Lista 5

początki

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1

Dla $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_{>0}$ obliczyć
$$\dim_K \left[K[X_1, ..., X_n]/(X_1^{k_1}, ..., X_n^{k_n})\right]$$

Atiyah i MacDonald mówią, że **jeśli $\varphi : A \to B$ jest surjekcją, to domknięty zbiór $V(\ker \varphi) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ jest homeomorficzny ze $\mathrm{Spec}(B)$.**

Weźmy dowolny ideał pierwszy $\mathfrak{p} \in V(\ker \varphi)$ i niech $xy \in \varphi(\mathfrak{p})$. Z surjektywności φ znajdujemy $a, b \in A$ takie, że $\varphi(a) = x$ oraz $\varphi(b) = y$. Możemy też znaleźć $c \in \mathfrak{p}$ takie, że $\varphi(c) = xy \in \varphi(\mathfrak{p})$. Naszym celem jest włożenie a lub b do $\mathfrak{p}$.
$$\varphi(c) = xy = \varphi(a)\varphi(b),$$
odejmując stronami mamy
$$0 = \varphi(c) - \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(c - ab),$$
co jest w jądrze φ. Ale $\mathfrak{p}$ był ideałem zawierającym $\ker \varphi$ (korzystam z definicji $V(E) = \{\mathfrak{q} : E \subseteq \mathfrak{q} \text{ i } \mathfrak{q} \text{ pierwszy}\}$), czyli $c - ab \in \mathfrak{p}$ tak samo jak c. Czyli $-(c + (c - ab)) = ab \in \mathfrak{p}$ i tutaj już mamy co chcieliśmy.

Z drugiej strony, dowolny ideał pierwszy $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B$ cofa się przez φ do ideału pierwszego w A, bo $xy \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \implies \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in \mathfrak{q} \implies x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ lub $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Ponieważ $0 \in \mathfrak{q}$, to takie cofnięcie zawiera też jądro $\ker \varphi$. Czyli $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\ker \varphi)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, B \arrow[r, "\mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & V(\ker \varphi) \arrow[r, "\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p})"] & \mathrm{Spec}\, B
\end{tikzcd}$$

Mamy ładne ilorazowe odwzorowanie
$$K[X_1, ..., X_n] \twoheadrightarrow K[X_1, ..., X_n]/(X_1^{k_1}, ..., X_n^{k_n})$$
którego jądro jest dość widoczne. Ideał pierwszy zawierający $(X_1^{k_1}, ..., X_n^{k_n})$ to $(X_1, ..., X_n)$ i jest on zarazem ideałem maksymalnym w $K[X_1, ..., X_n]$ (jak wydzielimy to znikają zmienne i mamy ciało).

Czyli najdłuższy ciąg ideałów pierwszych w badanym pierścieniu ma długość 1?

Zadanie 2

Niech $I, J \trianglelefteq R$ oraz $I \subseteq \sqrt{J}$. Udowodnić, że jeśli ideał I jest skończenie generowany, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $I^n \subseteq J$.

Niech I będzie generowane przez $u_1, ..., u_k$. Niech $t_i \in \mathbb{N}_{>0}$ będą takie, że $u_i^{t_i} \in J$ (bo $I \subseteq \sqrt{J}$). Pewnie niezgrabnie można wziąć $N = t_1 \cdot ... \cdot t_n$.

Ideał I^N jest generowany przez $\langle u_1^{i_1} \cdot ... \cdot u_n^{i_n} \ : \ \sum i_j = N\rangle$, bo każdy element to $\sum x_1 \cdot ... \cdot x_N$ dla $x_i \in I$ i one się rozpadają w kombinację liniową u_i.

Każdy generator I^N jest podzielny przez pewne $u_i^{t_i}$, bo tak duży wzięłam wykładnik N. Stąd każdy element I^N jest generowany przez elementy z J, czyli $I^N \subseteq J$.