Rachunek prawdopodobieństwa 2R 2023
lista 5: Twierdzenie o zatrzymaniu

1. Uzasadnij, że jeżeli $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, a T jest czasem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, takim, że $\mathbb{E}[T] < \infty$, to

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \mathbb{E}[T] \cdot \mathbb{E}[X_1],$$

gdzie $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

2. Rzucamy kostką tak długo, aż pięciokrotnie wyrzucimy szóstkę. Znajdź średnią wartość sumy wyrzuconych oczek.

3. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niesymetrycznym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$ (tzn. $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, gdzie ξ_k są iid takie, że $\mathbb{P}[\xi_k = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_k = -1] = p \neq 1/2$) i niech $T = \min\{n : \ X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$ dla ustalonych $k, j > 0$.

(a) Pokaż, że $M_n = X_n + n(1-2p)$ jest martyngałem.

(b) Wykorzystując twierdzenie Dooba oblicz $\mathbb{E}[T]$.

4. Niech $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nieujemnym martyngałem. Pokaż, że dla $m > n$, $\{M_n = 0\} \subseteq \{M_m = 0\}$ p.w.

5. Niech $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie filtracją.

(a) Pokaż, że dla każdych $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ i zdarzenia $A \in \mathcal{F}_m$ zmienna losowa

$$\tau = m + (n-m)\mathbb{1}_A$$

jest $\mathbb{F}$-czasem zatrzymania.

(b) Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie $\mathbb{F}$-adaptowalnym ciągiem całkowalnych zmiennych losowych takim, że

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$$

dla każdego skończonego czasu zatrzymania τ. Pokaż, że $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathbb{F}$-martyngałem.

6. Niech $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nieujemnym martyngałem o wartościach całkowitych takim, że $M_0 = m \geq 1$, $M_n - M_{n-1} \leq 1$ oraz $M_n \to 0$ p.w. Pokaż, że dla $k \geq m$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq k\right] = \frac{m}{k}.$$

7. Niech Y_k będą iid takie, że $\mathbb{P}[Y_k \in \{-1, 0, 1\}] = 1$ oraz $\mathbb{E}[Y_k] = 0$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Dla $k \in \mathbb{N}$ rozważmy moment zatrzymania

$$\tau_{-k} = \inf\{n \ : \ S_n = -k\}.$$

Znajdź rozkład zmiennej losowej

$$\sup_{n\leq\tau_{-k}} S_n.$$