GRUPA PODSTAWOWA

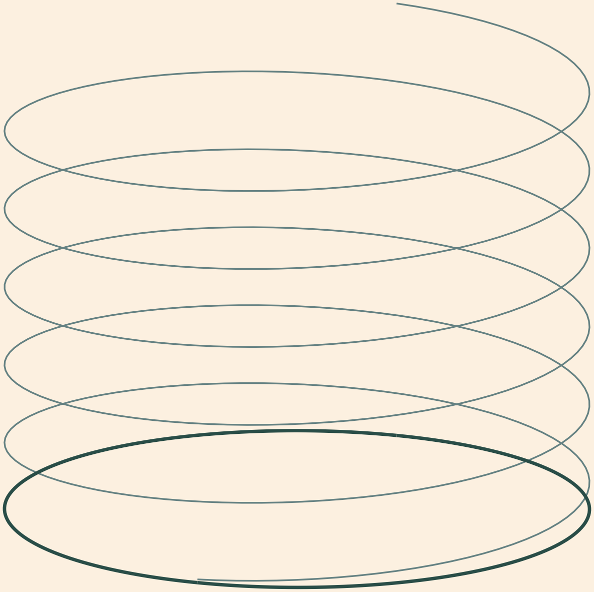
topologia algebraiczna

Pozwala rozróżnić przestrzenie badając ile rożnych, czyli niedających się przekształcić w siebie bez rozcinania, pętli można w niej znaleźć. Na przykład

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

bo mamy tylko jedną pętlę, którą możemy wielokrotnie nawijać na siebie.

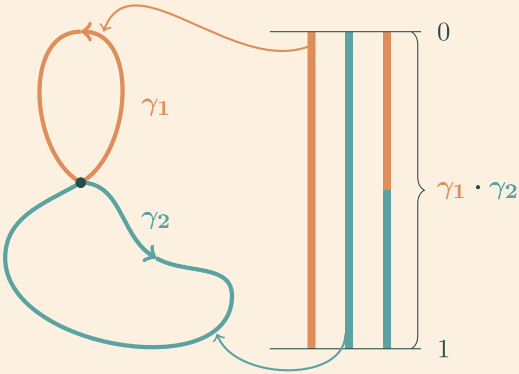
Grupę podstawową okręgu S^1 często ilustruje się helisą zawieszoną nad okręgiem. To, ile razy obejdziemy S^1 po sprężynce oznacza, który element grupy podstawowej reprezentujemy.



Niech (X, x) będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionym punktem $x \in X$. Przez **pętlę** na (X, x) rozumiemy ciągłe odwzorowanie

$$\gamma : [0, 1] \to (X, x)$$

takie, że $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.
Mając dwie pętle γ_1 i γ_2 możemy wyprodukować nową pętle, $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, która najpierw podróżuje trasą wyznaczoną przez γ_1, a potem przez γ_2. Czy umiesz wyrazić to wzorem?



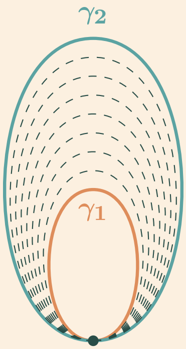
Dwie pętle γ_1, γ_2 są **homotopijne**, jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie

$$h : [0,1] \times [0,1] \to X$$

takie, że

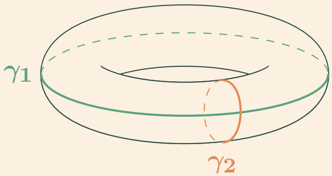
- $h(0,t) = h(1,t) = x$ dla wszystkich t
- oraz $h(y,i) = \gamma_i(y)$ dla $i = 0, 1$.

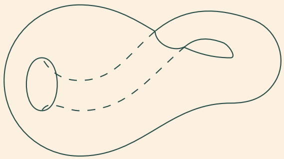
Pierwsza współrzędna homotopii opisuje położenie y na pętli, a druga przekształcanie tej pętli w czasie t.



Relacja homotopijności jest **relacją równoważności pętli**. Dwie pętle są w tej samej klasie abstrakcji, jeśli **jedną jesteśmy w stanie w ciągły sposób przekształcić w drugą**.

Możemy więc zdefiniować **grupę podstawową $\pi_1(X, x)$** zbazowanej przestrzeni (X, x) w formalny sposób jako *grupę klas abstrakcji relacji homotopijnej równoważności pętli na przestrzeni* (X, x) z działaniem składania pętli.





$\pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$

$\pi_1(K) = \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$