Logika, lista 2.

1. Definiujemy pojęcie semantycznego wnioskowania: dla zbioru formuł T i formuły φ danego języka L:
$$T \models \varphi \iff (\forall M \models T)\ M \models \varphi.$$
Dowieść, że $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$. (Wynika stąd, że definicja $\vdash$ jest poprawna.)

2. * Udowodnić, że semantyczne wnioskowanie ma charakter finitarny, tzn. $T \models \varphi \iff (\exists T_0 \subseteq T)(T_0$ sko/nczony i $T_0 \models \varphi)$. W dowodzie nie odwoływać się do aksjomatycznego ujęcia KRL oraz nie używać ultraproduktu. Jednym z kroków dowodu jest "semantyczna" wersja twierdzenia o istnieniu modelu: jeśli każdy skończony podzbiór T ma model, to T ma model. Udowodnić to imitując dowód Henkina. To zadanie jest wyłączone z zadania domowego.

3. Dowieść, że $M \cong N \Rightarrow M \equiv N$.

4. Dowieść, że jeśli $M \equiv N$ i L, M są skończone, to $M \cong N$. Więcej: istnieje zdanie σ takie, że $M \models \sigma$ oraz $\forall N \models \sigma,\ N \cong M$.

5. Załóżmy, że L jest skończonym językiem relacyjnym. Dowieść, że $M \equiv N \Leftrightarrow \forall n\ D$ ma strategię zwycięską w grze $\Gamma_n(M, N)$.
(a) $\Rightarrow$
(b) $\Leftarrow$

6. Dowieść, że jeśli T jest zupełna i posiada rekurencyjnie przeliczalny zbiór aksjomatów, to T jest rozstrzygalna.

7. Załóżmy, że w zdaniu φ występują wyłącznie unarne symbole relacyjne (poza logicznymi). Dowieść, że $\exists n < \omega$ (n zależy tylko od długości φ) takie, że jeśli φ ma model, to ma model mocy $< n$.

8. Wywnioskować stąd, że istnieje algorytm rozstrzygający, czy φ jest tautologią dla φ takich, jak w zadaniu 7.

9. Niech
$$FLO = \{\varphi : \forall M \models LO,\ M \text{ sko/nczony} \Rightarrow M \models \varphi\},$$
$$FLO_\infty = \{\varphi : \exists n \forall M \models LO,\ M \text{ skończony i } \|M\| > n \Rightarrow M \models \varphi\}.$$
(a) Dowieść, że teoria FLO jest rozstrzygalna.
(b) Dowieść, że teoria FLO_∞ jest rozstrzygalna (wsk: w (a), (b) użyć gier Ehrenfeuchta).
(c) Zauważyć, że FLO nie jest zupełna, FLO_∞ jest zupełna i
$FLO_\infty = Th(?, \leqslant)$ (tzn. wskazać konkretny model nieskończony tej teorii).

10. (a) Dowieść, że nie istnieje zdanie φ takie, że $\forall M\ (\ M \models \varphi \iff M$ skończony).
(b) Dowieść, że nie istnieje teoria $T \supseteq LO$ (w jakimkolwiek języku zawierającym język teorii LO), która ma modele nieskończone i której wszystkie modele nieskończone są dobrze uporządkowane.