Łukasz Magnuszewski Weronika Jakimowicz

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P.0.12.**
Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 12 października 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp

W matematyce bardzo często pojawiają się wartości niewymierne, takie jak $\ln 3$, których nie możemy wyrazić w sposób przystępny dla człowieka. Z tego powodu, powstało wiele metod przybliżania funkcji w określonych punktach. Jedną z nich jest użycie szeregu Taylora, opisanego przez Brooka Taylora w 1715 roku oraz wspomniana przez Jamesa Gregory'a w 1671 r.

W swojej istocie twierdzenie Taylora mówi, że jeśli dana jest funkcja f klasy C^n, czyli różniczkowalna n razy w każdym punkcie jej dziedziny, to możemy ją przybliżyć w otoczeniu dowolnego punktu a za pomocą szeregu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)) + R_n(x,a),$$

gdzie $R_n(x,a)$ spełnia

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x,a)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

Jak nietrudno zauważyć, wartość $R_n(x,a)$ przy x bardzo blisko a jest zaniedbywalnie mała, więc w trakcie obliczeń możemy ją pominąć.

Innym ciekawym zastosowaniem szeregów Taylora jest tworzenie grafów funkcji. Możemy zdefiniować na przykład $\tan x$ w pobliżu punktu 0 jako zwykły wielomian, co pozwala na obliczenie przybliżonych wartości funkcji i naniesienie ich na oś współrzędnych. W matematyce szereg Taylora, który aproksymuje funkcje w pobliżu punktu 0 nosi nazwę szeregu Maclaurina.

Celem niniejszego sprawozdania jest sprawdzenie dokładności przybliżania funkcji za pomocą szeregów Taylora. W $$2-3 omówiono dwa ważne zastosowania szeregów Taylora: przybliżanie wartości niewymiernych oraz rysowanie grafów funkcji. Dokładniej, w $$2. przedstawiono wyniki przybliżania wartości $\ln 3$ przy pomocy szeregów Maclaurina różnego stopnia. $$3. zajmuje się natomiast rysowaniem grafu funkcji $\tan x$ w pobliżu 0 oraz porównaniem tego z wartościami otrzymanymi za pomocą bibliotecznej funkcji tan w języku Julia.

2. Przybliżanie wartości $\ln 3$

2.1. Metoda

W celu obliczenia wartości $\ln 3$ użyte zostanie przybliżanie funkcji

$$f(x) = \ln x$$

w punkcie $a = 3$ za pomocą szeregów Maclaurina $4, 8, 16$ stopnia.

Wzór na pochodną funkcji $\ln x$ jest powszechnie znany:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$$

natomiast wzór na pochodną k-tego stopnia, można wyliczyć w prosty sposób:

$$\frac{d^k}{dx^k} \ln x = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{1}{x} = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} \Big(- \frac{1}{x^2} \Big) = ... = (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{1}{x^k}. \tag{1}$$

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k+1} \frac{(x-a)^k}{k \cdot a^k} \Big)$$