Lista 3: Reprezentacje i stany.

Matematyka nieprzemienna 2024/25

1. Niech G będzie grupą skończoną. Definiujemy $\mathbb{C}[G] := \{f : G \to \mathbb{C}\}$ oraz działania

$$f_1 \star f_2 = (\sum_{g\in G} f_1(g)\delta_g) \star (\sum_{h\in H} f_2(h)\delta_h) := \sum_{g,h} f_1(g)f_2(h)\delta_{gh},$$
$$f^* = (\sum_{g\in G} f(g)\delta_g)^* := \sum_{g\in G} \overline{f(g)}\delta_{g^{-1}}$$

   (a) Sprawdź, że splot $\star$ jest działaniem łącznym.

   (b) Sprawdź, że $*$ jest inwolucją na $\mathbb{C}[G]$.

   (c) Podaj przykład grupy, dla której norma $\|f\|_1 = \|\sum_{g\in G} f(g)\delta_g\|_1 := \sum_{g\in G} |f(g)|$ nie spełnia warunku C*.

   (d) Wykaż, że $\mathbb{C}[G]$ jest algebrą przemienną wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.

   (e) Pokaż, że $\tau(\sum_{g\in G} f(g)\delta_g) := f(e)$ jest stanem na $\mathbb{C}[G]$.

2. Wykaż, że jeśli S jest podzbiorem C*-algebry A zamkniętym na inwolucję ($S^* \subset S$), to komutant $S' := \{x \in A\colon sx = xs$ dla każdego $s \in S\}$ jest C*-podalgebrą.

3. Niech π będzie reprezentacją A na H i niech W będzie domkniętą podprzestrzenią H. Niech P oznacza rzut ortogonalny na W. Pokaż, że:

   (a) jeśli W jest niezmiennicza, to $W^\perp$ jest niezmiennicza;

   (b) W jest niezmiennicza na A wtw, gdy dla każdego $x \in A$ zachodzi $\pi(x)P = P\pi(x)$;

4. Niech $\pi : A \to B(H)$ bedzie reprezentacją A na przestrzeni Hilberta H i niech $v \in H$ ma normę 1. Wykaż, że odwzorowanie
$$\tau(x) := \langle v, \pi(x)v\rangle, \quad x \in A$$
jest stanem na A.

5. Niech τ będzie wiernym stanem na C*-algebrze A. Wykazać, że

   (a) $\langle x, y\rangle := \tau(x^*y)$ definiuje iloczyn skalarny na A,

   (b) odwzorowanie $\lambda : A \ni x \mapsto \lambda_x \in B(A)$, $\lambda_x(y) = xy$ definiuje wierną reprezentację A.