

Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

1	Wstępy	1
02.10.2024	Grafy Cayleya	1
1.	Metryka słów	1
2.	Graf Cayleya	1
3.	Quasi-izometrie	3
09.10.2024	Lemat Milnora-Švarca	6
2	Niezmienniki izometrii	11
16.10.2024	Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni	11
1.	Podejście przez granice	11
2.	Toologia granicy odwrotnej	12

1. Wstępy

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmiennicza**, czyli $(\forall \gamma \in G) ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

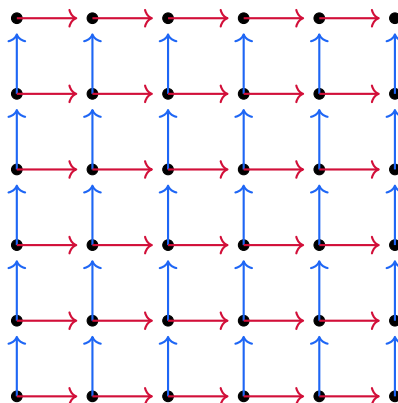
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

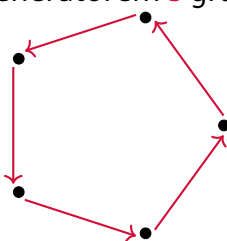
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy $V = G$, ale krawędzie są niezorientowane: $E = \{\{g_1, g_2\} : ds(g_1, g_2) = 1\}$. W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedynczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez **automorfizmy zachowujące krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

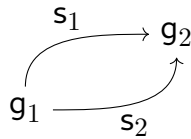
$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

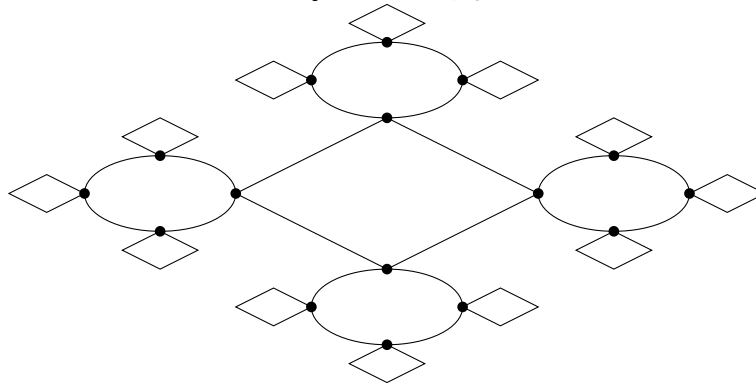
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc **działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie** (lewa-niezmienniczość).

Dla suriekcji $\pi : F_S \rightarrow G$, gdzie $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$ możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np. $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$)



Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$ to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



3. Quasi-izometrie

Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych (X_i, d_i) , $i = 1, 2$, mówimy, że przekształcenie $f : X_1 \rightarrow X_2$ (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje $C \geq 1$ oraz $L \geq 0$ takie, że $\forall x, y \in X_1$ zachodzi

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje $D \geq 0$ takie, że $f(X_1)$ jest D -gęsty (D -siecią) w X_2 , tzn.

$$(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1) d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy f jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy $L = D$ (większe z dwóch) i mówimy o tzw. (C, L) -quasi-izometrii.

Fakt 1.5: własności q.i.

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i. $f : X_1 \rightarrow X_2$ istnieje $g : X_2 \rightarrow X_1$ takie, że istnieje $D \geq 0$ takie, że

$$(\forall x_2 \in X_2) d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall x_1 \in X_1) d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

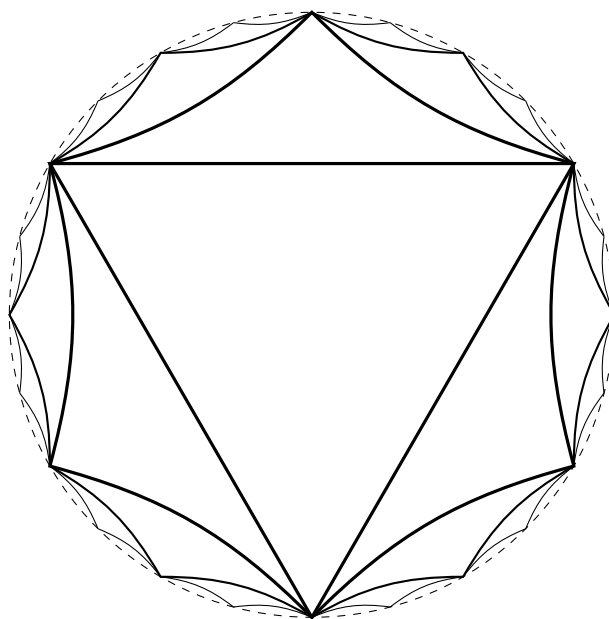
to wówczas g też jest q.i.

Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości

Mówimy, że (X_1, d_1) jest quasi-izometryczna z (X_2, d_2) jeśli istnieje q.i. $f : X_1 \rightarrow X_2$. Jest to relacja równoważności.

Przykłady

1. (X, d) jest q.i. z punktem $\iff X$ jest ograniczone.
2. X jest q.i. z dowolną swoją D -siecią $Y \subseteq X$ przez inkluzję.
3. Dla dowolnego B ograniczonego $X \times B \cong X$ są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne T_k stopnia $k \geq 3$ są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia $T_\omega = T_{\aleph_0}$.



Fakt 1.7

Niech G będzie grupą skończenie generowaną i niech S_1, S_2 jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych $(G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$ gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

Wniosek 1.8

Skończenie generowana grupa G determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest jednoznacznym obiektem quasi-metrycznym.

09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

Lemat 1.9: Milnora-Švarca

Niech X będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a Γ grupą działającą na X przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas Γ jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z X . Dokładniej, $\forall x_0 \in X$ odwzorowanie $\Gamma \rightarrow X$ określone przez $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ jest quasi-izometrią.

Dowód

Wybermy $x_0 \in X$. Z kozwartości tego działania, istnieje promień $R > 0$ taki, że dla kuli $B = B_R(x_0)$ o środku w x_0 taki, że rodzina przesunięć kuli $\{g \cdot B : g \in \Gamma\}$ jest pokryciem X . Rozważmy zbiór $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ niewielkich przesunięć kuli B . Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni X , zbiór S jest skończony. Ponadto, zbiór jest symetryczny $S = S^{-1}$ ($s \in S \implies s^{-1} \in S$), bo jeśli $s \cdot B \cap B \neq \emptyset$ to również $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$.

Określamy $v := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma - S - \{1\}\}$ czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

Clam 1: $v > 0$

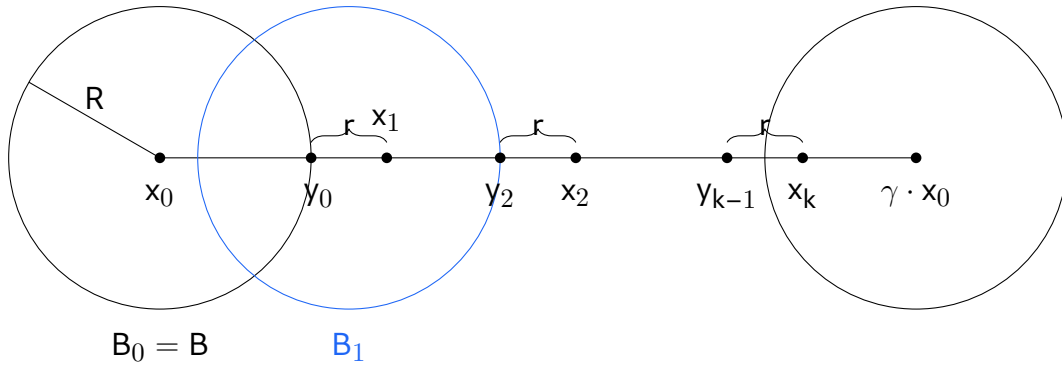
Dla każdego $g \in \Gamma - S - \{1\}$ wiemy, że $d(B, g \cdot B) > 0$. Gdyby to infimum $v = 0$, to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów $g_n \in \Gamma$ takich, że $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$ maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty $z_n \in B$ takie, że $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$ (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg n_k taki, że $z_{n_k} \in z_0 \in B$, a stąd $d(z_0, g_n \cdot B) \searrow 0$. To oznacza, że $B_{2R}(x_0)$ przecina niepusto nieskończenie wiele spośród przesunięć $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$, a to jest sprzeczne z właściwością działania.

Clam 2: S generuje Γ oraz dla każdego $\gamma \in \Gamma$

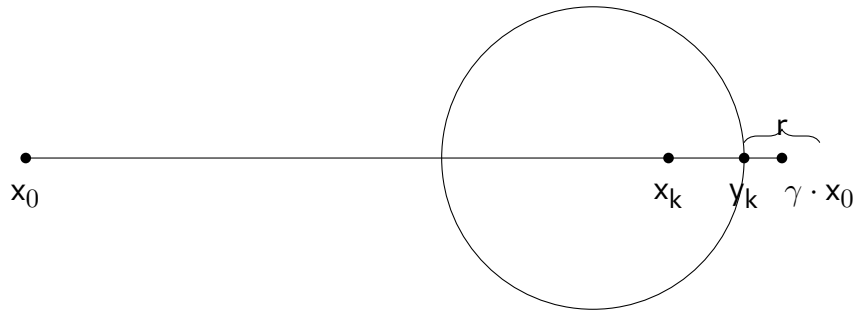
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

gdzie $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$.

I scenariusz:



II scenariusz



Niech y_0 będzie punktem na geodezyjnej $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$ z kuli B najdalszy od x_0 na tej geodezyjnej. W odległości r od y_0 obierzmy punkt x_1 . Wtedy odcinek $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, czyli $x_1 \in s_1 \cdot B$. Iterujemy się tak aż kulą $B_k = s_k s_{k-1} \dots s_1 \cdot B$ trafimy w $\gamma \cdot x_0$.

W scenariuszu I mamy $\gamma \cdot B \cap s_k \dots s_1 \cdot B \neq \emptyset$, bo $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$ oraz $\gamma x_0 \in s_k \dots s_1 \cdot B$. W takim razie $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$. Czyli zachodzi jedna z równości

1. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II $d(\gamma x_0, s_k \dots s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r$. W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$, bo $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$ bo tyle razy udało nam się odłożyć r na geodezyjnej.

Jeśli $d_S(1, \gamma) = m$, a $\gamma = s_1 \dots s_m$, to wówczas

$$d_X(s_1, \dots, s_k \cdot x_0, s_1 \dots s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 \dots s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności $f(\gamma) \rightarrow \gamma \cdot x_0$, które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów d_S wiemy, że $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$, czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo- Γ -niezmienniczości metryki d_X na X mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i f jest quasi-izometrycznym włożeniem dla $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$ i $L = r$.

Ponadto, obraz $f(\Gamma)$ jest R -gęsty (dla R promienia z początku dowodu) w X , bo dla każdego $x \in X$ istnieje $\gamma \in \Gamma$ takie, że $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$. Czyli $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$, ale $\gamma \cdot x_0 = f(\gamma)$. Stąd f jest quasi-izometrią.



Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

Przykłady

1. Grupy podstawowe $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$ zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych M_1 , M_2 o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach $\text{vol}(M_i)$.

Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

Twierdzenie 1.10: Mostowa o sztywności [1968]

Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

Założmy nie wprost, że $\pi_1(M_1)$ i $\pi_1(M_2)$ są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu $H < \pi_1(M_1)$, $H < \pi_1(M_2)$. Niech \bar{M}_1 i \bar{M}_2 będą nakryciami M_1 , M_2 wyznaczone przez H . Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc \bar{M}_i są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.

Z teorii nakryć wiemy, że $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$. Stąd wynika, że \overline{M}_1 jest izometryczna z \overline{M}_2 , a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\text{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \text{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\text{vol}(M_1)}{\text{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1):H]}{[\pi_1(M_2):H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

2. Niech G_A będzie produktem półprostym $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, gdzie $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ jest zadane macierzą $A \in \text{Sl}_2\mathbb{Z}$. Chcemy, żeby A było macierzą hiperboliczną (tzn. $|\text{tr}(A)| > 2$) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa G_A jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego $\text{Sol} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$, gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$

2. Niezmienniki izometrii

16.10.2024 Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni

Zanim zaczniemy, zrobmy szybką motywację, czyli graf Cayleya grupy \mathbb{Z} z jednym generatorem:



który ma "dwa końce". Natomiast grupa wolna F_2 o dwóch generatorach ma "nieskończenie wiele końców".

NARYSOWAC F_2

Z drugiej strony, grupa \mathbb{Z}^2 ma jeden koniec: jeśli weźmiemy dwa bardzo odległe od siebie obszary, to one są ze sobą połączone, chociaż jest to połączenie "bardzo odległe".

NARYSOWAC kratę i dwa placki połączone

Z kolei każda przestrzeń skończona, np. graf Cayleya grupy skończonej, ma 0 końców.

1. Podejście przez granice

Definicja 2.1: zbiór skierowany

Zbiór z częściowym proładkiem (Λ, \leq) jest **skierowany**, gdy dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ istnieje $\lambda \in \Lambda$ takie, że $\lambda \geq \lambda_1$ oraz $\lambda \geq \lambda_2$.

ciągi odwrotne

Definicja 2.2: system odwrotny

System odwrotny nad zbiorem skierowanym Λ to rodzina zbiorów

$$\mathfrak{X} := \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

oraz rodzina odwzorowań

$$\mathcal{F} := \{f_{\lambda\mu} : X_\mu \rightarrow X_\lambda : \lambda \leq \mu\}$$

takich, że

1. dla dowolnego λ mamy funkcję identycznościową: $f_{\lambda\lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
2. dla dowolnych $\lambda \leq \mu \leq \nu$ złożenia zachowują się dobrze: $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$.

Będziemy oznaczać: $\underline{X} := (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$

Definicja 2.3: granica odwrotna

Granica odwrotną systemu \underline{X} nazywamy zbiór

$$\varprojlim \underline{X} = \{ \xi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : (\forall \lambda' \leq \lambda) \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda) \}.$$

Elementy ξ jak wyżej nazywamy **niciami** (threads) w \underline{X} .

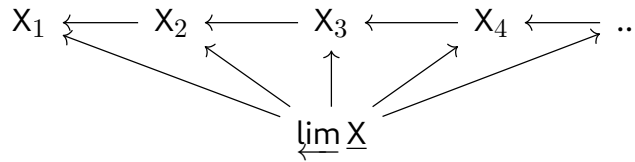
Definicja 2.4: odwzorowania graniczne

Odwzorowania

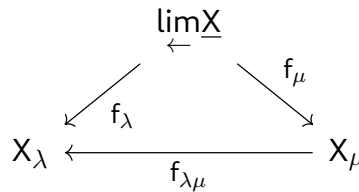
$$f_\lambda : \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_\lambda$$

takie, że $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$ nazywamy odwzorowaniami granicznymi.

O odwzorowaniach granicznych można myśleć jako o odwzorowaniach, które pytają "kim byłem w czasie λ ".



Dla $\lambda \leq \mu$ diagram



zawsze komutuje.

2. Topologia granicy odwrotnej

Kiedy zbiory X_λ są przestrzeniami topologicznymi, zaś $f_{\lambda\mu}$ są ciągłe, to na granicy odwrotnej $\varprojlim \underline{X}$ rozważamy również topologię graniczną. Jest to topologia dziedziczona z topologii produktowej na $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Bazą tej topologii są zbiory postaci $f_\lambda^{-1}(U)$ dla $\lambda \in \Lambda$ i otwartych

$U \subseteq X$.

Fakt 2.5

Gdy przestrzenie X_λ są Hausdorffa, to $\varprojlim X$ jest domkniętym podzbiorem w $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Gdy przestrzenie X_λ są zwarte i metryczne, to wówczas $\varprojlim X$ też jest zwarta i metryczna. W szczególności, gdy X_λ są skończone (z topologią dyskretną), zaś Λ jest przeliczalny, to wówczas $\varprojlim X$ jest przestrzenią zwartą i metryczną. Na ogół nie jest też przestrzenią dyskretną, mimo że wszystkie zbiory po których bierzemy granicę takie były (bazą topologii są przeciwobrazy punktów $\{\xi \in \varprojlim X : \xi_\lambda = x\} = f_\lambda^{-1}(x)$).

Przykład

Niech $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$ i niech X_k będzie zbiorem wszystkich ciągów 0 – 1 długości k . Dla $k \leq m$ rozważamy

$$f_{km} : X_m \rightarrow X_k$$

będące obcięciem ciągu długości m do początkowego ciągu długości k . Dostajemy wówczas system odwrotny $\underline{X} = (\mathbb{N}, \{X_k\}, \{f_{km}\})$ zbiorów skończonych. Wówczas $\varprojlim X$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

Będziemy zajmować się X które są przestrzeniami metrycznymi, geodezyjnymi właściwymi, np. grafami Cayleya grup skończenie generowanych. \mathcal{K} to będzie rodzina wszystkich zwartych podzbiorów $K \subseteq X$ z porządkiem inkluzji.

Definicja 2.6: podzbiór współkońcowy

Podzbiór $M \subseteq \Lambda$ zbioru skierowanego Λ nazywamy **współkońcowym**, jeśli

$$(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists \mu \in M) \lambda \leq \mu,$$

wtedy (M, \leq) też jest zbiorem skierowanym. Dla $\underline{X} = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$ niech

$$X_{|M} = (M, \{X_\lambda : \lambda \in M\}, \{f_{\mu\mu'} \in \mathcal{F} : \mu, \mu' \in M\})$$

będzie obcięciem \underline{X} do M . Wtedy $X_{|M}$ jest systemem odwrotnym nad M .

Fakt 2.7

$$\varprojlim X = \varprojlim X|_M$$

Przez bijekcję polegającą na obcinaniu nici do M . Jest ona jednocześnie homomorfizmem.

Wniosek

Jeśli X_λ są zwarte i metryczne, zaś Λ posiada przeliczalny podzbiór współkońcowy, to $\varprojlim X$ jest zwarta i metryczna.

Przykłady

1. W przykładzie wyżej zbiór \mathcal{K} posiada współkońcowy podciąg $K_i := B_{i,R}(x_0)$ dla $R > 0$ i pewnego $x_0 \in X$.
2. Dalej używając oznaczeń z poprzedniego przykładu, dla dowolnego $K \in \mathcal{K}$ niech Π_K^X będzie zbiorem nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu $X - K$.

Przestrzeń geodezyjna jest lokalnie drogowo spójna. Każda jej otwarta podprzestrzeń również jest lokalnie drogowo spójna. Czyli każde $X - K$ też jest lokalnie drogowo spójna. W lokalnie drogowo spójnych przestrzeniach komponenty spójności to to samo co komponenty drogowej spójności.

Każda nieograniczona komponenta $C' \subseteq X - K'$ zawiera się w dokładnie jednej nieograniczonej komponencie $C \subseteq X - K$. Dostajemy odwzorowanie $f_{KK'} : \Pi_{K'}^X \rightarrow \Pi_K^X$ takie, że $f_{KK'}(C') = C$.

Trójka $(\mathcal{K}, \{\Pi_K^X : K \in \mathcal{K}\}, \{f_{KK'} : K \subseteq K'\})$ tworzy system odwrotny nad zbiorem skierowanym \mathcal{K} .

$$\Pi_K^X \xleftarrow{f_{KK'}} \Pi_{K'}^X \xleftarrow{f_{K'K''}} \Pi_{K''}^X$$

Fakt 2.8

Dla każdego $K \in \mathcal{K}$ zbiór Π_K^X jest skończony.

Dowód

Weźmy $K \subseteq B_r(x_0)$, niech $R > r$ i rozważmy kulę $B_R(x_0)$, która jest zwarta. Każda nieograniczona komponenta C spójności w $X - K$ przecina niepusto sferę $S_R(x_0)$, bo X jest geodezyjna.

Zatem przekrój $C \cap B_R(x_0)$ jest niepusty. Wtedy rodzina

$$\{C \cap B_R(x_0) : C \text{ dowolna komponenta dopełnienia } X - K\} \cup \{\overline{B_R(x_0)} = B_R(x_0) - S_R(x_0)\}$$

pokrywa $B_R(x_0)$. Dodatkowo, jest to otwarte pokrycie, bo komponenty spójności lokalnie spójnej przestrzeni są otwartymi podzbiorami w tej przestrzeni. Ze zwartości X to pokrycie posiada skończone podpokrycie, ale z drugiej strony każdy zbiór postaci $C \cap B_R(x_0)$ dla nieograniczonych komponent musi przetrwać w każdym podpokryciu, bo zawiera punkty które należą tylko do niego. Stąd nieograniczonych komponent jest skończenie wiele.



Definicja 2.9

Zbiorem (przestrzenią) końców, $\text{Ends}(X)$, właściwej geodezyjnej przestrzeni metrycznej X nazywamy granicę odwrotną

$$\text{Ends}(X) = \varprojlim(\Pi^X) = \varprojlim(\mathcal{X}, \{\Pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}).$$

Jest to zwarta przestrzeń metryczna.