

Teoria kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1	Początek końca	1
24.02.2025	Podstawowe definicje	1
1.	Przykłady kategorii	1
2.	Funktory	2
25.02.2025	Produkty i koprodukty kategorii	5
1.	O obiektach początkowych i końcowych słów kilka	5
2.	(Ko)granice funktorów a (ko)produkty	6
3.	Obiekty i kategorie monoidalne	9
03.03.2025	Funktory dołączone	11
1.	Motywacja abstrakcyjnego nonsensu	11
2.	Dużo przykładów funktorów dołączonych	11
3.	Druga definicja	13

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsensu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) \mathcal{C} składa się z:

- obiektów $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
 - $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$
 - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C),$$

które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczmy

$$\mathcal{C}_0 := \text{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako \mathcal{C}_1 będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii \mathcal{C} .

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria Set , której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0) , gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), f(x_0) = y_0$.

3. Top to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. $Toph$ to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in Ob(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

takie, że $F(x, 0) = f_0(x)$ oraz $F(x, 1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii $Toph$.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.

5. Kategoria $Hask$, której obiekty to typy w Haskellu, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji Rel , w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór

$$S \circ R = \{(x, z) : (\exists y \in Y) xRy \wedge ySz\},$$

gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".

7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X . Definiujemy wtedy kategorię \mathcal{C} o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X , a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a, b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pusty w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriami \mathcal{C} a \mathcal{D}

- każdemu obiektowi X kategorii \mathcal{C} przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii \mathcal{D}
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y)$ w kategorii \mathcal{D} taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

Przykład

$Ab : Gr \rightarrow Ab$ to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii \mathcal{C} rozumiemy kategorię \mathcal{C}^{op} , której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X, Y)$ "odwracają się" $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$.

Mówimy, że funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami \mathcal{C} a \mathcal{D} , $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, której obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, że dla dowolnych $X, Y \in Ob \mathcal{C}$ oraz $f : X \rightarrow Y$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczmy $Nat(F, G)$ - **naturalne przekształcenia** funktora F w funktor G .

Przykład

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przekształceniem między funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie \mathcal{C} i \mathcal{D} są **równoważne**, jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ takie, że złożenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k , $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k , $\text{Mat}^{\text{fin}}(k)$.

25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \rightarrow D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C : $\forall D \in \mathcal{C}_0 \quad |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

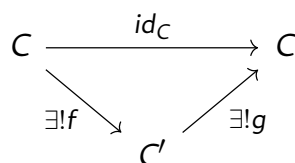
1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja \leq obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest \emptyset , a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Fakt 1.6

Obiekty końcowe i początkowe, jeśli istnieją, to są jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Niech C i C' będą obiektami końcowymi kategorii \mathcal{C} . Wiemy, że $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$, czyli komutujący diagram



daje $g \circ f = id_C$. Analogiczny diagram daje $f \circ g = id_{C'}$. Stąd f i g to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między C i C'

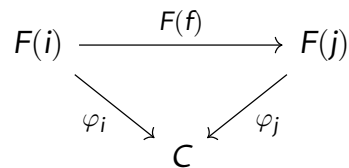


2. (Ko)granice funktorów a (ko)produkty

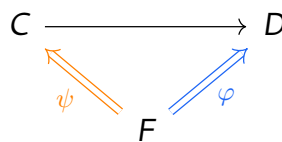
Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii \mathcal{I} myślimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, że funktor C jest stały, jeżeli $C(i) = C$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C , $\varphi : F \Rightarrow C$, czyli komutujące diagramy (kostożki)

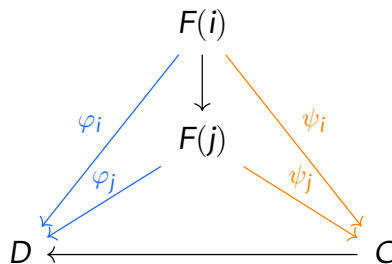


- a morfizmy to strzałki $C \rightarrow D$ takie, że diagram



komutuje.

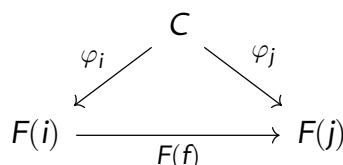
Diagram wyżej można rozisać jako:



Definicja 1.7: kogranica funktora

Kogranicą (*granica prosta*) funktora F , $\varinjlim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyżej możemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia $\varphi : F \Rightarrow C$ możemy rozważyć naturalne przekształcenia $\varphi : C \Rightarrow F$, czyli diagramy (stożki)



z morfizmami definiowanymi analogicznie.

Definicja 1.8: granica funktora

Granica (*granica odwrotna*) to obiekt końcowy powyższej kategorii stożków, $\varprojlim F$.

Rozważmy kategorię \mathcal{I} , która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem, dla którego $F(0) = A$, a $F(1) = B$. Niech φ oraz ψ będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

$$\begin{array}{ccccc} & & \varprojlim F & & \\ & \swarrow \varphi_0 & \uparrow \exists! f & \searrow \varphi_1 & \\ F(0) = A & \xleftarrow{\psi_0} & D & \xrightarrow{\psi_1} & F(1) = B \end{array}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo $\varprojlim F$ to obiekt końcowy. Jeśli weźmiemy $\varprojlim F = A \times B$, a $\varphi_0 = \pi_A$ oraz $\varphi_1 = \pi_B$ będą rzutami i $f(d) = (\psi_0(d), \varphi_1(d))$, to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna $A \sqcup B$, bo diagram

$$\begin{array}{ccccc} F(0) = A & \xrightarrow{\psi_0} & D & \xleftarrow{\psi_1} & F(1) = B \\ & \searrow \varphi_0 = i_A & \uparrow \exists! f & \swarrow \varphi_1 = i_B & \\ & & \varprojlim F = A \sqcup B & & \end{array}$$

gdzie $f(x) = \varphi_0(x)$, jeśli $x \in A$ oraz $f(x) = \psi_1(x)$ jeśli $x \in B$, komutuje.

Definicja 1.9: (ko)produkt

Produktem obiektów A i B kategorii \mathcal{C} nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ dla \mathcal{I} oraz F jak wyżej.

Koproduktem obiektów A i B kategorii \mathcal{C} nazywamy granicę odwrotną (granice) funktora $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$

Przykłady

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjański dwóch grup, tak jak w kategorii zbiorów, tj. dla grup A, G, H komutuje diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \times H & & \\
 & \swarrow \pi_G & \uparrow g \times h & \searrow \pi_H & \\
 G & \xleftarrow{g} & A & \xrightarrow{h} & H
 \end{array}$$

Koprodukt to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{g} & A & \xleftarrow{h} & H \\
 & \searrow i_G & \uparrow \exists! f & \swarrow i_H & \\
 & & H * G & &
 \end{array}$$

gdzie f nakłada na litery słów $G * H$ pochodzące z G morfizm g , a na litery pochodzące z H - morfizm h .

2. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow (P, \leq)$ z dwuobiektovej kategorii \mathcal{I} w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varinjlim F & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 F(0) = a & \longleftarrow & d & \longrightarrow & F(1) = b
 \end{array}$$

to znaczy, że $d \leq a$, $d \leq b$ oraz $d \leq \varinjlim F$. Żeby więc miało to sens dla dowolnego $d \leq a, b$ to $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$. Analogicznie dostajemy, że $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$.

3. Jeśli \mathcal{I} jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a $F : \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$ jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$, a granicą - nieskończona suma rozłączna $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$.

Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koprodukty są unikalne.

Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.



Przykład

Rozważmy funktor $F : \mathcal{I}^{op} \rightarrow Grp$, gdzie $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$ taki, że dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i \rightarrow j)=q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie q to morfizm ilorazowy.

Liczby p -adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych różne od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby p -adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq a_i < p$. Okazuje się, że całkowite liczby p -adyczne, \mathbb{Z}_p , można zdefiniować jako granicę funktora F :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z}_p & & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow \\ \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{array}$$

Granica prosta takiego funktora jest trywialna, ale możemy rozważyć inny funktor, z kategorii \mathbb{Z} z porządkiem, tzn: $G : \mathbb{Z} \rightarrow Grp$ taki, że $G(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, natomiast strzałkę $n+1 \rightarrow n$ przekształcamy na odwzorowanie

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ni x \mapsto p \cdot x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Wtedy granicą prostą G jest C_{p^∞} - pierwiastki p^n -tego stopnia z 1, dla dowolnego n .

3. Obiekty i kategorie monoidalne

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{\star \times id} & M^2 \\ id \times \star \downarrow & & \downarrow \star \\ M^2 & \xrightarrow{\star} & M \end{array}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech \mathcal{C} będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \rightarrow M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \rightarrow M$ takie, że komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 M^3 & \xrightarrow{\mu \times id} & M^2 \\
 id \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M \\
 \\
 M & \xrightarrow{\varepsilon \times id} & M^2 \\
 id \times \varepsilon \downarrow & \searrow = & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.

Obiekt monoidalny w kategorii \mathbf{Cat} nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria \mathcal{C} z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalną.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in \text{End}(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób. Funktor $T \in \text{End}(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \rightarrow T, \varepsilon : Id \rightarrow T$, nazywa się **monadą**.

03.03.2025 Funktory dołączone

1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k , a B wybraną jej bazą. Dowolne odwzorowanie $B \rightarrow V$ możemy rozszerzyć na odwzorowanie liniowe $k[B] = V \rightarrow V$. To znaczy, mamy izomorfizm zbiorów

$$\text{Hom}(B, V) \cong \text{Hom}(V, V).$$

W języku abstrakcyjnego nonsensu możemy zdefiniować dwa funktory,

$$\text{Set}(-, U(-)) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{Vect}_k(k[-], -) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set},$$

gdzie $U : \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$ to funktor zapominający strukturę przestrzeni wektorowej, między którymi istnieją naturalne izomorfizmy.

$$\text{Set}(-, U(-)) \cong \text{Vect}_k(k[-], -)$$

Definicja 1.12: funktory dołączone

Niech $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ oraz $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ będą funktorami. Powiemy, że L jest **lewo dołączony** do funktora R , a R **prawo dołączony** do L , jeśli funktory

$$\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$$

są naturalnie izomorficzne. Taką parę funktorów dołączonych oznaczamy $L \dashv R$.

2. Dużo przykładów funktorów dołączonych

1. Niech $R : \text{Set}_* \rightarrow \text{Set}$ będzie funktorem z kategorii zbiorów z bazowym w kategorię zbiorów, który zapomina o punkcie bazowym. Chcemy teraz znaleźć funktor $L : \text{Set} \rightarrow \text{Set}_*$, który będzie do niego lewo dołączony. Niech $L(X) = X \sqcup \{X\}$ (lub bardziej obrazowo: $X \sqcup \{*\}$), gdzie y_0 pošemy na $\{X\}$, to znaczy doklejamy do X singleton i staje się on punktem wyróżnionym.

Oba funktory są różnowartościowe na obiektach, więc wystarczy przekonać się, że

$$\text{Set}_*(LX, (Y, y_0)) \cong \text{Set}(X, R(Y, y_0))$$

jest izomorfizmem. Dowolna funkcja $X \rightarrow Y$ rozszerza się przez postanie $\{X\} \mapsto y_0$ na funkcję $(X, \{X\}) \rightarrow (Y, y_0)$.

2. Podobna sytuacja ma miejsce, kiedy szukamy lewo dołączony funktor do $R : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Rng}$ między kategorią pierścieni z jedyneką, a wszystkimi pierścieniami. Definiujemy funktor

$$L : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ring}$$

jako doklejenie \mathbb{Z} , $L(S) = \mathbb{Z} \oplus S$ z działaniem $(n, s)(n', s') = (nn', ns' + ss' + n's)$, wtedy $(1, 0_S)$ jest jedyneką w nowym pierścieniu. Pozostaje przyjrzeć się co się dzieje z morfizmami, skoro

$$\mathbf{Rng}(S, RT) \cong \mathbf{Ring}(LS, T).$$

Dowolny morfizm $\varphi : S \rightarrow RT$ wystarczy, że trzyma element neutralny ze względu na dodawanie i jest addytywny. Możemy go rozszerzyć na morfizm, który całą pierwszą współzrędną $LS = \mathbb{Z} \oplus S$ posyła w $1_T \in T$, a drugą zgodnie z φ . W drugą stronę wystarczy obciąć morfizm do drugiej współzrędną.

3. Niech $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ będzie funktorem takim, że $\Delta(C) = (C, C)$. Zaczniemy od szukania funktora dołączonego do niego z prawej strony, czyli $R : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ takiego, że

$$\mathbf{Hom}(X, R(Y, Z)) \cong \mathbf{Hom}(\Delta(X), (Y, Z)).$$

Od razu narzuca się $R(Y, Z) = Y \times Z$, czyli zlepiamy współzrędną $\Delta(X)$ w jedną. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański w kategorii zbiorów jest produktem.

Funktor lewo dołączony musi zatem spełniać

$$\mathbf{Hom}(L(X, Y), Z) \cong \mathbf{Hom}((X, Y), \Delta(Z)),$$

czyli dowolną funkcję $(X, Y) \rightarrow (Z, Z)$ musimy umieć zapisać jako funkcję z pojedynczego zbioru, którym będzie suma rozłączna $L(X, Y) = X \sqcup Y$, czyli koprodukt w kategorii zbiorów.

Historia funktora Δ uogalnia się na dowolną kategorię, w której są produkty i koprodukty:

$$\text{koprodukt} \dashv \Delta \dashv \text{produkt}$$

4. Ustalmy zbiór $Y \in \mathbf{Set}_0$ i niech $R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem, który zbiorowi X przypisuje wszystkie funkcje z Y w ten zbiór, $R(X) = \mathbf{Set}(Y, X)$. Chcemy znaleźć funktor lewo dołączony $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ do R . Patrzymy na morfizmy i mamy

$$\mathbf{Set}(L(X), Z) \cong \mathbf{Set}(X, \underbrace{\mathbf{Set}(Y, Z)}_{R(Z)})$$

zbiór po prawej to funkcje z X w funkcje z Y w Z . Można to przedstawić jako funkcje $X \times Y \rightarrow Z$, czyli $LX = X \times Y$.

Technika tłumaczenia funkcji o więcej niż jednym argumentem na sekwencję funkcji nazywamy *currying*.

5. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, niech R będzie pierścieniem (przemiennym z jedynką), W R -modułem i R funktorem $R : R\text{Mod} \rightarrow R\text{Mod}$ takim, że $R(U) = \text{Hom}_R(W, U)$ będzie zbiorem homomorfizmów R -modułów. Funktorem lewo-dołączonym do R będzie wtedy $L(V) = V \otimes W$:

$$R\text{Mod}(V, \text{Hom}_R(W, U)) \cong R\text{Mod}(V \otimes W, U).$$

Uwaga: tensor produkt zwykle nie ma funktora lewo do siebie dołączonego.

6. Załóżmy, że kategoria \mathcal{C} ma produkty i ustalmy $X \in \mathcal{C}$. Rozważmy funktor $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $L(Y) = Y \times X$. Jeśli kategoria \mathcal{C} posiada obiekty eksponencjalne, czyli wiemy jak uogólnić na nią przestrzeń funkcji $X \rightarrow Y$ (oznaczane Y^X), to funktorem prawo dołączonym do L jest właśnie funktor przypisujący obiektowi Y jego eksponens Y^X ,

$$\mathcal{C}(Y, Z^X) \cong \mathcal{C}(Y \times X, Z).$$

Przykładem takiej kategorii są przestrzenie "core-compact".

W ramach kontrprzykładu rozważmy funktor zapominania $U : \text{FinGrp} \rightarrow \text{FinSet}$, i załóżmy, że $L : \text{FinSet} \rightarrow \text{FinGrp}$ jest jego funktorem lewo dołączonym. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p > |L(1)|$ (wystarczy, że są względnie pierwsze). Wtedy

$$\text{FinSet}(1, U(\mathbb{Z}_p)) \cong \text{FinGrp}(L(1), \mathbb{Z}_p)$$

gdzie po lewej zbiór ma $|\mathbb{Z}_p| = p$ różnych funkcji z singletona w zbiór elementów grupy \mathbb{Z}_p , a po prawej mamy jedynie trywialny morfizm, bo żaden element $L(1)$ nie ma rzędu podzielnego przez p , czyli nie może przejść w żaden nietrywialny element \mathbb{Z}_p .

3. Druga definicja

Definicja 1.13: funktory dołączone (naturalne transformacje)

Rozważmy parę funktorów

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \end{array} \mathcal{D}.$$

Powiemy, że L jest lewo dołączony do R i na odwrót, jeśli istnieją dwie naturalne transformacje

$$\varepsilon : LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}} \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

takie, że komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{1_L} & LRL \\ & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{1_R} & RLR \\ & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\ & & R \end{array}$$

η nazywamy **unit**, a ε to **counit**.