

Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

1	Wstępy	1
02.10.2024	Grafy Cayleya	1
1.	Metryka słów	1
2.	Graf Cayleya	1
3.	Quasi-izometrie	3
09.10.2024	Lemat Milnora-Švarca	6
2	Niezmienniki izometrii	11
16.10.2024	Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni	11
1.	Podejście przez granice	11
2.	Toologia granicy odwrotnej	12
23.10.2024	16
1.	Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie)	16
30.10.2024	cos	19

1. Wstępy

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmienicza**, czyli $(\forall \gamma \in G) ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

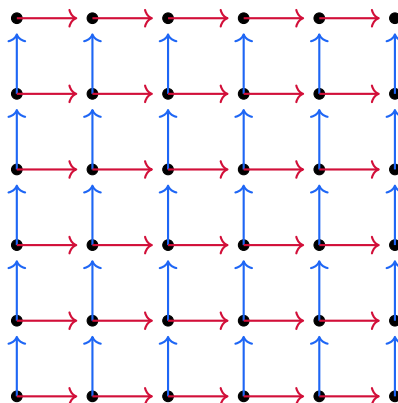
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

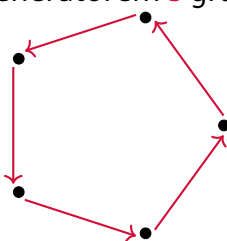
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy $V = G$, ale krawędzie są niezorientowane: $E = \{\{g_1, g_2\} : ds(g_1, g_2) = 1\}$. W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedynczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez **automorfizmy zachowujące krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

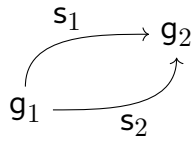
$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

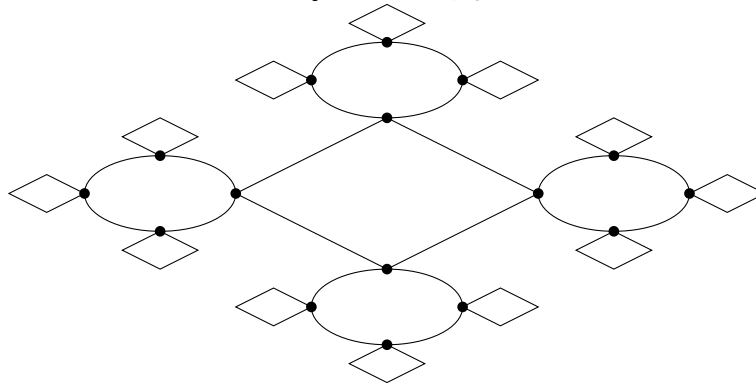
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc **działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie** (lewa-niezmienniczość).

Dla suriekcji $\pi : F_S \rightarrow G$, gdzie $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$ możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np. $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$)



Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$ to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



3. Quasi-izometrie

Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych (X_i, d_i) , $i = 1, 2$, mówimy, że przekształcenie $f : X_1 \rightarrow X_2$ (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje $C \geq 1$ oraz $L \geq 0$ takie, że $\forall x, y \in X_1$ zachodzi

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje $D \geq 0$ takie, że $f(X_1)$ jest D -gęsty (D -siecią) w X_2 , tzn.

$$(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1) d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy f jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy $L = D$ (większe z dwóch) i mówimy o tzw. **(C, L) -quasi-izometrii**.

Fakt 1.5: własności q.i.

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i. $f : X_1 \rightarrow X_2$ istnieje $g : X_2 \rightarrow X_1$ takie, że istnieje $D \geq 0$ takie, że

$$(\forall x_2 \in X_2) d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall x_1 \in X_1) d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

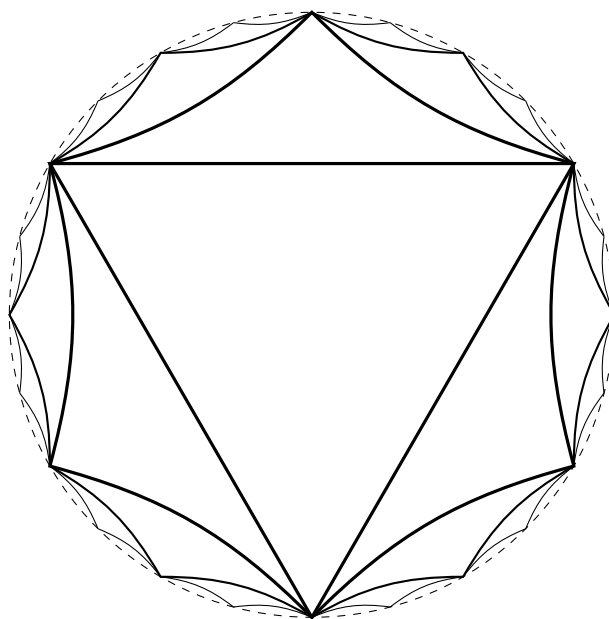
to wówczas g też jest q.i.

Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości

Mówimy, że (X_1, d_1) jest quasi-izometryczna z (X_2, d_2) jeśli istnieje q.i. $f : X_1 \rightarrow X_2$. Jest to relacja równoważności.

Przykłady

1. (X, d) jest q.i. z punktem $\iff X$ jest ograniczone.
2. X jest q.i. z dowolną swoją D -siecią $Y \subseteq X$ przez inkluzję.
3. Dla dowolnego B ograniczonego $X \times B \cong X$ są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne T_k stopnia $k \geq 3$ są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia $T_\omega = T_{\aleph_0}$.



Fakt 1.7

Niech G będzie grupą skończenie generowaną i niech S_1, S_2 jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych $(G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$ gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

Wniosek 1.8

Skończenie generowana grupa G determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest jednoznacznym obiektem quasi-metrycznym.

09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

Lemat 1.9: Milnora-Švarca

Niech X będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a Γ grupą działającą na X przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas Γ jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z X . Dokładniej, $\forall x_0 \in X$ odwzorowanie $\Gamma \rightarrow X$ określone przez $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ jest quasi-izometrią.

Dowód

Wybermy $x_0 \in X$. Z kozwartości tego działania, istnieje promień $R > 0$ taki, że dla kuli $B = B_R(x_0)$ o środku w x_0 taki, że rodzina przesunięć kuli $\{g \cdot B : g \in \Gamma\}$ jest pokryciem X . Rozważmy zbiór $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ niewielkich przesunięć kuli B . Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni X , zbiór S jest skończony. Ponadto, zbiór jest ten jest symetryczny $S = S^{-1}$ ($s \in S \implies s^{-1} \in S$), bo jeśli $s \cdot B \cap B \neq \emptyset$ to również $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$.

Określamy $v := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma - S - \{1\}\}$ czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

Clam 1: $v > 0$

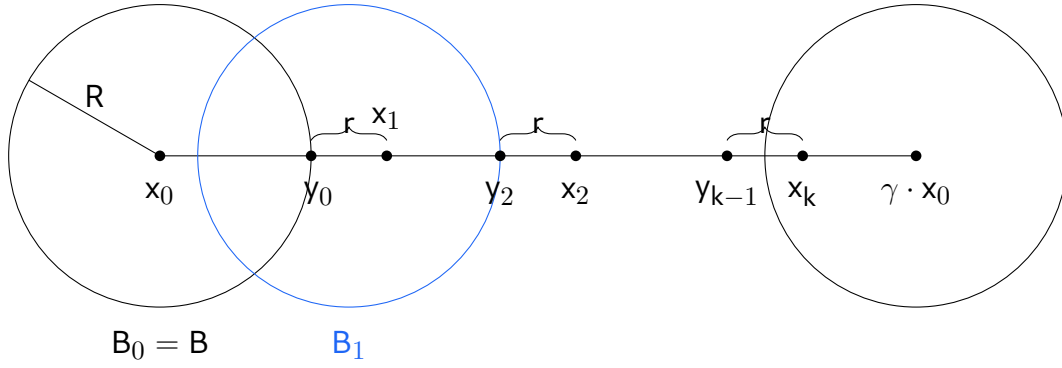
Dla każdego $g \in \Gamma - S - \{1\}$ wiemy, że $d(B, g \cdot B) > 0$. Gdyby to infimum $v = 0$, to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów $g_n \in \Gamma$ takich, że $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$ maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty $z_n \in B$ takie, że $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$ (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg n_k taki, że $z_{n_k} \in z_0 \in B$, a stąd $d(z_0, g_{n_k} \cdot B) \searrow 0$. To oznacza, że $B_{2R}(x_0)$ przecina niepusto nieskończenie wiele spośród przesunięć $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$, a to jest sprzeczne z właściwością działania.

Clam 2: S generuje Γ oraz dla każdego $\gamma \in \Gamma$

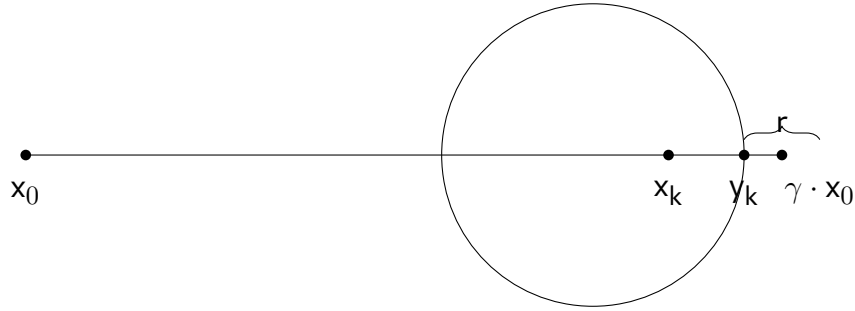
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

gdzie $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$.

I scenariusz:



II scenariusz



Niech y_0 będzie punktem na geodezyjnej $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$ z kuli B najdalszy od x_0 na tej geodezyjnej. W odległości r od y_0 obierzmy punkt x_1 . Wtedy odcinek $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, czyli $x_1 \in s_1 \cdot B$. Iterujemy się tak aż kulą $B_k = s_k s_{k-1} \dots s_1 \cdot B$ trafimy w $\gamma \cdot x_0$.

W scenariuszu I mamy $\gamma \cdot B \cap s_k \dots s_1 \cdot B \neq \emptyset$, bo $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$ oraz $\gamma x_0 \in s_k \dots s_1 \cdot B$. W takim razie $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$. Czyli zachodzi jedna z równości

1. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II $d(\gamma x_0, s_k \dots s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r$. W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2. $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$, bo $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$ bo tyle razy udało nam się odłożyć r na geodezyjnej.

Jeśli $d_S(1, \gamma) = m$, a $\gamma = s_1 \dots s_m$, to wówczas

$$d_X(s_1, \dots, s_k \cdot x_0, s_1 \dots s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 \dots s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności $f(\gamma) \rightarrow \gamma \cdot x_0$, które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów d_S wiemy, że $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$, czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo- Γ -niezmienniczości metryki d_X na X mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i f jest quasi-izometrycznym włożeniem dla $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$ i $L = r$.

Ponadto, obraz $f(\Gamma)$ jest R -gęsty (dla R promienia z początku dowodu) w X , bo dla każdego $x \in X$ istnieje $\gamma \in \Gamma$ takie, że $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$. Czyli $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$, ale $\gamma \cdot x_0 = f(\gamma)$. Stąd f jest quasi-izometrią.



Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

Przykłady

1. Grupy podstawowe $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$ zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych M_1 , M_2 o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach $\text{vol}(M_i)$.

Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

Twierdzenie 1.10: Mostowa o sztywności [1968]

Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

Założmy nie wprost, że $\pi_1(M_1)$ i $\pi_1(M_2)$ są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu $H < \pi_1(M_1)$, $H < \pi_1(M_2)$. Niech \bar{M}_1 i \bar{M}_2 będą nakryciami M_1 , M_2 wyznaczone przez H . Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc \bar{M}_i są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.

Z teorii nakryć wiemy, że $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$. Stąd wynika, że \overline{M}_1 jest izometryczna z \overline{M}_2 , a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\text{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \text{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\text{vol}(M_1)}{\text{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1):H]}{[\pi_1(M_2):H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

2. Niech G_A będzie produktem półprostym $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, gdzie $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ jest zadane macierzą $A \in \text{Sl}_2\mathbb{Z}$. Chcemy, żeby A było macierzą hiperboliczną (tzn. $|\text{tr}(A)| > 2$) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa G_A jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego $\text{Sol} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$, gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$

2. Niezmienniki izometrii

16.10.2024 Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni

Zanim zaczniemy, zrobmy szybką motywację, czyli graf Cayleya grupy \mathbb{Z} z jednym generatorem:



który ma "dwa końce". Natomiast grupa wolna F_2 o dwóch generatorach ma "nieskończenie wiele końców".

NARYSOWAC F_2

Z drugiej strony, grupa \mathbb{Z}^2 ma jeden koniec: jeśli weźmiemy dwa bardzo odległe od siebie obszary, to one są ze sobą połączone, chociaż jest to połączenie "bardzo odległe".

NARYSOWAC kratę i dwa placki połączone

Z kolei każda przestrzeń skończona, np. graf Cayleya grupy skończonej, ma 0 końców.

1. Podejście przez granice

Definicja 2.1: zbiór skierowany

Zbiór z częściowym proładkiem (Λ, \leq) jest **skierowany**, gdy dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ istnieje $\lambda \in \Lambda$ takie, że $\lambda \geq \lambda_1$ oraz $\lambda \geq \lambda_2$.

ciągi odwrotne

Definicja 2.2: system odwrotny

System odwrotny nad zbiorem skierowanym Λ to rodzina zbiorów

$$\mathfrak{X} := \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

oraz rodzina odwzorowań

$$\mathcal{F} := \{f_{\lambda\mu} : X_\mu \rightarrow X_\lambda : \lambda \leq \mu\}$$

takich, że

1. dla dowolnego λ mamy funkcję identycznościową: $f_{\lambda\lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
2. dla dowolnych $\lambda \leq \mu \leq \nu$ złożenia zachowują się dobrze: $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$.

Będziemy oznaczać: $\underline{X} := (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$

Definicja 2.3: granica odwrotna

Granica odwrotną systemu \underline{X} nazywamy zbiór

$$\varprojlim = \{ \xi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : (\forall \lambda' \leq \lambda) \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda) \}.$$

Elementy ξ jak wyżej nazywamy **niciami** (threads) w \underline{X} .

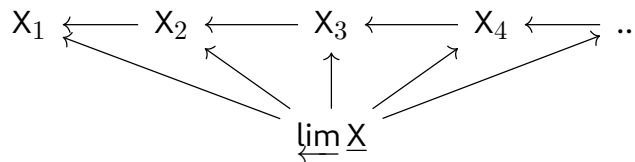
Definicja 2.4: odwzorowania graniczne

Odwzorowania

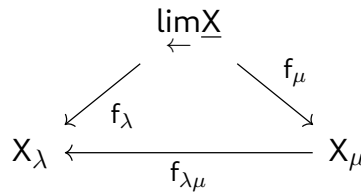
$$f_\lambda : \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_\lambda$$

takie, że $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$ nazywamy odwzorowaniami granicznymi.

O odwzorowaniach granicznych można myśleć jako o odwzorowaniach, które pytają "kim byłem w czasie λ ".



Dla $\lambda \leq \mu$ diagram



zawsze komutuje.

2. Topologia granicy odwrotnej

Kiedy zbiory X_λ są przestrzeniami topologicznymi, zaś $f_{\lambda\mu}$ są ciągłe, to na granicy odwrotnej $\varprojlim \underline{X}$ rozważamy również topologię graniczną. Jest to topologia dziedziczona z topologii produktowej na $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Bazą tej topologii są zbiory postaci $f_\lambda^{-1}(U)$ dla $\lambda \in \Lambda$ i otwartych

$U \subseteq X$.

Fakt 2.5

Gdy przestrzenie X_λ są Hausdorffa, to $\varprojlim X$ jest domkniętym podzbiorem w $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Gdy przestrzenie X_λ są zwarte i metryczne, to wówczas $\varprojlim X$ też jest zwarta i metryczna. W szczególności, gdy X_λ są skończone (z topologią dyskretną), zaś Λ jest przeliczalny, to wówczas $\varprojlim X$ jest przestrzenią zwartą i metryczną. Na ogół nie jest też przestrzenią dyskretną, mimo że wszystkie zbiory po których bierzemy granicę takie były (bazą topologii są przeciwobrazy punktów $\{\xi \in \varprojlim X : \xi_\lambda = x\} = f_\lambda^{-1}(x)$).

Przykład

Niech $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$ i niech X_k będzie zbiorem wszystkich ciągów 0 – 1 długości k . Dla $k \leq m$ rozważamy

$$f_{km} : X_m \rightarrow X_k$$

będące obcięciem ciągu długości m do początkowego ciągu długości k . Dostajemy wówczas system odwrotny $\underline{X} = (\mathbb{N}, \{X_k\}, \{f_{km}\})$ zbiorów skończonych. Wówczas $\varprojlim X$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

Będziemy zajmować się X które są przestrzeniami metrycznymi, geodezyjnymi właściwymi, np. grafami Cayleya grup skończenie generowanych. \mathcal{K} to będzie rodzina wszystkich zwartych podzbiorów $K \subseteq X$ z porządkiem inkluzji.

Definicja 2.6: podzbiór współkońcowy

Podzbiór $M \subseteq \Lambda$ zbioru skierowanego Λ nazywamy **współkońcowym**, jeśli

$$(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists \mu \in M) \lambda \leq \mu,$$

wtedy (M, \leq) też jest zbiorem skierowanym. Dla $\underline{X} = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$ niech

$$\underline{X}|_M = (M, \{X_\lambda : \lambda \in M\}, \{f_{\mu\mu'} \in \mathcal{F} : \mu, \mu' \in M\})$$

będzie obcięciem \underline{X} do M . Wtedy $\underline{X}|_M$ jest systemem odwrotnym nad M .

Fakt 2.7

$$\varprojlim X = \varprojlim X|_M$$

Przez bijekcję polegającą na obcinaniu nici do M . Jest ona jednocześnie homomorfizmem.

Wniosek

Jeśli X_λ są zwarte i metryczne, zaś Λ posiada przeliczalny podzbiór współkońcowy, to $\varprojlim X$ jest zwarta i metryczna.

Przykłady

1. W przykładzie wyżej zbiór \mathcal{K} posiada współkońcowy podciąg $K_i := B_{i,R}(x_0)$ dla $R > 0$ i pewnego $x_0 \in X$.
2. Dalej używając oznaczeń z poprzedniego przykładu, dla dowolnego $K \in \mathcal{K}$ niech Π_K^X będzie zbiorem nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu $X - K$.

Przestrzeń geodezyjna jest lokalnie drogowo spójna. Każda jej otwarta podprzestrzeń również jest lokalnie drogowo spójna. Czyli każde $X - K$ też jest lokalnie drogowo spójna. W lokalnie drogowo spójnych przestrzeniach komponenty spójności to to samo co komponenty drogowej spójności.

Każda nieograniczona komponenta $C' \subseteq X - K'$ zawiera się w dokładnie jednej nieograniczonej komponencie $C \subseteq X - K$. Dostajemy odwzorowanie $f_{KK'} : \Pi_{K'}^X \rightarrow \Pi_K^X$ takie, że $f_{KK'}(C') = C$.

Trójka $(\mathcal{K}, \{\Pi_K^X : K \in \mathcal{K}\}, \{f_{KK'} : K \subseteq K'\})$ tworzy system odwrotny nad zbiorem skierowanym \mathcal{K} .

$$\Pi_K^X \xleftarrow{f_{KK'}} \Pi_{K'}^X \xleftarrow{f_{K'K''}} \Pi_{K''}^X$$

Fakt 2.8

Dla każdego $K \in \mathcal{K}$ zbiór Π_K^X jest skończony.

Dowód

Weźmy $K \subseteq B_r(x_0)$, niech $R > r$ i rozważmy kulę $B_R(x_0)$, która jest zwarta. Każda nieograniczona komponenta C spójności w $X - K$ przecina niepusto sferę $S_R(x_0)$, bo X jest geodezyjna.

Zatem przekrój $C \cap B_R(x_0)$ jest niepusty. Wtedy rodzina

$$\{C \cap B_R(x_0) : C \text{ dowolna komponenta dopełnienia } X - K\} \cup \{\overline{B_R(x_0)} = B_R(x_0) - S_R(x_0)\}$$

pokrywa $B_R(x_0)$. Dodatkowo, jest to otwarte pokrycie, bo komponenty spójności lokalnie spójnej przestrzeni są otwartymi podzbiórami w tej przestrzeni. Ze zwartości X to pokrycie posiada skończone podpokrycie, ale z drugiej strony każdy zbiór postaci $C \cap B_R(x_0)$ dla nieograniczonych komponent musi przetrwać w każdym podpokryciu, bo zawiera punkty które należą tylko do niego. Stąd nieograniczonych komponent jest skończenie wiele.



Definicja 2.9

Zbiorem (przestrzenią) końców, $\text{Ends}(X)$, właściwej geodezyjnej przestrzeni metrycznej X nazywamy granicę odwrotną

$$\text{Ends}(X) = \varprojlim(\Pi^X) = \varprojlim(\mathcal{X}, \{\Pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}),$$

gdzie Π_K^X to nieograniczone komponenty w $X - K$. Jest to zwarta przestrzeń metryczna.

23.10.2024

Celem dzisiejszego wykładu będzie udowodnienie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.10

Przestrzeń końców $\text{Ends}(X)$, a w szczególności ich liczba, jest niezmiennikiem quasi-izometrii geodezyjnych przestrzeni właściwych. Takie q.i. przestrzenie mają homeomorficzne przestrzenie końców.

1. Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie)

Jeśli X jest właściwą przestrzenią geodezyjną, to jest również lokalnie drogowo spójna. Czyli otwarte podzbiory $U \subseteq X$ są spójne \iff są drogowo spójne.

Definicja 2.11: promień, współkońcowość promieni

Właściwy promień (eng. proper ray) w X to dowolne ciągłe odwzorowanie $\rho : [0, \infty) \rightarrow X$ takie, że $\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(\rho(0), \rho(t))$, odległość mierzona od początku ρ ucieka do nieskończoności wraz z oddalaniem się od 0.

Zbiór wszystkich promieni w X oznaczamy ρ^X .

Powiemy, że dwa promienie ρ_1, ρ_2 są współkońcowe ($\rho_1 \stackrel{E}{\sim} \rho_2$), jeśli dla dowolnego zwartego $K \subseteq X$ istnieje $R > 0$ taki, że $\rho_1([R, \infty))$ oraz $\rho_2([R, \infty))$ leżą w tej samej komponente $X - K$.

Relacja współkońcowości promieni na zbiorze ρ^X jest relacją równoważności.

Fakt 2.12

Zbiór klas abstrakcji $\rho^X / \stackrel{E}{\sim}$ w naturalny sposób utożsamia się z $\text{Ends}(X)$.

Dowód

Niech $\rho \in \rho^X$ takie, że dla każdego $K \subseteq X$ mamy jedyną komponentę $C_K^\rho \in \Pi_K^X$ w dopełnieniu zbioru K w X do której należy $\rho([R, \infty))$ dla dostatecznie dużych R . Wtedy ciąg $(C_K^\rho)_{K \in \mathcal{K}}$ jest nicią w systemie odwrotnym Π^X . W ten sposób współkońcowe promienie wyznaczają tę samą nić.

Mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\beta : \rho^X / \stackrel{E}{\sim} \rightarrow \text{Ends}(X)$$

$$\beta([\rho]_{\stackrel{E}{\sim}}) = (C_K^\rho) \in \text{Ends}(X)$$

β jest różnowartościowe, bo dla niewspółkońcowych ρ_1, ρ_2 istnieje $K \subseteq X$ takie, że $C_K^{\rho_1} \neq C_K^{\rho_2}$, a wtedy nici $\beta([\rho_1]) \neq \beta([\rho_2])$.

Niech $\xi = (\xi_K) \in \text{Ends}(X)$, szukamy promienia który na nie przechodzi. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybieramy punkt $y_n \in \xi_{B_n}$, gdzie ξ_{B_n} to nieograniczona komponenta w $X - B_n$ dla $B_n = B_n(x_0)$ przy ustalonym x_0 . Określmy $\rho = [y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \dots$ mając na myśli odwzorowanie $[n, n+1] \mapsto$ geodezyjna od y_n do y_{n+1} . Dla takiego ρ mamy $C_{B_n}^\rho = \xi_{B_n}$. Dla dowolnego innego $K \in \mathcal{K}$ z racji, że $K \subseteq B_n$ to dla pewnego n mamy zarówno C_K^ρ jak i ξ_K to ta sama komponenta w X_K , zawierająca ξ_{B_n} .



Na ρ^X / \sim mamy topologie indukowaną przez bijekcję β z topologią $\text{Ends}(X)$. Baza tej topologii są zbiory postaci $\{U_C^K : K \in \mathcal{K} \text{ i } C \in \Pi_K^X\}$, $U_C^K = \{[\rho] : \rho([R, \infty)) \subset C\}$ dla pewnego R .

Dowód

Dowód twierdzenia 2.10.

Niech X, Y będą właściwymi przestrzeniami geodezyjnymi oraz $f : X \rightarrow Y$ niech będzie (L, C) -quasi-izometrią. Ciągłe drogi $\nu : [a, b] \rightarrow X$ lub $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$ przerabiamy na ciągłe drogi $\nu \circ f$ w Y następująco:

1. niech $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ będzie takie, że $d_X(\nu(t_k), \nu(t_{k+1})) \leq 1$
2. wtedy ciąg $f(\nu(t_n))$ jest $(L + C)$ -drogą, czyli $d_Y(f(\nu(t_k)), f(\nu(t_{k+1}))) \leq L + C$ dla każdego k
3. łączymy te punkty kolejno odcinkami geodezyjnymi w Y

W ten sposób dostajemy ciągłą drogę ν_f w Y zawierającą się w $(L + C)$ -otoczeniu obrazu $f(\nu[a, b])$ łączącą $f(\nu(a))$ z $f(\nu(b))$. Gdy $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$ jest ciągłym odwzorowaniem, to ν_f jest ciągłym odwzorowaniem o obrazie zawierającym się w $(L + C)$ -otoczeniu obrazu $f(\nu[0, \infty))$ i o początku w $f(\nu(0))$.

Lemat 2.13

Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie (L, C) -quasi-izometrią. Wówczas dla każdego zwartego $K \subseteq Y$ istnieje zwarty $K' \subseteq X$ taki, że dla każdej komponenty $C' \subseteq X - K'$ jej pogrubiony obraz $N_{L+C}[f(C')]$ ($N_R(A) = \{x \in X : d_X(x, A) \leq R\}$) zawiera się w pojedynczej komponencie C w dopełnieniu $X - K$.

Jeśli więc ν, ν' są współkońcowymi promieniami w X , to utworzone przez nie promienie ν_f i ν'_f również są współkońcowe. Chcemy sprawdzić, czy "końcówki" ν_f oraz ν'_f należą do tej

samej komponenty $X - K$.

Z założenia wiemy, że końcówki ν i ν' należą do tej samej komponenty C' w $X - K'$ (dla K' jak w lemacie wyżej). Czyli końcówka ν_f zawiera się w obrazie w N_{L+C} obrazu przez f końcówki ν , która z kolei zawiera się w $N_{L+C}(f(C')) \subseteq C$. Stąd ν_f jest współkońcowe z ν'_f . Mamy zatem przyporządkowanie $f_E : \rho^X / \sim^E \rightarrow \rho^Y / \sim^E$ zadane przez $f_E([\nu]) = [\nu_f]$. Mamy też podobne przyporządkowanie g_E idące w odwrotną stronę, gdzie $g : Y \rightarrow X$ jest "odwrotną" q.i..

Odwzorowanie $f_E : \rho^X / \sim^E \rightarrow \rho^Y / \sim^E$ jest ciągłe. Stąd f_E jest homeomorfizmem. Bierzemy bazowy zbiór U_K^C będący otoczeniem $[\nu_f]$, tzn. $K \subseteq Y$ jest zwarty i C jest nieograniczoną komponentą $Y - K$. Wtedy $\nu_f([R, \infty)) \subseteq C$. Znajdziemy wówczas bazowy $U_{K'}^{C'}$ zawierający $[\nu]$ taki, że $f_E(U_{K'}^{C'}) \subseteq U_K^C$. Niech $K' \subseteq X$ jak w lemacie wyżej i niech C będzie tą nieograniczoną komponentą w $X - K'$ dla której $\nu([R, \infty)) \subseteq C'$. Wówczas C jest dokładnie tą komponentą w $Y - K$ w której zawiera się $N_{L+C}(f(C'))$. $f_E(U_{K'}^{C'}) \subseteq U_K^C$. **DOKOŃCZYĆ BO COŚ SIĘ NIE MOGĘ SKUPIĆ**



30.10.2024 cos

Główne twierdzenie na dzisiaj:

Twierdzenie 2.14: Freudanthal-HopfSkończenie generowalna grupa G ma 0, 1, 2 lub nieskończenie wiele końców.Gdy $|\text{Ends}(G)| = \infty$, to $|\text{Ends}(G)|$ jest przestrzenią bez punktów izolowanych - w szczególności mamy continuum. W istocie, $\text{Ends}(G)$ jest wtedy zbiorem Cantora.

Zanim przejdziemy dalej, warto wiedzieć kilka rzeczy o zbiorze Cantora, np. jak jest on charakteryzowany w matematyce:

- 😊 jest to jedyna z dokładnością do homeomorfizmu przestrzeń metryczna, która jest całkowicie niespójna (0-wymiarowa), to znaczy, że każdy punkt posiada bazę otoczeń otwarto-domkniętych
- 🧠 nie ma on punktów izolowanych.

Niech $X = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$ będzie systemem odwrotnym zbiorów skończonych. Załóżmy, że wszystkie odwzorowania $f_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}$ są surjekcjami oraz $\forall \lambda \in \Lambda \forall x \in X \forall \mu > \lambda$ takie, że $|f_{\lambda, \mu}^{-1}(x)| \geq 2$ to wówczas $\varprojlim X$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. To znaczy, że X rozdziela się w każdym kroku na co najmniej dwie części dokładnie tak jak zbiór Cantora.

Dowód

Wiemy, że $|\text{Ends}(G)| = 0, 1, 2$ jest możliwe, bo 0 końców mają grupy skończone, 1 ma \mathbb{Z}^2 , a \mathbb{Z} ma końców 2 sztuki.

Załóżmy, że $|\text{Ends}(G)| \geq 3$. Oznacza to, że dla $X = \text{Cay}(G, S)$ istnieje zwarty $K \subseteq X$ taki, że Π_K^X ma co najmniej 3 elementy (tzn. $X - K$ ma co najmniej 3 nieograniczone komponenty spójności).

Naszym celem jest pokazanie, że dla dowolnego $L \subseteq X$ zwanego i dowolnej nieograniczonej komponenty C w $X - L$ istnieje większy zbiór $L \subseteq L' \subseteq X$ oraz nieograniczone komponenty $C_1 \neq C_2$ w $X - L'$ takie, że $C_1, C_2 \subseteq C$ (czyli $f_{LL'}(C_i) = C$ dla $i = 1, 2$).

Ustalmy zwarty $L \subseteq X$ oraz nieograniczoną komponentę C w $X - L$. Niech $M \subseteq X$ będzie zbiorem z definicji kozwartości działania $G \curvearrowright X$, tzn. takim, że

$$\bigcup_{g \in G} gM = X.$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $K \subseteq X$

OBRAZEK

Niech $x_0 \in C$ będzie takim punktem, że $d(x_0, L) \geq \text{diam} L + 2\text{diam} M$. Niech teraz $g_0 \in G$

będzie taki, że $x_0 \in g_0M$. Wtedy ponieważ $\text{diam}(g_0M) = \text{diam}(M)$, mamy $d_X(L, g_0M) \geq \text{diam}M$ ale też $\geq \text{diam}L$. Więc tym bardziej $d_X(L, g_0K) \geq \text{diam}M$ ale też $\text{diam}L$.

Twierdzimy, że $g_0K \subseteq g_0M \subseteq C$ oraz **no i spadło mi sie z rowerka**

Dowód (3)

Założmy, że komponenty C_1, \dots, C_m są rozłączne z L , bo $L \subseteq C_0$. Więc każda z nich zawiera się w pojedynczej komponentce $X - L$. Każda spośród C_1, \dots, C_m posiada punkty dowolnie bliskie zbioru g_0K , bo np. pierwszy punkt na geodezyjnej od punktu $a \in C_i$ do punktu $b \in g_0K$ nienależący do C_i musi należeć do g_0K , czyli punkty leżące w C

Skoro C_i zachacza o C , to musi być zawarte w C .

Dla ukończenia realizacji CELU (i dowodu twierdzenia) weźmy $L' = L \cup g_0K$. Wtedy C_1, \dots, C_m są komponentami w $X - L'$.



Dalsze wyniki:

- ☞ Grupa ma 2 końce \iff jest wirtualnie \mathbb{Z} (zawiera \mathbb{Z} jako podgrupę skończonego indeksu \equiv jest współmierna z \mathbb{Z})
- ☞ Jeśli $|\text{Ends}(G)| = \infty$, to G rozkłada się w sposób nietrywialny i nie 2-końcowy nad skończoną podgrupą H , tzn. $G = G_1 \star_H G_2$ i $[G_i : H] \geq 3$ dla przynajmniej jednego i , lub $G = \star_H G_0$ (HNN-rozszerzeniem), $\phi_i : H \hookrightarrow G_0$, $[G_0 : \phi_i(H)] \geq 2$ dla pewnego i .