

Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Contents

1	Wstępy	1
02.10.2024	Grafy Cayleya	1
1.	Metryka słów	1
2.	Graf Cayleya	1

1. Wstępy

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmiennicza**, czyli $(\forall \gamma \in G) ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

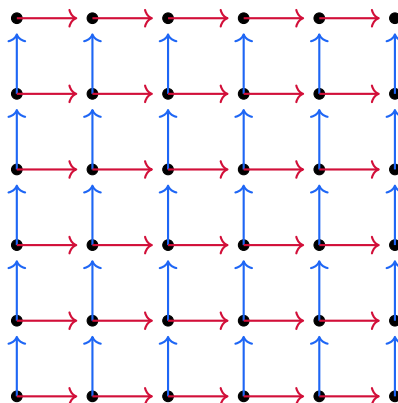
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

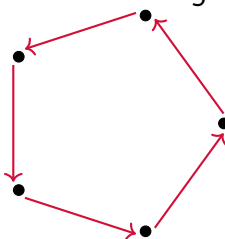
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez **automorfizmy zachowując krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami $g \xrightarrow{s} gs$ pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się $\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs$.

Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie (lewa-niezmienniczość).