

# Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Informacje wstępne</b>	<b>1</b>
02.10.2024	Grafy Cayleya . . . . .	1
1.	Metryka słów . . . . .	1
2.	Graf Cayleya . . . . .	1
3.	Quasi-izometrie . . . . .	3
4.	Przestrzenie geodezyjne . . . . .	5
5.	Lemat Milnora-Švarca . . . . .	6
6.	Grupy współmierne . . . . .	7
09.10.2024	Lemat Milnora-Švarca . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Niezmienniki izometrii</b>	<b>13</b>
16.10.2024	Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni . . . . .	13
1.	Granica odwrotna . . . . .	14
2.	Przestrzeń końców . . . . .	16
23.10.2024	Przestrzeń końców jest niezmiennikiem q.i. . . . .	19
1.	Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie) . . . . .	19
2.	Dowód - końce są niezmiennikiem q.i. . . . .	20
30.10.2024	Końce skończenie generowalnych grup - twierdzenie Freudenthala-Hopfa . . . . .	23
06.11.2024	Grupy o dwóch końcach . . . . .	26
1.	Działanie grupy na przestrzeni końców . . . . .	26
2.	Grupy o 2 końcach zawierają cykliczną podgrupę skończonego indeksu . . . . .	27
13.11.2024	Tempo wzrostu grupy . . . . .	29
1.	Funkcje wzrostu . . . . .	29
2.	Abstrakcyjne funkcje wzrostu . . . . .	30
3.	Tempo wzrostu grupy . . . . .	30
4.	Grupy o wzroście wielomianowym . . . . .	33
20.12.2024	Funkcja wzrostu i metryka Riemanna . . . . .	35
04.12.2024	Wymiar asymptotyczny oraz dowód $\text{asdim } \mathbb{Z}^n = \text{asdim } \mathbb{R}^n = n$ . . . . .	38
1.	Wymiar asymptotyczny . . . . .	38
2.	Dowód homologiczny . . . . .	39

# 1. Informacje wstępne

02.10.2024    Grafy Cayleya

## 1. Metryka słów

### Definicja 1.1: metryka słów

Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych  $g_1, g_2 \in G$  **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1, \dots, s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie  $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$ .

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmienicza**, czyli  $(\forall \gamma \in G) \ ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że  $G$  działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

## 2. Graf Cayleya

### Definicja 1.2: graf Cayleya

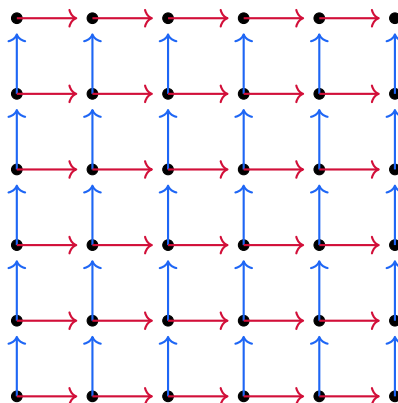
Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  zbiorem jej generatorów.  $C(G, S)$  to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami  $G$  i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

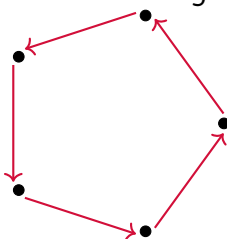
gdzie  $g \in G$  i  $s \in S$ .

## Przykłady

1. Dla  $G = \mathbb{Z}^2$  oraz  $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$  graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu  $p$  z generatorem  $s$  graf Cayleya to  $p$ -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy  $V = G$ , ale krawędzie są niezorientowane:  $E = \{\{g_1, g_2\} : ds(g_1, g_2) = 1\}$ . W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedynczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa  $G$  działa na nim przez **automorfizmy zachowujące krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

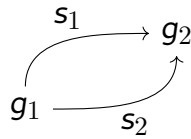
$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu  $\gamma \in G$  staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

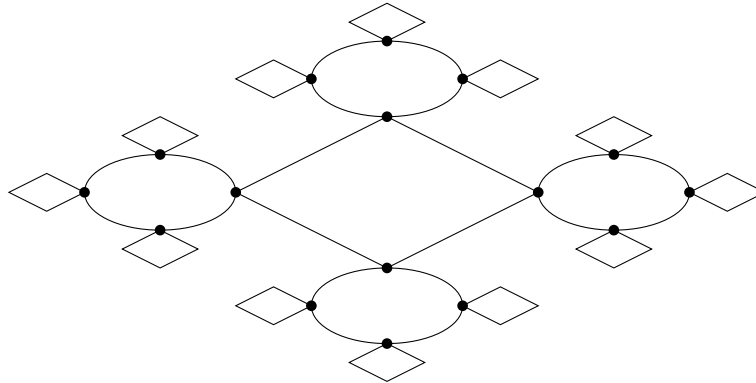
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie  $G$  o generatorach  $S$ , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy  $G$  jest więc **działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie** (lewa-niezmienniczość).

Dla suriekcji  $\pi : F_S \rightarrow G$ , gdzie  $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$  możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np.  $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$ )



### Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy  $(G_1, S_1)$  i  $(G_2, S_2)$  graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf  $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$  to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



## 3. Quasi-izometrie

### Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych  $(X_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mówimy, że przekształcenie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje  $C \geq 1$  oraz  $L \geq 0$  takie, że  $\forall x, y \in X_1$  zachodzi

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje  $D \geq 0$  takie, że  $f(X_1)$  jest  $D$ -gęsty ( $D$ -siecią) w  $X_2$ , tzn.

$$(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1) d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy  $f$  jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy  $L = D$  (większe z dwóch) i mówimy o tzw.  **$(C, L)$ -quasi-izometrii**.

**Fakt 1.5: własności q.i.**

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i.  $f: X_1 \rightarrow X_2$  istnieje  $g: X_2 \rightarrow X_1$  takie, że istnieje  $D \geq 0$  takie, że

$$(\forall x_2 \in X_2) d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall x_1 \in X_1) d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

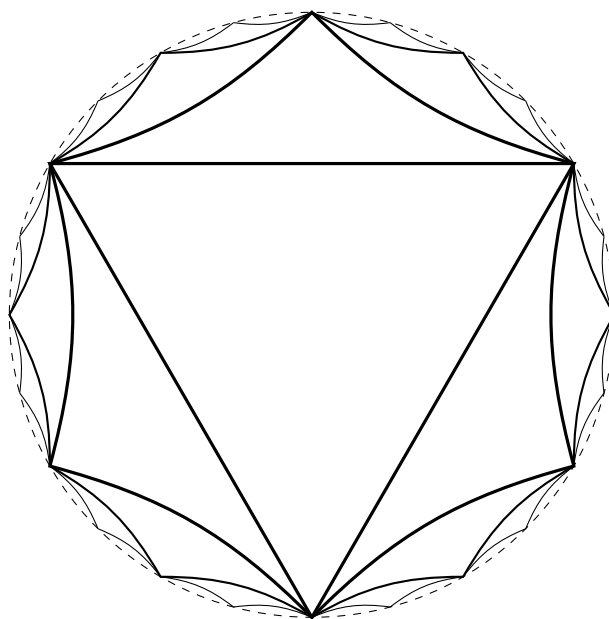
to wówczas  $g$  też jest q.i.

**Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości**

Mówimy, że  $(X_1, d_1)$  jest quasi-izometryczna z  $(X_2, d_2)$  jeśli istnieje q.i.  $f: X_1 \rightarrow X_2$ . Jest to relacja równoważności.

**Przykłady**

1.  $(X, d)$  jest q.i. z punktem  $\iff X$  jest ograniczone.
2.  $X$  jest q.i. z dowolną swoją  $D$ -sieciami  $Y \subseteq X$  przez inkluzję.
3. Dla dowolnego  $B$  ograniczonego  $X \times B \cong X$  są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne  $T_k$  stopnia  $k \geq 3$  są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia  $T_\omega = T_{\aleph_0}$ .



**Fakt 1.7**

Niech  $G$  będzie grupą skończenie generowaną i niech  $S_1, S_2$  jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych  $(G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$  gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

**Dowód**

Dokładniej,  $id_G$  jest  $(C, L)$ -q.i. dla

$$C = \max\{\max\{|s_1|_{S_2} : s_1 \in S_1\}, \max\{|s_2|_{S_1} : s_2 \in S_2\}\},$$

gdzie  $|g| = d(1, g) = \min\{n : g = s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\}$ , oraz  $L = 0$ .

**Wniosek 1.8**

Skończenie generowana grupa  $G$  determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest **jednoznaczny obiekt quasi-metryczny**.

**4. Przestrzenie geodezyjne**

**Geodezyjną** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  łączącą punkty  $a, b \in X$  nazwiemy izometryczne włożenie

$$\gamma : [0, d(a, b)] \rightarrow X$$

takie, że  $\gamma(0) = a$  i  $\gamma(d(a, b)) = b$ .

**Definicja 1.9: przestrzeń geodezyjna**

Powiemy, że przestrzeń  $X$  jest przestrzenią geodezyjną, jeśli dla wszystkich par punktów  $a, b \in X$  istnieje geodezyjna pomiędzy nimi (niekoniecznie jedyna).

**Definicja 1.10**

Przestrzeń  $X$  jest **właściwa**, gdy domknięte kule  $B_r(x)$  w  $X$  są zwarte dla dowolnych  $r < \infty$  i  $x \in X$ .

Każda przestrzeń właściwa jest lokalnie zwarta oraz zupełna, z kolei dla przestrzeni geodezyjnych jeśli przestrzeń jest właściwa, to jest też zwarta i zupełna.

## Przykłady

1. Spójne i gładkie rozmaitości Riemannowskie są przestrzeniami metrycznymi z metryką  $\rho$  minimalizowania długości krzywych gładkich łączących punkty.  
Gdy  $(M, \rho)$  jest zupełna, to  $M$  jest geodezyjna oraz właściwa.
2. Graf Cayleya skończenie generowanej grupy  $G$  jest przestrzenią geodezyjną właściwą.

## 5. Lemat Milnora-Švarca

### Lemat 1.11: Milnora-Švarca

Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a  $\Gamma$  grupą działającą na  $X$  przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas  $\Gamma$  jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z  $X$ . Dokładniej,  $\forall x_0 \in X$  odwzorowanie  $\Gamma \rightarrow X$  określone przez  $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  jest quasi-izometrią.

Mówimy, że grupa działa

**właściwie**, gdy dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  zbiór  $\{g \in \Gamma : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony

**kozwarcie**, gdy istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że rodzina  $\{g \cdot K : g \in \Gamma\}$  pokrywa  $X$ .

## Przykłady

1. Działanie grupy  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl.}})$  przez przesunięcia jest izometrią. Czyli  $\mathbb{Z}^n \stackrel{\text{q.i.}}{\cong} \mathbb{R}^n$ .
2. Grupa symetrii regularnego (co najmniej dwie symetrie w dwóch różnych kierunkach) parkietażu/wzorca działa na  $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl.}})$  geometrycznie.
3. Kozwarte, dyskretne podgrupy w grupach Liego  $G$  działają lewostronnie na  $G$  w sposób geometryczny.
4.  $\Pi_1(\text{sk. kompleks sympleksyjny}) \curvearrowright \tilde{K}$

### Konsekwencje lematu Milnora-Švarca

1. Jeśli  $H \leq G$  jest grupą skończonego indeksu w grupie skończenie generowalnej, to  $H \curvearrowright (G, S)$  jest działaniem geometrycznym. Stąd  $H$  jest q.i. z  $G$  i jest skończenie generowalna.
2. Niech ciąg

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{q} G \longrightarrow 1$$



gdzie  $q$  jest odwzorowaniem ilorazowym, będzie ciągiem dokładnym. Załóżmy, że  $K$  i  $G \cong \Gamma/K$  są skończenie generowalne. Wówczas  $\Gamma \mathcal{C}(G, S)$  przez  $\gamma \cdot g = q(\gamma)g$  jest działaniem geometrycznym. Stąd  $\Gamma$  jest skończenie generowana i  $q : \Gamma \rightarrow G$  jest q.i..

## 6. Grupy współmierne

### Definicja 1.12

Dwie grupy  $G_1, G_2$  są **współmierne** (commensurable), gdy posiadają izomorficzne podgrupy skończonego indeksu.

### Wniosek

Grupy współmierne są q.i..

Można więc zadać pytanie, czy q.i. nie sprowadza się do współmierności? Okazuje się, że tak nie jest.

### Definicja 1.13

Grupa  $G$  jest współmiernościowo sztywna, jeśli każda  $H$  q.i. z  $G$  jest współmierna z  $G$ .

### Przykłady

1. Wszystkie grupy skończone są współmiernościowo sztywne, bo  $H$  jest q.i. ze skończoną grupą  $G \iff H$  jest samo skończone.
2. Grupy wirtualnie cykliczne - grupy zawierające cykliczną podgrupę skończonego indeksu, są współmiernościowo sztywne.
3. Grupy wirtualnie  $\mathbb{Z}^n$ .
4. Grupy wirtualnie wolne, np.  $K_1 \# K_2$  dla skończonych  $K_1, K_2$ .
5. Grupy powierzchni  $\pi_1(z_g)$  dla  $g > 1$ .

## 09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

### Lemat 1.14: Milnora-Švarca

Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a  $\Gamma$  grupą działającą na  $X$  przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas  $\Gamma$  jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z  $X$ . Dokładniej,  $\forall x_0 \in X$  odwzorowanie  $\Gamma \rightarrow X$  określone przez  $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  jest quasi-izometrią.

Mówimy, że grupa działa

**właściwie**, gdy dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  zbiór  $\{g \in \Gamma : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony

**kozwarcie**, gdy istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że rodzina  $\{g \cdot K : g \in \Gamma\}$  pokrywa  $X$ .

### Dowód

Wybermy  $x_0 \in X$ . Z kozwartości tego działania, istnieje promień  $R > 0$  taki, że dla kuli  $B = B_R(x_0)$  o środku w  $x_0$  taki, że rodzina przesunięć kuli  $\{g \cdot B : g \in \Gamma\}$  jest pokryciem  $X$ . Rozważmy zbiór  $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$  niewielkich przesunięć kuli  $B$ . Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni  $X$ , zbiór  $S$  jest skończony. Ponadto, zbiór jest ten jest symetryczny  $S = S^{-1}$  ( $s \in S \implies s^{-1} \in S$ ), bo jeśli  $s \cdot B \cap B \neq \emptyset$  to również  $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$ .

Określamy  $v := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma - S - \{1\}\}$  czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

**Claim 1:**  $v > 0$

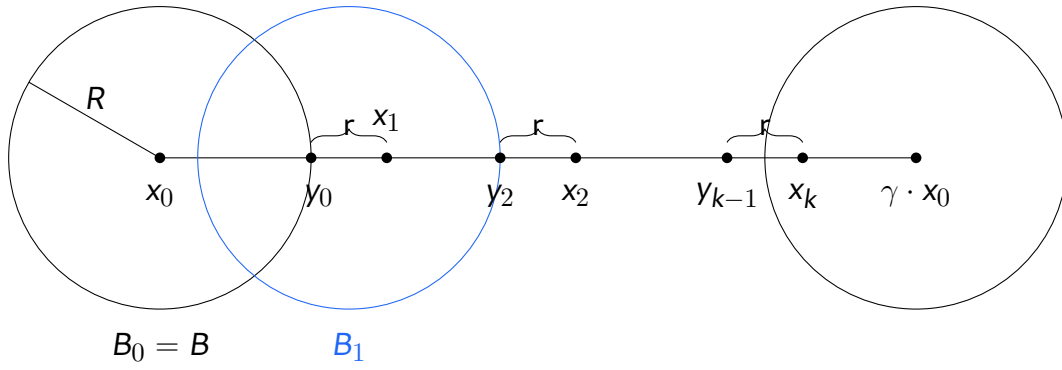
Dla każdego  $g \in \Gamma - S - \{1\}$  wiemy, że  $d(B, g \cdot B) > 0$ . Gdyby to infimum  $v = 0$ , to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów  $g_n \in \Gamma$  takich, że  $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$  maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty  $z_n \in B$  takie, że  $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$  (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg  $n_k$  taki, że  $z_{n_k} \in z_0 \in B$ , a stąd  $d(z_0, g_n \cdot B) \searrow 0$ . To oznacza, że  $B_{2R}(x_0)$  przecina niepusto nieskończenie wiele spośród przesunięć  $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$ , a to jest sprzeczne z właściwością działania.

**Claim 2:**  $S$  generuje  $\Gamma$  oraz dla każdego  $\gamma \in \Gamma$

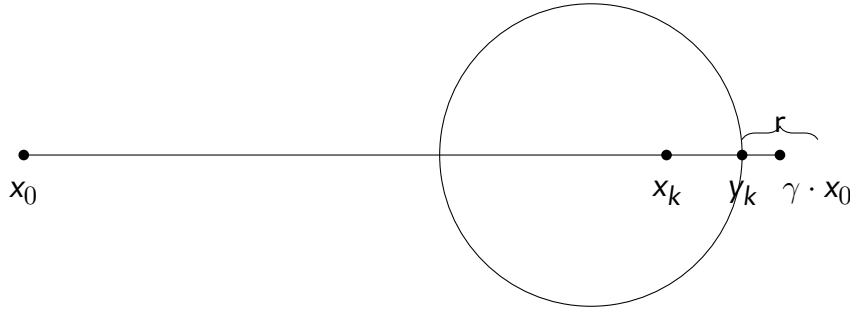
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

gdzie  $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$ .

I scenariusz:



## II scenariusz



Niech  $y_0$  będzie punktem na geodezyjnej  $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$  z kuli  $B$  najdalszy od  $x_0$  na tej geodezyjnej. W odległości  $r$  od  $y_0$  obierzmy punkt  $x_1$ . Wtedy odcinek  $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że  $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , czyli  $x_1 \in s_1 \cdot B$ . Iterujemy się tak aż kulą  $B_k = s_k s_{k-1} \dots s_1 \cdot B$  trafimy w  $\gamma \cdot x_0$ .

W scenariuszu I mamy  $\gamma \cdot B \cap s_k \dots s_1 \cdot B \neq \emptyset$ , bo  $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$  oraz  $\gamma x_0 \in s_k \dots s_1 \cdot B$ . W takim razie  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$ . Czyli zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II  $d(\gamma x_0, s_k \dots s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r$ . W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach  $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$ , bo  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$  bo tyle razy udało nam się odłożyć  $r$  na geodezyjnej.

Jeśli  $d_S(1, \gamma) = m$ , a  $\gamma = s_1 \dots s_m$ , to wówczas

$$d_X(s_1, \dots, s_k \cdot x_0, s_1 \dots s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 \dots s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności  $f(\gamma) \rightarrow \gamma \cdot x_0$ , które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów  $d_S$  wiemy, że  $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$ , czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo- $\Gamma$ -niezmienniczości metryki  $d_X$  na  $X$  mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i  $f$  jest quasi-izometrycznym włożeniem dla  $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$  i  $L = r$ .

Ponadto, obraz  $f(\Gamma)$  jest  $R$ -gęsty (dla  $R$  promienia z początku dowodu) w  $X$ , bo dla każdego  $x \in X$  istnieje  $\gamma \in \Gamma$  takie, że  $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$ . Czyli  $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$ , ale  $\gamma \cdot x_0 = f(\gamma)$ . Stąd  $f$  jest quasi-izometrią.



Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

## Przykłady

1. Grupy podstawowe  $\pi_1(M_1)$ ,  $\pi_1(M_2)$  zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych  $M_1$ ,  $M_2$  o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach  $vol(M_i)$ .

Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

### Twierdzenie 1.15: Mostowa o sztywności [1968]

Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

Założmy nie wprost, że  $\pi_1(M_1)$  i  $\pi_1(M_2)$  są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu  $H < \pi_1(M_1)$ ,  $H < \pi_1(M_2)$ . Niech  $\bar{M}_1$  i  $\bar{M}_2$  będą nakryciami  $M_1$ ,  $M_2$  wyznaczone przez  $H$ . Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc  $\bar{M}_i$  są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.

Z teorii nakryć wiemy, że  $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$ . Stąd wynika, że  $\overline{M}_1$  jest izometryczna z  $\overline{M}_2$ , a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\text{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \text{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\text{vol}(M_1)}{\text{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1):H]}{[\pi_1(M_2):H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

- Niech  $G_A$  będzie produktem półprostym  $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ , gdzie  $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  jest zadane macierzą  $A \in \text{Sl}_2\mathbb{Z}$ . Chcemy, żeby  $A$  było macierzą hiperboliczną (tzn.  $|\text{tr}(A)| > 2$ ) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa  $G_A$  jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego  $\text{Sol} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ , gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$



## 2. Niezmienniki izometrii

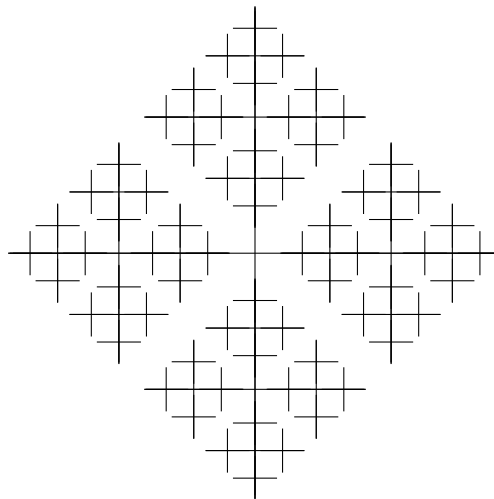
### 16.10.2024 Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni

Zanim zaczniemy, zrobmy szybką motywację, czyli graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}$  z jednym generatorem (rysunek 2.1)



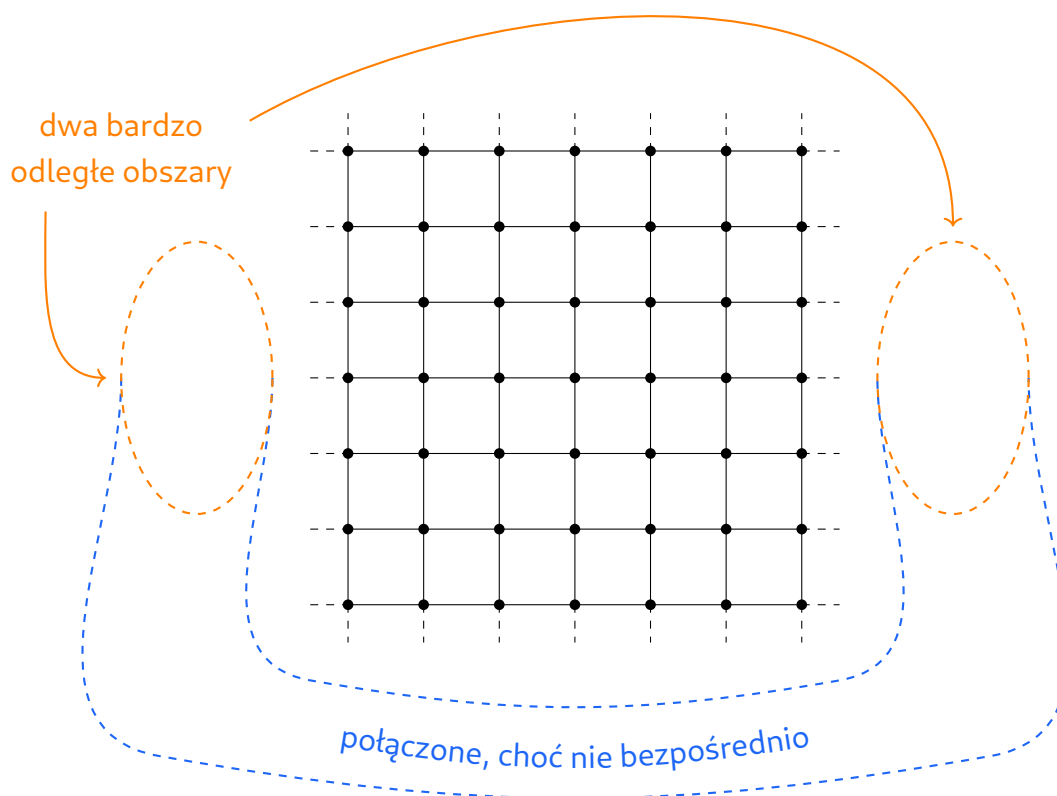
Rysunek 2.1: Graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}$  ma dwa końce.

który ma "dwa końce". Natomiast grupa wolna  $F_2$  o dwóch generatorach ma "nieskończenie wiele końców" (rysunek 2.2).



Rysunek 2.2: Graf Cayleya grupy wolnej  $F_2$  ma nieskończenie wiele końców.

Z drugiej strony, grupa  $\mathbb{Z}^2$  ma jeden koniec: jeśli weźmiemy dwa bardzo odległe od siebie obszary, to one są ze sobą połączone, chociaż jest to połączenie "bardzo odległe" (obrazek 2.3).



Rysunek 2.3: Graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}^2$  ma jeden koniec.

Każda przestrzeń skończona, np. graf Cayleya grupy skończonej, ma 0 końców.

Chcemy z liczby końców przestrzeni (albo przestrzeni końców) uczynić tzw. niezmiennik asymptotyczny, czyli cechę niezmienną na quazi-izometrie właściwych geodezyjnych przestrzeni metrycznych, a co za tym idzie - przestrzeni skończenie generowanych.

## 1. Granica odwrotna

### Definicja 2.1: zbiór skierowany

Zbór z częściowym porządkiem  $(\Lambda, \leq)$  jest **skierowany**, gdy dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  istnieje  $\lambda \in \Lambda$  takie, że  $\lambda \geq \lambda_1$  oraz  $\lambda \geq \lambda_2$ .

### Definicja 2.2: system odwrotny

**System odwrotny** nad zbiorem skierowanym  $\Lambda$  to rodzina zbiorów

$$\mathfrak{X} := \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$



oraz rodzina odwzorowań

$$\mathcal{F} := \{f_{\lambda\mu} : X_\mu \rightarrow X_\lambda : \lambda \leq \mu\}$$

takich, że

1. dla dowolnego  $\lambda$  mamy funkcję identycznościową:  $f_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$
2. dla dowolnych  $\lambda \leq \mu \leq \nu$  złożenia zachowują się dobrze:  $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$ .

Będziemy oznaczać:  $\underline{X} := (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$

### Definicja 2.3: granica odwrotna

Granica odwrotną systemu  $\underline{X}$  nazywamy zbiór

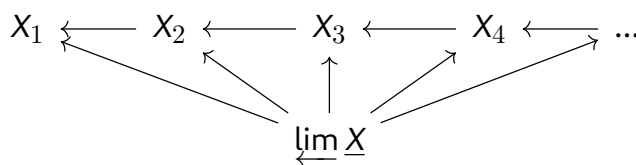
$$\varprojlim \underline{X} = \varprojlim (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F}) := \{\xi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : (\forall \lambda' \leq \lambda) \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda)\}.$$

Elementy  $\xi$  jak wyżej nazywamy **niciami** (threads) w  $\underline{X}$ .

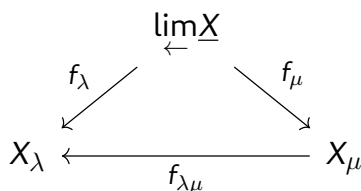
Odwzorowania

$$f_\lambda : \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_\lambda$$

takie, że  $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$  nazywamy **odwzorowaniami granicznymi**. O odwzorowaniach granicznych można myśleć jako o odwzorowaniach, które pytają "kim byłem w czasie  $\lambda$ ".



Dla  $\lambda \leq \mu$  diagram



zawsze komutuje.

Kiedy zbiory  $X_\lambda$  są przestrzeniami topologicznymi, zaś  $f_{\lambda\mu}$  są ciągłe, to na granicy odwrotnej  $\varprojlim \underline{X}$  rozważamy również topologię graniczną. Jest to topologia dziedziczona z topologii produktowej na  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ .

Bazą tej topologii są zbiory postaci  $f_\lambda^{-1}(U)$  dla  $\lambda \in \Lambda$  i otwartych  $U \subseteq X_\lambda$ .

### Fakt 2.4

Granica odwrotna  $\varprojlim \underline{X}$  jest:

1. domkniętym podzbiorem  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ , jeśli  $X_\lambda$  są Hausdorffa,
2. zwarta i metryczna, jeśli  $X_\lambda$  takie są (bo wówczas  $\prod X_\lambda$  jest zwarta i metryczna),
3. zwarta i metryczna, jeśli  $X_\lambda$  są skończone (z topologią dyskretną).

W ostatnim przypadku  $\varprojlim \underline{X}$  nie jest przestrzenią dyskretną, pomimo, że wszystkie zbiory po których bierzemy granicę takie były. Rozważmy następujący przykład, w którym  $\Lambda = \mathbb{N}$ , a wszystkie  $X_\lambda$  są skończone dyskretnie, natomiast  $\varprojlim \underline{X}$  jest niedyskretnie i nieskończone.

### Przykład

Niech  $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$  i niech  $X_k$  będzie zbiorem wszystkich ciągów 0 – 1 długości  $k$ . Dla  $k \leq m$  rozważamy

$$f_{km} : X_m \rightarrow X_k$$

będące obcięciem ciągu długości  $m$  do początkowego ciągu długości  $k$ . Dostajemy wówczas system odwrotny  $\underline{X} = (\mathbb{N}, \{X_k\}, \{f_{km}\})$  zbiorów skończonych. Wówczas  $\varprojlim \underline{X}$  jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

## 2. Przestrzeń końców

Na tym wykładzie będziemy zajmować się  $X$ , które są właściwymi geodezyjnymi przestrzeniami metrycznymi. Takimi przestrzeniami są np. grafy Cayleya grup skończenie generowanych. Przez zbiór  $\mathcal{K}$  będziemy rozumieć rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów  $K \subseteq X$  z porządkiem inkluzji.

### Definicja 2.5: podzbiór współkońcowy

Podzbiór  $M \subseteq \Lambda$  zbioru skierowanego  $\Lambda$  nazywamy **współkońcowym**, jeśli

$$(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists \mu \in M) \lambda \leq \mu,$$

wtedy  $(M, \leq)$  też jest zbiorem skierowanym. Dla  $\underline{X} = (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$  niech

$$\underline{X}|_M = (M, \{X_\lambda : \lambda \in M\}, \{f_{\mu\mu'} \in \mathcal{F} : \mu, \mu' \in M\})$$

będzie obcięciem  $\underline{X}$  do  $M$ . Wtedy  $\underline{X}|_M$  jest systemem odwrotnym nad  $M$ .

**Fakt 2.6**

$$\varprojlim X = \varprojlim X|_M$$

Przez bijekcję polegającą na obcinaniu nici do  $M$ . Jest ona jednocześnie homomorfizmem.

**Wniosek**

Jeśli  $X_\lambda$  są zwarte i metryczne, zaś  $\Lambda$  posiada przeliczalny podzbiór współkońcowy, to  $\varprojlim X$  jest zwarta i metryczna.

**Przykład**

Rodzina zbiorów zwartych  $\mathcal{K}$  posiada współkońcowy podciąg  $K_i := B_{i,R}(x_0)$  dla  $R > 0$  i pewnego  $x_0 \in X$ .

Dla dowolnego  $K \in \mathcal{K}$  niech  $\Pi_K^X$  będzie zbiorem nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu  $X - K$ .

Przestrzeń geodezyjna jest lokalnie drogowo spójna i każda jej otwarta podprzestrzeń również jest lokalnie drogowo spójna. Stąd każde  $X - K$  też jest lokalnie drogowo spójna. W lokalnie drogowo spójnych przestrzeniach komponenty spójności to to samo co komponenty drogowej spójności.

Dla  $K \subseteq K'$ , każda nieograniczona komponenta spójności  $C' \subseteq X - K'$  zawiera się w dokładnie jednej nieograniczonej komponencie spójności  $C \subseteq X - K$ . Dostajemy więc odwzorowanie

$$f_{KK'} : \Pi_{K'}^X \rightarrow \Pi_K^X$$

takie, że  $f_{KK'}(C') = C$ .

Trójka  $(\mathcal{K}, \{\Pi_K^X : K \in \mathcal{K}\}, \{f_{KK'} : K' \subseteq K\})$  tworzy system odwrotny nad zbiorem skierowanym  $\mathcal{K}$ :

$$\Pi_K^X \xleftarrow{f_{KK'}} \Pi_{K'}^X \xleftarrow{f_{K'K''}} \Pi_{K''}^X$$

**Fakt 2.7**

Dla każdego  $K \in \mathcal{K}$  zbiór  $\Pi_K^X$  jest skończony.

**Dowód**

Weźmy dowolny  $K \in \mathcal{K}$  i  $x_0$  oraz  $r$  takie, że

$$K \subseteq B_r(x_0).$$

Niech  $R > r$  i rozważmy zwartą kulę  $B_R(x_0)$ . Każda nieograniczona komponenta  $C$  spójności w  $X - K$  przecina niepusto sferę  $S_R(x_0)$ , bo  $X$  jest geodezyjna, a więc lokalnie drogowo spójna.

Zatem przekrój  $C \cap B_R(x_0)$  jest niepusty. Wtedy rodzina

$$\{C \cap B_R(x_0) : C \text{ dowolna komponenta dopełnienia } X - K\} \cup \{\overline{B_R(x_0)} = B_R(x_0) - S_R(x_0)\}$$

pokrywa  $B_R(x_0)$ . Dodatkowo, jest to otwarte pokrycie, bo komponenty spójności lokalnie spójnej przestrzeni są otwartymi podzbiorami w tej przestrzeni.

Ze zwartości  $X$  to pokrycie posiada skończone podpokrycie, ale z drugiej strony każdy zbiór postaci  $C \cap B_R(x_0)$  dla nieograniczonych komponent musi przetrwać w każdym podpokryciu, bo zawiera punkty które należą tylko do niego. Stąd nieograniczonych komponent jest skończenie wiele.



### Definicja 2.8: przestrzeń końców

Zbiorem (przestrzenią) końców,  $Ends(X)$ , właściwej geodezyjnej przestrzeni metrycznej  $X$  nazywamy granicę odwrotną

$$Ends(X) = \varprojlim(\Pi^X) = \varprojlim(\mathcal{X}, \{\Pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}),$$

gdzie  $\Pi_K^X$  to nieograniczone komponenty w  $X - K$ . Jest to zwarta przestrzeń metryczna.

### Przykłady

1.  $Ends(\text{ograniczone}) = \emptyset$
2.  $Ends(\mathbb{Z}^2) = \{\star\}$  to punkt w nieskończoności kraty
3.  $Ends(\mathbb{Z}) = \{-\infty, \infty\}$  i jest równoliczny z  $Ends(\mathbb{R})$
4. zbiór końców drzewa  $k$ -regularnego, dla  $k \geq 3$ , jest izomorficzny ze zbiorem Cantora
5. dla nieskończonych grup skończenie generowanych  $G_1, G_2$  przestrzeń końców  $Ends(G_1 \star G_2)$  jest nieskończonym zbiorem

## 23.10.2024 Przestrzeń końców jest niezmiennikiem q.i.

Celem dzisiejszego wykładu będzie udowodnienie poniższego twierdzenia.

### Twierdzenie 2.9

Przestrzeń końców  $Ends(X)$ , a w szczególności ich liczba, jest niezmiennikiem quasi-izometrii geodezyjnych przestrzeni właściwych (przestrzenie końców są wtedy homeomorficzne).

### 1. Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie)

Przypomnijmy, że jeśli  $X$  jest właściwą przestrzenią geodezyjną, to jest również lokalnie drogowo spójna. Czyli otwarte podzbiory  $U \subseteq X$  są spójne  $\iff$  są drogowo spójne.

#### Definicja 2.10: promień, współkońcowość promieni

**Właściwy promień** (eng. proper ray) w  $X$  to dowolne ciągłe odwzorowanie  $\rho : [0, \infty) \rightarrow X$  takie, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(\rho(0), \rho(t)) = \infty,$$

odległość mierzona od początku  $\rho$  ucieka do nieskończoności wraz z oddalaniem się od 0.

Zbiór wszystkich promieni w  $X$  oznaczamy  $\rho^X$ .

Powiemy, że dwa promienie  $\rho_1, \rho_2$  są współkońcowe ( $\rho_1 \stackrel{E}{\sim} \rho_2$ ), jeśli dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  istnieje  $R > 0$  taki, że  $\rho_1([R, \infty))$  oraz  $\rho_2([R, \infty))$  leżą w tej samej komponentce  $X - K$ .

Relacja współkońcowości promieni na zbiorze  $\rho^X$  jest relacją równoważności.

#### Fakt 2.11

Zbiór klas abstrakcji  $\rho^X / \stackrel{E}{\sim}$  w naturalny sposób utożsamia się z  $Ends(X)$ .

#### Dowód

Weźmy  $\rho \in \rho^X$  takie, że dla każdego  $K \subseteq X$  mamy jedyną komponentę  $C_K^\rho \in \Pi_K^X$  w dopełnieniu zbioru  $K$  w  $X$  do której należy  $\rho([R, \infty))$  dla dostatecznie dużych  $R$ . Wtedy ciąg

$$(C_K^\rho)_{K \in \mathcal{K}}$$

jest nicią [2.3] w systemie odwrotnym  $(\mathcal{K}, \Pi_K^X, f_{KK'})$ .

Współkońcowe promienie wyznaczają tę samą nić, więc istnieje dobrze określone odwzorowanie

$$\beta : \rho^X / \sim \rightarrow \text{Ends}(X)$$

$$\beta([\rho]_{\sim}) = (C_K^\rho)_{K \in \mathcal{K}} \in \text{Ends}(X)$$

$\beta$  jest różnowartościowe, bo dla niewspółkońcowych  $\rho_1, \rho_2$  istnieje  $K \subseteq X$  takie, że  $C_K^{\rho_1} \neq C_K^{\rho_2}$ , a wtedy nici  $\beta([\rho_1]) \neq \beta([\rho_2])$ .

Wystarczy przekonać się, że  $\beta$  jest surjekcją.

Niech  $\xi = (\xi_K) \in \text{Ends}(X)$  będzie dowolną nicią. Szukamy promienia który na nie przechodzi. Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  wybieramy punkt  $y_n \in \xi_{B_n}$ , gdzie  $\xi_{B_n}$  to nieograniczona komponenta w  $X - B_n$  dla  $B_n = B_n(x_0)$  przy ustalonym  $x_0$ .

Określmy  $\rho = [y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \dots$  mając na myśli odwzorowanie  $\rho$  które odcinek  $[n, n+1]$  przeprowadza na geodezyjną od  $y_n$  do  $y_{n+1}$ . Dla takiego  $\rho$  mamy  $C_{B_n}^\rho = \xi_{B_n}$ . Dla dowolnego innego  $K \in \mathcal{K}$  z racji, że istnieje kula taka, że  $K \subseteq B_n$  to dla pewnego  $n$  zarówno  $C_K^\rho$  jak i  $\xi_K$  to ta sama komponenta w  $X_K$ , zawierająca  $\xi_{B_n}$ .



Na  $\rho^X / \sim$  mamy topologię indukowaną przez bijekcję  $\beta$  z topologii  $\text{Ends}(X)$ . Baza tej topologii są zbiory postaci

$$\{U_C^K : K \in \mathcal{K} \text{ i } C \in \Pi_K^X\},$$

$$U_C^K = \{[\rho] : \rho([R, \infty)) \subset C\} \text{ dla pewnego } R.$$

## 2. Dowód - końce są niezmiennikiem q.i.

Wróćmy więc do twierdzenia 2.9.

### Dowód

Dowód twierdzenia 2.9.

Niech  $X, Y$  będą właściwymi przestrzeniami geodezyjnymi oraz  $f : X \rightarrow Y$  niech będzie  $(L, C)$ -quasi-izometrią. Ciągłe drogi  $\nu : [a, b] \rightarrow X$  lub  $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$  przerabiamy na ciągłe drogi  $\nu_f$  w  $Y$  następująco:

1. niech  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  (lub  $a = t_0 < t_1 < \dots$ ) będzie takie, że

$$d_X(\nu(t_k), \nu(t_{k+1})) \leq 1$$

2. wtedy ciąg  $f(\nu(t_n))$  jest  $(L + C)$ -drogą, czyli

$$d_Y(f(\nu(t_k)), f(\nu(t_{k+1}))) \leq L + C$$

dla każdego  $k$

3. łączymy te punkty kolejno odcinkami geodezyjnymi w  $Y$

W ten sposób dostajemy ciągłą drogę  $\nu_f$  w  $Y$  zawierającą się w  $(L + C)$ -otoczeniu obrazu  $f(\nu[a, b])$  łączącą  $f(\nu(a))$  z  $f(\nu(b))$ . Gdy  $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$  jest ciągłym odwzorowaniem (promieniem w  $X$ ), to  $\nu_f$  jest ciągłym odwzorowaniem o obrazie zawierającym się w  $(L + C)$ -otoczeniu obrazu  $f(\nu[0, \infty))$  i o początku w  $f(\nu(0))$  (promieniem w  $Y$ ).

### Lemat 2.12

Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie  $(L, C)$ -quasi-izometrią. Wówczas dla każdego zwartego  $K \subseteq Y$  istnieje zwarty  $K' \subseteq X$  taki, że dla każdej komponenty  $C' \subseteq X - K'$  jej pogrubiony obraz  $N_{L+C}[f(C')]$ , rozumiany jako  $N_R(A) = \{x \in X : d_X(x, A) \leq R\}$ , zawiera się w pojedynczej komponentce  $C$  w dopełnieniu  $X - K$ .

### Dowód

Jeśli  $C_1 \neq C_2$  są nieograniczonymi komponentami w  $Y - K$ , to ich przekroje z pogrubionym obrazem  $K$

$$C_1 \cap (Y - N_{L+C}(K))$$

$$C_2 \cap (Y - N_{L+C}(K))$$

są  $(2L + 2C)$ -oddzielone, tzn. dystans w  $Y$  pomiędzy nimi jest  $\geq 2L + 2C$ .

Można pokazać, że istnieje  $K' \subseteq X$  taki, że  $f(X - K') \subseteq Y - N_{L+C}(K)$  (co zostaje pozostawione jako ćwiczenie). W takim razie dla komponenty  $C'$  w  $X - K'$  mamy  $f(C') \subseteq Y - N_{L+C}(K)$ .

Wiemy, że dowolne dwa punkty z  $C'$  można połączyć ciągłą drogą w  $C'$ , więc ich obrazy są łączone drogą  $\nu_f$  w  $N_{L+C}(f(C'))$ , stąd  $f(C')$  zawiera się w pojedynczej komponentce  $Y - K$ .



Jeśli więc  $\nu, \nu'$  są współkońcowymi promieniami w  $X$ , to utworzone przez nie promienie  $\nu_f$  i  $\nu'_f$  również są współkońcowe. Chcemy sprawdzić, czy "końcówki"  $\nu_f$  oraz  $\nu'_f$  należą do tej samej komponenty  $X - K$ .

Z założenia wiemy, że końcówki  $\nu$  i  $\nu'$  należą do tej samej komponenty  $C'$  w  $X - K'$  (dla  $K'$  jak w lemacie wyżej). Czyli końcówka  $\nu_f$  zawiera się w obrazie w  $N_{L+C}$  obrazu przez  $f$  końcówki  $\nu$ , która z kolei zawiera się w  $N_{L+C}f(C') \subseteq C$ . Stąd  $\nu_f$  jest współkońcowe z  $\nu'_f$ .

Mamy zatem przyporządkowanie  $f_E : \rho^X / \sim^E \rightarrow \rho^Y / \sim^E$  zadane przez

$$f_E([\nu]) = [\nu_f].$$

Mamy też podobne przyporządkowanie  $g_E$  idące w odwrotną stronę, gdzie  $g : Y \rightarrow X$  jest "odwrotną" q.i..

Pozostaje sprawdzić, że odwzorowanie  $f_E : \rho^X / \overset{E}{\sim} \rightarrow \rho^Y / \overset{E}{\sim}$  jest ciągłe i wtedy  $f_E$  jest homeomorfizmem.

Bierzemy bazowy zbiór  $U_K^C$  będący otoczeniem  $[\nu_f]$ , tzn.  $K \subseteq Y$  jest zwarty i  $C$  jest nieograniczoną komponentą  $Y - K$ . Wtedy  $\nu_f([R, \infty)) \subseteq C$ . Niech  $K' \subseteq X$  jak w lemacie wyżej i niech  $C'$  będzie tą nieograniczoną komponentą w  $X - K'$  dla której  $\nu([R, \infty)) \subseteq C'$ . Wówczas  $C$  jest dokładnie tą komponentą w  $Y - K$  w której zawiera się  $N_{L+C}(f(C'))$ . Jeśli  $[\rho] \in U_{K'}^{C'}$  (czyli  $\rho([R, \infty)) \subseteq C'$ ), to  $(\rho|_{[R, \infty)})_f$  ma obraz w pojedynczej komponencie  $Y - K$  i jest to ta sama komponenta, w której zawiera się  $N_{L+C}(f(C'))$ , czyli  $C$ . Zatem  $f_E([\rho]) \in U_K^C$  i mamy  $f_E(U_{K'}^{C'}) \subseteq U_K^C$ .





## 30.10.2024 Końce skończenie generowalnych grup - twierdzenie Freudanthala-Hopfa

Główne twierdzenie na dzisiaj:

### Twierdzenie 2.13: Freudanthal-Hopf

Skończenie generowalna grupa  $G$  ma 0, 1, 2 lub nieskończenie wiele końców.  
Gdy  $|\text{Ends}(G)| = \infty$ , to  $|\text{Ends}(G)|$  jest przestrzenią bez punktów izolowanych - w szczególności mamy continuum. W istocie,  $\text{Ends}(G)$  jest wtedy zbiorem Cantora.

Zanim przejdziemy dalej, warto wiedzieć kilka rzeczy o zbiorze Cantora, np. jak jest on charakteryzowany w matematyce:

- ☺ jest to *jedyna z dokładnością do homeomorfizmu przestrzeń metryczna, która jest całkowicie niespójna (0-wymiarowa)*, to znaczy, że każdy punkt posiada bazę otoczeń otwarto-domkniętych
- ☹ nie ma on punktów izolowanych.

Niech  $X = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$  będzie systemem odwrotnym zbiorów skończonych. Załóżmy, że wszystkie odwzorowania  $f_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}$  są surjekcjami oraz  $\forall \lambda \in \Lambda \forall x \in X \forall \mu > \lambda$  takie, że  $|f_{\lambda, \mu}^{-1}(x)| \geq 2$  to wówczas  $\varprojlim X$  jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. To znaczy, że  $X$  rozdziela się w każdym kroku na co najmniej dwie części dokładnie tak jak zbiór Cantora.

### Dowód

Wiemy, że  $|\text{Ends}(G)| = 0, 1, 2$  jest możliwe, bo 0 końców mają grupy skończone, 1 ma  $\mathbb{Z}^2$ , a  $\mathbb{Z}$  ma końców 2 sztuki.

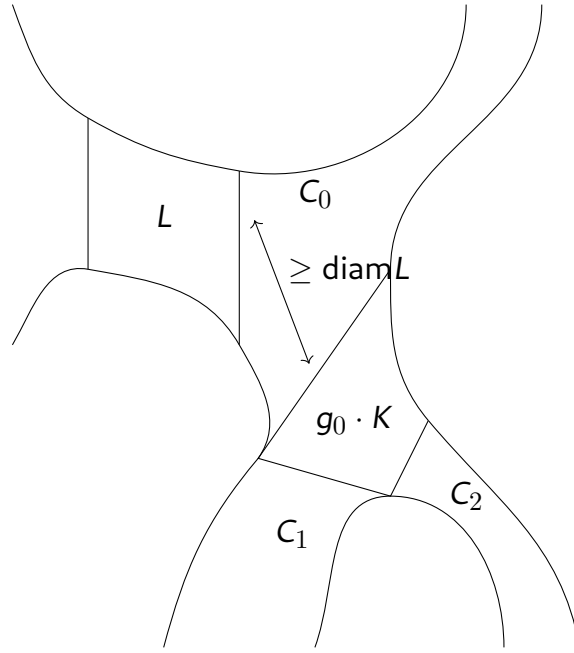
Założmy, że  $|\text{Ends}(G)| \geq 3$ . Oznacza to, że dla  $X = \text{Cay}(G, S)$  istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że  $\Pi_K^X$  ma co najmniej 3 elementy (tzn.  $X - K$  ma co najmniej 3 nieograniczone komponenty spójności).

Naszym celem jest pokazanie, że dla dowolnego  $L \subseteq X$  zwanego i dowolnej nieograniczonej komponenty  $C$  w  $X - L$  istnieje większy zbiór  $L \subseteq L' \subseteq X$  oraz nieograniczone komponenty  $C'_1 \neq C'_2$  w  $\Pi_{L'}^X$  takie, że  $C'_1, C'_2 \subseteq C$  (czyli  $f_{L, L'}(C_i) = C$  dla  $i = 1, 2$ ). Jako ćwiczenie pozostawione zostanie pokazanie, że wówczas  $|\text{Ends}(G)| = \infty$  (to pokazuje, że nici sklejają się).

Ustalmy zwarty  $L \subseteq X$  oraz nieograniczoną komponentę  $C$  w  $X - L$ . Niech  $M \subseteq X$  będzie zbiorem z definicji kozwartości działania  $G \curvearrowright X$ , tzn. takim, że

$$\bigcup_{g \in G} gM = X.$$

Bez straty ogólności założmy, że  $K \subseteq M$ , a co za tym idzie  $|\Pi_M^X| \geq 3$ .



Niech  $x_0 \in C$  będzie takim punktem, że

$$d(x_0, L) \geq \text{diam} L + 2\text{diam} M.$$

Niech teraz  $g_0 \in G$  będzie taki, że  $x_0 \in g_0 M$ . Wtedy ponieważ  $\text{diam}(g_0 M) = \text{diam}(M)$ , mamy

$$d_X(L, g_0 M) \geq \text{diam} M$$

ale też  $\geq \text{diam} L$ . Więc tym bardziej

$$d_X(L, g_0 K) \geq \text{diam} M \geq \text{diam} K$$

ale też  $\geq \text{diam} L$ .

Twierdzymy, że

1.  $g_0 K \subseteq g_0 M \subseteq C$ ,
2.  $L$  zawiera się w dokładnie jednej spośród komponent  $C_0, \dots, C_m$  w  $X - g_0 K$  ( $m \geq 0$ ), BSO w  $C_0$ ,
3. pozostałe komponenty  $C_1, \dots, C_m$  w  $X - g_0 K$  zawierają się wtedy w  $C$  (przynajmniej 2 spośród nich są nieograniczone).

**Dowód 1.** Wystarczy, że  $g_0 M \subseteq C$ . Gdyby  $x_1 \in g_0 M$  leżał w innej  $C' \neq C$  komponentcie  $X - L$ , to geodezyjna  $[x_0, x_1]$  przechodziłaby przez  $L$  (składowe spójności = składowe łukowej spójności), ale  $d_X(x_0, x_1) \geq 2 \cdot \text{diam} M$  dawałoby sprzeczność.

**Dowód 2.** Argument analogiczny do 1., zastosowany symetrycznie.

**Dowód 3.** Załóżmy, że komponenty  $C_1, \dots, C_m$  są rozłączne z  $L$ , bo  $L \subseteq C_0$ . Więc każda z nich zawiera się w pojedynczej komponentcie  $X - L$ . Każda spośród  $C_1, \dots, C_m$  posiada punkty

dowolnie bliskie zbioru  $g_0K$ , czyli należące do  $C$ . Np. pierwszy punkt na geodezyjnej od dowolnego punktu  $a \in C_j$  do dowolnego punktu  $b \in g_0K$  nienależący do  $C_j$  musi należeć do  $g_0K$ .

Skoro  $C_j$  zahacza o  $C$ , to musi być zawarte w  $C$ .

Dla ukończenia realizacji CELU (i dowodu twierdzenia) weźmy  $L' = L \cup g_0K$ . Wtedy  $C_1, \dots, C_m$  są komponentami w  $X - L'$ , bo są rozłączne zarówno z  $g_0K$  jak i z  $L$ . Wszystkie komponenty z  $X - L'$  są zawarte w komponentach  $X - g_0K$ . Co najmniej 2 z nich są nieograniczone, co daje nam szukane  $C'_1, C'_2$ .



Dalsze wyniki:

☠ Grupa ma 2 końce  $\iff$  jest wirtualnie  $\mathbb{Z}$  (zawiera  $\mathbb{Z}$  jako podgrupę skończonego indeksu  $\equiv$  jest współmierna z  $\mathbb{Z}$ )

☠ Jeśli  $|\text{Ends}(G)| = \infty$ , to  $G$  rozkłada się w sposób nietrywialny i nie 2-końcowy nad skończoną podgrupą  $H$ , tzn.

$$G = G_1 \star_H G_2$$

i  $[G_i : H] \geq 3$  dla przynajmniej jednego  $i$ , lub

$$G = \star_H G_0$$

(HNN-rozszerzenie),  $\varphi_i : H \hookrightarrow G_0$ ,  $[G_0 : \varphi_i(H)] \geq 2$  dla pewnego  $i$ .

☠ Iterowany proces rozkładów nad skończonymi podgrupami kończy się. Końcowe wektory mają  $\leq 1$  końców i są w pewnym sensie jednoznaczne. Dla kończenie generowanych grup nie jest to jednak prawdą.

Jeśli więc skończone grupy można uznać za nieciekawe, to najciekawsze są grupy z jednym końcem (1-ended).

## 06.11.2024 Grupy o dwóch końcach

Z quasi-izometryczności grup współmiernych, jakimi są grupy i ich podgrupy skończonego indeksu, wynika, że jeśli grupa zawiera skończonego indeksu podgrupę  $\mathbb{Z}$ , to ma wówczas dwa końce. Celem wykładu będzie udowodnienie implikacji w drugą stronę, czyli opisanie grup o dwóch końcach.

### Twierdzenie 2.14

Każda grupa o 2 końcach zawiera skończonego indeksu podgrupę acykliczną (izomorficzną z  $\mathbb{Z}$ ).

Wynika więc z tego, że każda grupa q.i. z  $\mathbb{Z}$  zawiera  $\mathbb{Z}$  jako podgrupę skończonego indeksu.

### 1. Działanie grupy na przestrzeni końców

Skończenie geneorwalna grupa  $G$  indukuje w naturalny sposób działanie przez permutacje na zbiorze swoich końców homomorfizm

$$h^E : G \rightarrow \text{Sym}(\text{Ends}(G))$$

zadany na jeden z dwóch sposobów:

1. izometria  $\varphi : X \rightarrow X$  wyznacza automorfizm

$$\varphi^{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

przez

$$\varphi^{\mathcal{K}}(K) = \varphi(K),$$

zaś dla każdego  $K \in \mathcal{K}$  bijekcję

$$\varphi_K : \Pi_K^X \rightarrow \Pi_{\varphi(K)}^X$$

zadaną przez  $\varphi_K(C) = \varphi(C)$ . To razem daje automorfizm

$$\varphi^X : \Pi^X \rightarrow \Pi^X,$$

który indukuje homeomorfizm granic odwrotnych (w szczególności bijekcję).

2. izometria  $\varphi : X \rightarrow X$  zadaje

$$h_{\varphi}^E : \text{Ends}(X) \rightarrow \text{Ends}(X)$$

przez

$$h_{\varphi}^E([\rho]) = [\varphi \circ \rho],$$

gdzie  $\rho$  to promień w  $X$ .

**Fakt 2.15**

Niech grupa  $\Gamma \curvearrowright X$  działa właściwie, kozwarcie, gdzie  $X$  jest właściwą geodezyjną oraz  $H \leq \Gamma$ . Wówczas  $[\Gamma : H] < \infty \iff H \curvearrowright X$  działa kozwarcie.

**Dowód**

$[\Gamma : H] < \infty \implies H \curvearrowright X$  kozwarcie

Niech  $\Gamma = hg_1 \cup \dots \cup Hg_m$ , gdzie  $[\Gamma : H] = m$ . Jeśli  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot K = X$ , to

$$\bigcup_{h \in H} h(g_1 K \cup \dots \cup g_m K) = X,$$

stąd kozwartość działania  $H$ .

$[\Gamma : H] < \infty \iff H \curvearrowright X$  kozwarcie

Niech  $L \subseteq X$  będzie zwartym zbiorem z definicji kozwartości, tzn.

$$\bigcup_{h \in H} h \cdot L = X.$$

Z własności działania grupy  $\Gamma$  wiemy, że

$$|\{\gamma \in \Gamma : \gamma L \cap L \neq \emptyset\}| < \infty,$$

powiedzmy że jest to zbiór  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ . Wówczas  $H\gamma_1 \cup \dots \cup H\gamma_m = \Gamma$ , bo dla  $\gamma \in \Gamma$  istnieje  $h \in H$  takie, że  $h \cdot L \cap \gamma \cdot L \neq \emptyset$ . Więc  $L \cap h^{-1}\gamma L \neq \emptyset$ , więc  $h^{-1}\gamma = \gamma_j$ , czyli  $\gamma = h\gamma_j \in H\gamma_j$ .



Dla właściwej geodezyjnej przestrzeni  $X$  i dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$ , liczba komponent (ograniczonych i nieograniczonych) w  $X - K$  jest skończona i każda z tych komponent jest otwarta w  $X$ . Stąd, każdy  $K \subseteq X$  możemy uzupełnić o ograniczone komponenty  $X - K$ , otrzymując nowy zbiór  $K_+$  taki, że komponenty  $X - K_+$  to dokładnie nieograniczone komponenty  $X - K$ .

Możemy więc myśleć, że  $X - K$  dla zwartych  $K$  to zawsze skończona suma nieograniczonych komponent tego dopełnienia (i wszystkie one są otwarte w  $X$ ).

## 2. Grupy o 2 końcach zawierają cykliczną podgrupę skończonego indeksu

Wróćmy do dowodu twierdzenia 2.14.

**Dowód**

Niech  $\Gamma$  będzie dowolną grupą o 2 końcach. Rozważmy homomorfizm  $h^\# : \Gamma \rightarrow \text{Sym}(\text{Ends}(G)) = \mathbb{Z}_2$  i jego jądro  $\Gamma_0 = \ker(h^\#) < \Gamma$  - podgrupę indeksu  $\leq 2$ .

$\Gamma_0$ , jako podgrupa skończonego indeksu, w dalszym ciągu działa kozwarcie na  $X$  (fakt 2.15), oraz zachowuje wszystkie końce. Naszym celem będzie znalezienie generatora  $g \in \Gamma_0$  dla cyklicznej podgrupy  $\langle g \rangle$  skończonego indeksu w  $\Gamma_0$ .

Niech  $K$  będzie takie, że  $X - K = E \cup E'$  jest sumą nieograniczonych komponent spójności, oraz  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma \cdot K = X$ . Ustalmy  $z \in E$  taki, że  $d_X(z, K) > 2 \cdot \text{diam} K$ .

Ponieważ orbity zbioru  $K$  przez działanie  $\Gamma_0$  pokrywają  $X$ , to możemy znaleźć  $g \in \Gamma_0$  takie, że  $z \in g \cdot K$ . Wówczas  $d_X(K, gK) > \text{diam} K$  (bo  $\text{diam}(gK) = \text{diam}(K)$ ). Stąd  $gK \subseteq E$  ( $gK \cap E \neq \emptyset$  oraz pokazaliśmy, że między  $gK$  oraz  $K$  mieści się co najmniej jedna średnica  $K$ ).

Ponieważ  $gK \cap E' = \emptyset$  (bo  $E \cap gK \neq \emptyset$  a są to zbiory spójne), to  $E'$  zawiera się w dokładnie jednej komponencie  $X - gK$ , którymi są  $gE$  oraz  $gE'$ . Ponieważ  $g \in \Gamma_0$  zachowuje końce, to komponentą tą musi być  $gE'$ , zatem  $E' \subseteq gE'$ .

**TODO: DOKOŃCZYĆ DOWÓD**



## 13.11.2024 Tempo wzrostu grupy

### 1. Funkcje wzrostu

#### Definicja 2.16

Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  jej skończonym układem generatorów. Wówczas funkcję

$$\beta_{G,S} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\beta_{G,S}(k) = |B_k^{G,S}(e)| = |\{g \in G : d_S(e, g) \leq k\}|$$

opisującą licznosc kul o promieniu  $k$  i srodku w elemencie neutralnym, nazywamy **funkcją wzrostu** grupy  $G$ .

#### Przykłady

1.  $G = \mathbb{Z}^n$  o zbiorze generatorów  $S = \{\sum \pm \delta_i\}$ , czyli skończone sumy parami różnych wersorów o z dowolnymi znakami. Wówczas funkcja wzrostu to

$$\beta_{\mathbb{Z}^n, S}(k) = (2k+1)^n$$

wielomian  $n$ -tego stopnia.

2.  $G = F_m$  a  $S_m$  to standardowy zbiór generatorów grupy wolnej

$$\beta_{F_m, S_m}(k) = 1 + 2m + 2m(2m-1) + \dots + 2m(2m-1)^{k-1} = \frac{m}{m-1}(2m-1)^k - \frac{1}{m-1}$$

jest funkcją wykładniczą.

Funkcje wzrostu są:

**podmnożykatywne**  $\beta_{G,S}(k+k') \leq \beta_{G,S}(k)\beta_{G,S}(k')$

**ściśle rosnące** dla  $|G| = \infty$  oraz szacują się od dołu przez funkcję liniową, tzn.  $\beta_{G,S}(k) \geq k+1$

**szacują się od góry przez funkcje wykładnicze**, ponieważ

$$\beta_{G,S}(k) \leq \beta_{F_S, S}(k) = \begin{cases} 2|S| + 1 & |S| = 1 \\ \frac{|S|}{|S|-1}(2|S|-1)^k - \frac{1}{|S|-1} & |S| \geq 2 \end{cases}$$

**dobre zdefiniowane dla podgrup**, tzn. jeśli  $G$  jest generowane przez  $S$ , a  $H \leq G$  jest generowane przez  $T \subseteq S$ , to wówczas

$$\beta_{H,T}(k) \leq \beta_{G,S}(k)$$

dla wszystkich  $k \in \mathbb{N}$ .

## 2. Abstrakcyjne funkcje wzrostu

Abstrakcyjna funkcja wzrostu  $f$  to po prostu niemalejąca funkcja  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Każda funkcja wzrostu  $\beta_{G,S}$  wyznacza abstrakcyjną funkcję wzrostu

$$\tilde{\beta}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lceil t \rceil),$$

która nadal jest multiplikatywna, tzn.  $\tilde{\beta}_{G,S}(t + t') \leq \tilde{\beta}_{G,S}(t) \cdot \tilde{\beta}_{G,S}(t')$ .

Konkurencyjnie możemy zdefiniować  $\tilde{\beta}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lfloor t \rfloor)$ , ale nie zachowujemy wówczas multiplikatywności funkcji.

### Definicja 2.17: quasi-dominacja

Mówimy, że funkcja  $g$  **quasi-dominuje**  $[g \succ f]$  funkcję  $f$ , jeśli istnieje  $c \geq 1$  i  $b \geq 0$  takie, że

$$(\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}) f(t) \leq c \cdot g(ct + b) + b$$

### Przykłady

1. Dla każdego wielomianu  $w(t)$  stopnia  $n$  o dodatnich współczynnikach  $w(t) \prec t^n$ .
2. Dla dowolnych  $a, b > 1$  zachodzi

$$a^t \succ b^t,$$

nawet gdy  $a > b$ .

Relacja quasi-dominacji jest relacją przechodnią i zwrotną.

## 3. Tempo wzrostu grupy

### Definicja 2.18: quasi-równoważność

Dwie funkcje  $f$  i  $g$  są quasi-równoważne  $[f \sim g]$ , gdy  $f \succ g$  i  $g \succ f$ . Jest to relacja równoważności. Klasy tej relacji nazywamy **typami wzrostu** [eng. growth rate types].

### Przykłady

1. Dla  $a \geq 0$  funkcje  $t \mapsto t^a$  określają parami różne typy wzrostu.
2. Dla  $0 > a > b$  zachodzi  $e^{ta} \sim e^{tb}$ . Jest to tzw. typ wzrostu eksponencjalnego.



3.  $(\forall a \geq 0) t^a \prec e^t$  oraz  $t^a \not\prec e^t$ , czyli wzrost eksponencjalny nigdy nie jest równy wzrostowi  $t^a$ .
4. Wszystkie funkcje wzrostu grup  $\beta_{G,S}$  są quasi-zdominowane przez  $e^t$ ,  $\beta_{G,S} \prec e^t$ . Aby pokazać, że grupa  $(G, S)$  ma typ wzrostu eksponencjalnego wystarczy pokazać, że  $\beta_{G,S} \succ e^t$ , co jest równoważne nierówności  $\beta_{G,S} \geq ca^t - b$  dla  $a > 1$ ,  $b \geq 0$  i  $c > 0$ .
5.  $\tilde{\beta}_{G,S} \sim \tilde{\beta}_{G,S}$

### Fakt 2.19

Niech  $(G, S)$  i  $(H, T)$  będą grupami ze skończonym układem generatorów. Jeśli istnieje quasi-izometryczne zanurzenie

$$f: (G, d_S) \rightarrow (H, d_T),$$

to wówczas funkcja wzrostu w  $G$  jest zdominowana przez funkcję wzrostu w  $H$ :  $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ .

Zanim przejdziemy do dowodu faktu 2.19, wymieńmy kilka ważnych wniosków z niego wynikających.

### Wniosek

1. Jeśli grupy  $(G, d_S)$  i  $(H, d_T)$  są quasi-izometryczne, to wówczas mają ten sam typ wzrostu:  $\beta_{G,S} \sim \beta_{H,T}$ .
2. Dla różnych skończonych układów generatorów  $S_1, S_2$  grupy  $G$  zachodzi  $\beta_{G,S_1} \sim \beta_{G,S_2}$ , czyli grupa jednoznacznie determinuje swój typ wzrostu.

### Wyróżniamy grupy o wzroście

- wielomianowym, czyli taki dla których funkcja wzrostu jest zdominowana przez  $t^a$  dla pewnego  $a$  [ $\beta_{G,S} \prec t^a$ ],
- eksponencjalnym,
- pośrednim [eng. intermediate growth], czyli ani wielomianowym ani eksponencjalnym (dominuje ściśle nad wielomianowym, ale jest zdominowany ściśle nad eksponencjalnym).

Okazuje się, że w przypadku wzrostu nieprzekraczającego wielomianowego, wzrost musi być typu  $\beta_{G,S} \sim t^m$  dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ . Tzn. nie ma grup o typie wzrostu "ułamkowo-

potęgowego" ani  $t \cdot \log t$  etc.

Istnieją grupy o wzroście pośrednim, np. tak zwana grupa Grigorchuka (automorfizmów pewnego drzewa). Wiadomo dla niej, że

$$e^{t^\alpha} \prec \beta_G \prec e^{t^\beta}$$

dla pewnych  $0 < \alpha < \beta < 1$ , ale nie mamy wyznaczonej konkretnej funkcji. Grupa ta jest skończenie generowalna, ale nieskończenie prezentowalna.

Istnieje otwarta hipoteza, że jeśli  $G$  ma wzrost pośredni, to  $\beta_G \succ e^{t^\alpha}$  dla pewnego  $0 < \alpha < 1$ . Nie wiemy też, czy istnieje grupa skończenie prezentowalna, która dopuszcza pośredniego wzrostu (otwarte jest pytanie o dowód, że nie może tak być).

Żadna grupa o wzroście pośrednim nie ma wyznaczonego dokładnego typu wzrostu.

Wracamy do 2.19.

### Dowód

Niech  $f: (G, d_S) \rightarrow (H, d_T)$  będzie q.i. zanurzenie i niech  $C \geq 1$  będzie takie, że

$$(\forall g, g' \in G) \frac{1}{C} d_S(g, g') - C \leq d_T(f(g), f(g')) \leq C d_S(g, g') + C.$$

Niech  $e' = f(e)$  i niech  $r \in \mathbb{N}$ . Wtedy jeśli  $g \in B_r^{G,S}(e)$ , to wówczas

$$d_T(f(g), e') \leq C \cdot d_S(g, e) + C \leq C \cdot r + C.$$

W takim razie

$$f(B_r^{G,S}(e)) \subseteq B_{Cr+C}^{H,T}(e').$$

Niestety, q.i. może sklejać elementy i niekoniecznie jest różnowartościowa. Musimy więc znaleźć oszacowanie na moc przeciwbrazów  $f^{-1}(h)$ .

Jeśli  $f(g) = f(g')$ , to wówczas z faktu, że  $f$  jest q.i. mamy

$$d_S(g, g') \leq C \cdot [d_T(f(g), f(g')) + C] = C^2.$$

Stąd  $f^{-1}(h)$  zawiera się w kuli o promieniu  $C^2$  wokół dowolnego punktu z  $f^{-1}(h)$ . Ponieważ kule względem metryki słów o ustalonym promieniu i zmiennym środku są równoliczne, więc mamy oszacowanie

$$|f^{-1}(h)| \leq |B_{C^2}^{G,S}(e)|.$$

Stąd dostajemy

$$|B_r^{G,S}(e)| \leq |B_{C^2}^{G,S}(e)| \cdot |B_{Cr+C}^{H,T}(e')|,$$

czyli

$$\beta_{G,S}(r) \leq |B_{C^2}^{G,S}(e)| \cdot \beta_{H,T}(Cr + C),$$

czyli  $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ .



## Przykłady

1.  $\mathbb{Z}^n \approx \mathbb{Z}^m$  są q.i.  $\iff n = m$ , bo  $\beta_{\mathbb{Z}^n} \sim t^n \not\sim t^m \sim \beta_{\mathbb{Z}^m}$ .
2. Grupa wolna  $F$  nie jest q.i. z  $\mathbb{Z}^m$ , bo  $\beta_F \sim e^t$ , a  $\beta_{\mathbb{Z}^m} \sim t^m$  i  $e^t \not\sim t^m$ .
3. Dla skończenie generowalnej podgrupy  $H \leq G$  zachodzi  $\beta_H \prec \beta_G$ .

### Wniosek

Każda grupa zawierająca podgrupę wolną (nieabelową) ma wzrost eksponencjalny.

4. Grupa Heisenberga

$$H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma  $\beta_H \sim t^4$ . Stąd można wywnioskować, że  $H \not\approx \mathbb{Z}^3$  nie jest q.i.. Jako ciekawostka można nadmienić, że wymiar asymptotyczny grupy  $H$  wynosi 3, a grupy  $\mathbb{Z}^4$  wynosi 4, co mówi, że  $H \not\approx \mathbb{Z}^4$  nie są q.i..

## 4. Grupy o wzroście wielomianowym

Dla przypomnienia, patrzymy teraz na grupy  $\beta_G \prec t^a$  dla pewnego  $a > 0$ . Zaczniemy od kilku przykładów.

Dla grupy  $G$  określamy  $C_n(G)$  indukcyjnie przez  $C_0(G) := G$ ,  $C_{n+1}(G) = [G, C_n(G)]$ . Taki ciąg nazywamy **dolnym ciągiem centralnym grupy**. Zachodzi  $C_{j+1}(G) \triangleleft C_j(G)$  oraz  $C_j(G)/C_{j+1}(G)$  jest abelowa. Gdy  $G$  jest skończenie generowalna, to wszystkie  $C_j(G)$  i ilorazy  $C_j(G)/C_{j+1}(G)$  też takie są.

Grupa  $G$  jest **nilpotentna**, gdy  $C_n(G)$  jest trywialne dla pewnego  $n$ .

### Definicja 2.20: wymiar jednorodny grupy nilpotentnej

Skończenie generowalna grupa abelowa  $A$  ma jednoznaczny rozkład  $A \sim \mathbb{Z}^m \oplus B$ , gdzie  $B$  jest grupą skończoną. Definiujemy wówczas  $\text{rank}(A) = m$ .

Wymiar jednorodny grupy nilpotentnej to skończona suma (bo od pewnego momentu

$$C_j(G) = 0$$

$$d(G) := \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \operatorname{rank}(C_j(G)/C_{j+1}(G)).$$

### Fakt 2.21

Dla dowolnej skończonej generowalnej grupy nilpotentnej  $G$  zachodzi

$$\beta_G \sim t^{d(G)}$$

### Przykład

Dla grupy Heisenberga  $H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ , która jest nilpotentna, mamy

$$\begin{aligned} C_1(H) &\cong \mathbb{Z} & C_0(H)/C_1(H) &= H/C_1(H) \cong \mathbb{Z}^2 \\ C_2(H) &= 0 & C_1(H)/C_2(H) &\cong C_1(H) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

więc  $d(H) = \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^2) + 2 \cdot \operatorname{rank}(\mathbb{Z}) = 2 + 2 = 4$ .

### Definicja 2.22: wirtualna nilpotentność

Skończenie generowana grupa  $G$  jest wirtualnie nilpotentna, jeśli zawiera skończonego indeksu podgrupę nilpotentną.

### Twierdzenie 2.23: [Gromova]

Skończenie generowana grupa  $G$  ma wzrost wielomianowy  $\beta_G \prec t^a \iff G$  jest wirtualnie nilpotentna.

### Wniosek

1. Wśród grup o wzroście wielomianowym nie ma innych typów wzrostu niż  $t^m$  dla  $m \geq 1$
2. Grupa q.i. z  $\mathbb{Z}$  jest wirtualnie  $\mathbb{Z}$ , bo ma wzrost taki sam jak  $\mathbb{Z}$  (wielomianowy). W takim razie jest wirtualnie nilpotentna i możemy wybrać  $G_0 \leq G$  nilpotentną podgrupę skończonego indeksu. Ponieważ  $\beta_{G_0} \sim t^1$ , to  $d(G_0) = 1$  i wystarczy wywnioskować, że  $G_0$  jest wirtualnie  $\mathbb{Z}$ .
3. Podobnie można uzasadnić, że jeśli  $G$  jest q.i. z  $\mathbb{Z}^m$ , to jest wirtualnie  $\mathbb{Z}^m$ .

## 20.12.2024 Funkcja wzrostu i metryka Riemanna

### Definicja 2.24

Niech  $M$  będzie zupełną rozmaitością z metryką Riemanna  $g$ , która indukuje metrykę  $d_g$  i miarę objętości  $\text{Vol}_g$ .

**Funkcja wzrostu objętości** (volume growth) na rozmaitości  $M$  względem punktu bazowego  $p \in M$  to funkcja  $\beta_g^{M,p} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  zadana przez

$$\beta_g^{M,p}(r) = \text{Vol}_g(B_r(p))$$

gdzie  $B_r(p)$  to kula względem metryki  $d_g$ .

### Lemat 2.25: Milnor-Švarc

Niech  $M$  będzie zamkniętą, spójną rozmaitością Riemannowską i niech  $\tilde{M}$  będzie jej nakryciem uniwersalnym z indukowaną metryką  $\tilde{g}$ . Wówczas dowolna funkcja wzrostu objętości  $\beta_{\tilde{g}}^{\tilde{M},p}$  na  $\tilde{M}$  jest quasi-równoważna z funkcją wzrostu  $\beta_{\pi_1 M}$  grupy podstawowej  $\pi_1 M$ .

### Przykład

Niech  $M = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  ze standardową metryką produktową. Wówczas  $(\tilde{M}, \tilde{g}) = \mathbb{R}^2$  oraz  $\pi_1 M = \mathbb{Z}^2$ . Obie funkcje wzrostu są tutaj kwadratowe.

### Dowód

Zacznijmy od kilku stwierdzeń

- grupa podstawowa zamkniętej rozmaitości jest skończenie generowalna
- oraz działa na nakryciu uniwersalnym (przez deck-transformacje)  $\pi_1 M \curvearrowright \tilde{M}$ .

Niech teraz  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  będzie skończonym układem generatorów  $\pi_1 M$  i  $p \in \tilde{M}$  będzie dowolnym punktem. **Promień iniektywności**  $M$  definiujemy jako

$$\text{inrad}(M, g) := \frac{1}{2} \inf\{|\gamma|_g : \gamma - \text{gładka, homotopijnie nietrywialna pętla w } M\}.$$

Dla rozmaitości zamkniętych jest to zawsze liczba dodatnia.

W takim razie dla  $0 < \varepsilon < \text{inrad}(M, g)$  mamy rozłączne kule w  $\tilde{M}$

$$B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(\gamma \cdot p) = \emptyset$$

dla dowolnego  $\gamma \in \pi_1(M) - \{1\}$ . W nakryciu jeśli mamy krzywą  $c$  łączącą  $p$  z  $\gamma \cdot p$  to długość odpowiadającej jej pętli w  $M$   $\pi(c) \geq \text{inrad}(M, g)$ . Czyli długość samego  $c$  też jest większa niż  $\text{inrad}(M, g)$  a więc kule o mniejszym promieniu są rozłączne.

Niech teraz  $D := \max\{d_{\tilde{g}}(p, s \cdot p) : s \in S\} < \infty$ . Można pokazać, że dla każdego  $\gamma \in \pi_1 M$  zachodzi

$$d_{\tilde{g}}(p, \gamma \cdot p) \leq D|g|_S.$$

To oznacza, że dla dowolnego  $m \geq 0$  kula  $B_{Dm}(p)$  zawiera wszystkie punkty  $\gamma \cdot p$  takie, że  $|\gamma|_S \leq m$ . Czyli jeśli dodamy do promienia  $\varepsilon > 0$ , to kula  $B_{Dm+\varepsilon}(p)$  zawiera te punkty  $\gamma \cdot p$  jak i ich małe otoczenia  $B_\varepsilon(\gamma \cdot p) = \gamma \cdot B_\varepsilon(p)$ .

Zatem

$$\text{Vol}_{\tilde{g}}(B_{Dm+\varepsilon}(p)) \geq \beta_{\pi_1 M, S}(m) \cdot \text{Vol}_g(B_\varepsilon(p))$$

$$\beta_{\pi_1 M, S}(m) \leq \frac{1}{\text{Vol}_g(B_\varepsilon(p))} \cdot \text{Vol}_{\tilde{g}}(B_{Dm+\varepsilon}(p))$$

Co oznacza, że funkcja objętości  $\text{Vol}_{\tilde{g}}$  quasi-dominuje funkcję wzrostu  $\beta_{\pi_1 M, S}$ .

Dowód odwrotnej quasi-dominacji zaczynamy od przypomnienia, że działanie  $\pi_1 M \curvearrowright \tilde{M}$  jest kozwarte. Niech  $D > 0$  będzie takie, że

$$\bigcup_{\gamma \in \pi_1 M} \gamma \cdot B_D(p) = \tilde{M} \quad \left[ = \bigcup_{\gamma \in \pi_1 M} B_D(\gamma \cdot p) \right]$$

Dla dowolnego  $r > 0$  kula  $B_r(p)$  zawiera się w sumie kul  $B_D(\gamma \cdot p)$  dla których  $d(p, \gamma \cdot p) \leq r + D$ :

$$B_r(p) \subseteq \bigcup \{B_D(\gamma \cdot p) : d(p, \gamma \cdot p) \leq r + D\}$$

Lemat Milnora-Švarca 1.14 mówi, że odwzorowanie

$$\pi_1 M \ni \gamma \longmapsto \gamma \cdot p \in (\tilde{M}, d_{\tilde{g}})$$

jest quasi-izometrią. Niech  $(L, C)$  będą stałymi z definicji q.i., czyli

$$d(p, \gamma \cdot p) \geq \frac{1}{C}|g|_S - L.$$

Wtedy zbiór

$$\{\gamma \in \pi_1 M : d(p, \gamma \cdot p) \leq r + D\}$$

zawiera się w zbiorze

$$\{\gamma \in \pi_1 M : |g|_S \leq C(r + D + L)\}.$$

W takim razie

$$\text{Vol}_g(B_r(p)) \leq \beta_{\pi_1 M, S}(C \cdot r + C(D + L)) \cdot \text{Vol}_g(B_D(p)),$$

a więc funkcja wzrostu objętości jest quasi-zdominowana przez funkcję wzrostu  $\beta_{\pi_1 M, S}$  grupy  $\pi_1 M$ .



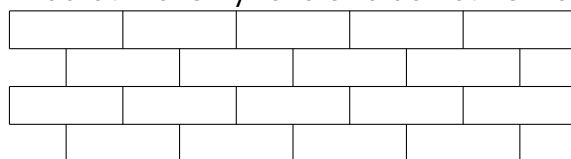
Funkcje wzrostu objętości w rozmaitościach  $\tilde{M}$  o ujemnej krzywiznie są wykładnicze, zaś w rozmaitościach o nieujemnej są quasi-zdominowane przez wielomiany stopnia  $\dim(M)$ . Wynik Milnora kładł nacisk na własności wzrostu grup podstawowych  $\pi_1 M$  - traktowany jako analog wcześniej znanego faktu, że grupy podstawowe rozmaitości o dodatniej krzywiznie są skończone.

## 04.12.2024 Wymiar asymptotyczny oraz dowód $\text{asdim } \mathbb{Z}^n = \text{asdim } \mathbb{R}^n = n$

Niech  $X$  będzie zwartą przestrzenią metryczną. Definiujemy wówczas **wymiar**  $\dim X$  jako najmniejsze  $n$  takie, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończone pokrycie  $U_\varepsilon$  przestrzeni  $X$  otwartymi zbiorami o średnicy  $< \varepsilon$  takie, że każdy  $x \in X$  należy do  $\leq (n + 1)$  zbiorów z  $U_\varepsilon$ .

### Przykład

$\dim([0, 1] \times [0, 1]) \leq 2$  Kwadrat możemy rozbić na dowolnie małe cegiełki średnicy  $< \varepsilon$



i jako pokrycie wybrać malutkie otoczenia tych cegiełek. Wtedy każdy punkt jest w co najwyżej dwóch zbiorach.

## 1. Wymiar asymptotyczny

### Definicja 2.26

Wymiar asymptotyczny  $\text{asdim } X$  to najmniejsze  $n$  takie, że  $(\forall R > 0)$  istnieje (na ogół nieskończone) pokrycie  $U_R$  przestrzeni  $X$  zbiorami jednostajnie ograniczonymi (niekoniecznie otwartymi) takimi, że  $(\forall x \in X)$  kula  $B_R(x)$  należy do co najwyżej  $(n + 1)$  zbiorów z tego pokrycia.

1.  $\text{asdim } X$  jest niezmiennikiem q.i.
2.  $\text{asdim}(\{n^3 : n \in \mathbb{Z}\}) = 0$
3. dla  $X$  asymptotycznie spójnej,  $\text{asdim } X = 0$  wtedy i tylko wtedy  $X$  jest ograniczona
4.  $\text{asdim}(\mathbb{Z}^n) \leq n$  (patrz: cegłówki wyżej)
5.  $\text{asdim}(X \times Y) \leq \text{asdim}(X) + \text{asdim}(Y)$ , ale łatwiej jest pokazać  $\text{asdim}(X \times Y) \leq \text{asdim } X + \text{asdim } Y + 1$
6. jeśli  $Y \subseteq X$  z obciętą metryką, to  $\text{asdim } Y \leq \text{asdim } X$

Yu [1998] pokazał, że jeśli  $\text{asdim } G < \infty$ , to  $G$  spełnia hipotezę Novikova, a w 2003 Roe udowodnił, że  $\text{asdim } G < \infty \implies G$  zgrubnie zanurza się w przestrzeni Hilberta.

*Pytanie na dziś: jak pokazać, że  $\text{asdim } \mathbb{Z}^n = \text{asdim } \mathbb{R}^n \geq n$ ?*



## 2. Dowód homologiczny

Metoda homologiczna będzie polegała na:

1. zdefiniowaniu  $\text{asdim}_h$  (asymptotyczny wymiar homologiczny)
2. pokazaniu, że  $\text{asdim}_h \mathbb{Z}^n \geq n$
3. na koniec wystarczy pokazać, że zwykły wymiar asymptotyczny jest nie mniejszy  $\text{asdim} \geq \text{asdim}_h$ .

### Definicja 2.27

Dla  $\varepsilon > 0$   $q$ -wymiarowy  $\varepsilon$ -sympleks w przestrzeni metrycznej  $X$  to układ  $(x_0, x_1, \dots, x_q)$  punktów z  $X$  (niekoniecznie różnych) takich, że  $d_X(x_i, x_j) \leq \varepsilon$  dla  $0 \leq i \neq j \leq q$ .

Określamy w oczywisty sposób  $q$ -wymiarowe  $\varepsilon$ -łańcuchy, brzegowanie oraz  $\varepsilon$ -homologie  $H_q^\varepsilon(X)$  [teoria homologii Alexandrowa].

Dla  $\varepsilon$ -łańcucha  $U$  w  $X$  definiujemy **nośnik**  $\text{supp}(U)$  jako zbiór wszystkich wierzchołków we wszystkich  $\varepsilon$ -sympleksach z  $U$  (mających niezerowy współczynnik).

Dla  $\varepsilon$ -cyklu  $z$ , jego  **$\varepsilon$ -wypełnieniem** nazywamy dowolny  $\varepsilon$ -łańcuch  $w$  taki, że  $\partial w = z$ .

$\text{asdim}_h(X) \leq p$  gdy dla każdego  $\nu > 0$  istnieje  $\alpha > 0$  (zależna tylko od  $X$  i  $\nu$ ) taka, że dla  $q \geq p$  dowolny  $q$ -wymiarowy  $\nu$ -cykl  $\varphi$ ,  $\nu$ -homologicznie trywialny w  $X$ , jest także  $\alpha$ -homologicznie trywialny w swoim nośniku  $\text{supp}(\varphi)$ .

$\text{asdim}_h(X) \geq n$  gdy istnieje  $\nu$  takie, że dla każdego  $\alpha$  istnieje  $(n-1)$ -wymiarowy  $\nu$ -cykl  $\nu$ -homologii  $\varphi$  trywialny w  $X$  oraz  $\alpha$ -homologicznie nietrywialny w swoim nośniku.

### Definicja 2.28: asymptotyczny wymiar homologiczny

$$\text{asdim}_h(X) = \min\{p : \text{asdim}_h(X) \leq p\}$$

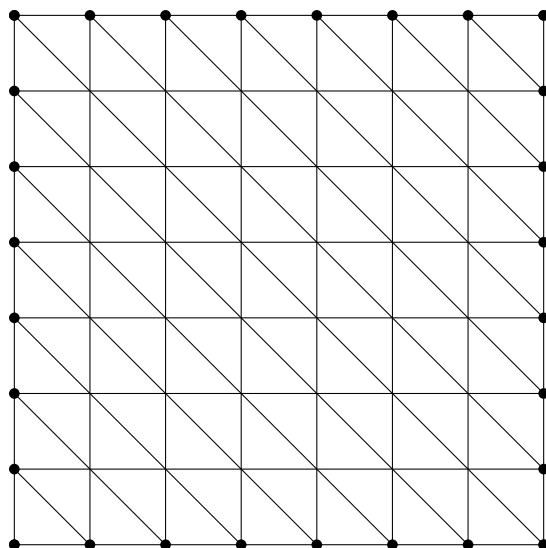
Można pokazać, że  $\text{asdim}_h$  jest niezmiennikiem q.i..

### Lemat 2.29

$$\text{asdim}_h(\mathbb{Z}^n) = \text{asdim}_h(\mathbb{R}^n) \geq n$$

### Dowód

Niech  $\varphi$  będzie  $(n-1)$ -wymiarowym  $r$ -cyklem, który jest  $r$ -homologicznie trywialny w  $\mathbb{R}^n$ . Na obrazku niżej jest taki cykl narysowany dla  $r = 1$ .



Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  będzie dowolne. Twierdzimy, że  $\varphi$  jest  $\alpha$ -homologicznie nietrywialny w swoim otoczeniu. **NIE ROZUMIEM DOWODU CLAIMU I CO SIE DZIEJE NA OBRAZKU**



### Twierdzenie 2.30

$$\text{asdim}_h(\mathbb{Z}^n) = \text{asdim}_h(\mathbb{R}^n) \geq n$$

TUTAJ ZDJECIA JAKIES CZY COS

### Twierdzenie 2.31

$$\text{asdim}(X) \geq \text{asdim}_h(X)$$