

Teoria Kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1	Początek końca	1
24.02.2025	Podstawowe definicje	1
1.	Przykłady kategorii	1
2.	Funktory	2
25.02.2025	Produkty i koprodukty kategorii	5
1.	O obiektach początkowych i końcowych słów kilka	5
2.	(Ko)granice funktorów a (ko)produkty	6
3.	Obiekty i kategorie monoidalne	9
03.03.2025	Funktory dołączone	11
1.	Motywacja abstrakcyjnego nonsensu	11
2.	Dużo przykładów funktorów dołączonych	11
3.	Druga definicja	13
10.03.2025	Funktory dołączone własności	14
1.	Dowód równoważności	14
2.	Funktory dołączone a granice	16
3.	Moduły	18

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsensu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) \mathcal{C} składa się z:

- obiektów $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
 - $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$
 - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C),$$

które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczmy

$$\mathcal{C}_0 := \text{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako \mathcal{C}_1 będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii \mathcal{C} .

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria Set , której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0) , gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), f(x_0) = y_0$.

3. Top to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. $Toph$ to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in Ob(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

takie, że $F(x, 0) = f_0(x)$ oraz $F(x, 1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii $Toph$.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.

5. Kategoria $Hask$, której obiekty to typy w Haskellu, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji Rel , w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór

$$S \circ R = \{(x, z) : (\exists y \in Y) xRy \wedge ySz\},$$

gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".

7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X . Definiujemy wtedy kategorię \mathcal{C} o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X , a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a, b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pusty w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriami \mathcal{C} a \mathcal{D}

- każdemu obiektowi X kategorii \mathcal{C} przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii \mathcal{D}
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y)$ w kategorii \mathcal{D} taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

PrzykŁad

$Ab : Gr \rightarrow Ab$ to funktor miŁdzy kategoriŁŁ wszystkich grup a kategoriŁŁ grup abelowych, ktŁry grupie G przypisuje jej abelianizacjŁ $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategoriŁŁ odwrotnŁŁ** do kategorii \mathcal{C} rozumiemy kategoriŁŁ \mathcal{C}^{op} , ktŁrej

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X, Y)$ "odwracajŁ siŁ" $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$.

MŁwimy, Źe funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategoriŁŁ funktorŁw** miŁdzy kategoriami \mathcal{C} a \mathcal{D} , $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, ktŁrej obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, Źe dla dowolnych $X, Y \in Ob \mathcal{C}$ oraz $f : X \rightarrow Y$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

ZbiŁr morfizmŁw w tej kategorii oznaczmy $Nat(F, G)$ - **naturalne przeksztaŁcenia** funktora F w funktor G .

PrzykŁad

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przeksztaŁceniem miŁdzy funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: rŁwnowaŹnoŹ kategorii

Powiemy, Źe kategorie \mathcal{C} i \mathcal{D} sŁ **rŁwnowaŹne**, jeŹli istniejŁ funktory $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ takie, Źe zŁoŹenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykłąd

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k , $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k , $\text{Mat}^{\text{fin}}(k)$.

GRUPOID PODSTAWOWY - dla p. top X obiekty to punkty X , a morfizmy to klasy homotopii ścieżek; jak weźmiemy konkretny punkt i popatrzymy na morfizmy $x \rightarrow x$ to mamy grupę podstawową zbazowaną w tym punkcie; grupoid to funktor z p. top w kategorię kategorii (zawęzić: kat. grupoidów); wtedy funkcja ciągła to morfizm między dwoma grupoidami, a homotopia to naturalna transformacja

25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \rightarrow D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C : $\forall D \in \mathcal{C}_0 \quad |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

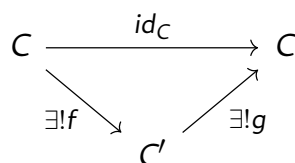
1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja \leq obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest \emptyset , a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Fakt 1.6

Obiekty końcowe i początkowe, jeśli istnieją, to są jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Niech C i C' będą obiektami końcowymi kategorii \mathcal{C} . Wiemy, że $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$, czyli komutujący diagram



daje $g \circ f = id_C$. Analogiczny diagram daje $f \circ g = id_{C'}$. Stąd f i g to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między C i C'

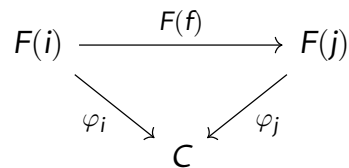


2. (Ko)granice funktorów a (ko)produkty

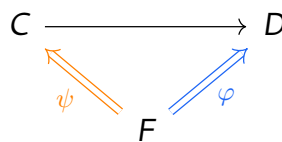
Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii \mathcal{I} myŹlimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, Źe funktor C jest stały, jeŹeli $C(i) = C$ dla kaŹdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla kaŹdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C , $\varphi : F \Rightarrow C$, czyli komutujące diagramy (kostoŹki)

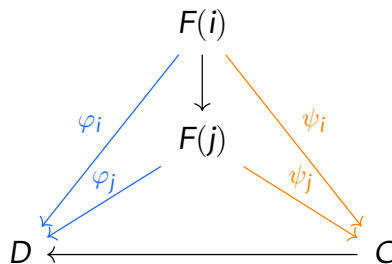


- a morfizmy to strzałki $C \rightarrow D$ takie, Źe diagram



komutuje.

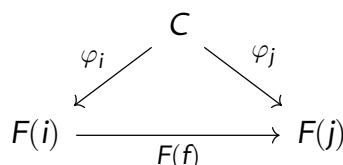
Diagram wyŹej moŹna rozpisać jako:



Definicja 1.7: kogranica funktora

Kogranicą (*granica prosta*) funktora F , $\varinjlim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyŹej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyŹej moŹemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia $\varphi : F \Rightarrow C$ moŹemy rozwaŹyć naturalne przekształcenia $\varphi : C \Rightarrow F$, czyli diagramy (stoŹki)



z morfizmami definiowanymi analogicznie.

Definicja 1.8: granica funktora

Granica (*granica odwrotna*) to obiekt koŹcowy powyŹszej kategorii stoŹk6w, $\varprojlim F$.

RozwaŹmy kategorię \mathcal{I} , która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$ będe funktorem, dla kt6rego $F(0) = A$, a $F(1) = B$. Niech φ oraz ψ będe parą naturalnych przekształceŹ, dla kt6rych

$$\begin{array}{ccccc} & & \varprojlim F & & \\ & \swarrow \varphi_0 & \uparrow \exists! f & \searrow \varphi_1 & \\ F(0) = A & \xleftarrow{\psi_0} & D & \xrightarrow{\psi_1} & F(1) = B \end{array}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo $\varprojlim F$ to obiekt koŹcowy. JeŹli weŹmiemy $\varprojlim F = A \times B$, a $\varphi_0 = \pi_A$ oraz $\varphi_1 = \pi_B$ będe rzutami i $f(d) = (\psi_0(d), \psi_1(d))$, to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna $A \sqcup B$, bo diagram

$$\begin{array}{ccccc} F(0) = A & \xrightarrow{\psi_0} & D & \xleftarrow{\psi_1} & F(1) = B \\ & \searrow \varphi_0 = i_A & \uparrow \exists! f & \swarrow \varphi_1 = i_B & \\ & & \varprojlim F = A \sqcup B & & \end{array}$$

gdzie $f(x) = \varphi_0(x)$, jeŹli $x \in A$ oraz $f(x) = \varphi_1(x)$ jeŹli $x \in B$, komutuje.

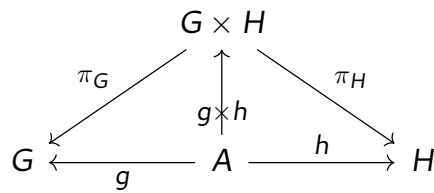
Definicja 1.9: (ko)produkt

Produktem obiekt6w A i B kategorii \mathcal{C} nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ dla \mathcal{I} oraz F jak wyŹej.

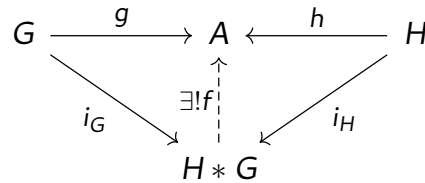
Koproduktem obiekt6w A i B kategorii \mathcal{C} nazywamy granicę odwrotną (granice) funktora $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$

Przykłady

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjaŹski dwóch grup, tak jak w kategorii zbior6w, tj. dla grup A, G, H komutuje diagram

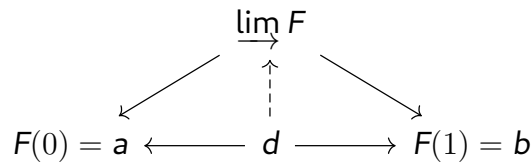


Koprodukt to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:



gdzie f nakłada na litery słów $G * H$ pochodzące z G morfizm g , a na litery pochodzące z H - morfizm h .

2. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow (P, \leq)$ z dwuobiektovej kategorii \mathcal{I} w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram



to znaczy, że $d \leq a$, $d \leq b$ oraz $d \leq \varinjlim F$. Żeby więc miało to sens dla dowolnego $d \leq a, b$ to $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$. Analogicznie dostajemy, że $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$.

3. Jeśli \mathcal{I} jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$, a granicą - nieskończona suma rozłączna $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$.

Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koprodukty są unikalne.

Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.



PrzykŁad

RozwaŹmy funktor $F : \mathcal{I}^{op} \rightarrow Grp$, gdzie $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$ taki, Źe dla kaŹdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i \rightarrow j)=q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie q to morfizm ilorazowy.

Liczby p -adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych rŹŹne od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby p -adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq a_i < p$. Okazuje siŹ, Źe całkowite liczby p -adyczne, \mathbb{Z}_p , moŹna zdefiniować jako granicę funktora F :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z}_p & & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow \\ \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{array}$$

Granica prosta takiego funktora jest trywialna, ale moŹemy rozwaŹyć inny funktor, z kategorii \mathbb{Z} z porzĄdkiem, tzn: $G : \mathbb{Z} \rightarrow Grp$ taki, Źe $G(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, natomiast strzałkę $n+1 \rightarrow n$ przekształcamy na odwzorowanie

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ni x \mapsto p \cdot x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Wtedy granicą prostą G jest C_{p^∞} - pierwiastki p^n -tego stopnia z 1, dla dowolnego n .

3. Obiekty i kategorie monoidalne

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{\star \times id} & M^2 \\ id \times \star \downarrow & & \downarrow \star \\ M^2 & \xrightarrow{\star} & M \end{array}$$

co znaczy, Źe działanie jest łączne.

Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech \mathcal{C} bŹdzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ bŹdzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \rightarrow M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \rightarrow M$ takie, Źe komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 M^3 & \xrightarrow{\mu \times id} & M^2 \\
 id \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M \\
 \\
 M & \xrightarrow{\varepsilon \times id} & M^2 \\
 id \times \varepsilon \downarrow & \searrow = & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.

Obiekt monoidalny w kategorii \mathcal{Cat} nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria \mathcal{C} z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalną.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in \text{End}(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób.
Funktor $T \in \text{End}(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \rightarrow T, \varepsilon : Id \rightarrow T$, nazywa się **monadą**.

03.03.2025 Funktory doŁĄczone

1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu

Niech V bęĄdzie przestrzeniĄ wektorowĄ nad ciałem k , a B wybranĄ jej bazĄ. Dowolne odwzorowanie $B \rightarrow V$ możemy rozszerzyć na odwzorowanie liniowe $k[B] = V \rightarrow V$. To znaczy, mamy izomorfizm zbiorów

$$\text{Hom}(B, V) \cong \text{Hom}(V, V).$$

W języku abstrakcyjnego nonsensu możemy zdefiniować dwa funktory,

$$\text{Set}(-, U(-)) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{Vect}_k(k[-], -) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set},$$

gdzie $U : \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$ to funktor zapominający strukturę przestrzeni wektorowej, między którymi istnieją naturalne izomorfizmy.

$$\text{Set}(-, U(-)) \cong \text{Vect}_k(k[-], -)$$

Definicja 1.12: funktory doŁĄczone

Niech $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ oraz $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ bęĄdĄ funktorami. Powiemy, że L jest **lewo doŁĄczony** do funktora R , a R **prawo doŁĄczony** do L , jeśli funktory

$$\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$$

sĄ naturalnie izomorficzne. TakĄ parę funktorów doŁĄczonych oznaczamy $L \dashv R$.

2. Dużo przykładów funktorów doŁĄczonych

1. Niech $R : \text{Set}_* \rightarrow \text{Set}$ bęĄdzie funktorem z kategorii zbiorów z bazowym w kategorię zbiorów, który zapomina o punkcie bazowym. Chcemy teraz znaleźć funktor $L : \text{Set} \rightarrow \text{Set}_*$, który bęĄdzie do niego lewo doŁĄczony. Niech $L(X) = X \sqcup \{X\}$ (lub bardziej obrazowo: $X \sqcup \{*\}$), gdzie y_0 pošemy na $\{X\}$, to znaczy doklejamy do X singleton i staje się on punktem wyróżnionym.

Oba funktory sĄ różnowartościowe na obiektach, więc wystarczy przekonać się, że

$$\text{Set}_*(LX, (Y, y_0)) \cong \text{Set}(X, R(Y, y_0))$$

jest izomorfizmem. Dowolna funkcja $X \rightarrow Y$ rozszerza się przez postanie $\{X\} \mapsto y_0$ na funkcję $(X, \{X\}) \rightarrow (Y, y_0)$.

2. Podobna sytuacja ma miejsce, kiedy szukamy lewo dołączony funktor do $R : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Rng}$ między kategorią pierścieni z jedyneką, a wszystkimi pierścieniami. Definiujemy funktor

$$L : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ring}$$

jako doklejenie \mathbb{Z} , $L(S) = \mathbb{Z} \oplus S$ z działaniem $(n, s)(n', s') = (nn', ns' + ss' + n's)$, wtedy $(1, 0_S)$ jest jedyneką w nowym pierścieniu. Pozostaje przyjrzeć się co się dzieje z morfizmami, skoro

$$\mathbf{Rng}(S, RT) \cong \mathbf{Ring}(LS, T).$$

Dowolny morfizm $\varphi : S \rightarrow RT$ wystarczy, że trzyma element neutralny ze względu na dodawanie i jest addytywny. Możemy go rozszerzyć na morfizm, który całą pierwszą współzrędną $LS = \mathbb{Z} \oplus S$ posyła w $1_T \in T$, a drugą zgodnie z φ . W drugą stronę wystarczy obciąć morfizm do drugiej współzrędną.

3. Niech $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ będzie funktorem takim, że $\Delta(C) = (C, C)$. Zaczniemy od szukania funktora dołączonego do niego z prawej strony, czyli $R : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ takiego, że

$$\mathbf{Hom}(X, R(Y, Z)) \cong \mathbf{Hom}(\Delta(X), (Y, Z)).$$

Od razu narzuca się $R(Y, Z) = Y \times Z$, czyli zlepiamy współzrędną $\Delta(X)$ w jedną. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański w kategorii zbiorów jest produktem.

Funktor lewo dołączony musi zatem spełniać

$$\mathbf{Hom}(L(X, Y), Z) \cong \mathbf{Hom}((X, Y), \Delta(Z)),$$

czyli dowolną funkcję $(X, Y) \rightarrow (Z, Z)$ musimy umieć zapisać jako funkcję z pojedynczego zbioru, którym będzie suma rozłączna $L(X, Y) = X \sqcup Y$, czyli koprodukt w kategorii zbiorów.

Historia funktora Δ uogalnia się na dowolną kategorię, w której są produkty i koprodukty:

$$\text{koprodukt} \dashv \Delta \dashv \text{produkt}$$

4. Ustalmy zbiór $Y \in \mathbf{Set}_0$ i niech $R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem, który zbiorowi X przypisuje wszystkie funkcje z Y w ten zbiór, $R(X) = \mathbf{Set}(Y, X)$. Chcemy znaleźć funktor lewo dołączony $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ do R . Patrzymy na morfizmy i mamy

$$\mathbf{Set}(L(X), Z) \cong \mathbf{Set}(X, \underbrace{\mathbf{Set}(Y, Z)}_{R(Z)})$$

zbiór po prawej to funkcje z X w funkcje z Y w Z . Można to przedstawić jako funkcje $X \times Y \rightarrow Z$, czyli $LX = X \times Y$.

Technika tłumaczenia funkcji o więcej niż jednym argumentem na sekwencję funkcji nazywamy *currying*.

5. Analogicznie jak w poprzednim przykŝadzie, niech R będie pierŝcieniem (przemien-
nym z jednuką), W R -moduŝem i R funktorem $R : RMod \rightarrow RMod$ takim, ŝe $R(U) =$
 $Hom_R(W, U)$ będie zbiorom homomorfizmów R -moduŝów. Funktorem lewo-doŝczonym
do R będie wtedy $L(V) = V \otimes W$:

$$RMod(V, Hom_R(W, U)) \cong RMod(V \otimes W, U).$$

Uwaga: tensor produkt zwykle nie ma funktora lewo do siebie doŝczonego.

6. Zaŝoŝmy, ŝe kategoria \mathcal{C} ma produkty i ustalmy $X \in \mathcal{C}$. Rozwaŝmy funktor $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,
 $L(Y) = Y \times X$. Jeŝli kategoria \mathcal{C} posiada obiekty eksponencjalne, czyli wiemy jak uogólnić
na nią przestrzeń funkcji $X \rightarrow Y$ (oznaczane Y^X), to funktorem prawo doŝczonym do L
jest właŝnie funktor przypisujący obiektowi Y jego eksponens Y^X ,

$$\mathcal{C}(Y, Z^X) \cong \mathcal{C}(Y \times X, Z).$$

Przykŝadem takiej kategorii sŝ przestrzenie "core-compact".

W ramach kontrprzykŝadu rozwaŝmy funktor zapominania $U : FinGrp \rightarrow FinSet$, i zaŝoŝmy,
ŝe $L : FinSet \rightarrow FinGrp$ jest jego funktorem lewo doŝczonym. Niech p będie takŝ liczbŝ
pierwszŝ, ŝe $p > |L(1)|$ (wystarczy, ŝe sŝ względmie pierwsze). Wtedy

$$FinSet(1, U(\mathbb{Z}_p)) \cong FinGrp(L(1), \mathbb{Z}_p)$$

gdzie po lewej zbiór ma $|\mathbb{Z}_p| = p$ rŝżnych funkcji z singletona w zbiór elementŝ grupy \mathbb{Z}_p , a
po prawej mamy jedynie trywialny morfizm, bo ŝaden element $L(1)$ nie ma rzędu podzielnego
przez p , czyli nie moŝe przejŝć w ŝaden nietrywialny element \mathbb{Z}_p .

3. Druga definicja

Definicja 1.13: funktory doŝczone (naturalne transformacje)

Rozwaŝmy parę funktorŝ

$$\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \end{matrix} \mathcal{D}.$$

Powiemy, ŝe L jest lewo doŝczony do R i na odwrot, jeŝli istniejŝ dwie naturalne trans-
formacje

$$\varepsilon : LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}} \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

takie, ŝe komutujŝ diagramy

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\ & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\ & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\ & & R \end{array}$$

η nazywamy **unit**, a ε to **counit**.

10.03.2025 Funktory dołączane własności

1. Dowód równoważności

Twierdzenie 1.14

Dwie definicje funktorów dołączonych z poprzedniego wykładu są równoważne, tzn. naturalne transformacje H, E

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(L-, -) & \xleftarrow{E} & \mathcal{C}(-, R-) \\ & \xrightarrow{H} & \end{array}$$

istnieją \iff istnieją dwie naturalne transformacje $\varepsilon : LR \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ oraz $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow RL$ dla których komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\ & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\ & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\ & & R \end{array}$$

Dowód

Niech $f : c' \rightarrow c$ będzie morfizmem w \mathcal{D} , a $g : d' \rightarrow d$ - morfizmem w \mathcal{C} .

Zacznijmy od zdefiniowania szukanych przekształceń naturalnych na obiektach. Niech η_c

$$\mathcal{D}(Lc, Lc) \xrightarrow{H_{c,Lc}} \mathcal{C}(c, RLc)$$

$$1_{Lc} \longrightarrow \eta_c = H(1_{Lc})$$

a ε_d definiujemy analogicznie używając E .

W drugą stronę, $H(\varphi)$ definiujemy mając η oraz ε . Dla $\varphi : Lc \rightarrow d$ definiujemy

$$H(\varphi) := R\varphi \circ \eta_c,$$

które bierze coś z c i oddaje RLc . Z drugiej strony bierzemy $\psi : c \rightarrow Rd$

$$E(\psi) := \varepsilon_d \circ L\psi.$$

\implies

Zakładamy, że H i E są naturalne i pokazujemy naturalność η , czyli komutowanie diagramu

$$\begin{array}{ccc}
 RL(c') & \xleftarrow{\eta_{c'}} & 1_{c'}(c') \\
 RL(f) \downarrow & & \downarrow 1_{c'}(f) \\
 RL(c) & \xleftarrow{\eta_c} & 1_c(c)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 RLf \circ \eta_{c'} &\stackrel{\text{def. } \eta}{=} RLf \circ H(1_{Lc'}) = \\
 &\stackrel{\text{funktorialnoŝć } H}{=} H(Lf \circ 1_{Lc'}) = \\
 &= H(1_{Lc} \circ Lf) = \\
 &= H(1_{Lc}) \circ f = \\
 &\stackrel{\text{def. } \eta}{=} \eta_c \circ f.
 \end{aligned}$$

Analogicznie naleŝy sprawdzić naturalnoŝć ε .

Pozostaje jeszcze udowodnić, ŝe zdefiniowane przez nas η i ε spełnia warunek trójkąta w definicji, tzn. komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\
 & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\
 & & L
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\
 & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\
 & & R
 \end{array}$$

Ograniczymy się do sprawdzenia lewego diagramu.

$$\begin{array}{ccc}
 Lc & \xrightarrow{L(\eta_c)} & LRLc \\
 & \searrow 1_{Lc} & \downarrow \varepsilon_{Lc} \\
 & & Lc
 \end{array}$$

$$\varepsilon_{Lc} L(\eta_c) = E(1_{RLc}) L(\eta_c) = E(1_{RLc} \eta_c) = EH(1_{Lc}) = 1_{Lc}$$

\Leftarrow

Wychodzimy teraz z załoŝenia, ŝe $\eta : 1_c \Rightarrow RL$ i $\varepsilon : LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ to naturalne przekształcenia, czyli z komutowania diagramów

$$\begin{array}{ccc}
 c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & RLc' \\
 f \downarrow & & \downarrow RLf \\
 c & \xrightarrow{\eta_c} & RLc
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 d & \xleftarrow{\varepsilon_d} & LRd \\
 g \downarrow & & \downarrow LRg \\
 d' & \xleftarrow{\eta_{d'}} & LRd'
 \end{array}$$

dostajemy równoŝci

$$RLf \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

$$g \circ \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} \circ LRg.$$

Powinniŝmy najpierw pokazać, że H i E s naturalne. Zrobimy to tylko dla H . Interesuje nas diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(Lc, d) & \xrightarrow{H_{c;d}} & \mathcal{C}(c, Rd) \\ (Lf, g) \downarrow & & \downarrow (f, Rg) \\ \mathcal{D}(Lc', d') & \xrightarrow{H_{c';d'}} & \mathcal{C}(c', Rd') \end{array}$$

$$EH(\varphi) = E(R\varphi \circ \eta) = E(R\varphi)E(\eta) = \varepsilon LR\varphi \varepsilon L\eta$$



Twierdzenie 1.15

Istnieje bijekcja midzy zbiorem par naturalnych przekształce (H, E) oraz (η, ε) .

Dowód

TO DO



2. Funktory dołączone a granice

Twierdzenie 1.16

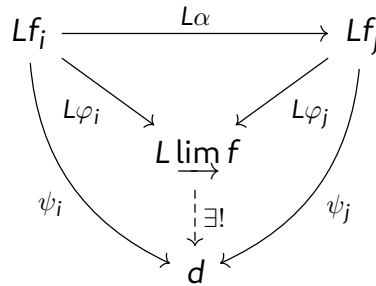
Niech $L \dashv R$ bdzie par funktor dołączonych. Wtedy L zachowuje granice proste, a R - granice odwrotne.

Przypomnijmy że kogranica (granica prosta) funktora $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ spełnia dla kadego g diagram

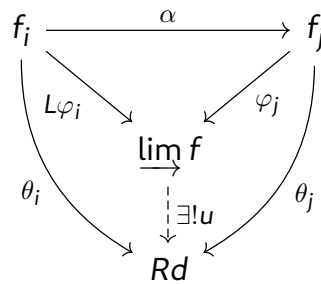
$$\begin{array}{ccc} f_i & \xrightarrow{\alpha} & f_j \\ \downarrow L\varphi_i & & \downarrow \varphi_j \\ & \lim f & \\ \downarrow \psi_i & \downarrow \exists! & \downarrow \psi_j \\ & g & \end{array}$$

Dowód

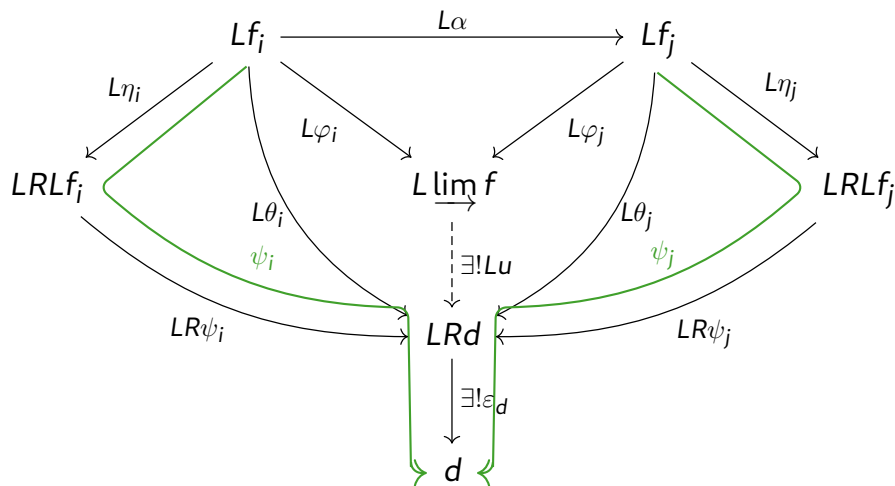
PokaŹemy tylko, Źe lewo dołĄczony funktor zachowuje kograncie, tj. dla dowolnego $d \in \mathcal{D}$ zachodzi diagram



Z uniwersalnej wlasnoŹci kograncicy mamy diagram



Nakładamy na niego funktor L . Potrzebujemy teŹ strzałek $L\eta_i : Lf_i \rightarrow LRLf_i$ przychodzących z naturalnej transformacji $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$. Dodatkowo wiemy, Źe $\varepsilon_d : LRd \rightarrow d$ istnieje i jest w dodatku jedyne. Mamy więc diagram



w którym długie zielone strzałki sĄ konsekwencją złoŹenia $\varepsilon_d \circ LR\psi_i = \psi_i$. Dostajemy więc $\varepsilon_d \circ Lu$ jako jednĄ strzałkĄ $L\varinjlim f \rightarrow d$ komutującĄ z ψ_i oraz ψ_j .



3. Moduły

Jeŝli R jest pierścieniem z 1, to powiemy, że M jest R -modułem, jeŝli

- $(M, +)$, jest grupą abelową
- oraz R działa na M tak, że

$$1x = x, \quad rsx = r(sx)$$

$$(r + s)(x + y) = (r + s)x + (r + s)y = rx + sx + ry + sy$$

Grupy abelowe to \mathbb{Z} -moduły. Przestrzenie liniowe nad ciałem k to k -moduły.

Definicja 1.17: moduł projektywny

Mówimy, że R -moduł P w kategorii R -modułów jest projektywny, jeŝli dla kaŝdego surjektywnego homomorfizmu $f: N \twoheadrightarrow M$ oraz kaŝdego homomorfizmu $g: P \rightarrow M$ istnieje homomorfizm modułów $h: P \rightarrow N$ taki, że $fh = g$. Innymi słowy, komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \exists h \nearrow & \downarrow f & \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Przykłady

Dla kaŝdego R oraz n wolny moduł R^n jest modułem projektywnym. Niech x_1, \dots, x_n będą generatorami R^n . Dla kaŝdego i wybieramy jeden element $n_i \in f^{-1}(g(x_i))$. Definiujemy $h(x_i) = n_i$.

Argument z przykłądu uogólnia się na stwierdzenie, że kaŝdy moduł jest **obrazem pewnego modułu projektywnego**.

Dualnie definiujemy moduły injektywne.

Definicja 1.18: moduł injektywny

Dla kaŝdego injektywnego $f: M \hookrightarrow N$ oraz dla kaŝdego $g: M \rightarrow Q$ istnieje $h: N \rightarrow Q$ takie, że komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & \nwarrow \exists h & \\ Q & & \end{array}$$

Przykład

Liczby wymierne \mathbb{Q} są injektywnym \mathbb{Z} -modułem.

Twierdzenie 1.19

Dla kaŹdego R -modułu M istnieje injektywny moduł Q taki, Źe $M \hookrightarrow Q$.

Dowód

ja tego nie znam?

