Lista 4

resztki

Weronika Jakimowicz

Zadanie 8

Załóżmy, że $F, G \in K[X, Y]$ są nierozkładalne i że F nie dzieli G. Niech $V = V(FG) \subseteq \mathbb{A}^2$ oraz $a \in V$ taki, że $F(a) = G(a) = 0$. Udowodnić, że a jest punktem osobliwym V.

Pomysł:

$$\frac{\partial}{\partial X}(FG)(X, Y) = G(X, Y)\frac{\partial}{\partial X}F(X, Y) + F(X, Y)\frac{\partial}{\partial X}G(X, Y)$$

daje, że pochodna w a jest zerem, bo $F(a) = G(a) = 0$. Tak samo dla $\frac{\partial}{\partial Y}$

Zadanie 9

Niech $F \in K[X, Y]$ i $V = V(F) \subseteq \mathbb{A}^2$. Udowodnić, że

1. jeśli $F \notin K$, to V nieskończony
2. jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})$ jest skończony, to $\sqrt{(F)} = (F)$ oraz $I(V) = (F)$.
3. jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}) = \emptyset$, to V jest gładką rozmaitością algebraiczną.

1. Łopatologicznie, to jeśli $F \notin K$, to dla dowolnego $a \in K$ $F(a, Y) \in K[Y]$ lub $F(X, a) \in K[X]$ i mogę przesuwać a, dostając nowe wielomianki.

   Mniej łopatologicznie, mogę wziąć dowolny $(a, b) \in V(F)$. Wtedy $f_a(Y) = F(a, Y)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który jeśli jest stały (a z racji, że $F(a, b) = 0$ to musiałby być stale równy 0), to daje nieskończenie wiele rozwiązań F. Zapisujemy więc

   $$F(X, Y) = \sum \alpha_k(X)Y^k$$

   i w ciekawszym casie któryś $\alpha_k(X)$ nie jest zerem, tylko wielomianem jednej zmiennej. Czyli ma skończenie wiele pierwiastków i nieskończenie wiele nie-pierwiastków, z których każde daje nam jakieś rozwiązanie $F(-, Y)$.

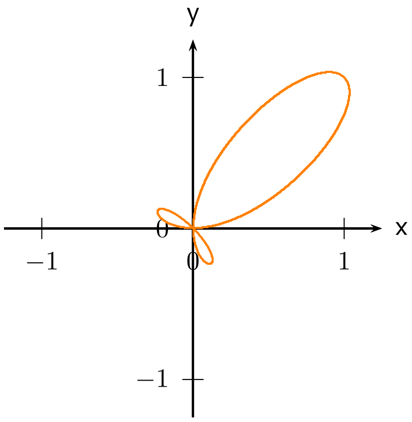
2. nie przemawia do mnie ten podpunkt

3. Tutaj po prostu nie mamy punktów osobliwych. Tzn. zbiór zer krzywej i zbiór zer jej pochodnych mają pusty przekrój. Tylko chyba powinnam zrobić większe kombinacje umysłowo-definicjowe. Tylko zaczęłam od LaTeX-owania ostatniego zadania i odmawiam.

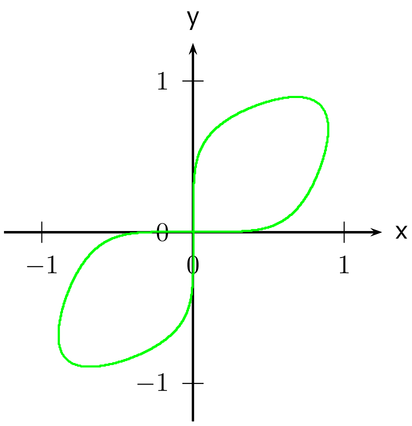
Zadanie 10

Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dla poniższych $F \in K[X, Y]$, znaleźć punkty osobliwe $V(F)$ oraz dopasować krzywe $V(F)$ do poniższego obrazka.

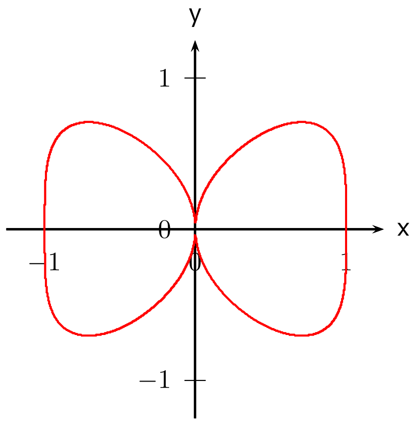
Są dwa obrazki symetryczne względem prostej $y = x$, czyli podmiana x na y nie powinna zmienić równania i są to $y^6 + x^6 - xy$ oraz $y^4 + x^4 - x^2y - xy^2$. Jeden z tych obrazków nie ma równań gdy $x < 0$ oraz $y < 0$ i tak zachowa się pierwsze z równań, czyli mamy $y^6 + x^6 - xy$



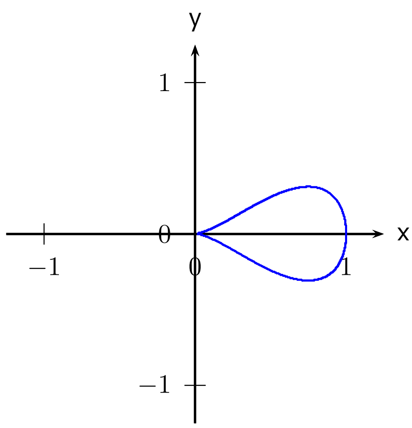
oraz $y^4 + x^4 - x^2y - y^2x$



Teraz zostały te, które są symetryczne względem OX. Ale tylko jedno z nich jest symetryczne względem OY, czyli $y^4 + x^4 - x^2$



więc zostaje $y^4 + x^4 + y^2 - x^3$



To teraz punkty osobliwe, czyli takie, gdzie pochodne cząstkowe się zerują 💥. Uwaga, będą kolory, ale idę od lewego górnego rysunku przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

$$\frac{\partial}{\partial X} F = 6X - Y$$
$$\frac{\partial}{\partial Y} F = 6Y - X$$

oba równają się 0, jeśli $X = Y = 0$ ($Y = 6X = 6 \cdot 6Y$)

$$\frac{\partial}{\partial X}F = 4X^3 - 2XY - Y^2 = X^2(4X+1) - (Y+X)^2$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}F = 4Y^3 - 2XY - X^2 = Y^2(4Y+1) - (X+Y)^2$$

Dostaję, że $X^2(4X+1) = Y^2(4Y+1)$, czyli $X = Y$ i wtedy oba są zerem.

$$\frac{\partial}{\partial X}F = 4X^3 - 2X^2 = 2X(2X^2 - 1)$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}F = 4Y^3$$

Druga różniczka jest zerem $\iff$ $Y = 0$. Pierwsza jest zerem gdy $X = 0$ lub $X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $(0,0)$ oczywiście śmiga, natomiast $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ nie leży na muszce (krzywej).

$$\frac{\partial}{\partial X}F = 4X^3 - 3X^2 = X^2(4X-3)$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}F = 4Y^3 + 2Y = 2Y(2Y^2+1)$$

Druga różniczka jest zerem tylko gdy $Y = 0$, bo $2Y^2 + 1$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Pierwsze równanie daje nam z kolei $X = 0$ lub $X = \frac{3}{4}$. Punkt $(0,0)$ śmiga, punkt $(\frac{3}{4}, 0)$ nie leży na krzywej.