Logika R

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

1. Formalizacja matematyki

02.10.2025 Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura I rzędu

1. Model języka i język struktury modelu

Definicja 1.1: model

Model to struktura matematyczna składająca się z
- niepustego zbioru będącego *uniwersum* $A \neq \emptyset$,
- *funkcji* $f_1, \dots, f_k$ o arności n_i (tzn. $f_i : A^{n_i} \to A$),
- *relacji* (predykatów) w A, $P_1, \dots, P_n$, gdzie $P_i \subseteq A^{n_i}$,
- *stałych* z A $c_1, \dots, c_l \in A$.

Zapisujemy

$$\mathfrak{M} = (A; f_1, \dots, f_k; P_1, \dots, P_n; c_1, \dots, c_l)$$

gdzie k, n, l to liczby kardynalne, zazwyczaj skończone (tzn. $k, n, l \in \mathbb{N}$).

Przykłady

1. Jeśli $n = 0$, czyli nie mamy relacji, to $\mathfrak{M}$ jest strukturą algebraiczną. Weźmy na przykład grupę. Grupa jest zdefiniowana jako zbiór G z wyróżnionym elementem neutralnym e, operacją mnożenia $\cdot$ oraz brania elementu odwrotnego $^{-1}$. Operacje to funkcje, a element neutralny to stała. Sam zbiór G to z kolei uniwersum, czyli mamy model:
$$(G; \cdot, ^{-1}; \; ; e)$$
2. Rodzina zbiorów V z relacją należenia $\in$ jest modelem z jedną relacją, ale bez funkcji i bez stałych:
$$(V; \; ; \in; \;)$$

Symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe będziemy od ich znaczenia odróżniać przez podkreślenie:

- $\underline{f_i}$, $\underline{P_j}$, $\underline{c_t}$ to symbole,

- natomiast f_i, P_J, c_t to funkcja, relacja, stała.

Definicja 1.2: język

Język
$$L = \{\underline{f_1}, ..., \underline{f_k}; \underline{P_1}, ..., \underline{P_n}; \underline{c_1}, ..., \underline{c_l}\}$$
składa się z symboli: funkcyjnych, relacyjnych, stałych wraz z przypisanymi tym symbolom arnościami, tzn. f_j to symbol funkcjsi n_j-argumentowej etc.

Język jak wyżej jest nazywany językiem struktury $\mathfrak{M}$, typem podobieństwa $\mathfrak{M}$, **sygnaturą $\mathfrak{M}$**. Z kolei $\mathfrak{M}$ jest modelem dla L.

Szerzej będziemy dla $\mathfrak{M}$ - modelu dla L - pisać
$$(\mathfrak{M}; \underline{f_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{f_k}^{\mathfrak{M}}; \underline{P_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{P_n}^{\mathfrak{M}}; \underline{c_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{c_l}^{\mathfrak{M}})$$
gdzie $\underline{f_i}^{\mathfrak{M}}$ oznacza interpretację symbolu $\underline{f_1}^{\mathfrak{M}}$ w kontekście modelu $\mathfrak{M}$.

Uwaga 1.3

Dla dowolnego języka L istnieje wiele struktur $\mathfrak{M}$.

Mając dany język L mówimy/piszemy w nim przy pomocy

- symbolów języka,
- symboli logicznych $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (!!! $\implies$ oraz $\iff$ będą dla nas elementami metajęzyka !!!), $\forall$, $\exists$, $=$,
- zmiennych, np. x_i dla $i \in \mathbb{N}$, y, z,
- oraz symboli pomocniczych takich jak nawiasy, przecinki etc.

Uwaga 1.4

Spójniki można ograniczyć do $\wedge$, $\neg$ i kwantyfikatora $\exists$. Całą resztę spójników można zdefiniować jako macra przy pomocy tych trzech, np.
$$p \vee q \quad := \quad \neg(\neg p \wedge \neq q)$$

Wyrażenia języka L:

a) **wyrażenia nazwowe** (termy) należą do $\mathcal{T}_L$ i są definiowane rekurencyjnie:
   - zmienna, symbol stałej należą do $\mathcal{T}_L$ i nazywają się *termami atomowymi*

- jeśli $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathcal{T}_L$, a f jest symbolem n-argumentowej funkcji z L, to $\underline{f}(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{T}_L$ i nazywa się *termem złożonym*.

b) **formuły** oznaczamy $\mathcal{F}_L$ i definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób

- dla wszystkich termów $\tau_1, ..., \tau_n$ zachodzi $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_L$ oraz dla n-argumentowego symbolu relacji $\underline{P}_j$: $\underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{F}_L$ - to są *formuły atomowe*,
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_L$

  $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\exists\ r\ \varphi), (\forall\ r\varphi) \in \mathcal{F}_L$ (r występujące w wyrażeniach nazywamy zmiennymi)

2. Zdania w języku

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$ będzie formułą w której występuje, co najmniej raz, zmienna v. Jeśli pewne wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora $Q_v \in \{\forall, \exists\}$, to spośród wszystkich wystąpień Q_v w φ w których zasięgu jest v wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy, że to **Q_v wiąże dane wystąpienie v** w φ. Na przykład

$$\forall\, x\, \exists\, y\, (x \in y\ \wedge\ \forall\, x\, (x \in y \to x = y))$$

wiąże

Jeśli nie ma kwantyfikatora Q_v jak wyżej, to wystąpienie v w φ jest **wolne**.

Zapis $\varphi(v_1, ..., v_n)$ oznacza, że wszystkie wolne zmienne w φ są wśród $v_1, ..., v_n$.

Definicja 1.5: zdanie

Formalne zdanie w języku L to formuła niezawierająca zmiennych wolnych.

Powstaje pytanie co to znaczy, że formuła z L jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$ dla L?

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem dla $L = \{\underline{f}_i, ..., \underline{P}_j, ..., \underline{c}_t, ...\}$, $\{\underline{a}\ :\ a \in \mathfrak{M}\}$ będzie zbiorem nowych symboli stałych. Rozważmy nowy język $L(\mathfrak{M}) = L \cup \{\underline{a}\ :\ a \in \mathfrak{M}\}$. Termy stałe τ z $L(\mathfrak{M})$ interpretujemy w $\mathfrak{M}$ w następujący sposób:

- jeśli τ jest symbolem stałym w L, to $\tau^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ jest interpretacją $\underline{c}_i^{\mathfrak{M}}$
- jeśli τ CO TU SIE WYTENTEGOWUYJE

Definicja 1.6

$\mathfrak{M} \models \varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe/spełniane w $\mathfrak{M}$.

a) zdania atomowe:

- $\mathfrak{M} \models \tau_1 = \tau_2 \iff \underline{\tau}_1^{\mathfrak{M}} = \underline{\tau}_2^{\mathfrak{M}}$
- $\mathfrak{M} \models \underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \iff (\underline{\tau}_1^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{\tau}_n^{\mathfrak{M}}) \in \underline{P}_j^{\mathfrak{M}}$

b) zdania złożone:

- $\mathfrak{M} \models \varphi \ \wedge \ \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi$ oraz $\mathfrak{M} \models \psi$