Logika R

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

1. Formalizacja matematyki

1.1 Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura I rzędu

1.1.1 Model języka i język struktury modelu

Definicja 1.1: model

Model to struktura matematyczna składająca się z

- niepustego zbioru będącego *uniwersum* (dziedzina) $A \neq \emptyset$,
- *funkcji* $f_1, ..., f_k$ o arności n_i (tzn. $f_i : A^{n_i} \to A$),
- *relacji* (orzeczników, predykatów) w A, $P_1, ..., P_n$, gdzie $P_i \subseteq A^{n_i}$,
- *stałych* z A $c_1, ..., c_l \in A$.

Zapisujemy

$$\mathfrak{M} = (A; f_1, ..., f_k; P_1, ..., P_n; c_1, ..., c_l)$$

gdzie k, n, l to liczby kardynalne, zazwyczaj skończone (tzn. $k, n, l \in \mathbb{N}$).

Konwencja

$$(\mathfrak{M} :=)|\mathfrak{M}| := A$$

Przykłady

1. Jeśli $n = 0$, czyli nie mamy relacji, to $\mathfrak{M}$ jest *strukturą algebraiczną* (algebrą ogólną). Weźmy na przykład grupę. Grupa jest zdefiniowana jako zbiór G z wyróżnionym elementem neutralnym e, operacją mnożenia $\cdot$ oraz brania elementu odwrotnego $^{-1}$. Operacje to funkcje, a element neutralny to stała. Sam zbiór G to z kolei uniwersum, czyli mamy model:

$$(G; \cdot, ^{-1};\ ; e)$$

2. Rodzina zbiorów V z relacją należenia $\in$ jest modelem z jedną relacją, ale bez funkcji i bez stałych:

$$(V;\ ; \in;\ )$$

Taką strukturę nazywamy *strukturą relacyjną*.

Symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe będziemy od ich znaczenia odróżniać przez podkreślenie:

- $\underline{f_i}$, $\underline{P_j}$, $\underline{c_t}$ to symbole,
- natomiast f_i, P_J, c_t to funkcja, relacja, stała.

Definicja 1.2: język

Język

$$L = \{\underline{f_1}, ..., \underline{f_k}; \underline{P_1}, ..., \underline{P_n}; \underline{c_1}, ..., \underline{c_l}\}$$

składa się z symboli: funkcyjnych, relacyjnych, stałych wraz z przypisanymi tym symbolom arnościami, tzn. f_j to symbol funkcji n_i-argumentowej etc.

Język jak wyżej jest nazywany językiem struktury $\mathfrak{M}$, typem podobieństwa $\mathfrak{M}$, **sygnaturą $\mathfrak{M}$**. Z kolei $\mathfrak{M}$ jest modelem dla L.

Konwencja

Szerzej będziemy dla $\mathfrak{M}$ - modelu dla L - pisać

$$(\mathfrak{M}; \underline{f_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{f_k}^{\mathfrak{M}}; \underline{P_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{P_n}^{\mathfrak{M}}; \underline{c_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{c_l}^{\mathfrak{M}})$$

gdzie $\underline{f_i}^{\mathfrak{M}}$ oznacza interpretację symbolu $\underline{f_1}^{\mathfrak{M}}$ w kontekście modelu $\mathfrak{M}$.

Uwaga 1.3

Dla dowolnego języka L istnieje wiele struktur $\mathfrak{M}$.

Przykład

Język grup

Mając dany język L mówimy/piszemy w nim przy pomocy

- symbolów języka,
- symboli logicznych $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ (!!! $\implies$ oraz $\iff$ będą dla nas elementami metajęzyka !!!), $\forall$, $\exists$, $=$,

- zmiennych, np. x_i dla $i \in \mathbb{N}$, y, z,
- oraz symboli pomocniczych takich jak nawiasy, przecinki etc.

Uwaga 1.4

Spójniki można ograniczyć do $\wedge$, $\neg$ i kwantyfikatora $\exists$. Całą resztę spójników można zdefiniować jako macra przy pomocy tych trzech, np.

$$p \vee q \quad := \quad \neg(\neg p \wedge \neq q)$$

Wyrażenia języka L:

a) **wyrażenia nazwowe** (termy) należą do $\mathcal{T}_L$ (Term_L) i są definiowane rekurencyjnie:

- zmienna, symbol stałej należą do $\mathcal{T}_L$ i nazywają się *termami atomowymi*
- jeśli $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathcal{T}_L$, a $\underline{f}$ jest symbolem n-argumentowej funkcji z L, to $\underline{f}(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{T}_L$ i nazywa się *termem złożonym*.

b) **formuły** oznaczamy $\mathcal{F}_L$ (Form_L) i definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób

- dla wszystkich termów $\tau_1, ..., \tau_n$ zachodzi $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_L$ oraz dla n-argumentowego symbolu relacji $\underline{P}_j$: $\underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{F}_L$ - to są *formuły atomowe*,
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_L$

  $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\exists\ r\ \varphi), (\forall\ r\varphi) \in \mathcal{F}_L$ (r występujące w wyrażeniach nazywamy zmiennymi)

  Formuły z tego punktu nazywamy *formuły złożone*.

Hierarchia symboli logicznych umożliwia pomijanie nawiasów:

1. symbole matematyczne
2. kwantyfikatory
3. negacja $\neg$
4. $\wedge$, $\vee$
5. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

1.1.2 Zdania w języku

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$ będzie formułą w której występuje, co najmniej raz, zmienna v. Jeśli pewne wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora $Q_v \in \{\forall, \exists\}$, to spośród wszystkich wystąpień Q_v w φ w których zasięgu jest v wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy, że to **Q_v wiąże dane wystąpienie v** w φ. Na przykład

$$\forall\, x\, \exists\, y\, (x \in y \wedge \forall\, x\, (x \in y \to x = y))$$

wiąże

Jeśli nie ma kwantyfikatora Q_v jak wyżej, to wystąpienie v w φ jest **wolne**. Popatrzmy na przykład na formułę

$$\exists y\, x \in y \wedge \forall\, x\, (x \in y \to x = y).$$

Kwantyfikator z czerwonym y wiąże czerwony y, a niebieskie y pozostają wolne. Dodając nawias pierwszy kwantyfikator wiąże już wszystkie występienia y:

$$\exists y\, (x \in y \wedge \forall\, x\, (x \in y \to x = y)).$$

Konwencja

Zapis $\varphi(v_1, ..., v_n)$ oznacza, że wszystkie wolne zmienne w φ są wśród v_1, ..., v_n (ale niekoniecznie wszystkie v_i są zmiennymi wolnymi).

Definicja 1.5: zdanie

Formalne zdanie w języku L to formuła niezawierająca zmiennych wolnych.

Tarski podał na początku XX wieku definicję prawdy. Nieco później udowodnił twierdzenie, że nie da się prawdy zdefiniować.

Powstaje pytanie co to znaczy, że formuła z L jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$ dla L?

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem dla $L = \{\underline{f}_i, ..., \underline{P}_j, ..., \underline{c}_t, ...\}$ oraz $\{\underline{a} \ : \ a \in \mathfrak{M}\}$ niech będzie zbiorem nowych symboli stałych. Rozważmy nowy, większy język

$$L(\mathfrak{M}) = L \cup \{\underline{a} \ : \ a \in |\mathfrak{M}|\},$$

którego modelem nadal jest $\mathfrak{M}$ ($\underline{a}^{\mathfrak{M}} := a$).

Termy stałe $\sigma^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ z $L(\mathfrak{M})$ interpretujemy w $\mathfrak{M}$ w następujący sposób:

- jeśli $\underline{\tau}$ jest symbolem stałym $\underline{c}_i$ w L, to $\tau^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ jest interpretacją $\underline{c}_i^{\mathfrak{M}}$
- jeśli $\tau = \underline{f}_i(\underline{\tau}_1, ..., \underline{\tau}_n)$ jest termem złożonym, to $\sigma^{\mathfrak{M}} = \underline{f}_i^{\mathfrak{M}}(\underline{\tau}_1^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{\tau}_n^{\mathfrak{M}})$.

Konwencja

$\mathfrak{M} \models \varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe/spełniane w $\mathfrak{M}$.

a) zdania atomowe:

- $\mathfrak{M} \models \tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1^{\mathfrak{M}} = \tau_2^{\mathfrak{M}}$
- $\mathfrak{M} \models \underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \iff (\tau_1^{\mathfrak{M}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{M}}) \in \underline{P}_j^{\mathfrak{M}}$

b) zdania złożone:

- $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi$ oraz $\mathfrak{M} \models \psi$
- $\mathfrak{M} \models \neg\varphi \iff$ nieprawda, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ (oznaczamy $\mathfrak{M} \not\models \varphi$)
- $\mathfrak{M} \models \exists\, v\, \varphi$ (jest tym samym co $\exists\, v\, \varphi(v)$, bo zakładamy, że nie ma innych zmiennych wolnych w φ, bo to jest zdanie) $\iff$ $\mathfrak{M} \models \underbrace{\varphi(v/\underline{a})}_{=\varphi(\underline{a})}$ dla pewnego $a \in |\mathfrak{M}|$, gdzie $\varphi(\underline{a})$ jest formułą powstającą z φ przez zastąpnienie każdego wolnego wystąpienia v w φ przez $\underline{a}$.

To daje nam, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Kwantyfikatujemy po zmiennych, nie po podzbiorach uniwersum, bo to jest logika I rzędu. Zbiory tworzymy w umyśle, postrzegamy indywidua. Teorie wyższych rzędów nie są absolutne.

Definicja 1.6: spełnianie formuły

Krotka $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ elementów z uniwersum $\mathfrak{M}$ **spełnia formułę** φ języka, gdy $\mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$.

Definicja 1.7: uniwersalne domknięcie

Dla formuły φ języka L jej **uniwersalne domknięcie** φ to formuła

$$\overline{\varphi} := \forall\, x_1 \,\forall\, x_2 \, ...\forall\, x_n\, \varphi$$

W następnej części wykładu pokażemy, że

$$\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{M} \models \overline{\varphi}$$

Powyższe zagadnienia mówią, że domyślny kwantyfikator to kwantyfikator $\forall$. To ma spełnienie w naturalnej matematyce, np. przemienność dodawania $(\mathbb{R}, +) \models\ x + y = y + x$ gdzie pomijamy $\forall\, x \,\forall\, y$.

1.1.3 Tautologie

Definicja 1.8: tautologia KRL

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$. Wtedy φ jest **tautologią** klasycznego rachunku logicznego [KRL], gdy jest zawsze prawdziwe. Zapisujemy to $\models \varphi$, co oznacza $\forall$ $\mathfrak{M}$ modelu L $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Jak rozpoznać, czy $\models \varphi$? Ogólnie jest to pytanie nierozstrzygalne (twierdzenie Gödla).

Niektóre tautologie łatwo rozpoznać, jak przykłady niżej.

Przykłady

1. $x = x$
2. $=$ jest relacją równoważności

Przygodę z tautologiami rozpoczynamy od **tautologicznych formuł zdaniowych** (czyli schematów).

Niech $Z = \{p_0, p_1, ..., p_n, r, q, ...\}$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. Zbiór formuł zdaniowych $S = S_Z$ nad Z definiujemy w następujący sposób:

- $v \in Z \implies v \in S$
- $\alpha, \beta \in S \implies \neg\alpha, \alpha \wedge \beta \in S$
- skrótowo: $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow \in S$

Definicja 1.9: wartościowanie

Wartościowanie logiczne formuł zdaniowych to dowolna funkcja $v : S \to \{0, 1\}$ taka, że dla każdych $\alpha, \beta \in S$
- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$

Definicja 1.10: tautologia KRZ

Powiemy, że $\alpha \in S$ jest **tautologią** ($\models \alpha$) gdy dla każdego wartościowania v zachodzi $v(\alpha) = 1$.

Na przykład: $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla każdego $\alpha \in S$

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$ dla $\alpha \in S$ (metoda 0-1): wartość $v(\alpha)$ zależy tylko od $v(x)$ dla zmiennych zdaniowych x w α.

Definicja 1.11: przykład formuły

Załóżmy, że $\alpha \in S$ jest zbudowany ze zmiennych $p_1, ..., p_n \in Z$ oraz $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_L$ i $\varphi \in \mathcal{F}_L$ powstaje z α przez zastąpienie p_i przez φ_i wszędzie w α (zapisujemy $\varphi = \alpha(p_1/\varphi_1, ..., p_n/\varphi_n)$. Mówimy, że φ jest **jest przykładem formuły α**.

Weźmy na przykład formułą $\alpha = p_1 \wedge p_2$, wtedy $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ jest przykładem formuły α.

Twierdzenie 1.12

Jeśli $\models \alpha$ i φ jest przykładem α, to $\models \varphi$.

Dowód
Ćwiczenie

Definicja 1.13: reguła wnioskowania

Reguła wnioskowania składa się z:

- przesłanek $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_L$
- tezy φ.

Zapisujemy

$$\frac{\varphi_1, ..., \varphi_n}{\varphi}$$

Reguła wnioskowania jest poprawna, kiedy nie prowadzi nas na manowce.

1. $\frac{\varphi_1, ..., \varphi_n}{\varphi}$ jest **poprawna**, jeśli dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ dla L

$$\mathfrak{M} \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \implies \mathfrak{M} \models \varphi$$

2. $\frac{\alpha_1, ..., \alpha_n}{\alpha}$ jest poprawna, jeśli dla każdego wartościowania v

$$v(\alpha_1) = ... = v(\alpha_n) = 1 \implies v(\alpha) = 1$$

Przykłady

1. Modus Ponens (reguła odrywania, cut rule)

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

2. reguła generalizacji ($\forall$ -rule)

$$\frac{\varphi}{\forall\, v\, \varphi(v)}$$

1.2 Aksjomatyczne ujęcie KRL

(A0) formuła będąca przykładem dowolnego zdania KRZ, które jest tautologią

(A1) $\forall\, v\, (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall\, v\, \psi)$, gdy v nie jest wolna w φ

(A2) $\forall\, v\, \varphi \to \varphi(v/t)$ (to jest poprawny zapis, ale dla pewności: $(\forall\, v\, \varphi) \to \varphi(v/t)$)

t to jest term podstawiany za każde wolne wystąpienie v w φ pod warunkiem, że żadne z takich wystąpień nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną występującą w termie t.

Zastrzeżenie aksjomacie (A2) jest istotne: jeśli weźmiemy jako φ formułę

$$\varphi = \exists\, y\, x \neq y$$

i podstawimy za wolne wystąpienia x term $t = y$, to

$$\varphi(x/t) = \exists\, y\, y \neq y$$

co z (A2) dałoby

$$\not\models \forall\, x\varphi \to \varphi(x/t) = \forall\, \exists\, y\, x \neq y \to \exists\, y\, y \neq y$$

Definicja 1.14: aksjomaty równości

Aksjomaty równości (v_i - wolne zmienne):

(R1) $v_1 = v_1$

(R2) $v_1 = v_2 \to t(...v_1...) = t(...v_1/v_2...)$

(R3) $v_1 = v_2 \to (\varphi(...v_1...) \to \varphi(...v_2...))$ gdzie v_1 to wolne wystąpienie w φ niebędące w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2.

1.2.1 Dowodliwość

Definicja 1.15: dowód formalny

Niech $X \subseteq \mathcal{F}_L$ będzie dowolnym podzbiorem formuł.
Powiemy, że **X dowodzi $\varphi \in \mathcal{F}_L$**, $X \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg formuł **(dowód formalny)** $\alpha_1, .., \alpha_n = \varphi$ takie, że dla każdego $i \leq n$

1. $\alpha_i \in X$ lub α_i jest aksjomatem KRL
2. α_i wynika z $\{\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}\}$ na mocy
   - Modus Ponens, tzn. $(\exists\, j, t < i)\ \alpha_t = (\alpha_j \to \alpha_i)$

$$\frac{\alpha_j, \alpha_j \to \alpha_i}{\alpha_i}$$

   - lub $\forall$-rule $(\exists\, j < i)\ \alpha_i = (\forall\, v\, \alpha_j)$

$$\frac{\alpha_j}{\forall\, v\, \alpha_j}$$

Konwencja

$\vdash \varphi$ gdy $\emptyset \vdash \varphi$

Definicja 1.16: teza KRL

Jeśli φ jest takie, że $\vdash \varphi$, to φ nazywamy **tezą** KRL.

Uwaga 1.17

$X \vdash \varphi \iff \exists\, X_0 \subseteq X$ skończony $X_0 \vdash \varphi$

Przykład

Pokażemy, że $\vdash \forall\, x\, \varphi \to \exists\, x\, \varphi$, co jest równoważne

$$\vdash \forall\, x\, \varphi \to \neg\, \forall\, x\, \neg\varphi$$

1. $\alpha_1 : \forall\, x\, \varphi \to \varphi(x/y)$ (A2)
2. $\alpha_2 : \forall\, x\, \neg\varphi \to \neg\varphi(x/y)$ (A2)
3. $\alpha_3 : \alpha_2 \to (\varphi(x/y) \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi)$ (A0 $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$)
4. $\alpha_4 : \varphi(x/y) \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi$ (α_2, α_3 oraz Modus Ponens)
5. $\alpha_5 : \alpha_1 \to (\alpha_4 \to (\forall\, x\, \varphi \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi))$ (A0 $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$)

6. $\alpha_6 : (\forall\ x)\ \varphi \to \neg(\forall\ x)\neg\varphi$ (Modus Ponens)

Rozważmy φ dane $x = x$. Zdanie

$$\vdash (\forall\ x)\ x = x \to (\exists\ x)x = x$$

jest fałszywe w dziedzinie putestj, czyli modelu

$$(\emptyset; f_1, ..., f_n; P_1, ..., P_j;)$$

gdzie nie ma elementów uniwersum. Czyli coś z aksjomatów musi zawodzić w dziedzinie pustej - pytanie co?

Od tej pory modele są niepuste

Uwaga 1.18

Poprawność (soundness) KRL

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

Dowód

Dowód polega na indukcji względem długości formuły (albo długości dowodu) i jest pozostawiony jako ćwiczenie.

🦚

Twierdzenie 1.19: Gödela o pełności KRL

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

Czyli $\models \varphi \iff \vdash \varphi$.

Definicja 1.20: zbiór konsekwencji

Dla $X \subseteq \mathcal{F}_L$ **zbiór konsekwencji** X to $\mathrm{Cn}(X) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L\ :\ X \vdash \varphi\}$

- X jest teorią, gdy $X = \mathrm{Cn}(X)$
- A jest zbiorem aksjomatów teorii X, gdy $X = \mathrm{Cn}(A)$
- *zbiory X, Y są równoważne*, gdy $\mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(Y)$ co równoważnie można powiedzieć: $X \vdash Y$ i $Y \vdash X$

Twierdzenie 1.21: twierdzenie o dedukcji

Jeśli φ jest zdaniem, to $(X \vdash \varphi \to \psi \iff X \cup \{\varphi\} \vdash \varphi)$

Dowód
Dowód powyższego twierdzenia jest zadaniem na 1 liście zadań.

🦚

Fakt 1.22

φ oraz $\overline{\varphi}$ są równoważne, czyli $\varphi \vdash \overline{\varphi}$ oraz $\overline{\varphi} \vdash \varphi$.

Dowód
$\varphi \vdash \overline{\varphi}$

Wystarczy zastosować $\forall$-regułę tyle razy ile dopisaliśmy kwantyfikatorów w $\overline{\varphi}$.

$\overline{\varphi} \vdash \varphi$

Aksjomat (A2) mówi, że $\overline{\varphi} \to \varphi$. Używając do tego th:tw dedukcja dostajemy

$$\emptyset \cup \{\overline{\varphi}\} \vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \overline{\varphi} \to \varphi.$$

🦚

Wniosek

$X \subseteq \mathcal{F}_L$
X oraz $\{\overline{\varphi} \ : \ \varphi \in X\}$ są równoważne

Definicja 1.23: zbiór sprzeczny

X jest **sprzeczny**, jeżeli $X \vdash \varphi$ oraz $X \vdash \neg\varphi$ dla pewnego zdania $\varphi \in \mathcal{F}_L$

W przeciwnym razie mówimy, że X jest niesprzeczny.

Definicja 1.24: zbiór zupełny, rozstrzygalny

1. Powiemy, że $\mathfrak{M}$ **jest modelem** X, oznaczane $\mathfrak{M} \models X \iff (\forall\, \varphi \in X)\ \mathfrak{M} \models \varphi$.
2. X jest **zupełny** $\iff (\forall$ zdania $\varphi)$ $(X \vdash \varphi$ lub $X \vdash \neg\varphi$.
3. X jest **rozstrzygalny** $\iff$ istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$.

Przykłady

1. *Teoria struktury* $\mathfrak{M}$, definiowana jako zbiór $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) := \{\varphi \ :\ M \models \varphi\}$, jest niesprzeczna i zupełna.
2. $\emptyset$ jest niesprzeczny

Twierdzenie 1.25: Gödela o istnieniu modelu

Jeśli S jest niesprzecznym zbiorem zdań (równoważnie: formuł), to S ma model.

Dowód

Przedstawimy dowód Leona Henkina dla przypadku, gdy L i S są przeliczalne. Ogólny dowód jest analogiczny, ale wymaga nieprzyjemnych fikołków kombinatorycznych na liczbach kardynalnych.

Zacznijmy od powiększenia języka L o nowe symbole

$$L' = L \cup \{c_n \ :\ n < \omega\}$$

i ponumerowania jego formuł postaci $\varphi(x)$ (z co najwyżej jedną wolną zmienną x)

$$\{\varphi_n \ :\ n < \omega\}$$

Zdefiniujmy pomocniczą rosnącą funkcję $f : \omega \to \omega$ taką, że $c_{f(n)}$ nie występuje w formułach $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Przy pomocy f definiujemy rodzinę zbiorów

$$S_n := S \cup \{\underbrace{(\exists\, x)\ \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_{f(i)})}_{\text{aksjomat Henkina}} \ :\ i < n\}.$$

Mamy $S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ i niech

$$S_\omega = \bigcup S_n$$

Fakt

Zbiór S_ω jest niesprzeczny.

Dowód
Załóżmy nie wprost, że S_ω jest sprzeczny. Sprzeczność ta wynika ze skończonego podzbioru (patrz 1.17), czyli istnieje n takie, że S_{n+1} jest sprzeczny. Wybierzmy najmniejsze takie n. Dla pewnego zdania α mamy

$$S_{n+1} \vdash \alpha \ \wedge \ \neg\alpha.$$

Zapiszmy S_{n+1} jako

$$S_{n+1} := S_n \cup \underbrace{\{(\exists\ x)\ \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(i)})\}}_{H},$$

w tedy z twierdzenia o dedukcji (1.21) mamy

$$S_n \cup \{H\} \vdash \alpha \ \wedge \ \neg\alpha \qquad \iff \qquad S_n \vdash H \to \alpha \ \wedge \ \neg\alpha$$

Korzystając z aksjomatu (A0) dla $(p \to (q \ \wedge \ \neg q)) \to \neg p$ i Modus Ponens dostajemy

$$S_n \vdash \neg((\exists\ x)\ \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)}))$$

korzystając jeszcze raz z (A0) $(\neg(p \to q) \to (p \ \wedge \ \neg q))$ oraz MP mamy

$$S_n \vdash (\exists\ x)\ \varphi_n(x) \ \wedge \ \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

z czego wnioskujemy, że

$$S_n \vdash (\exists\ x)\ \varphi_n(x)$$
$$S_n \vdash \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

Wybieraliśmy funkcję f tak, żeby symbol $c_{f(n)}$ nie występował w zdaniach S_n, więc możemy go zamienić na dowolny inny, np y, a następnie skorzystać z $\forall$-reguły by dostać

$$S_n \vdash \neg\varphi_n(y) \implies S_n \vdash (\forall\ y)\ \neg\varphi_n(y).$$

Dzięki (A2) i faktowi, że $c_{f(n)}$ nie występowało nigdzie indziej w φ_n (w tym nie było nigdy wiązane przez kwantyfikatory), możemy zamienić

$$S_n \vdash (\forall\ y)\ \neg\varphi_n(y) \to \neg\varphi_n(y/x).$$

Korzystając z MP mamy

$$S_n \vdash \neg\varphi_n(x),$$

a z $\forall$-reguły:

$$S_n \vdash (\forall\ x)\ \neg\varphi_n(x)$$

co pokazuje, że S_n jest sprzeczne, bo $S_n \vdash (\exists\ x)\ \varphi_n(x)$.

Twierdzenie Lidenbauma(???) jeśli mamy niesprzeczny zbiór formuł/zdań to możemy go rozszerzyć do maksymalnego niesprzecznego zbioru formuł/zdań, który jest zupełny i niesprzeczny zbiór formuł/zdań

Korzystamy, żeby dostać $S' \supseteq S_\omega$, który jest zupełny i niesprzecznym zbiorem zdań w L'

S' opisuje strukturę modelu na $\{c_n \ : \ n < \omega\}$

mamy relację równoważności na zbiorze $C = \{c_n \ : \ n < \omega\}$: $c_n \sim c_m \iff S' \vdash c_n = c_m$

- symetria: aksjomat równości

Niech $\mathfrak{M} = \{c_n / \sim : \ n \in \omega\} = C/\sim L'$ - struktura na M

1. $P_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1}/\sim, ..., c_{i_n}/\sim) \iff S' \vdash P_i(c_{i_1}, ..., c_{i_n})$
2. $f_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1}/\sim, ..., c_{i_k}/\sim) = c_{i_n}/\sim \iff S' \vdash f_i(c_{i_1}, ..., c_{i_k}) = c_{i_n}$

TUTAJ MAM DOŚĆ NEWELA

Aksjomat Henkina mówi, że jeśli $\mathfrak{M} \models (\exists\, x)\ \varphi(x)$ to istnieje $c \in \mathfrak{M}$ takie, że $\mathfrak{M} \models (\exists\, x)\ \varphi(x) \to \varphi(c)$.

Ustalmy język L, niech M i N będą L-strukturami.

Definicja 1.26

1. M i N są równoważne, $M \equiv N$, gdy dla każdego zdania φ $M \models \varphi \iff N \models \varphi$, co jest równoważne $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$
2. $M \subseteq N$ jest podstrukturą (podmodelem) modelu N, gdy $|M| \subseteq |N|$ oraz
   - dla każdego indeksu i $\underline{f}_i^M = \underline{f}_i^N|_M$, czyli interpretacja symbolu $\underline{f}_i$ w M jest interpretacją $\underline{f}_i$ w N ograniczoną do M
   - analogicznie dla relacji i stałych
3. $g : M \xrightarrow{\cong} N$ jest izomorfizmem struktur, gdy $g : |M| \to |N|$ jest bijekcją oraz
   - dla wszystkich $\bar{a} \subseteq M$ zachodzi $M \models P_i(\bar{a}) \iff N \models P_i(g(\bar{a}))$
   - dla $\bar{a} \subseteq M$ i $b \in M$ zachodzi $M \models f_i(\bar{a}) = b \iff N \models f_i(\bar{a}) = b$
   - $M \models c_i = b \iff N \models c_i = g(b)$
4. $M \cong N$ są izomorficzne gdy istnieje między nimi izomorfizm
5. $M \prec N$ jest elementarną podstrukturą, gdy $M \subseteq N$ i dla każdej formuły $\varphi(\bar{x}) \in F_l$ i każdej krotki $\bar{a}$ mamy $M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(\bar{a})$
6. $f : \xrightarrow{\equiv} N$ gdy $f : M \xrightarrow{\cong} N$ i $f(M) \prec N$

"Istnieje zbiór, który nie jest ani równoliczby z $\mathbb{N}$ ani z $\mathbb{R}$" jest zdaniem II rzędu, bo zależy od teorii mnogości jaka pod nim leży.

Twierdzenie 1.27: Test Tarskiego-Vaughta

Załóżmy, że $A \subseteq M$. Wtedy A jest uniwersum elementarnej podstruktury M wtedy i tylko wtedy gdy

- dla każdych $\varphi(x, \bar{y}) \in F_L$ oraz $\bar{a} \subseteq A$ jeśli $M \models (\exists\ x)\ \varphi(x, \bar{a})$ to $M \models \varphi(b, \bar{a})$ dla pewnego $b \in A$

Dowód

$\Longrightarrow$ jest proste i pozostawiamy jako ćwiczenie

$\Longleftarrow$

a) A jest uniwersum podstruktury M, tzn. dla każdego $\underline{f}_i \in L$ i $\underline{c}_j \in L$ takich, JA TUTAJ NIE MYŚLĘ

b) N podstruktura M taka, że $|N| = A$

Wniosek:

Twierdzenie 1.28: Löwenheima-Skolema

1. (dolne) $A \subseteq M$ to istnieje $N \prec M$, $A \subseteq N$ taka, że $||N|| = |A| + |L|$ ($|L| := |F_L|$)
2. (górne) istnieją elementarne rozszerzenia $N \succ M$ dowolnej mocy ($||N||$)

Dowód

nie chce mi sie sluchac dowodu

paradoks Löwenheima-Skolema: nie da się wyrazić nierpzeliczalności w logice I rzędu

definicja gier