Łukasz Magnuszewski Weronika Jakimowicz

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P.1.6.**
Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 20 listopada 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp

Indiana Bill
Metoda Chudowskiego - rekord cyfr pi z 2009, na podstawie wzoru Ramanujana

2. Pierwsze próby

2.1. Interpretacja geometryczna

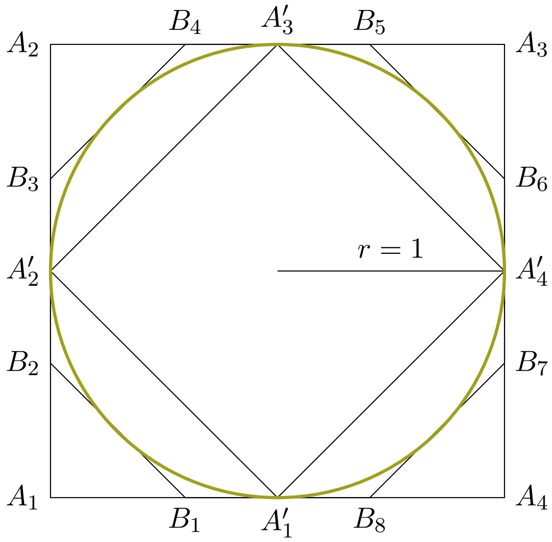
Bardzo często π jest definiowane jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W historii pojawiało się wiele prób wyznaczenia π korzystając z obwodu wielokątów foremnych wpisanych w oraz opisanych na okręgu jednostkowym. Wraz ze wzrostem liczby boków zwiększa się dokładność oszacowań obwodu okręgu, co daje coraz to bliższe prawdy granice na wartość ludolfiny.

Takie podejście stosował już w starożytności Archimedes. Wyprowadził on wzór rekursyjny na obwód $2n$-kąta foremnego wpisanego oraz opisanego na okręgu na podstawie obwodu n-kąta.

Wpiszmy n-kąt foremny w okrąg o promieniu 1. Teraz na tym samym okręgu opiszmy n-kąt tak, żeby wierzchołki wielokąta wpisanego były srodkami boków wielokąta opisywaneg. Dostajemy w ten sposob n-kąt foremny opisany na okręgu o promieniu 1. Nietrudno zauważyć, że teraz jeśli połączymy sąsiednie boki n-kąta opisanego odcinkami styczymi do okręgu o końcach w równej odległości od najbliższego wierzchołka, to dostaniemy $2n$-kąt foremny. Sytuacja dla $n = 4$ została przedstawiona na Rysunku 1.

Rozważmy teraz trójkąt $\Delta A'_1A_1A_2$. Zawuażmy, że odcinek $\overline{B_1B_2}$ dzieli go na dwa trójkąty podobne:

$$\Delta B_1A_1B_2 \sim \Delta A'_1A_1A'_2.$$



Rysunek 1. Wielokąty opisane i wpisane w okrąg o promieniu 1.

Dla przejżystości zapisów oznaczmy $|\overline{A_1A_2}| = A$, $|\overline{B_1B_2}| = B$ oraz $|\overline{A'_1A'_2}| = a$. Z proporcji w trójkątach podobnych mamy:

$$\frac{B}{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B} = \frac{a}{\frac{1}{2}A}$$
$$B = \frac{a}{A}(A - B)$$
$$B = a - \frac{a}{A}B$$
$$B = \frac{aA}{A + a}$$

Oznaczmy teraz obwód n-kąta wpisanego jako l_n, a n-kąta opisanego - L_n. Według Rysunku 1 są one równe:

$$l_n = na$$
$$L_n = nA$$
$$L_{2n} = 2nB = 2n\frac{aA}{A + a} = 2n^2\frac{aA}{An + an} = 2\frac{L_n l_n}{L_n + l_n}$$

Dalej, oznaczmy długość boku $2n$-kąta wpisanego jako b. Zauważmy, że wówczas:

$$B = 2\tan\frac{\pi}{2n}$$
$$a = 2\sin\frac{\pi}{n}$$
$$b = 2\sin\frac{\pi}{2n}$$

oraz:

$$l_{2n} = 2nb = 4n\sin\frac{\pi}{2n} = \sqrt{16n^2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{8n^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}} =$$
$$= \sqrt{8n^2\tan\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n}} = \sqrt{2nBna} = \sqrt{L_{2n}l_n}.$$

Zauważmy, że $\lim_{k\to\infty} L_k = 2\pi$ i $\lim_{k\to\infty} l_k = 2\pi$ oraz dla każdego k mamy

$$l_n \leqslant 2\pi \leqslant L_n,$$

Wykres 2. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędu względnego dla przybliżenia π za pomocą metody geometrycznej.

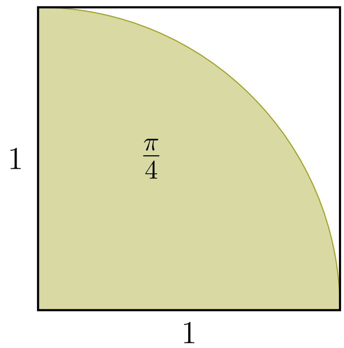
a więc możemy przybliżać π jako

$$\pi \approx \frac{L_n - l_n}{4},$$

czyli jako środek przedziału $[l_n, L_n]$.

2.2. Algorytm Monte Carlo

Tak jak w poprzedniej metodzie, możemy skorzystać z faktu, że dla koła jednostkowego π jest równe jego polu. Zauważmy, że jeżeli będziemy wybierać losowo punkty kwadratu o polu 1, to $\frac{\pi}{4}$ z nich powinno znaleźć się w ćwiartce koła o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu (Rysunek 3.).



Rysunek 3. Stosunek pola ćwiartki koła jednostkowego do kwadratu o boku 1

Korzystając z algorytmu Monte Carlo możemy wybierać losowo współrzędne $x, y \in [0,1]$ kolejnych punktów, a następnie sprawdzać ile z nich spełnia warunek

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Otrzymany stosunek będzie coraz bliższy $\frac{\pi}{4}$ wraz ze zwiększaniem ilości testowanych punktów.

Na Wykresie 4. Zaprezentowany jest logarytm dziesiętny z błędu względnego metody Monte Carlo. Szacowanie zbieżności tej metody jest trudne, ale możemy zauważyć, że jest ona gorsza niż zbieżność liniowa.

Wykres 4. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędu względnego uzyskanego dla metody przybliżenia π z pomocą algorytmu Monte Carlo.

2.3. Szereg Taylora

W matematyce bardzo często w celu przybliżania porządanych wartości używa się szeregów Taylora. Tak dla przykładu, korzystając z rozszerzenia funkcji $\arctan x$ w punkcie 0 możemy oszacować wartość $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^{(k)} 0}{k!}(1-0)^k = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

W obliczeniach praktycznych nie możliwe jest dodawanie kolejnych elementów sumy w nieskończoność. Konieczne jest więc zatrzymanie się na pewnym N, co daje pewien błąd, R_N:

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_N.$$

Oznaczmy tę sumę jako P_N. Ponieważ dla przybliżeń funkcji szeregiem Taylora coraz wyższego stopnia dostajemy coraz dokładniejszy wynik, to P_{N+1} powinno być dokładniejsze niż P_N. Zauważamy też, że

$$P_{N+1} - P_N = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$$

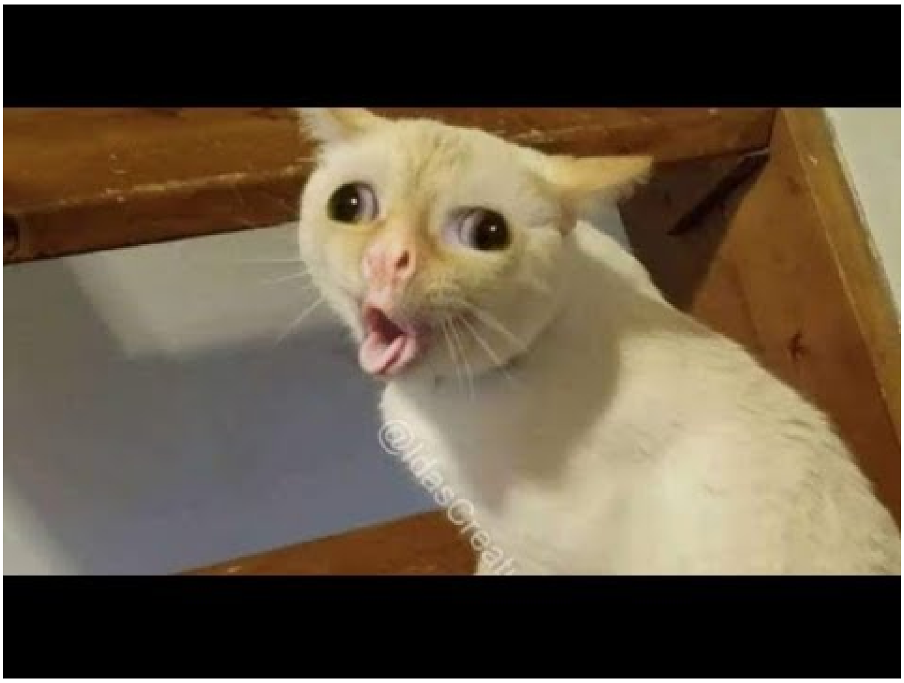
w takim razie możemy oszacować błąd dla szeregu Taylora N-tego stopnia za pomocą

$$R_N \approx \max \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3},$$

co daje zbieżność liniową.

Problem tego przybliżenia π został przeanalizowany już przez Madhawa z Sangamagramy w XIV wieku. Zaproponował on następującą korekcję wzoru dla skończonych sum:

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} \pm \frac{N^2+1}{4N^3+5N}. \tag{2}$$



Wykres 5. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędu względnego uzyskanego dla metody przybliżenia π za pomocą szeregu Taylora.

3. Wzór Viete'a

Viete wyprowadził swoją formułę na π obserwując stosunek pola 2^n-kata foremnego do pola 2^{n+1}-kata foremnego. Poprzez zwiększanie n w nieskończoność, jesteśmy w stanie dostać stosunek

2^2-kąta foremnego, czyli kwadratu, do pola koła w które został on wpisany. Pole koła o promieniu 1 wynosi

$$P_k = \pi$$

a pole kwadratu w nie wpisanego:

$$P_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

W takim razie stosunek pola kwadratu do pola koła wynosi:

$$\frac{P_2}{P_k} = \frac{2}{\pi} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{P_{2^k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{P_{2^3}} \frac{P_{2^3}}{2^k} = \lim_{k \to \infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{a_1}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{a_k},$$

gdzie a_k to pole 2^k-kąta foremnego, z $a_1 = 2$.

$$\pi = \lim_{k \to \infty} 2^k \sqrt{2 - a_k}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_k = \sqrt{2 + a_{k+1}}$$

4. Wzór Ramanujana

Tutaj trzeba ogarnąć co się odpierdala bo w sumie to nawet porządni matematycy nie są pewni, to co dopiero student debil.

5. Algorytm Gaussa-Legendre'a