Rozgrzewka

Zadanie 1. Ile jest dwucyfrowych liczb parzystych? Ile trzycyfrowych, a ile stucyfrowych?

Zadanie 2. Ile liczb mniejszych od 1000 jest podzielnych przez 3 i 4?

Zadanie 3. Ile jest przestawień (nie)słowa LEWINKLODZKI?

Zadanie 4. A słowa MATEMATYKA?

Zadanie 5. Ile osób musiałoby urodzić się w Polsce jednego dnia, żeby zabrakło dla nich PESELi?

Zadanie 6. Ile jest przestawień liter ABC i cyfr 1234 tak, że najpierw stoją litery, a potem liczby? Ile jest przestawień, że litery nie stoją obok siebie?

Zadanie 7. W powiecie kłodzkim rejestracja samochodowa zaczyna się od DKL i ma potem ciąg 5 cyfr i liter, w którym wszystkie cyfry (których może być od 0 do 5) są zawsze przed literami. Ile jest możliwych rejestracji samochodów w powiecie kłodzkim?

Zadanie 8. Na ile sposobów można posadzić 150 uczniów przy 150-kątnym stole (lub okrągłym, jeśli takiego nie mamy pod ręką)?

Dwumian Newtona

Liczbę

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

nazywamy dwumianem Newtona. Warto kojarzyć tzw. trójkąt Pascala

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

który w wierszu n ma wartości $\binom{n}{k}$ dla k odpowiadającemu numerowi kolumny (licząc od $k = 0$ do $k = n$).

Zadanie 9. Chcemy się wszyscy na sali przywitać uściskiem dłoni. Ile zostanie wymienionych uścisków dłoni?

Zadanie 10. Chcemy wybrać k osób spośród 30. Na ile sposobów możemy to zrobić dla sensownych k?

Zadanie 11. W biegu niepodległości w Warszawie bierze udział 50 biegaczy. Ile jest możliwych układów na podium?

Zadanie 12. Rzucamy n rozróżnialnymi kośćmi. Na ile sposobów zobaczymy dokładnie 6 jedynek i 3 czwórki?

Zadanie 13. Zakładając, że jesteśmy po poniedziałku 4 XI 2024, zgadnij (warto spojrzeć na $\triangle$ Pascala) wzór na

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

i udowodnij go indukcyjnie.

Zadanie 14. Robert budowniczy buduje ciągi składające się z 1 i 2, które sumują się do liczby n. Ile takich ciągów może ułożyć?

Zadanie 15. Mamy przejść szachownice $n \times k$ z jednego wierzchołka do przeciwnego poruszając się skokami po bokach pól. Ile jest możliwych dróg?

Zadanie 16. Ile wynosi n, jeśli liczba permutacji zbioru mającego $(n+1)$ elementów jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru mającego n elementów?

Zadanie 17. Do windy na ośmiopiętrowym budynku wsiadło 5 osób. Na ile sposobów mogą opuścić na różnych piętrach windę?

Zadanie 18. Robert budowniczy buduje wieże wysokości n z czerwonych i niebieskich bloków o wymiarach $1 \times 1 \times 1$. Ile różnych wież może ułożyć?

Zadanie 19. Dodaj do siebie n pierwszych liczb naturalnych. Teraz dodaj do siebie kwadraty n pierwszych liczb naturalnych.

Zadanie 20. Jeśli w poprzednim zadaniu nie korzystałeś do obliczania sumy kwadratów $\triangle$ Pascala, zrób to teraz. W przeciwnym przypadku pomyśl czy umiesz to zrobić bez $\triangle$ Pascala?

Zadanie 21. Na ile sposobów można podzielić $2n$ elementowy zbiór na n zbiorów 2 elementowe? Co jeśli dzielimy $2n$ elementów na n niepustych zbiorów? Czy umiesz policzyć na ile sposobów można podzielić zbiór o $(n+1)$ elementach na k podzbiorów?

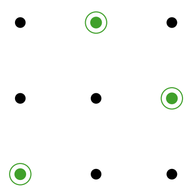
Dla odważnych i o mocnym sercu

Zadanie 22. Na teren budowy na którym pracuje Robert przyszedł kierownik Józef i powiedział, że partia chce jak najczerwieńszą wieżę, więc co najwyżej dwa bloki niebieskie mogą stać jeden na drugim bez bycia rozdzielonym blokiem czerwonym. Tzn. wieże NCNCNNC i NNCNN są dozwolone, ale wieża CCCCCNCCCNNCCC już nie. Co umiesz powiedzieć o ilości możliwych wież, które może wyprodukować Robert?

Liczby modulo p

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie liczbą pierwszą. Wtedy dowolna liczba $n \in \mathbb{N}$ zapisuje się jako $n = x \cdot p + y$, gdzie $y < p$ i $x \in \mathbb{N}$. Zbiór wszystkich możliwych y (reszt z dzielenia przez p) oznaczamy $\mathbb{Z}_p$. Na $\mathbb{Z}_p$ mamy działanie $+_p$ dodawania modulo p, czyli gdy $a, b \in \mathbb{Z}_p$, to $a +_p b$ jest resztą z dzielenia $a + b$ przez p, np. $2 +_5 3 = 0 \in \mathbb{Z}_5$, $3 +_5 3 = 1 \in \mathbb{Z}_5$ czy $2 +_7 3 = 5 \in \mathbb{Z}_7$.

Zadanie 23. Celem zadania będzie zliczenie prostych przechodzących przez $(0, 0)$ na $\mathbb{Z}_p^2$, które dla $p = 3$ wygląda następująco



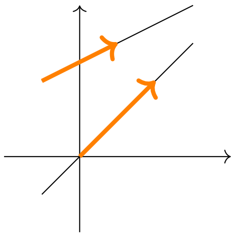
$(0, 0)$

1. Przykładowa prosta na $\mathbb{Z}_3^2$ została zaznaczona na rysunku wyżej. Narysuj kilka prostych na $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^2$ dla $\mathsf{p} = 2, 3, 5$.

2. Ile punktów mają proste na $\mathbb{R}^2$? A ile na $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^3$?

3. Wektor to strzałka narysowana na płaszczyźnie. Dowolny punkt połączony ze środkiem układu współrzędnych to wektor. To samo jest prawdziwe dla $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^2$. Czy umiesz powiedzieć ile jest niezerowych wektorów na $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^2$?

4. Dla dowolnej prostej na płaszczyźnie możemy wybrać jej wektor kierunkowy, czyli strzałkę, która na niej leży (wskazuje kierunek w którym rośnie prosta). Rysunek niżej daje przykład kilku prostych na $\mathbb{R}^2$ i ich wektorów kierunkowych.

   Zauważmy, że wektor prosty jednoznacznie wyznacza prostą, ale prosta ma więcej niż jeden wektor kierunkowy (wystarczy przeskalować). To samo jest prawdziwe dla $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^2$.

   Korzystając z poprzednich podpunktów oblicz, ile jest prostych przechodzących przez zero na $\mathbb{Z}_\mathsf{p}^2$.
