Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

1. Wstępy

02.10.2024 Grafy Cayleya

1. Metryka słów

Definicja 1.1: metryka słów

Niech G będzie grupą, a S dowolnym układem jej generatorów. Wówczas dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ **odległość między nimi w metryce słów** definiujemy jako

$$ds(g_1, g_2) = \min\{n \;:\; g_2 = g_1 s_1, ..., s_n,\; s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

gdzie $S^{-1} = \{g^{-1} \;:\; g \in S\}$.

Metryka słów jest

1. skończona
2. symetryczna (z definicji generatorów)
3. lewo-niezmiennicza, czyli $(\forall\ \gamma \in G)\ ds(\gamma g_1, \gamma g_2) = ds(g_1, g_2)$

Ostatnia własność oznacza, że G działa na sobie jako na przestrzeni metrycznej przez izometrie.

Gromov chce patrzeć na dyskretne przestrzenie metryczne, jakimi są grupy z metryką słów, jako na przestrzenie ciągłe (z dużej odległości).

2. Graf Cayleya

Definicja 1.2: graf Cayleya

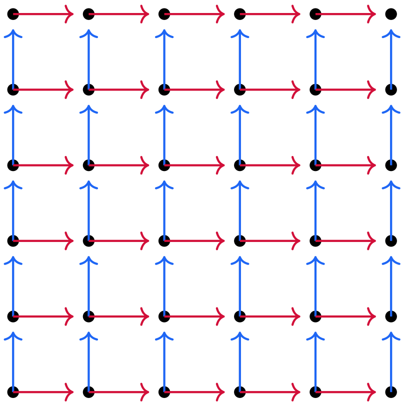
Niech G będzie grupą, a S zbiorem jej generatorów. $C(G, S)$ to graf Cayleya o wierzchołkach będących elementami G i skierowanych krawędziach etykietowanych generatorami:

$$g \xrightarrow{s} gs$$

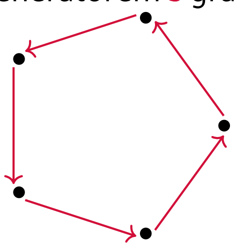
gdzie $g \in G$ i $s \in S$.

Przykłady

1. Dla $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $S = \{\overbrace{(1,0)}^{s}, \overbrace{(0,1)}^{t}\}$ graf Cayleya to nieskończona "kratka"



2. Dla grupy cyklicznej rzędu p z generatorem s graf Cayleya to p-kąt



3. TO DO parkietarz kwadratami

Każdy graf Cayleya jest **spójny**, bo jego krawędzie to mnożenie przez generatory. Dodatkowo, grupa G działa na nim przez automorfizmy zachowując krawędzie oraz ich etykiety. To znaczy, że krawędź z wierzchołkami $g \xrightarrow{s} gs$ pod działaniem elementu $\gamma \in G$ staje się $\gamma g \xrightarrow{s} \gamma gs$.

Jeśli każdą krawędź w grafie Cayleya potraktujemy jako odcinek długości 1, to możemy na nim zdefiniować metrykę która jako odległość dwóch punktów przyjmuje długość najkrótszej ścieżki między nimi. Ta metryka na wierzchołkach pokrywa się z **metryką słów** na grupie G o generatorach S, której graf rozpatrujemy. Przy takiej metryce działanie grupy G jest więc działaniem nie tylko przez automorfizmy, ale przez izometrie (lewa-niezmienniczość).

Innym wariantem grafu Cayleya jest graf w którym wierzchołki są elementami grupy $V = G$, ale krawędzie są niezorientowane: $E = \{\{g_1, g_2\} \ : \ d_S(g_1, g_2) = 1\}$. W przykładzie z parkietarzem zamiast podwójnych krawędzi w obie strony będzie on miał pojedyńczą, nieskierowaną krawędź

Dla surjekcji $\pi : F_S \to G$, gdzie $G = \langle S \mid R \rangle = F_S/N$ możemy mieć dwie tak samo zorientowane strzałki między dwoma wierzchołkami (gdy np. $g_1\pi(s_1) = g_1\pi(s_2) = g_2$

$$\begin{tikzcd} g_1 \arrow[r, bend left, "s_1"] \arrow[r, bend right, "s_2"'] & g_2 \end{tikzcd}$$

Graf Cayleya grupy wolnej to nieskończone drzewo stopnia równego ilości $2\cdot$ ilość generatorów.

Definicja 1.3: suma drzewiasta

Mając dwie grupy (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya ich sumy wolnej, czyli graf $(G_1 \star G_2, S_1 \cup S_2)$ to graf pierwszej grupy, który w każdym wierzchołku ma kopię grafu drugiej grupy, która w każdym wierzchołku ma kopię pierwszej grupy...

09.10.2024 Lemat Milnora-Švarca

Lemat 1.4: Milnora-Švarca

Niech X będzie właściwą przestrzenią geodezyjną a Γ grupą działającą na X przez izometrie właściwie i kozwarcie. Wówczas Γ jest skończenie generowalna i quasi-izometryczna z X. Dokładniej, $\forall\ x_0 \in X$ odwzorowanie $\Gamma \to X$ określone przez $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ jest quasi-izometrią.

Dowód

Wybierzmy $x_0 \in X$. Z kozwartości tego działania, istnieje promień $R > 0$ taki, że dla kuli $B = B_R(x_0)$ o środku w x_0 taki, że rodzina przesunięć kuli $\{g \cdot B \ : \ g \in \Gamma\}$ jest pokryciem X. Rozważmy zbiór $S = \{s \in \Gamma \ : \ s \neq 1, s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ niewielkich przesunięć kuli B. Z właściwości działania oraz z właściwości przestrzeni X, zbiór S jest skończony. Ponadto, zbiór jest ten jest symetryczny $S = S^{-1}$ ($s \in S \implies s^{-1} \in S$), bo jeśli $s \cdot B \cap S \neq \emptyset$ to również $s^{-1} \cdot (s \cdot B \cap B) \neq \emptyset$.

Określamy $v := \inf\{d(B, g \cdot B) \ : \ g \in \Gamma - S - \{1\}\}$ czyli najmniejsza odległość kuli od jej rozłącznych z nią przesunięć.

Clam 1: $v > 0$

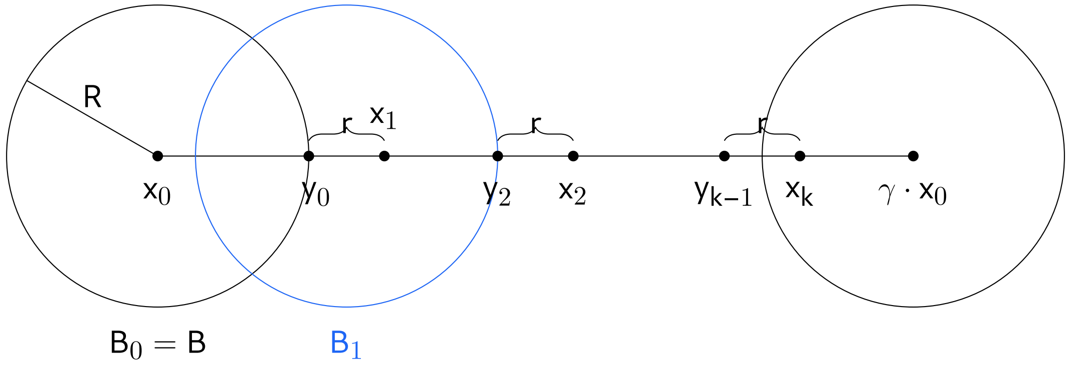
Dla każdego $g \in \Gamma - S - \{1\}$ wiemy, że $d(B, g \cdot B) > 0$. Gdyby to infimum $v = 0$, to mielibyśmy ciąg parami różnych elementów $g_n \in \Gamma$ takich, że $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$ maleją do 0. Stąd mielibyśmy punkty $z_n \in B$ takie, że $d(z_n, g_n \cdot B) \searrow 0$ (jako punkty prawie realizujące odległość między zbiorami). Istnieje podciąg n_k taki, że $z_{n_k} \in z_0 \in B$, a stąd $d(z_0, g_n \cdot B) \searrow 0$. To oznacza, że $B_{2R}(x_0)$ przecina niepusto nieskończenie wiele spośród przesunięc $g_n \cdot B_{2R}(x_0)$, a to jest sprzeczne z właściwością działania.

Clam 2: S generuje Γ oraz dla każdego $\gamma \in \Gamma$

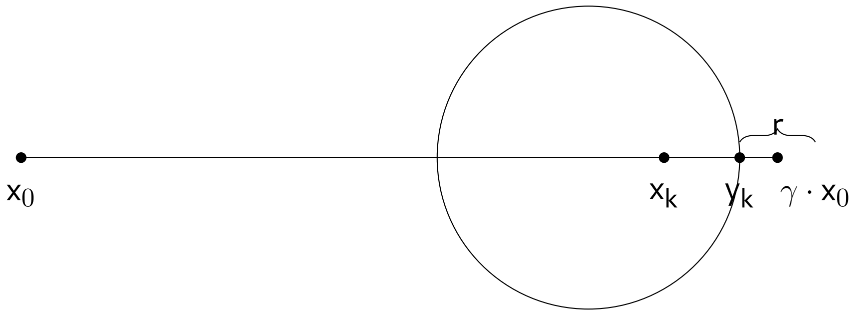
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1,$$

gdzie $\lambda := \max_{s \in S} d_X(x_0, s \cdot x_0)$.

I scenariusz:



II scenariusz



Niech y_0 będzie punktem na geodezyjnej $[x_0, \gamma \cdot x_0] = \eta$ z kuli B najdalszy od x_0 na tej geodezyjnej. W odległości r od y_0 obierzmy punkt x_1. Wtedy odcinek $(y_0, x_1) \subseteq \eta \subseteq \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, ale to jest zbiór domknięty, z czego wynika, że $x_1 \in \bigcup_{s \in S} s \cdot B$, czyli $x_1 \in s_1 \cdot B$. Iterujemy się tak aż kulą $B_k = s_k s_{k-1} ... s_1 \cdot B$ trafimy w $\gamma \cdot x_0$.

W scenariuszu I mamy $\gamma \cdot B \cap s_k ... s_1 \cdot B \neq \emptyset$, bo $\gamma x_0 \in \gamma \cdot B$ oraz $\gamma x_0 \in s_k ... s_1 \cdot B$. W takim razie $s_1^{-1} ... s_k^{-1} \gamma \cdot B \cap B \neq \emptyset$. Czyli zachodzi jedna z równości

1. $s1^{-1} ... s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k ... s_1$
2. $s_1^{-1} ... s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k ... s_1 s_{k+1}$

W scenariuszu II $d(\gamma x_0, s_k ... s_1 \cdot B) < v \implies d(x_0, \gamma^{-1} s_k ... s_1 \cdot B) < r \implies d(B, \gamma^{-1} s_k ... s_1 \cdot B) < r$. W takim razie znowu zachodzi jedna z równości

1. $s1^{-1} ... s_k^{-1} \gamma = 1 \implies \gamma = s_k ... s_1$
2. $s_1^{-1} ... s_k^{-1} \gamma = s_{k+1} \in S \implies \gamma = s_k ... s_1 s_{k+1}$

Dla uzyskania prawej nierówności, zauważamy, że w obu scenariuszach $d_S(1, \gamma) \leq k + 1 \leq \frac{1}{r} d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$, bo $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq k \cdot r$ bo tyle razy udało nam się odłożyć r na geodezyjnej.

Jeśli $d_S(1, \gamma) = m$, a $\gamma = s_1 ... s_m$, to wówczas

$$d_X(s_1, ..., s_k \cdot x_0, s_1 ... s_{k-1} \cdot x_0) = d_X(s_k \cdot x_0, x_0) \leq \lambda.$$

Z nierówności trójkąta

$$d(\gamma \cdot x_0, x_0) = d(s_1 ... s_k \cdot x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1, \gamma) \cdot \lambda$$

co właściwie kończy dowód Claim 2.

Pozostaje nam udowodnienie quasi-izometryczności $f(\gamma) \to \gamma \cdot x_0$, które staje się **Claim 3**.

Z lewo niezmienniczości metryki słów d_S wiemy, że $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_s(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$, czyli wszystkie dystanse wyrażają się jako dystanse od 1. Z kolei z lewo-Γ-niezmienniczości metryki d_X na X mamy

$$d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d_X(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) = d_X(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 \cdot x_0).$$

Nierówności z **Claim 2** otrzymujemy następujący wariant nierówności

$$\frac{1}{\lambda} d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} \cdot d_X(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

Stąd wynika, że

$$rd_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d_X(f(\gamma_1), g(\gamma_2) \leq \lambda d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

i f jest quasi-izometrycznym włożeniem dla $C = \max(\lambda, \frac{1}{r})$ i $L = r$.

Ponadto, obraz $f(\Gamma)$ jest R-gęsty (dla R promienia z początku dowodu) w X, bo dla każdego $x \in X$ istnieje $\gamma \in \Gamma$ takie, że $x \in \gamma \cdot B_R(x_0) = B_R(\gamma \cdot x_0)$. Czyli $d_X(x, \gamma \cdot x_0) \leq R$, ale $\gamma \cdot x = f(x)$. Stąd f jest quasi-izometrią.

Niewszystkie quasi-izometryczne grupy są współmierne.

Przykłady

1. Grupy podstawowe $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$ zamkniętych 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych M_1, M_2 o niewspółmiernych (jedna nie jest iloczynem drugiej przez liczbę wymierną) objętościach $\mathrm{vol}(M_i)$.
   Wiadomo, że istnieje wiele klas niewspółmierności wśród objętości takich rozmaitości.

   ### Twierdzenie 1.5: Mostowa o sztywności [1968]

   Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne. W szczególności, mają jednakowe objętości.

   Załóżmy nie wprost, że $\pi_1(M_1)$ i $\pi_1(M_2)$ są współmierne, to wówczas mielibyśmy wspólną podgrupę skończonego indeksu $H < \pi_1(M_1)$, $H < \pi_1(M_2)$. Niech $\overline{M}_1$ i $\overline{M}_2$ będą nakryciami M_1, M_2 wyznaczone przez H. Skoro indeks grupy jest skończony, to nakrycia też takie są, a więc $\overline{M}_i$ są zwarte i z podniesionymi metrykami

Riemanna, a więc są w dalszym ciągu hiperboliczne.
Z teorii nakryć wiemy, że $\pi_1(\overline{M}_1) \cong H \cong \pi_1(\overline{M}_2)$. Stąd wynika, że $\overline{M}_1$ jest izometryczna z $\overline{M}_2$, a więc ich objętości są równe sobie. Ale

$$\mathrm{vol}(\overline{M}_i) = \underbrace{(\text{krotność nakrycia})}_{=[\pi_1(M_i):H]} \cdot \mathrm{vol}(M_i)$$

stąd

$$\frac{\mathrm{vol}(M_1)}{\mathrm{vol}(M_2)} = \frac{[\pi_1(M_1) : H]}{[\pi_1(M_2) : H]}$$

daje sprzeczność z niewspółmiernością.

2. Niech G_A będzie produktem półprostym $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, gdzie $A : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ jest zadane macierzą $A \in Sl_2\mathbb{Z}$. Chcemy, żeby A było macierzą hiperboliczną (tzn. $|tr(A)| > 2$) posiadającą dwie różne rzeczywiste wartości własne, odwrotne do siebie. Wówczas grupa G_A jest kratą (podgrupą dyskretną i kozwartą) w pewnej grupie Liego $Sol = (\mathbb{R}^3, \cdot)$, gdzie mnożenie jest zadane jako

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (e^z \cdot a, e^{-z} \cdot b, c + z)$$