# Kombinatoryka

Weronika Jakimowicz

**Zadanie 1.** Niech $p_n = \binom{2n}{n}2^{-2n}$ oraz $s_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$. Pokaż, że $s_n = (2n+1)p_n$. Który z ciągów, $\frac{s_n^2}{n}$ czy $\frac{s_n^2}{n+1}$, jest rosnący, a który malejący?

$$p_0 = 1$$
$$p_1 = \frac{1}{2}$$
$$p_2 = \frac{2}{3}$$
$$s_0 = p_0 = 1 = (2 \cdot 0 + 1)p_0$$
$$s_1 = p_0 + p_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = (2+1)p_1$$

*Indukcja?*

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} p_k = \sum_{k=0}^{n} p_k + p_{n+1} = \\ &= (2n+1)p_n + p_{n+1} = (2n+1)\binom{2n}{n}2^{-2n} + \binom{2n+2}{n+1}2^{-(2n+1)} = \\ &= 2(n+1)\frac{(2n+2)(2n+1)}{2 \cdot 2(n+1)(n+1)}\binom{2n}{n}2^{-2n} + \binom{2n+2}{n+1}2^{-2(n+1)} = \\ &= 2(n+1)\binom{2n+2}{n+1}2^{-2(n+1)} + \binom{2n+2}{n+1}2^{-2(n+1)} \end{aligned}$$

*Ten z n w mianowniku rośnie, a z $(n+1)$ - maleje.*

**Zadanie 2.** Niech

$$P_n = \left\{ (a_i)_{i=1}^{2n} \ : \ a_i = \pm 1, \ \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0 \right\}$$

Oblicz $|P_n|$

*To nie poludzku napisana ilość ciągów długości $2n$ które sumują się do $0$. Czyli $\binom{2n}{n}$.*

**Zadanie 3.** Niech $Z$ będzie zbiorem o $n$ elementach. Na ile sposobów można wybrać $A \subseteq B \subseteq Z$? Zakładamy, że każdy zbiór zawiera siebie i zbiór pusty.

*Wybieramy najpierw k-elementowy A na $\binom{n}{k}$ sposobów, a potem z reszty na $2^{n-k}$ dobieramy elementy do B. Całość to suma iloczynu i wychodzi ostatecznie $3^n$.*

**Zadanie 4.** Pokaż, że $2^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$.

*Pokaż, że dla każdego ciągu $(c_i)_{i=1}^{2n}$ istnieje jedyne takie $0 \leq k \leq n$, że $(c_i)_{i=1}^{2k}$ jest ciągiem $\pm 1$ sumującym się do $0$ oraz $(c_{i-2k}^{2(n-k)})_{i=1}$ nie ma zerującego się podciągu*

**Zadanie 5.** Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów $Z$ o tej własności, że żadne dwie odległości punktów zbioru $Z$ nie są równe. Punkty $A$ i $B$ należące do $Z$ łączymy wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ jest punktem najbliższym $B$ lub $B$ jest punktem najbliższym $A$. Udowodnić, że żaden punkt zbioru $Z$ nie będzie połączony z więcej niż pięcioma innymi.

*Kąt między dwoma takimi ziomkami jest większy niż $60°$.*

**Zadanie 6.** Płaszczyznę pokryto kołami o jednakowym promieniu w ten sposób, że środek każdego z tych kół nie należy do żadnego innego koła. Dowieść, że każdy punkt płaszczyzny należy do co najwyżej pięciu kół.

*Nie wprost - zakładamy, że punkt $A$ leży w kołach o środkach $O_1$, $O_2$, ..., $O_6$. Wtedy jeden z kątów $O_iAO_j$ ma nie więcej niż $60°$, bo jakieś sześć się dodaje do $360$ - jak po równo rozłożymy, to mamy po $60$ na każdy.*

*Czyli mamy trójkąt $O_iAO_j$ w którym odcinek $O_iO_j$ nie jest najdłuższy (bo kąt naprzeciwko $\leq 60$). Czyli BSO $O_iA \geq O_iO_j$ i mamy, że $O_j$ jest w okręgu o środku $O_i$.*

**Zadanie 7.** Żaba skacze po stawie, na którym pływa $8$ liści ułożonych w okrąg. Na ile sposobów może przeskoczyć na najbardziej odległy od siebie liść w $2n$ skokach?

*Tak naprawdę możemy patrzeć na $n$ kroków i albo stoimy w miejscu, albo przemieszczamy o dwa (to sensowny krok). Rysujemy wtedy czworokąt i mamy cztery równania rekurencyjne, na ile sposobów możemy w $n$ kroków dostać się na każdy z tych czterech wierzchołków.*

**Zadanie 8.** Udowodnić, że dla liczby naturalnej $n$ większej od $1$ następujące warunki są równoważne:

a) $n$ jest liczbą parzystą

b) istnieje permutacja $(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ zbioru $\{0, 1, ..., n-1\}$ o tej własności, że ciąg reszt z dzielenia przez $n$ liczb $a_0$, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$,..., $a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}$ jest też permutacją tego zbioru.

*$a \implies b$*

$$a_i = \begin{cases} i & i \text{ nieparzyste} \\ n - i & i \text{ parzyste} \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{2i} a_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2i-1} + a_2 + a_4 + \dots + a_{2i} =$$
$$= 1 + 3 + \dots + (2i-1) + (n-2) + (n-4) + \dots + (n-2i) =$$
$$= 2 + 4 + \dots + 2i - i + n \cdot i - 2 - 4 - \dots - 2i = i(n-1)$$

$$\sum_{k=0}^{2i+1} a_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2i+1} + a_2 + a_4 + \dots + a_{2i} =$$
$$= 1 + 3 + \dots + (2i+1) + (n-2) + (n-4) + \dots + (n-2i) =$$
$$= 2 + 4 + \dots + 2i + (2i+1) - i + n \cdot i - 2 - 4 - \dots - 2i =$$
$$= i(n+1) + 1$$

*$b \implies a$*

*Po pierwsze zauważamy, że musi być $a_0 = 0$, bo inaczej $\sum_{k=0}^{i} a_k = \sum_{k=0}^{i+1} a_k$ (jeśli $a_{i+1} = 0$).*

*Dalej wiemy, że żadna z sum $\sum_{k=0}^{i} a_k$ nie może być podzielna przez n. Czyli w szczególności*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

*nie może być podzielne przez n, czyli $\frac{n-1}{2}$ nie jest całkowite.*

**Zadanie 9.** Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka za pomocą *n* cięć nożem? Zakładamy, że każde cięcie jest wyznaczone przez płaszczyznę przecinającą kawałek sera.

*Zaczynamy od rozwiązania 2D.*

$$L_n = \text{największa liczba obszarów na które n prostych dzieli płaszczyznę}$$

*Rysując n-tą prostą przetniemy $(n-1)$ prostych, które do tej pory narysowaliśmy. W ten sposób tworzymy n nowych obszarów. Czyli mamy*

$$L_n = L_{n-1} + n = n + (n-1) + L_{n-2} = \dots = n + (n-1) + \dots + 1 + L_0 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

*Teraz przechodzimy do 3D i oznaczamy zależność $P_n$. n-ta płaszczyzna przecina poprzednie $(n-1)$ i tym samym tworzy $(n-1)$ prostych. Nad każdym regionem płaszczyzny wisi nowy obszar przestrzeni 3D, czyli relacja to*

$$P_n = P_{n-1} + L_{n-1}.$$

*Jak rozwiążemy tę rekurencję, to dostajemy $\frac{n^3+5n+6}{6}$.*

**Zadanie 10.** W turnieju szachowym uczestniczy $2n$ zawodników, przy czym każdych dwóch spośród nich rozgrywa między sobą co najwyżej jedną partię. Dowieść, że taki przebieg rozgrywek, w którym żadna trójka uczestników nie rozgrywa trzech partii między sobą jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wszystkich partii rozegranych w turnieju nie przekracza $n^2$.

*Żadna trójka uczestników $\iff$ liczba wszystkich partii nie przekracza $n^2$.*

$\Longleftarrow$ *Dzielimy pysiów na dwa rozłączne zbiory, wtedy mamy $n^2$ parowań między tymi zbiorami. Wtedy każdy gra co najwyżej jedną rundę ze sobą i nie ma trójek.*

$\Longrightarrow$ *indukcja po $n$. Gdy $n = 2$ to mamy $4$ uczestników. Pierwszy mecz to dowolne pary, przegrani grają ze sobą tak samo jak wygrani. Mamy $4$ rozgrywki i śmiga.*

*Mamy teraz $2(n+1)$ uczestników. Dwóch, $X$ oraz $Y$, oddzielamy i pozostałych $2n$ potrafimy rozegrać tak jak trzeba, czyli mamy nie więcej niż $n^2$ meczów. Oczywiście, $X$ gra z $Y$. Gdyby ilość meczów rozegranych przez $X$ oraz $Y$ z pozostałymi przekraczała $2n$, to wtedy oboje zagraliby z kimś razem.*

**Zadanie 11.** Każdemu wierzchołkowi sześcianu przyporządkowano liczbę $1$ lub $-1$, a każdej ścianie - iloczyn liczb przyporządkowanych wierzchołkom tej ściany. Wyznaczyć zbiór wartości, które może przyjąć suma $14$ liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom.

*tutaj dzbanie https://archom.ptm.org.pl/?q=node/554*

**Zadanie 12.** Ile jest połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2k$-kąta tak, by odpowiadające mu przekątne (lub boki) nie przecinały się.

*to liczba catalana jest*

$$C_k = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1}$$

*czy też*

$$C_k = \sum_i \binom{k}{2i} C_i 2^{n-2i}$$

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i}$$

*wybieramy wierzchołek, łączymy go z czymś i liczymy na lewo i na prawo od tej przekątnej.*

**Zadanie 13.** Niech $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_s^{n_2}$, $\phi$ będzie funkcją Eulera i

$$\psi(n) = \mathrm{lcm}(\phi(p_1^{n_1}), \phi(p_2^{n_2}), ..., \phi(p_s^{n_2})).$$

Udowodnij, że dla $a$ względnie pierwszego z $n$ zachodzi $n | a^{\psi(n)} - 1$.

*Mamy $\phi(p_i^{n_i}) = p_i^{n_i} - p_i^{n_i-1}$, bo wykluczamy wszystkie możliwe wartości gcd. I teraz pewnie chcemy wykorzystać fakt, że jeśli a jest względnie pierwsze z n, to $a^{\phi(n)} - 1$ jest podzielne przez n. Jest też fakt, że $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n) \cdot gcd\phi(gcd)$, które się z kolei udowadnia $\phi(n) = n\prod(1 - \frac{1}{p_i})$ dla $p_i$ w rozkładzie n.*

**Zadanie 14.** Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono $n^2$ różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór $n$ pól szachownicy nazwiemy dopuszczalnym, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samum wierszu ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa. Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

*nie chce mi sie pisac https://archom.ptm.org.pl/?q=node/391*

**Zadanie 15.** Dane są karty $3$ pola na $3$. W każdym z pól możemy zrobić dziurkę. Karty są na tyle symetryczne, że możemy je obracać wokół środka i odwracać na drugą stronę nie wiedząc potem w jakiej pozycji były one na początku. Pokaż, że istnieje $8$ rozróżnialnych kart $3 \times 3$ z dwoma dziurkami. Narysuj te karty.

*Można to zrobić Korzystając z liczby orbit etc. Tzn. $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|X^g|$ czyli ilość orbit to $\frac{1}{|G|}$ suma ilości elementów niezmienniczych na każdy z elementów grupy.*