ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 1

Zakładamy, że wszystkie rozpatrywane przestrzenie topologiczne są drogowo spójne.

1. Uzasadnij, że składanie dróg spełnia następujący warunek skreśleń: jeśli $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ oraz $g_0 \simeq g_1$ to $f_0 \simeq f_1$.
2. Pokaż bezpośrednio z definicji, że dla pętli f, g w X zbazowanych w $x_0 \in X$ zachodzi równoważność $f \sim g \Leftrightarrow f \cdot \overline{g} \sim \mathrm{const}_{x_0}$, gdzie const_{x_0} to pętla stała zbazowana w x_0, zaś $\overline{g}$ to pętla odwrotna do g - zadana wzorem $\overline{g}(t) = g(1-t)$.
3. Uzasadnij, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej X następujące trzy warunki są równoważne:
   (a) każde odwzorowanie $S^1 \to X$ jest homotopijne ze stałym;
   (b) każde odwzorowanie $S^1 \to X$ rozszerza się do odwzorowania $D^2 \to X$, gdzie D^2 to 2-wymiarowy dysk, ktrego brzegiem jest nasze S^1;
   (c) $\pi_1(X, x_0) = 0$ dla dowolnego $x_0 \in X$.

   Wywnioskuj stąd, że przestrzeń X jest jednospójna wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie odwzorowania $S^1 \to X$ są homotopijne.
4. Jeśli $\pi_1 X = 0$ (grupa podstawowa jest trywialna) to każde dwie drogi łączące dowolnie wybrane dwa punkty $x_0, x_1 \in X$ są homotopijne.
5. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *ściągalna*, jeśli istnieje odwzorowanie $F : X \times I \to X$ takie, że $F(x, 0) = x$ oraz $F(x, 1) = x_0$ dla dowolnego x oraz pewnego ustalonego x_0. Uzasadnij, że jeśli X jest przestrzenią ściągalną to jest też drogowo spójna, oraz $\pi_1 X = 0$ (innymi słowy, X jest wtedy jednospójna).
6. Uzasadnij, że każdy wypukły podzbiór w R^n jest ściągalny.
7. Niech T będzie skończonym *drzewem*, tzn. spójnym skończonym grafem nie zawierającym zamkniętych cykli krawędzi. Uzasadnij, że $\pi_1 T = 0$.
8. Uzasadnij, że homomorfizm $\varphi_d : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ (związany ze zmianą punktu bazowego) zależy tylko od klasy homotopii drogi d od x_0 do x_1.
9. Niech G będzie *grupą topologiczną*, czyli grupą zaopatrzoną w topologię, dla której odwzorowania $m : G \times G \to G$ oraz $r : G \to G$ określone przez $m(g, h) = g \cdot h$ i $r(g) = g^{-1}$ są ciągłe. Uzasadnij, że $\pi_1(G, e)$ jest grupą przemienną.

Wolną homotopią pomiędzy pętlami f i g w X (zaczepionymi niekoniecznie w tym samym punkcie) nazywamy rodzinę pętli $f_t : t \in I$ w X zależną w sposób ciągły od t (tzn. taką że odwzorowanie $(s, t) \to f_t(s)$ jest ciągłe), taką że $f_0 = f$ i $f_1 = g$, zaś punkt zaczepienia pętli f_t może się zmieniać wraz z t.

10. Jeśli każda pętla w X jest wolno homotopijna z pewną pętlą stałą, to $\pi_1 X = 0$. UWAGA: na ogół, wolno homotopijne pętle zaczepione w tym samym punkcie nie muszą być homotopijne (porównaj następne zadanie).
11. Niech $[S^1, X]$ będzie zbiorem klas wolnej homotopii pętli w X (o dowolnym punkcie zaczepienia). Niech $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ będzie naturalnym odwzorowaniem zadanym przez fakt że każda homotopia pętli jest ich wolną homotopią. Uzasadnij, że
    (a) Φ jest surjekcją;
    (b) $\Phi([f]) = \Phi([g])$ wtedy i tylko wtedy, gdy elementy $[f]$ i $[g]$ są sprzężone w grupie $\pi_1(X, x_0)$ (tzn. istnieje $h \in \pi_1(X, x_0)$ taki, że $[g] = h^{-1}[f]h$).

Dla podprzestrzeni $A \subset X$, **retrakcją** X **na** A nazywamy takie ciągłe odwzorowanie $r : X \to A$ dla którego $r|_A = \mathrm{id}_A$ (tzn. $r(x) = x$ dla każdego $x \in A$).

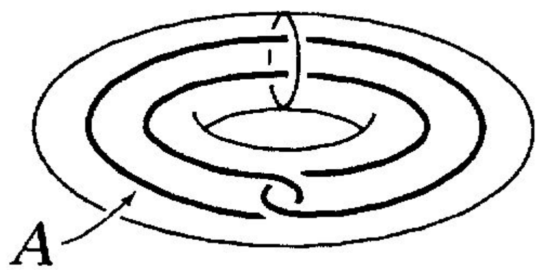
12. Niech $A \subset X$ będzie *retraktem*, tzn. taką podprzestrzenią, dla której istnieje retrakcja $R : X \to A$. Uzasadnij, że dla dowolnego $x_0 \in A$ naturalne odwzorowanie $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ indukowane przez włożenie $A \to X$ jest różnowartościowe.
13. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że podprzestrzeń o nietrywialnej grupie podstawowej nie może być retraktem przestrzeni jednospójnej.

Retrakcja deformacyjna to taka retrakcja $r : X \to A$, dla której istnieje homotopia $r_t : X \to X, t \in I$ (ciągła jako odwzorowanie $X \times I \to X$) taka, że: (1) $r_0 = id_X$, (2) $r_1 = r$, (3) dla każdego $t \in I$ mamy $r_t|A = id_A$.

14. Pokaż, że jeśli $r : X \to A$ jest retrakcją deformacyjną, to $r_* : \pi_1 X \to \pi_1 A$ jest izomorfizmem.
15. Wywnioskuj z poprzedniego zadnia, że gdy $\pi_1(Y, y_0) \neq 0$, to $X \times \{y_0\}$ nie jest retraktem deformacyjnym w produkcie $X \times Y$.
16. Z izomorfizmu $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ wynika, że dwie pętle z podprzestrzeni $X \times \{y_0\}$ oraz $\{x_0\} \times Y$ reprezentują komutujące elementy w grupie podstawowej $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Opisz jawną homotopię pętli ilustrującą ten fakt.
17. Niech A będze drogowo spójnym podzbiorem przestrzeni X zawierającym punkt bazowy x_0. Uzasadnij, że homomorfizm $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ indukowany przez włożenie $i : A \hookrightarrow X$ jest surjekcją wtedy i tylko wtedy gdy każda droga w X o końcach w A jest homotopijna z pewną drogą w A.

ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 2

1. Pokaż, że każdy homomorfizm $\pi_1 S^1 \to \pi_1 S^1$ realizuje się jako indukowany homomorfizm φ_* dla pewnego odwzorowania $\varphi : S^1 \to S^1$.
2. Określmy odwzorowanie $f : S^1 \times I \to S^1 \times I$ wzorem $f(e^{i\theta}, s) = (e^{i(\theta+2\pi s)}, s)$ tak ,że na brzegowych okręgach $S^1 \times \{0\}$ i $S^1 \times \{1\}$ jest ono identycznością. Uzasadnij, że f jest homotopijne z identycznością przez homotopię f_t będącą identycznościa na okręgu $S^1 \times \{0\}$ dla wszystkich t, lecz nie jest homotopijne z identycznością przez homotopię f_t będącą dla każdego t identycznością na obu okręgach brzegowych. Wskazówka: rozważ co f robi ze zbiorem punktów $(1, s) : s \in I$.
3. Pokaż, że nie istnieją retrakcje $r : X \to A$ gdy:
   (a) $X = R^3$ zaś A jest dowolną podprzestrzenią homeomorficzną z S^1;
   (b) $X = S^1 \times D^2$ jest pełnym torusem zaś $A = S^1 \times S^1$ jest jego brzegowym torusem;
   (c) $X = S^1 \times D^2$, zaś A jest okręgiem jak na rysunku poniżej;



   (d) X jest sumą dwóch dysków D^2 połączonych jednym brzegowym punktem, zaś A jest sumą ich brzegowych okręgów.
4. Uzasadnij, że następujące pary przestrzeni nie są homeomorficzne:
   (a) S^2 i D^2; (b) S^2 i S^n dla $n \neq 2$.
5. Niech X będzie przestrzenią otrzymaną z dysku D^2 przez sklejenie dwóch różnych punktów brzegowych.
   (a) Wykaż, że $\pi_1 X = Z$.
   (b) Czy podzbiór $A \subset X$ otrzymany z brzegu dysku D^2 i homeomorficzny z dwoma okręgami sklejonymi jednym punktem jest retraktem X?
6. Czy brzeg wstęgi Möbiusa jest retraktem całej wstęgi?
7. Uzasadnij, że każde otwarte spójne otoczenie U punktu x na płaszczyźnie, po usunięciu tego punktu, ma nietrywialną grupę podstawową.
8. Skorzystaj z podanego na wykładzie lematu pomocniczego do dowodu homotopijnej niezmienniczości grupy podstawowej i udowodnij następujący fakt. Niech $f_t : X \to X$ będzie homotopią, dla której odwzorowania f_0 i f_1 są identycznościami. Wówczas dlka dowolnego $x_0 \in X$ pętla $f_t(x_0)$ reprezentuje element z centrum grupy podstawowej $\pi_1(X, x_0)$.

9. Niech M będzie macierzą rozmiaru 3×3 o wszystkich wyrazach dodatnich. Uzasadnij, że macierz ta ma wektor własny o dodatniej wartości własnej. Wskazówka: rozważ trójkąt $T = \{(x, y, z) : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ oraz odwzorowanie h :

$T \to T$ będące złożeniem odwzorowania liniowego o macierzy m oraz rzutu centralnego względem punktu $(0,0,0)$; zastosuj twierdzenie Brouwera.
Komentarz: jest to fragment tzw. twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

10. Niech A będzie retraktem drogowo spójnej przestrzeni X, i załóżmy że $\pi_1 A$ jest podgrupą normalną w $\pi_1 X$. Uzasadnij, że wówczas $\pi_1 X = \pi_1 A \times [\pi_1 X / \pi_1 A]$.
11. Uzasadnij bezpośrednio, bez korzystania z twierdzenia van Kampena, że jeśli X jest sumą dwóch otwartych jednospójnych podzbiorów, $X = U \cup V$, których przekrój $U \cap V$ jest drogowo spójny, to $\pi_1 X = 0$.
12. Zastosuj poprzednie zadanie do alternatywnego dowodu jednospójności sfer S^n dla $n \geq 2$.
13. Uzasadnij, że dla $n \geq 3$ i dla dowolnego skończonego zbioru P punktów z R^n przestrzeń $R^n \setminus P$ jest jednospójna. Uzasadnij tą samą tezę dla sfery S^n występującej w miejsce przestrzeni R^n.
14. Niech X będzie sumą skończonej rodziny prostych w R^n przechodzących przez $0 \in R^n$. Uzasadnij, że dla $n \geq 4$ mamy $\pi_1(R^n \setminus X) = 0$.

Zadania dotyczące homotopijnej równoważności

Rozwiąż ćwiczenia (exercises) nr 1-6 oraz 9-13 ze stron 18-19 książki A. Hatchera "Algebraic Topology" (z zestawu ćwiczeń na końcu Chapter 0), oraz zadania poniżej.

Dla ciągłego odwzorowania $f : X \to Y$ rozważmy przestrzeń zwaną *cylindrem odwzorowania* f, oznaczoną przez M_f, określoną jako iloraz sumy rozłącznej $(X \times [0,1]) \sqcup Y$ zadany utożsamieniami postaci $(x, 1) \sim f(x) : x \in X$ (z topologią ilorazową). Rozważmy też *stożek odwzorowania* f, oznaczony przez C_f, jako iloraz $C_f := M_f/(X \times \{0\})$, gdzie $X \times \{0\}$ traktujemy jako podzbiór w M_f.

15. Uzasadnij, że przestrzeń Y traktowana w naturalny sposób jako podprzestrzeń w cylindrze M_f (dla $f : X \to Y$) jest jego retraktem deformacyjnym. Dlaczego ten sam argument nie działa dla $Y \subset C_f$?
16. Wykorzystaj fakt, że $\pi_1(S^1) \neq 0$ dla pokazania, że dal odwzorowania $f : X \to Y$ stożek C_f na ogół nie jest homotopijnie równoważny z Y.
17. Uzasadnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością, to odwzorowanie $h : X \to M_f$ zadane przez $h(x) = (x, 0) \in X \times \{0\} \subset M_f$ także jest homotopijną równoważnością.
18. Uzasadnij, że jeśli odwzorowania $f, g : X \to Y$ są homotopijne, to stożki C_f i C_g są homotopijnie równoważne.
19. Uzasadnij bezpośrednio z definicji, że każdy spójny skończony graf X jest homotopijnie równowańy z bukietem $1 - \chi(X)$ okręgów, gdzie $\chi(X)$ to charakterystyka Eulera grafu X. WSKAZÓWKA: na rozgrzewkę uzasadnij najpierw, że graf o kształcie litery θ jest homotopijnie równoważny z bukietem dwóch okręgów.

ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 3. Pomocnicze fakty algebraiczne.

Produkty wolne i prezentacje

1. Pokaż, że produkt wolny $G * H$ nietrywialnych grup G i H ma trywialne centrum, i że zawiera elementy nieskończonego rzędu.
2. Uzasadnij, że
   (a) $\langle S_1|R_1\rangle * \langle S_2|R_2\rangle = \langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \sqcup R_2\rangle$;
   (b) $\langle S_1|R_1\rangle \oplus \langle S_2|R_2\rangle = \langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \sqcup R_2 \cup \{[s_1, s_2] : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}\rangle$.
   Uogólnij te obserwacje na produkt wolny i produkt prosty dowolnej liczby czynników. Wywnioskuj, że grupa Z^n ma prezentację $\langle s_1, \dots, s_n|[s_i, s_j] : 1 \leq i < j \leq n\rangle$.
3. Wykaż, że grupa cykliczna Z_n ma prezentację $\langle a|a^n\rangle$, zaś grupa permutacji S_3 ma prezentację $\langle a, b|a^2, b^2, (ab)^3\rangle$.
4. Niech $G = \langle S|R\rangle$ i niech ρ będzie elementem grupy G wyrażonym za pomocą generatorów z S, i niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy G generowanym przez element ρ. Uzasadnij, że $G/N \cong \langle S|R \cup \{\rho\}\rangle$.

Komutant i abelianizacja

Przypomnijmy, że dla dwóch elementów a, b grupy G ich *komutatorem* nazywamy element $aba^{-1}b^{-1}$ (ozn. $[a, b]$). *Komutant* grupy G to podgrupa generowana przez wszystkie komutatory, czyli podgrupa $[G, G] = \{[a, b] : a, b \in G\}$.

5. Pokaż, że komutant dowolnej grupy jest jej dzielnikiem normalnym. Wskazówka: najpierw pokaż że sprzeżenie dowolnego komutatora jest komutatorem (innych elementów).
6. Uzasadnij, że grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest abelowa. Ogólniej, jeśli $[G, G] < N \lhd G$ to G/N jest abelowa.

Grupę $G/[G, G]$ nazywamy *abelianizacją* grupy G, i oznaczamy też przez G^{ab} lub $\mathrm{Ab}(G)$.

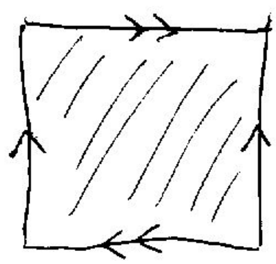
7. Wykaż, że abelianizacja grupy wolnej F_S jest izomorficzna z grupą Z^S, czyli sumą prostą $|S|$ kopii grupy Z (lub jeszcze inaczej, grupą wszystkich funkcji $S \to Z$ o skończonym nośniku, z mnożeniem punktowym). Wskazówka: rozważ naturalny homomorfizm $F_S \to Z^S$ i udowodnij, że jego jądro pokrywa się z komutantem grupy F_S.
8. Uzasadnij, że $\mathrm{Ab}(G * H) = \mathrm{Ab}(G) \times \mathrm{Ab}(H)$, oraz ogólniej $\mathrm{Ab}(*_\alpha G_\alpha) = \oplus_\alpha \mathrm{Ab}(G_\alpha)$.
9. Uzasadnij, że abelianizacja grupy o prezentacji $\langle S|R\rangle$ to grupa o prezentacji

$$\langle S|R \cup \{[s, s'] : s, s' \in S\}\rangle.$$

ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 4. Zastosowania Twierdzenia van Kampena i nie tylko...

1. Niech X będzie spójnym skończonym grafem.
   (a) Uzasadnij, że $\pi_1 X$ jest grupą wolną F_n, dla pewnego n. Wskazówka: rozważ dowolne drzewo maksymalne T w grafie X, oraz przedstawienie X jako sumy T oraz cykli C w X zawierających poszczeglne krawędzie X znajdujące się poza T (a dokładniej małe otwarte otoczenia T oraz cykli C w X); pomocne może być zastosowanie indukcji względem liczby krawędzi poza drzewem maksymalnym.
   (b) Pokaż, że jeśli X jest zawarty w płaszczyźnie, to n jest równe liczbie ograniczonych komponent dopełnienia $R^2 \setminus X$.
   (c) Udowodnij, że w ogólnym przypadku liczba n zależy tylko od charakterystyki Eulera grafu, i znajdź tą zależność.
2. Niech X będzie przestrzenią otrzymaną ze sfery S^2 przez utożsamienie bieguna północnego N z biegunem południowym S. Wyznacz $\pi_1 X$ albo stosując twierdzenie van Kampena, albo przedstawiając X jako 2-wymiarowy kompleks komórkowy, np. kompleks prezentacyjny dla pewnej prezentacji.
3. Niech Y będzie przestrzenią otrzymaną z drogowo spójnej przestrzeni X przez doklejenie n-wymiarowej komórki dla pewnego $n \geq 3$. Uzasadnij, że włożenie $X \to Y$ indukuje izomorfizm grup podstawowych (w szczególności, grupa podstawowa się nie zmienia). Zrób to samo dla operacji doklejenia naraz dowolnej rodziny n-wymiarowych komórek.

Butelka Kleina K to powierzchnia, którą otrzymuje się przez sklejenie boków kwadratu zgodnie z rysunkiem poniżej.



4. Uzasadnij, że grupa podstawowa butelki Kleina ma prezentację $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$.
5. Niech $G = \langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ będzie grupą podstawową butelki Kleina.
   (a) Stosując homomorfizm $G \to Z$ wyznaczony przez przyporządkowania $a \to 1$ oraz $b \to 0$ wykaż, że element wyznaczony przez a ma rząd nieskończony w G.
   (b) Wykaż, że podgrupy $\langle a \rangle$ i $\langle b \rangle$ w G generowane przez elementy a i b są obie normalne.
   (c) Sprawdź, że przyporządkowanie elementowi a funkcji rzeczywistej $f(x) = -x$, zaś elementowi b funkcji $g(x) = x + 1$ przedłuża się do homomorfizmu grupy G w grupę bijekcji zbioru liczb rzeczywistych.
   (d) Wykorzystaj homomorfizm z punktu (c) do pokazania, że element b w grupie G ma nieskończony rząd.
   (e) Uzasadnij, że okrąg odpowiadający pętli b w butelce Kleina K nie jest retraktem K. Skorzystaj z zadania 2 oraz poprzednich punktów tego zadania.

(f) Wykaż, że grupa G jest nieabelowa.

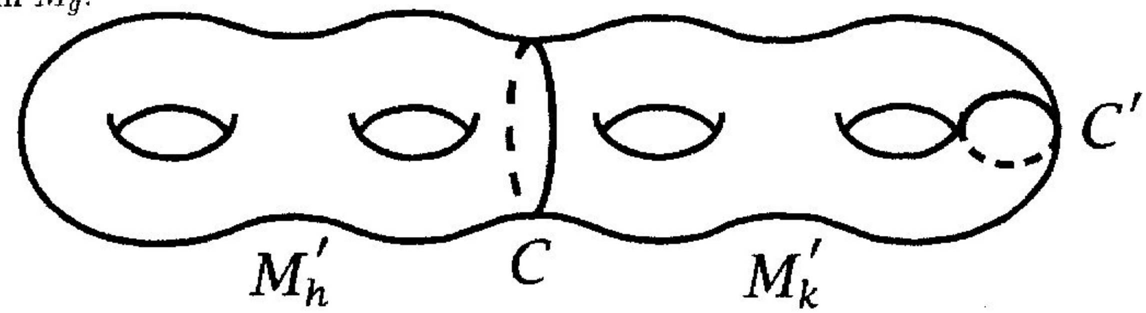
6. Uzasadnij algebraicznie, że grupy zadane prezentacjami $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ oraz $\langle c, d | c^2d^2 \rangle$ są izomorficzne. Uzasadnij, że druga z tych grup jest grupą podstawową przestrzeni Y otrzymanej przez sklejenie dwóch wstęg Möbiusa za pomocą homeomorfizmu ich brzegów. Pokaż, że przestrzeń Y jest homeomorficzna z butelką Kleina, i wywnioskuj powyższą izomorficzność grup topologicznie.

7. (a) Niech X będzie przestrzenią otrzymaną z torusa T przez usunięcie wnętrza małego dysku $D \subset T$. Uzasadnij, że nie istnieje retrakcja X na brzegową krzywą zamkniętą $\partial X = \partial D$.

   (b) Zrób to samo dla orientowalnej powierzchni M_g dowolnego genusu $g > 1$.

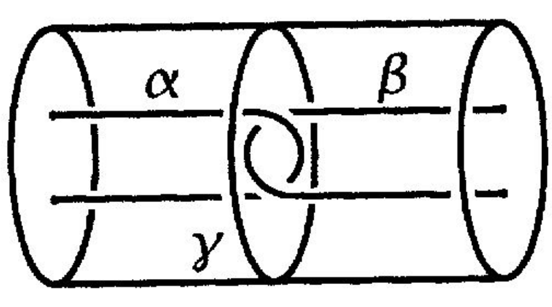
8. (a) Niech C będzie krzywą zamkniętą rozdzielającą powierzchnię M_g na dwie komponenty homeomorficzne z powierzchniami M_h i M_k z usuniętymi wnętrzami dysków, gdzie $h \geq 1$ i $k \geq 1$ (patrz rysunek poniżej). Uzasadnij, że nie istnieje retrakcja M_g na C.

   (b) Niech C' będzie zamkniętą krzywą nierozspajającą powierzchni M_g obejmującą jedną z rączek tej powierzchni, jak na rysunku poniżej. Pokaż, że C' jest retraktem M_g.



9. Uzasadnij, że z dysku z dwoma dziurami, sklejając ze sobą wszystkie trzy komponenty brzegu przez homeomorfizmy, można otrzymać dwie niehomeomorficzne przestrzenie. Użyj abelianizacji grup podstawowych do rozróżnienia tych przestrzeni.

10. Rozważ łuki α i β w cylindrze $D^2 \times I$, jak na rysunku poniżej. Krzywa γ jest oczywiście ściągalna do punktu w tym cylindrze, ale intuicja podpowiada, że nie jest ściągalna w dopełnieniu sumy łuków $\alpha \cup \beta$. Udowodnij ten fakt.



ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 5. Nakrycia, podniesienia i podgrupy odpowiadające nakryciom

1. Dla nakrycia $p: Y \to X$ oraz dla podprzestrzeni $A \subset X$, niech $B = p^{-1}(A)$. Pokaż, że obcięcie $p: B \to A$ jest nakryciem.
2. Niech $p_1 : Y_1 \to X_1$ i $p_2 : Y_2 \to X_2$ będą nakryciami. Uzasadnij, że odwzorowanie produktowe $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ jest też nakryciem. Jaka jest krotność tego nakrycia (gdy X_1 i X_2 są spójne)?
3. Niech X będzie przestrzenią lokalnie spójną (tzn. w każdym otwartym otoczeniu dowolnego punktu z X zawiera się spójne otwarte otoczenie tego punktu). Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem. Uzasadnij, że obcięcie p do dowolnej komponenty spójności w Y jest też nakryciem X.
4. Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem, którego wszystkie włókna $p^{-1}(x)$, $x \in X$, są skończone. Uzasadnij, że jeśli X jest zwarta, to Y też jest zwarta.
5. Rozważmy podprzestrzeń $\Sigma \subset R^2$ (z topologią indukowaną), zwaną *warszawskim okręgiem*, określoną we współrzędnych biegunowych (r, θ) jako

$$\Sigma := \{(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi^2}{\theta}, \theta) : \theta \in (0, 2\pi]\} \cup \{(r, 0) : r \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\}.$$

   Odwzorowanie $(r, \theta) \to e^{i\theta}$ obcięte do Σ daje ciągłe odwzorowanie $f : \Sigma \to S^1$. Uzasadnij, że
   (a) Σ nie jest lokalnie drogowo spójna;
   (b) f nie podnosi się do nakrycia $R \to S^1$.
   Korzystając z tego przykładu uzasadnij, że założenie lokalnej drogowej spójności jest istotne w kryterium istnienia podniesienia.
6. Na przykładzie warszawskiego okręgu pokaż, że spójne nakrycie drogowo spójnej przestrzeni nie musi być drogowo spójne.
7. Uzasadnij, że spójna i lokalnie drogowo spójna przestrzeń jest drogowo spójna. Wywnioskuj, że każde spójne nakrycie przestrzeni lokalnie drogowo spójnej jest drogowo spójne.
8. Rozważmy odwzorowanie $p : C \setminus \{0\} \to C \setminus \{0\}$ (gdzie C to zbiór liczb zespolonych) zadane przez $p(z) = z^2$.
   (1) Uzasadnij, że p jest nakryciem.
   (2) Wybór podniesienia $x \in p^{-1}(u)$ liczby u względem nakrycia p to wybór jednego z jej pierwiastków kwadratowych (czyli spierwiastkowanie tej liczby). Niech X będzie spójną i lokalnie drogowo spójną przestrzenią, i niech $f : X \to C \setminus \{0\}$ będzie ciągłą funkcją zespoloną. Podaj warunek (w terminach topologio-algebraicznych) na to, by funkcja f dała się w sposób ciągły spierwiastkować.
9. Niech G będzie spójną i lokalnie drogowo spójną grupą topologiczną. Niech $p : \widetilde{G} \to G$ będzie dowolnym spójnym nakryciem G, i niech $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$.
   (1) Niech $m : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ będzie zadane przez $m(x, y) = p(x) \cdot p(y)$. Uzasadnij, że $m_*[\pi_1(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))]$ zawiera się w $p_*[\pi_1(\widetilde{G}, \tilde{e})]$.
   (2) Wywnioskuj, że na nakryciu $\widetilde{G}$ istnieje (jednoznaczna) struktura grupy topologicznej, dla której $\tilde{e}$ jest jednością, i dla której p jest grupowym homomorfizmem.

10. Niech X będzie przestrzenią spójną i lokalnie drogowo spójną, i niech $\widetilde{X}$ będzie jednospójnym nakryciem X.
    (1) Uzasadnij, że $\widetilde{X}$ jest jednoznaczna z dokładnością do izomorfizmu zbazowanych nakryć.
    (2) Uzasadnij, że każde spójne nakrycie X jest nakrywane przez $\widetilde{X}$ (stąd nazwa *nakrycie uniwersalne*).
11. Opisz spójne i jednospójne nakrycia nastepujących przestrzeni (wraz z odwzorowaniami nakrywającymi):
    (a) suma sfery S^2 oraz jednej z jej średnic;
    (b) torus $S^1 \times S^1$ z wklejonym dyskiem $D^2 \times \{s_0\}$;
    (c) suma sfery i przecinającego ją w dwóch punktach okręgu;
    (d) iloraz sfery S^2 powstay poprzez sklejenie bieguna północnego z południowym.
12. Niech $p : Y \to X$ będzie drogowo spójnym nakryciem, i niech $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$. Uzasadnij, że podgrupy $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ i $p_*(\pi_1(Y, y_1))$ są sprzężone w grupie $\pi_1(X, x_0)$.
13. Niech $p : Y \to X$ będzie jednospójnym nakryciem, niech $A \subset X$ będzie spójną i lokalnie drogowo spójną podprzestrzenią, i niech B będzie komponentą drogowej spójności w $p^{-1}(A)$. Wykaż, że obcięcie $p : B \to A$ jest nakryciem, i że związana z nim podgrupa $p_*(\pi_1 B) < \pi_1 A$ pokrywa się z jądrem homomorfizmu $\pi_1 A \to \pi_1 X$ indukowanego przez włożenie.
14. Niech S_n będzie okręgiem o środku $(0, \frac{1}{n})$ i promieniu $\frac{1}{n}$, i niech $X = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, z topologią indukowaną z topologii płaszczyzny (jest to tzw. *hawajski kolczyk*). Uzasadnij, że X nie posiada spójnego i jednospójnego nakrycia.
15. Rozważmy nakrycie $p : Y \to X \times [0, 1]$ przestrzeni produktowej $X \times [0, 1]$. Uzasadnij, że dla $i = 0, 1$ obcięte nakrycia $p_i : p^{-1}(X \times \{i\}) \to X \times \{i\}$ są izomorficzne jako nakrycia X (względem naturalnych utożsamień przestrzeni $X \times \{i\}$ z przestrzenią X).
16. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, i niech $f : Y \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem. Zdefiniujmy przestrzeń

    $$f^*(\widetilde{X}) = \{(y, z) \in Y \times \widetilde{X} \mid f(y) = p(z)\},$$

    z indukowaną z produktu topologią. Określmy też odwzorowanie $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$, jako obcięcie rzutowania $Y \times \widetilde{X} \to Y$.
    (1) Uzasadnij, że $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$ jest nakryciem. Nakrycie to nazywa się *cofnięciem* (pullback) nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f.
    (2) Pokaż, że jeśli $f, f' : Y \to X$ są odwzorowaniami homotopijnymi, to cofnięcia nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f oraz f' są nakryciami izomorficznymi.
    (3) Uzasadnij, że jeśli odwzorowanie $f : Y \to X$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym to cofnięcie nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f jest nakryciem trywialnym.
    (4) Niech $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, oraz niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Uzasadnij, że podgrupa w $\pi_1(Y, y_0)$ odpowiadająca cofniętemu nakryciu $f^*(p) : (f^*(\widetilde{X}), (y_0, \tilde{x}_0)) \to (Y, y_0)$ ma postać

    $$[f^*(p)]_*[\pi_1(f^*(\widetilde{X}), (y_0, \tilde{x}_0))] = f_*^{-1}[p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))],$$

    gdzie $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ jest homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie f.

ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1

LISTA 6. Klasyfikacje nakryć, reprezentacje permutacyjne, nakrycia normalne, działania nakrywające.

1. Znajdź wszystkie spójne nakrycia przestrzeni $(S^1 \times S^1) \cup (D^2 \times \{s_0\})$.
2. Niech a i b będą generatorami grupy $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ odpowiadającymi poszczególnym S^1-skadnikom bukietu.
   (1) Niech Θ_4 będzie grafem o dwóch wierzchołkach, i o czterech krawędziach, z których każda łączy oba te wierzchołki. Opisz odwzorowanie nakrycia $p : \Theta_4 \to S^1 \vee S^1$ i uzasdanij, że pogrupa w grupie wolnej $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_{a,b}$ odpowiadająca temu nakryciu to podgrupa Q składająca się z wszystkich elementów reprezentowanych słowami nad alfabetem a, b, a^{-1}, b^{-1} o parzystej długości.
   (2) Znajdź nakrycie bukietu $S^1 \vee S^1$ odpowiadające podgrupie normalnej generowanej przez elementy a^2, b^2 i (ab^4), wraz z uzasadnieniem.
3. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie spójnym, lokalnie drogowo spójnym i półlokalnie jedospójnym nakryciem, i niech ρ będzie reprezentacją permutacyjną tego nakrycia, jako działaniem grupy podstawowej $\pi(X, x_0)$ przez permutacje na włóknie $p^{-1}(x_0)$.
   (1) Pokaż, że komponenty spójności nakrycia $\widetilde{X}$ odpowiadają orbitom działania grupy $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$. W szczególności, $\widetilde{X}$ jest spójne dokładnie wtedy gdy działanie $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$ jest tranzytywne.
   (2) Niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, i niech $\widetilde{X}_0$ będzie komponentą $\widetilde{X}$ zawierającą $\tilde{x}_0$. Uzasadnij, że $p|_{\widetilde{X}_0} : (\widetilde{X}_0, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ jest nakryciem. Pokaż, że podgrupa w $\pi_1(X, x_0)$ odpowiadająca temu nakryciu pokrywa się ze *stabilizatorem* $\tilde{x}_0$, tzn. z podgrupą złożoną z tych wszystkich elementów $g \in \pi_1(X, x_0)$, dla których $\rho(g)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$.
4. Znajdź wszystkie spójne 2-krotne i 3-krotne nakrycia bukietu $S^1 \vee S^1$ z dokładnością do izomorfizmu nakryć bez punktów bazowych, a także z dokładnością do izomorfizmu z punktem bazowym. Zrób to dwoma sposonami: (1) ręcznym elementarnym sposobem ad hoc, (2) korzystając z permutacyjnych reprezentacji nakryć o ustalonej krotności.
5. Przypomnijmy, że płaszczyzna rzutowa RP^2 ma grupę podstawową dwuelementową, $\pi_1 RP^2 = Z_2$, i że jej spójnym dwukrotnym nakryciem jest sfera S^2. Znajdź wszystkie spójne nakrycia bukietu $RP^2 \vee RP^2$ dwóch płaszczyzn rzutowych. Które spośród tych nakryć nie są normalne?
6. Skonstruuj nienormalne (nieregularne) nakrycia butelki Kleina torusem oraz butelki Kleina butelką Kleina.
7. Niech X będzie spójną, lokalnie drogowo spójną i półlokalnie jednospójną przestrzenią. Powiemy, że spójne nakrycie $\widetilde{X} \to X$ jest *abelowe*, jeśli jest normalne i ma abelową grupę deck-transformacji. Uzasadnij, że X posiada takie abelowe nakrycie, które jest nakryciem każdego innego abelowego nakrycia X, i że nakrycie o takiej własności jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu. Będziemy je nazywać *uniwersalnym abelowym nakryciem.* Opisz abelowe uniwersalne nakrycia bukietów $S^1 \vee S^1$ oraz $S^1 \vee S^1 \vee S^1$. Opisz też wszystkie abelowe nakrycia bukietu płaszczyzn rzutowych $RP^2 \vee RP^2$, w tym abelowe nakrycie uniwersalne.

8. Mając dane nakrywające działania grupy G_1 na przestrzeni X_1 oraz grupy G_2 na przestrzeni X_2, rozważmy działanie $G_1 \times G_2$ na $X_1 \times X_2$ zdefiniowane przez

$$(g_1, g_2)(x_1, x_2) := (g_1(x_1), g_2(x_2)).$$

Uzasadnij, że jest to także działanie nakrywające. Pokaż, że iloraz $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ jest homeomorficzny z produktem ilorazów $(X_1/G_1) \times (X_2/G_2)$.

9. Mając dane nakrywające działanie grupy G na spójnej lokalnie drogowo spójnej przestrzeni X, każda podgrupa $H < G$ wyznacza nakrycia $X \to X/H$ oraz $X/H \to X/G$. Uzasadnij, że
   (a) każde spójne nakrycie pośrednie pomiędzy X i X/G jest izomorficzne (jako nakrycie X/G) z $X/H \to X/G$, dla pewnej podghrupy $H < G$;
   (b) dwa nakrycia X/H_1 i X/H_2 jak wyżej są izomorficzne dokładnie wtedy gdy podgrupy H_i są sprzężone w G;
   (c) nakrycie $X/H \to X/G$ jest normalne dokładnie wtedy gdy H jest normalną podgrupą w G, a grupą deck-transformacji tego nakrycia jest wtedy grupa ilorazowa G/H.

10. Dane jest nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ spójnej lokalnie drogowo spójnej półlokalnie jednospójnej przestrzeni X, z reprezentacją permutacyjną $\rho_p : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Sym}[p^{-1}(x_0)]$. Niech $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ będzie odwzorowaniem ciągłym określonym na spójnej lokalnie drogowo spójnej półlokalnie jednospójnej przestrzeni Y.
    (1) Uzasadnij, że włókno $[f^*(p)]^{-1}(y_0)$ cofniętego nakrycia $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$ ma naturalne utożsamienie z włóknem $p^{-1}(x_0)$.
    (2) Opisz reprezentację prezentacyjną $\rho_{f^*(p)} : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Sym}[f^*(p)^{-1}(y_0)]$ cofniętego nakrycia $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$, w terminach reprezentacji ρ_p, korzystając z utożsamienia włókien z punktu (1).

Algebraic Topology 2. Exercises.
List 1.

0. Let $\sigma, \sigma' : \Delta^n \to X$ be any two maps whose restrictions to the boundary of Δ^n coincide. Show that $\sigma - \sigma'$ is then an n-cycle in X.
1. Let $s : [0,1] \to X$ be any path in a topological space X. Consider the following two singular 1-simplices $\sigma_i : \Delta^1 \to X$, $i = 1,2$: $\sigma_1((1-t)e_0 + te_1) = s(t)$ and $\sigma_2((1-t)e_0 + te_1) = s(1-t)$.
   (1) Prove that $\sigma_1 + \sigma_2$ is a 1-cycle.
   (2) Prove that $\sigma_1 + \sigma_2$ is null-homologous, by describing an explicit 2-chain $a \in C_2X$ with $\sigma_1 + \sigma_2 = \partial a$.
2. A singular 1-simplex $\sigma : \Delta^1 \to X$ is called a *loop* if $\sigma(e_0) = \sigma(e_1)$.
   (a) Show that each loop is a 1-cycle.
   Two loops σ_0, σ_1 are *freely homotopic* if there is a continuous map $F : \Delta^1 \times [0,1]$ such that
   - for each $x \in \Delta^1$ we have $F(x,0) = \sigma_0(x)$ and $F(x,1) = \sigma_1(x)$,
   - for each $t \in [0,1]$ the map $\sigma_t : \Delta^1 \to X$ given by $\sigma_t(x) := F(x,t)$ is a loop.

   (b) Prove that any two freely homotopic loops are homologous, i.e. they induce the same element in the homology group H_1X.
   A 1-chain $\sigma_0 + \ldots + \sigma_{r-1}$ such that $\sigma_i(e_0) = \sigma_{i-1}(e_1)$ for each $i \in Z/rZ$ is called an *elementary 1-cycle*.
   (c) Prove that each elementary 1-cycle is a 1-cycle.
   (d) Prove that each elementary 1-cycle is homologous with some loop.
   (e) Show that the elements in the homology group H_1X induced by loops generate this group.
   (f) Prove that if X is path-wise connected then each element in the homology group H_1X is induced by a loop.
   (g) Prove that if X is path-wise connected, and if $\pi_1X = 0$, then $H_1X = 0$.
3. Prove that the homomorphisms $H_kX \to H_kY$, for $k > 0$, induced by the maps $f : X \to Y$ which are constant, are trivial.
4. Let $A \subset X$ be a retract, and let $r : X \to A$ be a retraction map, i.e. a continuous map such that $r(x) = x$ for all $x \in A$. Denote also by $i : A \to X$ the corresponding inclusioon map. For each integer $k \geq 0$, denote by $r_k : H_kX \to H_kA$ and $i_k : H_kA \to H_kX$ the homomorphisms induced by r and i, respectively.
   (1) Show that each i_k is injective.
   (2) Show that for each $k \geq 0$ we have $H_kX \cong H_kA \oplus \ker(r_k)$.
5. Verify that for homotopic maps f, g the induced homomorphisms f_*, g_* of **reduced** homology groups coincide.
6. Verify that chain homotopy is an equivalence relation.
7. Check, both directly from the definition and by applying the exact sequence for pairs, what is the relationship between the homology groups H_nX and $H_n(X,x)$, where $x \in X$ is any point.

Exercises 15,16, 17(a), 20, 21, 27 and 29 from pages 132-133 of Hatcher's book "Algebraic Topology".

Algebraic Topology 2. Exercises.
List 1 continued.

1. Check that for continuous maps of pairs $f:(X,A)\to(Y,B)$ and $g:(Y,B)\to(Z,C)$ we have $g_*f_*=(gf)_*$ for induced homomorphisms of relative homologies.
2. Show that for $B\subset A\subset X$ and for any fixed n the sequence of homomorphisms
$$0\to C_n(A,B)\to C_n(X,B)\to C_n(X,A)\to 0$$
induced by inclusions is exact.
3. Justify that the quotient homomorhisms $j:C_nX\to C_n(X,A)=C_nX/C_nA$ form a chain map between the corresponding singular chain complexes (verify that they commute with boundary homomorphisms).
4. Let X be a topological space and let $\mathcal{U}$ be any family of its subsets.
   (0) Show that the subset $C_n^{\mathcal{U}}X\subset C_nX$ given by
   $$C_n^{\mathcal{U}}X:=\{\sum n_i\sigma_i|\,\forall i\,\exists U\in\mathcal{U}:\mathrm{im}(\sigma_i)\subset U\}$$
   is a subgroup in C_nX.
   (1) Show that the boundary homomorphism restricted to $C_n^{\mathcal{U}}X$ has its image in $C_{n-1}^{\mathcal{U}}X$.
   (2) Show that for the inclusion homomorphisms $\iota:C_n^{\mathcal{U}}X\to C_nX$ form a chain map of chain complexes.
   (3) Show that if $\mathcal{U}$ is a covering of X by not necessarily open sets then the induced homomorphisms of homology groups $\iota_*:H_n^{\mathcal{U}}X\to H_nX$ need not be isomorphisms.
5. Let X be a contractible space. Motivated by the cone operator $b:LC_nE\to LC_{n+1}E$ from the proof of excision theorem, for each $n\geq 1$ describe some homomorphism $\Sigma:C_nX\to C_{n+1}X$ which is a chain homotopy between the identity and the zero homomorphisms $C_nX\to C_nX$. Deduce that $H_nX=0$ for $n\geq 1$. Why this argument does not work for $n=0$, and what happens instead?
6. Check in detail that the following subsequence of the long exact sequence for pairs is indeed exact
$$H_nA\to H_nX\to H_n(X,A).$$
7. Motivated by the prism operator, for any two topological spaces X,Y describe some nontrivial homomorphism $p:C_1X\times C_1Y\to C_2(X\times Y)$ and show that it maps pairs of cycles into cycles. Check also that if one of the cycles in the argument is a boundary then the image is a boundary too.

Algebraic Topology 2. Exercises.
List 2.

1. Let $\rho : \Delta^n \to D^n$ be a homeomorphism (which maps $\partial\Delta^n$ onto $\partial D^n = S^{n-1} \subset D^n$). Further, let $\tau : \partial\Delta^{n+1} \to S^n$ be a homeomorphism, and view it as a chain in $C_n S^n$ (taking formally $\tau = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tau|_{[e_0,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1}]}$). Given some basepoint $x_0 \in S^n$, let $\nu : \partial\Delta^{n+1} \to S^n$ be a continuous map with the following properties:
   - ν maps the interior of the face $[e_1, \ldots, e_{n+1}]$ of Δ^{n+1} homeomorphically onto $S^n \setminus \{x_0\}$, and it maps the boundary of this face onto x_0;
   - ν maps all other faces of Δ^{n+1} onto x_0.

   View ν as a chain in $C_n S^n$, by taking $\nu = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \nu|_{[e_0,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1}]}$ Finally, let $\mu : \Delta^n \to S^n$ be a continuous map which sends the interior of Δ^n homeomorphically onto $S^n \setminus \{x_0\}$, and which maps the boundary of Δ^n onto x_0; view μ as a chain in $C_n S^n$.
   (a) Check that ρ is a relative cycle in (D^n, S^{n-1}), and show that it induces a generator in the homology group $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong Z$.
   (b) Check that τ is a cycle in $C_n S^n$, and show that it induces a generator in the homology group $H_n(S^n) \cong Z$.
   (c) Check that, for $n \geq 1$, ν is a relative cycle in $(S^n, \{x_0\})$, and show that it induces a generator in the homology group $H_n(S^n, \{x_0\}) \cong Z$.
   (d) Check that, for $n \geq 1$, μ is a relative chain in $(S^n, \{x_0\})$, and show that it induces a generator in the homology group $H_n(S^n, \{x_0\}) \cong Z$.

   HINTS: the assertions of (a)-(d) should be proved simultaneously, using induction over the dimension n, by the arguments similar to those used to calculate $H_n S^n$ and $H_n(D^n, S^{n-1})$. Use also, without proof, the intuitive fact that any map τ is homotopic to some map ν as above, and vice versa.
2. Let $r : S^n \to S^n$ be a reflection with respect to some equatorial $S^{n-1} \subset S^n$, and let H^n_+, H^n_- be the hemi-spheres of S^n bounded by this S^{n-1}. Let $\sigma : \Delta^n \to H^n_+$ be a homeomorphism (which sends $\partial\Delta^n$ onto $S^{n-1} = \partial H^n_+$). Check that, for $n \geq 1$, the chain $c = \sigma - (r \circ \sigma) \in C_n S^n$ is a cycle, and show that it induces a generator in the homology group $H_n S^n \cong Z$.
   HINT: let x_0 be the pole of S^n contained in the interior of H^n_-, and let $h : S^n \to S^n$ be some map, homotopic to the identity, which sends the interior of H^n_+ homeomorphically onto $S^n \setminus \{x_0\}$, and sends all of H^n_- onto x_0 (such a map clearly exists); consider then the cycle $h_\#(c)$ homologous to c, and compare it with the cycle ν of exercise 1(c); finally, use the assertion of exercise 1(c).
3. By using a local homology argument, show that given a finite graph Γ (viewed as a topological space), there is no homeomorphism of Γ that sends a vertex of Γ to a vertex with different degree. (Clearly, there are easier arguments to show this fact, but we want to practice local homology.)

Exercises 1-4 and 7-8 from page 155 of Hatcher's book "Algebraic Topology".

Algebraic Topology 2. Exercises.
List 3.

Local degree

1. For any $x \in S^n$ the group $H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ can be naturally identified with the group $H_n S^n$, via the homomorphism $j_* : H_n S^n \to H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ in the long exact sequence of the pair $(S^n, S^n \setminus \{x\})$. This allows to define the *local degree* at a point $x \in U$ for any homeomorphism $h : U \to V$ between open subsets of S^n, by using excision.
   (a) Show that for such local degree we always have $\deg(h|x) = \pm 1$.
   (b) Show that if $r : S^n \to S^n$ is any reflection with respect to some equatorial $S^{n-1} \subset S^n$ then $\deg(r \circ h|x) = \deg(h \circ r|r(x)) = -\deg(h|x)$.
   (c) Show that the local degree $\deg(h|x)$ does not depend on the choice of $x \in U$.

Computations of cellular homology

Exercises 17 and 28-29 from page 132, and exercises 9, 10, 12, 14, 19 from page 156 of Hatcher's book “Algebraic Topology”.

Algebraic Topology 2. Exercises.
List 4.

CW-complexes, cellular homology, simplicial homology

1. Verify that for any CW-complex X the pair (X^n, X^{n-1}) is a good pair of spaces.
2. Provide details of the (inductive) argument for showing that any compact suibset of a CW-complex X is contained ion some finite subcomplex of X.
3. Check that if the image of the characteristic map φ_α for a cell e_α^{n+1} is disjoint with the (interior of) a cell e_β^n then the incidence coefficient vanishes, i.e. $i_{\alpha,\beta} = 0$.
4. For a given finite CW-complex X the cellular boundary map $\partial^{CW} : C_{n+1}^{CW} X \to C_n^{CW} X$ is the "linear" map given by the matrix with integer coefficients $i_{\alpha,\beta}$ (incidence coefficients for pairs of $(n+1)$- and n-cells). Check how is this matrix modified if one canges
   (a) the orientation of one of the $(n+1)$-cells,
   (b) the orientation of one of the n-cells.
5. Given a cellular map $f : (X, A) \to (Y, B)$ between CW-pairs, describe (in terms of the associated degrees $f_{\alpha,\beta}$) the induced chain homomorphism $f_\# : C_\star^{CW}(X, A) \to C_\star^{CW}(Y, B)$.
6. Recall that we have identifications $C_n^{CW} X = H_n(X^n, X^{n-1})$, and that under these identifications the cellular boundary map $\partial_{n+1}^{CW} : C_{n+1}^{CW} X \to C_n^{CW} X$ is given as the composition $j_n \partial_{n+1}$ of the maps $\partial_{n+1} : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_n X^n$ and $j_n : H_n X^n \to H_n(X^n, X^{n-1})$.
   (a) Show that vthe map ∂_{n+1}^{CW}, viewed as a homomorphism $H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$, coincides with the boundary map in the long exact sequence of the triple (X^{n+1}, X^n, X^{n-1}).
   (b) Using part (a) and naturality of exact sequences of triples, show that for any cellular map $f : X \to Y$ the cellular induced homomorphisms $f_\#^{CW} : C_n^{CW} X \to C_n^{CW} Y$ commute with the cellular boundary homomorphisms ∂^{CW} (i.e. they form a morphism of cellular chain complexes).
7. Consider a closed connected n-dimensional manifold M with a fixed triangulation. Suppose that this manifold is orientable, i.e. the n-simplices of its triangulation can be oriented *consistently*, which means that for any $(n-1)$-simplex τ of this triangulation the orientations induced from the orientations of the two n-simplices containing τ are opposite.
   (a) Using simplicial homology, show that $H_n M = Z$.
   (b) Suppose M is closed, connected, n-dimensional, triangulated and non-orientable. Show that then $H_n M = 0$.
8. Let $K(3,3,3)$ be a 2-dimensional simplicial complex described as follows. Consider sets A, B, C consisting of 3 elements. Identify the vertex set of $K(3,3,3)$ with the disjoint union $A \sqcup B \sqcup C$, and the set od 2-simplices with the family of all such subsets $T \subset A \sqcup B \sqcup C$ which have precisely one element in each of A, B and C. Compute the simplicial homology of $K(3,3,3)$.

Cellular homology and Euler characteristic

Exercises 15–16 and 20–24 from pages 156–156 of Hatcher's book "Algebraic Topology".

Mayer-Vietoris sequences

Exercises 28–29 and 31–33 from pages 157–158 of Hatcher's book "Algebraic Topology".

9. Give an elementary derivation for the Mayer-Vietoris sequence in simplicial homology for a simplicial complex X decomposed as the union of subcomplexes A and B.