Algebraic geometry

Weronika Jakimowicz

Spis treści

1. Zariski

04.10.2024 Topologia Z, noetherowskość

1. Konwencje

pierścień := pierścień przemienny z 1

homomorfizmy z definicji zachowują 1

Dla $A \subseteq R$ ideał przez niego generowany to $(A) = AR \triangleleft R$. Dla ideałów $I, J \triangleleft R$ znamy operacje $I + J$, IJ, $I \cap J$ i $\sqrt{I}$ jako radykał.

R-algebra to homomorfizm pierścieni $R \to S$, a homomorfizm R-algebr to strzałka f taka, że diagram

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "f"] & & S_2 \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Jeśli K to ciało, to $K \to R$ jest injekcją, czyli K-algebry można utożsamiać z rozszerzeniami ciała $K \subseteq R$. Dla rozszerzenia ciał $K \subseteq L$ definiujemy stopień przestępny $\mathrm{trdeg}_K(L) = |B|$ dla $B \subseteq L$ będącego największym zbiorem liniowo niezależnym nad K.

Niech K będzie ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, np. $\mathbb{C}$. Wtedy A^n lub $A^n(K)$ to K^n rozważane jako obiekt geometryczny. Będziemy to nazywać n-przestrzenią afiniczną, czyli $A^1 = K$ to prosta afiniczna i $A^2 = K^2$ - płaszczyzna afiniczna.

2. Topologia Zariskiego

Definicja 1.1: zbiory Zariskiego

Dla dowolnego $A \subseteq K[\overline{X}]$, gdzie $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ definiujemy zbiór zer A w K^n

$$V(A) := \{\overline{a} \in K^n \ : \ (\forall\ F \in A)\ F(\overline{A} = 0\}.$$

Zbiory tej postaci nazywamy **afinicznymi zbiorami algebraicznymi** lub **zbiorami domkniętymi Zariskiego**.

Przykłady

1. Gdy popatrzymy na $A = \{y - x^2\}$ to zbiór zer jest parabolką, która jest spójna narysowac
2. dla $A = \{yx - 1\}$ zbiór zer to hiperbola, która już spójna nie jest.
3. Jeśli $F \in K[\overline{X}]$ jest nierozkładalny, to dla $n = 2$ $V(F)$ jest krzywa planarna, dla $n = 3$ jest powierzchnia planarna a dla $n > 3$ jest hiperpowierzchnia planarna.
4. $\{\overline{a}\}$ singleton jest domkniętym zbiorem Zariskiego jako $V(X - a_1, ..., X_n - a_n)$
5. $\emptyset = V(1)$
6. $A = V(0)$

Lemat 1.2: podwały topologii

Jeśli $I, J \triangleleft K[\overline{X}]$ oraz $A_i \subseteq K[\overline{X}]$, to wtedy

1. $A_0 \subseteq A_1 \implies V(A_1) \subseteq V(A_0)$
2. $V(\bigcup A_i) = \bigcap V(A_i)$
3. $V(A_0) = V((A_0))$, czyli zbiór rozwiązań zbioru jest taki sam jak zbiór rozwiązań jego ideału
4. $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$
5. $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$

Dowód
1 i 2 są oczywiste.

Jedno zawieranie w punkcie 3 jest wnioskiem z 1, bo $A_0 \subseteq (A_0)$, czyli $V(A_0) \subseteq V((A_0))$. Dla zawierania w drugą stronę bierzemy dowolne $\overline{a} \in V(A_0)$ oraz $F \in (A_0)$, chcemy pokazać $F(\overline{a}) = 0$. Ponieważ A_0 generuje ten ideał, to istnieją $F_1, ..., F_k \in A_0$ oraz $H_1, ..., H_k \in K[\overline{X}]$, że $F = \sum H_i F_i$.

W 4 wiemy, że $I \cap J \supseteq IJ$, czyli $V(IJ) \supseteq V(I \cap J) \supseteq V(I) \cup V(J)$. Wystarczy pokazać, że $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$ Weźmy więc $\overline{a} \in V(IJ)$ i załóżmy, że $\overline{a} \notin V(I)$, będziemy pokazywać $\overline{a} \in V(J)$. Niech $H \in J$ i $F \in I$. Czyli $FH \in IJ$. Ale $\overline{a} \in V(IJ)$, czyli $FH(\overline{a})$, ale skoro $\overline{a} \notin V(I)$, to $F(\overline{a}) \neq 0$ czyli pozostaje $H(\overline{a}) = 0$.

W ostatnim podpunkcie z 2 i 4 wiemy, że

$$V(I) \cap V(J) = V(I \cup J) = V((I \cup J)) = V(I + J),$$

bo $I \cup J = I + J$.

Wniosek

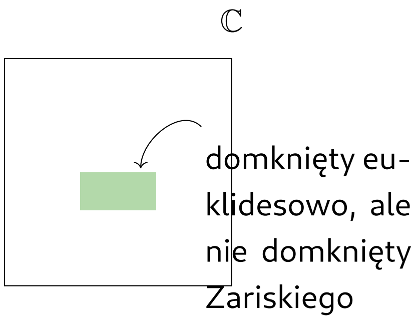
Z przykładu 5 i 6 i lematu 1.2 wiemy, że zbiory domknięte Zariskiego są zbiorami domkniętymi pewnej topologii na A^n, nazywanej **topologią Zariskiego**. Singletony są domknięte, czyli topologia Zariskiego jest T_1, ale nie jest Hausdorffa.

Przykład

Na $A^1 = K$ niezerowe wielomiany mają zawsze skończenie wiele zer, czyli $V \subseteq A^1$ jest domknięty $\iff$ jest skończony lub jest wszystkim. Zbiory otwarte Zariskiego są natomiast koskończone lub puste, czyli przekrój dowolnych dwóch niepustych zbiorów otwartych jest niepusty.

Uwaga 1.3

Dla $K = \mathbb{C}$ jest $A^n = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ i na $\mathbb{R}$ zwykłą topologię, którą na $\mathbb{R}^{2n}$ nazywamy euklidesow, która jest znacznie bogatsza od topologii Zariskiego.



Uwaga 1.4

Topologia Zariskiego na $A^2 = A^1 \times A^1$ nie jest topologią produktową. Np. Parabola i prosta nie są domknięte w topologii produktowej.

3. Przestrzenie noetherowskie

Stwierdzenie 1.5

Dla wszystkich $A \subseteq K[\overline{X}]$ istnieje skończony $A_0 \subseteq A$ taki, że $V(A_0) = V(A)$.

Dowód

Z twierdzenia Hilberta o bazie pierścień $K[\overline{X}]$ jest Noetherowski. Ideał generowany przez A jest skończenie generowany. W takim razie istnieje A_0 wybrany z dowolnego skończonego zbioru generatorów i z 1.2 wiemy, że $V(A_0) = V((A)) = V(A)$.

Definicja 1.6: przestrzeń noetherowska

Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest **noetherowska**, jeśli każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych się stabilizuje. To znaczy, że dla każdego

$$... \subseteq X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq ... \subseteq X_0 \subseteq X$$

istnieje N takie, że dla wszystkich $n \geq N$ $X_n = X_N$.

Uwaga 1.7

1. Jeśli X jest noetherowska, to X jest quasi-zwarta, ale niekoniecznie Hausdorffa.
2. X jest noetherowska i Hausdorffa $\iff$ X jest skończona i dyskretna (punkty są otwarte).
3. Z przykładu wyżej A^1 z topologią Zariskiego jest Noetherowska.
4. Podprzestrzeń przestrzeni noetherowskiej jest nadal noetherowska.

Stwierdzenie 1.8

A^n jest noetherowska

Dowód

Niech $A^n \supseteq V_0 \supseteq V_1 \supseteq ...$ będzie zstępującym ciągiem domkniętych zbiorów Zariskiego. Niech $A_i \subseteq K[\overline{X}]$ takie, że $V(A_i) = V_i$. Niech $I_i := (A_0 \cup ... \cup A_i)$. Wtedy z 1.2

$$V(A_0 \cup ... \cup A_i) = V(A_0) \cap ... \cap V(A_i) = V(A_i) = V_i,$$

bo to zbiory zstępujące.

Teraz $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ jest wstępującym ciągiem w pierścieniu noetherowskim $K[\overline{X}]$, czyli stabilizuje się od pewnego momentu. W takim razie zbiory V_i przez nie generowane też się stabilizują.

4. Przestrzenie nierozkładalne

Definicja 1.9: nierozkładalność

Niepusta przestrzeń topologiczna X jest **nierozkładalna**, gdy dla każdych $A, B \subsetneq X$ domkniętych $X \neq A \cup B$.

Uwaga 1.10

1. nierozkładalna $\implies$ spójna
2. nierozkładalna i $T_2 \implies$ singleton
3. A^1 z topologią Zariskiego jest nierozkładalna
4. $Y \subseteq X$ (X potencjalnie noetherowska), to Y jest nierozkładalny $\iff$ $\overline{Y}$ jest nierozkładalny

Stwierdzenie 1.11

Niech X będzie noetherowską przestrzenią topologiczną. Wtedy
1. istnieją $X_1, \ldots, X_k \subseteq X$ domknięte, nierozkładalne, to wówczas $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$
2. jeśli dla wszystkich $i \neq j$ $X_i \not\subseteq X_j$, to rozkład z punktu 1 jest jednoznaczny z dokładnością do permutacji.

Dowód
1. Prawie taki sam jak dowód faktu, że dla $r \in R - R^*$ w pierścieniu noetherowskim istnieją nierozkładalne p_i takie, że $r = p_1 \ldots p_k$.

Załóżmy nie wprost, że X nie ma takiego rozkładu, wtedy X nie może być nierozkładalny. W takim razie istnieją domknięte $A, B \subsetneq X$ takie, że $X = A \cup B$. Wtedy A lub B nie mają rozkładu, BSO A nie ma. Powtarzamy ten tok rozumowania dla A. W ten sposób moglibyśmy dostać nieskończony, niestabilizujący się ciąg zstępujących zbiorów domkniętych, co jest sprzeczne z noetherowskością X.

Definicja 1.12: składowe nierozkładalne

Składniki X_i w rozkładzie jak w stwierdzeniu 1.11 nazywamy składowymi nierozkładalnymi X.

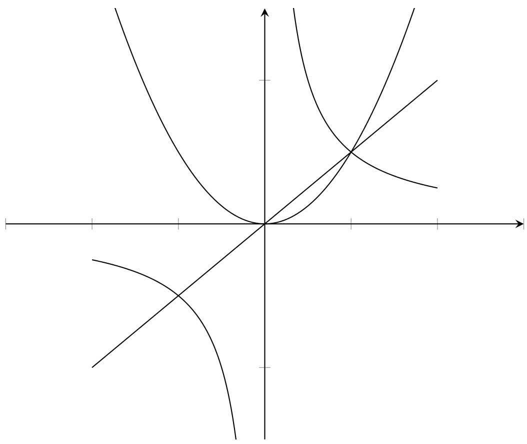
11.10.2024 To be named

Definicja 1.13

Niech V będzie afinicznym zbiorem algebraicznym. Wtedy V jest afiniczną rozmaitością algebraiczną, gdy V jest nierozkładalny w topologii Zariskiego.

Stwierdzenie 1.14

Każdy afiniczny zbiór algebraiczny jednoznacznie rozkłada się na sumę afinicznych rozmaitości algebraicznych.



Definicja 1.15

Niech X będzie (noetherowską) przestrzenią topologiczną.

$$\dim(X) := \sup\{k \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, X \supseteq \underbrace{X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \ldots \supsetneq X_k}_{\text{domknięte, nierozkładalne}} \neq \emptyset\}$$

Fakt 1.16

Jeśli X jest noetherowska i T_1, to $\dim(X) = 0 \iff X$ jest skończona.

Istnieje natomiast przestrzeń noetherowska o nieskończonym wymiarze.

Definicja 1.17

Jeśli V jest afinicznym zbiorem algebraicznym, to $\dim(V)$ jest wymiarem tego zbioru jako przestrzeni z topologią Zariskiego.

Przykład

$\dim(\mathbb{A}^1) = 1$, bo właściwe domknięte podzbiory Zariskiego są skończone.

Definicja 1.18: afiniczna krzywa algebraiczna

Mówimy, że afiniczna rozmaitość algebraiczna C jest afiniczną krzywą algebraiczną, jeśli $\dim(C) = 1$

1. Pierścienie współrzędnych

Do tej pory zakładalniśmy, że ciało nad którym pracujemy jest algebraicznie domknięte, mimo że tego nie używaliśmy. Teraz zaczniemy z tego korzystać.

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, a Y niech będzie zbiorem.

$$\mathrm{Fun}(Y, K) = \{f : Y \to K\}$$

Zbiór wszystkich funkcji w ciało jest pierścieniem przemiennym z 1.

hom. pierścieni $\implies$ $\mathrm{Fun}(Y, K)$ jest K-algebrą

Dla $F \in K[\overline{X}]$ przez chwilę oznaczymy

$$\overline{F} : \mathbb{A}^n \to K$$

jako funkcję wielomianową. Wtedy odwzorowanie

$$K[\overline{X}] \ni F \mapsto \overline{F} \in \mathrm{Fun}(\mathbb{A}^n, K)$$

jest homomorfizmem K-algebr.

Jeśli dwa wielomiany $F, G \in K[\overline{X}]$ są różne, to ich funkcje wielomianowe również są różne ($F \neq G \implies \overline{F} \neq \overline{G}$). Dlatego utożsamiamy $K[\overline{X}]$ z K-podalgebrą $\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^n, K)$ funkcji wielomianowych i piszemy "F" zamiast "$\overline{F}$".

Definicja 1.19: coordinate ring

Niech $V \subseteq \mathbb{A}^n$ będzie dowolnym podzbiorem. Jego **pierścień współrzędnych** (lub wielomianowych) definiujemy jako

$$K[V] := \{f \in \mathrm{Fun}(V, K) \ : \ (\exists\ F \in K[\overline{X}]) F|_V = f\}$$

Łatwo jest pokazać, że $K[V]$ to K-podalgebra $\mathrm{Fun}(V, K)$.

Fakt 1.20

Jeśli V jest skończony, to $K[V] = \mathrm{Fun}(V, K)$. Stąd możemy pisać $K[V] \cong K^{|V|}$.
Z tego wynika również, że $K[\mathbb{A}^n] \cong_K K[\overline{X}]$.

Mamy epimorfizm K-algebr

$$K[\overline{X}] \ni F \mapsto F|_V \in K[V]$$

którego jądro oznaczamy

$$I(V) := \{F \in K[\overline{X}] \;:\; F(V) = 0\}$$

i nazywamy **ideałem** V. Stąd

$$K[V] \cong K[\overline{X}]/I(V).$$

Lemat 1.21

$I(V)$ jest radykalny, czyli $I(V) = \sqrt{I(V)}$.

Dowód
Weźmy $F \in \sqrt{I(V)}$, wtedy istnieje n takie, że $F^n \in I(V)$, ale skoro dla każdego $v \in V$ $F(v)^n = 0$ i ciało K, to musimy mieć $F(v) = 0$, czyli $F \in I(V)$.

Lemat 1.22

Niech $V_i \subseteq \mathbb{A}^n$ oraz $J \triangleleft K[\overline{X}]$, to wówczas

1. $V_0 \subseteq V_1 \implies I(V_1) \subseteq I(V_0)$
2. $I(V_i) = \bigcap I(V_i)$
3. $J \subseteq I(V(J))^i$
4. $V(I(V_0)) = \overline{V_0}$ domknięcie V_0 w toplogii Zariskiego

Dowód
Podpunkty 1-3 są łatwe i je pomijamy.

Podpunkt 4 zaczyna od łatwiejszej inkluzji $V_0 \subseteq V(I(V_0))$, ale skoro $V(I(V_0))$ jest domknięty, to $\overline{V_0}$ też do niego należy.

Dla drugiej inkluzji potrzebujemy pokazać, że każdy domknięty $W \subseteq \mathbb{A}^n$ jeśli zawiera $V_0 \subseteq W \implies V(I(V_0))$. Z definicji topologii istnieje $J \trianglelefteq K[\overline{X}]$ takie, że $V_0 \subseteq W = V(J)$. Z podpunktu 3 wynika, że $J \subseteq I(V(J))$, a podpunkt 1 mówi, że $I(V(J)) \subseteq I(V_0)$.

Skoro $J \subseteq I(V_0)$ to z poprzedniego wykładu wiemy, że $V(I(V_0)) \subseteq V(J) = W$.

Mamy operacje:

$$\text{Podzbiory domknięte Zariskiego } \mathbb{A}^n \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \text{Podzbiory (ideały) } K[\overline{X}$$

Pozostaje nam pokazać, że $I(V(J)) =? \trianglelefteq K[\overline{X}]$. Do tego skorzystamy z algebraicznej domkniętości ciała.

Twierdzenie 1.23: słabe Nullstellensatz

Słabe twierdzenie Hilberta o zerach mówi, że dla algebraicznie domkniętego ciała K, jeśli $I \triangleleft K[\overline{X}]$ i $I \neq K[\overline{X}]$ to $V(I) \neq \emptyset$.

Dowód

Raczej idea dowodu a nie sam dowód.

Niech $I = (F_1, ..., F_k)$ dla $F_i \in K[\overline{X}]$. Ponieważ I jest właściwym podzbiorem, to rozszerza się do ideału maksymalnego $I \subseteq \mathfrak{m} \triangleleft K[\overline{X}]$. Oznaczmy pierścień ilorazowy $L := K[\overline{X}]/\mathfrak{m}$, który jest ciałem (dzielenie przez ideał maksymalny).

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rr, bend right, "\Phi"'] & K[\overline{X}] \arrow[r, "\text{ilor}"] & K[\overline{X}]/\mathfrak{m} = L \end{tikzcd}$$

Φ jest homomorfizmem ciał, czyli jest injekcją. Czyli możemy utożsamić K z podciałem L.

Niech $\overline{v} := (X_1 + \mathfrak{m}, ..., X_n + \mathfrak{m})$. Wtedy dla każdego i $F_i(\overline{v}) = 0$, a więc $\overline{v} \in V_L(I)$, tzn. jest rozwiązaniem ale w kontekście innego ciała.

Chcemy zrzucić to rozwiązanie $\overline{v}$ do K. Są na to dwa sposoby.

1. W algebraicznym domknięciu L, L^{alg}, $\overline{v} \in (L^{alg})^n$ jest nadal rozwiązaniem. Czyli zdanie

$$(\exists \overline{v}) F_1(\overline{V}) = 0 \ \wedge \ ... \ \wedge \ F_k(\overline{v}) = 0$$

   jest prawdziwe.

   Tworia modeli mówi, że każde rozszerzenie ciał algebraicznie domkniętych jest elementarne, czyli zachowuje prawdziwość ciał. $K \subseteq L^{alg}$ jest rozszerzeniem ciał algebraicznie domkniętych, czyli $F_1(\overline{v}) = 0 \ \wedge \ ... \ \wedge \ F_k(\overline{v}) = 0$ ma rozwiązanie w K

2. **Lemat Zariskiego**: niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał takie, że L jest skończenie

generowane jako K-algebra. Wtedy to tak naprawdę skończone rozszerzenie ($\dim_K L < \infty$), a więc algebraiczne.

U nas K jest algebraicznie domknięte, czyli $K = L$ i $\overline{v} \in K^n$.

Wniosek: Nullstellensatz Hilberta

$I(V(I)) = \sqrt{I}$

Dowód

Z lematu wcześniej wiemy, że $I \subseteq I(V(I))$, czyli $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$, co również pojawiło się wcześniej.

Pozostaje nam pokazać $I(V(I)) \supseteq \sqrt{I}$. Bierzemy $0 \neq G \in I(V(I))$ i niech $I = (F_1, ..., F_r)$. Rozważmy $J := (F_1, .., F_r, X_{n+1}G - 1) \trianglelefteq K[\overline{X}]$. Pokażemy, że $V(J) = \emptyset$.

Weźmy $(\overline{v}, v) \in \mathbb{A}^{n+1}$. Możemy przyjąć, że dla wszystkich $i \leq r$ $F(\overline{v}) = 0$, tzn. $\overline{v} \in V(I)$, a ponieważ $G \in I(V(I))$, to $G(\overline{v}) = 0$. To znaczy, że $(X_{n+1}G - 1)(\overline{v}, v) = 0 - 1 \neq 0$. Stąd $(\overline{v}, v) \notin V(J)$, czyli $V(J) = \emptyset$.

Ze słabego Nullstellensatz wiemy, że $J = K[\overline{X}, X]$, czyli istenią $H_1, ..., H_{r+1} \in K[\overline{X}, X]$ takie, że

$$\sum H_i F_i + H_{r+1}(X_{n+1}G - 1) = 1 \quad (\star)$$

Niech $\Psi : K[\overline{X}, X_{n+1}] \to K(\overline{X})$ będzie homomorfizmem K-algebr takie, że $\overline{X} \mapsto \overline{X}$ i $X_{n+1} \mapsto G^{-1}$ (które istnieje, bo $G \neq 0$). Nakładamy Ψ na równanie $(\star)$ i dostajemy:

$$1 = \sum H_i(\overline{X}, G^{-1})F_i \quad (\star\star)$$

Niech $N := \max(\deg_{X_{n+1}} H_i)$. Mnożymy obie strony $(\star\star)$ przez G^N i dostajemy

$$G^N = \sum H_i(\overline{X}, G^{-1})G^N F_i$$

w którym nie mamy już mianowników (czyli z funkcji wymiernej zrobiliśmy wielomian). Z tego wynika, że $G^N \in (F_1, ..., F_r) = I$ i $G \in \sqrt{I}$.