Logika R

Weronika Jakimowicz

Zima 2025/26

Spis treści

1. Formalizacja matematyki

02.10.2025 Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura I rzędu

1. Model języka i język struktury modelu

Definicja 1.1: model

Model to struktura matematyczna składająca się z

- niepustego zbioru będącego *uniwersum* (dziedzina) $A \neq \emptyset$,
- *funkcji* $f_1, \ldots, f_k$ o arności n_i (tzn. $f_i : A^{n_i} \to A$),
- *relacji* (orzeczników, predykatów) w A, $P_1, \ldots, P_n$, gdzie $P_i \subseteq A^{n_i}$,
- *stałych* z A $c_1, \ldots, c_l \in A$.

Zapisujemy

$$\mathfrak{M} = (A; f_1, \ldots, f_k; P_1, \ldots, P_n; c_1, \ldots, c_l)$$

gdzie k, n, l to liczby kardynalne, zazwyczaj skończone (tzn. $k, n, l \in \mathbb{N}$).

Konwencja

$$(\mathfrak{M} :=)|\mathfrak{M}| := A$$

Przykłady

1. Jeśli $n = 0$, czyli nie mamy relacji, to $\mathfrak{M}$ jest *strukturą algebraiczną* (algebrą ogólną). Weźmy na przykład grupę. Grupa jest zdefiniowana jako zbiór G z wyróżnionym elementem neutralnym e, operacją mnożenia $\cdot$ oraz brania elementu odwrotnego $^{-1}$. Operacje to funkcje, a element neutralny to stała. Sam zbiór G to z kolei uniwersum, czyli mamy model:

$$(G; \cdot, ^{-1};\ ; e)$$

2. Rodzina zbiorów V z relacją należenia $\in$ jest modelem z jedną relacją, ale bez funkcji i bez stałych:

$$(V;\ ; \in;\ )$$

Taką strukturę nazywamy *strukturą relacyjną*.

Symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe będziemy od ich znaczenia odróżniać przez podkreślenie:

- $\underline{f_i}$, $\underline{P_j}$, $\underline{c_t}$ to symbole,
- natomiast f_i, P_J, c_t to funkcja, relacja, stała.

Definicja 1.2: język

Język
$$L = \{\underline{f_1}, ..., \underline{f_k}; \underline{P_1}, ..., \underline{P_n}; \underline{c_1}, ..., \underline{c_l}\}$$
składa się z symboli: funkcyjnych, relacyjnych, stałych wraz z przypisanymi tym symbolom arnościami, tzn. f_j to symbol funkcji n_i-argumentowej etc.

Język jak wyżej jest nazywany językiem struktury $\mathfrak{M}$, typem podobieństwa $\mathfrak{M}$, **sygnaturą $\mathfrak{M}$**. Z kolei $\mathfrak{M}$ jest modelem dla L.

Konwencja

Szerzej będziemy dla $\mathfrak{M}$ - modelu dla L - pisać
$$(\mathfrak{M}; \underline{f_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{f_k}^{\mathfrak{M}}; \underline{P_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{P_n}^{\mathfrak{M}}; \underline{c_1}^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{c_l}^{\mathfrak{M}})$$
gdzie $\underline{f_i}^{\mathfrak{M}}$ oznacza interpretację symbolu $\underline{f_1}^{\mathfrak{M}}$ w kontekście modelu $\mathfrak{M}$.

Uwaga 1.3

Dla dowolnego języka L istnieje wiele struktur $\mathfrak{M}$.

Przykład

Język grup

Mając dany język L mówimy/piszemy w nim przy pomocy

- symbolów języka,
- symboli logicznych $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (!!! $\implies$ oraz $\iff$ będą dla nas elementami meta-języka !!!), $\forall$, $\exists$, $=$,

- zmiennych, np. x_i dla $i \in \mathbb{N}$, y, z,
- oraz symboli pomocniczych takich jak nawiasy, przecinki etc.

Uwaga 1.4

Spójniki można ograniczyć do $\wedge$, $\neg$ i kwantyfikatora $\exists$. Całą resztę spójników można zdefiniować jako macra przy pomocy tych trzech, np.

$$p \vee q \quad := \quad \neg(\neg p \wedge \neq q)$$

Wyrażenia języka L:

a) **wyrażenia nazwowe** (termy) należą do $\mathcal{T}_L$ (Term_L) i są definiowane rekurencyjnie:

- zmienna, symbol stałej należą do $\mathcal{T}_L$ i nazywają się *termami atomowymi*
- jeśli $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathcal{T}_L$, a $\underline{f}$ jest symbolem n-argumentowej funkcji z L, to $\underline{f}(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{T}_L$ i nazywa się *termem złożonym*.

b) **formuły** oznaczamy $\mathcal{F}_L$ (Form_L) i definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób

- dla wszystkich termów $\tau_1, ..., \tau_n$ zachodzi $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_L$ oraz dla n-argumentowego symbolu relacji $\underline{P}_j$: $\underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{F}_L$ - to są *formuły atomowe*,
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_L$

  $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\exists\ r\ \varphi), (\forall\ r\varphi) \in \mathcal{F}_L$ (r występujące w wyrażeniach nazywamy zmiennymi)

  Formuły z tego punktu nazywamy *formuły złożone*.

Hierarchia symboli logicznych umożliwia pomijanie nawiasów:

1. symbole matematyczne
2. kwantyfikatory
3. negacja $\neg$
4. $\wedge$, $\vee$
5. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

2. Zdania w języku

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$ będzie formułą w której występuje, co najmniej raz, zmienna v. Jeśli pewne wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora $Q_v \in \{\forall, \exists\}$, to spośród wszystkich wystąpień Q_v w φ w których zasięgu jest v wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy, że to **Q_v wiąże dane wystąpienie v** w φ. Na przykład

$$\forall\, x\, \exists\, y\, (x \in y \ \wedge\ \forall\, x\, (x \in y \to x = y))$$

wiąże

Jeśli nie ma kwantyfikatora Q_v jak wyżej, to wystąpienie v w φ jest **wolne**. Popatrzmy na przykład na formułę

$$\exists y\ x \in y\ \wedge\ \forall\, x\, (x \in y \to x = y).$$

Kwantyfikator z czerwonym y wiąże czerwony y, a niebieskie y pozostają wolne. Dodając nawias pierwszy kwantyfikator wiąże już wszystkie występienia y:

$$\exists y\ (x \in y\ \wedge\ \forall\, x\, (x \in y \to x = y)).$$

Konwencja

Zapis $\varphi(v_1, ..., v_n)$ oznacza, że wszystkie wolne zmienne w φ są wśród v_1, ..., v_n (ale niekoniecznie wszystkie v_i są zmiennymi wolnymi).

Definicja 1.5: zdanie

Formalne zdanie w języku L to formuła niezawierająca zmiennych wolnych.

Tarski podał na początku XX wieku definicję prawdy. Nieco później udowodnił twierdzenie, że nie da się prawdy zdefiniować.

Powstaje pytanie co to znaczy, że formuła z L jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$ dla L?

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem dla $L = \{\underline{f}_i, ..., \underline{P}_j, ..., \underline{c}_t, ...\}$ oraz $\{\underline{a}\ :\ a \in \mathfrak{M}\}$ niech będzie zbiorem nowych symboli stałych. Rozważmy nowy, większy język

$$L(\mathfrak{M}) = L \cup \{\underline{a}\ :\ a \in |\mathfrak{M}|\},$$

którego modelem nadal jest $\mathfrak{M}$ ($\underline{a}^{\mathfrak{M}} := a$).

Termy stałe $\sigma^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ z $L(\mathfrak{M})$ interpretujemy w $\mathfrak{M}$ w następujący sposób:

- jeśli $\underline{\tau}$ jest symbolem stałym $\underline{c}_i$ w L, to $\tau^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ jest interpretacją $\underline{c}_i^{\mathfrak{M}}$
- jeśli $\tau = \underline{f}_i(\underline{\tau}_1, ..., \underline{\tau}_n)$ jest termem złożonym, to $\sigma^{\mathfrak{M}} = \underline{f}_i^{\mathfrak{M}}(\underline{\tau}_1^{\mathfrak{M}}, ..., \underline{\tau}_n^{\mathfrak{M}})$.

Konwencja

$\mathfrak{M} \models \varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe/spełniane w $\mathfrak{M}$.

a) zdania atomowe:

  - $\mathfrak{M} \models \tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1^{\mathfrak{M}} = \tau_2^{\mathfrak{M}}$

- $\mathfrak{M} \models \underline{P}_j(\tau_1, ..., \tau_n) \iff (\tau_1^{\mathfrak{M}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{M}}) \in \underline{P}_j^{\mathfrak{M}}$

b) zdania złożone:

- $\mathfrak{M} \models \varphi \ \wedge \ \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi$ oraz $\mathfrak{M} \models \psi$
- $\mathfrak{M} \models \neg\varphi \iff$ nieprawda, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ (oznaczamy $\mathfrak{M} \not\models \varphi$)
- $\mathfrak{M} \models \exists\ v\ \varphi$ (jest tym samym co $\exists\ v\ \varphi(v)$, bo zakładamy, że nie ma innych zmiennych wolnych w φ, bo to jest zdanie) $\iff \mathfrak{M} \models \underbrace{\varphi(v/\underline{a})}_{=\varphi(\underline{a})}$ dla pewnego $a \in |\mathfrak{M}|$, gdzie $\varphi(\underline{a})$ jest formułą powstającą z φ przez zastąpnienie każdego wolnego wystąpienia v w φ przez $\underline{a}$.

To daje nam, że $\mathfrak{M} \models \varphi$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Kwantyfikatujemy po zmiennych, nie po podzbiorach uniwersum, bo to jest logika I rzędu. Zbiory tworzymy w umyśle, postrzegamy indywidua. Teorie wyższych rzędów nie są absolutne.

Atomizm logiczny - każde zdanie można zredukować do zdań atomowych, których już dalej się rozbić nie da. Nie obchodzi nas tutaj nadmiernie spełnianie zdań.

Konwencja

φ jest fałszywe, gdy $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Można tutaj od razu udowodnić, że zachodzi prawo wyłączonego środka.

Spełnianie dla formuł $\varphi(v_1, ..., v_n)$ języka L:

- $(a_1, ..., a_n) \subseteq |\mathfrak{M}|$ spełnia φ jak wyżej w $\mathfrak{M}$, jeśli $\mathfrak{M} \models \varphi(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$
- uniwersalne domknięcie $\varphi(v_1, ..., v_n)$ to formuła

$$\overline{\varphi} = \forall\ v_1, ..., \forall\ v_n\ \varphi(v_1, ..., v_n)$$

  z dokładnością do równoważności formuł jest jednoznacznie zdefiniowane $\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{M} \models \overline{\varphi}$

Powyższe zagadnienia mówią, że domyślny kwantyfikator to kwantyfikator $\forall$. To ma spełnienie w naturalnej matematyce, np. przemienność dodawania $(\mathbb{R}, +) \models\ x + y = y + x$ gdzie pomijamy $\forall\ x \forall\ y$.

3. Tautologie

Definicja 1.6: tautologia

Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$. Wtedy φ jest **tautologią** klasycznego rachunku logicznego, gdy jest zawsze prawdziwe. Zapisujemy to $\models \varphi$, co oznacza $\forall\, \mathfrak{M}$ modelu L $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Jak rozpoznać, czy $\models \varphi$? Ogólnie jest to pytanie nierozstrzygalne (twierdzenie Gödla).

Niektóre tautologie łatwo rozpoznać.

Przykłady

1. $x = x$
2. $=$ jest relacją równoważności

a) formuły zdaniowe (schematy)

Niech $Z = \{p_0, p_1, ..., p_n, r, q, ...\}$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. Zbiór formuł zdaniowych $S = S_Z$ nad Z definiujemy w następujący sposób:

- $v \in Z \implies v \in S$
- $\alpha, \beta \in S \implies \neg\alpha, \alpha \wedge \beta \in S$
- skrótowo: $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow \in S$

Wartościowanie logiczne formuł zdaniowych to dowolna funkcja $v : S \to \{0, 1\}$ taka, że dla każdych $\alpha, \beta \in S$

- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$

Powiemy, że $\alpha \in S$ jest **tautologią** ($\models \alpha$) gdy dla każdego wartościowania v zachodzi $v(\alpha) = 1$.

Na przykład: $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla każdego $\alpha \in S$

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$ dla $\alpha \in S$ (metoda 0-1): wartość $v(\alpha)$ zależy tylko od $v(x)$ dla zmiennych zdaniowych x w α.

Definicja 1.7

Załóżmy, że $\alpha \in S$ jest zbudowany ze zmiennych $p_1, ..., p_n \in Z$ oraz $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_L$ i $\varphi \in \mathcal{F}_L$ powstaje z α przez zastąpienie p_i przez φ_i wszędzie w α (zapisujemy

$\varphi = \alpha(p_1/\varphi_1, ..., p_n/\varphi_n)$. Mówimy, że φ jest **jest przykładem formuły α**.

Twierdzenie 1.8

Jeśli $\models \alpha$ i φ jest przykładem α to $\models \varphi$.

Dowód
Ćwiczenie

Definicja 1.9

Reguła wnioskowania składa się z:

- przesłanek $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_L$
- tezy φ.

Zapisujemy

$$\frac{\varphi_1, ..., \varphi_n}{\varphi}$$

Reguła wnioskowania jest poprawna, kiedy nie prowadzi nas na manowce.

1. $\frac{\varphi_1,...,\varphi_n}{\varphi}$ jest **poprawna**, jeśli dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ dla L $\mathfrak{M} \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \implies \mathfrak{M} \models \varphi$
2. $\frac{\alpha_1,...,\alpha_n}{\alpha}$ jest poprawna, jeśli dla każdego wartościowania v

Przykłady

1. Modus Ponens (reguła odrywania, cut rule)

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

2. reguła generalizacji ($\forall$ -rule)

$$\frac{\varphi}{\forall\, v\, \varphi(v)}$$

KRL - φ etc, KRZ - α, β etc

Aksjomatyczne ujęcie KRL:

(A0) przykład dowolnej tautologii KRZ

(A1) $\forall\, v\, (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall\, v\, \psi)$, gdy v nie jest wolna w φ

(A2) $\forall\, v\, \varphi \to \varphi(v/t)$ (to jest poprawny zapis, ale dla pewności: $(\forall\, v\, \varphi) \to \varphi(v/t)$) t to jest term podstawiany za każde wolne wystąpienie v w φ pod warunkiem, że żadne z takich wystąpień nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną występującą w termie t.

Zastrzeżenie jest istotne: $\varphi : \exists\, y\, x \neq y$, $t = y$, wtedy $\varphi(x/t) = \exists\, y\, y \neq y$ i mamy

$$\not\models \forall\, x\varphi \to \varphi(x/t) = \forall\, \exists\, y\, x \neq y \to \exists\, y\, y \neq y$$

Aksjomaty równości (v_i - wolne zmienne):

- $v_1 = v_1$
- $v_1 = v_2 \to t(...v_1...) = t(...v_1/v_2...)$
- $v_1 = v_2 \to (\varphi(...v_1...) \to \varphi(...v_2...))$ gdzie v_1 to wolne wystąpienie w φ niebędące w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2.

Definicja 1.10

Dowodliwość w KRL: dla $X \subseteq \mathcal{F}_L$ oraz $\varphi \in \mathcal{F}_L$
$X \vdash \varphi \iff$ istnieje ciąg formuł (dowód formalny) $\alpha_1, .., \alpha_n = \varphi$ takie, że dla każdego $i \leq n$

1. $\alpha_1 \in X \;\vee\; \alpha_i$ jest aksjomatem KRL
2. α_i wynika z $\{\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}\}$ na mocy Morus Ponens lub $\forall$-rule, tzn. $\exists\, j, t < i\; \alpha_t = \alpha_j \to \alpha_i$

$$\frac{\alpha_j, \alpha_j \to \alpha_i}{\alpha_i}$$

lub $\exists\, j < i\; \alpha_i = \forall\, v\, \alpha_j$

$$\frac{\alpha_j}{\forall\, v\alpha_j}$$

Konwencja

$\vdash \varphi$ gdy $\emptyset \vdash \varphi$
Takie φ nazywamy **tezą** KRL

Uwaga 1.11

$X \vdash \varphi \iff \exists\, X_0 \subseteq X$ skończony $X_0 \vdash \varphi$

Przykład

Pokażemy, że $\vdash \forall\, x\, \varphi \to \exists\, x\, \varphi$, to znaczy

$$\vdash \forall\, x\, \varphi \to \neg \forall\, x\, \neg\varphi$$

1. $\alpha_1 : \forall\, x\, \varphi \to \varphi(x/y)$ (A2)
2. $\alpha_2 : \forall\, x\, \neg\varphi \to \neg\varphi(x/y)$ (A2)
3. $\alpha_3 : \alpha_2 \to (\varphi(x/y) \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi)$ (A0 $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$)
4. $\alpha_4 : \varphi(x/y) \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi$ ($\alpha_2, 3$ oraz Modus Ponens)
5. $\alpha_5 : \alpha_1 \to (\alpha_4 \to \beta)$, gdzie $\beta = \forall\, x\, \varphi \to \neg\forall\, x\, \neg\varphi$ (A0, przechodność)
6. $\alpha_6 : \beta$ (Modus Ponens)

Przykład

$\varphi : x = x$

$$\vdash \forall\, x\, x = x \to \exists\, x\, x = x$$

jest fałszywe w dziedzinie pustej, czyli modelu

$$(\emptyset; f_1, ..., f_n; P_1, ..., P_j;)$$

gdzie nie ma stałych. Czyli coś z aksjomatów musi zawodzić w dziedzinie pustej - pytanie co?

Od tej pory modele są niepuste

Uwaga 1.12

Poprawność (soundness) KRL

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

Dowód

Ćwiczenie

Twierdzenie 1.13: Gödela o pełności KRL

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

Definicja 1.14

Dla $X \subseteq \mathcal{F}_L$ zbiór konsekwencji X to $\mathrm{Cn}(X) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L \ : \ X \vdash \varphi\}$

- X jest teorią, gdy $X = \mathrm{Cn}(X)$
- A jest zbiorem aksjomatów teorii X, gdy $X = \mathrm{Cn}(A)$
- zbiory X, Y są równoważne, gdy $\mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(Y)$ co równoważnie można powiedzieć: $X \vdash Y$ i $Y \vdash X$

Fakt 1.15

φ oraz $\overline{\varphi}$ są równoważne

Dowód

$\varphi \vdash \overline{\varphi}$ to $\forall$-reguła zastosowana tyle razy ile użyliśmy kwantyfikatorów w φ

$\overline{\varphi} \vdash \varphi$ to z twierdzenia o dedukcji (zadanie) $\overline{\varphi} \vdash \varphi \iff \vdash \overline{\varphi} \to \varphi$ (drugie to wynik z A2)

Wniosek:

X $\subseteq$F$_L$
X oraz $\{\overline{\varphi} \ : \ \varphi \in X\}$ są równoważne

Definicja 1.16

X jest sprzeczny, jeżeli $X \vdash \varphi$ oraz $X \vdash \neg\varphi$ dla pewnego zdania $\varphi \in \mathcal{F}_L$

W przeciwnym razie X jest niesprzeczny.

Definicja 1.17

1. $\mathfrak{M} \models X \iff \forall\, \varphi \in X\ \mathfrak{M} \models \varphi$ ($\mathfrak{M}$jest modelem X)
2. X jest zupełny $\iff$ $\forall$ zdania φ ($X \vdash \varphi$ lub $x \vdash \neg\varphi$)
3. X jest rozstrzygalny $\iff$ istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$

Przykłady

1. teoria $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}) := \{\varphi \;:\; M \models \varphi\}$ jest niesprzeczna i zupełna
2. $\emptyset$ jest niesprzeczny

Twierdzenie 1.18: Gödela o istnieniu modelu

Jeśli S jest niesprzecznym zbiorem zdań, to S ma model.

Dowód
(by Leon Henkin)

Dla przypadków, gdy L i S są przeliczalne, ogólny dowód jest bez większej idei, ale używa "ble ble kombinatoryczne z liczb kardynalnych".

$L' = L \cup \{c_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, gdzie c_n to nowe w stosunku do L symbole stałe

$\{\varphi_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ to numeracja formuł $\mathcal{F}_L(x)$ z co najwyżej jedną wolną zmienną x

Niech $f : \omega \to \omega$ (czyli $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$) rosnąca taka, że $c_{f(n)}$ nie występuje w formułach $\varphi_0(x)$, ..., $\varphi_n(x)$

$S_n = S \cup \{\exists\, x\, \varphi_i(x) \to \varphi_i(x/c_{f(i)} \;:\; i < n\}$ (aksjomat postaci jaka w $\{\}$ nazywa się aksjomatem Henkina

$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq$ ... to ciąg rosnący

$S_\omega = \bigcup S_n$

FAKT: zbiór S_ω jest niesprzeczny

Dowód nie wprost: gdyby był sprzeczny, to sprzeczność wynikałaby ze skończonego podzbioru, czyli pewne S_n jest sprzeczne, czyli możemy wybrać n najmniejsze takie, że $S_{n+1} = S_n \cup \{\exists\, x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(x/c_{f(n)})\}$ jest sprzeczne

ponieważ n jest najmniejsze, to S_n nie jest sprzeczne

H niech będzie zdaniem w $\{\}$

$$S_n \cup \{H\} \vdash \alpha \;\wedge\; \neg\alpha$$

dla pewnego α z tego wiemy, że

$$S_n \vdash (\exists\, x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)}) \to \alpha \;\wedge\; \neg\alpha$$

A0 daje nam, że

$$S_n \vdash \neg(\exists\, x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)}))$$

znowu korzystając z A0 dostajemy

$$S_n \vdash \exists\, x\, \varphi_n(x) \;\wedge\; \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

$$S_n \vdash \exists\, x\, \varphi_n(x) \text{ i } \S_n \vdash \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

w dowodzie po prawej od i $c_{f(n)}$ zastępujemy nową zmienną y

po tej zamianie powstaje dowód $S_n \vdash \neg\varphi_n(y)$, korzystamy z $\forall$ żeby dostać $S_n \vdash \forall\, y \neq \varphi_n(y)$ z A2 dla $t = x$ dostajemy $S_n \vdash \neg\varphi_n(x)$, z $\forall$-reguły mamy $S_n \vdash \forall\, x\, \neg\varphi_n(x)$, ale nadal prawdą jest, że $\S_n \vdash \exists\, x\, \varphi_n(x)$

Mamy skończony dowód, że S_ω jest niesprzeczny

Twierdzenie Lidenbauma(???) jeśli mamy niesprzeczny zbiór formuł/zdań to możemy go rozszerzyć do maksymalnego niesprzecznego zbioru formuł/zdań, który jest zupełny i niesprzeczny zbiór formuł/zdań

Korzystamy, żeby dostać $S' \supseteq S_\omega$, który jest zupełny i niesprzecznym zbiorem zdań w L'

S' opisuje strukturę modelu na $\{c_n \;:\; n < \omega\}$

mamy relację równoważności na zbiorze $C = \{c_n \;:\; n < \omega\}$: $c_n \sim c_m \iff S' \vdash c_n = c_m$

- symetria: aksjomat równości

Niech $\mathfrak{M} = \{c_n/\sim :\; n \in \omega\} = C/\sim$ L' - struktura na M

1. $P_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1}/\sim, ..., c_{i_n}/\sim) \iff S' \vdash P_i(c_{i_1}, ..., c_{i_n})$
2. $f_i^{\mathfrak{M}}(c_{i_1}/\sim, ..., c_{i_k}/\sim) = c_{i_n}/\sim \iff S' \vdash f_i(c_{i_1}, ..., c_{i_k}) = c_{i_n}$

TUTAJ MAM DOŚĆ NEWELA