Lista 1: Algebry C*. Operatory w przestrzeni Hilberta

Matematyka nieprzemienna 2024/25

Przez $M_n(\mathbb{C})$ oznaczamy przestrzeń macierzy (kwadratowych) o wymiarach n na n i wyrazach zespolonych. Przez I oznaczamy macierz identycznościową w $M_n(\mathbb{C})$.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta (=zupełną przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle ., - \rangle$ oraz indukowana normą $\|.\|$). Uwaga: zakładmy, że iloczyn skalarny jest liniowy względem drugiej współrzędnej. Operator $T : H \to H$ nazywamy **liniowym**, jeśli dla $x, y \in H$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ mamy

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Operator liniowy $T : H \to H$ nazywamy **ciągłym**, gdy istnieje $M > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in H$ mamy

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

Najmniejszą stałą spełniającą powyższy warunek nazywamy normą operatora T i oznaczamy $\|T\|$. Zachodzą własności

$$\|T\| \overset{df}{=} \inf\{C \geq 0\colon \|Tx\| \leq C\|x\|\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, Ty\rangle|. \tag{1}$$

Przez $B(H)$ oznaczamy zbiór wszystkich operatorów liniowych i ciągłych na przestrzeni Hilberta H. Dla każdego $T \in B(H)$ istnieje dokładnie jeden operator w $B(H)$, który oznaczamy T^* i nazywamy **sprzężonym**, dla którego

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

---

1. Wykaż, że w dowolnej algebrze C* z jedynką A zachodza następujące własności:
   (a) Inwolucja jest izometrią (tzn. $\|x^*\| = \|x\|$).
   (b) Jedynka ma normę 1.
   (c) Mnożenie $A \times A \ni (x, y) \mapsto xy \in A$ jest (łącznie) ciągłe.
   (d) Grupa elementów odwracalnych $G(A)$ jest zamknięta na inwolucję ($x \in A \;\Rightarrow x^* \in A$). Ponadto, $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.
   (e) Każda niezerowa projekcja oraz każdy element unitarny ma normę 1. (*Projekcją* nazywamy $p \in A$ takie, że $p = p^* = p^2$. Element $u \in A$ jest *unitarny*, gdy $u^*u = 1 = uu^*$.)
   (f) Każdy element $a \in A$ jest sumą dwóch elementów samosprzężonych. (Wskazówka: jest to rozkład na tzw. część rzeczywistą i część urojoną.)

2. Niech A będzie algebrą C* (z jedynką). Element $x \in A$ nazywamy samosprzężonym, jeśli $x^* = x$. Niech $S(A)$ oznacza zbiór elementów samosprzężonych. Czy $S(A)$ jest zamknięta na: dodawanie? mnozenie? sprzężenie? Czyli np.: czy suma/iloczyn elementów samosprzężonych będzie elementem samosprzężonym?

3. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Wykaż, że wzory na normę operatora podane w równaniu (1) faktycznie są równe. Można opuścić nierówność "$\leq$" między ostatnimi dwoma wzorami (wymaga użycia twierdzenia o wydobywaniu normy).

4. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Sprawdź, że $B(H)$ jest algebrą C*. W szczególności pokaż, że

   - $B(H) \ni T \mapsto \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ spełnia własności normy.
   - odwzorowanie $T \mapsto T^*$ jest inwolucją na algebrze $B(H)$;
   - dla normy na $B(H)$ zachodzą submultiplikatywność oraz własność C*.

5. Pokaż, że $B(\mathbb{C}^n)$ jest izomorficzne z $M_n(\mathbb{C})$. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że $M_n(\mathbb{C})$ jest algebrą C*.

   Wskazówka: zdefiniuj odwzorowanie $\Phi : B(\mathbb{C}^n) \to M_n(\mathbb{C})$ takie, że dodawanie operatorów z $B(\mathbb{C}^n)$ odpowiadana dodawaniu macierzy w $M_n(\mathbb{C})$, a składanie operatorów z $B(\mathbb{C}^n)$ odpowiadana mnożeniu macierzy w $M_n(\mathbb{C})$. Sprawdź, że jest to izomorfizm algebr C*, czyli jest liniowy, ograniczony, multiplikatywny oraz zachowuje jedynkę i sprzężenie.

6. Przestrzeń $\ell^2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \colon x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ jest przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym
$$\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n \cdot y_n.$$

   (a) Pokaż, że odwzorowanie *shift* $S : \ell^2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$ jest poprawnie zdefiniowane ($Sx \in \ell^2$) i liniowe. Oblicz jego normę S (wywnioskuj, że S jest w $B(\ell^2)$).

   (b) Znajdź S^* i oblicz jego normę.

   (c) Wykaż, że dla dowolnego ciagu $a = (a_n)_n \in \ell^2$ odwzorowanie *waga* $W : \ell^2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$ jest poprawnie zdefiniowane ($Sx \in \ell^2$) i liniowe. Oblicz jego normę.

7. **Ślad macierzy.** Definiujemy odwzorowanie $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ wzorem $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jj}$, gdzie $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$.

   (a) Wykazać, że tr jest funkcjonałem liniowym, tzn. $\mathrm{tr}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{tr}(x) + \mu \mathrm{tr}(y)$ oraz $\mathrm{tr}(I) = 1$.

   (b) Wykazać, że $\mathrm{tr}(A^* A) \geq 0$.

   (c) Sprawdzić, czy $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.