Teoria Kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsenu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) $\mathcal{C}$ składa się z:
- obiektów $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
  - $id_X \in \mathcal{C}(X, X)$
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

    $$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C),$$

    które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczymy

$$\mathcal{C}_0 := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako $\mathcal{C}_1$ będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii $\mathcal{C}$.

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria *Set*, której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0), gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f(x_0) = y_0$.

3. *Top* to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. *Toph* to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in \mathrm{Ob}(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \to Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie
$$F : X \times [0,1] \to Y$$
takie, że $F(x,0) = f_0(x)$ oraz $F(x,1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii *Toph*.
Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.
5. Kategoria *Hask*, której obiekty to typy w Haskelly, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji *Rel*, w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór
$$S \circ R = \{(x, z) \ : \ (\exists\, y \in Y)\ xRy \ \wedge \ ySz\},$$
gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".
7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X. Definiujemy wtedy kategorię $\mathcal{C}$ o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X, a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a,b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriamii $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$

- każdemu obiektowi X kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ w kategorii $\mathcal{D}$ taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

Przykład

$Ab : Gr \to Ab$ to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii $\mathcal{C}$ rozumiemy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X, Y)$ "odwracają się" $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$.

Mówimy, że funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz kategorię funktorów między kategoriami $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, której obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, że dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ oraz $f : X \to Y$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczymy $\mathrm{Nat}(F, G)$ - naturalne przekształcenia funktora F w funktor G.

Przykład

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \to H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przekształceniem między funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są równoważne, jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że złożenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k, $Vect_k^{fin}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k, $Mat^{fin}(k)$.

GRUPOID PODSTAWOWY - dla p. top X obiekty to punkty X, a morfizmy to klasy homotopii ścieżek; jak weźmiemy konkretny punkt i popatrzymy na morfizmy $x \to x$ to mamy grupe podstawową zbazowaną w tym punkcie; grupoid to funktor z p. top w kategorię kategorii (zawęzić: kat. grupoidów); wtedy funkcja ciągła to morfizm między dwoma grupoidami, a homotopia to naturalna transformacj

25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \to D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C: $\forall\ D \in \mathcal{C}_0\ |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja $\leq$ obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest $\emptyset$, a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Fakt 1.6

Obiekty końcowe i początkowe, jeśli istnieją, to są jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Niech C i C' będą obiektami końcowymi kategorii $\mathcal{C}$. Wiemy, że $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$, czyli komutujący diagram

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "id_C"] \arrow[dr, "\exists! f"'] & & C \\
& C' \arrow[ur, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}$$

daje $g \circ f = id_C$. Analogiczny diagram daje $f \circ g = id_{C'}$. Stąd f i g to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między C i C'

2. (Ko)granice funktorów a (ko)produtky

Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii $\mathcal{I}$ myślimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, że funktor C jest stały, jeżeli $C(i) = C$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C, $\varphi : F \implies C$, czyli komutujące diagramy (kostożki)

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

- a morfizmy to strzałki $C \to D$ takie, że diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] & & D \\ & F \arrow[ul, Rightarrow, "\psi"] \arrow[ur, Rightarrow, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

  komutuje.

Diagram wyżej można rozpisać jako:

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[d] \arrow[ddl, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\ & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & \\ D & & C \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

> **Definicja 1.7: kogranica funktora**
>
> **Kogranicą** (*granica prosta*) funktora F, $\varinjlim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyżej możemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia $\varphi : F \implies C$ możemy rozważyć naturalne przekształcenia $\varphi : C \implies F$, czyli diagramy (stożki)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

z morfizmami definiowanymi analogicznie.

Definicja 1.8: granica funktora

Granica (*granica odwrotna*) to obiekt końcowy powyższej kategorii stożków, $\varprojlim F$.

Rozważmy kategorię $\mathcal{I}$, która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \to Set$ będzie funktorem, dla którego $F(0) = A$, a $F(1) = B$. Niech φ oraz ψ będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim F \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
F(0) = A & D \arrow[l, "\psi_0"] \arrow[r, "\psi_1"'] \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & F(1) = B
\end{tikzcd}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo $\varinjlim F$ to obiekt końcowy. Jeśli weźmiemy $\varinjlim F = A \times B$, a $\varphi_0 = \pi_A$ oraz $\varphi_1 = \pi_B$ będą rzutami i $f(d) = (\psi_0(d), \varphi_1(d))$, to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna $A \sqcup B$, bo diagram

$$\begin{tikzcd}
F(0) = A \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, "\varphi_0 = i_A"'] & D & F(1) = B \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[dl, "\varphi_1 = i_B"] \\
 & \varprojlim F = A \sqcup B \arrow[u, dashed, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $f(x) = \varphi_0(x)$, jeśli $x \in A$ oraz $f(x) = \psi_1(x)$ jeśli $x \in B$, komutuje.

Definicja 1.9: (ko)produkt

Produktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ dla $\mathcal{I}$ oraz F jak wyżej.
Koproduktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę odwrotną (granicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$

Przykłady

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjański dwóch grup, tak jak w kategorii zbiorów, tj. dla grup A, G, H komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
 & G \times H \arrow[dl, "\pi_G"'] \arrow[dr, "\pi_H"] & \\
G & A \arrow[l, "g"] \arrow[r, "h"] \arrow[u, "g \times h"] & H
\end{tikzcd}$$

Koprodukt to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i_G"'] & A & H \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "i_H"] \\
 & H * G \arrow[u, dashed, "\exists ! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie f nakłada na litery słów $G * H$ pochodzące z G morfizm g, a na litery pochodzące z H - morfizm h.

2. Niech $F : \mathcal{I} \to (P, \leq)$ z dwuobiektowej kategorii $\mathcal{I}$ w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(0) = a & d \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(1) = b
\end{tikzcd}$$

to znaczy, że $d \leq a$, $d \leq b$ oraz $d \leq \varinjlim F$. Żeby więc miało to sens dla dowolnego $d \leq a, b$ to $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$. Analogicznie dostajemy, że $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$.

3. Jeśli $\mathcal{I}$ jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a $F : \mathcal{I} \to Set$ jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$, a granicą - nieskończona suma rozłączna $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$.

Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koprodukty są unikalne.

Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.

Przykład

Rozważmy funktor $F : \mathcal{I}^{op} \to Grp$, gdzie $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$ taki, że dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i \to j) = q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie q to morfizm ilorazowy.
Liczby p-adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych różne od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby p-adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq a_i < p$. Okazuje się, że całkowite liczby p-adyczne, $\mathbb{Z}_p$, można zdefiniować jako granicę funktora F:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
\ldots & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Granica prosta takiego funktora jest trywialna, ale możemy rozważyć inny funktor,z kategorii $\mathbb{Z}$ z porządkiem, tzn: $G : \mathbb{Z} \to Grp$ taki, że $G(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, natomiast strzałkę $n + 1 \to n$ przekształcamy na odwzorowanie

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ni x \mapsto p \cdot x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Wtedy granicą prostą G jest C_{p^∞} - pierwiastki p^n-tego stopnia z 1, dla dowolnego n.

3. Obiekty i kategorie monoidalne

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{tikzcd}
M^3 \arrow[r, "\star \times id"] \arrow[d, "id \times \star"'] & M^2 \arrow[d, "\star"] \\
M^2 \arrow[r, "\star"] & M
\end{tikzcd}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \to M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \to M$ takie, że komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon\times id"] \arrow[d, "id\times\varepsilon"'] \arrow[dr, "="] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.
Obiekt monoidalny w kategorii *Cat* nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria $\mathcal{C}$ z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalna.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in End(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób.
   Funktor $T \in End(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \to T$, $\varepsilon : Id \to T$, nazywa się **monadą**.

03.03.2025 Funktory dołączone

1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k, a B wybraną jej bazą. Dowolne odwzorowanie $B \to V$ możemy rozszerzyć na odwzorowanie liniowe $k[B] = V \to V$. To znaczy, mamy izomorfizm zbiorów

$$Hom(B, V) \cong Hom(V, V).$$

W języku abstrakcyjnego nonsensu możemy zdefiniować dwa funktory,

$$Set(-, U(-)) : Set^{op} \times Vect_k^{fin} \to Set$$

$$Vect_k(k[-], -) : Set^{op} \times Vect_k^{fin} \to Set,$$

gdzie $U : Vect_k^{fin} \to Set$ to funktor zapominający strukturę przestrzeni wektorowej, między którymi istnieją naturalne izomorfizmy.

$$Set(-, U(-)) \cong Vect_k(k[-], -)$$

Definicja 1.12: funktory dołączone

Niech $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będą funktorami. Powiemy, że L jest **lewo dołączony** do funktora R, a R **prawo dołączony** do L, jeśli funktory

$$\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

są naturalnie izomorficzne. Taką parę funktorów dołączonych oznaczamy $L \dashv R$.

2. Dużo przykładów funktorów dołączonych

1. Niech $R : Set_* \to Set$ będzie funktorem z kategorii zbiorów zbazowanych w kategorię zbiorów, który zapomina o punkcie bazowym. Chcemy teraz znaleźć funktor $L : Set \to Set_*$, który będzie do niego lewo dołączony. Niech $L(X) = X \cup \{X\}$ (lub bardziej obrazowo: $X \sqcup \{*\}$), gdzie y_0 poślemy na $\{X\}$, to znaczy doklejamy do X singleton i staje się on punktem wyróżnionym.

   Oba funktory są różnowartościowe na obiektach, więc wystarczy przekonać się, że

   $$Set_*(LX, (Y, y_0)) \cong Set(X, R(Y, y_0))$$

   jest izomorfizmem. Dowolna funkcja $X \to Y$ rozszerza się przez posłanie $\{X\} \mapsto y_0$ na funkcję $(X, \{X\}) \to (Y, y_0)$.

2. Podobna sytuacja ma miejsce, kiedy szukamy lewo dołączony funktor do $R : Ring \to Rng$ między kategorią pierścieni z jedynką, a wszystkimi pierścieniami. Definiujemy funktor
$$L : Rng \to Ring$$
jako doklejenie $\mathbb{Z}$, $L(S) = \mathbb{Z} \oplus S$ z działaniem $(n, s)(n', s') = (nn', ns' + ss' + n's)$, wtedy $(1, 0_S)$ jest jedynka w nowym pierścieniu. Pozostaje przyjrzeć się co się dzieje z morfizmami, skoro
$$Rng(S, RT) \cong Ring(LS, T).$$
Dowolny morfizm $\varphi : S \to RT$ wystarczy, że trzyma element neutralny ze względu na dodawanie i jest addytywny. Możemy go rozszerzyć na morfizm, który całą pierwszą współrzędną $LS = \mathbb{Z} \oplus S$ posyła w $1_T \in T$, a drugą zgodnie z φ. W drugą stronę wystarczy obciąć morfizm do drugiej współrzędnej.

3. Niech $\Delta : Set \to Set \times Set$ będzie funktorem takim, że $\Delta(C) = (C, C)$. Zaczniemy od szukania funktora dołączonego do niego z prawej strony, czyli $R : Set \times Set \to Set$ takiego, że
$$\mathrm{Hom}(X, R(Y, Z)) \cong \mathrm{Hom}(\Delta(X), (Y, Z)).$$
Od razu narzuca się $R(Y, Z) = Y \times Z$, czyli zlepiamy współrzędne $\Delta(X)$ w jedną. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański w kategorii zbiorów jest produktem.

   Funktor lewo dołączony musi zatem spełniać
$$\mathrm{Hom}(L(X, Y), Z) \cong \mathrm{Hom}((X, Y), \Delta(Z)),$$
czyli dowolną funkcję $(X, Y) \to (Z, Z)$ musimy umieć zapisać jako funkcję z pojedynczego zbioru, którym będzie suma rozłączna $L(X, Y) = X \sqcup Y$, czyli koprodukt w kategorii zbiorów.

   Historia funktora Δ uogalnia się na dowolną kategorię, w której są produkty i koprodukty:
$$\text{koprodukt} \dashv \Delta \dashv \text{produkt}$$

4. Ustalmy zbiór $Y \in Set_0$ i niech $R : Set \to Set$ będzie funktorem, który zbiorowi X przypisuje wszystkie funkcje z Y w ten zbiór, $R(X) = Set(Y, X)$. Chcemy znaleźć funktor lewo dołączony $L : Set \to Set$ do R. Patrzymy na morfizmy i mamy
$$Set(L(X), Z) \cong Set(X, \underbrace{Set(Y, Z)}_{R(Z)})$$
zbiór po prawej to funkcje z X w funkcje z Y w Z. Można to przedstawić jako funkcje $X \times Y \to Z$, czyli $LX = X \times Y$.

   Technika tłumaczenia funkcji o więcej niż jednym argumencie na sekwencję funkcji nazywamy *currying*.

5. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, niech R będzie pierścieniem (przemiennym z jedynką), W R-modułem i R funktorem $R : RMod \to RMod$ takim, że $R(U) = \mathrm{Hom}_R(W, U)$ będzie zbiorem homomorfizmów R-modułów. Funktorem lewo-dołączonym do R będzie wtedy $L(V) = V \otimes W$:

$$RMod(V, \mathrm{Hom}_R(W, U)) \cong RMod(V \otimes W, U).$$

   Uwaga: tensor produkt zwykle nie ma funktora lewo do siebie dołączonego.

6. Załóżmy, że kategoria $\mathcal{C}$ ma produkty i ustalmy $X \in \mathcal{C}$. Rozważmy funktor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $L(Y) = Y \times X$. Jeśli kategoria $\mathcal{C}$ posiada obiekty eksponencjalne, czyli wiemy jak uogólnić na nią przestrzeń funkcji $X \to Y$ (oznaczane Y^X), to funktorem prawo dołączonym do L jest właśnie funktor przypisujący obiektowi Y jego eksponens Y^X,

$$\mathcal{C}(Y, Z^X) \cong \mathcal{C}(Y \times X, Z).$$

   Przykładem takiej kategorii są przestrzenie "core-compact".

W ramach kontrprzykładu rozważmy funktor zapominania $U : FinGrp \to FinSet$, i załóżmy, że $L : FinSet \to FinGrp$ jest jego funktorem lewo dołączonym. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p > |L(1)|$ (wystarczy, że są względnie pierwsze). Wtedy

$$FinSet(1, U(\mathbb{Z}_p)) \cong FinGrp(L(1), \mathbb{Z}_p)$$

gdzie po lewej zbiór ma $|\mathbb{Z}_p| = p$ różnych funkcji z singletona w zbiór elementów grupy $\mathbb{Z}_p$, a po prawej mamy jedynie trywialny morfizm, bo żaden element $L(1)$ nie ma rzędu podzielnego przez p, czyli nie może przejść w żaden nietrywialny element $\mathbb{Z}_p$.

3. Druga definicja

Definicja 1.13: funktory dołączone (naturalne transformacje)

Rozważmy parę funktorów

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathcal{D}. \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

Powiemy, że L jest lewo dołączony do R i na odwrót, jeśli istnieją dwie natrualne transformacje

$$\varepsilon : LR \implies 1_{\mathcal{D}} \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$$

takie, że komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

η nazywamy *unit*, a ε to *counit*.

10.03.2025 Funktory dołączone własności

1. Dowód równoważności

Twierdzenie 1.14

Dwie definicje funktorów dołączonych z poprzedniego wykładu są równoważne, tzn. naturalne transformacje H, E

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(L-,-) \arrow[r, Rightarrow, bend right, "H"'] & \mathcal{C}(-,R-) \arrow[l, Rightarrow, bend right, "E"'] \end{tikzcd}$$

istnieją $\iff$ istnieją dwie naturalne transformacje $\varepsilon : LR \to 1_{\mathcal{D}}$ oraz $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to RL$ dla których komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Dowód

Niech $f : c' \to c$ będzie morfizmem w $\mathcal{D}$, a $g : d' \to d$ - morfizmem w $\mathcal{C}$.

Zacznijmy od zdefiniowania szukanych przekształceń naturalnych na obiektach. Niech η_c

$$\mathcal{D}(Lc, Lc) \xrightarrow{H_{c,Lc}} \mathcal{C}(c, RLc)$$

$$1_{Lc} \longrightarrow \eta_c = H(1_{Lc})$$

a ε_d definiujemy analogicznie używając E.

W drugą stronę, $H(\varphi)$ definiujemy mając η oraz ε. Dla $\varphi : Lc \to d$ definiujemy

$$H(\varphi) := R\varphi \circ \eta_c,$$

które bierze coś z c i oddaje RLc. Z drugiej strony bierzemy $\psi : c \to Rd$

$$E(\psi) := \varepsilon_d \circ L\psi.$$

$\Longrightarrow$

Zakładamy, że H i E są naturalne i pokazujemy naturalność η, czyli komutowanie diagramu

$$\begin{tikzcd}
RL(c') \arrow[d, "RL(f)"'] & 1_{\mathcal{C}}(c') \arrow[l, "\eta_{c'}"'] \arrow[d, "1_{\mathcal{C}}(f)"] \\
RL(c) & 1_{\mathcal{C}}(c) \arrow[l, "\eta_c"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
RLf \circ \eta_{c'} &\overset{\text{def. } \eta}{=} RLf \circ H(1_{Lc'}) = \\
&\overset{\text{funktorialność } H}{=} H(Lf \circ 1_{Lc'}) = \\
&= H(1_{Lc} \circ Lf) = \\
&= H(1_{Lc}) \circ f = \\
&\overset{\text{def. } \eta}{=} \eta_c \circ f.
\end{aligned}$$

Analogicznie należy sprawdzić naturalność ε.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że zdefiniowane przez nas η i ε spełnia warunek trójkąta w definicji, tzn. komutują diagramy

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

Ograniczymy się do sprawdzenia lewego diagramu.

$$\begin{tikzcd}
Lc \arrow[r, "L(\eta_c)"] \arrow[dr, "1_{Lc}"'] & LRLc \arrow[d, "\varepsilon_{Lc}"] \\
& Lc
\end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_{Lc} L(\eta_c) = E(1_{RLc})L(\eta_c) = E(1_{RLc}\eta_c) = EH(1_{Lc}) = 1_{Lc}$$

$\Longleftarrow$

Wychodzimy teraz z założenia, że $\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$ i $\varepsilon : LR \implies 1_{\mathcal{D}}$ to naturalne przekształcenia, czyli z komutowania diagramów

$$\begin{tikzcd}
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] \arrow[d, "f"'] & RLc' \arrow[d, "RLf"] \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & RLc
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "g"'] & LRd \arrow[l, "\varepsilon_d"'] \arrow[d, "LRg"] \\
d' & LRd' \arrow[l, "\eta_{d'}"]
\end{tikzcd}$$

dostajemy równości

$$RLf \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

$$g \circ \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} \circ LRg.$$

Powinniśmy najpierw pokazać, że H i E są naturalne. Zrobimy to tylko dla H. Interesuje nas diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Lc, d) \arrow[r, "H_{c;d}"] \arrow[d, "(Lf;g)"'] & \mathcal{C}(c, Rd) \arrow[d, "(f;Rg)"] \\
\mathcal{D}(Lc', d') \arrow[r, "H_{c';d'}"'] & \mathcal{C}(c', Rd')
\end{tikzcd}$$

$$EH(\varphi) = E(R\varphi \circ \eta) = E(R\varphi)E(\eta) = \varepsilon LR\varphi\varepsilon L\eta$$

Twierdzenie 1.15

Istnieje bijekcja między zbiorem par naturalnych przekształceń (H, E) oraz (η, ε).

Dowód

TO DO

2. Funktory dołączone a granice

Twierdzenie 1.16

Niech $L \dashv R$ będzie parą funktorów dołączonych. Wtedy L zachowuje granice proste, a R - granice odwrotne.

Przypomnijmy że kogranica (granica prosta) funktora $f : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ spełnia dla każdego g diagram

$$\begin{tikzcd}
f_i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & f_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& \varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& g &
\end{tikzcd}$$

Dowód

Pokażemy tylko, że lewo dołączony funktor zachowuje kogranice, tj. dla dowolnego $d \in \mathcal{D}$ zachodzi diagram

$$\begin{tikzcd}
Lf_i \arrow[rr, "L\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & Lf_j \arrow[dl, "L\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& L\varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Z uniwersalnej własności kogranicy mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
f_i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\theta_i"'] & & f_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\theta_j"] \\
& \varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& Rd &
\end{tikzcd}$$

Nakładamy na niego funktor L. Potrzebujemy też strzałek $L\eta_i : Lf_i \to LRLf_i$ przychodzących z naturalnej transformacji $\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$. Dodatkowo wiemy, że $\varepsilon_d : Lrd \to d$ istnieje i jest w dodatku jedyne. Mamy więc diagram

$$\begin{tikzcd}
& Lf_i \arrow[rr, "L\alpha"] \arrow[dl, "L\eta_i"'] \arrow[dr, "L\varphi_i"] \arrow[ddr, bend right, "L\theta_i"] \arrow[dddr, bend right, "\psi_i"'] & & Lf_j \arrow[dr, "L\eta_j"] \arrow[dl, "L\varphi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "L\theta_j"'] \arrow[dddl, bend left, "\psi_j"] & \\
LRLf_i \arrow[drr, bend right, "LR\psi_i"'] & & L\varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists! Lu"] & & LRLf_j \arrow[dll, bend left, "LR\psi_j"] \\
& & LRd \arrow[d, "\exists! \varepsilon_d"] & & \\
& & d & &
\end{tikzcd}$$

w którym długie zielone strzałki są konsekwencją złożenia $\varepsilon_d \circ LR\psi_i = \psi_i$. Dostajemy więc $\varepsilon_d \circ Lu$ jako jedyną strzałkę $L\varinjlim f \to d$ komutującą z ψ_i oraz ψ_j.

3. Moduły

Jeśli R jest pierścieniem z 1, to powiemy, że M jest R-modułem, jeśli

- $(M, +)$, jest grupą abelową
- oraz R działa na M tak, że

$$1x = x, \quad rsx = r(sx)$$

$$(r+s)(x+y) = (r+s)x + (r+s)y = rx + sx + ry + sy$$

Grupy abelowe to $\mathbb{Z}$-moduły. Przestrzenie liniowe nad ciałem k to k-moduły.

Definicja 1.17: moduł projektywny

Mówimy, że R-moduł P w kategorii R-modułów jest projektywny, jeśli dla każdego surjektywnego homomorfizmu $f : N \twoheadrightarrow M$ oraz każdego homomorfizmu $g : P \to M$ istnieje homomorfizm modułów $h : P \to N$ taki, że $fh = p$. Innymi słowy, komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists\, h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Przykłady

Dla każdego R oraz n wolny moduł R^n jest modułem projektywnym. Niech $x_1, ..., x_n$ będą generatorami R^n. Dla każdego i wybieramy jeden element $n_i \in f^{-1}(g(x_i))$. Definiujemy $h(x_i) = n_i$.

Argument z przykładu uogólnia się na stwierdzenie, że każdy moduł jest **obrazem pewnego modułu projektywnego**.

Dualnie definiujemy moduły injektywne.

Definicja 1.18: moduł injektywny

Dla każdego injektywnego $f : M \to N$ oraz dla każdego $g : M \to Q$ istnieje $h : N \to Q$ takie, że komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Przykład

Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ są injektywnym $\mathbb{Z}$-modułem.

Twierdzenie 1.19

Dla każdego R-modułu M istnieje injektywny moduł Q taki, że $M \hookrightarrow Q$.

Dowód

ja tego nie znam?