

---

## Rozgrzewka

**Zadanie 1.** Ile jest dwucyfrowych liczb parzystych? Ile trzycyfrowych, a ile stucyfrowych?

**Zadanie 2.** Ile liczb mniejszych od 1000 jest podzielnych przez 3 i 4?

**Zadanie 3.** Ile jest przestawień (nie)słowa LEWINKŁODZKI?

---

**Zadanie 4.** A słowa MATEMATYKA?

**Zadanie 5.** Ile osób musiałoby urodzić się w Polsce jednego dnia, żeby zabrakło dla nich PESELi?

**Zadanie 6.** Ile jest przestawień liter ABC i cyfr 1234 tak, że najpierw stoją litery, a potem liczby? Ile jest przestawień, że litery nie stoją obok siebie?

**Zadanie 7.** W powiecie kłodzkim rejestracja samochodowa zaczyna się od DKL i ma potem ciąg 5 cyfr i liter, w którym wszystkie cyfry (których może być od 0 do 5) są zawsze przed literami. Ile jest możliwych rejestracji samochodów w powiecie kłodzkim?

**Zadanie 8.** Na ile sposobów można posadzić 150 uczniów przy 150-kątnym stole (lub okrągłym, jeśli takiego nie mamy pod ręką)?

### Dwumian Newtona

Liczbę

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

nazywamy dwumianem Newtona. Warto kojarzyć tzw. **trójkąt Pascala**

$n = 0$							1					
$n = 1$						1					1	
$n = 2$					1		2			1		
$n = 3$			1		3		3			1		
$n = 4$		1		4		6		4		1		

który w wierszu  $n$  ma wartości  $\binom{n}{k}$  dla  $k$  odpowiadającemu numerowi kolumny (licząc od  $k = 0$  do  $k = n$ ).

**Zadanie 9.** Chcemy się wszyscy na sali przywitać uściskiem dłoni. Ile zostanie wymienionych uścisków dłoni?

**Zadanie 10.** Chcemy wybrać  $k$  osób spośród 30. Na ile sposobów możemy to zrobić dla sensownych  $k$ ?

**Zadanie 11.** W biegu niepodległości w Warszawie bierze udział 50 biegaczy. Ile jest możliwych układów na podium?

**Zadanie 12.** Rzucamy  $n$  rozróżnialnymi kośćmi. Na ile sposobów zobaczymy dokładnie 6 jedynek i 3 czwórki?

**Zadanie 13.** Zakładając, że jesteśmy po poniedziałku 4 XI 2024, zgadnij (warto spojrzeć na  $\triangle$  Pascala) wzór na

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

i udowodnij go indukcyjnie.

**Zadanie 14.** Ile wynosi  $n$ , jeśli liczba permutacji zbioru mającego  $(n + 1)$  elementów jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru mającego  $n$  elementów?

**Zadanie 15.** Do windy na ośmiopiętrowym budynku wsiadło 5 osób. Na ile sposobów mogą opuścić na różnych piętrach windę?

**Zadanie 16.** Na ile sposobów potrafisz rozłożyć 25 skarpet do 5 szuflad tak, żeby żadna szuflada nie była pusta?

**Zadanie 17.** Na ile sposobów umiesz zapisać liczbę 25 jako sumę 5 liczb naturalnych różnych od 0? A jeśli chcesz wysumować w ten sposób liczbę  $x$ ?

**Zadanie 18.** Dodaj do siebie  $n$  pierwszych liczb naturalnych. Teraz dodaj do siebie kwadraty  $n$  pierwszych liczb naturalnych.

**Zadanie 19.** Jeśli w poprzednim zadaniu nie korzystałeś do obliczania sumy kwadratów  $\triangle$  Pascala, zrób to teraz. W przeciwnym przypadku pomyśl czy umiesz to zrobić bez  $\triangle$  Pascala?

**Zadanie 20.** Na ile sposobów można podzielić  $2n$  elementowy zbiór na  $n$  zbiorów 2 elementowych?

**Zadanie 21.** Na ile sposobów potrafisz wysumować liczbę 10 z 3 liczb naturalnych (włączając 0)?

### Zbiór włączeń i wyłączeń

Niech  $A_1, \dots, A_n$  będą dowolnymi skończonymi zbiorami. Wtedy ilość elementów ich sumy mnogościowej wyraża się wzorem

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

**Zadanie 22.** Ile jest rozwiązań równania  $x_1 + x_2 + x_3 = 80$ , jeśli  $0 \leq x_i \leq 30$  dla  $i = 1, 2, 3$ ?