# Geometria różniczkowa

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

# Spis treści

# 1. Początek końca

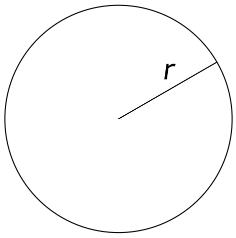
Głównym bohaterem będzie krzywizna.

## 25.02.2025 Rozgrzewka

### 1. Krzywe na płaszczyźnie

Jakościowo opisać krzywiznę krzywej na płaszczyźnie jest łatwo. Chcemy to zrobić bardziej matematycznie.

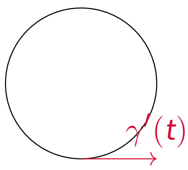
Patrzymy na okrąg na płaszczyźnie, który powinien mieć taką samą krzywiznę w każdym punkcie. Dodatkowo, im większy okrąg tym mniejsza krzywizna.




Dla okręgu jak wyżej definiujemy krzywiznę

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

Niech $\gamma$ będzie różniczkowalną krzywą gładką o niezerowej pochodnej. Wyobraźmy sobie okrąg, który podróżuje po krzywej $\gamma$ z prędkością $\gamma'(t)$ zależną od punktu na krzywej




Na tym okręgu działa pewna siła odśrodkowa - to będzie nasza krzywizna.

**Definicja 1.1**

Krzywa regularna to gładkie odwzorowanie

$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$$

której pochodna jest niezerowa w każdym punkcie $\gamma'(t) \neq 0$.

### Lemat 1.2: o parametryzacji łukowej

Jeżeli $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ jest krzywą regularną, to istnieje gładka reparametryzacja $s : (a,b) \to (0,l)$ taka, że $\gamma \circ s^{-1}$ jest krzywą o prędkości $1$. To znaczy, że

$$|(\gamma \circ s^{-1})'(d)| = 1$$

dla każdego $d \in (0,l)$.

**Dowód**

Zdefiniujmy $s$

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)|du.$$

Wtedy przeciwobraz krzywej $s$ w punkcie $u$ to droga, którą przebyliśmy od początku do teraz po krzywej $\gamma$:

$$\int_a^{a+d} |(\gamma \circ s^{-1})'(u)|du = d$$

### Przykład

Policzymy przyśpieszenie na okręgu. Wzór na okrąg to krzywa

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

więc nie jest to parametryzacja łukowa (długość łuku). Prosta zmiana daje nam

$$\gamma(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}), \quad t \in [0, 2\pi r],$$

którego pochodna to

$$\gamma'(t) = (-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})$$

wektor długości $1$.

Druga pochodna $\gamma$, czyli siła dośrodkowa, to

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{s}),$$

której wartość

$$|\gamma''(t)| = \frac{1}{r}$$

to faktycznie krzywizna okręgu.

## Lemat 1.3

Jeśli $\gamma$ jest sparametryzowane długością łuku, to $\gamma''(s)$ jest prostopadła do $\gamma'(s)$.

**Dowód**
Długość krzywej sparametryzowanej długością łuku

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$$

jest funkcją stałą. Jeśli więc zróżniczkujemy ją względem $s$, to dostajemy

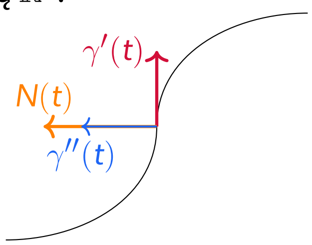
$$0 = \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 2\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle$$

## Definicja 1.4

Niech $\gamma$ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku. Niech $N(t)$ będzie wektorem jednostkowym ortogonalnym do $\gamma'(t)$ i takim, że

$$(\gamma'(t), N(t))$$

jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^2$:




Krzywizna $\kappa_\gamma(t)$ (znakowana) w $t$ jest definiowana równaniem

$$\gamma''(t) = \kappa_\gamma(t) N(t)$$

## Przykład

Rozważamy parabolę, czyli krzywą daną jako

$$\gamma(t) = (t, t^2).$$

Naszym celem jest policzenie krzywizny w punkcie $t = 0$. Wzór wyżej nie jest parametryzacja długością łuku. Liczymy więc obie pochodne:

$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\gamma''(t) = (0, 2).$$

Zauważamy, że druga pochodna nie jest prostopadła do prędkości, co zgadza się z intuicją, bo punkt podróżujący po paraboli coraz szybciej leci w górę. Liczymy nową parametryzację:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2}du,$$

której nie da się w łatwy sposób scałkować.

$$\frac{ds}{dt}|_{t=0} = 1$$

z różniczkowania funkcji odwrotnej

$$\frac{dt}{ds}|_{s=0} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}|_{t=0} = 1$$

Krzywizna to będzie

$$\frac{d}{ds}(\gamma \circ s^{-1})(s) = \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\gamma(t(s)) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = (0, 2) \cdot 1 + (1, 0)\frac{d^2t}{ds^2}$$

i $\frac{d^2t}{ds^2}$ nie da się łatwo policzyć, więc korzystamy z faktu, że $(1, 0)\frac{d^2t}{ds^2}$ jest prostopadłe do $\gamma'(0) = (1, 0)$, jeśli $\gamma'$ jest sprametryzowane długością łuku, ale tutaj nie musimy uważać, bo pierwsza pochodna jest taka sama z dokładnością do mnożenia przez stałą bez względu na jej parametryzację. Stąd wiemy, że

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0,$$

bo iloczyn skalarny jest temu równy (z dokładnością do stałej).

## Lemat 1.5: równania Freneta

Niech $\gamma$ będzie sparametryzowana długością łuku i niech $(T(s), N(s))$ będzie bazą ortonormalną dodatnio zorientowaną, gdzie $T(s) = \gamma'(s)$. Wtedy:

$$T' = \kappa \cdot N$$

$$N' = -\kappa T$$

**Dowód**

Pierwsze równanie to definicja krzywizny. W drugim równaniu trzeba zróżniczkować $N$.

$$0 = \frac{d}{ds}\langle N, N\rangle = 2\langle N', N\rangle,$$

czyli $N' = \alpha T$, gdzie

$$\alpha = \langle N', T\rangle = \langle N, T\rangle' - \langle N, T'\rangle$$

## Twierdzenie 1.6: podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Dla dowolnych $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jednostkowego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ i gładkiej funkcji $\kappa : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}$ sparametryzowana długością łuku taka, że $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(0) = v$, $\kappa_\gamma = \kappa$.

**Dowód**

Niech $T = (T_1, T_2)$ i $T(0) = v$ i $N = (-T_2, T_1)$ będzie ramką Freneta. Wtedy

$$\begin{pmatrix} T_1' \\ T_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa T_2 \\ \kappa T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

jest jedynym rozwiązaniem

$$\gamma(s) = \int_0^s T(u)dy + (x_0, y_0).$$

Wiemy, że $|T| = 1$, bo

$$\frac{d}{ds}|T|^2 = \frac{d}{ds}\langle T, T\rangle = 2\langle T', T\rangle = 0$$

## Definicja 1.7

Niech krzywa $\gamma$ będzie sparametryzowana długością łuku i niech $\eta$ będzie okręgiem sparametryzowanym długością łuku stycznym do $\gamma$ (wektory prędkości się pokrywają) w punkcie $\gamma(t_0)$. Wtedy jest **okręgiem ściśle stycznym**, jeżeli $\eta''(t_0) = \gamma''(t_0)$.

## Definicja 1.8

**Ewolutą krzywej** $\gamma$ nazywamy krzywą utworzoną ze środków okręgów ściśle do niej stycznych.

$$c = \gamma + \frac{1}{\kappa} N$$

W punktach przegięcia albo ignorujemy je i wymagamy, aby $\gamma''(t) \neq 0$, albo mówimy, że w punkcie przegięcia okrąg ściśle styczny to prosta.

## Fakt 1.9

Niech $\gamma$ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku taką, że $\kappa'(t) \neq 0$, to okręgi ściśle styczne są parami rozłącznew otoczeniu $t$.

**Dowód**

Niech $c$ będzie ewolutą krzywej $\gamma$. Weźmy dwa punkty $t_1$ i $t_2$ w otoczeniu punktu $t$ z twierdzenia. Naszym celem będzie pokazanie, że długość drogi $c(t_1)$ a $c(t_2)$ jest nie większa niż różnica promieni:

$$\int_{t_0}^{t_1} |c'(u)| du = \left| \frac{1}{R(t_0)} - \frac{1}{R(t_1)} \right|,$$

gdzie $R(t_i)$ to promień okręgu ściśle stycznego do $\gamma$ w punkcie $t_i$.

$$c' = \gamma' + \frac{1}{\kappa} N' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N,$$

czyli

$$\int_{t_0}^{t_1} |c'(u)| du = \int_{t_0}^{t_1} \left| \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right| du = \left| \frac{1}{R(t_0)} - \frac{1}{R(t_1)} \right|.$$

# 06.03.2025

## Definicja 1.10

Krzywe $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ sparametryzowane długością łuku, $\gamma'' \neq 0$. Weźmy $\gamma' \perp \gamma''$. Definiujemy $N = \frac{\gamma''}{|\gamma''|}$. Definiujemy krzywiznę takiej krzywej jako $\kappa_\gamma = |\gamma''|$.
$B = T \times N$ (wektor, który tworzy z $T$ i $N$ bazę dodatno zorientowaną.
$(T, N, B)$ to trójnóg Freneta.

## Twierdzenie 1.11

$$(T, N, B)' = (T, N, B) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

**Dowód**

Pierwszy wiersz to definicja, że $T' = \kappa N$.