Geometryczna Teoria Grup

Weronika Jakimowicz

Zima 2024/25

Spis treści

13.11.2024 To be named

Funkcja wzrostu: $\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jako liczność kuli o promieniu k i środku w elemencie neutralnym: $f_{G,S}(k) = |B_k^{G,S}(e)|$

1. Abstrakcyjne funkcje wzrostu

Abstrakcyjna funkcja wzrostu f to po prostu niemalejąca funkcja $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Każda funkcja wzrostu $\beta_{G,S}$ wyznacza abstrakcyjną funkcję wzrostu

$$\widetilde{\beta}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lceil t \rceil),$$

która nadal jest multiplikatywna, tzn. $\widetilde{\beta}_{G,S}(t + t') \leq \widetilde{\beta}_{G,S}(t) \cdot \widetilde{\beta}_{G,S}(t')$.

Konkurencyjnie możemy zdefiniować $\widetilde{\widetilde{\beta}}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lfloor t \rfloor)$, ale nie zachowujemy wówczas multiplikatywności funkcji.

Definicja 2.9: quasi-dominacja

Mówimy, że funkcja g **quasi-dominuje** $[g \succ f]$ funkcję f, jeśli istnieje $c \geq 1$ i $b \geq 0$ takie, że

$$(\forall\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0})\ f(t) \leq c \cdot g(ct + b) + b$$

Przykłady

1. Dla każdego wielomianu $w(t)$ stopnia n o dodatnich współczynnikach $w(t) \prec t^n$.
2. Dla dowolnych $a, b > 1$ zachodzi

$$a^t \succ b^t,$$

nawet gdy $a > b$.

Relacja quasi-dominacji jest relacją przechodnią i zwrotną.

2. Tempo wzrostu grupy

Definicja 2.10: quasi-równoważność

Dwie funkcje f i g są quasi-równoważne $[f \sim g]$, gdy $f \succ g$ i $g \succ f$. Jest to relacja równoważności. Klasy tej relacji nazywamy typami wzrostu [eng. growth rate types].

Przykłady

1. Dla $a \geq 0$ funkcje $t \mapsto t^a$ określają parami różne typy wzrostu.
2. Dla $0 > a > b$ zachodzi $e^{ta} \sim e^{tb}$. Jest to tzw. tym wzrostu eksponencjalnego.
3. $(\forall\ a \geq 0)$ $t^a \prec e^t$ oraz $t^a \not\succ e^t$, czyli wzrost eksponencjalny nigdy nie jest równy wzrostowi t^a.
4. Wszystkie funkcje wzrostu grup $\beta_{G,S}$ są quasi-zdominowane przez e^t, $\beta_{G,S} \prec e^t$. Aby pokazać, że grupa (G, S) ma typ wzrostu eksponencjalnego wystarczy pokazać, że $\beta_{G,S} \succ e^t$, co jest równoważne nierówności $\beta_{G,S} \geq ca^t - b$ dla $a > 1$, $b \geq 0$ i $c > 0$.
5. $\widetilde{\widetilde{\beta}}_{G,S} \sim \widetilde{\beta}_{G,S}$

Fakt 2.11

Niech (G, S) i (H, T) będą grupami ze skończonym układem generatorów. Jeśli istnieje quasi-izometryczne zanurzenie

$$f : (G, d_S) \to (H, d_T),$$

to wówczas funkcja wzrostu w G jest zdominowana przez funkcję wzrostu w H: $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$.

Zanim przejdziemy do dowodu faktu 2.11, wymieńmy kilka ważnych wniosków z niego wynikających.

Wniosek

1. Jeśli grupy (G, d_S) i (H, d_T) są quasi-izometryczne, to wówczas mają ten sam typ wzrostu: $\beta_{G,S} \sim \beta_{H,T}$.
2. Dla różnych skończonych układów generatorów S_1, S_2 grupy G zachodzi $\beta_{G,S_1} \sim \beta_{G,S_2}$, czyli grupa jednoznacznie determinuje swój typ wzrostu.

Wyróżniamy grupy o wzroście

- wielomianowym, czyli taki dla których funkcja wzrostu jest zdominowana przez t^a dla pewnego a [$\beta_{G,S} \prec t^a$],
- eksponencjalnym,
- pośrednim [eng. intermediate growth], czyli ani wielomianowym ani eksponencjalnym (dominuje ściśle nad wielomianowym, ale jest zdominowany ściśle nad eksponencjalnym).

Okazuje się, że w przypadku wzrostu nieprzekraczającego wielomianowego, wzrost musi być typu $\beta_{G,S} \sim t^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Tzn. nie ma grup o typie wzrostu "ułamkowo-potęgowego" ani $t \cdot \log t$ etc.

Istnieją grupy o wzroście pośrednim, np. tak zwana grupa Grigorchuka (automorfizmów pewnego drzewa). Wiadomo dla niej, że

$$e^{t^\alpha} \prec \beta_G \prec e^{t^\beta}$$

dla pewnych $0 < \alpha < \beta < 1$, ale nie mamy wyznaczonej konkretnej funkcji. Grupa ta jest skończenie generowalna, ale nieskończenie prezentowalna.

Istnieje otwarta hipoteza, że jeśli G ma wzrost pośredni, to $\beta_G \succ e^{t^\alpha}$ dla pewnego $0 < \alpha < 1$. Nie wiemy też, czy istnieje grupa skończenie prezentowalna, która dopuszcza pośredniego wzrostu (otwarte jest pytanie o dowód, że nie może tak być).

Żadna grupa o wzroście pośrednim nie ma wyznaczonego dokładnego typu wzrostu.

Wracamy do 2.11.

Dowód

Niech $f : (G, d_S) \to (H, d_T)$ będzie q.i. zanurzenie i niech $C \geq 1$ będzie takie, że

$$(\forall\, g, g' \in G)\ \frac{1}{C} d_S(g, g') - C \leq d_T(f(g), f(g')) \leq C d_S(g, g') + C.$$

Niech $e' = f(e)$ i niech $r \in \mathbb{N}$. Wtedy jeśli $g \in B_r^{G,S}(e)$, to wówczas

$$d_T(f(g), e') \leq C \cdot d_S(g, e) + C \leq C \cdot r + C.$$

W takim razie

$$f\left(B_r^{G,S}(e)\right) \subseteq B_{Cr+C}^{H,T}(e').$$

Niestety, q.i. może sklejać elementy i niekoniecznie jest różnowartościowa. Musimy więc znaleźć oszacowanie na moc przeciwobrazów $f^{-1}(h)$.

Jeśli $f(g) = f(g')$, to wówczas z faktu, że f jest q.i. mamy

$$d_S(g, g') \leq C \cdot [d_T(f(g), f(g')) + C] = C^2.$$

Stąd $f^{-1}(h)$ zawiera się w kuli o promieniu C^2 wokół dowolnego punktu z $f^{-1}(h)$. Ponieważ kule względem metryki słów o ustalonym promieniu i zmiennym środku są równoliczne, więc mamy oszacowanie

$$|f'(h)| \leq \left|B_{C^2}^{G,S}(e)\right|.$$

Stąd dostajemy

$$\left|B_r^{G,S}(e)\right| \leq \left|B_{C^2}^{G,S}(e)\right| \cdot \left|B_{Cr+C}^{H,T}(e')\right|,$$

czyli

$$\beta_{G,S}(r) \leq \left| B_{C^2}^{G,S}(e) \right| \cdot \beta_{H,T}(Cr + C),$$

czyli $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$.

Przykłady

1. $\mathbb{Z}^n \approx \mathbb{Z}^m$ są q.i. $\iff$ $n = m$, bo $\beta_{\mathbb{Z}^n} \sim t^n \not\sim t^m \sim \beta_{\mathbb{Z}^m}$.
2. Grupa wolna F nie jest q.i. z $\mathbb{Z}^m$, bo $\beta_F \sim e^t$, a $\beta_{\mathbb{Z}^m} \sim t^m$ i $e^t \not\sim t^m$.
3. Dla skończenie generowalnej podgrupy $H \leq G$ zachodzi $\beta_H \prec \beta_G$.

Wniosek

Każda grupa zawierająca podgrupę wolną (nieabelową) ma wzrost eksponencjalny.

4. Grupa Heisenberga

$$H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma $\beta_H \sim t^4$. Stąd można wywnioskować, że $H \not\approx \mathbb{Z}^3$ nie jest q.i.. Jako ciekawostka można nadmienić, że wymiar asymptotyczny grupy H wynosi 3, a grupy $\mathbb{Z}^4$ wynosi 4, co mówi, że $H \not\approx \mathbb{Z}^4$ nie są q.i..

3. Grupy o wzroście wielomianowym

Dla przypomnienia, patrzymy teraz na grupy $\beta_G \prec t^a$ dla pewnego $a > 0$. Zacznijmy od kilku przykładów.

Dla grupy G określamy $C_n(G)$ indukcyjnie przez $C_0(G) := G$, $C_{n+1}(G) = [G, C_n(G)]$. Taki ciąg nazywamy **dolnym ciągiem centralnym grupy**. Zachodzi $C_{j+1}(G) \triangleleft C_j(G)$ oraz $C_j(G)/C_{j+1}(G)$ jest abelowa. Gdy G jest skończenie generowalna, to wszystkie $C_j(G)$ i ilorazy $C_j(G)/C_{j+1}(G)$ też takie są.

Grupa G jest nilpotentna, gdy $C_n(G)$ jest trywialne dla pewnego n.

Definicja 2.12: wymiar jednorodny grupy nilpotentnej

Skończenie generowalna grupa abelowa A ma jednoznaczny rozkład $A \sim \mathbb{Z}^m \oplus B$, gdzie B jest grupą skończoną. Definiujemy wówczas $\text{rank}(A) = m$.
Wymiar jednorodny grupy nilpotentnej to skończona suma (bo od pewnego momentu $C_j(G) = 0$)

$$d(G) := \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\,\text{rank}(C_j(G)/C_{j+1}(G)).$$

Fakt 2.13

Dla dowolnej skończenie generowalnej grupy nilpotentnej G zachodzi

$$\beta_G \sim t^{d(G)}$$

Przykład

Dla grupy Heisenberga $H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, która jest nilpotentna, mamy

$$\begin{array}{cc} C_1(H) \cong \mathbb{Z} & C_0(H)/C_1(H) = H/C_1(H) \cong \mathbb{Z}^2 \\ C_2(H) = 0 & C_1(H)/C_2(H) \cong C_1(H) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

więc $d(H) = \text{rank}(\mathbb{Z}^2) + 2 \cdot \text{rank}(\mathbb{Z}) = 2 + 2 = 4$.

Definicja 2.14: wirtualna nilpotentność

Skończenie generowana grupa G jest wirtualnie nilpotentna, jeśli zawiera skończonego indeksu podgrupę nilpotentną.

Twierdzenie 2.15: [Gromova]

Skończenie generowalna grupa G ma wzrost wielomianowy $\beta_G \prec t^a \iff$ G jest wirtualnie nilpotentna.