Lista 2: Widmo i promień spektralny. Charaktery i ideały.

Matematyka nieprzemienna 2024/25

Niech A będzie algebrą C* (z jedynką) i niech $x \in A$. Spektrum/widmem elementu x nazywamy zbiór

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda 1_A - x \notin G(A)\} \subset \mathbb{C}.$$

Promieniem spektralnym elementu x nazywamy liczbę

$$r(x) := \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Charakterem na A nazywamy funkcjonał $h : A \to \mathbb{C}$, który jest liniowy, multiplikatywny i nie wszędzie równy zero. Przez Δ oznczamy zbiór wszystkich charakterów na A.

Niech A będzie przemienną algebrą C* (z jedynką). Podzbiór J algebry A nazywamy *ideałem*, jeśli jest poprzestrzenią liniową A oraz dla dowolnych $x \in A$ i $y \in J$ zachodzi $xy \in J$. Ideał nazywamy *właściwym*, gdy $J \neq A$. Ideał nazywamy *maksymalnym*, gdy jest właściwy i nie jest zawarty w żadnym większym ideale właściwym.

---

1. Wykazać następujące własności widma i promienia spektralnego:
   (a) $\sigma(x) \subset \bar{K}(0, \|x\|)$, $r(x) \leq \|x\|$,
   (b) $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} := \{\bar{\lambda}\colon \lambda \in \sigma(x)\}$,
   (c) $x \in G(A) \Rightarrow \sigma(x^{-1}) = \big(\sigma(x)\big)^{-1} := \{\frac{1}{\lambda}\colon \lambda \in \sigma(x)\}$,
   (d) $xx^* = x^*x \Rightarrow r(x) = \|x\|$,
   (e) $xx^* = x^*x = 1 \Rightarrow \sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = 1\}$.

2. Wykazać, że w przemiennej algebrze C*:
   (a) żaden ideał właściwy nie zawiera elementów odwracalnych;
   (b) domknięcie ideału jest ideałem;
   (c) ideał maksymalny jest domknięty.

3. Wykazać, że jeśli h jest charakterem na A (algebrze C*), to
   (a) $h(1_A) = 1$ oraz $h(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in G(A)$;
   (b) $\ker h$ jest ideałem maksymalnym w A.

4. Pokazać, że w algebrze $C(X)$ ewaluacje (czyli odwzorowania $C(X) \ni f \to f(x_0) \in \mathbb{C}$, gdzie $x_0 \in X$) są charakterami.

5. Niech A będzie przemienną algebrą C*, $\phi : A \to \mathbb{C}$ funkcjonałem liniowym. Pokaż, że $V_\phi := \{y \in A\colon \phi(xy) = 0 \text{ dla każdego } x \in A\}$ jest największym (w sensie inkluzji) ideałem w A, zawartym w $\ker \phi$.

6. Niech $F(X)$ oznacza przestrzeń funkcji z X do $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania, mnożenia i mnożenia przez skalar po współrzędnych. Pokazać, że odwzorowanie

$$\Phi : A \ni x \to \hat{x} \in F(\Delta), \quad \hat{x}(h) = h(x)$$

jest liniowe, multiplikatywne i zachowuje jedynkę.