Lista 4: Algebry uniwersalne i iloczyny tensorowe

Matematyka nieprzemienna 2024/25

1. Niech G będzie grupą skończoną i niech $\mathbb{C}[G]$ oznacza $*$-algebrę funkcji na G o wartościach zespolonych (patrz zadanie 1 lista 3). Definiujemy $\pi : \mathbb{C}[G] \ni \delta_g \mapsto U_g \in B(H)$ jako rozszerzenie do $*$-homomorfizmu wzoru
$$U_g(\delta_h) = \delta_{gh}.$$
Napisz, jak działa U_f ($f \in \mathbb{C}[G]$) na elemencie $k \in \mathbb{C}[G]$. Wykaż, że π jest wierną reprezentacją $\mathbb{C}[G]$ i że $\mathbb{C}[G] \ni f \mapsto \|U_f\|_{B(H)}$ jest normą C* na $\mathbb{C}[G]$.

2. Niech $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie bazą zero-jedynkową $\ell^2(\mathbb{N})$. Definiujemy
$$S_q : \ell^2(\mathbb{N}) \ni e_n \mapsto \sqrt{1 - q^{n+1}}e_{n+1} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$
Wyznacz S_q^* i wykaż, że $S_q^*S_q - qS_qS_q^* = (1 - q)I_{\ell^2(\mathbb{N})}$.

3. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Pokaż, że jeśli $A, B \in B(H)$ spełniają warunek $AA^* + BB^* = I_H$, to $\|A\| \leq 1$ i $\|B\| \leq 1$.

4. Wykaż, że istnieje uniwersalna C*-algebra (z jedynką) A generowana przez dwa elementy unitarne u i v spełniające warunek $vu = \lambda uv$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$ i $|\lambda| = 1$. Jaką C*-algebrę dostajemy dla $\lambda = 1$?

   Wskazówka: Niech $H = L^2(\mathbb{T})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle := \int_0^1 \overline{f(e^{2\pi ix})}g(e^{2\pi ix})dx$. Pokaż, że $u \mapsto U$, gdzie $(Uf)(z) = zf(z)$ oraz $v \mapsto V$, gdzie $(Vf)(z) = f(\lambda z)$ dla $f \in L^2(\mathbb{T})$ definiuje reprezentację A na $H = L^2(\mathbb{T})$.

5. Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje jedyny iloczyn skalarny na $H_1 \odot H_2$, który spełnia warunek
$$\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle_{H_1\odot H_2} = \langle x, x'\rangle_{H_1}\langle y, y'\rangle_{H_2}, \quad x, x' \in H_1, y, y' \in H_2.$$
Niech $\|. \otimes ..\|$ oznacza normę na $H_1 \odot H_2$ indukowaną przez ten iloczyn skalarny. Wówczas iloczynem tensorowym przestrzeni Hilberta H_1 i H_2 nazywamy uzupełnienie $H_1 \odot H_2$ w tej normie, czyli przestrzeń Hilberta
$$H_1 \otimes H_2 = \overline{H_1 \odot H_2}^{\|\cdot\|}.$$
Niech $T_i \in B(H_i)$ dla $i = 1, 2$. Definujemy operator $T_1 \otimes T_2 \in B(H_1 \otimes H_2)$ poprzez (jednoznaczne) liniowe i ciągłe rozrzeszenie wzoru
$$T_1 \otimes T_2(x \otimes y) := T_1x \otimes T_2y, \quad x \in H_1, y \in H_2.$$
Wykaż, że wtedy
$$(T_1 \otimes T_2)^* = T_1^* \otimes T_2^*.$$

6. Niech A będzie algebrą C*, $n \in \mathbb{N}_1$ i niech E_{ij} oznacza macierz jednostkową w $M_n(\mathbb{C})$ (tzn. $(E_{ij})_{kl} = 1$ wtw, gdy $k = i$, $l = j$, poza tym mamy 0). Przez $M_n(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich macierzy $n \times n$ o wyrazach w A (z działaniami analogicznymi jak na $M_n(\mathbb{C})$, np. $([a_{ij}]_{i,j=1}^n)^* = [a_{ji}^*]_{i,j=1}^n$). Definiujemy odwzorowanie

$$\Phi : M_(A) \ni [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \odot a_{ij} \in M_n(\mathbb{C}) \odot A.$$

Wykaż, że Φ jest $*$-izomorfizmem algebr.

7. Niech A i B będą algebrami C*. Na algebraicznym iloczynie tensorowym $A \odot B$ definiujemy działania:

$$(x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') := xx' \otimes yy', \qquad (x \otimes y)^* = x^* \otimes y^*.$$

Wykaż, że $A \odot B$ z tymi działaniami jest $*$-algebrą.

8. Niech A, B i C będą algebrami C*. Niech $\phi : A \to C$ i $\psi : B \to C$ będą $*$-homomorfizmami. Pokaż, że wtedy:

   (a) istnieje (jednoznacznie wyznaczone) odwzorowanie liniowe $\phi \times \psi : A \otimes B \to C$ takie, że $\phi \times \psi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b)$.

   (b) $\phi \times \psi$ jest $*$-homomorfizmem wtw, gry $\phi(A)$ i $\psi(B)$ komutują, tzn. dla dowolnych $x \in A$ i $y \in B$ zachodzi $\phi(x)\psi(y) = \psi(y)\phi(x)$.

9. Uzasadnij, że norma maksymalna na $A \odot B$

$$A \odot B \ni x \mapsto \|x\|_{\max} := \sup\{\|\pi(x)\| : \pi : A \odot B \to B(H) \text{ jest reprezentacją}\}$$

jest normą C*.