Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

1. Wstępy

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n \;:\; g_2 = g_1 s_1, ..., s_n,\; s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} \;:\; g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. lewo-niezmiennicza, czyli $(\forall\ \gamma \in G)\ ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

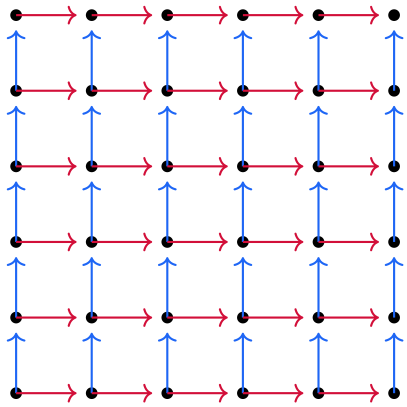
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

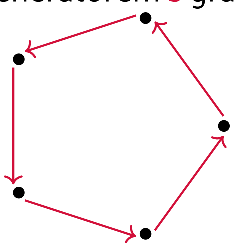
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overbrace{(1,0)}^{s}, \overbrace{(0,1)}^{t}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p-kąt



3. TO DO parkietarz kwadratami

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez automorfizmy zachowując krawędzie oraz ich etykiety. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami $g \xrightarrow{s} gs$ pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się $\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs$.

Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S, której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie (lewa-niezmienniczość).

Innym wariantem grafu Cayleya jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy $V = G$, ale krawędzie są niezorientowane: $E = \{\{g_1, g_2\} : d_S(g_1, g_2) = 1\}$. W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedyńczą, nieskierowaną krawędź

Dla surjekcji $\pi : F_S \to G$, gdzie $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$ możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np. $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$

$$\begin{tikzcd} & g_2 \\ g_1 \arrow[ur, bend left, "s_1"] \arrow[ur, bend right, "s_2"'] & \end{tikzcd}$$

Graf Cayleya grupy wolnej to nieskończone drzewo stopnia równego ilości $2\cdot$ ilość generatorów.

Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$ to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...