Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

1. Informacje wstępne

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$d_S(g_1, g_2) = \min\{n \ : \ g_2 = g_1 s_1, ..., s_n, \ s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} \ : \ g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. lewo-niezmiennicza, czyli $(\forall\ \gamma \in G)\ d_S(\gamma g_1, \gamma g_2) = d_S(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

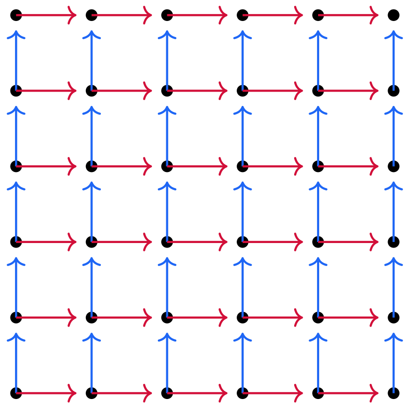
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

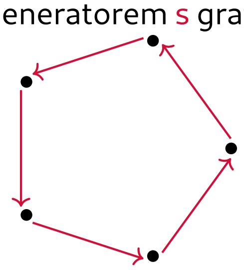
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overbrace{(1,0)}^{s}, \overbrace{(0,1)}^{t}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p-kąt



3. TO DO parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy $V = G$, ale krawędzie są niezorientowane: $E = \{\{g_1, g_2\} : d_S(g_1, g_2) = 1\}$. W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedyńczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez automorfizmy zachowując krawędzie oraz ich etykiety. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

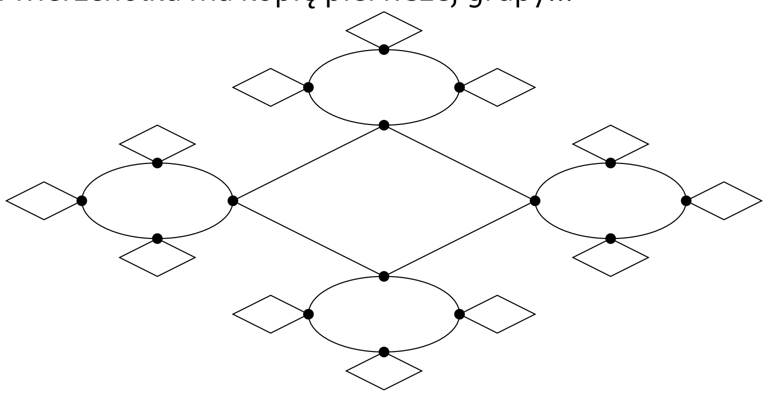
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S, której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie (lewa-niezmienniczość).

Dla surjekcji $\pi : F_S \to G$, gdzie $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$ możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np. $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$

$$\begin{tikzcd} g_1 \arrow[r, bend left, "s_1"] \arrow[r, bend right, "s_2"'] & g_2 \end{tikzcd}$$

Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$ to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



3. Quasi-izometrie

Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych (X_i, d_i), $i = 1, 2$, mówimy, że przekształcenie $f : X_1 \to X_2$ (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje $C \geq 1$ oraz $L \geq 0$ takie, że $\forall$ $x, y \in X_1$ zachodzi

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje $D \geq 0$ takie, że $f(X_1)$ jest D-gęsty (D-siecią) w X_2, tzn.

$$(\forall\ y \in X_2)(\exists\ x \in X_1)\ d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy f jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy $L = D$ (większe z dwóch) i mówimy o tzw. (C, L)-quasi-izometrii.

Fakt 1.5: własności q.i.

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i. $f : X_1 \to X_2$ istnieje $g : X_2 \to X_1$ takie, że istnieje $D \geq 0$ takie, że

$$(\forall\ x_2 \in X_2)\ d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall\ x_1 \in X_1)\ d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

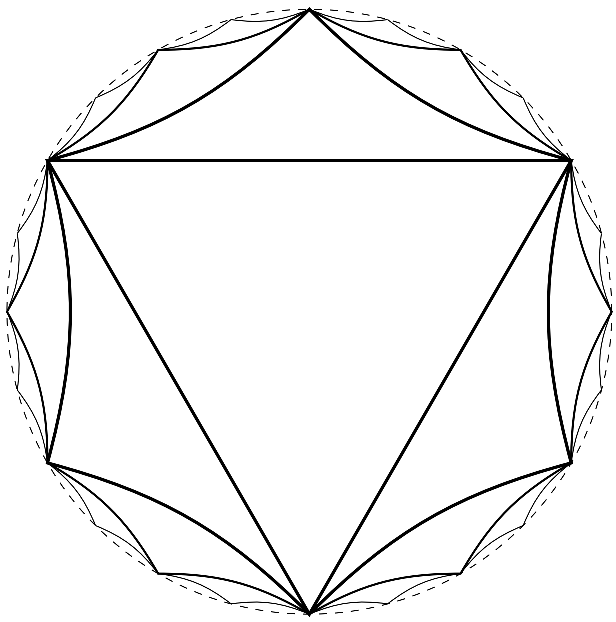
   to wówczas g też jest q.i.

Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości

Mówimy, że (X_1, d_1) jest quasi-izometryczna z (X_2, d_2) jeśli istnieje q.i. $f : X_1 \to X_2$. Jest to relacja równoważności.

Przykłady

1. (X, d) jest q.i. z punktem $\iff$ X jest ograniczone.
2. X jest q.i. z dowolną swoją D-siecią $Y \subseteq X$ przez inkluzję.
3. Dla dowolnego B ograniczonego $X \times B \cong X$ są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne T_k stopnia $k \geq 3$ są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia $T_\omega = T_{\aleph_0}$.



Fakt 1.7

Niech G będzie grupą skończenie generowalną i niech S_1, S_2 jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych $(G, S_1) \to (G, S_2)$ gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

Wniosek 1.8

Skończenie generowana grupa G determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest jednoznacznym obiektem quasi-metrycznym.

2. Niezmienniki izometrii

16.10.2024 Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni

Zanim zaczniemy, zróbmy szybką motywację, czyli graf Cayleya grupy $\mathbb{Z}$ z jednym generatorem:

który ma "dwa końce". Natomiast grupa wolna F_2 o dwóch generatorach ma "nieskończenie wiele końców".

Z drugiej strony, grupa $\mathbb{Z}^2$ ma jeden koniec: jeśli weźmiemy dwa bardzo odległe od siebie obszary, to one są ze sobą połączone, chociaż jest to połączenie "bardzo odległe".

NARYSOWAC krate i dwa placki poolaczone

Z kolei każda przestrzeń skończona, np. graf Cayleya grupy skończonej, ma 0 końców.

1. Podejście przez granice

Definicja 2.1: zbiór skierowany

Zbór z częściowym prządkiem $(\Lambda, \leq)$ jest **skierowany**, gdy dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ istnieje $\lambda \in \Lambda$ takie, że $\lambda \geq \lambda_1$ oraz $\lambda \geq \lambda_2$.

ciągi odwrotne

Definicja 2.2: system odwrotny

System odwrotny nad zbiorem skierowanym Λ to rodzina zbiorów

$$\mathfrak{X} := \{X_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$$

oraz rodzina odwzorowań

$$\mathcal{F} := \{f_{\lambda\mu} : X_\mu \to X_\lambda \ : \ \lambda \leq \mu\}$$

takich, że

1. dla dowolnego λ mamy funkcję identycznościową: $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
2. dla dowolnych $\lambda \le \mu \le \nu$ złożenia zachowują się dobrze: $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$.

Będziemy oznaczać: $\underline{\mathbf{X}} := (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$

Definicja 2.3: granica odwrotna

Granicą odwrotną systemu $\underline{X}$ nazywamy zbiór

$$\varprojlim = \{\xi \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ : \ (\forall\ \lambda' \le \lambda)\ \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda)\}.$$

Elementy ξ jak wyżej nazywamy niciami (threads) w $\underline{X}$.

Definicja 2.4: odwzorowania graniczne

Odwzorowania

$$f_\lambda : \varprojlim \underline{X} \to X_\lambda$$

takie, że $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$ nazywamy odwzorowaniami granicznymi.

O odwzorowaniach granicznych można myśleć jako o odwzorowaniach, które pytają "kim byłem w czasie λ".

$$\begin{tikzcd}
X_1 & X_2 \arrow[l] & X_3 \arrow[l] & X_4 \arrow[l] & \dots \arrow[l] \\
 & & \varprojlim \underline{X} \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Dla $\lambda \le \mu$ diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim \underline{X} \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[dr, "f_\mu"] & \\
X_\lambda & & X_\mu \arrow[ll, "f_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

zawsze komutuje.

2. Toopologia granicy odwrotnej

Kiedy zbiory X_λ są przestrzeniami topologicznymi, zaś $f_{\lambda\mu}$ są ciągłe, to na granicy odwrotnej $\varprojlim \underline{X}$ rozważamy również topologię graniczną. Jest to topologia dziedziczona z topologii produktowej na $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Bazą tej topologii są zbiory postaci $f_\lambda^{-1}(U)$ dla $\lambda \in \Lambda$ i otwartych

$U \subseteq X$.

Fakt 2.5

Gdy przestrzenie X_λ są Hausdorffa, to $\varprojlim \underline{X}$ jest domkniętym podzbiorem w $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Gdy przestrzenie X_λ są zwarte i metryczne, to wówczas $\varprojlim \underline{X}$ też jest zwarta i metryczna. W szczególności, gdy X_λ są skończone (z topologią dyskretną), zaś Λ jest przeliczalny, to wówczas $\varprojlim \underline{X}$ jest przestrzenią zwartą i metryczną. Na ogół nie jest też przestrzenią dyskretną, mimo że wszystkie zbiory po których bierzemy granicę takie były (bazą topologii są przeciwobrazy punktów $\{\xi \in \varprojlim \underline{X} \ : \ \xi_\lambda = x\} = f_\lambda^{-1}(x)$).

Przykład

Niech $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$ i niech X_k będzie zbiorem wszystkich ciągów $0-1$ długości k. Dla $k \leq m$ rozważamy

$$f_{km} : X_m \to X_k$$

będące obcięciem ciągu długości m do początkowego ciągu długości k. Dostajemy wówczas system odwrotny $\underline{X} = (\mathbb{N}, \{X_k\}, \{f_{km}\})$ zbiorów skończonych. Wówczas $\varprojlim \underline{X}$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

Będziemy zajmować się X które są przestrzeniami metrycznymi, geodezyjnymi właściwymi, np. grafami Cayleya grup skończenie generowanych. $\mathcal{K}$ to będzie rodzina wszystkich zwartych podzbiorów $K \subseteq X$ z porządkiem inkluzji.

Definicja 2.6: podzbiór współkońcowy

Podzbiór $M \subseteq \Lambda$ zbioru skierowanego Λ nazywamy **współkońcowym**, jeśli

$$(\forall\ \lambda \in \Lambda)(\exists\ \mu \in M)\ \lambda \leq \mu,$$

wtedy $(M, \leq)$ też jest zbiorem skierowanym. Dla $\underline{X} = (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$ niech

$$\underline{X}_{|M} = (M, \{X_\lambda \ : \ \lambda \in M\}, \{f_{\mu\mu'} \in \mathcal{F} \ : \ \mu, \mu' \in M\})$$

będzie obcięciem $\underline{X}$ do M. Wtedy $\underline{X}_{|M}$ jest systemem odwrotnym nad M.

Fakt 2.7

$$\varprojlim X = \varprojlim X_{|M}$$

Przez bijekcją polegającą na obcinaniu nici do M. Jest ona jednocześnie homomorfizmem.

Wniosek

Jeśli X_λ są zwarte i metryczne, zaś Λ posiada przeliczalny podzbiór współkońcowy, to $\varprojlim X$ jest zwarta i metryczna.

Przykłady

1. W przykładzie wyżej zbiór $\mathcal{K}$ posiada współkońcowy podciąg $K_i := B_{i\cdot R}(x_0)$ dla $R > 0$ i pewnego $x_0 \in X$.
2. Dalej używając oznaczeń z poprzedniego przykładu, dla dowolnego $K \in \mathcal{K}$ niech Π_K^X będzie zbiorem nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu $X - K$.

   Przestrzeń geodezyjna jest lokalnie drogowo spójna. Każda jej otwarta podprzestrzeń również jest lokalnie drogowo spójna. Czyli każde $X - K$ też jest lokalnie drogowo spójna. W lokalnie drogowo spójnych przestrzeniach komponenty spójności to to samo co komponenty drogowej spójności.

   Każda nieograniczona komponenta $C' \subseteq X - K'$ zawiera się w dokładnie jednej nieograniczonej komponencie $C \subseteq X - K$. Dostajemy odwzorowanie $f_{KK'} : \Pi_{K'}^X \to \Pi_K^X$ takie, że $f_{KK'}(C') = C$.

   Trójka $(\mathcal{K}, \{\Pi_K^X : K \in \mathcal{K}\}, \{f_{KK'} : K \subseteq K'\})$ tworzy system odwrotny nad zbiorem skierowanym $\mathcal{K}$.

$$\Pi_K^X \xleftarrow[f_{KK'}]{} \Pi_{K'}^X \xleftarrow[f_{K'K''}]{} \Pi_{K''}^X$$

Fakt 2.8

Dla każdego $K \in \mathcal{K}$ zbiór Π_K^X jest skończony.

Dowód

Weźmy $K \subseteq B_r(x_0)$, niech $R > r$ i rozważmy kulę $B_R(x_0)$, która jest zwarta. Każda nieograniczona komponenta C spójności w $X - K$ przecina niepusto sferę $S_R(x_0)$, bo X jest geodezyjna.

Zatem przekrój $C \cap B_R(x_0)$ jest niepusty. Wtedy rodzina

$$\{C \cap B_R(x_0) \;:\; C \text{ dowolna komponenta dopełnienia } X - K\} \cup \{\overline{B_R}(x_0) = B_R(x_0) - S_R(x_0)\}$$

pokrywa $B_R(x_0)$. Dodatkowo, jest to otwarte pokrycie, bo komponenty spójności lokalnie spójnej przestrzeni są otwartymi podzbiorami w tej przestrzeni. Ze zwartości X to pokrycie posiada skończone podpokrycie, ale z drugiej strony każdy zbiór postaci $C \cap B_R(x_0)$ dla nieograniczonych komponent musi przetrwać w każdym podpokryciu, bo zawiera punkty które należą tylko do niego. Stąd nieograniczonych komponent jest skończenie wiele.

Definicja 2.9

Zbiorem (przestrzenią) końców, Ends(X), właściwej geodezyjnej przestrzeni metrycznej X nazywamy granicę odwrotną

$$\mathrm{Ends}(X) = \varprojlim(\Pi^X) = \varprojlim(\mathcal{X}, \{\Pi^X_K\}, \{f_{KK'}\}),$$

gdzie Π^X_K to nieograniczone komponenty w $X - K$. Jest to zwarta przestrzeń metryczna.