Logika R

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

15.10.2025 um

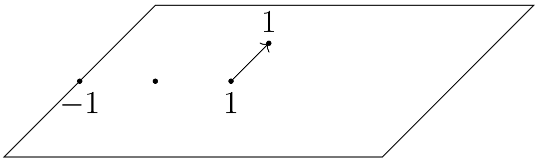
Co jest dziedziną funkcji holomorficznej?

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ otwarty
2. $U \subseteq \overline{C}$ otwarty

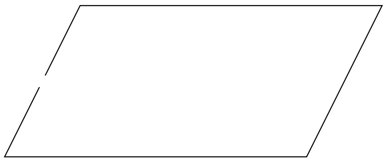
chcemy wyjść poza te możliwości i zadać konkretniejsze pytanie: co jest dziedziną funkcji $\sqrt{z}$?

1. "dwuwartościowa funkcja homolorficzna na $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$"
2. weźmy dwie kopie $\mathbb{C}^\times$ i próbujemy na tym określać peirwiastek z z.

   na górnej kopii zaczynamy w 1 i idziemy do 1, a na dolnej do -1

   Riemann proponuje pomysł naprawy: rozetnijmy te kopie $\mathbb{C}^\times$ wzdłuż $\mathbb{R}_-$

   teraz sklejamy "na krzyż" rozcięcia" i dostajemy tzw. powierzchnię Riemanna pierwiastka $\sqrt{z}$, która dwukrotnie nakrywa $\mathbb{C}^\times$.

   Na tej powierzchni $\sqrt{z}$ jest jednoznaczną funkcją holomorficzną.

Fakt 0.1

Niech $p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie holomorficzną funkcją dwóch zmiennych. Niech $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ p(x, y) = 0\}$. Załóżmy, że dla wszystkich $(x_0, y_0) \in \Sigma$ któraś z pochodnych cząstowcyh jest niezerowa $p_x(x_0, y_0) \neq 0$ lub $p_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Wtedy w otoczeniu każdego $(x_0, y_0) \in \Sigma$ jest wykresem funkcji holomorficznej, tzn. istnieje $D_1 \times D_2 \in (x_0, y_0)$ takie, że

$$\Sigma \cap (D_1 \times D_2) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in D_1\},$$

$f : D_1 \to D_2$ holo $(p_y \neq 0)$ lub

$$\Sigma \cap (D_1 \times D_2) = \{(g(y), y) \ : \ y \in D_2\},$$

$g : S_2 \to D_1$ holo $(p_x \neq 0)$

Dowód

Załóżmy, że $p_y(x_0, y_0) \neq 0$. Chcemy popatrzeć na pionową prostą $x = x_0$. Po ograniczeniu do niej funkcja jest holomorficzna, która się zeruje w y_0, ale niezeruje się w małym dyszczku D_2 o środku w (x_0, y_0) poza samym punktem (x_0, y_0).

Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{p_x(x_0, y)}{p(x_0, y)} dy = 1$$

możemy temu pysiowi machać x_0, czyli przesuwać płaszczyznę $x = x_0$ i całkować po analogicznym okręgu ∂D_2. p jest niezerowa na otoczeniu $\{x_0\} \times \partial D_2$, np. $D_1 \times \partial D_2$.

tutaj rysuneczki

Dla $x \in D_1$ mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{p_y(x, y)}{p(x, y)} dy = 1$$

całka w ciągły sposób zależy od x, dla $x = x_0$ była równa jeden więc na całości też jest równa jeden.

To znaczy, że w $\{x\} \times D_2$ funkcja p ma jedno zero, które można zapisać wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{y p_y(x, y)}{p(x, y)} dy$$

W sytuacji z faktu: kiedy $F : \Sigma \to \mathbb{C}$ uznamy za holomorficzną?

F holomorficzna w Σ gdy holomorficzna w otoczeniu każdego $(x_0, y_0) \in \Sigma$, czyli jeśli $x \mapsto F(x, f(x))$ (lub drugi wariant) jest holomorficzna w otoczeniu w x_0 lub y_0

jeśli $p_x(x_0, y_0) \neq 0 \neq p_y(x_0, y_0)$ to nie ma sprzeczności.

KOLEJNY OBRAZEK

f i g są holomorficzne, więc definicja jest poprawna :p - to jest komentarz do obrazka btw

Definicja 0.2

Powierzchnią Riemanna Σ nazywamy topologiczną przestrzeń Hausdorffa wyposażoną w rodzinę map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że

1. $\bigcup U_\alpha = \Sigma$
2. U_α otwarte
3. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V \subseteq \mathbb{C}$ homeomorfizm na otwarty podzbiór $\mathbb{C}$

4. $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ jest holomorifczne tam gdzie jest określone

Wniosek

Σ jak w fakcie wcześniej jest powierzchnią Riemanna.

Definicja 0.3

Σ - powierzchnia Riemanna, $f : U \to \mathbb{C}$ ($U \subseteq \Sigma$ otwarty). Mówimy, że f jest holomorficzna ($f \in O(U)$) jeśli każda $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ jest holomorficzna na swojej dziedzinie.
Wariant dla dwóch powierzchni Riemanna.

Przykłady

1. $\Sigma = Z(y^2 - x)$ zera tego wielomianu
   KOLEJNY RYSUNEEEEEEEEEEEEEEEEEK
   zbiór rozwiązań równania $y^2 = p(x)$ nazywa się czasem powierzchnią hipereliptyczną

1. Ilorazy

$\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ - no ze to torus jest

mapki: dla $z \in \mathbb{C}$ wybieramy $V_z = B(z, \frac{1}{2})$

Odwzorowanie ilorazowe przekształca V_z holomorficznie na $U_z \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$

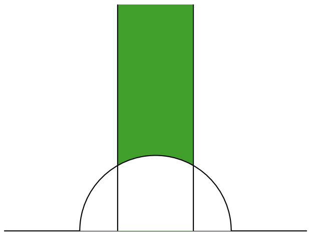
odwrotności takich odwzorowań przyjmujemy za mapy

odwzorowania między mapami to po prostu przesunięcia, więc śmiga

jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ liniowo niezależna nad $\mathbb{R}$ to definiujemy kratę $\Lambda = \mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2$ i wtedy iloraz $\mathbb{C}/\Lambda$ też jest powierzchiną Riemanna.

niezależnie od wyboru kraty Λ, iloraz zawsze jest homeomorficzny z torusikiem

jednak nie zawsze $\mathbb{C}/\Lambda_1$ i $\mathbb{C}/\Lambda_2$ są holomorficzne (struktury zespolone mogą się nie zgadzać)



zielony obszar nazywam M, $M \ni \tau \mapsto \mathbb{C}/\mathbb{Z} - 1 + \mathbb{Z}\tau$

τ parametryzuje możliwe struktury holomorficzne na torusiku

Na przykład $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)$ bierzemy dwie płaszczyzny, rozcinamy między 0 a 1 i między 2 a 3 i sklejamy na krzyż, ale to można sobie wyobrażać jako dwie płaszczyzne połączone dwoma tubkami (skręconymi, które można odkręcić)

jak uzwarcimy te dwie płaszczyzny to dostajemy torus

GENERALNIE TUTAJ JEST OBRAZEK

pytanie: czy da się podobnie badać powierzchnie Riemanna jako ilorazy dysku?

kiełki i kontynuacja analityczna

Definicja 0.4

1. niech $z_0 \in \mathbb{C}$ na parach (U, f), gdzie $z_0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ otwarty, $f \in O(U)$, wprowadzamy relację równoważności $\sim_{z_0}$ $(U, f) \sim_{z_0} (V, g) \iff$ istnieje otwarty $z_0 \in W \subseteq U \cap V$ taki, że $f|_W = g|_W$
   klasy równoważności tego cuda to kiełki (oznaczamy $\underline{f}_{z_0}$ klasę (U, f) pod relacją $\sim_{z_0}$)
2. $O_{\mathbb{C}}$ - przestrzeń wszystkich kiełków funkcji holomorficznych
   na nim chcemy określić pewną topologię
   dla (U, f) podzbiór $O_{\mathbb{C}}$:
   $$O(U, f) = \{\underline{f}_z \ : \ z \in U\}$$
   jest otwarty (baza topologii)
   to jest Hausdorffa
   rzut $O_{\mathbb{C}} \ni \underline{f}_z \mapsto z \in \mathbb{C}$ jest lokalnym homeomorfizmem
3. dla $f \in O(U)$ składowa spójna $O_{\mathbb{C}}$ zawierająca $O(U, f)$ to z definicji powierzchnia Riemanna funkcji f

$\mathbb{C}P^2$

$p(x, y) = 0$ wielomian to mamy zera tego wielomianu

$\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{C}P^2 = \{l \ : \ l < \mathbb{C}^3, \ \dim_{\mathbb{C}}(l) = 1\} = \{[x : y : z]\}$ nie chce mi się pisać porządnie trzy różne sposoby włożeni a$\mathbb{C}^2$

to robienie że wielomian ma każdą zmienną w tym samym stopniu