

# Algebra homologiczna

Zima 2023-24

## Spis rozmaitości treściowalnych

<b>04.10.23 : Podstawowe definicje</b>	<b>3</b>
1.1. Co to kategoria . . . . .	3
1.2. Kompleksy . . . . .	4
1.3. Funktory kowariantne i kontrawariantne . . . . .	5
<b>09.10.23 : Równoważność kategorii</b>	<b>10</b>
2.1. Presnop i snop . . . . .	10
2.2. Funktory wierne, pełne . . . . .	11
2.3. Naturalne przekształcenia funktorów . . . . .	12
2.4. Równoważność kategorii . . . . .	15
<b>16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice</b>	<b>18</b>
3.1. Kategoria funktorów . . . . .	18
3.2. Granice i kogranice . . . . .	21
<b>23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]</b>	<b>23</b>
4.1. Kategorie addytywne i abelowe . . . . .	25
<b>30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie</b>	<b>32</b>
5.1. Kompleks łańcuchowy i sympleksy . . . . .	32
5.2. Homologie . . . . .	33
5.3. Pull-back i push-out . . . . .	34

## Wykład 04.10.23 : Podstawowe definicje

### 1.1 Co to kategoria

Rozważmy układ danych  $\mathbf{C}$  zawierający:

- ☕ klasę *obiektów*  $\text{Ob } \mathbf{C}$
- ☕ dla dowolnej pary  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  zbiór  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ , którego elementy nazywamy *morfizmami* i zapisujemy  $\varphi : X \rightarrow Y$  lub  $X \xrightarrow{\varphi} Y$
- ☕ kolekcję odwzorowań, zwanych *złożeniami*, dla wszystkich  $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathbf{C}$  takich, że

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z) \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

#### Definicja 1.1 : kategoria (mała).

Układ danych  $\mathbf{C}$  jak wyżej nazywamy **kategorią**, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Zbiory  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  dla  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  są parami rozłączne (tzn. morfizmy mają dobrze określone dziedziny i przeciwdziedziny).
2. Dla każdego  $A \in \text{Ob } \mathbf{C}$  istnieje  $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$  takie, że  $\varphi \circ \text{Id}_A = \varphi$  oraz  $\text{Id}_A \circ \psi = \psi$ .
3. Złożenie morfizmów jest łączne, tzn. dla morfizmów

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \xrightarrow{\eta} W$$

zawsze zachodzi równość  $(\eta\psi)\varphi = \eta(\psi\varphi)$ .

Dodatkowo, jeśli  $\text{Ob } \mathbf{C}$  jest zbiorem, to  $\mathbf{C}$  nazywamy *małą kategorią*.

### Przykład(y) 1.1

1. Kategorię wszystkich pierścieni wektorowych nad ciałem  $K$  oznaczamy  $\mathbf{Vect}_K$ . Jeśli interesują nas przestrzenie tylko skończonego wymiaru, to istnieje kategoria  $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$  przestrzeni wektorowych skończonego wymiarowych.

Obiektami obu tych kategorii są przestrzenie liniowe (skończonego wymiaru), a morfizmami są przekształcenia liniowe między nimi.

2. Wszystkie zbiory wraz z funkcjami między nimi jako morfizmami tworzą kategorię **Set** zbiorów.
3. Jeśli rozważamy jako obiekty tylko zbiory z określonym dobrym porządkiem, to morfizmami mogą być funkcje słabo monotoniczne. Taką kategorię oznaczamy **Set**<sub>≤</sub>.
4. Kategoria wszystkich grup wraz z homomorfizmami jako morfizmami jest oznaczana **Grp**, natomiast kategoria, której obiekty to tylko grupy abelowe jest oznaczana **Ab**.
5. Pojedyncza grupa  $G$  może tworzyć sama w sobie jednoobiektową kategorię **C** <sub>$G$</sub>  taką, że
  - ☞  $\text{Ob } \mathbf{C}_G = \{\star\}$
  - ☞  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star) = G$ , a złożenia działa jak mnożenie elementów  $G$ .
6. Dla dowolnego pierścienia  $R$  istnieje kategoria, której obiektami są (lewe)  $R$ -moduły, a morfizmami są homomorfizmy między tymi modułami. Oznaczamy to  $R$  – **mod**.
7. Wszystkie przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi nazywamy kategorią przestrzeni topologicznych **Top**.
8. Wszystkie gładkie rozmaitości są obiektami kategorii **Diff**, a morfizmy to gładkie odwzorowania między rozmaitościami.
9. Kategoria **Rep** <sub>$G, K$</sub>  posiada jako obiekty reprezentacje grupy  $G$  na przestrzeniach liniowych nad  $K$ , a jako morfizmy wszystkie przekształcenia  $G$ -ekwiwariantne.
10. Rozważmy kategorię  $\Delta$  taką, że jej obiektami są zbiory kolejnych liczb naturalnych:

$$\text{Ob } \Delta = \{[n] : n \in \mathbb{N}\},$$

$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ . Zdefiniujmy zbiory morfizmów jako  $\Delta([m], [n]) =$  wszystkie niemalejące funkcje z  $[m]$  w  $[n]$ .

Tak zdefiniowaną kategorię nazywamy **kategorią symplecjialną**.

## 1.2 Kompleksy

### Definicja 1.2 : kompleksy łańcuchowe (grup abelowych).

Jeśli ciąg (grup abelowych)  $A$ .

$$\dots \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d_0} A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

jest taki, że dla każdego  $n \in \mathbb{Z}$  (dopuszczamy ujemne indeksy) złożenie  $d_{n+1} \circ d_n = 0$ , to nazywamy go **kompleksem łańcuchowym**.

Możemy rozważać kategorię, której obiektami są kompleksy łańcuchowe obiektów z jednej kategorii  $\mathbf{C}$ , np. grup abelowych. Morfizmem między kompleksem  $A$  a kompleksem  $B$  nazwiemy wówczas ciąg homomorfizmów  $\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_i, B_i)$  taki, że w diagramie

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{d_0^A} & A_1 & \xrightarrow{d_1^A} & A_2 & \xrightarrow{d_2^A} & \dots \\ & & \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \\ \dots & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{d_0^B} & B_1 & \xrightarrow{d_1^B} & B_2 & \xrightarrow{d_2^B} & \dots \end{array}$$

każdy prostokąt komutuje, tzn.

$$d_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n^A$$

dla każdego  $n$ .

## 1.3 Funktory kowariantne i kontrawariantne

### Definicja 1.3 : funktor.

**Funktorem** z kategorii  $\mathbf{C}$  w kategorię  $\mathbf{D}$  nazywamy dwa przyporządkowania: między obiektami tych kategorii i między morfizmami takie, że:

$$\text{Ob } \mathbf{C} \ni X \mapsto F(X) \in \text{Ob } \mathbf{D}$$

dla każdej pary  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  odwzorowanie

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \ni \varphi \mapsto F(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

zachowuje składanie morfizmów, tzn.  $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ .

Takie przyporządkowania między kategoriami nazywa się też, bardziej precyzyjnie, *funktorami kowariantnymi*.

### Przykład(y) 1.2

1. Funktor  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$  zdefiniujemy tak, że dowolny  $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$  przechodzi na przestrzeń wektorową nad ciałem  $K$  o bazie  $X$ , tzn.:

$$F(X) = \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x x : \alpha_x \in K, \text{ tylko skończenie wiele } \neq 0 \right\}$$

2. Dużą grupą funktorów są tzw. *funktory zapominające*, które gubią część informacji o strukturze obiektów w wyjściowej kategorii.

Na przykład funktor

$$F : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

przeprowadza przestrzeń liniową na zbiór jej elementów bez struktury liniowej. Przekształcenia liniowe między przestrzeniami liniowymi są wówczas przeprowadzane na zwykłe funkcje między zbiorami.

Innym funktorem zapominającym jest n.p.  $F : R - \mathbf{mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , który dla dowolnego  $N \in \text{Ob } R - \mathbf{mod}$  przypisuje  $F(N) = \text{Hom}_R(M, N)$  dla pewnego  $M \in \text{Ob } R - \mathbf{mod}$ .

3. Homomorfizm  $\varphi : G \rightarrow H$  indukuje funktor  $\Phi : \mathbf{C}_G \rightarrow \mathbf{C}_H$ , który jedyny obiekt  $\star \in \text{Ob } \mathbf{C}_G$  posyła na jedyny obiekt  $\heartsuit \in \text{Ob } \mathbf{C}_H$ . Natomiast morfizmy  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_G}(\star, \star)$ , odpowiadające mnożeniu przez elementy grupy  $G$ , przesyła na morfizmy odpowiadające mnożeniu przez  $\varphi(g) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}_H}(\heartsuit, \heartsuit)$
4. Przez  $\mathbf{Top}_*$  oznaczamy kategorię *przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem*, w której morfizmami są odwzorowania ciągłe respektujące wybrane punkty. Funktor

$$\Pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

taki, że dla  $X \in \text{Ob } \mathbf{Top}_*$  z wyróżnionym punktem  $x_0 \in X$  przypisuje

$$\Pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

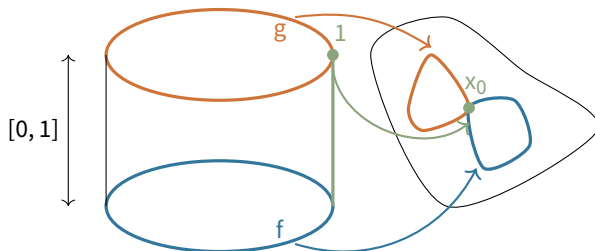
czyli klasę homotopii odwzorowań ciągłych  $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ , nazywamy **grupą podstawową**.

Dwa odwzorowania

$$f, g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$$

są homotopijne, jeśli istnieje  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  ciągłe takie, że

$$H(z, 0) = f(z) \text{ i } H(z, 1) = g(z) \text{ i } H(1, t) = x_0$$



Grupa fundamentalna okręgu z wyróżnionym punktem jest izomorficzna z liczbami całkowitymi:

$$\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}.$$

Mając dwie przestrzenie topologiczne  $(X, x_0)$  i  $(Y, y_0)$  oraz ciągłą funkcję między nimi  $f$ , mamy

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \ni & [\sigma] \\ \Pi_1(f) \downarrow & & \downarrow \Pi_1(f) \\ \Pi_1(Y, y_0) & \ni & [f \circ \sigma] \end{array}$$

## Twierdzenie 1.1.

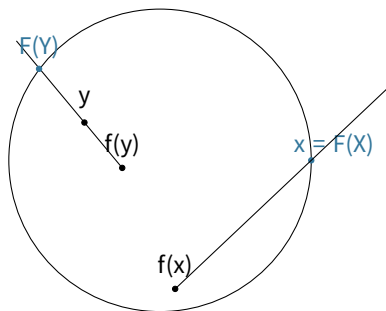
Każde ciągłe odwzorowanie  $f : D^2 \rightarrow D^2$  ma punkt stały.

## Dowód

A raczej jego szkic.

Założmy nie wprost, że istnieje funkcja ciągła  $f : D^2 \rightarrow D^2$ , która nie posiada punktu stałego.

Możemy wówczas zdefiniować funkcję  $F : D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$ , która punktowi  $y \in D^2$  przypisuje punkt przecięcia wychodzącej z  $f(y)$  przechodzącej przez  $y$  z obwodem  $D^2$ :



Obcięcie takiej funkcji do brzegu  $\partial D^2$  daje oczywiście identyczność na  $\partial D^2$  (punkt  $x$  wyżej). Powstaje więc diagram

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xleftarrow{\quad} & D^2 \\ & \searrow \text{id}_{S^1} & \swarrow F \\ & S^1 & \end{array}$$

na który możemy nałożyć funktor  $\Pi_1$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = \Pi_1(S^1) & \xleftarrow{\quad} & \Pi_1(D^2) = S^1 \\ & \searrow \text{id}_{\mathbb{Z}} = \Pi_1(\text{id}_{S^1}) & \swarrow \Pi_1(F) \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

NIE ROZUMIEM CO TO DAJE



#### Definicja 1.4 : kategoria dualna.

Dla kategorii  $\mathbf{C}$  możemy zdefiniować nową kategorię,  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  w której każdy morfizm  $\varphi^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(Y, X)$  zostaje odwrócony:

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\varphi^{\text{op}}} \end{array} Y$$

Wtedy  $\text{Ob } \mathbf{C}^{\text{op}}$  to obiekty dualne do elementów znajdujących się w  $\text{Ob } \mathbf{C}$ . Tak zdefiniowaną kategorię  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  nazywamy **kategorią dualną**.

#### Przykład(y) 1.3

1. Kategoria dualna do kategorii przestrzeni liniowych  $\mathbf{Vect}_K^{\text{op}}$  jest kategorią, której obiekty to przestrzenie sprzężone,  $V^* \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_K^{\text{op}}$ , zawierające funkcjonały liniowe  $V \rightarrow K$ . Każdy morfizm  $\varphi : V \rightarrow W$  w  $\mathbf{Vect}_K$  indukuje wówczas odwzorowanie  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  takie, że dla  $f \in W^*$  mamy  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : V \rightarrow K$ .

Kojarzenie funkcjonału  $\varphi^* \in V^*$  z elementem  $v \in V$  jest czasem oznaczane przez  $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$ .



### Definicja 1.5 : funktor kontrawariantny.

Funktor (kowariantny) z kategorii  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  do kategorii  $\mathbf{D}$  jest nazywany **funktorem kontrawariantnym** z  $\mathbf{C}$  do  $\mathbf{D}$ .

Oznacza to, że jeśli  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  i  $\varphi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ , to funktor kontrawariantny  $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$  przeprowadza  $X$  na  $F(X) \in \text{Ob } \mathbf{D}$ , a  $\varphi \mapsto F(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(Y), F(X))$ .

$$\begin{array}{ccc} X & & F(X) \\ \varphi \downarrow & \xrightarrow{\quad F \quad} & \uparrow F(\varphi) \\ Y & & F(Y) \\ \psi \downarrow & \xrightarrow{\quad F \quad} & \uparrow F(\psi) \\ Z & & F(Z) \end{array}$$

Składanie morfizmów również zmienia kolejność, tzn.

$$F(\psi\varphi) = F(\varphi)F(\psi)$$

## Wykład 09.10.23 : Równoważność kategorii

### 2.1 Presnop i snop

Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną i związaną z nią kategorię  $\mathbf{Otw}(X)$  zdefiniujemy tak, że

☕ Ob  $\mathbf{Otw}(X) = \{U \subseteq X : U \text{ - zbiór otwarty}\}$

☕ morfizmy to włożenia identycznościowe (tzn. istnieje morfizm  $X \hookrightarrow Y$  jeśli  $X \subseteq Y$ )

Tak zdefiniowany funktor kontrawariantny  $\mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$  nazywamy **presnopem** na przestrzeni topologicznej  $X$ .

Kategoria  $\mathbf{C}$  może być kategorią zbiorów **Set**, ale możemy też przeprowadzać zbiory otwarte oraz morfizmy między nimi na kategorię **Ab**, **Vect<sub>K</sub>** czy **R-mod**. Wtedy taki funktor będziemy nazywać odpowiednio *presnopem grup abelowych*, *przestrzeni liniowych* czy *R-modułów*.

### Przykład(y) 2.1

1. Zaczniemy od przetestowania presnopu na przestrzeni topologicznej w akcji.

Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, a  $U \subseteq X$  będzie dowolnym zbiorem otwartym. Funktor  $F : \mathbf{Otw}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}(X)$  definiujemy na obiektach jako

$$F(U) = C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$$

Dla  $V \subseteq U \subseteq X$  otwartych zbiorów mamy

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xleftarrow{\text{obcięcie}} & F(V) \\ \parallel & & \parallel \\ C(U) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & C(V) \end{array}$$

co w widoczny sposób spełnia  $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$ .

Funktor jak wyżej jest nazywany presnopem funkcji ciągłych.

#### Definicja 2.1 : presnop, snop.

**Presnopem** na kategorii  $\mathbf{C}$  nazywamy dowolny funktor

$$F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

**Snopem** nazywamy presnop taki, że jeśli dla dowolnego zbioru  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  oraz dla dowolnych  $i, j \in I$  spełniony jest warunek

$$s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j),$$

gdzie  $s_i \in F(U_i)$  jest nazywane **cięciem presnopu**, to wówczas istnieje dokładnie jedyne cięcie  $s \in F(U)$  takie, że

$$s \upharpoonright U_i = s_i.$$

Zapisując to za pomocą kwantyfikatorów mamy:

$$\begin{aligned} (\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i) (\forall s_i \in F(U_i)) \quad & [(\forall i, j \in I) s_i \upharpoonright (U_i \cap U_j) = s_j \upharpoonright (U_i \cap U_j)] \Rightarrow \\ & \Rightarrow [(\exists! s \in F(U)) (\forall i \in I) s \upharpoonright U_i = s_i] \end{aligned}$$

## Przykład(y) 2.2

1. Presnop na przestrzeni topologicznej  $X$  spełnia również warunek opisany wyżej.

## 2.2 Funktory wierne, pełne

### Definicja 2.2 : podkategoria $\mathbf{C}'$ kategorii $\mathbf{C}$ .

To kategoria spełniająca następujące warunki:

$$\text{Ob } \mathbf{C}' \subseteq \text{Ob } \mathbf{C}$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$$

$$\text{id}_X^{\mathbf{C}'} = \text{id}_X^{\mathbf{C}} \text{ zawsze gdy } X \in \text{Ob } \mathbf{C}'$$

złożenie morfizmów w  $\mathbf{C}'$  zachowuje się tak samo jak w  $\mathbf{C}$

Mówimy, że podkategoria  $\mathbf{C}'$  jest **pełna**, gdy dla wszystkich  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}'$  zachodzi  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$

## Przykład(y) 2.3

1. Kategoria przestrzeni skończonego wymiaru  $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$  jest podkategorią kategorii wszystkich przestrzeni liniowych  $\mathbf{Vect}_K$ . Jest to pełna podkategoria.
2. Analogicznie, kategoria grup abelowych  $\mathbf{Ab}$  jest pełną podkategorią kategorii  $\mathbf{Grp}$
3. Kategoria gładkich rozmaitości  $\mathbf{C}^\infty$  – **rozm** jest podkategorią kategorii wszystkich

przestrzeni topologicznych **Top**. Nie jest to jednak pełna podkategoria.

### Definicja 2.3 : funktor wierny, pełny.

Funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  jest

☞ **wierny** gdy  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  jest injekcją

☞ **pełny**, gdy dla wszystkich  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  przekształcenie  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  jest surjekcją

### Przykład(y) 2.4

1. Włożenie podkategorii w kategorię jest funktorem wiernym
2. Jeśli podkategoria jest pełna, to taki włożeniowy funktor jest dodatkowo pełny.

### 2.3 Naturalne przekształcenia funktorów

#### Definicja 2.4 : naturalne przekształcenie funktorów.

Dla dwóch funktorów  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  układ morfizmów  $f : F \rightarrow G$  w  $\mathbf{D}$  taki, że dla każdego  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$   $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$  i dla każdego  $\varphi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

jest przemienny nazywamy **naturalnym przekształceniem funktorów**  $F$  i  $G$ .

### Przykład(y) 2.5

1. Patrzymy na funktory  $\text{Id}, \text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$  (identyczność i abelianizacja  $\text{ab}(G) = G/[G, G]$ ).

Rozważymy  $f : \text{Id} \rightarrow \text{ab}$ , wtedy  $\text{Id}(G) = G$ , więc sprawdzamy, czy następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}(G) = G & \xrightarrow{f(G)} & G/[G, G] = \text{ab}(G) \\ \text{Id}(\varphi) = \varphi \downarrow & & \downarrow \text{ab}(\varphi) \\ \text{Id}(H) = H & \xrightarrow{f(H)} & H/[H, H] = \text{ab}(H) \end{array}$$

Dla każdego  $G \in \text{Ob} \mathbf{Grp}$  zdefiniujemy  $f(G) : \text{Id}(G) \rightarrow \text{ab}(G)$  jako

$$f(G) : G \rightarrow G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

jako zwykłe przekształcenie ilorazowe. Aby więc diagram komutował, czyli

$$f(H) \circ \text{Id}(\varphi) = \text{ab}(\varphi) \circ f(G),$$

wystarczy sprawdzić, że komutant grupy  $G$  przechodzi przez dowolny homomorfizm na komutant w  $H$ :

$$(\forall g, h \in [G, G]) \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg).$$

Skoro tak jest, to nie ma znaczenia, czy najpierw abelianizujemy grupę, a potem nakładamy na to homomorfizm, czy najpierw nakładamy homomorfizm, a potem abelianizujemy.

- Można pokazać, że istnieje naturalne przekształcenie funktorów z kategorii przestrzeni topologicznych z wybranym punktem bazowym ( $\mathbf{Top}_*$ ) w kategorię grup

$$H_n, \Pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp},$$

gdzie  $\Pi_n$  to funktor przypisujący przestrzeni  $n$ -tą homotopię ( $\Pi_1$  w szczególności przyporządkowuje przestrzeni topologicznej jej grupę fundamentalną), a  $H_n$  to funktor  $n$ -tej homologii.

- Pokażemy naturalne przekształcenie funktorów  $\text{Id}, \star\star : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ .

Dla  $V \in \mathbf{Vect}_K$  definiujemy

$$\begin{array}{ccc} f(V) : V & \longrightarrow & V^{**} \\ \Psi & & \Psi \\ v & \longrightarrow & (V^* \ni \varphi^* \mapsto \varphi^*(v) \in K) = \langle \cdot, v \rangle \end{array}$$

to znaczy, dla  $v \in V$  mamy element  $f(V)(v) = \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$ , który elementowi  $\varphi^* \in V^*$  przyporządkowuje  $\langle \varphi^*, v \rangle = \varphi^*(v) \in K$ .

Chcemy sprawdzić, że diagram

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f(V)} & V^{**} \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^{**} \\
 W & \xrightarrow{f(W)} & W^{**}
 \end{array}$$

komutuje, czyli pokazać, że  $f(V) \circ \varphi^{**} = \varphi \circ f(W)$ .

Troszkę przypomnienia z algebry liniowej. Przekształcenie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$  indukuje funkcjonal liniowy  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  taki, że dla  $f : W \rightarrow K \in W^*$  mamy  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in V^*$ . W takim razie, przekształcenie  $\varphi^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$  dla  $f^* : V^* \rightarrow K \in V^{**}$  przyporządkuje

$$\varphi^{**}(f^*) = f^* \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi^{**} \circ f(V))(v) &= \varphi^{**}(f(V)(v)) = \varphi^{**}(\langle \cdot, v \rangle) = \\
 &= \langle \cdot, v \rangle \circ \varphi^* = \langle \varphi^*(\cdot), v \rangle = \\
 &= \langle \cdot \circ \varphi, v \rangle = \langle \cdot, \varphi(v) \rangle = f(W)(\varphi(v)) = \\
 &= (f(W) \circ \varphi)(v)
 \end{aligned}$$

element  $W^{**}$ .

Czyli wszystko się zgadza!

Naturalne przekształcenia można składać. Powstaje wtedy (meta)kategoria, której elementy to funktory, a morfizmami są naturalne przejścia. Nie jest to prawdziwa kategoria, bo morfizmy nie zawsze tworzą zbiory w takim przypadku. Taki twór oznaczamy **Funct(C, D)** i mając naturalne przekształcenia funktorów  $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$ , dowolne  $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$  oraz  $\varphi : X \rightarrow Y$  rysujemy

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{a(X)} & G(X) & \xrightarrow{b(X)} & H(X) \\
 F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) & & \downarrow H(\varphi) \\
 F(Y) & \xrightarrow{a(Y)} & G(Y) & \xrightarrow{b(Y)} & H(Y)
 \end{array}$$

gdzie  $(b \circ a)(X) = b(X) \circ a(X)$ .

### Definicja 2.5 : izomorfizm funktorów.

W metakategorii funktorów możemy rozważać izomorfizmy, które nazywamy **naturalnymi izomorfizmami funktorów**. Do ich definiowania można podejść na dwa,

równoważne, sposoby:

- 🌿 naturalne przekształcenia  $f : F \rightarrow G$  dla których istnieje  $g : G \rightarrow F$  takie, że  $f \circ g = \text{id}_G$  oraz  $g \circ f = \text{id}_F$
- 🌿 przekształcenie  $f : F \rightarrow G$  takie, że dla każdego  $X \in \mathbf{C}$  przekształcenie  $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$  jest izomorfizmem w kategorii  $\mathbf{D}$ .

### Przykład(y) 2.6

1. Przekształcenie funktorów  $\text{Id}, **$  na kategorii przestrzeni wektorowych rozważane wyżej staje się izomorfizmem, gdy ograniczymy się do przestrzeni skończonego wymiaru.

### 2.4 Równoważność kategorii

#### Definicja 2.6 : równoważność kategorii.

Funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  zadaje **równoważność kategorii**, jeśli istnieje funktor  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  oraz naturalne przekształcenia funktorów  $f : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$  i  $g : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{C}}$

Równoważność kategorii jest nieco słabszym warunkiem niż istnienie izomorfizmu między nimi - złożenie  $F \circ G$  niekoniecznie musi być równe  $\text{Id}_{\mathbf{D}}$ , wystarczy tylko żeby istniało naturalne przekształcenie między tymi dwoma funktorami.

### Przykład(y) 2.7

1. Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych  $\mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$  jest równoważna kategorii  $\mathbf{S}_K$ , której obiektami są  $\text{Ob} \mathbf{S}_K = \{K^0, K^1, \dots, K^n, \dots\}$  a morfizmy to wszystkie przekształcenia liniowe między nimi.

Funktor włożenia

$$F : \mathbf{S}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$$

jest oczywistym wyborem na pierwszy funktor, gdyż każdy obiekt z  $\mathbf{S}_K$  jest przestrzenią wektorową skończonego wymiaru.

Aby znaleźć funktor

$$G : \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{S}_K$$

zaczniemy od rozważenia na co przechodzi  $V \in \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}$ . Wiemy, że  $\dim \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}} = \infty$ , możemy więc zdefiniować

$$G(V) = K^{\dim \mathbf{Vect}_K^{\text{fin}}}.$$

Pozostaje zastanowić się nad przekształceniem morfizmów. W każdym  $V$  możemy wyróżnić pewną bazę, a każde przekształcenie liniowe  $V \rightarrow W$  będzie macierzą o wyrazach w  $K$  zapisaną w tych wyróżnionych bazach. Wystarczy więc przekształceniu  $V \rightarrow W$  zadanemu macierzą przyporządkować przekształcenie wyznaczone przez taką samą macierz na  $K^{\dim V} \rightarrow K^{\dim W}$ .

### Twierdzenie 2.1.

Funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  zadaje równoważność kategorii  $\iff$  jest on wierny, pełny i w zasadzie suriektywny, tzn.  $(\forall Y \in \text{Ob } \mathbf{D})(\exists X \in \text{Ob } \mathbf{C}) F(X) \cong_Y Y$ .

### Dowód

$\Leftarrow$

Wiemy, że funktor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  jest wierny, pełny i w zasadzie suriektywny i na podstawie tej wiedzy skonstruujemy  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  jak w definicji równoważności kategorii.

Dla  $Y \in \text{Ob } \mathbf{D}$  wybieramy  $G(Y) \in \text{Ob } \mathbf{C}$  takie, że istnieje izomorfizm  $\iota_Y : Y \rightarrow F(G(Y))$ . Możemy tak zrobić, gdyż  $F$  jest w zasadzie suriektywny.

Niech  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  będzie morfizmem obiektów w kategorii  $\mathbf{D}$ . Chcemy sprawdzić istnienie  $G(\varphi)$  takie, że mamy naturalny izomorfizm  $\text{Id}_{\mathbf{D}} \leftrightarrow F \circ G$

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathbf{D}}(Y) = Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' = \text{Id}_{\mathbf{D}}(Y') \\ \iota_Y \downarrow & & \downarrow \iota_{Y'} \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{F(G(\varphi))} & F(G(Y')) \end{array}$$

Ponieważ  $\iota_Y$  jest izomorfizmem, dolną strzałkę  $F(G(Y)) \rightarrow F(G(Y'))$  możemy podpisać jako  $\iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$ . Chcemy pokazać, że da się dobrać  $G(\varphi)$  tak, żeby  $F(G(\varphi)) = \iota_{Y'} \circ \varphi \circ \iota_Y^{-1}$ , tzn. żeby diagram na górze komutował.

$F$  jest wierny i pełny, więc przejście

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y')) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Y)), F(G(Y')))$$

jest jednocześnie bijekcją i iniekcją, czyli możemy je odwracać. Istnieje więc jedyne

$$\psi = F^{-1}(\iota_{Y'} \varphi \iota_Y^{-1}) : G(Y) \rightarrow G(Y')$$

które możemy przypisać do  $G(\varphi) = \psi$ . Zbiór izomorfizmów  $\iota_Y$  zadaje więc naturalny izomorfizm  $\text{Id}_{\mathbf{D}} \rightarrow F \circ G$ :



$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\
 \downarrow \iota_Y & & \downarrow \iota_{Y'} \\
 F(G(Y)) & \xrightarrow{F(G(\varphi))=F(\psi)=\iota_{Y'} \varphi \iota_Y^{-1}} & F(G(Y'))
 \end{array}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla tak zdefiniowanego  $G$  istnieje również naturalne przekształcenie  $\text{Id}_{\mathbf{C}} \rightarrow G \circ F$ .

Dla  $X, X' \in \text{Ob } \mathbf{C}$  oraz  $\psi : X \rightarrow X'$  istnieje izomorfizm  $F(X) \cong F(G(F(X)))$ , gdyż tak właśnie zdefiniowaliśmy funktor  $G$ . Aby utrzymać konwencję z powyższego fragmentu dowodu, nazwijmy te izomorfizmy odpowiednio  $\iota_{F(X)}$  i  $\iota_{F(X')}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\iota_{F(X)}} & F(G(F(X))) \\
 \downarrow F(\psi) & & \downarrow F(G(F(\psi))) \\
 F(X') & \xrightarrow{\iota_{F(X')}} & F(G(F(X')))
 \end{array}$$

Ponieważ  $F$  jest wiernym i pełnym funktorem, to możemy najbardziej zewnętrzne  $F$  zdjąć, by otrzymać diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F^{-1}(\iota_{F(X)})} & G(F(X)) \\
 \downarrow \psi & & \downarrow G(F(\psi)) \\
 X' & \xrightarrow{F^{-1}(\iota_{F(X')})} & G(F(X'))
 \end{array}$$

Ponieważ diagram przed zdjęciem  $F$  był przemienny, to również diagram niżej musi taki być - w końcu to zwykłe nałożenie  $F^{-1}$  na wszystkie elementy i strzałki. W takim razie, morfizmy  $F^{-1}(\iota_{F(X)})$  zadają naturalny izomorfizm  $\text{Id}_{\mathbf{C}} \rightarrow G \circ F$ .

$\Rightarrow$

Dowód drugiej implikacji zostaje pozostawiony jako ćwiczenie.



## Wykład 16.10.2023 : Funktory reprezentowalne i granice

### 3.1 Kategoria funktorów

W kategorii **Set** zbiór  $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$  możemy widzieć jako  $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$  gdzie 1 jest singletonem. Robimy to utożsamiając element  $x \in X$  z morfizmem  $1 \mapsto x \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, X)$ .

Uogólniając obserwację wyżej, w dowolnej kategorii **C** obiektowi  $X$  możemy przypisać funktor

$$h_X : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \quad (*)$$

gdzie  $(*)$  zapisujemy czasem jako  $X(Y)$ .

Ponieważ nie we wszystkich kategoriach istnieje odpowiednik singletona 1, musimy rozważać wszystkie obiekty  $Y$  i morfizmy:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \circ f \\ X & \xrightarrow{h_X(f)} & X \end{array}$$

dobrane tak, że diagram komutuje.

Oczywiście, możemy też definiować funktor kowariantny  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  taki, że  $g_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ .

#### Definicja 3.1 : Kategoria funktorów i funktory reprezentowalne.

*Kategorię funktorów*  $(\mathbf{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ , której obiektami są  $h_X$  jak w przykładzie wyżej, oznaczamy  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

Funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest **reprezentowalny**, jeśli  $F \cong h_X$  dla pewnego  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ . Takie  $X$  jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dla morfizmu  $X \xrightarrow{\varphi} X'$  w **C** określamy morfizm  $h_{\varphi} : h_X \rightarrow h_{X'}$  w  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) & \xrightarrow{h_{\varphi}} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X') \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & \varphi \circ \alpha \end{array}$$

Funktor  $h_X$  można również oznaczyć jako  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ . Wówczas dla morfizmu  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  mamy

$$h_\varphi(\alpha) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, X)(\alpha) = \varphi \circ \alpha$$

dla  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$

## Przykład(y) 3.1

1.  $\mathcal{P}(X) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  jest funktorem, który przypisuje  $X$  jest zbiór potęgowy. Jest on reprezentowalny, bo  $\mathcal{P}(X) \cong \text{Hom}(X, 2)$ .

Dla dowolnego zbioru  $X \in \mathbf{Set}$  naturalne przekształcenie  $f(X) : \text{Hom}(X, 2) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  przypisze funkcji  $\alpha \in \text{Hom}(X, 2)$  zbiór tych elementów  $x \in X$  dla których  $\alpha(x) = 2$ . Przekształcenie odwrotne do tego przypisze zbiorowi  $A \in \mathcal{P}(X)$  funkcję  $\alpha : X \rightarrow 2$  taką, że  $\alpha(x) = 1$  jeśli  $x \notin A$  i  $\alpha(x) = 2$  wpp.

2. Funktor kohomologii  $H^n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  z kategorii CW-kompleksów w grupy abelowe taki, że  $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$  jest funktorem reprezentowalnym. Pokazuje to twierdzenie Browna o reprezentowalności o którym uczy się przy okazji topologii algebraicznej.
3. **co tutaj mają do roboty wiązki stycznne?**  $\text{Vect}_n(X) = [X, C^\infty]????$

Przyporządkowania  $X \mapsto h_X$  oraz  $\varphi \mapsto h_\varphi$  dają w oczywisty sposób funktor  $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ .

### Lemat 3.1 : Yoneda lemma.

Przyporządkowanie  $h : \mathbf{C} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$  zadaje równoważność kategorii  $\mathbf{C}$  z pełną podkategorią kategorii  $\widehat{\mathbf{C}}$ , której obiektami są funktory reprezentowalne.

### Dowód

Wystarczy pokazać, że  $h$  jest funktorem wiernym, pełnym i w zasadzie surjektywnym.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h(X)} & h_X = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h_\varphi \\ X' & \xrightarrow{h(X')} & h_{X'} = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X') \end{array}$$

Chcemy pokazać, że przekształcenie  $h$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \in & \searrow & \\ \varphi & \xrightarrow{h} & h_\varphi \end{array}$$

jest bijekcją.

Musimy pokazać, że

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'}) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \xrightarrow{\quad} & h_\varphi \end{array}$$

jest bijekcją.

Jeśli funktor  $F \in \widehat{\mathbf{C}}$  jest reprezentowalny, to reprezentujący go obiekt jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu, bo

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \cong & & \searrow \cong \\ h_X & \xrightarrow{\quad \star \star \quad} & h_{X'} \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad \star \quad} X'$$

izomorfizm  $\star$  pojawia się bezpośrednio po tym, że  $F \rightarrow h_X$  i  $F \rightarrow h_{X'}$  są izomorfizmami z definicji i od razu zadają izomorfizm  $\star\star$ .

Niech teraz  $F \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(h_X, h_{X'})$ .

Jeśli  $F = h_{\varphi}$ , to mamy

$$\begin{array}{ccc} & h_\varphi & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ h_X(X) \ni \mathrm{id}_X & & h_{X'}(X) \\ & f & \\ & \curvearrowright & \end{array}$$

WRÓCIĆ TUTAJ BO NIE WIEM CO SIĘ DZIEJE



## 3.2 Granice i kogranice

Czyli o granicach odwrotnych [granica] i prostych [kogranica].

Niech  $I$  będzie małą kategorią, a  $F : I \rightarrow \mathbf{C}$  będzie funktorem.

### Definicja 3.2 : granica funktora $F$ .

Obiekt  $X$  z rodziną odwzorowań (zbioru morfizmów)  $\Pi_i : X \rightarrow F(i)$  dla  $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$ , które spełniają

☕ [zgodność] dla dowolnych  $i \xrightarrow{\alpha} j$  w  $I$  diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Pi_i \swarrow & & \searrow \Pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j) \end{array}$$

komutuje, tzn.  $\Pi_j = F(\alpha) \circ \Pi_i$ .

☕ [uniwersalność] dla każdego układu  $(X', \Pi'_i)$  spełniającego poprzedni warunek istnieje jedyny morfizm  $\lambda : X' \rightarrow X$  taki, że dla każdego  $i \in I$  diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\lambda} & X \\ \Pi'_i \searrow & & \swarrow \Pi_i \\ & F(i) & \end{array}$$

komutuje

jest nazywany **granicą funktora  $F$**  i oznaczamy ją jako  $\lim F$ .

Granica funktora może nie istnieć, ale zawsze gdy istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

### Przykład(y) 3.2

1. Dla  $I = \{0, 1\}$  oraz  $F : I \rightarrow \mathbf{C}$  granicę  $\lim F$  nazywamy **produktem** obiektów  $F(0)$  i  $F(1)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Pi_1} & F(1) \\ \Pi_0 \downarrow & \searrow \Pi'_1 & \uparrow \\ F(0) & \xleftarrow{\Pi'_0} & X' \end{array}$$

**Definicja 3.3 : granica odwrotna.**

## Wykład 23.10.23 : Funktory sprzężone [adjoint functors]

### Definicja 4.1 : funktory sprzężone.

Para funktorów  $L : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  i  $R : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  nazywamy **parą sprzężoną** (L jest lewo sprzężony do R, a R jest prawo sprzężony do L), jeśli istnieją naturalne bijekcje (zarówno względem  $\mathbf{A}$  jak i  $\mathbf{B}$ )

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(A), B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, R(B))$$

Funktory sprzężone oznaczamy  $L \dashv R$

### Przykład(y) 4.1

1. Jest sporo przykładów, gdy R jest *funktoorem zapominającym*

☕ jeśli  $R : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , wtedy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(*, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$$

grupa ↗
← grupa jako zbiór

\* będzie grupą wolną o zbiorze generatorów A, co oznaczamy  $F_A$ .

☕  $R : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Set}$  z bijekcjami zdefiniowanymi jako

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_K}(LA, V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, V)$$

gdzie LA to przestrzeń liniowa o bazie równej zbiorowi A.

2. Dla R-modułów A, B, X zachodzi

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes X, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$$

dla  $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(X, B))$  mamy

$$(a \otimes x \mapsto (\varphi(a))(x)) \mapsto \varphi$$

Dla ustalonego X mamy funktory sprzężone z R-modułów w R-moduły:  $L = - \otimes X$  oraz  $R = \mathrm{Hom}(X, -)$

3. Bardzo często włożenie kategorii w inną kategorię jest funktorem mającym functor sprzężony.

☕ Włożenie kategorii **Ab**  $\hookrightarrow$  **Grp** posiada funktor sprzężony:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\star, B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(A, B)$$

komutant dowolnej grupy  $A$  przechodzi przez każdy homomorfizm  $\varphi : A \rightarrow B$  na element neutralny, więc od razu indukowane mamy przekształcenie  $A^{\mathrm{op}} \rightarrow B$ , stąd  $\star = A^{\mathrm{op}}$ .

☕ Włożenie kategorii ciał w dziedzinę wyrzuca część homomorfizmów. Mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ciała}}(\star, K) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dziedziny}}(R, K)$$

Jeśli mamy odwzorowanie z pierścienia  $R$  w ciało  $K$ , to to odwzorowanie rozszerza się na odwzorowanie z ciałą ułamków ciała  $R$  w ciało  $K$ :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & K \ni \begin{matrix} \varphi(p) \\ \varphi(q) \end{matrix} \\ & \searrow & \nearrow \\ & R_0 \ni \frac{p}{q} & \end{array}$$

stąd  $\star = R_0$

☕ Włożenie zwartych przestrzeni Hausdorffa w przestrzenie topologiczne **CptT**<sub>0</sub>  $\hookrightarrow$  **Top** mamy

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CptT}_0}(\star, Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

więc  $\star = \beta X$  czyli uzwarceniem Cecha-Stone'a. To jest maksymalne możliwe uzwarcenie.

Bierzemy przestrzeń  $X$  i patrzymy na wszystkie ciągłe odwzorowania z  $X$  w  $[0, 1]$  i potem odwzorowujemy diagonalnie  $X$  w ten produkt, a potem domykamy obraz tego diagonalnego odwzorowania i to jest maksymalne uzwarcenie.

#### Fakt 4.1 : jedyność funktora sprzężonego.

Funktor sprzężony, jeśli istnieje, to jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

#### Dowód

Bardzo poglądowy, bo trzeba się dokładnie wgrzyźć w spojrzenie jak to działa na morfizmach.

$R(B)$  to jedyny element reprezentujący funktor

$$A^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(LA, B) \in \mathbf{Set}$$



Z lematu Yonedy wiemy, że jeśli takie coś istnieje, to jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu.



### Fakt 4.2 : funktory sprzężone zachowują granice (prostą/odwrotną).

Jeśli  $L \dashv R$ , to  $R$  zachowuje granicę, a  $L$  kogranicę.

#### Dowód

#### OBRAZEK

Musimy wziąć dowolny obiekt  $A \in \mathbf{A}$  i sprawdzić, czy  $\Pi'_i : A \rightarrow (R \circ F)(I)$  sfaktoryzuje się w jedyny możliwy sposób na  $R \circ R(\Pi_i)$ . Musimy wziąć obiekt  $LA \in \mathbf{B}$  i tutaj dostajemy jedyną strzałkę  $LA \rightarrow X$ , gdyż  $X$  jest granicą. Ale sprzężoność  $R$  z  $L$  mówi, że mamy jednoznaczność odpowiadania strzałek między elementami  $\mathbf{A}$  a elementami  $\mathbf{B}$ .



## 4.1 Kategorie addytywne i abelowe

### Definicja 4.2 : kategoria addytywna.

**Kategoria addytywna**  $\mathbf{A}$  to kategoria

☕ Dla każdej pary obiektów  $A, B \in \text{Ob} \mathbf{A}$  na  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$  jest określona struktura grupy abelowej. Złożenia są biaddytywne:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f'} C \xrightarrow{h} D$$

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$

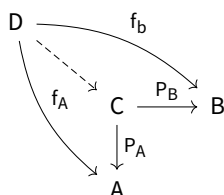
$$h \circ (f + f') = h \circ f + h \circ f'$$

- Istnieje *obekt zerowy*  $0$  taki, że  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(0, 0) = 0$  jest grupą trywialną
- Dla dowolnej pary obiektów  $A, B \in \text{Ob } \mathbf{A}$  istnieje obiekt  $C$  (zwykle oznaczany  $A \oplus B$ ), który jest ich *produktem i koproduktem*, tzn.: istnieją morfizmy

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{i_A} \\ \xrightarrow{p_A} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{array} B$$

takie, że  $p_A \circ i_A = \text{id}_A$  i  $p_A \circ i_B = 0$  (analogicznie gdy przestawimy  $A$  i  $B$ ).  
Dodatkowo,  $i_A p_A + i_B p_B = \text{id}_C$ .

Tłumacząc ostatni warunek, chcemy pokazać, że istnieje jedyna strzałka  $D \rightarrow C$ :

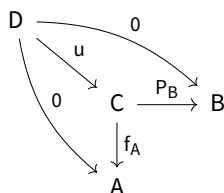


Zauważmy że  $i_A f_A + i_B f_B : D \rightarrow C$ , wystarczy więc sprawdzić, czy taka definicja  $D \rightarrow C$  sprawia, że diagram komutuje, tzn. złożyć ją z  $p_A$  i  $p_B$ :

$$p_A(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_A i_A}_{\text{id}_A} f_A + \underbrace{p_A i_B}_{0} f_B = f_A$$

$$p_B(i_A f_A + i_B f_B) = \underbrace{p_B i_A}_{0} f_A + \underbrace{p_B i_B}_{\text{id}_B} f_B = f_B$$

Jeśli istnieją dwa takie odwzorowania, to ich różnica u zamykałaby diagram



Zauważmy, że

$$\begin{aligned} u &= \text{id}_C \circ 0 = \\ &= i_A p_A u + i_B p_B u = \\ &= i_A 0 + i_B 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się dla koproduktu.

## Dygresja : parę słów o zerach.

Dla dowolnego obiektu  $A \in \text{Ob } \mathbf{A}$  mamy  $\text{Hom}(0, A) = 0$  i  $\text{Hom}(0, A) = 0$ , bo dla  $f : A \rightarrow 0$  jest  $\text{id}_0 \circ f = f$ , czyli  $f = 0 \circ f$ , a więc

$$0f = (0 + 0)f = 0f + 0f \Rightarrow 0 = 0f \Rightarrow f = 0$$

## Przykład(y) 4.2

1. **AB**
2. R-moduły
3. Presnopy grup abelowych na jakiejś przestrzeni topologicznej (lub kategorii)

**Pre – snop**/ $\mathbf{AB}(X)$  i od razu zagubione w tym gąszczu snopy.

## Definicja 4.3 : kategoria abelowa.

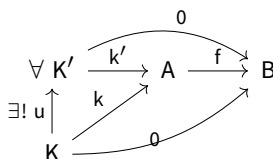
Kategoria addytywna jest **abelowa**, jeśli każdy morfizm ma jądro i коядро i naturalny morfizm z koobrazu w obraz jest izomorfizmem.

Definicja wyżej często jest formułowana w inny, równoważny, sposób.

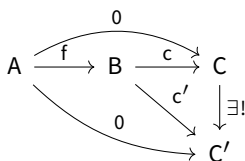
Kilka wyjaśnień:

☞ Jądro  $f$  to ekwalizator  $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$ . Inaczej, jest to  $K \xrightarrow{k} A$  taki, że

1.  $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = 0$
2. Zachodzi własność uniwersalna:



☞ Kоядро  $f$  to koekwalizator  $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} B$  jak w następującym diagramie:



☕ Niech  $f : A \rightarrow B$ , wówczas

- $\text{im } f = \ker(B \rightarrow \text{Coker } f)$
- $\text{Coim } f = \text{Coker}(\ker f \rightarrow A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{c} & C \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{Coim } f & \dashrightarrow & \text{im } f & & 
 \end{array}$$

Naturalne odwzorowanie zaznaczone przerywaną linią ma być izomorfizmem jeśli działamy w kategorii abelowej.

#### Definicja 4.4 : mono-, epi-.

Morfizm  $f : X \rightarrow Y$  jest

☕ **monomorfizmem**, jeśli dla dowolnych dwóch odwzorowań  $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$  zachodzi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast powyższego zażądać, żeby dla każdego  $g : Z \rightarrow X$   $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$

☕ **epimorfizmem** nazywamy morfizm  $f : A \rightarrow B$  taki, że mając  $h_1, h_2 : B \rightarrow W$  zachodzi

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

W kategorii addytywnej można zamiast tego powiedzieć, że mając  $f : A \rightarrow B$  i  $h : B \rightarrow W$  to

$$hf = 0 \Rightarrow h = 0$$

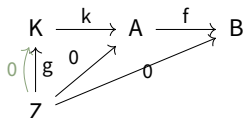
Można pokazać, że jeśli  $f$  jest monomorfizmem, to  $\ker f = 0$ , a jeśli  $f$  jest epimorfizmem, to  $\text{Coker } f = 0$ .

## Lemat 4.3.

Jądra są monomorfizmami, a коядра są epimorfizmami.

## Dowód

W przypadku jądra wystarczy zbadać diagram:



i zauważyć, że jedyność odwzorowania  $Z \rightarrow K$  wymaga, aby  $g = 0$ .



## Uwaga 4.4.

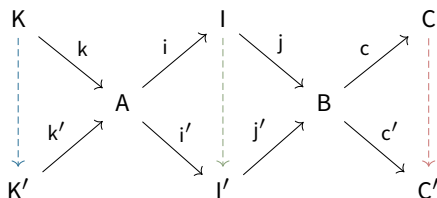
Dla każdego morfizmu  $f : A \rightarrow B$  w kategorii abelowej istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, rozkład

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow[\text{epi}]{i} I \xrightarrow[\text{mono}]{j} B \xrightarrow{c} C$$

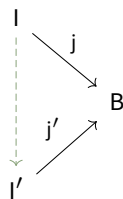
w którym  $k = \ker f$ ,  $c = \text{Coker } f$ ,  $i = \text{Coker } k$  oraz  $j = \ker c$  i  $f = j \cdot i$ .

## Dowód

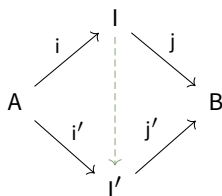
Założmy, że istnieją dwa takie rozkłady:



Strzałki **niebieska** i **czerwona** są izomorfizmami wynikającymi z definicji kategorii abelowej. Strzałkę **zieloną** dobieramy w taki sposób, aby diagram



komutował. Chcemy jeszcze pokazać, że lewa strona również komutuje, czyli zajmujemy się diagramem



#### Lemat 4.5.

W kategorii abelowej, jeśli  $f$  jest epimorfizmem, to  $f = \text{Coker } \ker f$ , a jeśli  $f$  jest monomorfizmem, to  $f = \ker \text{Coker } f$ .

#### Dowód

Zrobimy dowód dla epimorfizmu korzystając z rozkładu przedstawionego wyżej.

$$K \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{0} 0$$

wiemy, że  $j$  jest  $\ker(B \rightarrow 0)$ , czyli funkcji zerowej. Czyli musi być  $j = \text{id}_B$ , możemy więc przerysować

$$\begin{array}{ccccccc} K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \xrightarrow{j} & B \xrightarrow{0} 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ K' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \xrightarrow{0} 0 \end{array}$$

ale przecież  $i : A \rightarrow I$  było  $i = \text{Coker } \ker f$ , z drugiej strony ponieważ  $A \rightarrow I \rightarrow B$  jest równe  $f$ , a w tym konkretnym przypadku jest to równe  $A \rightarrow B \rightarrow B$  gdzie druga strzałka to  $\text{id}_B$ , to musi być  $i : A \rightarrow I = f : A \rightarrow B$ .



### Uwaga 4.6.

W kategorii addytywnej warunek z 4.4 jest równoważny stwierdzeniu, że każdy morfizm ma jądro i коядро oraz zachodzi lemat 4.5

### Przykład(y) 4.3

1. Rozważmy kategorię abelowych grup topologicznych z warunkiem Hausdorffa. Tworzą one kategorię addytywną. Jądro  $\ker f$  to algebraiczne jądro  $f$  z dziedziczną topologią, a  $\text{Coker } f$  to tak naprawdę iloraz przez domknięcie obrazu  $\overline{\text{im } f}$ .

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/\overline{f[A]}$$

Przez taką definicję  $\text{Coker}$  mamy kategorię addytywną, która nie jest kategorią abelową.

Wystarczy sprawdzić

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^\delta \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

gdzie  $\mathbb{R}^\delta$  ma topologię dyskretną, a  $\mathbb{R}$  traktujemy jako zwykłą przestrzeń euklidesową. Wtedy nie mamy naturalnego izomorfizmu między коядрами **JESZCZE RAZ PRZEMYŚLEĆ TEN PRZYKŁAD**

2. Podstawowym przykładem kategorii abelowej jest kategoria  $R$ -modułów. Bardzo często kiedy pracujemy w kategorii abelowej zachowujemy się jakbyśmy byli w kategorii  $R$ -modułów na mocy twierdzenia Freyd-Mitchella:

### Dygresja : twierdzenie Freyd-Mitchella.

Mała kategoria belowa ma wierne, pełne i dokładne zanurzenie w kategorię  $R$ -modułów dla pewnego  $R$ .

## Wykład 30.10.2023 : Kompleksy łańcuchowe i (ko)homologie

### 5.1 Kompleks łańcuchowy i sympleksy

#### Definicja 5.1 : kompleks łańcuchowy.

**Kompleks (ko)łańcuchowy** w kategorii abelowej  $\mathbf{A}$  to ciąg obiektów i morfizmów

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

taki, że dla każdego  $n$   $d^n \circ d^{n-1} = 0$

#### Przykład(y) 5.1 : kompleksów łańcuchowych

1. Niech  $X$  będzie *kompleksem symplecjalnym*. Z takim sympleksem można teraz stworzyć kompleks symplecjalny z obiektami

$$C_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

i wtedy  $\partial : C_n X \rightarrow C_{n-1} X$  jest odwzorowaniem brzegu między tymi obiektami takim, że

$$\partial[\sigma^n] = \sum_{\tau: \Delta^{n-1} \rightarrow \sigma^n} \pm [\tau^{n-1}]$$

gdzie  $\sigma^n$  to generator składnika  $\mathbb{Z}$  odpowiadający sympleksowi  $\sigma^n$ . Jeśli mamy sympleks  $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$  to przez ścianę  $\tau^{n-1}$  rozumiemy

$$\tau^{n-1} = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

gdzie przez  $\widehat{v_i}$  rozumiemy opuszczenie tej współrzędnej.

2. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, wówczas

$$S_n X = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}$$

gdzie  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  jest ciągłym odwzorowaniem z sympleksu w  $X$ . To się nazywa *kompleks singularny*.

Odwzorowanie brzegu  $\partial : S_n X \rightarrow S_{n-1} X$  na  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  przyjmuje wartość

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \upharpoonright_{i\text{-ta ściana}})$$



## 3. Kompleks de Rhama

Niech  $M$  będzie gładką rozmaitością,  $A^n = \Omega^n M$  będzie zbiorem gładkich form na niej. Wówczas  $d : \Omega^n M \rightarrow \Omega^{n+1} M$  jest pochodną zewnętrzną.

W szczególności, jeśli  $M = T^2$ , to  $H^1 = \mathbb{R}^2$ ,  $H^2 = \mathbb{R}$  oraz  $H^{>2} = 0$ .

## 5.2 Homologie

Skoro  $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$ , to  $\text{im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ , więc możemy zastanowić się nad

$$H_n X = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Tak zdefiniowane  $H_n X$  nazywamy **homologiami**.

### Definicja 5.2 : ogólna definicja (kohomologii).

Niech  $A^\cdot$  będzie kompleksem (ko)łańcuchowym i patrzymy na jego wycinek

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow a & \nearrow \ker d^n & & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

Ponieważ  $d^n \circ d^{n-1} = 0$ , to pojawia się nam od razu odwzorowanie do jądra  $a : A^{n-1} \rightarrow K$ . Chcemy więc nazwać

$$H^n(A^\cdot) = \text{Coker } a$$

**homologią.**

Ale to samo można zrobić dualnie, tzn.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C & & \\ & & & \nearrow \text{Coker } d^{n-1} & \downarrow b & & \\ \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

i zdefiniować  $H^n(A^\cdot) = \ker b$ .

### Lemat 5.1.

W definicji jak wyżej  $H^n(A^\cdot) : \text{Coker } a \cong \ker b$ .

### Dowód

- ☕ Przy dodatkowym założeniu, że  $d^{n-1}$  jest monomorfizmem, a  $d^n$  jest epimorfizmem, dostajemy

$$d^n = \text{Coker } \ker d^n = \text{Coker } k$$

$$d^{n-1} = \ker c$$

Pokażemy, że  $a = \ker ck$  oraz  $b = \text{Coker } ck$ , z czego od razu wynika teza:

$$\begin{array}{ccccc} A^{n-1} & \xrightarrow{a} & K & \xrightarrow{ck} & C & \xrightarrow{b} & A^n \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Coker } a & \xrightarrow{\star} & \ker b & & \end{array}$$

i strzałka  $\star$  jest izomorfizmem na mocy lematu 4.5.

POBAWIĆ SIĘ WYKRESEM za zdjęcia

- ☕ Bez dodatkowych założeń

ZDJĘCIA




### 5.3 Pull-back i push-out

Po polsku czasem mówi się na to kwadrat kartezjański i kwadrat kokartezjański.

#### Definicja 5.3.

- ☕ Pull-back to granica diagramu

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

 Push-out to z kolei kogranica diagramu

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Y \end{array}$$

### Fakt 5.2.

W abelowej kategorii istnieją pull-backi i push-outy.

### Dowód

Kandydatem na pull-back będzie jądro odwzorowania.

