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{C}^n$ izomorficzna z $\mathbb{C}^m$, gdzie m to liczba przesunięć groszków w lewo o jedną szufladkę dopóki to możliwe.

(b) Przestrzeń $\mathbb{C}^m$ z poprzedniego podpunktu to otwarta komórka wspomnianego rozkładu. Komórka odpowiadająca rozmieszczeniu groszków A zawiera się w domknięcu komórki odpowiadającej rozmieszczeniu B, gdy A można otrzymać z B poprzez kolejne przesunięcia groszków w lewo o jedną szufladkę. Domknięcie komórki odpowiadającej rozmieszczeniu A nazywamy (A) rozmaitością Schuberta. Policz charakterystykę Eulera rozmaitości Schuberta. Policz charakterystykę Eulera $Gr_{\mathbb{C}}(k, n)$ zliczając te komórki

. . . .

(a) Zacznijmy od rozmieszczenia groszków tak, że nie możemy już żadnego przesunąć w lewo. To znaczy, że podprzestrzenie które są kodowane przez to ustawienie groszków kroją się niepusta z podprzestrzenią rozpinaną przez pierwszy wektor bazowy e_1, z podprzestrzenią rozpiętą przez dwa pierwsze wektory bazowe e_1, e_2 i tak dalej. W takim razie, typowa podprzestrzeń reprezentowana przez takie ustawienie jest generowana przez wektory

$$\begin{aligned}&e_1\\&a_1^1e_1 + e_2\\&\dots\\&a_1^ke_1 + a_2^ke_2 + \dots + e_k\end{aligned}$$

Interesuje nas przestrzeń rozpinana przez takie wektory, więc w i-tym wektorze możemy usunąć część przychodzącą z $j < i$ wektorami. W ten sposób dostaniemy przestrzeń rozpiętą przez $e_1, e_2, \dots, e_k$. Nie mamy żadnego parametru, więc jest to izomorficzne z punktem, czyli z $\mathbb{C}^0$.

Załóżmy, że mamy k groszków umieszczonych odpowiednio w szufladkach o numerze m_1, $m_2, \dots, m_k$. Dzięki pierwszemu groszkowi możemy do naszej k-wymiarowej podprzestrzeni $\mathbb{C}^n$ wybrać wektor

$$a_1^{m_1}e_1 + a_2^{m_1}e_2 + \dots + e_{m_1}.$$

Kolejny groszek, na $m_2 \neq m_1$ miejscu pozwoli nam dołożyć wektor

$$a_1^{m_2}e_1 + a_2^{m_2}e_2 + \dots + a_{m_1}^{m_2} + \dots + e_{m_2}.$$

Ze współczynników pojawiających się przy kolejnych e_i możemy stworzyć macierz

$$\begin{bmatrix} a_1^{m_1} & a_2^{m_1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_1^{m_2} & a_2^{m_2} & \dots & a_{m_1}^{m_2} & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_1^{m_k} & a_2^{m_k} & \dots & a_{m_1}^{m_k} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

która ma m_k kolumn i k wierszy. Możemy skorzystać z algorytmu eliminacji Gaussa, by dostać w pierwszych k kolumnach kwadratową macierz górnotrójkątną z 1 na przekątnej.

W pierwszym wierszu zostaje nam $(m_1 - 1)$ zmiennych, w drugim wierszu mamy $(m_2 - 2)$ nowych zmiennych i tak dalej. Sumarycznie dostajemy

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i - i)$$

parametrów w takiej macierzy, co jest równe ilości potencjalnych przesunięć groszków: i-ty groszek może przejść przez co najwyżej (m_i – i) szufladek, niekoniecznie za jednym zamachem.

Pokazaliśmy, że jeśli możemy dokonać m przesunięć groszków, to takie ustawienie możemy zapisać jako przestrzeń liniową przy pomocy m parametrów.

(b)