Charakterystyka Eulera

332742

October 2023

1 Wykład 0 (03.10.2023)

organizacj: środa 8:00 - wykład
konsultacje: środa 12 (mogą być też inne)
meil: tjan@impan.pl (ten lepszy)
pokój 409

1.1 Charakterystyka Eulera, czyli napis $\chi(X)$

w napisie wyżej- czym może być X? :

- X_1- zbiór skończony, wtedy $\chi(X_1) = |X_1|$
- X_2- przestrzeń wektorowa, wtedy $\chi(X_2) = dim\ X_2$

  tu należy powiedzieć że między przestrzenaim jest pewnien związek
  $X_1 \rightarrow X_2$ przezstrzeń wsystkoch funkci X pzypisuje k (nad cialem K) - $\{X, k\}$, gdzie wymiar X_2 to wymiar X_1
- X_3 kompleksy symplicjalne - będziemy o nich mówić
- X_4 uogólnienie przestrzeni wektorowej, czyli kompleks łańcuchowy

  Podobnie jak z $X_1 \rightarrow X_2$ jest konstrukcja co idzie z X_3 do X_4

Druga rzecz to jakie własności może przyjmować charakterystyka Eulera

1. w dwóch pierwszych są to liczby naturalne
2. (kolejne będą ujemne (kiedyś))

1.2 sympleksy :

V- wierzchołki
X (zbiór skonczony)$X \subset 2^V$
$b \subset a \in X$ to $b \in X$ (czyli jest to system zbiorów dziedziczny w dół)

uporządkujowemy $X_1 = V$ $X_2 = \{a \in X; |X| = K\}$(będziemy uogólniać dla X_k

Prawdopodobnie sposoby liczenia:

- bierzemy wielomian $\Sigma(-1)^{k-1}|X_k| = \chi(X)$ (wieszchiołki waże 1) ale równie dobrze mogę zdefiniować to dla dowolnego systemu zbiorw
- $X_{2k} = \{X_K, k\}$ czyli biorę wszykie funkcie k-wymiaroawa przestrzeń linniowa nad K i wtedy $\Sigma(-1)^{k-1} dim X_{2,k}\chi(X) \quad (\heartsuit)$

warunek $(\heartsuit)$ gra rolę, bo mogę wziąć jego(?) brzeg.
Wtedy brzeg będzie kombinacją liniową k-1 elementów.
a ma elementy

$$\{1, 2, ...k\}$$

(to nie liczby, tylko nazwy) i takiemu zbiorowi mogę przypisać zbiór

$$\hat{i} = \{1, 2, ..., i-1, i+1, ...k\}$$

(bez wierzchołka i)
$a \in X_k \xrightarrow{\partial} a = \Sigma(-1)^i(\hat{i})$ gdzie to żyje i czy procedura ma sens i ono jest fajne bo należy do mniejszej przestrzeni $X_{2,k-1}$

moge to dalej rozszerzać $X_{2,k} \rightarrow X_{2,k-1}$ więc element przechodzi przez formułkę i dalej rozszerza się linniowo (jest to operacja brzegowania)

operacja brzegowania: możemy ją brzegować (rysujemy trójkąciki)

1.3 charakterystyka przestrzeni

$\bar{X}$- realizacja geometryczna skończonego kompleksu symplicjalnego X(po ludzku triangulacja) . Wtedy

$$\chi(\bar{X}) = \chi(X)$$

to co nie działa (lub może nie działać) to: dużo realizacji przechodzi na jedna przestxeń.
Więc zdefiniowaliśmy (charakterystykę ?) X triangulacji ('Haup permutung"-dygresja), ale chcemy, żeby χ było niezmiennikiem przestrzeni, a nie niezmiennikiem jej triangulacji
Strategia jak próbujemy z tym sobie poradzić to zamiana W (z wzorku $f : v \rightarrow W$) na kompleks łańcuchowy

Dygresja 1.3.1. *kompleksy a zgradowana przestrzeń wektorowa (nad każdą liczbą naturalna mam przestrzeń wketorowa, i ma wyróżniony składnik.*
PRZYKŁAD:
Wielomiany. ich wyróżnionym składnikiem jest stopień

Na kompleksie symplicjalnym mamy operator brzegowy, z fanstaystycza własnością:

$$\partial\partial = 0$$

Tłumaczy ona daczego czasem we wzorze (?) jest " +1 " a czasem "-1" ;

Definicja 1.3.2. *"oficjalna def kompleksu"-bardzije jako ciekawostka chyba: dla każdegoo k jest przetreń wektorowa V_k... i że brzegi się składają do 0 (na marginesie badaniem tego zajmuje się algebra homologiczna)*

zamieniam f (z wzoru $f : W \to V$) i (w?) ciąg dokładny

$$0 \to W \xrightarrow{f} V \to 0$$

([o sympleksach] na początku będzie ich mało, potem więcej - teraz o nich bo mają niezmienni blisko związany z char. i są to homologie: K-ta homologia (to jądro podzielone przez obraz)$H_k = \frac{ker\partial}{im\partial}$ ale to różne ∂)

wcześniej wspomniane równanie $\partial\partial = 0$ pozwala na liczeni homologii.

Przykłady 1.3.3. *policzymy homologie dla tego ciągu*

$$0 \to W \xrightarrow{f} V \to 0$$

najpierw ta druga(prawdopodobnie je jakoś oznaczaliśmy??) $\frac{W}{Im(f)} = Coker(f)$, *oraz pierwsza: Ker(f)*

Fakt 1.3.4. *"fakt z algebry"* $Coker(f) - ker(f) = |W| - |V| = (\bigstar)$

$Coker(f) - ker(f) = |W| - |V| = to\ nic\ nie\ jest$ łatwa algbera, ale wspominamy o tym bo ciekawie się uogólnia. (póżniej XD, teraz jakaś dygresja xd)

(tu się chyba coś zadziało ale zgubiłam)

H_k - kompleks łan. potrzbujemy, żeby każda przestrzeń była skończenie wymiarowa ; wtedy dwie pozostale też (chodzi o W, Im(f))

dobrze żeby ilość pzestrzeni była skończona, oraz ich suma była skończona (to chyba wikipednia tłumaczy ładniej) zatem są potrzebne do polczenia $\chi(W)$, $\chi(V)$ i one są rowne (i to jest to wyżej wspomniane uoglnienie ?) lol nie rozumiem chyba chodziło że $\chi(W) = \chi(V)$

Równość $\chi(W) = \chi(V)$ otwiera możliość: To znaczy V może być nieskończone, ale z tego że, homologie są skończenie wymiarowe (nowe zadanie z l2- operator linioowy między nimi o skonczonym jądrze) lewa strona nie ma sensu, prawaa ma sens

Dygresja 1.3.5. *W teorii przestrzeni Hilberta, skończone jądro i kojądro, to Fredholm. A to wyżej* $(\bigstar)$ *to operador Fredholma - gra on duża role w top-algu* kompleksy są fajnie : 1. bo prowadzą do char

wyjscowa przyczyna chologi ibyla związana przestrzenami top

grupy koksetrera

waramy do def z dim wygląda jak z kapelusza, ale ma przyczyne : char to uniwersalny addytywny nieziennik : udowodnimy twierdzenie :

twierdzenie 1.3.6. $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$
i coś taiego samego jest dla wymirów

coś podobnego jak wzór włączeń i wyłaczeń chcemy wprowadzic na symplekach. do tego potrzebujemy, następujących dwóch rzeczy:

Fakt 1.3.7. *kompleksy symplicjalne mają trochę algebraicznej struktury, np można je dodawać. w nastepujący sposób:*

$$X \subset A \supset Y : X \cup_A Y$$

symbol $\subset$ to bardziej odwzorywanie niż zawieranie (patrz podkompleks)
to jest dobrze określone z dokładnośćią do izomorfizmu: jak symplesky mają cześć wspołną to mogę je wzdłóż tego dodać (więc dość bardzo zależy jak A leży w zbiorach) (debil)

Definicja 1.3.8. *def . pod kompleksu - intuicyjna*

dywersja nie wiem do czego:ogólnie czesto nas interseuja odworowania. zatem fajnie by się dowiedzieć, co to odwzorowanie kompleksów symplicjalnych? Jest funkcja z wierzchołków w wierzchołki, oraz sympleks ma przejść na sympleks.Tu także może,my mieć izomorfizm- wtedy gdy jest odwzorownie jest odwracalna w sensie całość (wieszchołki i symplesky)

(debil) - to działa jak gwiazdka xd

Definicja 1.3.9. *mowimy że niezmiennik (ozn. go N) jest addytywny, gdy działa jak twierdzenie wyżej. pozostaje jeszcze powiedziećczym są znaki "+", "-", ale to działania na grupie abelowej, bo niezmiennik przenosi na elementy grupy abelowej.*
ma wlasność : addtytwnośći i czegoś
izomorficzne mają te samo N

opiczemy ten (bogatrzy niż char) niezmiennik

twierdzenie 1.3.10. *każdy addytywny N jest zdeterminowany przez swoje wartośći na sympleksach(jeżeli znamy na częściach, to znamy na całości)*
(w drugą stronę znając na całości, da się wykonstrułować na mniejszych w jakiś łatwy sposób)

DOWÓD weżmy X
jak X nie jest sympelkesm to łatwe (?)

jak X nie jest sympleksem to co o N? - ma on conajmiej 2 wieszchołki (pzatrz wyrzej) znaczy jest jakiś nie sympleks.
isteniej A w V takie że (minimalny) A nie jest sympleksem
i wtedy rozkładam X
ale najpierw $a \in A$
w x są sympleksy które maja w zbiorze bez a(chodzi że usówamy sympleksy które jak kowielk miały a) suma stożek L(o wieszchołku w a)
chcemu powiedzieć że nie jest połczony ze wszystkimim (łączenie to z sympleksami-anie w zwieszchołkami)
(to była indukcja)
koniec dowodu

rysunek- zabraknie w L rozkład jest na własciwe podzbiory, ppodkompleksy ckd (to jest dowod przeze indukcje, np, przez ilość el X)

to mozna zamienić na wyliczanie (zdjęcue)
definiujemy sobie sympleksy otwarte
w orzestrzeni zlóżonej z dom. sym . mamy bazę
ustalmy że pkt. to otw i domk . i on też tworzą bazie
i teraz (zdj) zamieniamy na kompleksy otwarte i wsolczunniki zależa od ilości symplekśw domkniętych i otwartch
niezmiennik to funkjona linniowny, n aketorzee (na dolonje bazie) i coś tak przypisać dowolną wartość:
$N(X) = \Sigma a_i f_i(X)$ gdzie f_i ilość i wym. sympleków to na czym ewalujuje funkcjownał to f- wektor (i-ta iczba mowi ile jest i-kompelków) ; (pełny addytywny niezmiennik kompleksu sympllicjalnego) b (oddaje wektor)więc jest duuuużo charakerystyk Eulera

1.4 Charakterystyka Eulera jako niezmiennik

Możemy ją dostać z normalizacj, ale wolę żeby X -był przestrzenia - nie zależną do triangulacji, czyli niezmienniczą na podrozbicia

([o rozbiciu- definicja albo własność] jak sympleks zamieniam w kompleks symplicjalny, na brzegu podrozbicia mają się zgadzac; zamiana sympleksu na sumę sympleksów, z tym że na ścianach musi się zgadzać; z przykładu-rysunku niezmiennik na 0 i 1 sympleksie musi być taki sam) - żeby niezmiennik był stabilmy na podrozbicia to musi być 1 (razy stała, która mowi jaka jest charakterystyka eulera dla punktu)

ogólnie (???) jest narzucowne przez

- addytywność (linniowowść)
- niezmienniczość na pod rozbicia

Coś 1.4.1. *kolorujemy sympleks!*
Powiedzmy że na niebiesko, czerwono i żółto. Chcemy, żeby niezmiennik na czerownych, był inny niż na niebieskich (można to robić podobne jak w twierdzeniu wyżej)

Przykłady 1.4.2. *przykładem rozbicia są barocentry. w punktach umieszchasz masę, a potem a jakiegoś archimedesa wstawiasz je na środku ciężkości, robiąc to pare razy można znaleść środek bryły i łącząc go otrzymać rozbicie*

2 Wykład 1

omówienie treści zadań z listy 1 (na kartce)

2.1 zasada Lepscheica

wszystko jedno czy z charakterysyuki Eulera czy homologiii

$$\chi C_* = \chi H_*$$

mamy kompleks łańcuchowy $0 \to c_n \to c_n - 1..... \to c_0 \to 0$ zakładam że są skónzcenie wymiarwe nad ciałęm

$$\chi C_* = \Sigma(-1)^I dimC_i$$

mamy homologie $\partial\partial = 0, H_k = \frac{ker}{im}$ zamienaim w komplesk łancuchowy Delkarując żę różiczki są0

$$0 \to h_n \to h_n - 1..... \to h_0 \to 0$$

; możemy poilczyć jego char Eulera

$$\chi H_* = \Sigma(-1)^I dimH_i$$

mamy sk wymiarową przestrzeń i jej iloraz, obydwa mają sens (pod warunkiem że C ...?) potrzbujemy napisać ciąg żeby były jawnie napisane H_i
dodatkowe oznaczenie$Z_k = kerk, B_k = im(\partial k + 1) = brzegi$ Z to cykl(z niemieckiego) (cykle są bez brzegu, brzegi są brzegami (dleta k jest z $c_k doc_k - 1$) możemy się napisać

$$C_n = Z_k \oplus B_{k-1}$$

wynika to z ciągów dokładnyvh

$$f : W \to V kerf = imf \simeq v$$

($z_k$to jądro bela) teraz pomyślmy co to C_{n-1} to jest dokładnie to samo

$$C_{n-1} = Z_{n-1} \oplus B_{n-2}$$

. czy jestem to w stanie bardziej rożłożyć?

$$C_n = Z_k \oplus B_{k-1} = H_n + B_n + B_{n-1}$$

tylko że B_n jest mało interesujące .... i tak dalej

$$C_{n-1} = Z_{n-1} \oplus B_{n-2} = ...$$

czyli ogólnie:

$$c_{k-1} = Hk + 1 + Bk - 1 + Bk - 2$$

na zamianę odejmujemy i dodajemy skraca się ... skarejne B_n to 0, więc zostanie ciąg H_n

zasada lepscheta i wymyślił ją hans hopf. i ona jest znacznie ogólniejsza

2.2 druga rzecz

X, Y przestrzenie, oba mają geometryczną realizację (triangulację) Δ_X, Δ_Y. Liczymy charakterystykę eulera z triangulacji Δ_X i nazywamy ją $\chi(X)$, podobnie $\chi(Y) = \chi(\Delta_Y)$.

Wiemy, że X i Y są homeomorficzne. Chcemy wnioskować równość charaktertsytyk. Problem to: nie wiemy nic o tym homomorfizmie, to znaczy może on zniekształcać triangulację.

Możemy użyć podrozbicia (z poprzedniego wykładu, wiemy że charakterystyka nie zmienia się przy podrozbiciach).

więc jak podrozbije na równe to koniec.

Troche dokładniej:

Coś 2.2.1. *"pomiędzy definicją a faktem?"*
gdy mam realizację geometyczną (triangulację), mogę zażądać, żeby każdy trójkąt/ odcinek był rowny 1, i to powiązane z metryką, bo triangulacja prowadzi do metryki.

Niech $h : X \to Y$, h to homomorfizm. Gdy wezmę sympleks w X (czyli jakieś Δ?) to $h(\Delta)$ w tej metryce jest/może być duży. To nam się nie podoba. Możemy wziąć podrozbicie X (np. barycenytcznym), dzięki temu powstałe trójkąty będą dużo mniejsze (zatem średnica, z tą metryką idzie do zera- trzeba policzyć odległość środka od punktu (tu chyba chodziło o każdy wierzchołek i maksimum po tym). Gdy w X mam małe trójkąciki, to w Y mogę dostać małe (czyli homomorfizm był istotny!)

Wniosek 2.2.2. *Homomorfizm h przeprowadza symplesky Δ_x (może to być głębokie rozbicie) w Δ_Y o małej średnicy (czyli porównywalnej z czymś w Y)*

Teraz, chcemy trochę w drugą stronę. Dlatego h zamieniamy na f (które będzie sympliciałem)
przez tamtą różnice wierzchołek ląduje blisko jakiegoś wierzchołka z Y/

v- wieszchołke w X, f(v) to przeniesnienie wirzchołka na Y
dla każdego v wybieram wierzchołek w Y, którego v jest blisko, a następnie przedłużam to, do rozbicia symplicjalnego.

dlaczego wolno to zrobić: ?
chcemy powiedzeć że będą rozpinać symplesk (nie napisze tego, to rysunki i miało sens) - jak są blisko to rozpinają sympleks bliskie mniej niż 1/2 bliskie

twierdzenie 2.2.3. *"twierdzenie o aproksymacji symplcjalnej" kązde $f : X \to Y$ jest 1/2 bliskie odwzorowaniu symplicjalnemy Δ_x" $\to \Delta_y$*

argument jest taki jak wyżej(najpierw dowód, potem co dowodzimy)

2.3 homotopie

- (ciekawiej się myśli w filozofii przyrody, a nie top algu)
- chyba chcemy przedsyawić połaczenie homotopi i odwzorowania symplicjalnego, albo jak są powiązane

Definicja 2.3.1. *Rozważmy X- przesteń (np. kompleks symplicjalny, ale chwilowo jest to standardowa def, napisana nieumiejetnie bo ja)*
Niech f,g będą ciąglymi odwzorowaniami $f, g : X \to Y$. Załóżmy że punktowo obrazy są blisko (czyli: dla $x \in X$ mamy $|f(x) - g(x)|$ małe). Mnożymy X razy odcinek I (f będzie u góry na $X \cdot \{1\}$, g u dołu na $X \cdot \{0\}$) i homotopia to możliwośc przedłużenia odzowrowania jednego do drugiego

Homotopia jest ważna, bo dla kompleksów symplicjalnych bliskie odzworowania są homotopijne ((♡) nie jest to zawsze, ale dla nas jest bo rozważamy tylko sympleksy). Przyczyna jest glupia- komplesky (blisko siebie?) w malej sciany są sciągalne (wygląda jak stożek, dwa odzwrowania w stożku to możemy sciągnąc i się zbliżają llinniowo).

Przykłady 2.3.2. *kontrprzykład/przykład (♡) źle się ddzieleje dla przestrzeni "hawajski kolczuk". Tam nie ma otoczenia, które jest sciągalne, więc znajdziemy bliskie (siebie takie ?) które nie są homotopijne*

Fakt 2.3.3. *Bliskie odzworowania są homotopijne (czasem)*
Homotopia jest bliskością, i w tym przypadku homotopia to tranzytywne domniecie bliskośći

Przykłady 2.3.4. *homotopia w realnym życiu - przy eksperymentach jest jakaś bład, i tu żeby wiedziećjak działą*

2.4 homotopia symplicjalna

wariant homotopi dla przestrzeni symplicjalnych to "homotopia symplicjalna"
Dla sympleksów jeszcze nie wiemy co to homotopijność, ale wiemy co to bliskość.

Definicja 2.4.1. *Niech X, Y triangulacje i $f, g : X \to Y$ Homotopijność symplicjalna znaczy, że f(v) i g(v) są odległe najwyżej o 1 (czyli te dwa są połączone krawędzią- tu się odwołujemy do metryki ktrórej nie opisałam)*

Powyższa definicja (szczególnie bez opisu jak wygląda tu metryka) jest dość dziwna. Trochę inna to:

Definicja 2.4.2. *f jest symplicjalnie homotopijne z g, to znaczy gdy zmieniam wartość w jednym wierzchłoku (pilujnąc, żeby odwzorowanie bylo symplicjalnie!) i biore trantytywne domkniecie (to coś się dzieje).*
jeżeli f,g różnią się tylo w 1 pkt, to mogę po krawędziach zdeformować jedno do drugiego.

jeżeli f,g różnią się tylo w 1 pkt, to deformacja: "znowu nie przepisze- zdjęcie " czyli mogę po krawędziach zdeformować jedno do drugiego. "dlaczego ja tak cierpię?"- Januszkiwecz (czyli dlaczego to jest istotne)
- bo homologie symplicjalnie indukują odzworowania lańcuchowe,(to będzie to C) kompleksy sympolcjalne X, Y i odwzorowanie f i formalne kombinacje liniowe ze wzpółczynnikami z ciała (ozn. (?) $C_k(x)$) i patrzymy na bazę, ona przechodzi ma bazę (to chyba nie ?) w $C_k(Y)$
odzworowanie C(f) tylko czasem wymiar może spaść(bo coś się sklei)

diagram komutuje !
brzegi komutują z C(f) dla symplekśow co się dławią do 0. brzeg tez jest 0!
więc indukują odwzorowania na homologiach kompleksu łancuchowego (tyłmaczymy co to znaczy)

H-ta komhomologia zaraz się znudzę i będą zdęcia h- kombinajca linniowa sympleksó,w
(opis co się działo na zdjęciu) $f_*(h)$ formalna kombinacja szeregów w Y - np. chec żeby było cyklem, bo wtedy mogę przejść do homologi(tylko trzea sprawdzić że nie zależy od reprezentatana h) robiimy : liczymy różniczkę (wyszło że jest cykl, obliczenia znikły gwiazdka zmieniała zdkęcie) bierzemy klasę homolog []; homologia + brzeg, pchę i klasa homologi, linniowe brzeg= brzegoi C z komutowania, a potem branie homologii zabija. fakty bez dowodu (bo za trudn e)

Fakt 2.4.3. *Jeżli mamy Δ kompleks symplicjalny i bierzemy jego dowolne podrozbicie; gwiazdka to formlane kombinacje (nie ma szans żeby kompleksy dawały podrozbicia), ale kompleksy mamy homologie*
homologie są zachowywanie (jest to dużo silniejsze od char eulera

twierdzenie 2.4.4. *Jeżli $f, g : \Delta_X \to \Delta_Y$ odwzorowanie symplicjalne i homotopijnie symplicjalnie to jest $C_*(\Delta_X \to C_*\Delta_Y)$indukowane przez f_*, g_*, $H_*(\Delta_X) \to H_*(\Delta Y)$ i jeśli są homotopijne to są róze*

zastosujemy to wszystko do homeomorfizmyu:
$h : X \to Y, h^{-1} : Y \to X$, gdzie X,Y to prawdopodobnie przestreznie symplicjalne?
Aproksyumujemy symplcjalnie (ozn. h^ϵ) widać że $h \cdot h^{-1} = id$ oraz $h^{-1} \cdot h = id$ a w drgim nie (to znaczy dla literek C;
Wiemy że dłozrnir(?) jset epsilion bliskie identycznoścu, i drugie też, ale to odwzorowania symplicjalne, infukuje w homolifiach - identycznośc

Podsumowywując: izomorfizmy indukują izomorfizmy w homologiach

Dygresja 2.4.5. *co mamy dziś i literatura: dziś:*
mamy coś takiego jak kompleksy singularne (Eidenberg)i wtedy da się (co?) bez triangulacji
źródło: Alan Hatchiet (w jakiejś ksiązce o topologi algebraicznej) jest online;i stare rosyjskie kiążki (ale chyba nie są po angielsku)

c_*- kompleks łancuchowy grup; * to k+0,1,2,3 woloa grupa algebowa z baza sympleksów, formalne kombinacje syblskwo

i jest operator brzegowania i funktorialnośćhomologi

2.5 Odnośnik do wykładu 0

Rozważmy następujący obiekt algebraiczny: grupa abelowa, której generatory to klasy (izomorficzne?) wszystkich kompleksów symplicjalnych. Oznaczamy: [x] (przed tym może stać wspolczynniki całkowite, liczby wymierne)
Ma ona realcje (bo zadać generatory i relacje to zadać grupę) jeśli mam kompleks symplisjalny

$$[X \cup_A Y] = [X] + [Y] - [A]$$

(to jest dodawanie sympleksów) i bez real jest brzydko. Grupa wolna, generwoana przez symplesky izomorficzna z wolną grupą gen przez symplesy.

Oglądamy addytywe niezmienniki:
w pewną grupę, nasza jest wolna, więc zadajemy na generatowrach

2.6 organizcja

gdześ w listopadzie nie będzie, szukamy jednorazowego terminu, albo wecej niż jedno i jeszcze dwie środy wypadają może byc egzamin