

# Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Informacje wstępne</b>	<b>1</b>
02.10.2024	Grafy Cayleya . . . . .	1
1.	Metryka słów . . . . .	1
2.	Graf Cayleya . . . . .	1
3.	Quasi-izometrie . . . . .	3
4.	Przestrzenie geodezyjne . . . . .	5
5.	Lemat Milnora-Švarca . . . . .	6
6.	Grupy współmierne . . . . .	7
09.10.2024	Lemat Milnora-Švarca . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Niezmienniki izometrii</b>	<b>13</b>
16.10.2024	Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni . . . . .	13
1.	Granica odwrotna . . . . .	14
2.	Przestrzeń końców . . . . .	16
23.10.2024	Przestrzeń końców jest niezmiennikiem q.i. . . . .	19
1.	Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie) . . . . .	19
2.	Dowód - końce są niezmiennikiem q.i. . . . .	20
30.10.2024	$\cos$ . . . . .	23
13.11.2024	Tempo wzrostu grupy . . . . .	25
1.	Abstrakcyjne funkcje wzrostu . . . . .	25
2.	Tempo wzrostu grupy . . . . .	25
3.	Grupy o wzroście wielomianowym . . . . .	28
04.12.2024	To be named 2 . . . . .	30

# 1. Informacje wstępne

02.10.2024    Grafy Cayleya

## 1. Metryka słów

### Definicja 1.1: metryka słów

Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych  $g_1, g_2 \in G$  **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie  $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$ .

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. **lewo-niezmiennicza**, czyli  $(\forall \gamma \in G) ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że  $G$  działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

## 2. Graf Cayleya

### Definicja 1.2: graf Cayleya

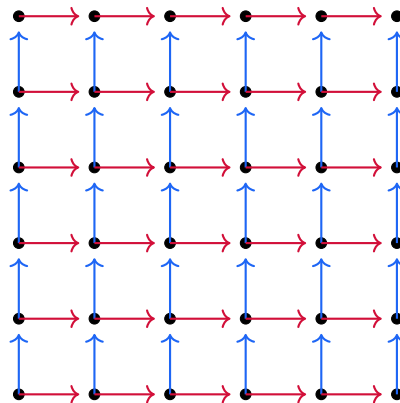
Niech  $G$  będzie grupą, a  $S$  zbiorem jej generatorów.  $C(G, S)$  to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami  $G$  i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

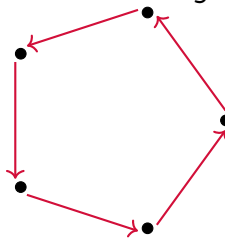
gdzie  $g \in G$  i  $s \in S$ .

## Przykłady

1. Dla  $G = \mathbb{Z}^2$  oraz  $S = \{\overset{s}{(1, 0)}, \overset{t}{(0, 1)}\}$  graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu  $p$  z generatorem  $s$  graf Cayleya to  $p$ -kąt



3. **TO DO** parkietarz kwadratami

Innym wariantem grafu Cayleya niż zdefiniowany wcześniej jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy  $V = G$ , ale krawędzie są niezorientowane:  $E = \{\{g_1, g_2\} : ds(g_1, g_2) = 1\}$ . W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedynczą, nieskierowaną krawędź

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa  $G$  działa na nim przez **automorfizmy zachowujące krawędzie oraz ich etykiety**. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami

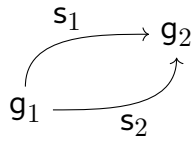
$$g \xrightarrow{s} gs$$

pod działaniem elementu  $\gamma \in G$  staje się

$$\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs.$$

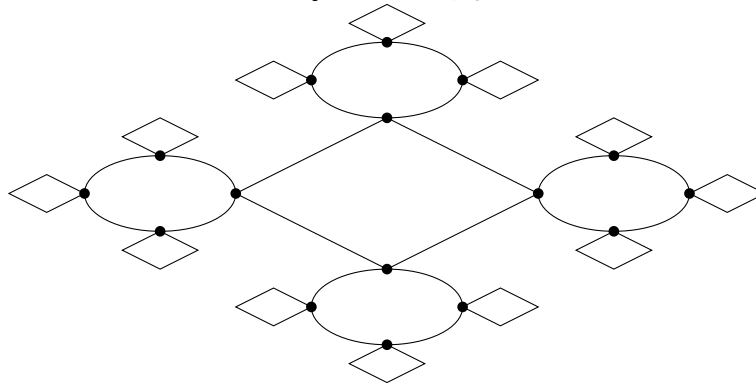
Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie  $G$  o generatorach  $S$ , której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy  $G$  jest więc **działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie** (lewa-niezmienniczość).

Dla suriekcji  $\pi : F_S \rightarrow G$ , gdzie  $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$  możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np.  $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$ )



### Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy  $(G_1, S_1)$  i  $(G_2, S_2)$  graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf  $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$  to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...



## 3. Quasi-izometrie

### Definicja 1.4: quasi-izometria

Dla dwóch przestrzeni metrycznych  $(X_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mówimy, że przekształcenie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  (niekoniecznie ciągłe) jest **quasi-izometryczne zanurzenie**, gdy istnieje  $C \geq 1$  oraz  $L \geq 0$  takie, że  $\forall x, y \in X_1$  zachodzi

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - L \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_1(x, y) + L.$$

Ponadto, jeśli istnieje  $D \geq 0$  takie, że  $f(X_1)$  jest  $D$ -gęsty ( $D$ -siecią) w  $X_2$ , tzn.

$$(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1) d_2(y, f(x)) \leq D$$

to wtedy  $f$  jest **quasi-izometrią**.

Zwykle przyjmujemy  $L = D$  (większe z dwóch) i mówimy o tzw.  **$(C, L)$ -quasi-izometrii**.

**Fakt 1.5: własności q.i.**

1. złożenie q.i. jest q.i
2. dla dowolnej q.i.  $f : X_1 \rightarrow X_2$  istnieje  $g : X_2 \rightarrow X_1$  takie, że istnieje  $D \geq 0$  takie, że

$$(\forall x_2 \in X_2) d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq D$$

$$(\forall x_1 \in X_1) d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq D$$

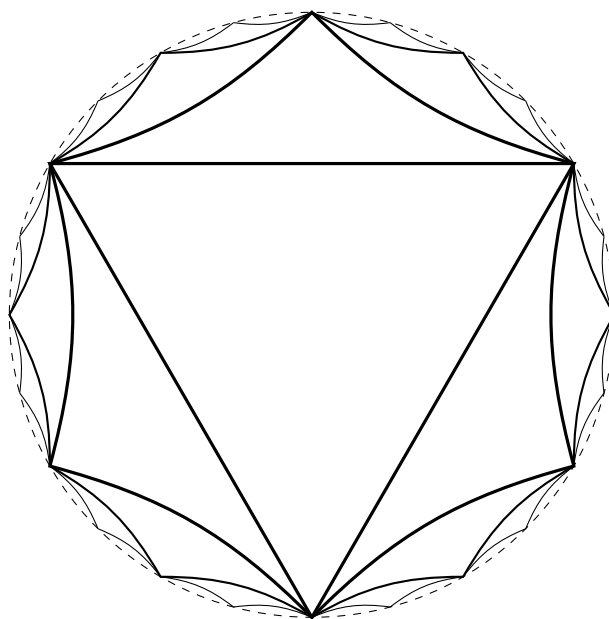
to wówczas  $g$  też jest q.i.

**Definicja 1.6: quasi-izometryczne rozmaitości**

Mówimy, że  $(X_1, d_1)$  jest quasi-izometryczna z  $(X_2, d_2)$  jeśli istnieje q.i.  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Jest to relacja równoważności.

**Przykłady**

1.  $(X, d)$  jest q.i. z punktem  $\iff X$  jest ograniczone.
2.  $X$  jest q.i. z dowolną swoją  $D$ -sieciami  $Y \subseteq X$  przez inkluzję.
3. Dla dowolnego  $B$  ograniczonego  $X \times B \cong X$  są q.i.
4. Dowolne dwa drzewa regularne  $T_k$  stopnia  $k \geq 3$  są ze sobą q.i.
5. Graf Farey'a, nieskończony konstruowany jak niżej, z metryką kombinatoryczną (każda krawędź ma długość 1) jest q.i. z drzewem przeliczalnego stopnia  $T_\omega = T_{\aleph_0}$ .



**Fakt 1.7**

Niech  $G$  będzie grupą skończenie generowaną i niech  $S_1, S_2$  jej skończonymi zbiorami generatorów. Wówczas odwzorowanie tej grupy jako dwóch przestrzeni metrycznych  $(G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$  gdzie zmieniamy metrykę słów jest q.i.

**Dowód**

Dokładniej,  $\text{id}_G$  jest  $(C, L)$ -q.i. dla

$$C = \max\{\max\{|s_1|_{S_2} : s_1 \in S_1\}, \max\{|s_2|_{S_1} : s_2 \in S_2\}\},$$

gdzie  $|g| = d(1, g) = \min\{n : g = s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\}$ , oraz  $L = 0$ .

**Wniosek 1.8**

Skończenie generowana grupa  $G$  determinuje jednoznacznie klasę quasi-izometrii. Innymi słowy, skończenie generowana grupa jest **jednoznaczny obiekt quasi-metryczny**.

**4. Przestrzenie geodezyjne**

**Geodezyjną** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  łączącą punkty  $a, b \in X$  nazwiemy izometryczne włożenie

$$\gamma : [0, d(a, b)] \rightarrow X$$

takie, że  $\gamma(0) = a$  i  $\gamma(d(a, b)) = b$ .

**Definicja 1.9: przestrzeń geodezyjna**

Powiemy, że przestrzeń  $X$  jest przestrzenią geodezyjną, jeśli dla wszystkich par punktów  $a, b \in X$  istnieje geodezyjna pomiędzy nimi (niekoniecznie jedyna).

**Definicja 1.10**

Przestrzeń  $X$  jest **właściwa**, gdy domknięte kule  $B_r(x)$  w  $X$  są zwarte dla dowolnych  $r < \infty$  i  $x \in X$ .

Każda przestrzeń właściwa jest lokalnie zwarta oraz zupełna, z kolei dla przestrzeni geodezyjnych jeśli przestrzeń jest właściwa, to jest też zwarta i zupełna.

## Przykłady

1. Spójne i gładkie rozmaitości Riemannowskie są przestrzeniami metrycznymi z metryką  $\rho$  minimalizowania długości krzywych gładkich łączących punkty.  
Gdy  $(M, \rho)$  jest zupełna, to  $M$  jest geodezyjna oraz właściwa.
2. Graf Cayleya skończenie generowanej grupy  $G$  jest przestrzenią geodezyjną właściwą.

## 5. Lemat Milnora-Švarca

### Lemat 1.11: Milnora-Švarca

Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a  $\Gamma$  grupą działającą na  $X$  przez izometrie właściwie i kowarcie. Wówczas  $\Gamma$  jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z  $X$ . Dokładniej,  $\forall x_0 \in X$  odwzorowanie  $\Gamma \rightarrow X$  określone przez  $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  jest quasi-izometrią.

Mówimy, że grupa działa

**właściwie**, gdy dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  zbiór  $\{g \in \Gamma : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony

**kowarcie**, gdy istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że rodzina  $\{g \cdot K : g \in \Gamma\}$  pokrywa  $X$ .

## Przykłady

1. Działanie grupy  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl.}})$  przez przesunięcia jest izometrią. Czyli  $\mathbb{Z}^n \stackrel{\text{q.i.}}{\cong} \mathbb{R}^n$ .
2. Grupa symetrii regularnego (co najmniej dwie symetrie w dwóch różnych kierunkach) parkietu/wzorca działa na  $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl.}})$  geometrycznie.
3. Kowarte, dyskretne podgrupy w grupach Liego  $G$  działają lewostronnie na  $G$  w sposób geometryczny.
4.  $\Pi_1(\text{sk. kompleks sympleksyjny}) \curvearrowright \tilde{K}$

### Konsekwencje lematu Milnora-Švarca

1. Jeśli  $H \leq G$  jest grupą skończonego indeksu w grupie skończenie generowalnej, to  $H \curvearrowright (G, S)$  jest działaniem geometrycznym. Stąd  $H$  jest q.i. z  $G$  i jest skończenie generowalna.
2. Niech ciąg

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{q} G \longrightarrow 1$$



gdzie  $q$  jest odwzorowaniem ilorazowym, będzie ciągiem dokładnym. Załóżmy, że  $K$  i  $G \cong \Gamma/K$  są skończenie generowalne. Wówczas  $\Gamma \mathcal{C}(G, S)$  przez  $\gamma \cdot g = q(\gamma)g$  jest działaniem geometrycznym. Stąd  $\Gamma$  jest skończenie generowana i  $q : \Gamma \rightarrow G$  jest q.i..

## 6. Grupy współmierne

### Definicja 1.12

Dwie grupy  $G_1, G_2$  są **współmierne** (commensurable), gdy posiadają izomorficzne podgrupy skończonego indeksu.

### Wniosek

Grupy współmierne są q.i..

Można więc zadać pytanie, czy q.i. nie sprowadza się do współmierności? Okazuje się, że tak nie jest.

### Definicja 1.13

Grupa  $G$  jest współmiernościowo sztywna, jeśli każda  $H$  q.i. z  $G$  jest współmierna z  $G$ .

### Przykłady

1. Wszystkie grupy skończone są współmiernościowo sztywne, bo  $H$  jest q.i. ze skończoną grupą  $G \iff H$  jest samo skończone.
2. Grupy wirtualnie cykliczne - grupy zawierające cykliczną podgrupę skończonego indeksu, są współmiernościowo sztywne.
3. Grupy wirtualnie  $\mathbb{Z}^n$ .
4. Grupy wirtualnie wolne, np.  $K_1 \# K_2$  dla skończonych  $K_1, K_2$ .
5. Grupy powierzchni  $\pi_1(z_g)$  dla  $g > 1$ .

## 09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

### Lemat 1.14: Milnora-Švarca

Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a  $\Gamma$  grupą działającą na  $X$  przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas  $\Gamma$  jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z  $X$ . Dokładniej,  $\forall x_0 \in X$  odwzorowanie  $\Gamma \rightarrow X$  określone przez  $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  jest quasi-izometrią.

Mówimy, że grupa działa

**właściwie**, gdy dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  zbiór  $\{g \in \Gamma : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony

**kozwarcie**, gdy istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że rodzina  $\{g \cdot K : g \in \Gamma\}$  pokrywa  $X$ .

### Dowód

Wybermy  $x_0 \in X$ . Z kozwartości tego działania, istnieje promień  $R > 0$  taki, że dla kuli  $B = B_R(x_0)$  o środku w  $x_0$  taki, że rodzina przesunięć kuli  $\{g \cdot B : g \in \Gamma\}$  jest pokryciem  $X$ . Rozważmy zbiór  $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$  niewielkich przesunięć kuli  $B$ . Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni  $X$ , zbiór  $S$  jest skończony. Ponadto, zbiór jest ten jest symetryczny  $S = S^{-1}$  ( $s \in S \implies s^{-1} \in S$ ), bo jeśli  $s \cdot B \cap B \neq \emptyset$  to również  $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$ .

Określamy  $v := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma - S - \{1\}\}$  czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

**Claim 1:**  $v > 0$

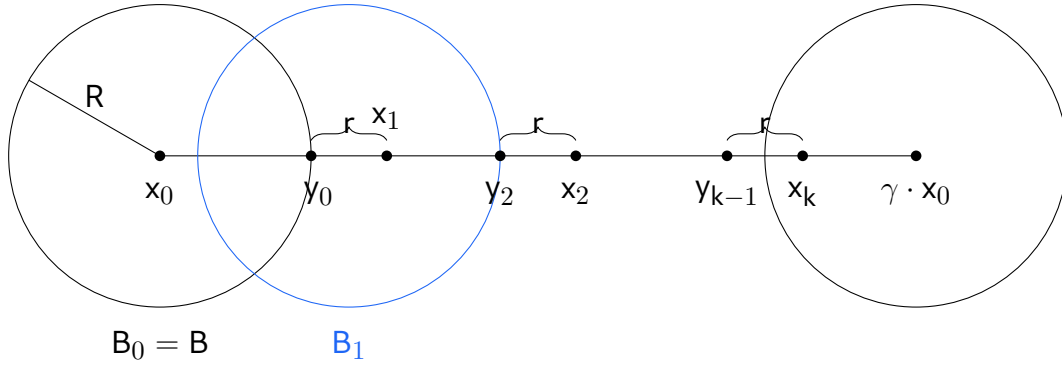
Dla każdego  $g \in \Gamma - S - \{1\}$  wiemy, że  $d(B, g \cdot B) > 0$ . Gdyby to infimum  $v = 0$ , to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów  $g_n \in \Gamma$  takich, że  $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$  maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty  $z_n \in B$  takie, że  $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$  (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg  $n_k$  taki, że  $z_{n_k} \in z_0 \in B$ , a stąd  $d(z_0, g_n \cdot B) \searrow 0$ . To oznacza, że  $B_{2R}(x_0)$  przecina niepusto nieskończenie wiele spośród przesunięć  $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$ , a to jest sprzeczne z właściwością działania.

**Claim 2:**  $S$  generuje  $\Gamma$  oraz dla każdego  $\gamma \in \Gamma$

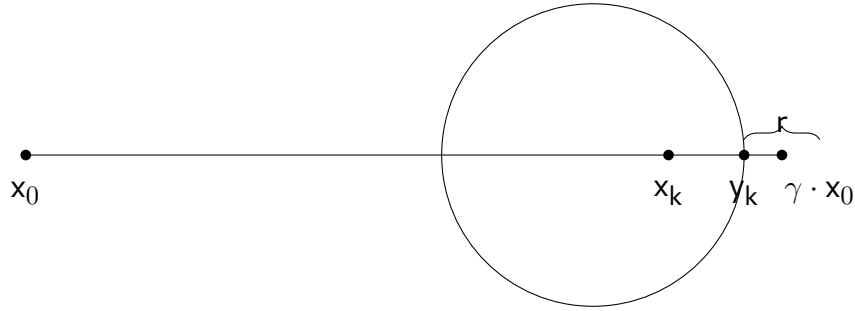
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

gdzie  $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$ .

I scenariusz:



## II scenariusz



Niech  $y_0$  będzie punktem na geodezyjnej  $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$  z kuli  $B$  najdalszy od  $x_0$  na tej geodezyjnej. W odległości  $r$  od  $y_0$  obierzmy punkt  $x_1$ . Wtedy odcinek  $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że  $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$ , czyli  $x_1 \in s_1 \cdot B$ . Iterujemy się tak aż kulą  $B_k = s_k s_{k-1} \dots s_1 \cdot B$  trafimy w  $\gamma \cdot x_0$ .

W scenariuszu I mamy  $\gamma \cdot B \cap s_k \dots s_1 \cdot B \neq \emptyset$ , bo  $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$  oraz  $\gamma x_0 \in s_k \dots s_1 \cdot B$ . W takim razie  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$ . Czyli zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II  $d(\gamma x_0, s_k \dots s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k \dots s_1 \cdot B) < r$ . W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k \dots s_1$
2.  $s_1^{-1} \dots s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k \dots s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach  $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$ , bo  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$  bo tyle razy udało nam się odłożyć  $r$  na geodezyjnej.

Jeśli  $d_S(1, \gamma) = m$ , a  $\gamma = s_1 \dots s_m$ , to wówczas

$$d_X(s_1, \dots, s_k \cdot x_0, s_1 \dots s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 \dots s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności  $f(\gamma) \rightarrow \gamma \cdot x_0$ , które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów  $d_S$  wiemy, że  $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$ , czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo- $\Gamma$ -niezmienniczości metryki  $d_X$  na  $X$  mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i  $f$  jest quasi-izometrycznym włożeniem dla  $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$  i  $L = r$ .

Ponadto, obraz  $f(\Gamma)$  jest  $R$ -gęsty (dla  $R$  promienia z początku dowodu) w  $X$ , bo dla każdego  $x \in X$  istnieje  $\gamma \in \Gamma$  takie, że  $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$ . Czyli  $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$ , ale  $\gamma \cdot x_0 = f(\gamma)$ . Stąd  $f$  jest quasi-izometrią.



Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

## Przykłady

1. Grupy podstawowe  $\pi_1(M_1)$ ,  $\pi_1(M_2)$  zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych  $M_1$ ,  $M_2$  o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach  $\text{vol}(M_i)$ .

Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

### Twierdzenie 1.15: Mostowa o sztywności [1968]

Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

Założmy nie wprost, że  $\pi_1(M_1)$  i  $\pi_1(M_2)$  są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu  $H < \pi_1(M_1)$ ,  $H < \pi_1(M_2)$ . Niech  $\bar{M}_1$  i  $\bar{M}_2$  będą nakryciami  $M_1$ ,  $M_2$  wyznaczone przez  $H$ . Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc  $\bar{M}_i$  są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.

Z teorii nakryć wiemy, że  $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$ . Stąd wynika, że  $\overline{M}_1$  jest izometryczna z  $\overline{M}_2$ , a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\text{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \text{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\text{vol}(M_1)}{\text{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1):H]}{[\pi_1(M_2):H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

2. Niech  $G_A$  będzie produktem półprostym  $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ , gdzie  $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  jest zadane macierzą  $A \in \text{Sl}_2\mathbb{Z}$ . Chcemy, żeby  $A$  było macierzą hiperboliczną (tzn.  $|\text{tr}(A)| > 2$ ) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa  $G_A$  jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego  $\text{Sol} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ , gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$



## 2. Niezmienniki izometrii

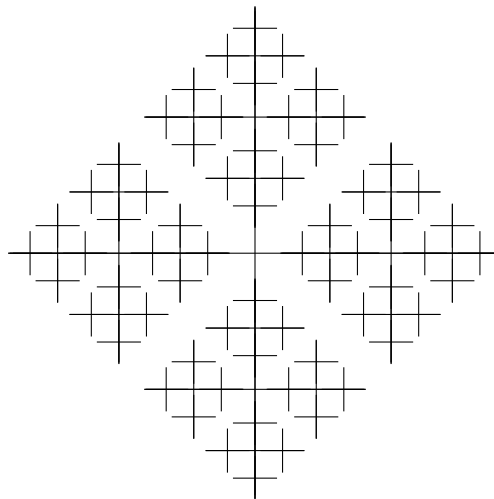
### 16.10.2024 Końce (w nieskończoności) grup przestrzeni

Zanim zaczniemy, zrobmy szybką motywację, czyli graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}$  z jednym generatorem (rysunek 2.1)



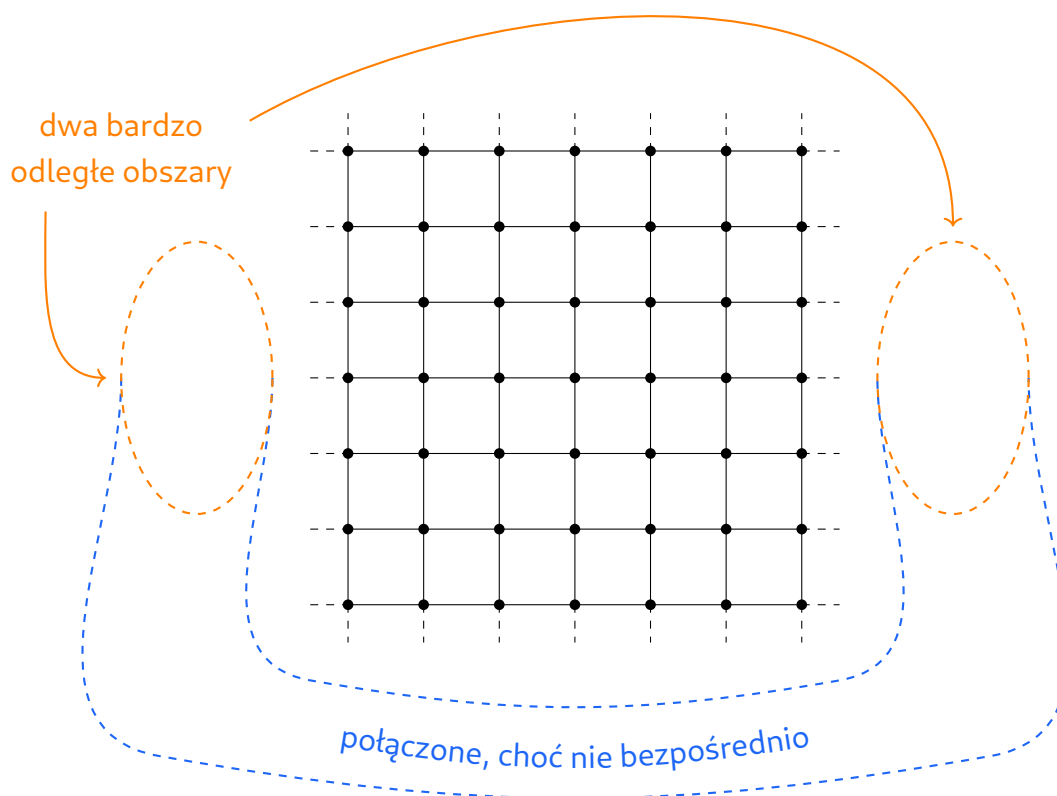
Rysunek 2.1: Graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}$  ma dwa końce.

który ma "dwa końce". Natomiast grupa wolna  $F_2$  o dwóch generatorach ma "nieskończenie wiele końców" (rysunek 2.2).



Rysunek 2.2: Graf Cayleya grupy wolnej  $F_2$  ma nieskończenie wiele końców.

Z drugiej strony, grupa  $\mathbb{Z}^2$  ma jeden koniec: jeśli weźmiemy dwa bardzo odległe od siebie obszary, to one są ze sobą połączone, chociaż jest to połączenie "bardzo odległe" (obrazek 2.3).



Rysunek 2.3: Graf Cayleya grupy  $\mathbb{Z}^2$  ma jeden koniec.

Każda przestrzeń skończona, np. graf Cayleya grupy skończonej, ma 0 końców.

Chcemy z liczby końców przestrzeni (albo przestrzeni końców) uczynić tzw. niezmiennik asymptotyczny, czyli cechę niezmienną na quazi-izometrie właściwych geodezyjnych przestrzeni metrycznych, a co za tym idzie - przestrzeni skończenie generowanych.

## 1. Granica odwrotna

### Definicja 2.1: zbiór skierowany

Zbór z częściowym porządkiem  $(\Lambda, \leq)$  jest **skierowany**, gdy dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  istnieje  $\lambda \in \Lambda$  takie, że  $\lambda \geq \lambda_1$  oraz  $\lambda \geq \lambda_2$ .

### Definicja 2.2: system odwrotny

**System odwrotny** nad zbiorem skierowanym  $\Lambda$  to rodzina zbiorów

$$\mathfrak{X} := \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$



oraz rodzina odwzorowań

$$\mathcal{F} := \{f_{\lambda\mu} : X_\mu \rightarrow X_\lambda : \lambda \leq \mu\}$$

takich, że

1. dla dowolnego  $\lambda$  mamy funkcję identycznościową:  $f_{\lambda\lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
2. dla dowolnych  $\lambda \leq \mu \leq \nu$  złożenia zachowują się dobrze:  $f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$ .

Będziemy oznaczać:  $\underline{X} := (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$

### Definicja 2.3: granica odwrotna

Granica odwrotną systemu  $\underline{X}$  nazywamy zbiór

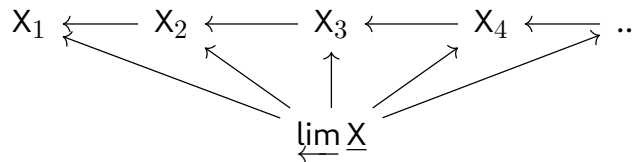
$$\varprojlim \underline{X} = \varprojlim (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F}) := \{\xi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : (\forall \lambda' \leq \lambda) \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda)\}.$$

Elementy  $\xi$  jak wyżej nazywamy **niciami** (threads) w  $\underline{X}$ .

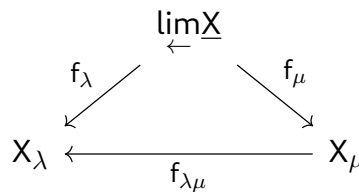
Odwzorowania

$$f_\lambda : \varprojlim \underline{X} \rightarrow X_\lambda$$

takie, że  $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$  nazywamy **odwzorowaniami granicznymi**. O odwzorowaniach granicznych można myśleć jako o odwzorowaniach, które pytają "kim byłem w czasie  $\lambda$ ".



Dla  $\lambda \leq \mu$  diagram



zawsze komutuje.

Kiedy zbiory  $X_\lambda$  są przestrzeniami topologicznymi, zaś  $f_{\lambda\mu}$  są ciągłe, to na granicy odwrotnej  $\varprojlim \underline{X}$  rozważamy również topologię graniczną. Jest to topologia dziedziczona z topologii produktowej na  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ .

Bazą tej topologii są zbiory postaci  $f_\lambda^{-1}(U)$  dla  $\lambda \in \Lambda$  i otwartych  $U \subseteq X_\lambda$ .

**Fakt 2.4**

Granica odwrotna  $\varprojlim \underline{X}$  jest:

1. domkniętym podzbiorem  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ , jeśli  $X_\lambda$  są Hausdorffa,
2. zwarta i metryczna, jeśli  $X_\lambda$  takie są (bo wówczas  $\prod X_\lambda$  jest zwarta i metryczna),
3. zwarta i metryczna, jeśli  $X_\lambda$  są skończone (z topologią dyskretną).

W ostatnim przypadku  $\varprojlim \underline{X}$  nie jest przestrzenią dyskretną, pomimo, że wszystkie zbiory po których bierzemy granicę takie były. Rozważmy następujący przykład, w którym  $\Lambda = \mathbb{N}$ , a wszystkie  $X_\lambda$  są skończone dyskretnie, natomiast  $\varprojlim \underline{X}$  jest niedyskretnie i nieskończone.

**Przykład**

Niech  $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$  i niech  $X_k$  będzie zbiorem wszystkich ciągów 0 – 1 długości  $k$ . Dla  $k \leq m$  rozważamy

$$f_{km} : X_m \rightarrow X_k$$

będące obcięciem ciągu długości  $m$  do początkowego ciągu długości  $k$ . Dostajemy wówczas system odwrotny  $\underline{X} = (\mathbb{N}, \{X_k\}, \{f_{km}\})$  zbiorów skończonych. Wówczas  $\varprojlim \underline{X}$  jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

**2. Przestrzeń końców**

Na tym wykładzie będziemy zajmować się  $X$ , które są właściwymi geodezyjnymi przestrzeniami metrycznymi. Takimi przestrzeniami są np. grafy Cayleya grup skończenie generowanych. Przez zbiór  $\mathcal{K}$  będziemy rozumieć rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów  $K \subseteq X$  z porządkiem inkluzji.

**Definicja 2.5: podzbiór współkońcowy**

Podzbiór  $M \subseteq \Lambda$  zbioru skierowanego  $\Lambda$  nazywamy **współkońcowym**, jeśli

$$(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists \mu \in M) \lambda \leq \mu,$$

wtedy  $(M, \leq)$  też jest zbiorem skierowanym. Dla  $\underline{X} = (\Lambda, \mathfrak{X}, \mathcal{F})$  niech

$$\underline{X}|_M = (M, \{X_\lambda : \lambda \in M\}, \{f_{\mu\mu'} \in \mathcal{F} : \mu, \mu' \in M\})$$

będzie obcięciem  $\underline{X}$  do  $M$ . Wtedy  $\underline{X}|_M$  jest systemem odwrotnym nad  $M$ .

**Fakt 2.6**

$$\varprojlim X = \varprojlim X|_M$$

Przez bijekcję polegającą na obcinaniu nici do  $M$ . Jest ona jednocześnie homomorfizmem.

**Wniosek**

Jeśli  $X_\lambda$  są zwarte i metryczne, zaś  $\Lambda$  posiada przeliczalny podzbiór współkońcowy, to  $\varprojlim X$  jest zwarta i metryczna.

**Przykład**

Rodzina zbiorów zwartych  $\mathcal{K}$  posiada współkońcowy podciąg  $K_i := B_{i \cdot R}(x_0)$  dla  $R > 0$  i pewnego  $x_0 \in X$ .

Dla dowolnego  $K \in \mathcal{K}$  niech  $\Pi_K^X$  będzie zbiorem nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu  $X - K$ .

Przestrzeń geodezyjna jest lokalnie drogowo spójna i każda jej otwarta podprzestrzeń również jest lokalnie drogowo spójna. Stąd każde  $X - K$  też jest lokalnie drogowo spójna. W lokalnie drogowo spójnych przestrzeniach komponenty spójności to to samo co komponenty drogowej spójności.

Dla  $K \subseteq K'$ , każda nieograniczona komponenta spójności  $C' \subseteq X - K'$  zawiera się w dokładnie jednej nieograniczonej komponencie spójności  $C \subseteq X - K$ . Dostajemy więc odwzorowanie

$$f_{KK'} : \Pi_{K'}^X \rightarrow \Pi_K^X$$

takie, że  $f_{KK'}(C') = C$ .

Trójka  $(\mathcal{K}, \{\Pi_K^X : K \in \mathcal{K}\}, \{f_{KK'} : K' \subseteq K\})$  tworzy system odwrotny nad zbiorem skierowanym  $\mathcal{K}$ :

$$\Pi_K^X \xleftarrow{f_{KK'}} \Pi_{K'}^X \xleftarrow{f_{K'K''}} \Pi_{K''}^X$$

**Fakt 2.7**

Dla każdego  $K \in \mathcal{K}$  zbiór  $\Pi_K^X$  jest skończony.

**Dowód**

Weźmy dowolny  $K \in \mathcal{K}$  i  $x_0$  oraz  $r$  takie, że

$$K \subseteq B_r(x_0).$$

Niech  $R > r$  i rozważmy zwartą kulę  $B_R(x_0)$ . Każda nieograniczona komponenta  $C$  spójności w  $X - K$  przecina niepusto sferę  $S_R(x_0)$ , bo  $X$  jest geodezyjna, a więc lokalnie drogowo spójna.

Zatem przekrój  $C \cap B_R(x_0)$  jest niepusty. Wtedy rodzina

$$\{C \cap B_R(x_0) : C \text{ dowolna komponenta dopełnienia } X - K\} \cup \{\overline{B_R(x_0)} = B_R(x_0) - S_R(x_0)\}$$

pokrywa  $B_R(x_0)$ . Dodatkowo, jest to otwarte pokrycie, bo komponenty spójności lokalnie spójnej przestrzeni są otwartymi podzbiorami w tej przestrzeni.

Ze zwartości  $X$  to pokrycie posiada skończone podpokrycie, ale z drugiej strony każdy zbiór postaci  $C \cap B_R(x_0)$  dla nieograniczonych komponent musi przetrwać w każdym podpokryciu, bo zawiera punkty które należą tylko do niego. Stąd nieograniczonych komponent jest skończenie wiele.



### Definicja 2.8: przestrzeń końców

Zbiorem (przestrzeni) końców,  $\text{Ends}(X)$ , właściwej geodezyjnej przestrzeni metrycznej  $X$  nazywamy granicę odwrotną

$$\text{Ends}(X) = \varprojlim(\Pi^X) = \varprojlim(\mathcal{X}, \{\Pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}),$$

gdzie  $\Pi_K^X$  to nieograniczone komponenty w  $X - K$ . Jest to zwarta przestrzeń metryczna.

### Przykłady

1.  $\text{Ends}(\text{ograniczone}) = \emptyset$
2.  $\text{Ends}(\mathbb{Z}^2) = \{\star\}$  to punkt w nieskończoności kraty
3.  $\text{Ends}(\mathbb{Z}) = \{-\infty, \infty\}$  i jest równoliczny z  $\text{Ends}(\mathbb{R})$
4. zbiór końców drzewa  $k$ -regularnego, dla  $k \geq 3$ , jest izomorficzny ze zbiorem Cantora
5. dla nieskończonych grup skończenie generowanych  $G_1, G_2$  przestrzeń końców  $\text{Ends}(G_1 \star G_2)$  jest nieskończonym zbiorem

## 23.10.2024 Przestrzeń końców jest niezmiennikiem q.i.

Celem dzisiejszego wykładu będzie udowodnienie poniższego twierdzenia.

### Twierdzenie 2.9

Przestrzeń końców  $\text{Ends}(X)$ , a w szczególności ich liczba, jest niezmiennikiem quasi-izometrii geodezyjnych przestrzeni właściwych (przestrzenie końców są wtedy homeomorficzne).

### 1. Alternatywny opis przestrzeni końców (promienie)

Przypomnijmy, że jeśli  $X$  jest właściwą przestrzenią geodezyjną, to jest również lokalnie drogowo spójna. Czyli otwarte podzbiory  $U \subseteq X$  są spójne  $\iff$  są drogowo spójne.

#### Definicja 2.10: promień, współkońcowość promieni

**Właściwy promień** (eng. proper ray) w  $X$  to dowolne ciągłe odwzorowanie  $\rho : [0, \infty) \rightarrow X$  takie, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(\rho(0), \rho(t)) = \infty,$$

odległość mierzona od początku  $\rho$  ucieka do nieskończoności wraz z oddalaniem się od 0.

Zbiór wszystkich promieni w  $X$  oznaczamy  $\rho^X$ .

Powiemy, że dwa promienie  $\rho_1, \rho_2$  są współkońcowe ( $\rho_1 \stackrel{E}{\sim} \rho_2$ ), jeśli dla dowolnego zwartego  $K \subseteq X$  istnieje  $R > 0$  taki, że  $\rho_1([R, \infty))$  oraz  $\rho_2([R, \infty))$  leżą w tej samej komponentce  $X - K$ .

Relacja współkońcowości promieni na zbiorze  $\rho^X$  jest relacją równoważności.

#### Fakt 2.11

Zbiór klas abstrakcji  $\rho^X / \stackrel{E}{\sim}$  w naturalny sposób utożsamia się z  $\text{Ends}(X)$ .

#### Dowód

Weźmy  $\rho \in \rho^X$  takie, że dla każdego  $K \subseteq X$  mamy jedyną komponentę  $C_K^\rho \in \Pi_K^X$  w dopełnieniu zbioru  $K$  w  $X$  do której należy  $\rho([R, \infty))$  dla dostatecznie dużych  $R$ . Wtedy ciąg

$$(C_K^\rho)_{K \in \mathcal{K}}$$

jest nicią [2.3] w systemie odwrotnym  $(\mathcal{K}, \Pi_K^X, f_{KK'})$ .

Współkońcowe promienie wyznaczają tę samą nić, więc istnieje dobrze określone odwzorowanie

$$\beta : \rho^X / \sim \rightarrow \text{Ends}(X)$$

$$\beta([\rho]_{\sim}) = (C_K^\rho)_{K \in \mathcal{K}} \in \text{Ends}(X)$$

$\beta$  jest różnowartościowe, bo dla niewspółkońcowych  $\rho_1, \rho_2$  istnieje  $K \subseteq X$  takie, że  $C_K^{\rho_1} \neq C_K^{\rho_2}$ , a wtedy nici  $\beta([\rho_1]) \neq \beta([\rho_2])$ .

Wystarczy przekonać się, że  $\beta$  jest surjekcją.

Niech  $\xi = (\xi_K) \in \text{Ends}(X)$  będzie dowolną nicią. Szukamy promienia który na nie przechodzi. Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  wybieramy punkt  $y_n \in \xi_{B_n}$ , gdzie  $\xi_{B_n}$  to nieograniczona komponenta w  $X - B_n$  dla  $B_n = B_n(x_0)$  przy ustalonym  $x_0$ .

Określimy  $\rho = [y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \dots$  mając na myśli odwzorowanie  $\rho$  które odcinek  $[n, n+1]$  przeprowadza na geodezyjną od  $y_n$  do  $y_{n+1}$ . Dla takiego  $\rho$  mamy  $C_{B_n}^\rho = \xi_{B_n}$ . Dla dowolnego innego  $K \in \mathcal{K}$  z racji, że istnieje kula taka, że  $K \subseteq B_n$  to dla pewnego  $n$  zarówno  $C_K^\rho$  jak i  $\xi_K$  to ta sama komponenta w  $X_K$ , zawierająca  $\xi_{B_n}$ .



Na  $\rho^X / \sim$  mamy topologię indukowaną przez bijekcję  $\beta$  z topologii  $\text{Ends}(X)$ . Baza tej topologii są zbiory postaci

$$\{U_C^K : K \in \mathcal{K} \text{ i } C \in \Pi_K^X\},$$

$$U_C^K = \{[\rho] : \rho([R, \infty)) \subset C\} \text{ dla pewnego } R.$$

## 2. Dowód - końce są niezmiennikiem q.i.

Wróćmy więc do twierdzenia 2.9.

### Dowód

Dowód twierdzenia 2.9.

Niech  $X, Y$  będą właściwymi przestrzeniami geodezyjnymi oraz  $f : X \rightarrow Y$  niech będzie  $(L, C)$ -quasi-izometrią. Ciągłe drogi  $\nu : [a, b] \rightarrow X$  lub  $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$  przerabiamy na ciągłe drogi  $\nu_f$  w  $Y$  następująco:

1. niech  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  (lub  $a = t_0 < t_1 < \dots$ ) będzie takie, że

$$d_X(\nu(t_k), \nu(t_{k+1})) \leq 1$$

2. wtedy ciąg  $f(\nu(t_n))$  jest  $(L + C)$ -drogą, czyli

$$d_Y(f(\nu(t_k)), f(\nu(t_{k+1}))) \leq L + C$$

dla każdego  $k$

3. łączymy te punkty kolejno odcinkami geodezyjnymi w  $Y$

W ten sposób dostajemy ciągłą drogę  $\nu_f$  w  $Y$  zawierającą się w  $(L + C)$ -otoczeniu obrazu  $f(\nu[a, b])$  łączącą  $f(\nu(a))$  z  $f(\nu(b))$ . Gdy  $\nu : [0, \infty) \rightarrow X$  jest ciągłym odwzorowaniem (promieniem w  $X$ ), to  $\nu_f$  jest ciągłym odwzorowaniem o obrazie zawierającym się w  $(L + C)$ -otoczeniu obrazu  $f(\nu[0, \infty))$  i o początku w  $f(\nu(0))$  (promieniem w  $Y$ ).

### Lemat 2.12

Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie  $(L, C)$ -quasi-izometrią. Wówczas dla każdego zwartego  $K \subseteq Y$  istnieje zwarty  $K' \subseteq X$  taki, że dla każdej komponenty  $C' \subseteq X - K'$  jej pogrubiony obraz  $N_{L+C}[f(C')]$ , rozumiany jako  $N_R(A) = \{x \in X : d_X(x, A) \leq R\}$ , zawiera się w pojedynczej komponentce  $C$  w dopełnieniu  $X - K$ .

### Dowód

Jeśli  $C_1 \neq C_2$  są nieograniczonymi komponentami w  $Y - K$ , to ich przekroje z pogrubionym obrazem  $K$

$$C_1 \cap (Y - N_{L+C}(K))$$

$$C_2 \cap (Y - N_{L+C}(K))$$

są  $(2L + 2C)$ -oddzielone, tzn. dystans w  $Y$  pomiędzy nimi jest  $\geq 2L + 2C$ .

Można pokazać, że istnieje  $K' \subseteq X$  taki, że  $f(X - K') \subseteq Y - N_{L+C}(K)$  (co zostaje pozostawione jako ćwiczenie). W takim razie dla komponenty  $C'$  w  $X - K'$  mamy  $f(C') \subseteq Y - N_{L+C}(K)$ .

Wiemy, że dowolne dwa punkty z  $C'$  można połączyć ciągłą drogą w  $C'$ , więc ich obrazy są łączone drogą  $\nu_f$  w  $N_{L+C}(f(C'))$ , stąd  $f(C')$  zawiera się w pojedynczej komponentce  $Y - K$ .



Jeśli więc  $\nu, \nu'$  są współkońcowymi promieniami w  $X$ , to utworzone przez nie promienie  $\nu_f$  i  $\nu'_f$  również są współkońcowe. Chcemy sprawdzić, czy "końcówki"  $\nu_f$  oraz  $\nu'_f$  należą do tej samej komponenty  $X - K$ .

Z założenia wiemy, że końcówki  $\nu$  i  $\nu'$  należą do tej samej komponenty  $C'$  w  $X - K'$  (dla  $K'$  jak w lemacie wyżej). Czyli końcówka  $\nu_f$  zawiera się w obrazie w  $N_{L+C}$  obrazu przez  $f$  końcówki  $\nu$ , która z kolei zawiera się w  $N_{L+C}f(C') \subseteq C$ . Stąd  $\nu_f$  jest współkońcowe z  $\nu'_f$ .

Mamy zatem przyporządkowanie  $f_E : \rho^X / \sim \rightarrow \rho^Y / \sim$  zadane przez

$$f_E([\nu]) = [\nu_f].$$

Mamy też podobne przyporządkowanie  $g_E$  idące w odwrotną stronę, gdzie  $g : Y \rightarrow X$  jest "odwrotną" q.i..

Pozostaje sprawdzić, że odwzorowanie  $f_E : \rho^X / \overset{E}{\sim} \rightarrow \rho^Y / \overset{E}{\sim}$  jest ciągłe i wtedy  $f_E$  jest homeomorfizmem.

Bierzemy bazowy zbiór  $U_K^C$  będący otoczeniem  $[\nu_f]$ , tzn.  $K \subseteq Y$  jest zwarty i  $C$  jest nieograniczoną komponentą  $Y - K$ . Wtedy  $\nu_f([R, \infty)) \subseteq C$ . Niech  $K' \subseteq X$  jak w lemacie wyżej i niech  $C'$  będzie tą nieograniczoną komponentą w  $X - K'$  dla której  $\nu([R, \infty)) \subseteq C'$ . Wówczas  $C$  jest dokładnie tą komponentą w  $Y - K$  w której zawiera się  $N_{L+C}(f(C'))$ . Jeśli  $[\rho] \in U_{K'}^{C'}$  (czyli  $\rho([R, \infty)) \subseteq C'$ ), to  $(\rho|_{[R, \infty)})_f$  ma obraz w pojedynczej komponente  $Y - K$  i jest to ta sama komponenta, w której zawiera się  $N_{L+C}(f(C'))$ , czyli  $C$ . Zatem  $f_E([\rho]) \in U_K^C$  i mamy  $f_E(U_{K'}^{C'}) \subseteq U_K^C$ .





30.10.2024 cos

Główne twierdzenie na dzisiaj:

**Twierdzenie 2.13: Freudanthal-Hopf**

Skończenie generowalna grupa  $G$  ma 0, 1, 2 lub nieskończenie wiele końców.  
 Gdy  $|\text{Ends}(G)| = \infty$ , to  $|\text{Ends}(G)|$  jest przestrzenią bez punktów izolowanych - w szczególności mamy continuum. W istocie,  $\text{Ends}(G)$  jest wtedy zbiorem Cantora.

Zanim przejdziemy dalej, warto wiedzieć kilka rzeczy o zbiorze Cantora, np. jak jest on charakteryzowany w matematyce:

- 😊 jest to jedyna z dokładnością do homeomorfizmu przestrzeń metryczna, która jest całkowicie niespójna (0-wymiarowa), to znaczy, że każdy punkt posiada bazę otoczeń otwarto-domkniętych
- 💀 nie ma on punktów izolowanych.

Niech  $X = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$  będzie systemem odwrotnym zbiorów skończonych. Załóżmy, że wszystkie odwzorowania  $f_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}$  są surjekcjami oraz  $\forall \lambda \in \Lambda \forall x \in X \forall \mu > \lambda$  takie, że  $|f_{\lambda, \mu}^{-1}(x)| \geq 2$  to wówczas  $\varprojlim X$  jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. To znaczy, że  $X$  rozdziela się w każdym kroku na co najmniej dwie części dokładnie tak jak zbiór Cantora.

**Dowód**

Wiemy, że  $|\text{Ends}(G)| = 0, 1, 2$  jest możliwe, bo 0 końców mają grupy skończone, 1 ma  $\mathbb{Z}^2$ , a  $\mathbb{Z}$  ma końców 2 sztuki.

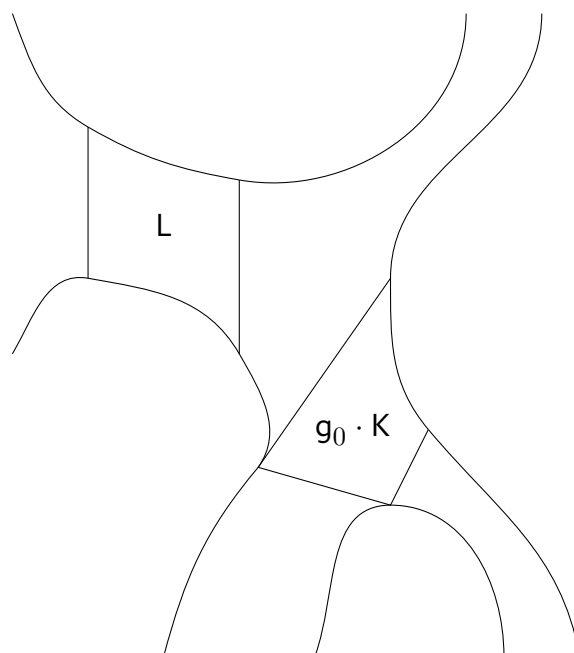
Założmy, że  $|\text{Ends}(G)| \geq 3$ . Oznacza to, że dla  $X = \text{Cay}(G, S)$  istnieje zwarty  $K \subseteq X$  taki, że  $\Pi_K^X$  ma co najmniej 3 elementy (tzn.  $X - K$  ma co najmniej 3 nieograniczone komponenty spójności).

Naszym celem jest pokazanie, że dla dowolnego  $L \subseteq X$  zwanego i dowolnej nieograniczonej komponenty  $C$  w  $X - L$  istnieje większy zbiór  $L \subseteq L' \subseteq X$  oraz nieograniczone komponenty  $C'_1 \neq C'_2$  w  $\Pi_{L'}^X$  takie, że  $C'_1, C'_2 \subseteq C$  (czyli  $f_{L, L'}(C_i) = C$  dla  $i = 1, 2$ ). Jako ćwiczenie pozostawione zostanie pokazanie, że wówczas  $|\text{Ends}(G)| = \infty$ .

Ustalmy zwarty  $L \subseteq X$  oraz nieograniczoną komponentę  $C$  w  $X - L$ . Niech  $M \subseteq X$  będzie zbiorem z definicji koźwartości działania  $G \curvearrowright X$ , tzn. takim, że

$$\bigcup_{g \in G} gM = X.$$

Bez straty ogólności założmy, że  $K \subseteq M$ , a co za tym idzie  $|\Pi_M^X| \geq 3$ .



Niech  $x_0 \in C$  będzie takim punktem, że  $d(x_0, L) \geq \text{diam} L + 2\text{diam} M$ . Niech teraz  $g_0 \in G$  będzie taki, że  $x_0 \in g_0 M$ . Wtedy ponieważ  $\text{diam}(g_0 M) = \text{diam}(M)$ , mamy  $d_X(L, g_0 M) \geq \text{diam} M$  ale też  $\geq \text{diam} L$ . Więc tym bardziej  $d_X(L, g_0 K) \geq \text{diam} M$  ale też  $\text{diam} L$ .

Twierdzimy, że  $g_0 K \subseteq g_0 M \subseteq C$  oraz **no i spadło mi sie z rowerka**

Dowód (3)

Założmy, że komponenty  $C_1, \dots, C_m$  są rozłączne z  $L$ , bo  $L \subseteq C_0$ . Więc każda z nich zawiera się w pojedynczej komponencie  $X - L$ . Każda spośród  $C_1, \dots, C_m$  posiada punkty dowolnie bliskie zbioru  $g_0 K$ , bo np. pierwszy punkt na geodezyjnej od punktu  $a \in C_i$  do punktu  $b \in g_0 K$  nienależący do  $C_i$  musi należeć do  $g_0 K$ , czyli punkty leżące w  $C$

Skoro  $C_i$  zachacza o  $C$ , to musi być zawarte w  $C$ .

Dla ukończenia realizacji CELU (i dowodu twierdzenia) weźmy  $L' = L \cup g_0 K$ . Wtedy  $C_1, \dots, C_m$  są komponentami w  $X - L'$ .



Dalsze wyniki:

- ☞ Grupa ma 2 końce  $\iff$  jest wirtualnie  $\mathbb{Z}$  (zawiera  $\mathbb{Z}$  jako podgrupę skończonego indeksu  $\equiv$  jest współmierna z  $\mathbb{Z}$ )
- ☞ Jeśli  $|\text{Ends}(G)| = \infty$ , to  $G$  rozkłada się w sposób nietrywialny i nie 2-końcowy nad skończoną podgrupą  $H$ , tzn.  $G = G_1 \star_H G_2$  i  $[G_i : H] \geq 3$  dla przynajmniej jednego  $i$ , lub  $G = \star_H G_0$  (HNN-rozszerzeniem),  $\phi_i : H \hookrightarrow G_0$ ,  $[G_0 : \phi_i(H)] \geq 2$  dla pewnego  $i$ .

## 13.11.2024 Tempo wzrostu grupy

Funkcja wzrostu:  $\beta_{G,S} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zdefiniowana jako liczność kuli o promieniu  $k$  i środku w elemencie neutralnym:  $f_{G,S}(k) = |B_k^{G,S}(e)|$

### 1. Abstrakcyjne funkcje wzrostu

Abstrakcyjna funkcja wzrostu  $f$  to po prostu niemalejąca funkcja  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Każda funkcja wzrostu  $\beta_{G,S}$  wyznacza abstrakcyjną funkcję wzrostu

$$\tilde{\beta}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lceil t \rceil),$$

która nadal jest multiplikatywna, tzn.  $\tilde{\beta}_{G,S}(t + t') \leq \tilde{\beta}_{G,S}(t) \cdot \tilde{\beta}_{G,S}(t')$ .

Konkurencyjnie możemy zdefiniować  $\tilde{\tilde{\beta}}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lfloor t \rfloor)$ , ale nie zachowujemy wówczas multiplikatywności funkcji.

#### Definicja 2.14: quasi-dominacja

Mówimy, że funkcja  $g$  **quasi-dominuje**  $[g \succ f]$  funkcję  $f$ , jeśli istnieje  $c \geq 1$  i  $b \geq 0$  takie, że

$$(\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}) f(t) \leq c \cdot g(ct + b) + b$$

#### Przykłady

1. Dla każdego wielomianu  $w(t)$  stopnia  $n$  o dodatnich współczynnikach  $w(t) \prec t^n$ .
2. Dla dowolnych  $a, b > 1$  zachodzi

$$a^t \succ b^t,$$

nawet gdy  $a > b$ .

Relacja quasi-dominacji jest relacją przechodnią i zwrotną.

### 2. Tempo wzrostu grupy

#### Definicja 2.15: quasi-równoważność

Dwie funkcje  $f$  i  $g$  są quasi-równoważne  $[f \sim g]$ , gdy  $f \succ g$  i  $g \succ f$ . Jest to relacja równoważności. Klasy tej relacji nazywamy **typami wzrostu** [eng. growth rate types].

## Przykłady

1. Dla  $a \geq 0$  funkcje  $t \mapsto t^a$  określają parami różne typy wzrostu.
2. Dla  $0 > a > b$  zachodzi  $e^{ta} \sim e^{tb}$ . Jest to tzw. typ wzrostu eksponencjalnego.
3.  $(\forall a \geq 0)$   $t^a \prec e^t$  oraz  $t^a \not\sim e^t$ , czyli wzrost eksponencjalny nigdy nie jest równy wzrostowi  $t^a$ .
4. Wszystkie funkcje wzrostu grup  $\beta_{G,S}$  są quasi-zdominowane przez  $e^t$ ,  $\beta_{G,S} \prec e^t$ . Aby pokazać, że grupa  $(G, S)$  ma typ wzrostu eksponencjalnego wystarczy pokazać, że  $\beta_{G,S} \succ e^t$ , co jest równoważne nierówności  $\beta_{G,S} \geq ca^t - b$  dla  $a > 1$ ,  $b \geq 0$  i  $c > 0$ .
5.  $\tilde{\beta}_{G,S} \sim \tilde{\beta}_{G,S}$

## Fakt 2.16

Niech  $(G, S)$  i  $(H, T)$  będą grupami ze skończonym układem generatorów. Jeśli istnieje quasi-izometryczne zanurzenie

$$f : (G, d_S) \rightarrow (H, d_T),$$

to wówczas funkcja wzrostu w  $G$  jest zdominowana przez funkcję wzrostu w  $H$ :  $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ .

Zanim przejdziemy do dowodu faktu 2.16, wymieńmy kilka ważnych wniosków z niego wynikających.

## Wniosek

1. Jeśli grupy  $(G, d_S)$  i  $(H, d_T)$  są quasi-izometryczne, to wówczas mają ten sam typ wzrostu:  $\beta_{G,S} \sim \beta_{H,T}$ .
2. Dla różnych skończonych układów generatorów  $S_1, S_2$  grupy  $G$  zachodzi  $\beta_{G,S_1} \sim \beta_{G,S_2}$ , czyli grupa jednoznacznie determinuje swój typ wzrostu.

## Wyróżniamy grupy o wzroście

- wielomianowym, czyli taki dla których funkcja wzrostu jest zdominowana przez  $t^a$  dla pewnego  $a$  [ $\beta_{G,S} \prec t^a$ ],
- eksponencjalnym,
- pośrednim [eng. intermediate growth], czyli ani wielomianowym ani eksponencjalnym (dominuje ściśle nad wielomianowym, ale jest zdominowany ściśle nad eksponencjalnym).

Okazuje się, że w przypadku wzrostu nieprzekraczającego wielomianowego, wzrost musi być typu  $\beta_{G,S} \sim t^m$  dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ . Tzn. nie ma grup o typie wzrostu "ułamkowo-potęgowego" ani  $t \cdot \log t$  etc.

Istnieją grupy o wzroście pośrednim, np. tak zwana grupa Grigorchuka (automorfizmów pewnego drzewa). Wiadomo dla niej, że

$$e^{t^\alpha} \prec \beta_G \prec e^{t^\beta}$$

dla pewnych  $0 < \alpha < \beta < 1$ , ale nie mamy wyznaczonej konkretnej funkcji. Grupa ta jest skończenie generowalna, ale nieskończenie prezentowalna.

Istnieje otwarta hipoteza, że jeśli  $G$  ma wzrost pośredni, to  $\beta_G \succ e^{t^\alpha}$  dla pewnego  $0 < \alpha < 1$ . Nie wiemy też, czy istnieje grupa skończenie prezentowalna, która dopuszcza pośredniego wzrostu (otwarte jest pytanie o dowód, że nie może tak być).

Żadna grupa o wzroście pośrednim nie ma wyznaczonego dokładnego typu wzrostu.

Wracamy do 2.16.

### Dowód

Niech  $f : (G, d_S) \rightarrow (H, d_T)$  będzie q.i. zanurzenie i niech  $C \geq 1$  będzie takie, że

$$(\forall g, g' \in G) \frac{1}{C} d_S(g, g') - C \leq d_T(f(g), f(g')) \leq C d_S(g, g') + C.$$

Niech  $e' = f(e)$  i niech  $r \in \mathbb{N}$ . Wtedy jeśli  $g \in B_r^{G,S}(e)$ , to wówczas

$$d_T(f(g), e') \leq C \cdot d_S(g, e) + C \leq C \cdot r + C.$$

W takim razie

$$f(B_r^{G,S}(e)) \subseteq B_{Cr+C}^{H,T}(e').$$

Niestety, q.i. może sklejać elementy i niekoniecznie jest różnowartościowa. Musimy więc znaleźć oszacowanie na moc przeciwobrazów  $f^{-1}(h)$ .

Jeśli  $f(g) = f(g')$ , to wówczas z faktu, że  $f$  jest q.i. mamy

$$d_S(g, g') \leq C \cdot [d_T(f(g), f(g')) + C] = C^2.$$

Stąd  $f^{-1}(h)$  zawiera się w kuli o promieniu  $C^2$  wokół dowolnego punktu z  $f^{-1}(h)$ . Ponieważ kule względem metryki słów o ustalonym promieniu i zmiennym środku są równoliczne, więc mamy oszacowanie

$$|f^{-1}(h)| \leq |B_{C^2}^{G,S}(e)|.$$

Stąd dostajemy

$$|B_r^{G,S}(e)| \leq |B_{C^2}^{G,S}(e)| \cdot |B_{Cr+C}^{H,T}(e')|,$$

czyli

$$\beta_{G,S}(r) \leq \left| B_{C^2}^{G,S}(e) \right| \cdot \beta_{H,T}(Cr + C),$$

czyli  $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ .



## Przykłady

1.  $\mathbb{Z}^n \approx \mathbb{Z}^m$  są q.i.  $\iff n = m$ , bo  $\beta_{\mathbb{Z}^n} \sim t^n \not\sim t^m \sim \beta_{\mathbb{Z}^m}$ .
2. Grupa wolna  $F$  nie jest q.i. z  $\mathbb{Z}^m$ , bo  $\beta_F \sim e^t$ , a  $\beta_{\mathbb{Z}^m} \sim t^m$  i  $e^t \not\sim t^m$ .
3. Dla skończonej generowalnej podgrupy  $H \leq G$  zachodzi  $\beta_H \prec \beta_G$ .

## Wniosek

Każda grupa zawierająca podgrupę wolną (nieabelową) ma wzrost eksponencjalny.

4. Grupa Heisenberga

$$H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma  $\beta_H \sim t^4$ . Stąd można wywnioskować, że  $H \not\approx \mathbb{Z}^3$  nie jest q.i.. Jako ciekawostka można nadmienić, że wymiar asymptotyczny grupy  $H$  wynosi 3, a grupy  $\mathbb{Z}^4$  wynosi 4, co mówi, że  $H \not\approx \mathbb{Z}^4$  nie są q.i..

## 3. Grupy o wzroście wielomianowym

Dla przypomnienia, patrzymy teraz na grupy  $\beta_G \prec t^a$  dla pewnego  $a > 0$ . Zaczniemy od kilku przykładów.

Dla grupy  $G$  określamy  $C_n(G)$  indukcyjnie przez  $C_0(G) := G$ ,  $C_{n+1}(G) = [G, C_n(G)]$ . Taki ciąg nazywamy **dolnym ciągiem centralnym grupy**. Zachodzi  $C_{j+1}(G) \triangleleft C_j(G)$  oraz  $C_j(G)/C_{j+1}(G)$  jest abelowa. Gdy  $G$  jest skończenie generowalna, to wszystkie  $C_j(G)$  i ilorazy  $C_j(G)/C_{j+1}(G)$  też takie są.

Grupa  $G$  jest **nilpotentna**, gdy  $C_n(G)$  jest trywialne dla pewnego  $n$ .

**Definicja 2.17: wymiar jednorodny grupy nilpotentnej**

Skończenie generowalna grupa abelowa  $A$  ma jednoznaczny rozkład  $A \sim \mathbb{Z}^m \oplus B$ , gdzie  $B$  jest grupą skończoną. Definiujemy wówczas  $\text{rank}(A) = m$ .

Wymiar jednorodny grupy nilpotentnej to skończona suma (bo od pewnego momentu  $C_j(G) = 0$ )

$$d(G) := \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \text{rank}(C_j(G)/C_{j+1}(G)).$$

**Fakt 2.18**

Dla dowolnej skończenie generowalnej grupy nilpotentnej  $G$  zachodzi

$$\beta_G \sim t^{d(G)}$$

**Przykład**

Dla grupy Heisenberga  $H = \mathbb{Z} \ltimes_{\mathbb{A}} \mathbb{Z}^2$ , która jest nilpotentna, mamy

$$\begin{aligned} C_1(H) &\cong \mathbb{Z} & C_0(H)/C_1(H) &= H/C_1(H) \cong \mathbb{Z}^2 \\ C_2(H) &= 0 & C_1(H)/C_2(H) &\cong C_1(H) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

więc  $d(H) = \text{rank}(\mathbb{Z}^2) + 2 \cdot \text{rank}(\mathbb{Z}) = 2 + 2 = 4$ .

**Definicja 2.19: wirtualna nilpotentność**

Skończenie generowana grupa  $G$  jest wirtualnie nilpotentna, jeśli zawiera skończonego indeksu podgrupę nilpotentną.

**Twierdzenie 2.20: [Gromova]**

Skończenie generowalna grupa  $G$  ma wzrost wielomianowy  $\beta_G \prec t^a \iff G$  jest wirtualnie nilpotentna.

## 04.12.2024 To be named 2

Yu [1998] pokazał, że jeśli  $\text{asdim } G < \infty$ , to  $G$  spełnia hipotezę Novikova, a w 2003 Roe udowodnił, że  $\text{asdim } G < \infty \implies G$  zgrubnie zanurza się w przestrzeni Hilberta.

Pytanie na dziś: jak pokazać, że  $\text{asdim } \mathbb{Z}^n = \text{asdim } \mathbb{R}^n \geq n$ ?

Metoda homologiczna:

1. zdefiniowanie  $\text{asdim}_h$  (asymptotyczny wymiar homologiczny)
2. pokazanie, że  $\text{asdim}_h \mathbb{Z}^n \geq n$
3. na koniec wystarczy pokazać, że zwykły wymiar asymptotyczny jest nie mniejszy  $\text{asdim} \geq \text{asdim}_h$ .

### Definicja 2.21

Dla  $\epsilon > 0$   $q$ -wymiarowy  $\epsilon$ -simpleks w przestrzeni metrycznej  $X$  to układ  $(x_0, x_1, \dots, x_q)$  punktów z  $X$  (niekoniecznie różnych) takich, że  $d_X(x_i, x_j) \leq \epsilon$  dla  $0 \leq i \neq j \leq q$ .

Określamy w oczywisty sposób  $q$ -wymiarowe  $\epsilon$ -łańcuchy, brzegowanie oraz  $\epsilon$ -homologie  $H_q^\epsilon(X)$  [teoria homologii Alexandrowa].

Dla  $\epsilon$ -łańcucha  $U$  w  $X$  definiujemy nośnik  $\text{supp}(U)$  jako zbiór wszystkich wierzchołków we wszystkich  $\epsilon$ -simpleksach z  $U$  (mających niezerowy współczynnik).

Dla  $\epsilon$ -cyklu  $z$ , jego  $\epsilon$ -wypełnieniem nazywamy dowolny  $\epsilon$ -łańcuch  $w$  taki, że  $\partial w = z$ .





**Definicja 2.22**

$\text{asdim}_h(X) \leq p$  gdy dla każdego  $\nu > 0$  istnieje  $\alpha > 0$  (zależna tylko od  $X$  i  $\nu$ ) taka, że dla  $q \geq p$  dowolny  $q$ -wymiarowy  $\nu$ -cykl  $\phi$ ,  $\nu$ -homologicznie trywialny w  $X$ , jest także  $\alpha$ -homologicznie trywialny w swoim nośniku  $\text{supp}(\phi)$ .

$\text{asdim}_h(X) \geq n$  gdy istnieje  $\nu$  takie, że dla każdego  $\alpha$  istnieje  $(n - 1)$ -wymiarowy  $\nu$ -cykl  $\nu$ -homologii  $\phi$  trywialny w  $X$  oraz  $\alpha$ -homologicznie nietrywialny w swoim nośniku.

$$\text{asdim}_h(X) = \min\{p : \text{asdim}_h(X) \leq p\}$$

Można pokazać, że  $\text{asdim}_h$  jest niezmiennikiem q.i..

**Twierdzenie 2.23**

$$\text{asdim}_h(\mathbb{Z}^n) = \text{asdim}_h(\mathbb{R}^n) \geq n$$

TUTAJ ZDJECIA JAKIES CZY COS

**Twierdzenie 2.24**

$$\text{asdim}(X) \geq \text{asdim}_h(X)$$