# Teoria kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

# Spis treści

1	Początek końca		1
	24.02.2025	Podstawowe definicje	1
	1.	Przykłady kategorii	1
	2.	Funktory	2
	25.02.2025	cos	5

# Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsenu.

# 24.02.2025 Podstawowe definicje

# 1. Przykłady kategorii

#### Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) C składa się z:

- obiektów Ob(C)
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par  $A, B \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$  oznaczanego  $\mathcal{C}(A, B) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , które spełniają:
  - $id_X$  ∈ C(X, X)
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$$
,

które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest mała, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczymy

$$C_0 := \mathsf{Ob}(C)$$

a jako  $C_1$  będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii C.

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

# **Przykłady**

- 1. Kategoria Set, której obiekty  $Set_0$  to wszystkie zbiory, a  $Set_1$  to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
- 2.  $Set_*$  to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary  $(X, x_0)$ , gdzie X to zbiór, a  $x_0 \in X$ . Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt:  $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ,  $f(x_0) = y_0$ .

- 3. Top to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a  $Top_1$  to funkcje ciągłe między nimi.
- 4. Toph to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli  $X, Y \in Ob(Toph)$  oraz  $f_0, f_1: X \to Y$  jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie

$$F: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

takie, że  $F(x,0)=f_0(x)$  oraz  $F(x,1)=f_1(x)$ , to  $f_0=f_1$  jako morfizm w kategorii Toph.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas  $f \circ g$  jest homotopijnie równoważne  $f' \circ g'$ .

- 5. Kategoria *Hask*, której obiekty to typy w Haskelly, a morfizmy to klasy programów.
- 6. Kategoria relacji Rel, w której obiektami  $Rel_0$  są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. Rel(X,Y) zawiera wszystkie  $S\subseteq X\times Y$ . Wówczas składanie  $S\subseteq X\times Y$  oraz  $R\subseteq Y\times Z$  definiujemy jako zbiór

$$S \circ R = \{(x, z) : (\exists y \in Y) xRy \land ySz\},$$

gdzie xRy oznacza, że  $(x, y) \in R$ . Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".

- 7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X. Definiujemy wtedy kategorię  $\mathcal C$  o obiektach  $\mathcal C_0=X$  będących elementami zbioru X, a morfizmy między  $a,b\in X$  to zbiór 1-elementowy  $\mathcal C(a,b)=\{\star\}$ , gdy xRy jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku.
  - Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
- 8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

# 2. Funktory

# Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriamii  $\mathcal C$  a  $\mathcal D$ 

- każdemu obiektowi X kategorii  $\mathcal{C}$  przypisuje obiekt F(X) kategorii  $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi  $\varphi\in\mathcal{C}(X,Y)$  przypisuje morfizm  $F(\varphi):F(X)\to F(Y)$  w kategorii  $\mathcal D$  taki, że

- 
$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

#### Przykład

koneser kategorii

 $Ab: Gr \to Ab$  to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację  $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$ .

#### Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii C rozumiemy kategorię  $C^{op}$ , której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii:  $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$
- morfizmy C(X, Y) "odwracają się"  $C^{op}(Y, X)$ .

Mówimy, że funktor  $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$  jest **kowariantny**, a funktor  $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$  kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ ,  $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , której obiekty to wszystkie funktory  $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ , a morfizmy to  $\varphi$  takie, że dla dowolnych  $X, Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$  oraz  $f: X \to Y$  komutuje diagram

$$F(X) \xrightarrow{\varphi_X} G(X)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow G(f)$$

$$F(Y) \xrightarrow{\varphi_Y} G(Y)$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczymy Nat(F, G) - **naturalne przekształcenia** funktora F w funktor G.

# Przykład

Cup product na kohomologiach  $\cup: H^m(X) \otimes H^n(X) \to H^{m+n}(X)$  jest naturalnym przekształceniem między funktorami  $H^m(-) \otimes H^n(-)$  i  $H^{m+n}(-)$ .

# Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{D}$  są **równoważne**, jeśli istnieją funktory  $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$  oraz  $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$  takie, że złożenie  $F\circ G$  jest naturalnie izomorficzne do  $Id_{\mathcal{D}}$ , a  $G\circ F$  - do  $Id_{\mathcal{C}}$ .

# Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k,  $Vect_k^{fin}$ , jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k,  $Mat^{fin}(k)$ .

koneser kategorii Teoria kategorii

#### 25.02.2025 cos

#### Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt  $C \in \mathcal{C}_0$  jest **początkowy**, jeśli dla każdego  $D \in \mathcal{C}_0$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $C \to D$ ,  $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$ . Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C:  $\forall D \in \mathcal{C}_0 |\mathcal{C}(D, C)| = 1$ .

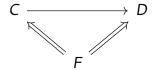
#### **Przykłady**

- 1. W kategorii, której obiektami jest odcinek  $C_0 = [0, 1]$ , a morfizmy to relacja  $\leq$  obiektem początkowym jest 0, a końcowym 1.
- 2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest  $\emptyset$ , a obiektem końcowym jest singleton.
- 3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
- 4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Niech  $F: \mathcal{I} \to \mathcal{C}$  będzie funktorem, gdzie o kategorii  $\mathcal{I}$  myślimy jako o kategorii indeksów. Przez  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$  oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Istnieje stały funktor, tzn. taki, że C(i) = C dla każdego  $i \in \mathcal{I}_0$  oraz  $C(f) = id_C$  dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe  $CF \implies C$ ,
- a morfizmy to strzałki takie, że diagram



komutuje.

# Definicja 1.6: granica funktora

**Granicą** funktora F, lim F, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń. **Granica odwrotna** to wtedy obiekt końcowy <u>lim</u> F.

tutaj jest zdjecie

przyklad dla kategorii zbiorów

#### ja chyba chce wziąć dwuelementową kategorię $\mathcal I$ i tutaj policzyć, jeśli $\mathit{F}(1) = \mathit{G}$ , a $\mathit{F}(2) = \mathit{H}$ .

Rozważmy kategorię  $\mathcal{I}$ , która ma dwa obiekty  $\mathcal{I}_0=\{0,1\}$ . Niech  $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$  będzie funktorem, dla którego F(0)=a, a F(1)=b. Niech  $\varphi$  oraz  $\psi$  będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

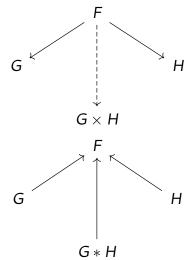
$$F(0) \xrightarrow{\varphi_0} c$$

$$F(1) \xrightarrow{\psi_1} d$$

#### Przykłady

1.

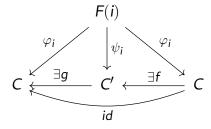
2. Rozważmy kategorię grup.



3. Niech  $F: \mathcal{I} \to (P, \leq)$  z dwuobiektowej kategorii  $\mathcal{I}$  w zbiór uporządkowany.

kategoria nieskończenie wiele elementów, ale bez strzałek (jako  $\mathcal{I}$ )

Niech C oraz C' będą granicami tego samego funktora. Z definicji mamy



tutaj liczby p-adyczne

ekwalizator, koekwalizator

#### Definicja 1.7: surjekcja, epimorfizm

Jeśli kategoria ma obiekt początkowy równy obiektowi końcowemu...

**Monoid**  $(M, \star, 1)$  to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{matrix} \mathsf{M}^3 & \xrightarrow{\star \times \mathsf{id}} & \mathsf{M}^2 \\ \mathsf{id} \times \star \downarrow & & \downarrow \star \\ & \mathsf{M}^2 & \xrightarrow{\star} & \mathsf{M} \end{matrix}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

#### Definicja 1.8: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech  $\mathcal C$  będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech  $M\in\mathcal C$  będzie obiektem, dla którego mamy  $\mu:M^2\to M$  oraz  $\varepsilon:\{1\}\to M$  takie, że komutują diagramy

$$\begin{array}{c|c}
M^3 & \xrightarrow{\mu \times id} & M^2 \\
id \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
M^2 & \xrightarrow{\mu} & M \\
M & \xrightarrow{\varepsilon \times id} & M^2 \\
id \times \varepsilon \downarrow & \xrightarrow{\mu} & M \\
M^2 & \xrightarrow{\mu} & M
\end{array}$$

Wtedy M jest obiektem monoidalnym.

Obiekt monoidalny w kategorii Cat nazywa się kategorią monoidalną.

# Przykłady

- 1. Dowolna kategoria  ${\mathcal C}$  z koproduktem i elementem końcowym jest kategorią monoidalna.
- 2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory  $F, G \in End(\mathcal{C})$ , to potrafimy je złożyć w dobry sposób. Funktor  $T \in Func(\mathcal{C})$  oraz dwa naturalne przekształcenia  $\mu: T^2 \to T$ ,  $\varepsilon: Id \to T$ , nazywa się monadą.

Czy  $S^n \vee S^n$  to produkt czy produkt w kategorii  $Toph_{\star}$ . tutaj jakies zdjecie