

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.1.6.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 11 listopada 2022, 21:37

Spis treści

| | |
|-------------------------------------|---|
| 1. Wstęp | 1 |
| 2. Pierwsze próby | 1 |
| 2.1. Szereg Taylora | 1 |
| 2.2. Algorytm Monte Carlo | 2 |
| 2.3. Wzór Wallisa? | 2 |

1. Wstęp

Luiziana, można dodać że House of the Rising Sun jest o New Orleans ∈ Louisiana, i że *Oh, mother, tell your children / Not to do what I have done*, przybliżać π liczbą 4.

Metoda Chudowskiego - rekord cyfr pi z 2009, na podstawie wzoru Ramanujana

2. Pierwsze próby

2.1. Szereg Taylora

W matematyce bardzo często w celu przybliżania porządkanych wartości używa się szeregów Taylora. Tak dla przykładu, korzystając z rozszerzenia funkcji $\arctan x$ w punkcie 0 możemy oszacować wartość $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^{(k)} 0}{k!} (1-0)^k = \\ (1) \quad &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

W obliczeniach praktycznych nie możliwe jest dodawanie kolejnych elementów sumy w nieskończoność. Konieczne jest więc zatrzymanie się na pewnym N , co daje pewien błąd, R_N :

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_N.$$

Oznaczmy tę sumę jako P_N . Ponieważ dla przybliżeń funkcji szeregiem Taylora coraz wyższego stopnia dostajemy coraz dokładniejszy wynik, to P_{N+1} powinno być dokładniejsze niż P_N . Zauważamy też, że

$$P_{N+1} - P_N = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$$

w takim razie możemy oszacować błąd dla szeregu Taylora N -tego stopnia za pomocą

$$R_N \approx \max \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3},$$

co daje zbieżność liniową.

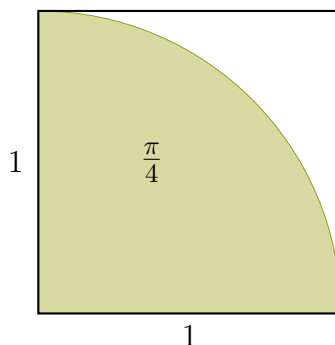
Problem tego przybliżenia π został przeanalizowany już przez Madhawa z Sangamagramy w XIV wieku. Zaproponował on następującą korekcję wzoru dla skończonych sum:

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} \pm \frac{N^2+1}{4N^3+5N}.$$

WYPADAŁOBY NAKLEPAĆ I PRZEDSTAWIĆ WYNIKI

2.2. Algorytm Monte Carlo

Ponieważ π jest stosunkiem pola koła jednostkowego do jego promienia, do przybliżania jego wartości można skorzystać z kwadratu i ćwiartki koła. Zauważmy, że jeżeli będziemy wybierać losowo punkty kwadratu o polu 1, to $\frac{\pi}{4}$ z nich powinno znaleźć się w ćwiartce koła o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu:



Korzystając z algorytmu Monte Carlo możemy wybierać losowo współrzędne $x, y \in [0, 1]$ kolejnych punktów, a następnie sprawdzać ile z nich spełnia warunek

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Otrzymany stosunek będzie coraz bliższy $\frac{\pi}{4}$ wraz ze zwiększaniem ilości testowanych punktów.

NAKLEPAĆ I TYM LOGIEM PRZYBLIŻYĆ ZBIEŻNOŚĆ CZY INNE CHUJU MUJU

2.3. Wzór Wallisa?

9.4 ze skryptu szwarca do analizy I

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)! \sqrt{n}}$$