Algebraic geometry

Weronika Jakimowicz

Spis treści

1. Zariski

04.10.2024 Topologia Z, noetherowskość

1. Konwencje

pierścień := pierścień przemienny z 1

homomorfizmy z definicji zachowują 1

Dla $A \subseteq R$ ideał przez niego generowany to $(A) = AR \triangleleft R$. Dla ideałów $I, J \triangleleft R$ znamy operacje $I + J$, IJ, $I \cap J$ i $\sqrt{I}$ jako radykał.

R-algebra to homomorfizm pierścieni $R \to S$, a homomorfizm R-algebr to strzałka f taka, że diagram

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "f"] & & S_2 \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Jeśli K to ciało, to $K \to R$ jest injekcją, czyli K-algebry można utożsamiać z rozszerzeniami ciała $K \subseteq R$. Dla rozszerzenia ciał $K \subseteq L$ definiujemy stopień przestępny $\mathrm{trdeg}_K(L) = |B|$ dla $B \subseteq L$ będącego największym zbiorem liniowo niezależnym nad K.

Niech K będzie ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, np. $\mathbb{C}$. Wtedy A^n lub $A^n(K)$ to K^n rozważane jako obiekt geometryczny. Będziemy to nazywać n-przestrzenią afiniczną, czyli $A^1 = K$ to prosta afiniczna i $A^2 = K^2$ - płaszczyzna afiniczna.

2. Topologia Zariskiego

Definicja 1.1: zbiory Zariskiego

Dla dowolnego $A \subseteq K[\overline{X}]$, gdzie $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ definiujemy zbiór zer A w K^n

$$V(A) := \{\overline{a} \in K^n \ : \ (\forall\ F \in A)\ F(\overline{A} = 0\}.$$

Zbiory tej postaci nazywamy **afinicznymi zbiorami algebraicznymi** lub **zbiorami domkniętymi Zariskiego**.

Przykłady

1. Gdy popatrzymy na $A = \{y - x^2\}$ to zbiór zer jest parabolką, która jest spójna narysowac
2. dla $A = \{yx - 1\}$ zbiór zer to hiperbola, która już spójna nie jest.
3. Jeśli $F \in K[\overline{X}]$ jest nierozkładalny, to dla $n = 2$ $V(F)$ jest krzywa planarna, dla $n = 3$ jest powierzchnia planarna a dla $n > 3$ jest hiperpowierzchnia planarna.
4. $\{\overline{a}\}$ singleton jest domkniętym zbiorem Zariskiego jako $V(X - a_1, ..., X_n - a_n)$
5. $\emptyset = V(1)$
6. $A = V(0)$

Lemma 1.2: podwały topologii

Jeśli $I, J \triangleleft K[\overline{X}]$ oraz $A_i \subseteq K[\overline{X}]$, to wtedy

1. $A_0 \subseteq A_1 \implies V(A_1) \subseteq V(A_0)$
2. $V(\bigcup A_i) = \bigcap V(A_i)$
3. $V(A_0) = V((A_0))$, czyli zbiór rozwiązań zbioru jest taki sam jak zbiór rozwiązań jego ideału
4. $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$
5. $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$

Dowód

1 i 2 są oczywiste.

Jedno zawieranie w punkcie 3 jest wnioskiem z 1, bo $A_0 \subseteq (A_0)$, czyli $V(A_0) \subseteq V((A_0))$. Dla zawierania w drugą stronę bierzemy dowolne $\overline{a} \in V(A_0)$ oraz $F \in (A_0)$, chcemy pokazać $F(\overline{a}) = 0$. Ponieważ A_0 generuje ten ideał, to istnieją $F_1, ..., F_k \in A_0$ oraz $H_1, ..., H_k \in K[\overline{X}]$, że $F = \sum H_i F_i$.

W 4 wiemy, że $I \cap J \supseteq IJ$, czyli $V(IJ) \supseteq V(I \cap J) \supseteq V(I) \cup V(J)$. Wystarczy pokazać, że $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$ Weźmy więc $\overline{a} \in V(IJ)$ i załóżmy, że $\overline{a} \notin V(I)$, będziemy pokazywać $\overline{a} \in V(J)$. Niech $H \in J$ i $F \in I$. Czyli $FH \in IJ$. Ale $\overline{a} \in V(IJ)$, czyli $FH(\overline{a})$, ale skoro $\overline{a} \notin V(I)$, to $F(\overline{a}) \neq 0$ czyli pozostaje $H(\overline{a}) = 0$.

W ostatnim podpunkcie z 2 i 4 wiemy, że

$$V(I) \cap V(J) = V(I \cup J) = V((I \cup J)) = V(I + J),$$

bo $I \cup J = I + J$.

Conclusion

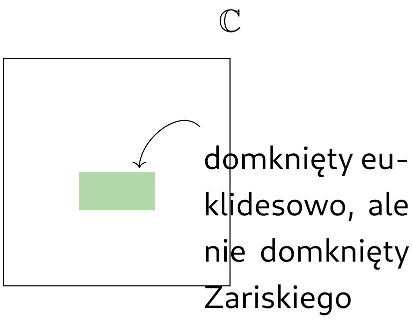
Z przykładu 5 i 6 i lematu 1.2 wiemy, że zbiory domknięte Zariskiego są zbiorami domkniętymi pewnej topologii na A^n, nazywanej **topologią Zariskiego**. Singletony są domknięte, czyli topologia Zariskiego jest T_1, ale nie jest Hausdorffa.

Przykład

Na $A^1 = K$ niezerowe wielomiany mają zawsze skończenie wiele zer, czyli $V \subseteq A^1$ jest domknięty $\iff$ jest skończony lub jest wszystkim. Zbiory otwarte Zariskiego są natomiast koskończone lub puste, czyli przekrój dowolnych dwóch niepustych zbiorów otwartych jest niepusty.

Uwaga 1.3

Dla $K = \mathbb{C}$ jest $A^n = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ i na $\mathbb{R}$ zwykłą topologię, którą na $\mathbb{R}^{2n}$ nazywamy euklidesowa, która jest znacznie bogatsza od topologii Zariskiego.



Uwaga 1.4

Topologia Zariskiego na $A^2 = A^1 \times A^1$ nie jest topologią produktową. Np. Parabola i prosta nie są domknięte w topologii produktowej.

3. Przestrzenie noetherowskie

Fakt 1.5

Dla wszystkich $A \subseteq K[\overline{X}]$ istnieje skończony $A_0 \subseteq A$ taki, że $V(A_0) = V(A)$.

Dowód

Z twierdzenia Hilberta o bazie pierścień $K[\overline{X}]$ jest Noetherowski. Ideał generowany przez A jest skończenie generowany. W takim razie istnieje A_0 wybrany z dowolnego skończonego zbioru generatorów i z 1.2 wiemy, że $V(A_0) = V((A)) = V(A)$.

Definicja 1.6: przestrzeń noetherowska

Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest **noetherowska**, jeśli każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych się stabilizuje. To znaczy, że dla każdego

$$... \subseteq X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq ... \subseteq X_0 \subseteq X$$

istnieje N takie, że dla wszystkich $n \geq N$ $X_n = X_N$.

Uwaga 1.7

1. Jeśli X jest noetherowska, to X jest quasi-zwarta, ale niekoniecznie Hausdorffa.
2. X jest noetherowska i Hausdorffa $\iff$ X jest skończona i dyskretna (punkty są otwarte).
3. Z przykładu wyżej A^1 z topologią Zariskiego jest Noetherowska.
4. Podprzestrzeń przestrzeni noetherowskiej jest nadal noetherowska.

Fakt 1.8

A^n jest noetherowska

Dowód

Niech $A^n \supseteq V_0 \supseteq V_1 \supseteq ...$ będzie zstępującym ciągiem domkniętych zbiorów Zariskiego. Niech $A_i \subseteq K[\overline{X}]$ takie, że $V(A_i) = V_i$. Niech $I_i := (A_0 \cup ... \cup A_i)$. Wtedy z 1.2

$$V(A_0 \cup ... \cup A_i) = V(A_0) \cap ... \cap V(A_i) = V(A_i) = V_i,$$

bo to zbiory zstępujące.

Teraz $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ jest wstępującym ciągiem w pierścieniu noetherowskim $K[\overline{X}]$, czyli stabilizuje się od pewnego momentu. W takim razie zbiory V_i przez nie generowane też się stabilizują.

4. Przestrzenie nierozkładalne

Definicja 1.9: nierozkładalność

Niepusta przestrzeń topologiczna X jest **nierozkładalna**, gdy dla każdych $A, B \subsetneq X$ domkniętych $X \neq A \cup B$.

Uwaga 1.10

1. nierozkładalna $\implies$ spójna
2. nierozkładalna i $T_2 \implies$ singleton
3. $\mathbb{A}^1$ z topologią Zariskiego jest nierozkładalna
4. $Y \subseteq X$ (X potencjalnie noetherowska), to Y jest nierozkładalny $\iff$ $\overline{Y}$ jest nierozkładalny

Fakt 1.11

Niech X będzie noetherowską przestrzenią topologiczną. Wtedy

1. istnieją $X_1, \dots, X_k \subseteq X$ domknięte, nierozkładalne, to wówczas $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$
2. jeśli dla wszystkich $i \neq j$ $X_i \not\subseteq X_j$, to rozkład z punktu 1 jest jednoznaczny z dokładnością do permutacji.

Dowód

1. Prawie taki sam jak dowód faktu, że dla $r \in R - R^*$ w pierścieniu noetherowskim istnieją nierozkładalne p_i takie, że $r = p_1 \dots p_k$.

Załóżmy nie wprost, że X nie ma takiego rozkładu, wtedy X nie może być nierozkładalny. W takim razie istnieją domknięte $A, B \subsetneq X$ takie, że $X = A \cup B$. Wtedy A lub B nie mają rozkładu, BSO A nie ma. Powtarzamy ten tok rozumowania dla A. W ten sposób moglibyśmy dostać nieskończony, niestabilizujący się ciąg zstępujących zbiorów domkniętych, co jest sprzeczne z noetherowskością X.