Łukasz Magnuszewski Weronika Jakimowicz

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P.0.12.**
Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 24 października 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp

W matematyce bardzo często pojawiają się wartości niewymierne, takie jak $\ln\frac{1}{2}$, których nie możemy wyrazić w sposób przystępny dla człowieka. Z tego powodu, powstało wiele metod przybliżania funkcji w określonych punktach. Jedną z nich jest użycie szeregu Taylora, opisanego przez Brooka Taylora w 1715 roku oraz wspomniana przez Jamesa Gregory'a w 1671 r.

W swojej istocie twierdzenie Taylora mówi, że jeśli dana jest funkcja f klasy C^n, czyli różniczkowalna n razy w każdym punkcie jej dziedziny, to możemy ją przybliżyć w otoczeniu dowolnego punktu a za pomocą szeregu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) + R_n(x,a),$$

gdzie $R_n(x,a)$ spełnia

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x,a)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

Jak nietrudno zauważyć, wartość $R_n(x,a)$ przy x bardzo blisko a jest zaniedbywalnie mała, więc w trakcie obliczeń możemy ją pominąć.

Celem niniejszego sprawozdania jest sprawdzenie dokładności przybliżania funkcji za pomocą szeregów Taylora. W $$ omówione zostanie przybliżanie ustalonych wartości funkcji $\ln x$ w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Wykorzystany zostanie szereg Maclaurina funkcji $\ln(x+1)$ w okolicach $x = 0$ dla stopni wielomianu $n = 1, 2, ..., 16$. Wyniki porównane zostaną z wynikiem bibliotecznej funkcji `log(x)` w języku Julia. Otrzymane dane zostaną zaprezentowane w formie tabeli oraz grafów otrzymanych za pomocą załączonego w pliku `program.jl`.

2. Przybliżanie wartości $\ln\frac{1}{2}$

2.1. Metoda

W celu obliczenia wartości $\ln\frac{1}{2}$ użyte zostanie przybliżanie funkcji

$$f(x) = \ln(1+x)$$

w pobliżu $a = 0$ za pomocą szerega Maclaurina.

Wzór na pochodną funkcji $\ln(x+1)$ jest powszechnie znany:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{x+1},$$

natomiast wzór na pochodną k-tego stopnia, można wyliczyć w prosty sposób:

$$\frac{d^k}{dx^k}\ln(x+1) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}. \tag{1}$$

Wzór na szereg Taylora $\ln(1+x)$ w pobliżu $a = 0$, to:

$$f(0) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-0)^n + R(x,0) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i} + R(x,0).$$