Powierzchnie Riemanna

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

22.10.2025 1

22.10.2025

Przykłady

1. Jak wygląda zbiór zer wielomianu $y^2 - x$ w $\mathbb{C}P^2$? Najpierw musimy ten wielomian ujednorodnić.
$$\Sigma = \{[x : y : z] \ : \ y^2 - xz = 0\}$$
Wstawiając w kolejno x, y i z wartość 1 dostajemy powierzchnie w $\mathbb{C}^2$ (spełnione są założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej).
2. Zera wielomianu $y^2 - p(x)$, gdzie $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ i $d = \deg(p) > 3$. Wersja ujednorodniona to
$$y^{2-d} - \sum_{k=0}^{d} a_k x^k z^{d-k}.$$
$y^2 - p(x) = 0$ zadaje w $\mathbb{C}^2$ powierzchnię, o ile p ma jednorodne pierwiastki.
Punkty w $\mathbb{C}P^2$ dla których $z = 0$ to $-a_d x^d = 0$. Jest w $\Sigma \subseteq \mathbb{C}P^2$ jeden taki punkt: $[0 : 1 : 0]$.
W mapie $y = 1$ mamy zera wielomianu
$$q(x, z) = z^{d-2} - \sum a_k x^k z^{d-k} = 0$$
punktowi $[0 : 1 : 0]$ w tej mapie odpowiada punkt $(0, 0)$. Ale $q_x(0, 0) = q_z(0, 0) = 0$. Dziś będziemy w tym przypadku konstruować nieosobliwą powierzchnię Riemanna.

Niech $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie nierozkładalny (i różny od $ax + b$).
$$p(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x),$$
gdzie $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Zbiór $S_1 = \{x \in \mathbb{C} \ : \ (\exists\ y \in \mathbb{C}) \ p(x, y) = 0 = p_y(x, y)\}$ jest skończony. Podobnie $S_0 = \{x \in \mathbb{C} \ : \ a_0(x) = 0\}$. Czyli $S = S_0 \cup S_1 \cup \{\infty\}$ jest skończonym podzbiorem $\overline{\mathbb{C}}$.
$$pr_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
$$Reg := Z(p) \cap pr_1^{-1}(\overline{\mathbb{C}} - S)$$
będzie obrazek

Fakt 0.1

$\Pi = pr_1|_{Reg} : Reg \to \overline{\mathbb{C}} - S$ jest n-krotnym nakryciem.

Definicja 0.2

tutaj można nakrycia definiować

Przykłady

1. $\mathbb{R}^1 \to S^1$
2. $S^1 \to S^1$
3. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$
4. $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$
5. $B(0, r^{1/k}) - \{0\} \to B(0, r) - \{0\}$ przez $z \mapsto z^k$

Przykład

antyprzykład: $\pi : O_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest lokalnym homeomorfizmem
$\pi^{-1}(B(0, \varepsilon))$ ma składową spójną

$$\{\underline{(\frac{1}{z})_w} \; : \; w \in B(0, \varepsilon) - \{0\}\} = U$$

$\pi|_U LU \to B(0, \varepsilon)$ nie jest homeomorfizmem
rysunek?

Fakt 0.3

$\Pi : Reg \to \overline{\mathbb{C}} - S$ est n-krotnym nakryciem

Dowód
Niech $x_0 \in \overline{\mathbb{C}} - S$ i produkujemy otoczenie żeby się zgadzało.

$$\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \; : \; p(x_0, y) = 0\},$$

gdzie $p(x_0, y)$ jest wielomianem zmiennej y stopnia n o pojedynczych pierwiastkach $y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}$, więc $|\pi^{-1}(x_0)| = n$.

Wokół każdego (x_0, y_i) zbiór Reg jest wykresem funkcji

oj coś tutaj skipnęłam z D hehe jest w zdjęciu

Niech $x_1 \in D$. Wtedy rozwiązaniami równania $p(x_1, y) = 0$ są $y_1(x_1), y_2(x_1), ..., y_n(x_1)$ są parami różne i jest ich dokładnie n, czyli stopień $p(x_1, y)$ - więc to są wszystkie rozwiązania. Stąd $\pi^{-1}(x_1) \subseteq \bigcup \widetilde{D}_i$.

Niech $s \in S$. Rozważmy $B(s, \varepsilon)$ - koło wokół s - rozłączne z $S - \{s\}$. Niech $B^*(s) = B(s, \varepsilon) - \{s\}$ (małe koło wokół s nakłóte w s). Wtedy $\pi : \pi^{-1}(B*(s)) \to B*(s)$ jest nakryciem (być może niespójnym).

Niech $B_j*(s)$ będzie składową spójną tego przeciwobrazu. diagram boże jak mi sie dzisiaj nie chce pisac

Lemat 0.4: nakryciowy

Istnieje homeomorfizm $f_{s,j}$ zamykający diagram
Ten $f_{s,j}$ jest biholomorfizmem, bo π, $z \mapsto z^k$ są lokalnymi boholomorfizmami

o jesuuu obrazeeeeeeeeeek

Dla każdego $B_j*(s)$ dokładamy punkcik $\hat{s}_j$. $f_{s,j}$ rozszerzamy deklarując $f_{s,j}(\hat{s}_j)$ i dostajemy mapę $B_j*(s) \cup \{\hat{s}_j\} =: B_j(s) \to B(0, \varepsilon^{1/k})$.

W ten sposób zbudowaliśmy tzw. powierzchnię Riemanna $\Sigma(p) \supseteq Reg$ funkcji algebracznej określonej przez p.

Twierdzenie 0.5

1. $\Sigma(p)$ jest zwarta
2. odwzorowanie $Reeg \ni (x, y) \mapsto y$ określa meromorficzną funkcję na $\Sigma(p)$
3. Reg jest spójny
4. Niech $Z_{proj}(p)$ - projektywne uzwarcenie, czyli zbiór zer ujednorodnionego p
   Wtedy włożenie $Reg \hookrightarrow Z_{proj}(p)$ rozszerza się do holomorficznej surjekcji $\Sigma(p) \to Z_{proj}(p)$.

Tutaj przykład i obrazek

Dowód

1. Pokryjemy $\Sigma(p)$ skończoną liczbą domkniętych dysków. Wokół każdego $s \in S$ wybieramy mały domknięty dysk D_s, którego przeciwobraz w $\Sigma(p)$ to skończona suma domkniętych dysków $D_j(s)$ - domknięte otoczenie $\hat{s}_j$.

   Niech $V = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{s \in S} D(s)$, wtedy $\overline{V}$ jest zwartym podzbiorem $\overline{\mathbb{C}} - S$. Dla każdego $x \in \overline{V}$ wybieramy dysk $D(x) \subseteq \overline{\mathbb{C}} - S$ prawidłowo nakryty kolejne zdjęcie