Teoria kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsenu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) $\mathcal{C}$ składa się z:
- obiektów $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
  - $id_X \in \mathcal{C}(X, X)$
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C),$$

    które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczymy

$$\mathcal{C}_0 := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako $\mathcal{C}_1$ będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii $\mathcal{C}$.

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria *Set*, której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0), gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f(x_0) = y_0$.

3. *Top* to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. *Toph* to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in \mathrm{Ob}(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \to Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie
$$F : X \times [0, 1] \to Y$$
takie, że $F(x, 0) = f_0(x)$ oraz $F(x, 1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii *Toph*.
Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.
5. Kategoria *Hask*, której obiekty to typy w Haskelly, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji *Rel*, w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór
$$S \circ R = \{(x, z) \ : \ (\exists\, y \in Y)\ xRy \ \wedge \ ySz\},$$
gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".
7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X. Definiujemy wtedy kategorię $\mathcal{C}$ o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X, a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a, b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriamii $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$
- każdemu obiektowi X kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ w kategorii $\mathcal{D}$ taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

Przykład

$Ab : Gr \to Ab$ to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację $Ab(G) = G/[G,G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii $\mathcal{C}$ rozumiemy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X,Y)$ "odwracają się" $\mathcal{C}^{op}(Y,X)$.

Mówimy, że funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})$, której obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, że dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ oraz $f : X \to Y$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczymy $\mathrm{Nat}(F,G)$ - **naturalne przekształcenia** funktora F w funktor G.

Przykład

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \to H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przekształceniem między funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są **równoważne**, jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że złożenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k, $Vect_k^{fin}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k, $Mat^{fin}(k)$.

25.02.2025 cos

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \to D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C: $\forall\ D \in \mathcal{C}_0\ |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja $\leq$ obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest $\emptyset$, a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii $\mathcal{I}$ myślimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Istnieje stały funktor, tzn. taki, że $C(i) = C$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C $F \implies C$,
- a morfizmy to strzałki takie, że diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] & & D \\ & F \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

  komutuje.

Definicja 1.6: granica funktora

Granicą funktora F, $\lim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń. **Granica odwrotna** to wtedy obiekt końcowy $\varprojlim F$.

tutaj jest zdjecie

przyklad dla kategorii zbiorów

ja chyba chce wziąć dwuelementową kategorię $\mathcal{I}$ i tutaj policzyć, jeśli $F(1) = G$, a $F(2) = H$.

Rozważmy kategorię $\mathcal{I}$, która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, dla którego $F(0) = a$, a $F(1) = b$. Niech φ oraz ψ będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

$$\begin{tikzcd} F(0) \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_1"', near start] & c \arrow[d, "f"] \\ F(1) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[ur, "\psi_0", near end] & d \end{tikzcd}$$

Przykłady

1.
2. Rozważmy kategorię grup.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\ G & & H \\ & G \times H & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & F & \\ G \arrow[ur] & & H \arrow[ul] \\ & G * H \arrow[uu] & \end{tikzcd}$$

3. Niech $F : \mathcal{I} \to (P, \leq)$ z dwuobiektowej kategorii $\mathcal{I}$ w zbiór uporządkowany.

kategoria nieskończenie wiele elementów, ale bez strzałek (jako $\mathcal{I}$)

Niech C oraz C' będą granicami tego samego funktora. Z definicji mamy

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[d, "\psi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ C & C' \arrow[l, "\exists g"'] & C \arrow[l, "\exists f"'] \arrow[ll, bend left, "id"] \end{tikzcd}$$

tutaj liczby p-adyczne

ekwalizator, koekwalizator

Definicja 1.7: surjekcja, epimorfizm

Jeśli kategoria ma obiekt początkowy równy obiektowi końcowemu...

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "\star\times id"] \arrow[d, "id\times\star"'] & M^2 \arrow[d, "\star"] \\ M^2 \arrow[r, "\star"] & M \end{tikzcd}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

Definicja 1.8: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \to M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \to M$ takie, że komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon\times id"] \arrow[d, "id\times\varepsilon"'] \arrow[dr] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, phantom, "="] & M \end{tikzcd}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.
Obiekt monoidalny w kategorii Cat nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria $\mathcal{C}$ z koproduktem i elementem końcowym jest kategorią monoidalna.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in End(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób.
   Funktor $T \in Func(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \to T$, $\varepsilon : Id \to T$, nazywa się **monadą**.

Czy $S^n \vee S^n$ to produkt czy produkt w kategorii $Toph_\star$. tutaj jakies zdjecie