Geometria różniczkowa

Weronika Jakimowicz

Lato 2024/25

Spis treści

1. Początek końca

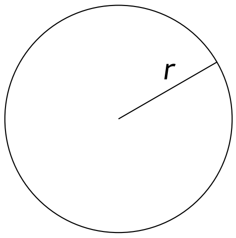
Głównym bohaterem będzie krzywizna.

25.02.2025 Rozgrzewka

1. Krzywe na płaszczyźnie

Jakościowo opisać krzywiznę krzywej na płaszczyźnie jest łatwo. Chcemy to zrobić bardziej matematycznie.

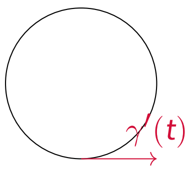
Patrzymy na okrąg na płaszczyźnie, który powinien mieć taką samą krzywiznę w każdym punkcie. Dodatkowo, im większy okrąg tym mniejsza krzywizna.



Dla okręgu jak wyżej definiujemy krzywiznę

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

Niech γ będzie różniczkowalną krzywą gładką o niezerowej pochodnej. Wyobraźmy sobie okrąg, który podróżuje po krzywej γ z prędkością $\gamma'(t)$ zależną od punktu na krzywej



Na tym okręgu działa pewna siła odśrodkowa - to będzie nasza krzywizna.

Definicja 1.1

Krzywa regularna to gładkie odwzorowanie

$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$$

której pochodna jest niezerowa w każdym punkcie $\gamma'(t) \neq 0$.

Lemat 1.2: o parametryzacji łukowej

Jeżeli $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ jest krzywą regularną, to istnieje gładka reparametryzacja $s : (a, b) \to (0, l)$ taka, że $\gamma \circ s^{-1}$ jest krzywą o prędkości 1. To znaczy, że

$$|(\gamma \circ s^{-1})'(d)| = 1$$

dla każdego $d \in (0, l)$.

Dowód

Zdefiniujmy s

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| du.$$

Wtedy przeciwobraz krzywej s w punkcie u to droga, którą przebyliśmy od początku do teraz po krzywej γ:

$$\int_a^{a+d} |(\gamma \circ s^{-1})'(u)| du = d$$

Przykład

Policzymy przyśpieszenie na okręgu. Wzór na okrąg to krzywa

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

więc nie jest to parametryzacja łukowa (długość łuku). Prosta zmiana daje nam

$$\gamma(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r}), \quad t \in [0, 2\pi r],$$

którego pochodna to

$$\gamma'(t) = (-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r})$$

wektor długości 1.

Druga pochodna γ, czyli siła dośrodkowa, to

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{r} \cos \frac{t}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{s}),$$

której wartość

$$|\gamma''(t)| = \frac{1}{r}$$

to faktycznie krzywizna okręgu.

Lemat 1.3

Jeśli γ jest sparametryzowane długością łuku, to $\gamma''(s)$ jest prostopadła do $\gamma'(s)$.

Dowód

Długość krzywej sparametryzowanej długością łuku

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$$

jest funkcją stałą. Jeśli więc zróżniczkujemy ją względem s, to dostajemy

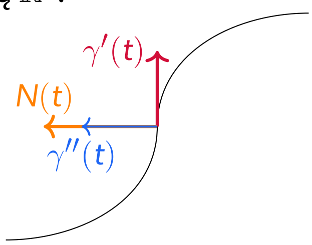
$$0 = \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 2\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle$$

Definicja 1.4

Niech γ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku. Niech $N(t)$ będzie wektorem jednostkowym ortogonalnym do $\gamma'(t)$ i takim, że

$$(\gamma'(t), N(t))$$

jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^2$:



Krzywizna $\kappa_\gamma(t)$ (znakowana) w t jest definiowana równaniem

$$\gamma''(t) = \kappa_\gamma(t) N(t)$$

Przykład

Rozważamy parabolę, czyli krzywą daną jako

$$\gamma(t) = (t, t^2).$$

Naszym celem jest policzenie krzywizny w punkcie $t = 0$. Wzór wyżej nie jest parametryzacja długością łuku. Liczymy więc obie pochodne:

$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\gamma''(t) = (0, 2).$$

Zauważamy, że druga pochodna nie jest prostopadła do prędkości, co zgadza się z intuicją, bo punkt podróżujący po paraboli coraz szybciej leci w górę. Liczymy nową parametryzację:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}du,$$

której nie da się w łatwy sposób scałkować.

$$\frac{ds}{dt}|_{t=0} = 1$$

z różniczkowania funkcji odwrotnej

$$\frac{dt}{ds}|_{s=0} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}|_{t=0} = 1$$

Krzywizna to będzie

$$\frac{d}{ds}(\gamma \circ s^{-1})(s) = \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\gamma(t(s)) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = (0, 2) \cdot 1 + (1, 0)\frac{d^2t}{ds^2}$$

i $\frac{d^2t}{ds^2}$ nie da się łatwo policzyć, więc korzystamy z faktu, że $(1, 0)\frac{d^2t}{ds^2}$ jest prostopadłe do $\gamma'(0) = (1, 0)$, jeśli γ' jest sprametryzowane długością łuku, ale tutaj nie musimy uważać, bo pierwsza pochodna jest taka sama z dokładnością do mnożenia przez stałą bez względu na jej parametryzację. Stąd wiemy, że

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0,$$

bo iloczyn skalarny jest temu równy (z dokładnością do stałej).

Lemat 1.5: równania Freneta

Niech γ będzie sparametryzowana długością łuku i niech $(T(s), N(s))$ będzie bazą ortonormalną dodatnio zorientowaną, gdzie $T(s) = \gamma'(s)$. Wtedy:

$$T' = \kappa \cdot N$$

$$N' = -\kappa T$$

Dowód

Pierwsze równanie to definicja krzywizny. W drugim równaniu trzeba zróżniczkować N.

$$0 = \frac{d}{ds}\langle N, N\rangle = 2\langle N', N\rangle,$$

czyli $N' = \alpha T$, gdzie

$$\alpha = \langle N', T\rangle = \langle N, T\rangle' - \langle N, T'\rangle$$

Twierdzenie 1.6: podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Dla dowolnych $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jednostkowego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ i gładkiej funkcji $\kappa : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}$ sparametryzowana długością łuku taka, że $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(0) = v$, $\kappa_\gamma = \kappa$.

Dowód

Niech $T = (T_1, T_2)$ i $T(0) = v$ i $N = (-T_2, T_1)$ będzie ramką Freneta. Wtedy

$$\begin{pmatrix} T_1' \\ T_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa T_2 \\ \kappa T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

jest jedynym rozwiązaniem

$$\gamma(s) = \int_0^s T(u)dy + (x_0, y_0).$$

Wiemy, że $|T| = 1$, bo

$$\frac{d}{ds}|T|^2 = \frac{d}{ds}\langle T, T\rangle = 2\langle T', T\rangle = 0$$

Definicja 1.7

Niech krzywa γ będzie sparametryzowana długością łuku i niech η będzie okręgiem sparametryzowanym długością łuku stycznym do γ (wektory prędkości się pokrywają) w punkcie $\gamma(t_0)$. Wtedy jest **okręgiem ściśle stycznym**, jeżeli $\eta''(t_0) = \gamma''(t_0)$.

Definicja 1.8

Ewolutą krzywej γ nazywamy krzywą utworzoną ze środków okręgów ściśle do niej stycznych.

$$c = \gamma + \frac{1}{\kappa} N$$

W punktach przegięcia albo ignorujemy je i wymagamy, aby $\gamma''(t) \neq 0$, albo mówimy, że w punkcie przegięcia okrąg ściśle styczny to prosta.

Fakt 1.9

Niech γ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku taką, że $\kappa'(t) \neq 0$, to okręgi ściśle styczne są parami rozłącznew otoczeniu t.

Dowód

Niech c będzie ewolutą krzywej γ. Weźmy dwa punkty t_1 i t_2 w otoczeniu punktu t z twierdzenia. Naszym celem będzie pokazanie, że długość drogi $c(t_1)$ a $c(t_2)$ jest nie większa niż różnica promieni:

$$\int_{t_0}^{t_1} |c'(u)| du = \left| \frac{1}{R(t_0)} - \frac{1}{R(t_1)} \right|,$$

gdzie $R(t_i)$ to promień okręgu ściśle stycznego do γ w punkcie t_i.

$$c' = \gamma' + \frac{1}{\kappa} N' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N,$$

czyli

$$\int_{t_0}^{t_1} |c'(u)| du = \int_{t_0}^{t_1} \left| \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right| du = \left| \frac{1}{R(t_0)} - \frac{1}{R(t_1)} \right|.$$