Teoria kategorii

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1 Początek końca **1**
24.02.2025 Podstawowe definicje 1
1. Przykłady kategorii 1
2. Funktory 2
25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii 5
1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka 5
2. (Ko)granice funktorów a (ko)produtky 6
3. Obiekty i kategorie monoidalne 9
03.03.2025 Funktory dołączone 11
1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu 11
2. Dużo przykładów funktorów dołączonych 11
3. Druga definicja 13
10.03.2025 Funktory dołączone własności 14
1. Dowód równoważności 14
2. Funktory dołączone a granice 16

1. Początek końca

W 1945 Eilenberg oraz Mac Lane napisali książkę ”General theory of natural equivalences”. Jest to powszechnie uznawane jako początek ery abstrakcyjnego nonsenu.

24.02.2025 Podstawowe definicje

1. Przykłady kategorii

Definicja 1.1: kategoria

Kategoria (lokalnie mała) $\mathcal{C}$ składa się z:
- obiektów $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- oraz zbiorów morfizmów dla wszystkich par $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oznaczanego $\mathcal{C}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które spełniają:
  - $id_X \in \mathcal{C}(X, X)$
  - składają się w dobry sposób, tzn. mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C),$$

    które jest łączne.

Powiemy, że kategoria jest **mała**, jeśli jej obiekty są zbiorem, a nie klasą.

Dla wygody oznaczymy

$$\mathcal{C}_0 := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

a jako $\mathcal{C}_1$ będziemy rozumieć wszystkie morfizmy w kategorii $\mathcal{C}$.

Rozważmy kilka prostych przykładów kategorii.

Przykłady

1. Kategoria *Set*, której obiekty Set_0 to wszystkie zbiory, a Set_1 to funkcje między zbiorami z normalnym składaniem funkcji.
2. Set_* to kategoria zbazowanych zbiorów, tzn. jej obiektami są pary (X, x_0), gdzie X to zbiór, a $x_0 \in X$. Morfizmy muszą wtedy zachowywać wyróżniony punkt: $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f(x_0) = y_0$.

3. *Top* to kategoria, której obiekty to przestrzenie topologiczne, a Top_1 to funkcje ciągłe między nimi.
4. *Toph* to kategoria przestrzeni topologicznych, w której morfizmy to klasy homotopii odwzorowań między przestrzeniami. To znaczy, jeśli $X, Y \in \mathrm{Ob}(Toph)$ oraz $f_0, f_1 : X \to Y$ jest ciągłym odwzorowaniem, dla którego istnieje ciągłe przekształcenie
$$F : X \times [0,1] \to Y$$
takie, że $F(x,0) = f_0(x)$ oraz $F(x,1) = f_1(x)$, to $f_0 = f_1$ jako morfizm w kategorii *Toph*.
Pozostaje sprawdzić, że jeśli f, f' oraz g, g' to pary homotopijnie równoważnych odwzorowań, to wówczas $f \circ g$ jest homotopijnie równoważne $f' \circ g'$.
5. Kategoria *Hask*, której obiekty to typy w Haskelly, a morfizmy to klasy programów.
6. Kategoria relacji *Rel*, w której obiektami Rel_0 są zbiory, a morfizmami są podzbiory produktu, tzn. $Rel(X, Y)$ zawiera wszystkie $S \subseteq X \times Y$. Wówczas składanie $S \subseteq X \times Y$ oraz $R \subseteq Y \times Z$ definiujemy jako zbiór
$$S \circ R = \{(x,z) \ : \ (\exists\, y \in Y)\ xRy \ \wedge \ ySz\},$$
gdzie xRy oznacza, że $(x, y) \in R$. Złożenie to działa jak połączenie dwóch relacji spójnikiem "i".
7. Niech R będzie tranzytywną i zwrotną relacją na zbiorze X. Definiujemy wtedy kategorię $\mathcal{C}$ o obiektach $\mathcal{C}_0 = X$ będących elementami zbioru X, a morfizmy między $a, b \in X$ to zbiór 1-elementowy $\mathcal{C}(a,b) = \{\star\}$, gdy xRy jest prawdą lub zbiór pustym w przeciwnym wypadku.
Szczególnym przypadkiem tej kategorii jest topologia na przestrzeni topologicznej, gdzie relacja R to zawieranie zbiorów otwartych.
8. Graf skierowany tworzy kategorię, której obiektami są jego wierzchołki, a morfizmy to zorientowane ścieżki.

2. Funktory

Definicja 1.2: funktor

Funktor F między kategoriamii $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$
- każdemu obiektowi X kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje obiekt $F(X)$ kategorii $\mathcal{D}$
- każdemu morfizmowi $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y)$ przypisuje morfizm $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ w kategorii $\mathcal{D}$ taki, że

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

Przykład

$Ab : Gr \to Ab$ to funktor między kategorią wszystkich grup a kategorią grup abelowych, który grupie G przypisuje jej abelianizację $Ab(G) = G/[G, G] = G^{ab}$.

Definicja 1.3: kategoria odwrotna

Przez **kategorię odwrotną** do kategorii $\mathcal{C}$ rozumiemy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której
- obiekty to obiekty oryginalnej kategorii: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- morfizmy $\mathcal{C}(X, Y)$ "odwracają się" $\mathcal{C}^{op}(Y, X)$.

Mówimy, że funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest **kowariantny**, a funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ kontrawariantny.

Zdefiniujmy teraz **kategorię funktorów** między kategoriami $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, której obiekty to wszystkie funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a morfizmy to φ takie, że dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ oraz $f : X \to Y$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Zbiór morfizmów w tej kategorii oznaczymy $\mathrm{Nat}(F, G)$ - **naturalne przekształcenia** funktora F w funktor G.

Przykład

Cup product na kohomologiach $\cup : H^m(X) \otimes H^n(X) \to H^{m+n}(X)$ jest naturalnym przekształceniem między funktorami $H^m(-) \otimes H^n(-)$ i $H^{m+n}(-)$.

Definicja 1.4: równoważność kategorii

Powiemy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są **równoważne**, jeśli istnieją funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że złożenie $F \circ G$ jest naturalnie izomorficzne do $Id_{\mathcal{D}}$, a $G \circ F$ - do $Id_{\mathcal{C}}$.

Przykład

Kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k, $Vect_k^{fin}$, jest równoważna kategorii skończenie wymiarowych macierzy nad ciałem k, $Mat^{fin}(k)$.

25.02.2025 Produkty i koprodukty kategorii

1. O obiektach początkowych i końcowych słów kilka

Definicja 1.5: obiekt początkowy i końcowy

Powiemy, że obiekt $C \in \mathcal{C}_0$ jest **początkowy**, jeśli dla każdego $D \in \mathcal{C}_0$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \to D$, $|\mathcal{C}(C, D)| = 1$. Analogicznie definiujemy **obiekt końcowy** C: $\forall\ D \in \mathcal{C}_0\ |\mathcal{C}(D, C)| = 1$.

Przykłady

1. W kategorii, której obiektami jest odcinek $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, a morfizmy to relacja $\leq$ obiektem początkowym jest 0, a końcowym - 1.
2. W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest $\emptyset$, a obiektem końcowym jest singleton.
3. W Gr grupa trywialna jest zarówno obiektem początkowym jak i końcowym.
4. Kategoria, która ma dwa obiekty bez morfizmów między nimi nie ma obiektu końcowego ani początkowego.

Fakt 1.6

Obiekty końcowe i początkowe, jeśli istnieją, to są jedyne z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód

Niech C i C' będą obiektami końcowymi kategorii $\mathcal{C}$. Wiemy, że $\mathcal{C}(C, C) = \{id_C\}$, czyli komutujący diagram

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "id_C"] \arrow[dr, "\exists! f"'] & & C \\
& C' \arrow[ur, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}$$

daje $g \circ f = id_C$. Analogiczny diagram daje $f \circ g = id_{C'}$. Stąd f i g to para wzajemnie odwrotnych izomorfizmów między C i C'

2. (Ko)granice funktorów a (ko)produtky

Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ będzie funktorem, gdzie o kategorii $\mathcal{I}$ myślimy jako o kategorii indeksów. Przez $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ oznaczmy kategorię wszystkich takich funktorów. Powiemy, że funktor C jest stały, jeżeli $C(i) = C$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_0$ oraz $C(f) = id_C$ dla każdego morfizmu.

Budujemy kategorię, której

- obiekty to wszystkie naturalne przekształcenia funktora F w funktory stałe C, $\varphi : F \implies C$, czyli komutujące diagramy (kostożki)

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

- a morfizmy to strzałki $C \to D$ takie, że diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] & & D \\ & F \arrow[ul, Rightarrow, "\psi"] \arrow[ur, Rightarrow, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

  komutuje.

Diagram wyżej można rozpisać jako:

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[d] \arrow[ddl, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\ & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & \\ D & & C \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Definicja 1.7: kogranica funktora

Kogranicą (*granica prosta*) funktora F, $\varinjlim F$, nazywamy obiekt początkowy w wyżej zdefiniowanej kategorii naturalnych przekształceń.

Diagram wyżej możemy zdualizować i zamiast rozpatrywać naturalne przekształcenia $\varphi : F \implies C$ możemy rozważyć naturalne przekształcenia $\varphi : C \implies F$, czyli diagramy (stożki)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

z morfizmami definiowanymi analogicznie.

Definicja 1.8: granica funktora

Granica (*granica odwrotna*) to obiekt końcowy powyższej kategorii stożków, $\varprojlim F$.

Rozważmy kategorię $\mathcal{I}$, która ma dwa obiekty $\mathcal{I}_0 = \{0, 1\}$. Niech $F : \mathcal{I} \to Set$ będzie funktorem, dla którego $F(0) = A$, a $F(1) = B$. Niech φ oraz ψ będzie parą naturalnych przekształceń, dla których

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim F \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
F(0) = A & D \arrow[l, "\psi_0"] \arrow[r, "\psi_1"'] \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & F(1) = B
\end{tikzcd}$$

gdzie pionowa strzałka istnieje i jest jedyna, bo $\varinjlim F$ to obiekt końcowy. Jeśli weźmiemy $\varinjlim F = A \times B$, a $\varphi_0 = \pi_A$ oraz $\varphi_1 = \pi_B$ będą rzutami i $f(d) = (\psi_0(d), \varphi_1(d))$, to diagram nadal jest prawdziwy.

Granica odwrotna tego samego funktora, to z kolei suma rozłączna $A \sqcup B$, bo diagram

$$\begin{tikzcd}
F(0) = A \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, "\varphi_0 = i_A"'] & D & F(1) = B \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[dl, "\varphi_1 = i_B"] \\
 & \varprojlim F = A \sqcup B \arrow[u, dashed, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $f(x) = \varphi_0(x)$, jeśli $x \in A$ oraz $f(x) = \psi_1(x)$ jeśli $x \in B$, komutuje.

Definicja 1.9: (ko)produkt

Produktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę prostą (kogranicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ dla $\mathcal{I}$ oraz F jak wyżej.
Koproduktem obiektów A i B kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy granicę odwrotną (granicę) funktora $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$

Przykłady

1. W kategorii grup produkt to iloczyn kartezjański dwóch grup, tak jak w kategorii zbiorów, tj. dla grup A, G, H komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
& G \times H \arrow[dl, "\pi_G"'] \arrow[dr, "\pi_H"] & \\
G & A \arrow[l, "g"] \arrow[r, "h"] \arrow[u, "g \times h"] & H
\end{tikzcd}$$

Koprodukt to z kolei produkt wolny tych dwóch grup:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i_G"'] & A & H \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "i_H"] \\
& H * G \arrow[u, dashed, "\exists ! f"] &
\end{tikzcd}$$

gdzie f nakłada na litery słów $G * H$ pochodzące z G morfizm g, a na litery pochodzące z H - morfizm h.

2. Niech $F : \mathcal{I} \to (P, \leq)$ z dwuobiektowej kategorii $\mathcal{I}$ w zbiór uporządkowany. Wtedy jeśli mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(0) = a & d \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(1) = b
\end{tikzcd}$$

to znaczy, że $d \leq a$, $d \leq b$ oraz $d \leq \varinjlim F$. Żeby więc miało to sens dla dowolnego $d \leq a, b$ to $\varinjlim F = \inf\{a, b\}$. Analogicznie dostajemy, że $\varprojlim F = \sup\{a, b\}$.

3. Jeśli $\mathcal{I}$ jest kategorią o nieskończenie wielu obiektach bez morfizmów między różnymi obiektami, a $F : \mathcal{I} \to Set$ jest funktorem w kategorię zbiorów, to wówczas kogranicą tego funktora jest nieskończony iloczyn kartezjański $\prod_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$, a granicą - nieskończona suma rozłączna $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}_0} F(i)$.

Fakt 1.10

Granica i kogranica funktora, jeśli istnieje, to jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Stąd również produkty i koprodukty są unikalne.

Dowód

Wynika z uniwersalności obiektów końcowych i początkowych.

Przykład

Rozważmy funktor $F : \mathcal{I}^{op} \to Grp$, gdzie $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)$ taki, że dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ mamy

$$F(j) = \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \xrightarrow{F(i \to j) = q} F(i) = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$

gdzie q to morfizm ilorazowy.
Liczby p-adyczne to rozszerzenie liczb wymiernych różne od liczb rzeczywistych i zespolonych. Całkowite liczby p-adyczne to szeregi

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq a_i < p$. Okazuje się, że całkowite liczby p-adyczne, $\mathbb{Z}_p$, można zdefiniować jako granicę funktora F:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Granica prosta takiego funktora jest trywialna, ale możemy rozważyć inny funktor,z kategorii $\mathbb{Z}$ z porządkiem, tzn: $G : \mathbb{Z} \to Grp$ taki, że $G(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, natomiast strzałkę $n + 1 \to n$ przekształcamy na odwzorowanie

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ni x \mapsto p \cdot x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}.$$

Wtedy granicą prostą G jest C_{p^∞} - pierwiastki p^n-tego stopnia z 1, dla dowolnego n.

3. Obiekty i kategorie monoidalne

Monoid $(M, \star, 1)$ to struktura algebraiczna z binarną operacją oraz elementem neutralnym. Dodatkowo, komutować ma diagram

$$\begin{tikzcd}
M^3 \arrow[r, "\star \times id"] \arrow[d, "id \times \star"'] & M^2 \arrow[d, "\star"] \\
M^2 \arrow[r, "\star"] & M
\end{tikzcd}$$

co znaczy, że działanie jest łączne.

Definicja 1.11: obiekt monoidalny, kategoria monoidalna

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem i elementem początkowym. Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie obiektem, dla którego mamy $\mu : M^2 \to M$ oraz $\varepsilon : \{1\} \to M$ takie, że komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon\times id"] \arrow[d, "id\times\varepsilon"'] \arrow[dr, "="] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

Wtedy M jest **obiektem monoidalnym**.
Obiekt monoidalny w kategorii *Cat* nazywa się **kategorią monoidalną**.

Przykłady

1. Dowolna kategoria $\mathcal{C}$ z koproduktem i obiektem końcowym jest kategorią monoidalna.
2. Kategoria endofunktorów ma strukturę monoidalną. To znaczy, jeśli mamy dwa endofunktory $F, G \in End(\mathcal{C})$, to potrafimy je złożyć w dobry sposób.
   Funktor $T \in End(\mathcal{C})$ oraz dwa naturalne przekształcenia $\mu : T^2 \to T$, $\varepsilon : Id \to T$, nazywa się **monadą**.

03.03.2025 Funktory dołączone

1. Motywacja abstrakcyjnego nonsensu

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k, a B wybraną jej bazą. Dowolne odwzorowanie $B \to V$ możemy rozszerzyć na odwzorowanie liniowe $k[B] = V \to V$. To znaczy, mamy izomorfizm zbiorów

$$Hom(B, V) \cong Hom(V, V).$$

W języku abstrakcyjnego nonsensu możemy zdefiniować dwa funktory,

$$Set(-, U(-)) : Set^{op} \times Vect_k^{fin} \to Set$$

$$Vect_k(k[-], -) : Set^{op} \times Vect_k^{fin} \to Set,$$

gdzie $U : Vect_k^{fin} \to Set$ to funktor zapominający strukturę przestrzeni wektorowej, między którymi istnieją naturalne izomorfizmy.

$$Set(-, U(-)) \cong Vect_k(k[-], -)$$

Definicja 1.12: funktory dołączone

Niech $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będą funktorami. Powiemy, że L jest **lewo dołączony** do funktora R, a R **prawo dołączony** do L, jeśli funktory

$$\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

są naturalnie izomorficzne. Taką parę funktorów dołączonych oznaczamy $L \dashv R$.

2. Dużo przykładów funktorów dołączonych

1. Niech $R : Set_* \to Set$ będzie funktorem z kategorii zbiorów zbazowanych w kategorię zbiorów, który zapomina o punkcie bazowym. Chcemy teraz znaleźć funktor $L : Set \to Set_*$, który będzie do niego lewo dołączony. Niech $L(X) = X \cup \{X\}$ (lub bardziej obrazowo: $X \sqcup \{*\}$), gdzie y_0 poślemy na $\{X\}$, to znaczy doklejamy do X singleton i staje się on punktem wyróżnionym.

   Oba funktory są różnowartościowe na obiektach, więc wystarczy przekonać się, że

   $$Set_*(LX, (Y, y_0)) \cong Set(X, R(Y, y_0))$$

   jest izomorfizmem. Dowolna funkcja $X \to Y$ rozszerza się przez posłanie $\{X\} \mapsto y_0$ na funkcję $(X, \{X\}) \to (Y, y_0)$.

2. Podobna sytuacja ma miejsce, kiedy szukamy lewo dołączony funktor do $R : Ring \to Rng$ między kategorią pierścieni z jedynką, a wszystkimi pierścieniami. Definiujemy funktor
$$L : Rng \to Ring$$
jako doklejenie $\mathbb{Z}$, $L(S) = \mathbb{Z} \oplus S$ z działaniem $(n, s)(n', s') = (nn', ns' + ss' + n's)$, wtedy $(1, 0_S)$ jest jedynka w nowym pierścieniu. Pozostaje przyjrzeć się co się dzieje z morfizmami, skoro
$$Rng(S, RT) \cong Ring(LS, T).$$
Dowolny morfizm $\varphi : S \to RT$ wystarczy, że trzyma element neutralny ze względu na dodawanie i jest addytywny. Możemy go rozszerzyć na morfizm, który całą pierwszą współrzędną $LS = \mathbb{Z} \oplus S$ posyła w $1_T \in T$, a drugą zgodnie z φ. W drugą stronę wystarczy obciąć morfizm do drugiej współrzędnej.

3. Niech $\Delta : Set \to Set \times Set$ będzie funktorem takim, że $\Delta(C) = (C, C)$. Zaczniemy od szukania funktora dołączonego do niego z prawej strony, czyli $R : Set \times Set \to Set$ takiego, że
$$\mathrm{Hom}(X, R(Y, Z)) \cong \mathrm{Hom}(\Delta(X), (Y, Z)).$$
Od razu narzuca się $R(Y, Z) = Y \times Z$, czyli zlepiamy współrzędne $\Delta(X)$ w jedną. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański w kategorii zbiorów jest produktem.

   Funktor lewo dołączony musi zatem spełniać
$$\mathrm{Hom}(L(X, Y), Z) \cong \mathrm{Hom}((X, Y), \Delta(Z)),$$
czyli dowolną funkcję $(X, Y) \to (Z, Z)$ musimy umieć zapisać jako funkcję z pojedynczego zbioru, którym będzie suma rozłączna $L(X, Y) = X \sqcup Y$, czyli koprodukt w kategorii zbiorów.

   Historia funktora Δ uogalnia się na dowolną kategorię, w której są produkty i koprodukty:
$$\text{koprodukt} \dashv \Delta \dashv \text{produkt}$$

4. Ustalmy zbiór $Y \in Set_0$ i niech $R : Set \to Set$ będzie funktorem, który zbiorowi X przypisuje wszystkie funkcje z Y w ten zbiór, $R(X) = Set(Y, X)$. Chcemy znaleźć funktor lewo dołączony $L : Set \to Set$ do R. Patrzymy na morfizmy i mamy
$$Set(L(X), Z) \cong Set(X, \underbrace{Set(Y, Z)}_{R(Z)})$$
zbiór po prawej to funkcje z X w funkcje z Y w Z. Można to przedstawić jako funkcje $X \times Y \to Z$, czyli $LX = X \times Y$.

   Technika tłumaczenia funkcji o więcej niż jednym argumencie na sekwencję funkcji nazywamy *currying*.

5. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, niech R będzie pierścieniem (przemiennym z jedynką), W R-modułem i R funktorem $R : RMod \to RMod$ takim, że $R(U) = \mathrm{Hom}_R(W, U)$ będzie zbiorem homomorfizmów R-modułów. Funktorem lewo-dołączonym do R będzie wtedy $L(V) = V \otimes W$:
$$RMod(V, \mathrm{Hom}_R(W, U)) \cong RMod(V \otimes W, U).$$
Uwaga: tensor produkt zwykle nie ma funktora lewo do siebie dołączonego.

6. Załóżmy, że kategoria $\mathcal{C}$ ma produkty i ustalmy $X \in \mathcal{C}$. Rozważmy funktor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $L(Y) = Y \times X$. Jeśli kategoria $\mathcal{C}$ posiada obiekty eksponencjalne, czyli wiemy jak uogólnić na nią przestrzeń funkcji $X \to Y$ (oznaczane Y^X), to funktorem prawo dołączonym do L jest właśnie funktor przypisujący obiektowi Y jego eksponens Y^X,
$$\mathcal{C}(Y, Z^X) \cong \mathcal{C}(Y \times X, Z).$$
Przykładem takiej kategorii są przestrzenie "core-compact".

W ramach kontrprzykładu rozważmy funktor zapominania $U : FinGrp \to FinSet$, i załóżmy, że $L : FinSet \to FinGrp$ jest jego funktorem lewo dołączonym. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p > |L(1)|$ (wystarczy, że są względnie pierwsze). Wtedy
$$FinSet(1, U(\mathbb{Z}_p)) \cong FinGrp(L(1), \mathbb{Z}_p)$$
gdzie po lewej zbiór ma $|\mathbb{Z}_p| = p$ różnych funkcji z singletona w zbiór elementów grupy $\mathbb{Z}_p$, a po prawej mamy jedynie trywialny morfizm, bo żaden element $L(1)$ nie ma rzędu podzielnego przez p, czyli nie może przejść w żaden nietrywialny element $\mathbb{Z}_p$.

3. Druga definicja

Definicja 1.13: funktory dołączone (naturalne transformacje)

Rozważmy parę funktorów
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathcal{D}. \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$
Powiemy, że L jest lewo dołączony do R i na odwrót, jeśli istnieją dwie natrualne transformacje
$$\varepsilon : LR \implies 1_{\mathcal{D}} \quad \eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$$
takie, że komutują diagramy
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$
η nazywamy *unit*, a ε to *counit*.

10.03.2025 Funktory dołączone własności

1. Dowód równoważności

Twierdzenie 1.14

Dwie definicje funktorów dołączonych z poprzedniego wykładu są równoważne, tzn. naturalne transformacje H, E

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(L-,-) \arrow[r, Rightarrow, shift right, "H"'] & \mathcal{C}(-,R-) \arrow[l, Rightarrow, shift right, "E"'] \end{tikzcd}$$

istnieją $\iff$ istnieją dwie naturalne transformacje $\varepsilon : LR \to 1_{\mathcal{D}}$ oraz $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to RL$ dla których komutują diagramy

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Dowód

Niech $f : c' \to c$ będzie morfizmem w $\mathcal{D}$, a $g : d' \to d$ - morfizmem w $\mathcal{C}$.

Zacznijmy od zdefiniowania szukanych przekształceń naturalnych na obiektach. Niech η_c

$$\mathcal{D}(Lc, Lc) \xrightarrow{H_{c,Lc}} \mathcal{C}(c, RLc)$$

$$1_{Lc} \longrightarrow \eta_c = H(1_{Lc})$$

a ε_d definiujemy analogicznie używając E.

W drugą stronę, $H(\varphi)$ definiujemy mając η oraz ε. Dla $\varphi : Lc \to d$ definiujemy

$$H(\varphi) := R\varphi \circ \eta_c,$$

które bierze coś z c i oddaje RLc. Z drugiej strony bierzemy $\psi : c \to Rd$

$$E(\psi) := \varepsilon_d \circ L\psi.$$

$\implies$

Zakładamy, że H i E są naturalne i pokazujemy naturalność η, czyli komutowanie diagramu

$$
\begin{tikzcd}
RL(c') \arrow[d, "RL(f)"'] & 1_{\mathcal{C}}(c') \arrow[l, "\eta_{c'}"'] \arrow[d, "1_{\mathcal{C}}(f)"] \\
RL(c) & 1_{\mathcal{C}}(c) \arrow[l, "\eta_c"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
RLf \circ \eta_{c'} &\overset{\text{def. } \eta}{=} RLf \circ H(1_{Lc'}) = \\
&\overset{\text{funktorialność } H}{=} H(Lf \circ 1_{Lc'}) = \\
&= H(1_{Lc} \circ Lf) = \\
&= H(1_{Lc}) \circ f = \\
&\overset{\text{def. } \eta}{=} \eta_c \circ f.
\end{aligned}
$$

Analogicznie należy sprawdzić naturalność ε.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że zdefiniowane przez nas η i ε spełnia warunek trójkąta w definicji, tzn. komutują diagramy

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, Rightarrow, "1_L\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_L"'] & LRL \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon 1_L"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, Rightarrow, "\eta 1_R"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_R"'] & RLR \arrow[d, Rightarrow, "1_R\varepsilon"] \\
& R
\end{tikzcd}
$$

Ograniczymy się do sprawdzenia lewego diagramu.

$$
\begin{tikzcd}
Lc \arrow[r, "L(\eta_c)"] \arrow[dr, "1_{Lc}"'] & LRLc \arrow[d, "\varepsilon_{Lc}"] \\
& Lc
\end{tikzcd}
$$

$$
\varepsilon_{Lc} L(\eta_c) = E(1_{RLc}) L(\eta_c) = E(1_{RLc}\eta_c) = EH(1_{Lc}) = 1_{Lc}
$$

$\Longleftarrow$

Wychodzimy teraz z założenia, że $\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$ i $\varepsilon : LR \implies 1_{\mathcal{D}}$ to naturalne przekształcenia, czyli z komutowania diagramów

$$
\begin{tikzcd}
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] \arrow[d, "f"'] & RLc' \arrow[d, "RLf"] \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & RLc
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "g"'] & LRd \arrow[l, "\varepsilon_d"'] \arrow[d, "LRg"] \\
d' & LRd' \arrow[l, "\eta_{d'}"]
\end{tikzcd}
$$

dostajemy równości

$$
RLf \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f
$$

$$g \circ \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} \circ LRg.$$

Powinniśmy najpierw pokazać, że H i E są naturalne. Zrobimy to tylko dla H. Interesuje nas diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Lc, d) \arrow[r, "H_{c;d}"] \arrow[d, "(Lf;g)"'] & \mathcal{C}(c, Rd) \arrow[d, "(f;Rg)"] \\
\mathcal{D}(Lc', d') \arrow[r, "H_{c';d'}"'] & \mathcal{C}(c', Rd')
\end{tikzcd}$$

$$EH(\varphi) = E(R\varphi \circ \eta) = E(R\varphi)E(\eta) = \varepsilon LR\varphi\varepsilon L\eta$$

Twierdzenie 1.15

Istnieje bijekcja między zbiorem par naturalnych przekształceń (H, E) oraz (η, ε).

Dowód
ojesu galu

2. Funktory dołączone a granice

Twierdzenie 1.16

Niech $L \dashv R$ będzie parą funktorów dołączonych. Wtedy L zachowuje granice proste, a R - granice odwrotne.

Przypomnijmy że kogranica (granica prosta) funktora $f : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ spełnia dla każdego g diagram

$$\begin{tikzcd}
f_i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & f_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& \varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& g &
\end{tikzcd}$$

Dowód

Pokażemy tylko, że lewo dołączony funktor zachowuje kogranice, tj. dla dowolnego $d \in \mathcal{D}$ zachodzi diagram

$$\begin{tikzcd}
Lf_i \arrow[rr, "L\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & Lf_j \arrow[dl, "L\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& L\varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Z uniwersalnej własności kogranicy mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
f_i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "L\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\theta_i"'] & & f_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\theta_j"] \\
& \varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& Rd &
\end{tikzcd}$$

Nakładamy na niego funktor L. Potrzebujemy też strzałek $L\eta_i : Lf_i \to LRLf_i$ przychodzących z naturalnej transformacji $\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies RL$. Dodatkowo wiemy, że $\varepsilon_d : Lrd \to d$ istnieje i jest w dodatku jedyne. Mamy więc diagram

$$\begin{tikzcd}
& Lf_i \arrow[rr, "L\alpha"] \arrow[dl, "L\eta_i"'] \arrow[dr, "L\varphi_i"] \arrow[ddr, bend right, "L\theta_i"] \arrow[dddr, bend right=60, "\psi_i"] & & Lf_j \arrow[dl, "L\varphi_j"'] \arrow[dr, "L\eta_j"] \arrow[ddl, bend left, "L\theta_j"'] \arrow[dddl, bend left=60, "\psi_j"'] & \\
LRLf_i \arrow[drr, bend right, "LR\psi_i"'] & & L\varinjlim f \arrow[d, dashed, "\exists! Lu"] & & LRLf_j \arrow[dll, bend left, "LR\psi_j"] \\
& & LRd \arrow[d, "\exists! \varepsilon_d"] & & \\
& & d & &
\end{tikzcd}$$

w którym długie zielone strzałki są konsekwencją złożenia $\varepsilon_d \circ LR\psi_i = \psi_i$. Dostajemy więc $\varepsilon_d \circ Lu$ jako jedyną strzałkę $L\varinjlim f \to d$ komutującą z ψ_i oraz ψ_j.

🦚

tutaj cos o kojadrze jak mamy funkcje w przestrzeniach wektorowych

Z JAKIEGOS POWODU TUTAJ POWINNISMY DAC DEFINICJE MODULU PROJEKTYWNEGO

twierdzenie: każdy moduł wkłada się w pewien moduł injektywny