

Logika R

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

1	Formalizacja matematyki	1
1.1	Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura I rzędu	1
1.1.1	Model języka i język struktury modelu	1
1.1.2	Zdania w języku	3
1.1.3	Tautologie	6
1.2	Aksjomatyczne ujęcie KRL	8
1.2.1	Dowodliwość	9

1. Formalizacja matematyki

1.1 Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura I rzędu

1.1.1 Model języka i język struktury modelu

Definicja 1.1: model

Model to struktura matematyczna składająca się z

- niepustego zbioru będącego **uniwersum** (dziedzina) $A \neq \emptyset$,
- **funkcji** f_1, \dots, f_k o arności n_i (tzn. $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$),
- **relacji** (orzeczników, predykatów) w A , P_1, \dots, P_n , gdzie $P_i \subseteq A^{n_i}$,
- **stałych** $c_1, \dots, c_l \in A$.

Zapisujemy

$$\mathfrak{M} = (A; f_1, \dots, f_k; P_1, \dots, P_n; c_1, \dots, c_l)$$

gdzie k, n, l to liczby kardynalne, zazwyczaj skończone (tzn. $k, n, l \in \mathbb{N}$).

Konwencja

$$(\mathfrak{M} :=) |\mathfrak{M}| := A$$

Przykłady

1. Jeśli $n = 0$, czyli nie mamy relacji, to \mathfrak{M} jest **strukturą algebraiczną** (algebrą ogólną). Weźmy na przykład grupę. Grupa jest zdefiniowana jako zbiór G z wyróżnionym elementem neutralnym e , operacją mnożenia \cdot oraz brania elementu odwrotnego $^{-1}$. Operacje to funkcje, a element neutralny to stała. Sam zbiór G to z kolei uniwersum, czyli mamy model:

$$(G; \cdot, ^{-1}; e)$$

2. Rodzina zbiorów V z relacją należenia \in jest modelem z jedną relacją, ale bez funkcji i bez stałych:

$$(V; \in;)$$

Taką strukturę nazywamy *strukturą relacyjną*.

Symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe będziemy od ich znaczenia odróżniać przez podkreślenie:

- $\underline{f}_i, \underline{P}_j, \underline{c}_t$ to symbole,
- natomiast f_i, P_j, c_t to funkcja, relacja, stała.

Definicja 1.2: język

Język

$$L = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k; \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n; \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_l\}$$

składa się z symboli: funkcyjnych, relacyjnych, stałych wraz z przypisanymi tym symbolom arnościami, tzn. f_j to symbol funkcji n_j -argumentowej etc.

Język jak wyżej jest nazywany językiem struktury \mathfrak{M} , typem podobieństwa \mathfrak{M} , **sygnaturą** \mathfrak{M} . Z kolei \mathfrak{M} jest modelem dla L .

Konwencja

Szerzej będziemy dla \mathfrak{M} - modelu dla L - pisać

$$(\mathfrak{M}; \underline{f}_1^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{f}_k^{\mathfrak{M}}; \underline{P}_1^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{P}_n^{\mathfrak{M}}; \underline{c}_1^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{c}_l^{\mathfrak{M}})$$

gdzie $\underline{f}_i^{\mathfrak{M}}$ oznacza interpretację symbolu \underline{f}_i w kontekście modelu \mathfrak{M} .

Uwaga 1.3

Dla dowolnego języka L istnieje wiele struktur \mathfrak{M} .

Przykład

Język grup

Mając dany język L mówimy/piszemy w nim przy pomocy

- symbolów języka,
- symboli logicznych $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ (!!! \Rightarrow oraz \Leftrightarrow będą dla nas elementami meta-języka !!!), $\forall, \exists, =$,

- zmiennych, np. x_i dla $i \in \mathbb{N}$, y, z ,
- oraz symboli pomocniczych takich jak nawiasy, przecinki etc.

Uwaga 1.4

Spójniki można ograniczyć do \wedge , \neg i kwantyfikatora \exists . Całą resztę spójników można zdefiniować jako macra przy pomocy tych trzech, np.

$$p \vee q \quad := \quad \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Wyrażenia języka L :

a) **wyrażenia nazwowe** (termy) należą do \mathcal{T}_L (Term_L) i są definiowane rekurencyjnie:

- zmienna, symbol stałej należą do \mathcal{T}_L i nazywają się **termami atomowymi**
- jeśli $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{T}_L$, a f jest symbolem n -argumentowej funkcji z L , to $f(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{T}_L$ i nazywa się **termem złożonym**.

b) **formuły** oznaczamy \mathcal{F}_L (Form_L) i definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób

- dla wszystkich termów τ_1, \dots, τ_n zachodzi $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_L$ oraz dla n -argumentowego symbolu relacji P_j : $P_j(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{F}_L$ - to są **formuły atomowe**,
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_L$
 $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\exists r \varphi), (\forall r \varphi) \in \mathcal{F}_L$ (r występujące w wyrażeniach nazywamy zmiennymi)

Formuły z tego punktu nazywamy **formuły złożone**.

Hierarchia symboli logicznych umożliwia pomijanie nawiasów:

1. symbole matematyczne
2. kwantyfikatory
3. negacja \neg
4. \wedge, \vee
5. $\rightarrow, \leftrightarrow$

1.1.2 Zdania w języku

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$ będzie formułą w której występuje, co najmniej raz, zmienna v . Jeśli pewne wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora $Q_v \in \{\forall, \exists\}$, to spośród wszystkich wystąpień Q_v w φ w których zasięgu jest v wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy,

że to Q_v wiąże dane wystąpienie v w φ . Na przykład

$$\forall x \exists y (x \in y \wedge \forall x (x \in y \rightarrow x = y))$$

wiąże

Jeśli nie ma kwantyfikatora Q_v jak wyżej, to wystąpienie v w φ jest **wolne**. Popatrzmy na przykład na formułę

$$\exists y x \in y \wedge \forall x (x \in y \rightarrow x = y).$$

Kwantyfikator z czerwonym y wiąże czerwony y , a niebieskie y pozostają wolne. Dodając nawias pierwszy kwantyfikator wiąże już wszystkie wystąpienia y :

$$\exists y (x \in y \wedge \forall x (x \in y \rightarrow x = y)).$$

Konwencja

Zapis $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ oznacza, że wszystkie wolne zmienne w φ są wśród v_1, \dots, v_n (ale niekoniecznie wszystkie v_i są zmiennymi wolnymi).

Definicja 1.5: zdanie

Formalne zdanie w języku L to formuła niezawierająca zmiennych wolnych.

Tarski podał na początku XX wieku definicję prawdy. Nieco później udowodnił twierdzenie, że nie da się prawdy zdefiniować.

Powstaje pytanie co to znaczy, że formuła z L jest prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} dla L ?

Niech \mathfrak{M} będzie modelem dla $L = \{\underline{f}_i, \dots, \underline{p}_j, \dots, \underline{c}_t, \dots\}$ oraz $\{\underline{a} : a \in \mathfrak{M}\}$ niech będzie zbiorem nowych symboli stałych. Rozważmy nowy, większy język

$$L(\mathfrak{M}) = L \cup \{\underline{a} : a \in |\mathfrak{M}|\},$$

którego modelem nadal jest \mathfrak{M} ($\underline{a}^{\mathfrak{M}} := a$).

Termy stałe $\sigma^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ z $L(\mathfrak{M})$ interpretujemy w \mathfrak{M} w następujący sposób:

- jeśli \underline{c} jest symbolem stałym \underline{c}_i w L , to $\tau^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ jest interpretacją $\underline{c}_i^{\mathfrak{M}}$
- jeśli $\tau = \underline{f}_i(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)$ jest termem złożonym, to $\sigma^{\mathfrak{M}} = \underline{f}_i^{\mathfrak{M}}(\underline{t}_1^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{t}_n^{\mathfrak{M}})$.

Konwencja

$\mathfrak{M} \models \varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe/spełniane w \mathfrak{M} .

a) zdania atomowe:

- $\mathfrak{M} \models \tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1^{\mathfrak{M}} = \tau_2^{\mathfrak{M}}$
- $\mathfrak{M} \models P_j(\tau_1, \dots, \tau_n) \iff (\tau_1^{\mathfrak{M}}, \dots, \tau_n^{\mathfrak{M}}) \in P_j^{\mathfrak{M}}$

b) zdania złożone:

- $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi \iff \mathfrak{M} \models \varphi$ oraz $\mathfrak{M} \models \psi$
- $\mathfrak{M} \models \neg\varphi \iff$ nieprawda, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ (oznaczamy $\mathfrak{M} \not\models \varphi$)
- $\mathfrak{M} \models \exists v \varphi$ (jest tym samym co $\exists v \varphi(v)$, bo zakładamy, że nie ma innych zmiennych wolnych w φ , bo to jest zdanie) $\iff \mathfrak{M} \models \underset{=\varphi(\underline{a})}{\varphi(v/\underline{a})}$ dla pewnego $a \in |\mathfrak{M}|$,
gdzie $\varphi(\underline{a})$ jest formułą powstającą z φ przez zastąpienie każdego wolnego wystąpienia v w φ przez \underline{a} .

To daje nam, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Kwantyfikujemy po zmiennych, nie po podzbiorach uniwersum, bo to jest logika I rzędu. Zbiory tworzymy w umyśle, postrzegamy indywidua. Teorie wyższych rzędów nie są absolutne.

Definicja 1.6: spełnianie formuły

Krotka $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ elementów z uniwersum \mathfrak{M} **spełnia formułę** φ języka, gdy $\mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$.

Definicja 1.7: uniwersalne domknięcie

Dla formuły φ języka L jej **uniwersalne domknięcie** φ to formuła

$$\overline{\varphi} := \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$$

W następnej części wykładu pokażemy, że

$$\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{M} \models \overline{\varphi}$$

Powyższe zagadnienia mówią, że domyślny kwantyfikator to kwantyfikator \forall . To ma spełnienie w naturalnej matematyce, np. przemienność dodawania $(\mathbb{R}, +) \models x + y = y + x$ gdzie pomijamy $\forall x \forall y$.

1.1.3 Tautologie

Definicja 1.8: tautologia KRL

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$. Wtedy φ jest **tautologią** klasycznego rachunku logicznego [KRL], gdy jest zawsze prawdziwe. Zapisujemy to $\models \varphi$, co oznacza $\forall \mathfrak{M} \text{ modelu } L \mathfrak{M} \models \varphi$.

Jak rozpoznać, czy $\models \varphi$? Ogólnie jest to pytanie nierozstrzygalne (twierdzenie Gödla).

Niektóre tautologie łatwo rozpoznać, jak przykłady niżej.

Przykłady

1. $x = x$
2. $=$ jest relacją równoważności

Przygodę z tautologiami rozpoczynamy od **tautologicznych formuł zdaniowych** (czyli schematów).

Niech $Z = \{p_0, p_1, \dots, p_n, r, q, \dots\}$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. Zbiór formuł zdaniowych $S = S_Z$ nad Z definiujemy w następujący sposób:

- $v \in Z \implies v \in S$
- $\alpha, \beta \in S \implies \neg\alpha, \alpha \wedge \beta \in S$
- skrótowo: $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow \in S$

Definicja 1.9: wartościowanie

Wartościowanie logiczne formuł zdaniowych to dowolna funkcja $v : S \rightarrow \{0, 1\}$ taka, że dla każdych $\alpha, \beta \in S$

- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$

Definicja 1.10: tautologia KRZ

Powiemy, że $\alpha \in S$ jest **tautologią** ($\models \alpha$) gdy dla każdego wartościowania v zachodzi $v(\alpha) = 1$.

Na przykład: $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla każdego $\alpha \in S$

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$ dla $\alpha \in S$ (metoda 0-1): wartość $v(\alpha)$ zależy tylko od $v(x)$ dla zmiennych zdaniowych x w α .

Definicja 1.11: przykład formuły

Założmy, że $\alpha \in S$ jest zbudowany ze zmiennych $p_1, \dots, p_n \in Z$ oraz $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{F}_L$ i $\varphi \in \mathcal{F}_L$ powstaje z α przez zastąpienie p_i przez φ_i wszędzie w α (zapisujemy $\varphi = \alpha(p_1/\varphi_1, \dots, p_n/\varphi_n)$). Mówimy, że φ jest **jest przykładem formuły α** .

Weźmy na przykład formułą $\alpha = p_1 \wedge p_2$, wtedy $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ jest przykładem formuły α .

Twierdzenie 1.12

Jeśli $\models \alpha$ i φ jest przykładem α , to $\models \varphi$.

Dowód

Ćwiczenie

**Definicja 1.13: reguła wnioskowania**

Reguła wnioskowania składa się z:

- przesłanek $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{F}_L$
- tezy φ .

Zapisujemy

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi}$$

Reguła wnioskowania jest poprawna, kiedy nie prowadzi nas na manowce.

1. $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi}$ jest **poprawna**, jeśli dla każdego modelu \mathfrak{M} dla L

$$\mathfrak{M} \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \implies \mathfrak{M} \models \varphi$$

2. $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\alpha}$ jest poprawna, jeśli dla każdego wartościowania v

$$v(\alpha_1) = \dots = v(\alpha_n) = 1 \implies v(\alpha) = 1$$

Przykłady

1. Modus Ponens (reguła odrywania, cut rule)

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

2. reguła generalizacji (\forall -rule)

$$\frac{\varphi}{\forall v \varphi(v)}$$

1.2 Aksjomatyczne ujęcie KRL

(A0) formuła będąca przykładem dowolnego zdania KRZ, które jest tautologią

(A1) $\forall v (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall v \psi)$, gdy v nie jest wolna w φ

(A2) $\forall v \varphi \rightarrow \varphi(v/t)$ (to jest poprawny zapis, ale dla pewności: $(\forall v \varphi) \rightarrow \varphi(v/t)$)

t to jest term podstawiany za każde wolne wystąpienie v w φ pod warunkiem, że żadne z takich wystąpień nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną występującą w termie t .

Zastrzeżenie aksjomacie (A2) jest istotne: jeśli weźmiemy jako φ formułę

$$\varphi = \exists y x \neq y$$

i podstawimy za wolne wystąpienia x term $t = y$, to

$$\varphi(x/t) = \exists y y \neq y$$

co z (A2) dałoby

$$\not\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/t) = \forall \exists y x \neq y \rightarrow \exists y y \neq y$$

Definicja 1.14: aksjomaty równości

Aksjomaty równości (v_i - wolne zmienne):

(R1) $v_1 = v_1$

(R2) $v_1 = v_2 \rightarrow t(\dots v_1 \dots) = t(\dots v_1/v_2 \dots)$

(R3) $v_1 = v_2 \rightarrow (\varphi(\dots v_1 \dots) \rightarrow \varphi(\dots v_2 \dots))$ gdzie v_1 to wolne wystąpienie w φ niebędące w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2 .

1.2.1 Dowodliwość

Definicja 1.15: dowód formalny

Niech $X \subseteq \mathcal{F}_L$ będzie dowolnym podzbiorem formuł.

Powiemy, że **X dowodzi** $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $X \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg formuł (**dowód formalny**) $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \varphi$ takie, że dla każdego $i \leq n$

1. $\alpha_i \in X$ lub α_i jest aksjomatem KRL
2. α_i wynika z $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ na mocy
 - Modus Ponens, tzn. $(\exists j, t < i) \alpha_t = (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$

$$\frac{\alpha_j, \alpha_j \rightarrow \alpha_i}{\alpha_i}$$

- lub \forall -rule $(\exists j < i) \alpha_i = (\forall v \alpha_j)$

$$\frac{\alpha_j}{\forall v \alpha_j}$$

Konwencja

$\vdash \varphi$ gdy $\emptyset \vdash \varphi$

Definicja 1.16: teza KRL

Jeśli φ jest takie, że $\vdash \varphi$, to φ nazywamy **tezą** KRL.

Uwaga 1.17

$X \vdash \varphi \iff \exists X_0 \subseteq X$ skończony $X_0 \vdash \varphi$

Przykład

Pokażemy, że $\vdash \forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$, co jest równoważne

$$\vdash \forall x \varphi \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$$

1. $\alpha_1 : \forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/y)$ (A2)
2. $\alpha_2 : \forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi(x/y)$ (A2)
3. $\alpha_3 : \alpha_2 \rightarrow (\varphi(x/y) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (A0 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$)
4. $\alpha_4 : \varphi(x/y) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ (α_2, α_3 oraz Modus Ponens)
5. $\alpha_5 : \alpha_1 \rightarrow (\alpha_4 \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi))$ (A0 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$)

6. $\alpha_6 : (\forall x) \varphi \rightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi$ (Modus Ponens)

Rozważmy φ dane $x = x$. Zdanie

$$\vdash (\forall x) x = x \rightarrow (\exists x)x = x$$

jest fałszywe w dziedzinie pusty, czyli modelu

$$(\emptyset; f_1, \dots, f_n; P_1, \dots, P_j;)$$

gdzie nie ma elementów uniwersum. Czyli coś z aksjomatów musi zawodzić w dziedzinie pustej - pytanie co?

Od tej pory modele są niepuste

Uwaga 1.18

Poprawność (soundness) KRL

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

Dowód

Dowód polega na indukcji względem długości formuły (albo długości dowodu) i jest pozostawiony jako ćwiczenie.



Twierdzenie 1.19: Gödela o pełności KRL

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

Czyli $\models \varphi \iff \vdash \varphi$.

Definicja 1.20: zbiór konsekwencji

Dla $X \subseteq \mathcal{F}_L$ **zbiór konsekwencji** X to $\text{Cn}(X) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : X \vdash \varphi\}$

- X jest teorią, gdy $X = \text{Cn}(X)$
- A jest zbiorem aksjomatów teorii X , gdy $X = \text{Cn}(A)$
- **zbiory X, Y są równoważne**, gdy $\text{Cn}(X) = \text{Cn}(Y)$ co równoważnie można powiedzieć: $X \vdash Y$ i $Y \vdash X$

Twierdzenie 1.21: twierdzenie o dedukcji

Jeśli φ jest zdaniem, to $(X \vdash \varphi \rightarrow \psi \iff X \cup \{\varphi\} \vdash \psi)$

Dowód

Dowód powyższego twierdzenia jest zadaniem na 1 liście zadań.

**Fakt 1.22**

φ oraz $\bar{\varphi}$ są równoważne, czyli $\varphi \vdash \bar{\varphi}$ oraz $\bar{\varphi} \vdash \varphi$.

Dowód

$\varphi \vdash \bar{\varphi}$

Wystarczy zastosować \forall -regulę tyle razy ile dopisaliśmy kwantyfikatorów w $\bar{\varphi}$.

$\bar{\varphi} \vdash \varphi$

Aksjomat (A2) mówi, że $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi$. Używając do tego th:tw dedukcja dostajemy

$$\emptyset \cup \{\bar{\varphi}\} \vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \bar{\varphi} \rightarrow \varphi.$$

**Wniosek**

$X \subseteq \mathcal{F}_L$

X oraz $\{\bar{\varphi} : \varphi \in X\}$ są równoważne

Definicja 1.23: zbiór spreczny

X jest **spreczny**, jeżeli $X \vdash \varphi$ oraz $X \vdash \neg\varphi$ dla pewnego zdania $\varphi \in \mathcal{F}_L$

W przeciwnym razie mówimy, że X jest niespreczny.

Definicja 1.24

1. $\mathfrak{M} \models X \iff \forall \varphi \in X \mathfrak{M} \models \varphi$ (\mathfrak{M} jest modelem X)
2. X jest zupełny $\iff \forall$ zdania φ ($X \vdash \varphi$ lub $x \vdash \neg \varphi$)
3. X jest rozstrzygalny \iff istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$

Przykłady

1. teoria \mathfrak{M} $\text{Th}(\mathfrak{M}) := \{\varphi : \mathfrak{M} \models \varphi\}$ jest niesprzeczna i zupełna
2. \emptyset jest niesprzeczny

Twierdzenie 1.25: Gödela o istnieniu modelu

Jeśli S jest niesprzecznym zbiorem zdań, to S ma model.

Dowód

(by Leon Henkin)

Dla przypadków, gdy L i S są przeliczalne, ogólny dowód jest bez większej idei, ale używa "ble ble kombinatoryczne z liczb kardynalnych".

$L' = L \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie c_n to nowe w stosunku do L symbole stałe

$\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ to numeracja formuł $\mathcal{F}_L(x)$ z co najwyżej jedną wolną zmienną x

Niech $f : \omega \rightarrow \omega$ (czyli $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) rosnąca taka, że $c_{f(n)}$ nie występuje w formułach $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$

$S_n = S \cup \{\exists x \varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i(x/c_{f(i)}) : i < n\}$ (aksjomat postaci jaka w $\{\}$ nazywa się aksjomatem Henkina

$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ to ciąg rosnący

$S_\omega = \bigcup S_n$

FAKT: zbiór S_ω jest niesprzeczny

Dowód nie wprost: gdyby był sprzeczny, to sprzeczność wynikałaby ze skończonego podzbioru, czyli pewne S_n jest sprzeczne, czyli możemy wybrać n najmniejsze takie, że $S_{n+1} = S_n \cup \{\exists x \varphi_n(x) \rightarrow \varphi_n(x/c_{f(n)})\}$ jest sprzeczne

ponieważ n jest najmniejsze, to S_n nie jest sprzeczne

H niech będzie zdaniem w $\{\}$

$$S_n \cup \{H\} \vdash \alpha \wedge \neg \alpha$$

dla pewnego α z tego wiemy, że

$$S_n \vdash (\exists x \varphi_n(x) \rightarrow \varphi_n(c_{f(n)}) \rightarrow \alpha \wedge \neg \alpha$$

A0 daje nam, że

$$S_n \vdash \neg(\exists x \varphi_n(x) \rightarrow \varphi_n(c_{f(n)}))$$

znowu korzystając z A0 dostajemy

$$S_n \vdash \exists x \varphi_n(x) \wedge \neg \varphi_n(c_{f(n)})$$

$$S_n \vdash \exists x \varphi_n(x) \text{ i } \S_n \vdash \neg \varphi_n(c_{f(n)})$$

w dowodzie po prawej od $c_{f(n)}$ zastępujemy nową zmienną y

po tej zamianie powstaje dowód $S_n \vdash \neg \varphi_n(y)$, korzystamy z \forall żeby dostać $S_n \vdash \forall y \neg \varphi_n(y)$ z A2 dla $t = x$ dostajemy $S_n \vdash \neg \varphi_n(x)$, z \forall -reguły mamy $S_n \vdash \forall x \neg \varphi_n(x)$, ale nadal prawdą jest, że $\S_n \vdash \exists x \varphi_n(x)$

Mamy skończony dowód, że S_ω jest niesprzeczny

Twierdzenie Lidenbauma(???) jeśli mamy niesprzeczny zbiór formuł/zdań to możemy go rozszerzyć do maksymalnego niesprzecznego zbioru formuł/zdań, który jest zupełny i niesprzeczny zbiór formuł/zdań

Korzystamy, żeby dostać $S' \supseteq S_\omega$, który jest zupełny i niesprzecznym zbiorem zdań w L'

S' opisuje strukturę modelu na $\{c_n : n < \omega\}$

mamy relację równoważności na zbiorze $C = \{c_n : n < \omega\}$: $c_n \sim c_m \iff S' \vdash c_n = c_m$

- symetria: aksjomat równości

Niech $\mathfrak{M} = \{c_n / \sim : n \in \omega\} = C / \sim$ - struktura na M

1. $P_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1} / \sim, \dots, c_{i_n} / \sim) \iff S' \vdash P_i(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})$
2. $f_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1} / \sim, \dots, c_{i_k} / \sim) = c_{i_n} / \sim \iff S' \vdash f_i(c_{i_1}, \dots, c_{i_k}) = c_{i_n}$

TUTAJ MAM DOŚĆ NEWELA

