VIII UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Wielomiany

Rozgrzewka

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli $a+b=c+d$ oraz $ab=cd$, to wówczas $a=b$ i $c=d$ lub $a=d$ i $b=c$.

Zadanie 2. Wykonaj dzielenie wielomianów

(1) $(x^6-2x^4+2x^3-2x+1):(x^3-2x+1)$
(2) $(2x^7-3x^6+4x^4-x^2+2x+4):(2x^5+x^4-1)$
(3) $(x^4+x^3+10x^2+9x+9):(x^2+2x+1)$
(4) $(38x^3+7x^2-8x-1):(x+\frac{1}{2})$

Zadanie 3. Rozłóż na czynniki wielomiany

(1) $x^3+3x^2-4x-12$
(2) $2x^4-6x^3-8x^2$
(3) $9x^2-30x+25$
(4) $x^4+3x^3-15x^2-19x+30$

Zadanie 4. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x-5)$ daje resztę 1, a przy dzieleniu przez $(x+3)$ daje resztę -7. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $x^2-2x-15$.

Zadanie 5. Dany jest wielomian $W(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Pokaż, że jeśli $W(x)$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste, to na to, żeby istniało m takie, że $W(x+m)=x^4+px^2+q$ potrzeba i wystarczy, aby suma pewnych dwóch pierwiastków była równa sumie pozostałych dwóch.

Zadanie 6. Podaj przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia szóstego, który w wyniku podzielenia przez wielomian $P(x)=2x^3+8$ daje resztę będącą wielomianem stopnia drugiego.

Zadanie 7. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $(x^2-12x+11)$ resztę $(990x-889)$. Wykaż, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

Zadanie 8. Dla jakich wartości parametrów a, b wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, jeśli:

Materiały przygotowane przez Weronika Jakimowicz.

(1) $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$, $P(x) = x^2 - 3x + 3$
(2) $W(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + ax + 2$, $P(x) = x^2 + 2x + b$

Zadanie 9. Wielomian $W(x)$ jest stopnia drugiego i ma jeden pierwiastek dwukroty równy 3. Czy wielomian $P(x) = [W(x)]^3(x^3 + 5x^2 - 9x - 45)$ ma pierwiastki wielokrotne? Jeśli tak, to jakie? Podaj krotność pierwiastka wielokrotnego.

Zadanie 10. Przedstaw wielomian
(1) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3$
(2) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

w postaci iloczynu wielomianów o współczynnikach całkowitych (dla W - całkowitych dodatnich).

Zadanie 11. Wiadomo, że x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Ułóż równanie, którego rozwiązaniami są $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1x_2$ i $y_3 = x_2x_3$.

Podzielność

Jeśli $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a $a, b \in \mathbb{Z}$, to wówczas
$$a - b | P(a) - P(b).$$

Zadanie 12. Dla każdej liczby dodatniej a wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianiu $x^3 + (a + 2)x^2 - x - 3a$.

Zadanie 13. Udowodnić, że jeżeli liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 + px - 1 = 0$, gdzie p jest liczbą nieparzystą, to dla każdego naturalnego n liczby $x_1^n + x_2^n$ i $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ są całkowite i względnie pierwsze.

Zadanie 14. Dane są trzy różne liczby całkowite a, b, c. Udowodnić, że nie istnieje wielomian $w(x)$ o współczynnikach całkowitych taki, że $w(a) = b$, $w(b) = c$ i $w(c) = a$.

Zadanie 15. Pokaż, że jeśli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych dla czterech różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 1, to nie ma liczby całkowitej p takiej, że $W(x) = -1$.

Zadanie 16. Przedstawić wielomian $x^4 + x^2 + x^2 + x + 1$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wielomianów niejednakowego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.