

# Teoria Kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Początek końca</b>	<b>1</b>
24.02.2025	Podstawowe definicje . . . . .	1
1.	Przykłady kategorii . . . . .	1
2.	Funktory . . . . .	2
25.02.2025	Produkty i koprodukty kategorii . . . . .	5
1.	O obiektach początkowych i końcowych słów kilka . . . . .	5
2.	(Ko)granice funktorów a (ko)produkty . . . . .	6
3.	Obiekty i kategorie monoidalne . . . . .	9
03.03.2025	Funktory dołączone . . . . .	11
1.	Motywacja abstrakcyjnego nonsensu . . . . .	11
2.	Dużo przykładów funktorów dołączonych . . . . .	11
3.	Druga definicja . . . . .	13
10.03.2025	Funktory dołączone własności [wieczny WIP] . . . . .	14
1.	Dowód równoważności . . . . .	14
2.	Funktory dołączone a granice . . . . .	16
3.	Moduły . . . . .	18
17.03.2025	Pierwsza nieobecność . . . . .	20
1.	Po co właściwie te monady? . . . . .	20
2.	Definicja i przykłady . . . . .	21
3.	Konstruowanie funktorów sprzężonych z monad . . . . .	23
24.03.2025	Druga nieobecność . . . . .	25
1.	Kategoria Eilenberga-Moore'a . . . . .	26
31.03.2025	we back in business . . . . .	27
1.	Diagramy strunowe [string diagrams] . . . . .	27
01.04.2025	humpty dumpty . . . . .	29
07.04.2025	. . . . .	31

# 1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę "General theory of natural equivalences". Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsensu.

## 24.02.2025 Podstawowe definicje

### 1. Przykłady kategorii

#### Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała)  $\mathcal{C}$  składa się z:

- obiektów  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  oznaczanego  $\mathcal{C}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , które spełniają:
  - $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C),$$

które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczmy

$$\mathcal{C}_0 := \text{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako  $\mathcal{C}_1$  będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii  $\mathcal{C}$ .

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

#### Przykłady

1. Kategoria  $\text{Set}$ , której obiekty  $\text{Set}_0$  to wszystkie zbiory, a  $\text{Set}_1$  to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2.  $\text{Set}_*$  to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary  $(X, x_0)$ , gdzie  $X$  to zbiór, a  $x_0 \in X$ . Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt:  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), f(x_0) = y_0$ .

3.  $Top$  to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a  $Top_1$  to funkcje ciągłe między nimi.
4.  $Toph$  to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli  $X, Y \in Ob(Toph)$  oraz  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

takie, że  $F(x, 0) = f_0(x)$  oraz  $F(x, 1) = f_1(x)$ , to  $f_0 = f_1$  jako morfizm w kategorii  $Toph$ .

Pozostaje sprawdzić, że jeśli  $f, f'$  oraz  $g, g'$  to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas  $f \circ g$  jest homotopijnie równoważne  $f' \circ g'$ .

5. Kategoria  $Hask$ , której obiekty to typy w Haskellu, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji  $Rel$ , w której obiektami  $Rel_0$  są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn.  $Rel(X, Y)$  zawiera wszystkie  $S \subseteq X \times Y$ . Wówczas składanie  $S \subseteq X \times Y$  oraz  $R \subseteq Y \times Z$  definiujemy jako zbiór

$$S \circ R = \{(x, z) : (\exists y \in Y) xRy \wedge ySz\},$$

gdzie  $xRy$  oznacza, że  $(x, y) \in R$ . Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".

7. Niech  $R$  będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze  $X$ . Definiujemy wtedy kategorię  $\mathcal{C}$  o obiektach  $\mathcal{C}_0 = X$  będących elementami zbioru  $X$ , a morfizmy między  $a, b \in X$  to zbiór 1-elementowy  $\mathcal{C}(a, b) = \{\star\}$ , gdy  $xRy$  jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku. Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja  $R$  to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

## 2. Funktory

### Definicja 1.2: funktor

Funktor  $F$  między kategoriami  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$

- każdemu obiektowi  $X$  kategorii  $\mathcal{C}$  przypisuje obiekt  $F(X)$  kategorii  $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi  $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$  przypisuje morfizm  $F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y)$  w kategorii  $\mathcal{D}$  taki, że
  - $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$

$$- F(id_X) = id_{F(X)}$$

### PrzykŁad

$Ab : Gr \rightarrow Ab$  to funktor międy kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie  $G$  przypisuje jej abelianizację  $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$ .

### Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii  $\mathcal{C}$  rozumiemy kategorię  $\mathcal{C}^{op}$ , której

- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii:  $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
- morfizmy  $\mathcal{C}(X, Y)$  "odwracają się"  $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$ .

Mówimy, że funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  jest **kowariantny**, a funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$  kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ ,  $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , której obiekty to wszystkie funktory  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , a morfizmy to  $\varphi$  takie, że dla dowolnych  $X, Y \in Ob \mathcal{C}$  oraz  $f : X \rightarrow Y$  komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczmy  $Nat(F, G)$  - **naturalne przekształcenia** funktora  $F$  w funktor  $G$ .

### PrzykŁad

Cup product na kohomologiach  $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X)$  jest naturalnym przekształceniem między funktorami  $H^m(-) \otimes H^n(-)$  i  $H^{m+n}(-)$ .

### Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{D}$  są **równoważne**, jeśli istnieją funktory  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  oraz  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  takie, że złożenie  $F \circ G$  jest naturalnie izomorficzne do  $Id_{\mathcal{D}}$ , a  $G \circ F$  - do  $Id_{\mathcal{C}}$ .

### Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem  $k$ ,  $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$ , jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem  $k$ ,  $\text{Mat}^{\text{fin}}(k)$ .

GRUPOID PODSTAWOWY - dla p. top  $X$  obiekty to punkty  $X$ , a morfizmy to klasy homotopii ścieżek; jak weźmiemy konkretny punkt i popatrzymy na morfizmy  $x \rightarrow x$  to mamy grupę podstawową zbazowaną w tym punkcie; grupoid to funktor z p. top w kategorię kategorii (zawęzić: kat. grupoidów); wtedy funkcja ciągła to morfizm między dwoma grupoidami, a homotopia to naturalna transformacja

## 25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

### 1. O obiektach początkowych i koŹcowych sów kilka

#### Definicja 1.5: obiekt początkowy i koŹcowy

Powiemy, Źe obiekt  $C \in \mathcal{C}_0$  jest **początkowy**, jeŹli dla kaŹdego  $D \in \mathcal{C}_0$  istnieje dokłaŹnie jeden morfizm  $C \rightarrow D$ ,  $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$ . Analogicznie definiujemy **obekt koŹcowy**  $C$ :  $\forall D \in \mathcal{C}_0 \quad |\mathcal{C}(D, C)| = 1$ .

#### PrzykłaŹy

1. W kategorii, której obiektami jest odcinek  $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ , a morfizmy to relacja  $\leq$  obiektem początkowym jest 0, a koŹcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest  $\emptyset$ , a obiektem koŹcowym jest singleton.
3. W  $Gr$  grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i koŹcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu koŹcowego ani początkowego.

#### Fakt 1.6

Obiekty koŹcowe i początkowe, jeŹli istnieją, to są jedyne z dokłaŹnością do izomorfizmu.

#### Dowód

Niech  $C$  i  $C'$  będą obiektami koŹcowymi kategorii  $\mathcal{C}$ . Wiemy, Źe  $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$ , czyli komutujący diagram

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{id_C} & C \\
 \searrow \exists! f & & \nearrow \exists! g \\
 & C' &
 \end{array}$$

daje  $g \circ f = id_C$ . Analogiczny diagram daje  $f \circ g = id_{C'}$ . Stąd  $f$  i  $g$  to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między  $C$  i  $C'$

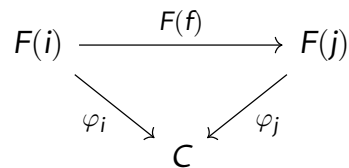


## 2. (Ko)granice funktorów a (ko)produkty

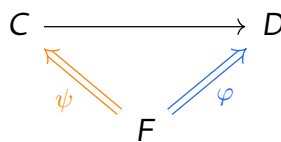
Niech  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  będzie funktorem, gdzie o kategorii  $\mathcal{I}$  myŹlimy jako o kategorii indeksów. Przez  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$  oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, Źe funktor  $C$  jest stały, jeŹeli  $C(i) = C$  dla kaŹdego  $i \in \mathcal{I}_0$  oraz  $C(f) = id_C$  dla kaŹdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora  $F$  w funktory stałe  $C$ ,  $\varphi : F \Rightarrow C$ , czyli komutujące diagramy (kostoŹki)

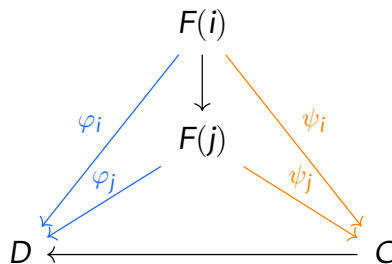


- a morfizmy to strzałki  $C \rightarrow D$  takie, Źe diagram



komutuje.

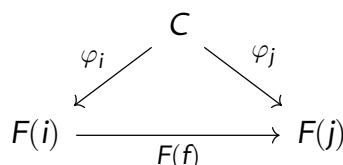
Diagram wyŹej moŹna rozpisać jako:



### Definicja 1.7: kogranica funktora

**Kogranicą** (*granica prosta*) funktora  $F$ ,  $\varinjlim F$ , nazywamy obiekt początkowy w wyŹej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyŹej moŹemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia  $\varphi : F \Rightarrow C$  moŹemy rozwaŹyć naturalne przekształcenia  $\varphi : C \Rightarrow F$ , czyli diagramy (stoŹki)





z morfizmami definiowanymi analogicznie.

### Definicja 1.8: granica funktora

**Granica** (*granica odwrotna*) to obiekt koŹcowy powyŹszej kategorii stoŹk6w,  $\varprojlim F$ .

RozwaŹmy kategorię  $\mathcal{I}$ , która ma dwa obiekty  $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$ . Niech  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$  będe funktorem, dla którego  $F(0) = A$ , a  $F(1) = B$ . Niech  $\varphi$  oraz  $\psi$  będe parą naturalnych przekształceŹ, dla których

$$\begin{array}{ccccc} & & \varprojlim F & & \\ & \swarrow \varphi_0 & \uparrow \exists! f & \searrow \varphi_1 & \\ F(0) = A & \xleftarrow{\psi_0} & D & \xrightarrow{\psi_1} & F(1) = B \end{array}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo  $\varprojlim F$  to obiekt koŹcowy. JeŹli weŹmiemy  $\varprojlim F = A \times B$ , a  $\varphi_0 = \pi_A$  oraz  $\varphi_1 = \pi_B$  będe rzutami i  $f(d) = (\psi_0(d), \psi_1(d))$ , to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna  $A \sqcup B$ , bo diagram

$$\begin{array}{ccccc} F(0) = A & \xrightarrow{\psi_0} & D & \xleftarrow{\psi_1} & F(1) = B \\ & \searrow \varphi_0 = i_A & \uparrow \exists! f & \swarrow \varphi_1 = i_B & \\ & & \varprojlim F = A \sqcup B & & \end{array}$$

gdzie  $f(x) = \varphi_0(x)$ , jeŹli  $x \in A$  oraz  $f(x) = \varphi_1(x)$  jeŹli  $x \in B$ , komutuje.

### Definicja 1.9: (ko)produkt

**Produktem** obiekt6w  $A$  i  $B$  kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  dla  $\mathcal{I}$  oraz  $F$  jak wyŹej.

**Koproduktem** obiekt6w  $A$  i  $B$  kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy granicę odwrotną (granice) funktora  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$

### Przykłądy

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjaŹski dwóch grup, tak jak w kategorii zbior6w, tj. dla grup  $A, G, H$  komutuje diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \times H & & \\
 & \swarrow \pi_G & \uparrow g \times h & \searrow \pi_H & \\
 G & \xleftarrow{g} & A & \xrightarrow{h} & H
 \end{array}$$

Koproduct to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{g} & A & \xleftarrow{h} & H \\
 & \searrow i_G & \uparrow \exists! f & \swarrow i_H & \\
 & & H * G & &
 \end{array}$$

gdzie  $f$  nakłada na litery słów  $G * H$  pochodzące z  $G$  morfizm  $g$ , a na litery pochodzące z  $H$  - morfizm  $h$ .

2. Niech  $F : \mathcal{I} \rightarrow (P, \leq)$  z dwuobiektovej kategorii  $\mathcal{I}$  w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varinjlim F & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 F(0) = a & \longleftarrow & d & \longrightarrow & F(1) = b
 \end{array}$$

to znaczy, że  $d \leq a$ ,  $d \leq b$  oraz  $d \leq \varinjlim F$ . Żeby więc miało to sens dla dowolnego  $d \leq a, b$  to  $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$ . Analogicznie dostajemy, że  $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$ .

3. Jeśli  $\mathcal{I}$  jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a  $F : \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$  jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański  $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$ , a granicą - nieskończona suma rozłączna  $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$ .

### Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koproducty są unikalne.

### Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.



**PrzykŁad**

RozwaŹmy funktor  $F : \mathcal{I}^{op} \rightarrow Grp$ , gdzie  $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$  taki, Źe dla kaŹdych  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \leq j$  mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i \rightarrow j)=q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie  $q$  to morfizm ilorazowy.

Liczby  $p$ -adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych rŹone od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby  $p$ -adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie  $k \in \mathbb{N}$  oraz  $0 \leq a_i < p$ . Okazuje się, Źe całkowite liczby  $p$ -adyczne,  $\mathbb{Z}_p$ , moŹna zdefiniować jako granicę funktora  $F$ :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z}_p & & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow \\ \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{array}$$

Granica prosta takiego funktora jest trywialna, ale moŹemy rozwaŹyć inny funktor, z kategorii  $\mathbb{Z}$  z porzĄdkiem, tzn:  $G : \mathbb{Z} \rightarrow Grp$  taki, Źe  $G(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , natomiast strzałkę  $n+1 \rightarrow n$  przekształcamy na odwzorowanie

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ni x \mapsto p \cdot x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Wtedy granicą prostą  $G$  jest  $C_{p^\infty}$  - pierwiastki  $p^n$ -tego stopnia z 1, dla dowolnego  $n$ .

**3. Obiekty i kategorie monoidalne**

**Monoid**  $(M, \star, 1)$  to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{\star \times id} & M^2 \\ id \times \star \downarrow & & \downarrow \star \\ M^2 & \xrightarrow{\star} & M \end{array}$$

co znaczy, Źe działanie jest łączne.

**Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna**

Niech  $\mathcal{C}$  będie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech  $M \in \mathcal{C}$  będie obiektem, dla którego mamy  $\mu : M^2 \rightarrow M$  oraz  $\varepsilon : \{1\} \rightarrow M$  takie, Źe komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 M^3 & \xrightarrow{\mu \times id} & M^2 \\
 id \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M \\
 \\ 
 M & \xrightarrow{\varepsilon \times id} & M^2 \\
 id \times \varepsilon \downarrow & \searrow = & \downarrow \mu \\
 M^2 & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}$$

Wtedy  $M$  jest **obiektem monoidalnym**.

Obiekt monoidalny w kategorii  $\mathcal{Cat}$  nazywa się **kategorią monoidalną**.

## Przykłady

1. Dowolna kategoria  $\mathcal{C}$  z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalną.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory  $F, G \in \text{End}(\mathcal{C})$ , to potrafimy je złożyć w dobry sposób.  
Funktor  $T \in \text{End}(\mathcal{C})$  oraz dwa naturalne przekształcenia  $\mu : T^2 \rightarrow T, \varepsilon : Id \rightarrow T$ , nazywa się **monadą**.

## 03.03.2025 Funktory dołączane

### 1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu

Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $k$ , a  $B$  wybraną jej bazą. Dowolne odwzorowanie  $B \rightarrow V$  możemy rozszerzyć na odwzorowanie liniowe  $k[B] = V \rightarrow V$ . To znaczy, mamy izomorfizm zbiorów

$$\text{Hom}(B, V) \cong \text{Hom}(V, V).$$

W języku abstrakcyjnego nonsensu możemy zdefiniować dwa funktory,

$$\text{Set}(-, U(-)) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{Vect}_k(k[-], -) : \text{Set}^{op} \times \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set},$$

gdzie  $U : \text{Vect}_k^{fin} \rightarrow \text{Set}$  to funktor zapominający strukturę przestrzeni wektorowej, między którymi istnieją naturalne izomorfizmy.

$$\text{Set}(-, U(-)) \cong \text{Vect}_k(k[-], -)$$

### Definicja 1.12: funktory dołączane

Niech  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  oraz  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  będą funktorami. Powiemy, że  $L$  jest **lewo dołączony** do funktora  $R$ , a  $R$  **prawo dołączony** do  $L$ , jeśli funktory

$$\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$$

są naturalnie izomorficzne. Taką parę funktorów dołączonych oznaczamy  $L \dashv R$ .

### 2. Dużo przykładów funktorów dołączonych

1. Niech  $R : \text{Set}_* \rightarrow \text{Set}$  będzie funktorem z kategorii zbiorów z bazowym w kategorię zbiorów, który zapomina o punkcie bazowym. Chcemy teraz znaleźć funktor  $L : \text{Set} \rightarrow \text{Set}_*$ , który będzie do niego lewo dołączony. Niech  $L(X) = X \sqcup \{X\}$  (lub bardziej obrazowo:  $X \sqcup \{*\}$ ), gdzie  $y_0$  pošemy na  $\{X\}$ , to znaczy doklejamy do  $X$  singleton i staje się on punktem wyróżnionym.

Oba funktory są różnowartościowe na obiektach, więc wystarczy przekonać się, że

$$\text{Set}_*(LX, (Y, y_0)) \cong \text{Set}(X, R(Y, y_0))$$

jest izomorfizmem. Dowolna funkcja  $X \rightarrow Y$  rozszerza się przez pošanie  $\{X\} \mapsto y_0$  na funkcję  $(X, \{X\}) \rightarrow (Y, y_0)$ .

2. Podobna sytuacja ma miejsce, kiedy szukamy lewo dołączony funktor do  $R : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Rng}$  między kategorią pierścieni z jedyneką, a wszystkimi pierścieniami. Definiujemy funktor

$$L : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ring}$$

jako doklejenie  $\mathbb{Z}$ ,  $L(S) = \mathbb{Z} \oplus S$  z działaniem  $(n, s)(n', s') = (nn', ns' + ss' + n's)$ , wtedy  $(1, 0_S)$  jest jedyneką w nowym pierścieniu. Pozostaje przyjrzeć się co się dzieje z morfizmami, skoro

$$\mathbf{Rng}(S, RT) \cong \mathbf{Ring}(LS, T).$$

Dowolny morfizm  $\varphi : S \rightarrow RT$  wystarczy, że trzyma element neutralny ze względu na dodawanie i jest addytywny. Możemy go rozszerzyć na morfizm, który całą pierwszą współrzędną  $LS = \mathbb{Z} \oplus S$  posyła w  $1_T \in T$ , a drugą zgodnie z  $\varphi$ . W drugą stronę wystarczy obciąć morfizm do drugiej współrzędnej.

3. Niech  $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$  będzie funktorem takim, że  $\Delta(C) = (C, C)$ . Zaczniemy od szukania funktora dołączonego do niego z prawej strony, czyli  $R : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  takiego, że

$$\mathbf{Hom}(X, R(Y, Z)) \cong \mathbf{Hom}(\Delta(X), (Y, Z)).$$

Od razu narzuca się  $R(Y, Z) = Y \times Z$ , czyli zlepiamy współrzędne  $\Delta(X)$  w jedną. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański w kategorii zbiorów jest produktem.

Funktor lewo dołączony musi zatem spełniać

$$\mathbf{Hom}(L(X, Y), Z) \cong \mathbf{Hom}((X, Y), \Delta(Z)),$$

czyli dowolną funkcję  $(X, Y) \rightarrow (Z, Z)$  musimy umieć zapisać jako funkcję z pojedynczego zbioru, którym będzie suma rozłączna  $L(X, Y) = X \sqcup Y$ , czyli koprodukt w kategorii zbiorów.

Historia funktora  $\Delta$  uogalnia się na dowolną kategorię, w której są produkty i koprodukty:

$$\text{koprodukt} \dashv \Delta \dashv \text{produkt}$$

4. Ustalmy zbiór  $Y \in \mathbf{Set}_0$  i niech  $R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  będzie funktorem, który zbiorowi  $X$  przypisuje wszystkie funkcje z  $Y$  w ten zbiór,  $R(X) = \mathbf{Set}(Y, X)$ . Chcemy znaleźć funktor lewo dołączony  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  do  $R$ . Patrzymy na morfizmy i mamy

$$\mathbf{Set}(L(X), Z) \cong \mathbf{Set}(X, \underbrace{\mathbf{Set}(Y, Z)}_{R(Z)})$$

zbiór po prawej to funkcje z  $X$  w funkcje z  $Y$  w  $Z$ . Można to przedstawić jako funkcje  $X \times Y \rightarrow Z$ , czyli  $LX = X \times Y$ .

Technika tłumaczenia funkcji o więcej niż jednym argumentem na sekwencję funkcji nazywamy *currying*.

5. Analogicznie jak w poprzednim przykŝadzie, niech  $R$  będnie pierścieniem (przemien-  
nym z jednęką),  $W$   $R$ -modułem i  $R$  funktorem  $R : R\text{Mod} \rightarrow R\text{Mod}$  takim, że  $R(U) =$   
 $\text{Hom}_R(W, U)$  będnie zborem homomorfizmów  $R$ -modułów. Funktorem lewo-dołączonym  
do  $R$  będnie wtedy  $L(V) = V \otimes W$ :

$$R\text{Mod}(V, \text{Hom}_R(W, U)) \cong R\text{Mod}(V \otimes W, U).$$

**Uwaga:** tensor produkt zwykle nie ma funktora lewo do siebie dołączonego.

6. Załóŝmy, że kategoria  $\mathcal{C}$  ma produkty i ustalmy  $X \in \mathcal{C}$ . Rozwaŝmy funktor  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  
 $L(Y) = Y \times X$ . Jeŝli kategoria  $\mathcal{C}$  posiada obiekty eksponencjalne, czyli wiemy jak uogólnić  
na nią przestrzeń funkcji  $X \rightarrow Y$  (oznaczane  $Y^X$ ), to funktorem prawo dołączonym do  $L$   
jest właŝnie funktor przypisujący obiektowi  $Y$  jego eksponens  $Y^X$ ,

$$\mathcal{C}(Y, Z^X) \cong \mathcal{C}(Y \times X, Z).$$

Przykŝadem takiej kategorii sę przestrzenie "core-compact".

W ramach kontrprzykŝadu rozwaŝmy funktor zapominania  $U : \text{FinGrp} \rightarrow \text{FinSet}$ , i załóŝmy,  
że  $L : \text{FinSet} \rightarrow \text{FinGrp}$  jest jego funktorem lewo dołączonym. Niech  $p$  będnie takę liczbę  
pierwszâ, że  $p > |L(1)|$  (wystarczy, że sę względnje pierwsze). Wtedy

$$\text{FinSet}(1, U(\mathbb{Z}_p)) \cong \text{FinGrp}(L(1), \mathbb{Z}_p)$$

gdzie po lewej zbiór ma  $|\mathbb{Z}_p| = p$  rŝnych funkcji z singletona w zbiór elementŝw grupy  $\mathbb{Z}_p$ , a  
po prawej mamy jedynie trywjalny morfizm, bo ŝaden element  $L(1)$  nie ma rzędu podzielnego  
przez  $p$ , czyli nie moŝe przejŝć w ŝaden nietrywjalny element  $\mathbb{Z}_p$ .

### 3. Druga definicja

#### Definicja 1.13: funktory dołączone (naturalne transformacje)

Rozwaŝmy parę funktorŝw

$$\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \end{matrix} \mathcal{D}.$$

Powiemy, że  $L$  jest lewo dołączony do  $R$  i na odwrot, jeŝli istnieją dwie naturalne trans-  
formacje

$$\varepsilon : LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}} \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

takie, że komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\ & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\ & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\ & & R \end{array}$$

$\eta$  nazywamy **unit**, a  $\varepsilon$  to **counit**.

# 10.03.2025 Funktory dołączane własności [wieczny WIP]

## 1. Dowód równoważności

### Twierdzenie 1.14

Dwie definicje funktorów dołączonych z poprzedniego wykładu są równoważne, tzn. naturalne transformacje  $H, E$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(L-, -) & \xleftarrow{E} & \mathcal{C}(-, R-) \\ & \xrightarrow{H} & \end{array}$$

istnieją  $\iff$  istnieją dwie naturalne transformacje  $\varepsilon : LR \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$  oraz  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow RL$  dla których komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\ & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\ & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\ & & R \end{array}$$

### Dowód

Niech  $f : c' \rightarrow c$  będzie morfizmem w  $\mathcal{D}$ , a  $g : d' \rightarrow d$  - morfizmem w  $\mathcal{C}$ .

Zacznijmy od zdefiniowania szukanych przekształceń naturalnych na obiektach. Niech  $\eta_c$

$$\mathcal{D}(Lc, Lc) \xrightarrow{H_{c,Lc}} \mathcal{C}(c, RLc)$$

$$1_{Lc} \longrightarrow \eta_c = H(1_{Lc})$$

a  $\varepsilon_d$  definiujemy analogicznie używając  $E$ .

W drugą stronę,  $H(\varphi)$  definiujemy mając  $\eta$  oraz  $\varepsilon$ . Dla  $\varphi : Lc \rightarrow d$  definiujemy

$$H(\varphi) := R\varphi \circ \eta_c,$$

które bierze coś z  $c$  i oddaje  $RLc$ . Z drugiej strony bierzemy  $\psi : c \rightarrow Rd$

$$E(\psi) := \varepsilon_d \circ L\psi.$$

$\implies$

Zakładamy, że  $H$  i  $E$  są naturalne i pokazujemy naturalność  $\eta$ , czyli komutowanie diagramu



$$\begin{array}{ccc}
 RL(c') & \xleftarrow{\eta_{c'}} & 1_{c'}(c') \\
 RL(f) \downarrow & & \downarrow 1_{c'}(f) \\
 RL(c) & \xleftarrow{\eta_c} & 1_c(c)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 RLf \circ \eta_{c'} &\stackrel{\text{def. } \eta}{=} RLf \circ H(1_{Lc'}) = \\
 &\stackrel{\text{funktorialnoŝć } H}{=} H(Lf \circ 1_{Lc'}) = \\
 &= H(1_{Lc} \circ Lf) = \\
 &= H(1_{Lc}) \circ f = \\
 &\stackrel{\text{def. } \eta}{=} \eta_c \circ f.
 \end{aligned}$$

Analogicznie naleŝy sprawdzić naturalnoŝć  $\varepsilon$ .

Pozostaje jeszcze udowodnić, ŝe zdefiniowane przez nas  $\eta$  i  $\varepsilon$  spełnia warunek trójkąta w definicji, tzn. komutują diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{1_L \eta} & LRL \\
 & \searrow 1_L & \downarrow \varepsilon 1_L \\
 & & L
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\eta 1_R} & RLR \\
 & \searrow 1_R & \downarrow 1_R \varepsilon \\
 & & R
 \end{array}$$

Ograniczymy się do sprawdzenia lewego diagramu.

$$\begin{array}{ccc}
 Lc & \xrightarrow{L(\eta_c)} & LRLc \\
 & \searrow 1_{Lc} & \downarrow \varepsilon_{Lc} \\
 & & Lc
 \end{array}$$

$$\varepsilon_{Lc} L(\eta_c) = E(1_{RLc}) L(\eta_c) = E(1_{RLc} \eta_c) = EH(1_{Lc}) = 1_{Lc}$$

$\Leftarrow$

Wychodzimy teraz z założenia, ŝe  $\eta : 1_c \Rightarrow RL$  i  $\varepsilon : LR \Rightarrow 1_d$  to naturalne przekształcenia, czyli z komutowania diagramów

$$\begin{array}{ccc}
 c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & RLc' \\
 f \downarrow & & \downarrow RLf \\
 c & \xrightarrow{\eta_c} & RLc
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 d & \xleftarrow{\varepsilon_d} & LRd \\
 g \downarrow & & \downarrow LRg \\
 d' & \xleftarrow{\eta_{d'}} & LRd'
 \end{array}$$

dostajemy równoŝci

$$RLf \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

$$g \circ \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} \circ LRg.$$

Powinniŝmy najpierw pokazać, że  $H$  i  $E$  s naturalne. Zrobimy to tylko dla  $H$ . Interesuje nas diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(Lc, d) & \xrightarrow{H_{c;d}} & \mathcal{C}(c, Rd) \\ (Lf, g) \downarrow & & \downarrow (f, Rg) \\ \mathcal{D}(Lc', d') & \xrightarrow{H_{c';d'}} & \mathcal{C}(c', Rd') \end{array}$$

$$EH(\varphi) = E(R\varphi \circ \eta) = E(R\varphi)E(\eta) = \varepsilon LR\varphi \varepsilon L\eta$$



### Twierdzenie 1.15

Istnieje bijekcja między zbiorem par naturalnych przekształce ( $H, E$ ) oraz  $(\eta, \varepsilon)$ .

**Dowód**

TO DO



## 2. Funktory dołączone a granice

### Twierdzenie 1.16

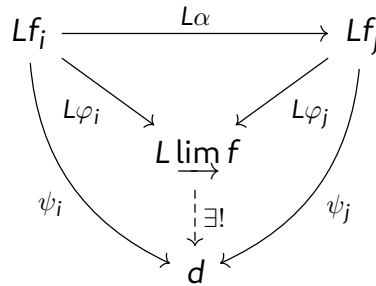
Niech  $L \dashv R$  będzie par funktor dołączonych. Wtedy  $L$  zachowuje granice proste, a  $R$  - granice odwrotne.

Przypomnijmy że kogranica (granica prosta) funktora  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  spełnia dla kadego  $g$  diagram

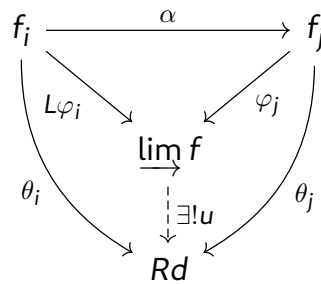
$$\begin{array}{ccc} f_i & \xrightarrow{\alpha} & f_j \\ \downarrow L\varphi_i & & \downarrow \varphi_j \\ & \lim f & \\ \downarrow \psi_i & \downarrow \exists! & \downarrow \psi_j \\ & g & \end{array}$$

**Dowód**

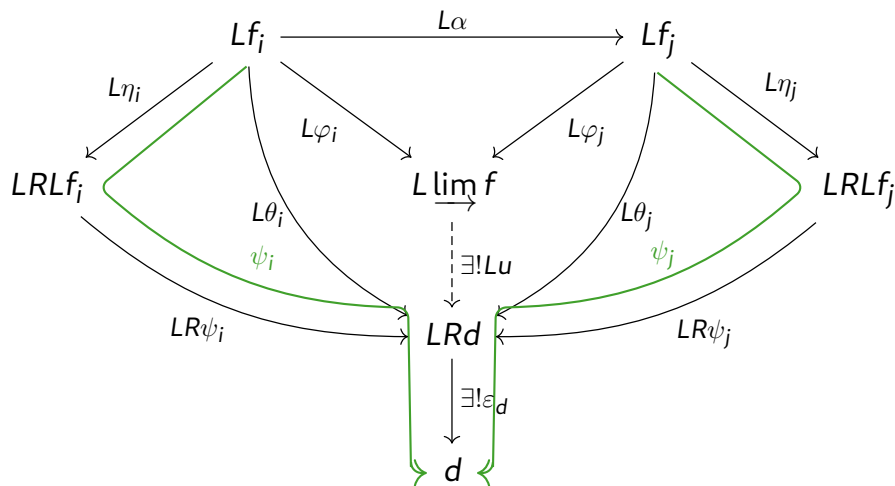
PokaŹemy tylko, Źe lewo dołączony funktor zachowuje kogranice, tj. dla dowolnego  $d \in \mathcal{D}$  zachodzi diagram



Z uniwersalnej wlasnoŹci kogranicy mamy diagram



Nakładamy na niego funktor  $L$ . Potrzebujemy teŹ strzałek  $L\eta_i : Lf_i \rightarrow LRLf_i$  przychoďących z naturalnej transformacji  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ . Dodatkowo wiemy, Źe  $\varepsilon_d : LRd \rightarrow d$  istnieje i jest w dodatku jedyne. Mamy wiéc diagram



w którym długie zielone strzałki sã konsekwencjã złoŹenia  $\varepsilon_d \circ LR\psi_i = \psi_i$ . Dostajemy wiéc  $\varepsilon_d \circ Lu$  jako jednynã strzałkẽ  $L\varinjlim f \rightarrow d$  komutujacã z  $\psi_i$  oraz  $\psi_j$ .



### 3. Moduły

JeŹli  $R$  jest pierŹcieniem z 1, to powiemy, Źe  $M$  jest  $R$ -modułem, jeŹli

- $(M, +)$ , jest grupą abelową
- oraz  $R$  działa na  $M$  tak, Źe

$$1x = x, \quad rsx = r(sx)$$

$$(r + s)(x + y) = (r + s)x + (r + s)y = rx + sx + ry + sy$$

Grupy abelowe to  $\mathbb{Z}$ -moduły. Przestrzenie liniowe nad ciałem  $k$  to  $k$ -moduły.

#### Definicja 1.17: moduł projektywny

Mówimy, Źe  $R$ -moduł  $P$  w kategorii  $R$ -modułów jest projektywny, jeŹli dla kaŹdego surjektywnego homomorfizmu  $f : N \twoheadrightarrow M$  oraz kaŹdego homomorfizmu  $g : P \rightarrow M$  istnieje homomorfizm modułów  $h : P \rightarrow N$  taki, Źe  $fh = g$ . Innymi słowy, komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow \exists h & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

#### Przykłał

Dla kaŹdego  $R$  oraz  $n$  wolny moduł  $R^n$  jest modułem projektywnym. Niech  $x_1, \dots, x_n$  bęĄ generatorami  $R^n$ . Dla kaŹdego  $i$  wybieramy jeden element  $n_i \in f^{-1}(g(x_i))$ . Definiujemy  $h(x_i) = n_i$ .

Argument z przykłał uogólnia się na stwierdzenie, Źe kaŹdy moduł jest **obrazem pewnego modułu projektywnego**.

Dualnie definiujemy moduły injektywne.

#### Definicja 1.18: moduł injektywny

Dla kaŹdego injektywnego  $f : M \rightarrow N$  oraz dla kaŹdego  $g : M \rightarrow Q$  istnieje  $h : N \rightarrow Q$  takie, Źe komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & \nwarrow \exists h & \\ Q & & \end{array}$$

**PrzykŁad**

Liczby wymierne  $\mathbb{Q}$  sŁą injektywnym  $\mathbb{Z}$ -moduŁem.

**Twierdzenie 1.19**

Dla kaŹdego  $R$ -moduŁu  $M$  istnieje injektywny moduŁ  $Q$  taki, Źe  $M \hookrightarrow Q$ .

**DowÓd**

a Ńwiat pali siŁę 🔥



## 17.03.2025 Pierwsza nieobecnoŝć

*A monad is just a monoid in the category of endofunctors, what's the problem?*

### 1. Po co wlaŝciwie te monady?

W programowaniu monady s uŝywane do modelowania "robienia czegoŝ więcej" jako efektu działania funkcji. W OCamlu (autorka notatek dostaje oczopląsu na widok Haskell'a) jest definiowana jako

```
module type Monad = sig
  type 'a t
  val return : 'a -> 'a t
  val bind : 'a t -> ('a -> 'b t) -> 'b t
end
```

Przykadem namacalnej monady jest tzw. monada Maybe, ktora opakowuje dane w pudełko, tym samym pozwalając zwracać pudełka puste.

Powiedzmy, ŝe potrzebujemy znaleźć element maksymalny listy, czyli `maxElem : int list -> int`. Co, jeŝli nasza lista jest pusta? Moŝemy opakować zwracaną wartoŝć i zmienić ją w `int option`. Wtedy w wypadku pustej listy zwracamy `None`.

```
let maxElem (x : int list) : int option =
  match x with
  | [] -> None
  | x::xs ->
    match maxElem(xs) with
    | None -> Some x
    | Some y -> Some max(x, y)
```

Pojawia się kolejny problem: zmiana zwracanego typu z `int` na `int option` nie pozwala nam dodawać elementw maksymalnych z różnych list, ani (po napisaniu `minElem`) odjac od elementu maksymalnego elementu minimalnego. Potrzebujemy wiec w elegancki sposób zmienić rwnieŝ operacje arytmetyczne. Zaczniemy od zdefiniowania funkcji potrzebnych w monadzie.

```
type 'a t = 'a option

let return (x : int) : int option =
  Some x
```

```
let bind (x : int option) (op : int -> int option) : int option =
  match x with
  | None -> None
  | Some a -> op a
```

Funkcja `return` nie robi nic poza opakowaniem `int` w `int option`, natomiast funkcja `bind` wyjmuje `int` z pudełka i dopiero wtedy nakłada funkcję i pakuje z powrotem do pudełka. Dla przykładu napiszemy tylko nową implementację dodawania, która będzie teraz pobierać dwa argumenty typu `int option` i zwracać `int option`.

```
let ( + ) : (x : int option) (y : int option) : int option =
  bind ( x, fun a -> bind(y, fun b -> Some(a+b)) )
```

Możemy teraz odpalić

```
maxElem([1; 4; 45]) + maxElem([44; -10; 9])
```

i na konsoli zobaczymy `Some 69`.

## 2. Definicja i przykłady

### Definicja 1.20: monada

Monada na kategorii  $\mathcal{C}$  składa się z

- endofunktora  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,
- naturalnej transformacji  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  (unit z funktorów dołączonych),
- naturalnej transformacji  $\mu : T^2 \rightarrow T$ , która definiuje mnożenie na funktorze  $T$

takich, że poniższe diagramy komutują w kategorii  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \\ & \searrow 1_T & \downarrow \mu & \swarrow 1_T & \\ & & T & & \end{array}$$

Diagramy te są bardzo podobne do tych, które pojawiły się przy definiowaniu obiektu monoidalnego [1.11]. Nie jest to przypadkiem: monady są obiektem monoidalnym w kategorii endofunktorów  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$  z binarnym działaniem  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$  będącym składaniem funktorów.

## Przykłady

1. Rozważmy parę funktorów sprzężonych znaną z poprzednich wykładów

$$\text{Set} \xleftarrow[U]{F} \text{Ab}$$

gdzie  $F$  to funktor rozpinający wolną grupę abelową o generatorach równych zbiorowi, a  $U$  zapomina strukturę grupy. Niech  $\eta : 1_{\text{Set}} \Rightarrow UF$  oraz  $\varepsilon : FU \Rightarrow 1_{\text{Ab}}$  będą unitem oraz counitem z definicji gunktorów sprzężonych.

Widzimy tutaj endofunktor  $UF$  oraz naturalną transformację  $\eta$  jak z definicji monady. Potrzebujemy jeszcze mnożenia na  $UF$ .

Naturalne przekształcenie  $\varepsilon : FU \Rightarrow 1_{\text{Ab}}$  na dowolnej grupie  $A$  jest homomorfizmem ewaluującym formalną sumę jej elementów (obiekt z  $FUA$ ) jako właściwy element grupy  $A$ . Możemy ten homomorfizm wyrazić jako funkcję, podkładając funktory  $U$  i  $F$  z odpowiednich stron, tzn. rozważając złożenie

$$U\varepsilon F : UFUF \rightarrow UF.$$

Jest to występujący w definicji monady sposób mnożenia funktorów.

2. W przykładzie z funkcją `maxElem`, endofunktorem  $T$  jest zmiana typów `int -> int option`. Naturalnym przekształceniem  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  jest funkcja `return`, a funkcja `bind` mówi nam jak nałożyć funkcję `int -> int option` na element typu `int option`, czyli element poddany już działaniu endofunktora  $T$ .
3. Rozważmy kategorię  $\text{Set}$  i funktor  $T : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ ,  $T(X) = X \cup \{X\}$ . Przypomnijmy, że jest to funktor będący złożeniem zapominającego funktora z kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem z funktorem do niego dołączonym.  $\eta : 1_{\text{Set}} \rightarrow T$  posyła elementy  $X$  w elementy  $X$ , tj. singleton  $\{X\}$  nie jest w obrazie.  $\mu_X : T^2X \rightarrow TX$  pośle elementy  $X$  w  $X$ , a zbiory  $\{X\}$  oraz  $\{X \cup \{X\}$  w singleton  $\{X\}$ . Czy widzisz podobieństwo z przykładem wyżej?

## Lemat 1.21

Każda para  $L \vdash R$  funktorów sprzężonych zadaje monadę, gdzie

- $RL$  jest endofunktorem  $T$ ,
- unit z definicji pary funktorów sprzężonych  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow RL$  jest unitem z definicji monady,
- counit z nałożonymi funktorami,  $R\varepsilon L : RLRL \Rightarrow RL$  jest mnożeniem  $\mu : T^2 \rightarrow T$ .



### 3. Konstruowanie funktorów sprzężonych z monad

#### Definicja 1.22

Niech  $\mathcal{C}$  będzie kategorią z monadą  $(T, \eta, \mu)$ . Wtedy **kategorią Kleislego**, oznaczane  $\mathcal{C}_T$ , na  $\mathcal{C}$  nazwiemy kategorię której

- obiekty są obiektami z  $\mathcal{C}$
- morfizmy z  $A$  do  $B$  w  $\mathcal{C}_T$ , oznaczane (niekoniecznie konsekwentnie)  $A \rightsquigarrow B$ , jest morfizmem  $A \rightarrow TB$  w kategorii  $\mathcal{C}$ .

Identyczność  $id_A : A \rightsquigarrow A$  definiujemy, posługując się monadą, jako  $\eta_A : A \rightarrow TA$ .

Złożenie morfizmów  $f : A \rightsquigarrow B$  oraz  $g : B \rightsquigarrow C$  to z kolei

$$A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{\mu_C} TC$$

#### Lemat 1.23

Składanie morfizmów w kategorii  $\mathcal{C}_T$  jest łączne.

#### Dowód

Niech  $f : A \rightsquigarrow B$ ,  $g : B \rightsquigarrow C$  oraz  $h : C \rightsquigarrow D$  będą morfizmami w kategorii  $\mathcal{C}_T$ . Chcemy pokazać, że  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Z definicji wiemy, że  $h \circ g = \mu_D \circ Th \circ g$ , ale ponieważ podkładamy pod to  $f$ , to musimy nałożyć na niego funktor  $T$ . Mamy diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & TB & \xrightarrow{Tg} & T^2C & \xrightarrow{\mu_C} & TC & \xrightarrow{Th} & T^2D & \xrightarrow{\mu_D} & TD & & h \circ (g \circ f) \\
 \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & & ? & & \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & & \\
 A & \xrightarrow{f} & TB & \xrightarrow{Tg} & T^2C & \xrightarrow{T^2h} & T^3D & \xrightarrow{T\mu_D = \mu_{TD}} & T^2D & \xrightarrow{\mu_D} & TD & & (h \circ g) \circ f
 \end{array}$$

Punktem zapalnym jest ? w diagramie. Jeśli ten prostokąt komutuje, to koniec.

Z naturalności  $\mu : T^2 \rightarrow T$  dostajemy komutujący diagram

$$\begin{array}{ccc}
 T^2C & \xrightarrow{T^2h} & T^3D = T^2(TD) \\
 \mu_C \downarrow & & \downarrow \mu_{TD} \\
 TC & \xrightarrow{Th} & T(TD) = T^2D
 \end{array}$$

czyli

$$\mu_{TD} T^2h = Th\mu_C,$$

co daje nam równość przejścia po pomarańczowych strzałkach na górze (prawa strona równości) i na dole (lewa strona równości).



### Przykład

Dla monady  $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $T(X) = X \cup \{X\}$  z przykładów wyżej, kategoria Kleisliego zawiera jako obiekty wszystkie zbiory. Morfizmy  $A \rightsquigarrow B$  posyłają część elementów  $A$  w "kosmos", czyli singleton  $\{B\}$ . Są to funkcje częściowe! Czyli  $\mathbf{Set}_T = \mathbf{Set}^\delta$  jest kategorią zbiorów z funkcjami częściowymi.

## 24.03.2025 Druga nieobecnoŹ

tutaj kiedyŹ będie wzmianka o modułach

### Definicja 1.24: kategoria algebr

Niech  $(T, \eta, \mu)$  będie monadą na kategorii  $\mathcal{C}$ . Definiujemy wtedy **kateogrię algebr** na  $T$ , oznaczane  $\mathbf{alg}_T$ , jako kategorię ktorej

**obiekty** to pary  $(\theta, c)$ , gdzie  $\theta : Tc \rightarrow c$

**morfizmy**  $\mathbf{alg}_T((\theta, c), (\theta', c'))$  to odwzorowania  $f \in \mathcal{C}(c, c')$  takie, że komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} Tc & \xrightarrow{Tf} & Tc' \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta' \\ c & \xrightarrow{f} & c' \end{array}$$

Naturalnie, pytamy o istnienie obiektów początkowych i koŹcowych w tej kategorii.

### Przykład

Niech  $T \equiv c$  będie funktorem stałym. Wtedy  $(\theta, x)$  jest obiektem początkowym, jeśli dla kaŹdego  $(\psi, y)$  jest dokładnie jeden komutujący diagram

$$\begin{array}{ccc} Tx = c & \xrightarrow{Tf=id_c} & c = Ty \\ \downarrow \theta & & \downarrow \psi \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

czyli  $\psi = f \circ \theta$ . Możemy wywnioskować, że  $(\theta, x) = (id_c, c)$  i wtedy dla kaŹdego innego  $(\psi, y)$  będie jedyny morfizm  $f = \psi$  spełniający diagram.

## 1. Kategoria Eilenberga-Moore'a

### Definicja 1.25: Eilenberg-Moore

Kategoria **Eilenberga-Moore'a** dla  $T$  (kategorię  $T$ -algebra), oznaczaną jako  $\mathcal{C}^T \subseteq \mathbf{alg}_T$ , jest podkategorią  $\mathbf{alg}_T$  w ktorej

**obiekty** to pary  $(\theta, a)$ ,  $a \in \mathcal{C}$ ,  $\theta : Ta \rightarrow a$  dla ktorych komutują diagramy w  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\eta_a} & Ta \\ & \searrow 1_a & \downarrow \theta \\ & & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^2a & \xrightarrow{\mu_a} & Ta \\ Ta \downarrow & & \downarrow \theta \\ Ta & \xrightarrow{\theta} & a \end{array}$$

**morfizmy**  $f: (\theta, a) \rightarrow (\varphi, b)$  s mapami  $f: a \rightarrow b$  w  $\mathcal{C}$  takie, e komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} Ta & \xrightarrow{Tf} & Tb \\ \theta \downarrow & & \downarrow \varphi \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

### Lemat 1.26

Dla każdej monady  $(T, \eta, \mu)$  na kategorii  $\mathcal{C}$  istnieje para funktorów sprzezonych

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \end{array} \mathbf{alg}_T$$

ktora indukuje monad  $(T, \eta, \mu)$ .

### Dowód

ja kiedyŝ bed mia czas w życiu



## 31.03.2025 we back in business

### Lemat 1.27

$L$  jest lewo dołączony do  $RJ$ ???

### Dowód

tutaj będzie jakiś dowód



### Przykłady

1.  $F : \text{Set} \rightarrow \text{Monoid}$ ,  $U : \text{Monoid} \rightarrow \text{Set} \rightarrow$  wolny monoid  $\iff$  słowa z konkatenacją  
 $\text{Set} \xrightarrow{T} \text{Set}$  zbiór idzie w listę,  $\eta : x \mapsto [x]$  idzie w jednoelementową listę,  $\mu$  to spłaszczanie list
2.  $F : \text{Set} \rightarrow \text{AbMonoid}$  przedłużamy  
tutaj  $X \mapsto \{f : X \rightarrow \mathbb{N}, f = 0 \text{ skończenie wiele razy}\}$ ,  $\eta : x \mapsto \delta_x$  (delta diraca),  
 $\mu(\sum_n m_n \sum_x n_x x) = \sum (\sum m_n n_x) x$
3.  $\text{Vect} \xrightarrow{F} \text{AbAlg}_k$ ,  $V \mapsto \oplus S^n V$  podprzestrzeń  $V^{\otimes n}$  niezmiennicza na  $S_n$ .  $\eta$  jest włożeniem
4.  $F : \text{Vect} \rightarrow \text{Alg}_k$ ,  $V \mapsto \oplus V^{\otimes n}$

## 1. Diagramy strunowe [string diagrams]

Do tej pory rysowaliśmy kropki jako kategorie, a strzałki jako funktory. Zmieniamy teraz konwencję i piszemy funktory jako kropki oraz kategorie jako kreski.

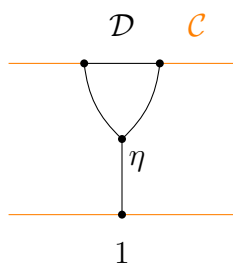
$$\mathcal{E} \quad \mathcal{D} \quad \mathcal{C}$$

dokończyć rysunek wyżej

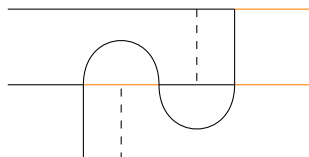
Niech teraz  $L \vdash R$  będzie parą funktorów pochodnych i  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$ .

Diagramy czytamy od dołu do góry i od lewej do prawej.

Tutaj mamy narysowany unit



$(\varepsilon 1_L)(1_L \eta)$  to z kolei



zdjęcia + obrazki dla monady

maybe, reader monad

## 01.04.2025 humpty dumpty

$$\mathcal{P} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$$

$$X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\eta(x) = \{x\}$$

$$\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}$$

$$\mu_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$$

Liczmy teraz  $\text{Set}_{\mathcal{P}}$ , a potem  $\text{Set}^{\mathcal{P}}$

$$\text{Set}(X, \mathcal{P}(Y)) = \mathcal{P}(X \times Y)$$

$$X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}^2 Z \rightarrow \mathcal{P} Z$$

$$C = \{(x, z) : \exists y (x, y) \in A, (y, z) \in B\}$$

$$C = AB, \text{ bo } xCz \iff \exists y xAyBz$$

$$\theta(\bigcup \mathcal{A}) = \theta(\{\theta(A) : A \in \mathcal{A}\}), \quad \theta(\{x\}) = x$$

$$a \leq b \iff \theta(\{a, b\}) = b$$

$$1. a \leq a \quad 2. a \leq b \leq c \implies a \leq c$$

$$\theta(\{a, c\}) = \theta(\{\theta(\{a\}), \theta(\{b, c\})\}) = \theta(\{a, b, c\}) = \theta(\{\theta\{a, b\}, \theta\{c\}\}) = \theta(\{b, c\}) = c$$

$$3. \theta(A) \geq A$$

$$\text{Niech } a \in A, \theta(\{a, \theta\{A\}\}) = \theta(a \cup A) = \theta(A)$$

$$4. b \geq A \implies b \geq \theta(A)$$

$$\theta(\{\theta\{b\}, \theta\{A\}\}) = \theta(b \cup A) = \theta(\bigcup \{b, a\}) = \theta(\theta\{b\}) = b$$

$\bigwedge X$  to najmniejsze ograniczenie górne (ang. meet)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(Y) \\ \downarrow \bigwedge & & \downarrow \bigwedge \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Funktor zapominania i rozpinania grupy wolnej  $\text{Set}$ ,  $Ab$  i bierzemy  $T = UF$  i mówimy, że o kategorii Kleislego myślimy jako o wolnych modułach abelowych.

tutaj zdjecie koloroffe, on tam definiował funktor monadyczny

definiujemy przestrzeń afiniczną przy pomocy algebr Eilenberga-Moore'a

Mamy  $Aff_k : Set \rightarrow Set$ , zbiorowi przyporządkowuje skończone kombinacje afiniczne

$$Aff_k(X) = \left\{ \sum a_x x : a_x = 0 \text{ p.w. } \sum a_x = 1 \right\}$$

$\eta$  robi  $X \ni x \mapsto \sum \delta_{x,y} y$

$\mu$  to "wrzucić współczynniki pod jedną sumę"

kategoria korespondencji = kategoria Kleisliemonady monady zbioru potęgowego (continuation monad)

tutaj jak to działa w programowaniu funkcyjnym

$\mathcal{D}$  jest pełną podkategorią  $\mathcal{C}$  i włożenie ma prawy dołączony

$\mathcal{D}$  grupy abelowe beztorsyjne,  $\mathcal{C}$  wszystkie grupy abelowe

### Fakt 1.28

Niech  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  będzie pełną podkategorią i  $L\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  będzie lewym dołączonym do włożenia jest monadycznym dołączeniem



**07.04.2025**

Poprawda:  $F : c'c$  jest epimorfizmem, jeśli dla wszystkich  $g_1, g_2 : c''c' g_1 f = g_2 f \implies g_1 = g_2$ .  
 $f$  jest rozszczepialnym epimorfizmem, jeśli istnieje  $f' : cc'$  takie, że  $f \circ f' = id_{c'}$ .

W Set epimorfizmy rozszczepiają się  $\iff$  aksjomat wyboru: dla każdej rodziny niepustych zbiorów istnieje selektor  $\mathcal{A}$ -rodzina niepustych zbiorów, to istnieją  $f' : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A} : f'(A) \in A$ .

**Twierdzenie 1.29**

Niech  $(T, \mu, \eta)$  będzie monadą. Są równoważne

1.  $\mu : T^2 \implies T$  jest izomorfizmem ( $\mu_c$  jest izo)
2. i tak dalej