

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.2.3.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 8 stycznia 2023, 21:37

Spis treści

1. Wstęp	1
1.1. Metodologia	1
2. Rozwiązywanie równań liniowych	2
2.1. Eliminacja Gaussa	2
2.2. Rozkład QR	3
3. Algorytm eliminacji Gaussa	4
3.1. Wyniki	4
3.2. Złożoność obliczeniowa	4
4. Transformacja Householdera	4
4.1. Podstawy teoretyczne	4
4.2. Wyniki	6
4.3. Złożoność obliczeniowa	7

1. Wstęp

Fajne podpierdalanko:

algorytmy

jak użyć do rozwiązywania równań

1.1. Metodologia

W poniższej pracy zostaną porównane dwa sposoby doprowadzania macierzy kwadratowej A do postaci górnotrójkątnej: metoda eliminacji Gaussa oraz rozkład QR z transformacją Householdera. Oba te algorytmy zostaną wykorzystane do rozwiązywania układu równań

$$Ax = b$$

dla odwracalnej macierzy A oraz dowolnego wektora b . Błąd dla każdej z metod będzie obliczany jako

$$e = -\log(\|Ax - b\|).$$

Dla metody Householdera, która produkuje nam macierz ortogonalną Q oraz górnotrójkątną R , porównane również zostaną macierze

$$A - QR$$

$$Q^T A - R$$

$$Q^T Q - I$$

poprzez wyznaczenie normy wektora Bx , gdzie B to jedna z powyższych macierzy, z x jest wektorem składającym się wyłącznie z 1. Macierze będące wynikami powyższych przekształceń powinny być macierzami zerowymi, co wynika z przekształcenia $A = QR$ oraz ortogonalności macierzy Q (wtedy $Q^{-1} = Q^T$).

Wszystkie obliczenia zostaną wykonane na BigFloatach w trzech precyzjach: 68, 419 oraz 2136

2. Rozwiązywanie równań liniowych

Mając dany układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

możemy go opisać w postaci macierzy. Macierz główna tego układu równań to macierz zawierająca wszystkie współczynniki przy zmiennych $[X]$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jeśli do macierzy głównej dołączymy wektor zawierający wszystkie wyrazy wolne $[B]$, to dostaniemy macierz rozszerzoną tego układu:

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

Zapisanie układu równań w postaci macierzowej ma wiele zalet. Jesteśmy w stanie w szybki sposób sprawdzić, czy równanie ma jednoznaczne rozwiązanie przez sprawdzenie czy wyznacznik macierzy głównej nie jest zerowy, gdyż jeśli $AX = B$, to $A^{-1}AX = X = A^{-1}B$. Musi więc istnieć macierz odwrotna. Sprawia to również, że zapis układu jest bardziej czytelny oraz pozwala ułatwić operowanie na takim układzie równań za pomocą komputera.

2.1. Eliminacja Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa jest algorytmem stosowanym do rozwiązywania układu równań. Polega ona na doprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej, tzn. zawierającej niezerowe wartości tylko na głównej przekątnej. W algorytmie dozwolone są tylko operacje na wierszach i kolumnach, czyli dodawanie lub odejmowanie od wiersza (kolumny) wielokrotności innego wiersza (kolumny) oraz zamienianie kolejności dwóch wierszy (kolumn).

Alternatywnie, na kursie algebry liniowej poznaliśmy metodę na odwracanie macierzy za pomocą eliminacji Gaussa. Wtedy z lewej strony wpisujemy oryginalną macierz, z prawej macierz identyczności i dokonując operacji wierszowych na całości staramy się doprowadzić lewą macierz do macierzy identyczności. Wtedy to co, powstanie z prawej strony będzie szukaną macierzą odwrotną. W poniższej pracy nie skorzystamy z tej wariacji na temat metody eliminacji Gaussa.

2.2. Rozkład QR

Każdą macierz A $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych taką, że $\text{rank}(A) = n$, można zapisać jako $A = QR$, gdzie R jest macierzą górnątrójkątną, a Q ma kolumny ortogonalne. Ponieważ my będziemy rozważać macierze A będące reprezentacją jednoznacznych układów równań, to interesują nas tylko $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Zauważmy, że jeśli A ma niezerowy wyznacznik, to A nie może mieć liniowo zależnych kolumn. W takim razie, wektory a_1, \dots, a_n odpowiadające kolumnom A są bazą przestrzeni \mathbb{R}^n jako maksymalny możliwy układ wektorów liniowo niezależnych. Możemy na ich podstawie stworzyć bazę ortonormalną u_1, \dots, u_n przez proces Grama-Schmidta. Wtedy dla $k = 1, \dots, n$

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Co więcej, dla dowolnego a_k z oryginalnej bazy możemy go zapisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów z bazy ortonormalnej:

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i \left[a_k - \sum_{i=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \right]$$

a ponieważ a_1, \dots, a_n były wektorami lnz, to dla $i > k$ $c_i = 0$. Niech r_k to będzie wektor zawierający współczynniki c_i dla wektora a_k :

$$r_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli mamy, że

$$a_k = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} r_k$$

i dalej

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}.$$

Zauważamy, że $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}$ to macierz górnątrójkątna, a Q to macierz ortogonalna.

Niech teraz A to macierz główna rozważanego układu równań, Q, R to macierze z jej rozkładu, X niech będzie wektorem wartości szukanych, a B niech będzie wektorem wyrazów wolnych. Wtedy

$$\begin{aligned} AX &= B \\ (QR)X &= B \end{aligned}$$

i ponieważ dla macierzy ortonormalnych mamy $Q^{-1} = Q^T$, to w prosty sposób możemy zamienić powyższy układ na

$$RX = Q^T B.$$

Precyzja	20×20	100×100	400×400
68	41.78	35.1	31.15
419	286.01	280.42	276.44
2005	1474.83	1471.28	1466.6

Tabela 1. Liczba cyfr znaczących normy wektora $(Ax' - b)$, gdzie x' to wektor uzyskany z metody eliminacji Gaussa.

3. Algorytm eliminacji Gaussa

3.1. Wyniki

W Tabeli 1 umieszczone zostały ilości cyfr znaczących wartości $\|x' - x\|$. Bez względu na precyzję obliczeń większe macierze dawały nieco mniej precyzyjne wyniki. Co ciekawe, różnica ta, w okolicach 4 cyfr znaczących, ulegała jedynie niezauważalnym zmianom między różnymi precyzjami obliczeń.

3.2. Złożoność obliczeniowa

W zaimplementowanym przez nas algorytmie przy każdym kroku dokonujemy jednego dzielenia skalaru oraz jednego mnożenia przez skalar i odejmowania wektora o długości n , gdzie n to szerokość naszej macierzy. Czyli za każdym razem wykonujemy

$$a = 1 + 2n$$


operacji. Co więcej, w algorytmie zewnętrzna pętla wykonuje się $(n - 1)$ razy, natomiast wewnętrzna - $n + 1 - (i + 1)$ razy, gdzie i to jest aktualna pozycja zewnętrznej pętli. Czyli wykonujemy

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n - i)a = \frac{a(n - 2)^2}{2} = \frac{(1 + 2n)(n - 2)^2}{2} = O(n^3)$$

operacji w trakcie całego algorytmu.

4. Transformacja Householdera

4.1. Podstawy teoretyczne

Transformacja Householdera [ : Householder transformation] to liniowe przekształcenie poprzez odbicie punktu wokół płaszczyzny, lub hiperpłaszczyzny, która zawiera początek układu współrzędnych. Płaszczyzna wokół której obracamy jest zdefiniowana przez jednostkowy wektor u do niej normalny, a więc odbicie względem niej to x pomniejszony o dwa rzuty na u :

$$x' = x - 2u\langle x, u \rangle = x - 2u(u^*x)$$

co dla przestrzeni rzeczywistej wynosi

$$x' = x - 2u(u^T x).$$

Macierz tego odbicia to

$$P = I - 2uu^*$$

i jest ona Hermitowska:

$$P^* = (I - 2uu^*)^* = I^* - (2uu^*)^* = I - 2(uu^*)^* = I - 2(u^*)^*u^* = I - 2uu^* = P$$

oraz unitarna (czyli $P^*P = PP^* = I$):

$$\begin{aligned} P^*P &= P^2 = (I - 2uu^*)^2 = I - 4uu^* + 4(uu^*)^2 = \\ &= I - 4uu^* + 4u(u^*u)u^* = I - 4uu^* + 4u\langle u, u \rangle u^* = \\ &= I - 4uu^* + 4uu^* = I \end{aligned}$$

a więc w przypadku rzeczywistym dostajemy macierz symetryczną i ortogonalną, czyli taką jakiej szukamy.

Niech teraz A będzie macierzą $m \times m$, której formę QR chcemy znaleźć, a a_1, \dots, a_m będą wektorami odpowiadającymi jej kolumnom. Dalej, niech e_1, \dots, e_m będą wektorami ze standardowej bazy przestrzeni \mathbb{R}^m i ustalmy

$$v = a_1 - \|a_1\|e_1$$

$$u = \frac{v}{\|v\|}.$$

Wektor u jest jednostkowym wektorem pewnej płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych, możemy więc dla niego znaleźć macierz Householdera

$$P'_1 = I - 2uu^*.$$

Zauważmy, że

$$P'_1 a_1 = \begin{pmatrix} \|a_1\| \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

czyli zaczynamy tworzyć macierz górnotrójkątną. Proces transformacji Householdera możemy powtórzyć dla macierzy $P_1 A$ bez pierwszej kolumny i wiersza, co da nam macierz P'_2 która dla $P'_2 a_2$ daje wektor niezerowy tylko na pierwszej współrzędnej. Jednak P'_2 jest $(m-1) \times (m-1)$, więc musimy ją rozciągnąć, chociażby dodając identyczność w lewym górnym rogu. Rozciągając tę procedurę na przypadek ogólny, mamy

$$P_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & * \\ 0 & P'_k \end{pmatrix}$$

gdzie I_{k-1} to identyczność ale na \mathbb{R}^{k-1} .

Szukana przez nas macierz górnotrójkątna ma zatem postać

$$R = P_m \dots P_1 A$$

natomiast szukana macierz ortogonalna to

$$Q = (P_m \dots P_1)^{-1} = P_1^{-1} \dots P_m^{-1} = P_1 \dots P_m$$

z faktu, że każda z macierzy P_k jest unitarna i hermitowska.

Dla polepszenia wyników algorytmu definicja wektora v musi brać pod uwagę znak lewego górnego rogu macierzy (minora) którą będziemy poddawać transformacji Householdera. Chcemy zawsze mnożyć normę a_1 przez znak przeciwny do wspomnianego elementu macierzy.

4.2. Wyniki

W Tabeli 2 umieszczona została ilość cyfr znaczących dla wektora $\|x' - x\|$ w zależności od wielkości macierzy A oraz precyzji arytmetyki. Różnica między precyzją obliczeń dla różnych wielkości macierzy jest w okolicach 3 cyfr znaczących i zachowuje się między różnymi precyzjami, co jest wynikiem napawającym nadzieją. Z Tabeli 4 widzimy też, że otrzymana przez nas macierz Q jest bardzo bliska bycia macierzą ortogonalną, przynajmniej pod względem normy, to znaczy $\|Q\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Qx\|}{\|x\|}$ jest niewiele większe od zera. Wyniki pokazane w Tabli 3 oraz Tabeli 5 pokazują, że macierz QR jest bardzo blisko macierzy A .

Co ciekawe, liczba cyfr znaczących różnicy między otrzymanym przez nas rozwiązaniem równania a norma macierzy wyznaczonych z $A = QR$ jest na tym samym poziomie, co sugeruje że oba wyniki są skutkiem błędu w trakcie operacji mnożenia i dodawanie macierzy.

Precyzja	20×20	100×100	400×400
68	42.66	39.46	36.86
419	286.19	282.58	280.144
2005	1476.08	1473.03	1470.28

Tablusia 2. Liczba cyfr znaczących normy wektora $(Ax' - b)$, gdzie x' to wektor uzyskany z metody transformacji Householdera.

Precyzja	20×20	100×100	400×400
68	41.96	40.68	38.67
419	286.50	284.19	282.22
2005	1476.00	1471.28	1470.08

Tabela 3. Rząd wielkości normy macierzy $A - QR$ (obliczany z $-\log \|A - QR\|$).

Precyzja	20×20	100×100	400×400
68	43.48	42.18	40.85
419	286.91	285.47	284.14
2005	1477.15	1475.61	1474.25

Tabela 4. Rząd wielkości normy macierzy $Q^T Q - I$ (obliczany z $-\log \|Q^T Q - I\|$).

Precyzja	20×20	100×100	400×400
68	43.20	40.97	38.91
419	286.59	284.3	282.25
2005	1476.83	1474.34	1472.37

Tabela 5. Rząd wielkości normy macierzy $Q^T A - R$ (obliczany z $-\log \|Q^T A - R\|$).

4.3. Złożoność obliczeniowa