

# Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstępy</b>	<b>1</b>
02.10.2024	Grafy Cayleya . . . . .	1
1.	Metryka słów . . . . .	1
2.	Graf Cayleya . . . . .	1
3.	Quasi-izometrie . . . . .	3
09.10.2024	Lemat Milnora-Švarca . . . . .	6

# 1. Wstępy

## 02.10.2024 Grafy Cayleya

### 1. Metryka słów

#### Definicja 1.1: metryka słów

Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych  $g_1, g_2 \in G$  **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie  $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$ .

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmiennicza**, czyli  $(\forall \gamma \in G) ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że  $G$  działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

### 2. Graf Cayleya

#### Definicja 1.2: graf Cayleya

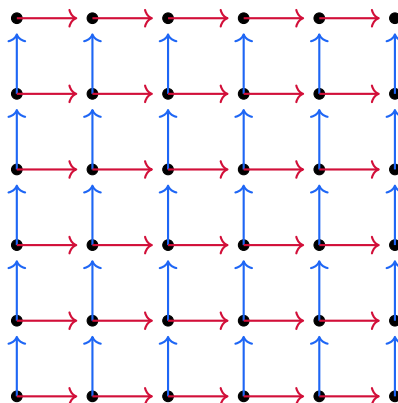
Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  zbiorem jej generatorów.  $C(G, S)$  to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami  $G$  i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

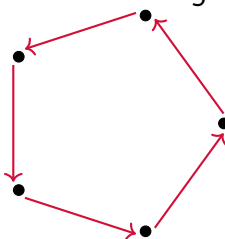
gdzie  $g \in G$  i  $s \in S$ .

## Przykłady

1. Dla  $G = \mathbb{Z}^2$  oraz  $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$  graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu  $p$  z generatorem  $s$  graf Cayleya to  $p$ -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy  $V = G$ , ale krawędzie są niezorientowane:  $E = \{\{g_1, g_2\} : ds(g_1, g_2) = 1\}$ . W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedynczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa  $G$  działa na nim przez **automorfizmy zachowujące krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

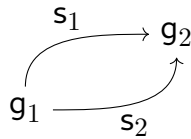
$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu  $\gamma \in G$  staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

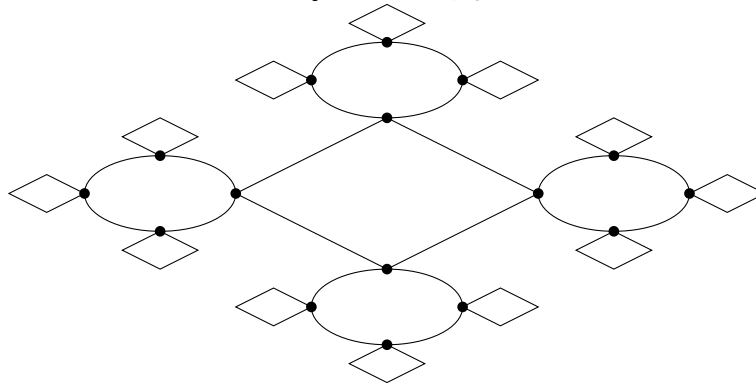
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie  $G$  o generatorach  $S$ , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy  $G$  jest więc **działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie** (lewa-niezmienniczość).

Dla suriekcji  $\pi : F_S \rightarrow G$ , gdzie  $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$  możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np.  $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$ )



### Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy  $(G_1, S_1)$  i  $(G_2, S_2)$  graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf  $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$  to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



## 3. Quasi-izometrie

### Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych  $(X_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mówimy, że przekształcenie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje  $C \geq 1$  oraz  $L \geq 0$  takie, że  $\forall x, y \in X_1$  zachodzi

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje  $D \geq 0$  takie, że  $f(X_1)$  jest  $D$ -gęsty ( $D$ -siecią) w  $X_2$ , tzn.

$$(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1) d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy  $f$  jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy  $L = D$  (większe z dwóch) i mówimy o tzw.  $(C, L)$ -quasi-izometrii.

**Fakt 1.5: własności q.i.**

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i.  $f : X_1 \rightarrow X_2$  istnieje  $g : X_2 \rightarrow X_1$  takie, że istnieje  $D \geq 0$  takie, że

$$(\forall x_2 \in X_2) d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall x_1 \in X_1) d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

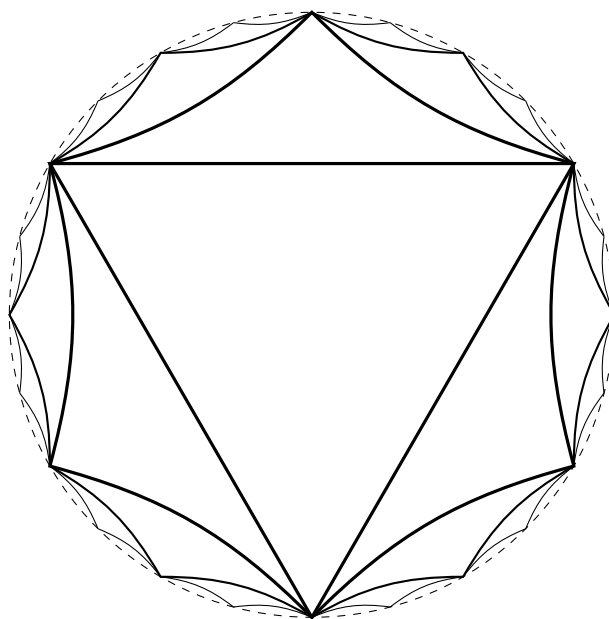
to wówczas  $g$  też jest q.i.

**Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości**

Mówimy, że  $(X_1, d_1)$  jest quasi-izometryczna z  $(X_2, d_2)$  jeśli istnieje q.i.  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Jest to relacja równoważności.

**Przykłady**

1.  $(X, d)$  jest q.i. z punktem  $\iff X$  jest ograniczone.
2.  $X$  jest q.i. z dowolną swoją  $D$ -siecią  $Y \subseteq X$  przez inkluzję.
3. Dla dowolnego  $B$  ograniczonego  $X \times B \cong X$  są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne  $T_k$  stopnia  $k \geq 3$  są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia  $T_\omega = T_{\aleph_0}$ .



**Fakt 1.7**

Niech  $G$  będzie grupą skończenie generowaną i niech  $S_1, S_2$  jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych  $(G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$  gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

**Wniosek 1.8**

Skończenie generowana grupa  $G$  determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest jednoznacznym obiektem quasi-metrycznym.

## 09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

### Lemat 1.9: Milnora-Švarca

Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a  $\Gamma$  grupą działającą na  $X$  przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas  $\Gamma$  jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z  $X$ . Dokładniej,  $\forall x_0 \in X$  odwzorowanie  $\Gamma \rightarrow X$  określone przez  $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  jest quasi-izometrią.

### Dowód

Wybermy  $x_0 \in X$ . Z kozwartości tego działania, istnieje promień  $R > 0$  taki, że dla kuli  $B = B_R(x_0)$  o środku w  $x_0$  taki, że rodzina przesunięć kuli  $\{g \cdot B : g \in \Gamma\}$  jest pokryciem  $X$ . Rozważmy zbiór  $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$  niewielkich przesunięć kuli  $B$ . Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni  $X$ , zbiór  $S$  jest skończony. Ponadto, zbiór jest symetryczny  $S = S^{-1}$  ( $s \in S \implies s^{-1} \in S$ ), bo jeśli  $s \cdot B \cap B \neq \emptyset$  to również  $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$ .

Określamy  $v := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma - S - \{1\}\}$  czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

**Clam 1:**  $v > 0$

Dla każdego  $g \in \Gamma - S - \{1\}$  wiemy, że  $d(B, g \cdot B) > 0$ . Gdyby to infimum  $v = 0$ , to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów  $g_n \in \Gamma$  takich, że  $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$  maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty  $z_n \in B$  takie, że  $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$  (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg  $n_k$  taki, że  $z_{n_k} \in z_0 \in B$ , a stąd  $d(z_0, g_n \cdot B) \searrow 0$ . To oznacza, że  $B_{2R}(x_0)$  przecina niepuście nieskończenie wiele spośród przesunięć  $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$ , a to jest sprzeczne z właściwością działania.

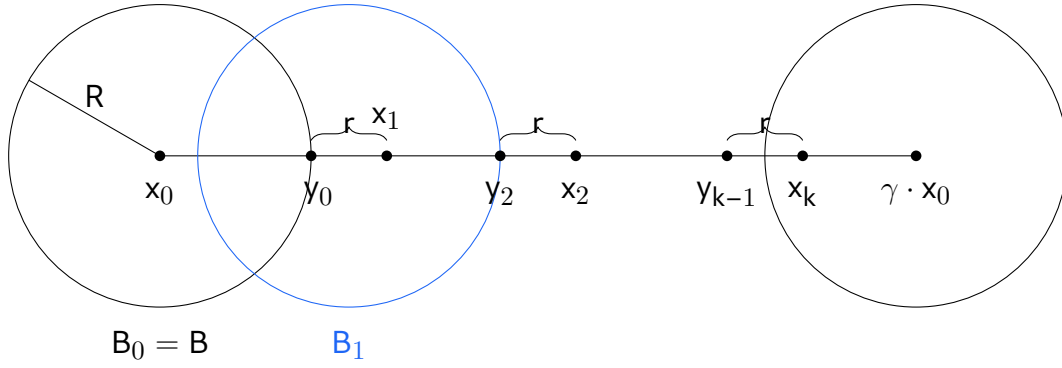
**Clam 2:**  $S$  generuje  $\Gamma$  oraz dla każdego  $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

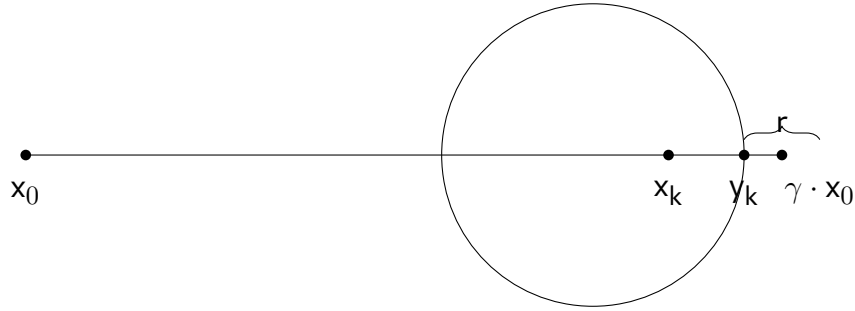
gdzie  $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$ .

I scenariusz:





## II scenariusz



Niech  $y_0$  będzie punktem na geodezyjnej  $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$  z kuli  $B$  najdalszy od  $x_0$  na tej geodezyjnej. W odległości  $r$  od  $y_0$  obierzmy punkt  $x_1$ . Wtedy odcinek  $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że  $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , czyli  $x_1 \in s_1 \cdot B$ . Iterujemy się tak aż kulą  $B_k = s_k s_{k-1} \dots s_1 \cdot B$  trafimy w  $\gamma \cdot x_0$ .

W scenariuszu I mamy  $\gamma \cdot B \cap s_k \dots s_1 \cdot B \neq \emptyset$ , bo  $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$  oraz  $\gamma x_0 \in s_k \dots s_1 \cdot B$ . W takim razie  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$ . Czyli zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II  $d(\gamma x_0, s_k \dots s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r$ . W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach  $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$ , bo  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$  bo tyle razy udało nam się odłożyć  $r$  na geodezyjnej.

Jeśli  $d_S(1, \gamma) = m$ , a  $\gamma = s_1 \dots s_m$ , to wówczas

$$d_X(s_1, \dots, s_k \cdot x_0, s_1 \dots s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 \dots s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności  $f(\gamma) \rightarrow \gamma \cdot x_0$ , które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów  $d_S$  wiemy, że  $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$ , czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo- $\Gamma$ -niezmienniczości metryki  $d_X$  na  $X$  mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i  $f$  jest quasi-izometrycznym włożeniem dla  $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$  i  $L = r$ .

Ponadto, obraz  $f(\Gamma)$  jest  $R$ -gęsty (dla  $R$  promienia z początku dowodu) w  $X$ , bo dla każdego  $x \in X$  istnieje  $\gamma \in \Gamma$  takie, że  $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$ . Czyli  $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$ , ale  $\gamma \cdot x = f(x)$ . Stąd  $f$  jest quasi-izometrią.



Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

## Przykłady

1. Grupy podstawowe  $\pi_1(M_1)$ ,  $\pi_1(M_2)$  zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych  $M_1$ ,  $M_2$  o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach  $\text{vol}(M_i)$ .

Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

### Twierdzenie 1.10: Mostowa o sztywności [1968]

Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

Założmy nie wprost, że  $\pi_1(M_1)$  i  $\pi_1(M_2)$  są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu  $H < \pi_1(M_1)$ ,  $H < \pi_1(M_2)$ . Niech  $\bar{M}_1$  i  $\bar{M}_2$  będą nakryciami  $M_1$ ,  $M_2$  wyznaczone przez  $H$ . Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc  $\bar{M}_i$  są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.

Z teorii nakryć wiemy, że  $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$ . Stąd wynika, że  $\overline{M}_1$  jest izometryczna z  $\overline{M}_2$ , a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\text{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \text{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\text{vol}(M_1)}{\text{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1):H]}{[\pi_1(M_2):H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

2. Niech  $G_A$  będzie produktem półprostym  $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ , gdzie  $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  jest zadane macierzą  $A \in \text{Sl}_2\mathbb{Z}$ . Chcemy, żeby  $A$  było macierzą hiperboliczną (tzn.  $|\text{tr}(A)| > 2$ ) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa  $G_A$  jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego  $\text{Sol} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ , gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$