Teoria kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsenu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) $\mathcal{C}$ składa się z:
- obiektów $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
  - $id_X \in \mathcal{C}(X, X)$
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C),$$

    które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczymy

$$\mathcal{C}_0 := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako $\mathcal{C}_1$ będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii $\mathcal{C}$.

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria Set, której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0), gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f(x_0) = y_0$.

3. *Top* to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. *Toph* to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in \mathrm{Ob}(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \to Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie
$$F : X \times [0, 1] \to Y$$
takie, że $F(x, 0) = f_0(x)$ oraz $F(x, 1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii *Toph*.
Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.
5. Kategoria *Hask*, której obiekty to typy w Haskelly, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji *Rel*, w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór
$$S \circ R = \{(x, z) \ : \ (\exists\, y \in Y)\ xRy \ \wedge \ ySz\},$$
gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".
7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X. Definiujemy wtedy kategorię $\mathcal{C}$ o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X, a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a, b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriamii $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$

- każdemu obiektowi X kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ w kategorii $\mathcal{D}$ taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

Przykład

$Ab : Gr \to Ab$ to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii $\mathcal{C}$ rozumiemy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X, Y)$ "odwracają się" $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$.

Mówimy, że funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, której obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, że dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ oraz $f : X \to Y$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczymy $\mathrm{Nat}(F, G)$ - **naturalne przekształcenia** funktora F w funktor G.

Przykład

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \to H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przekształceniem między funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są **równoważne**, jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że złożenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k, $Vect_k^{fin}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k, $Mat^{fin}(k)$.

25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \to D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C: $\forall\ D \in \mathcal{C}_0\ |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja $\leq$ obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest $\emptyset$, a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Fakt 1.6

Obiekty końcowe i początkowe, jeśli istnieją, to są jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Niech C i C' będą obiektami końcowymi kategorii $\mathcal{C}$. Wiemy, że $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$, czyli komutujący diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "id_C"] \arrow[dr, "\exists! f"'] & & C \\ & C' \arrow[ur, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

daje $g \circ f = id_C$. Analogiczny diagram daje $f \circ g = id_{C'}$. Stąd f i g to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między C i C'

2. (Ko)granice funktorów a (ko)produtky

Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii $\mathcal{I}$ myślimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, że funktor C jest stały, jeżeli $C(i) = C$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C, $\varphi : F \implies C$, czyli komutujące diagramy (kostożki)

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

- a morfizmy to strzałki $C \to D$ takie, że diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] & & D \\ & F \arrow[ul, Rightarrow, "\psi"] \arrow[ur, Rightarrow, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

  komutuje.

Diagram wyżej można rozpisać jako:

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[d] \arrow[ddl, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\ & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & \\ D & & C \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Definicja 1.7: kogranica funktora

Kogranicą (*granica prosta*) funktora F, $\varinjlim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyżej możemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia $\varphi : F \implies C$ możemy rozważyć naturalne przekształcenia $\varphi : C \implies F$, czyli diagramy (stożki)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

z morfizmami definiowanymi analogicznie.

Definicja 1.8: granica funktora

Granica (*granica odwrotna*) to obiekt końcowy powyższej kategorii stożków, $\varprojlim F$.

Rozważmy kategorię $\mathcal{I}$, która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \to Set$ będzie funktorem, dla którego $F(0) = A$, a $F(1) = B$. Niech φ oraz ψ będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim F \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
F(0) = A & D \arrow[l, "\psi_0"] \arrow[r, "\psi_1"'] \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & F(1) = B
\end{tikzcd}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo $\varinjlim F$ to obiekt końcowy. Jeśli weźmiemy $\varinjlim F = A \times B$, a $\varphi_0 = \pi_A$ oraz $\varphi_1 = \pi_B$ będą rzutami i $f(d) = (\psi_0(d), \varphi_1(d))$, to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna $A \sqcup B$, bo diagram

$$\begin{tikzcd}
F(0) = A \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, "\varphi_0 = i_A"'] & D & F(1) = B \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[dl, "\varphi_1 = i_B"] \\
 & \varprojlim F = A \sqcup B \arrow[u, dashed, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $f(x) = \varphi_0(x)$, jeśli $x \in A$ oraz $f(x) = \psi_1(x)$ jeśli $x \in B$, komutuje.

Definicja 1.9: (ko)produkt

Produktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ dla $\mathcal{I}$ oraz F jak wyżej.
Koproduktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę odwrotną (granicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$

Przykłady

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjański dwóch grup, tak jak w kategorii zbiorów, tj. dla grup A, G, H komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
& G \times H \arrow[dl, "\pi_G"'] \arrow[dr, "\pi_H"] & \\
G & A \arrow[l, "g"] \arrow[r, "h"'] \arrow[u, "g \times h"] & H
\end{tikzcd}$$

Koprodukt to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i_G"'] & A & H \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "i_H"] \\
& H * G \arrow[u, dashed, "\exists ! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie f nakłada na litery słów $G * H$ pochodzące z G morfizm g, a na litery pochodzące z H - morfizm h.

2. Niech $F : \mathcal{I} \to (P, \leq)$ z dwuobiektowej kategorii $\mathcal{I}$ w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(0) = a & d \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(1) = b
\end{tikzcd}$$

to znaczy, że $d \leq a$, $d \leq b$ oraz $d \leq \varinjlim F$. Żeby więc miało to sens dla dowolnego $d \leq a, b$ to $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$. Analogicznie dostajemy, że $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$.

3. Jeśli $\mathcal{I}$ jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a $F : \mathcal{I} \to Set$ jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$, a granicą - nieskończona suma rozłączna $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$.

Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koprodukty są unikalne.

Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.

Przykład

Rozważmy funktor $F : \mathcal{I}^{op} \to Grp$, gdzie $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$ taki, że dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i\to j)=q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie q to morfizm ilorazowy.
Liczby p-adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych różne od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby p-adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq a_i < p$. Okazuje się, że całkowite liczby p-adyczne, $\mathbb{Z}_p$, można zdefiniować jako granicę funktora F:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
\dots \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

3. Obiekty i kategorie monoidalne

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{tikzcd}
M^3 \arrow[r, "\star\times id"] \arrow[d, "id\times\star"'] & M^2 \arrow[d, "\star"] \\
M^2 \arrow[r, "\star"] & M
\end{tikzcd}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \to M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \to M$ takie, że komutują diagramy

$$\begin{tikzcd}
M^3 \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\
M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon\times id"] \arrow[d, "id\times\varepsilon"'] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "="] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.
Obiekt monoidalny w kategorii Cat nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria $\mathcal{C}$ z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalna.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in End(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób.
   Funktor $T \in End(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \to T$, $\varepsilon : Id \to T$, nazywa się **monadą**.