

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.1.6.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 20 listopada 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Pierwsze próby	1
2.1. Interpretacja geometryczna	1
2.2. Algorytm Monte Carlo	3
2.3. Szereg Taylora	4
3. Wzór Viete’a	5
3.1. Wyniki	6
4. Wzór Ramanujana	6
5. Algorytm Gaussa-Legendre’a	7

1. Wstęp

Indiana Bill

Metoda Chudowskiego - rekord cyfr pi z 2009, na podstawie wzoru Ramanujana

2. Pierwsze próby

2.1. Interpretacja geometryczna

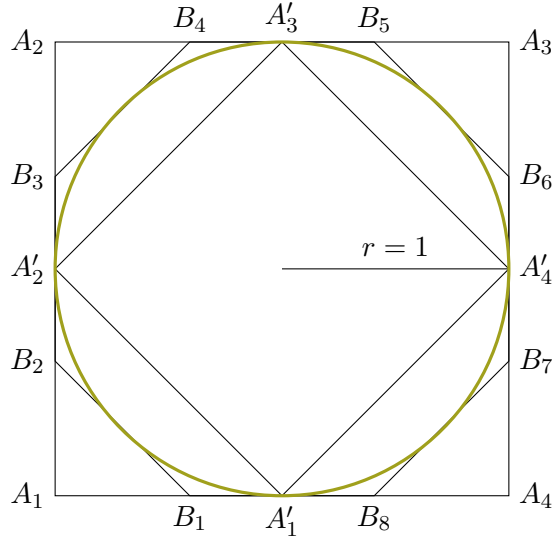
Bardzo często π jest definiowane jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W historii pojawiało się wiele prób wyznaczenia π korzystając z obwodu wielokątów foremnych wpisanych w oraz opisanych na okręgu jednostkowym. Wraz ze wzrostem liczby boków zwiększa się dokładność oszacowań obwodu okręgu, co daje coraz to bliższe prawdy granice na wartość ludolfiny.

Takie podejście stosował już w starożytności Archimedes. Wyprowadził on wzór rekursyjny na obwód $2n$ -kąta foremnego wpisanego oraz opisanego na okręgu na podstawie obwodu n -kąta.

Wpiszmy n -kąąt foremny w okrąg o promieniu 1. Teraz na tym samym okręgu opiszmy n -kąąt tak, żeby wierzchołki wielokąta wpisanego były środkami boków wielokąta opisywanego. Dostajemy w ten sposób n -kąąt foremny opisany na okręgu o promieniu 1. Nietrudno zauważyć, że teraz jeśli połączymy sąsiednie boki n -kąta opisanego odcinkami stycznych do okręgu o końcach w równej odległości od najbliższego wierzchołka, to dostaniemy $2n$ -kąąt foremny. Sytuacja dla $n = 4$ została przedstawiona na Rysunku 1.

Rozważmy teraz trójkąt $\Delta A'_1 A_1 A_2$. Zauważmy, że odcinek $\overline{B_1 B_2}$ dzieli go na dwa trójkąty podobne:

$$\Delta B_1 A_1 B_2 \sim \Delta A'_1 A_1 A'_2.$$



Rysunek 1. Wielokąty opisane i wpisane w okrąg o promieniu 1.

Dla przejrzystości zapisów oznaczmy $|\overline{A_1 A_2}| = A$, $|\overline{B_1 B_2}| = B$ oraz $|\overline{A'_1 A'_2}| = a$. Z proporcji w trójkątach podobnych mamy:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B} &= \frac{a}{\frac{1}{2}A} \\ B &= \frac{a}{A}(A - B) \\ B &= a - \frac{a}{A}B \\ B &= \frac{aA}{A + a} \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz obwód n -kąta wpisanego jako l_n , a n -kąta opisanego - L_n . Według Rysunku 1 są one równe:

$$\begin{aligned} l_n &= na \\ L_n &= nA \\ L_{2n} &= 2nB = 2n \frac{aA}{A + a} = 2n^2 \frac{aA}{An + an} = 2 \frac{L_n l_n}{L_n + l_n} \end{aligned}$$

Dalej, oznaczmy długość boku $2n$ -kąta wpisanego jako b . Zauważmy, że wówczas:

$$\begin{aligned} B &= 2 \tan \frac{\pi}{2n} \\ a &= 2 \sin \frac{\pi}{n} \\ b &= 2 \sin \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} l_{2n} &= 2nb = 4n \sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{16n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = \sqrt{8n^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \sqrt{8n^2 \tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{n}} = \sqrt{2nBna} = \sqrt{L_{2n}l_n}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = 2\pi$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 2\pi$ oraz dla każdego k mamy

$$l_n \leq 2\pi \leq L_n,$$



Wykres 2. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędem względnym dla przybliżenia π za pomocą metody geometrycznej.

a więc możemy przybliżać π jako

$$\pi \approx \frac{L_n - l_n}{4},$$

czyli jako środek przedziału $[l_n, L_n]$. Wybierzemy punkt startowy jako trójkąt równoboczny:

$$\begin{cases} l_3 = 3\sqrt{3} \\ L_3 = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

2.2. Algorytm Monte Carlo

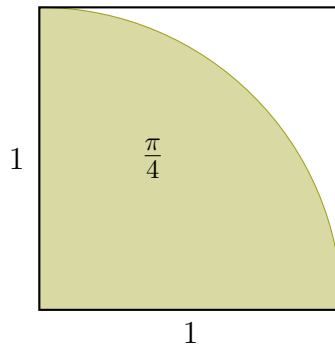
Tak jak w poprzedniej metodzie, możemy skorzystać z faktu, że dla koła jednostkowego π jest równe jego polu. Zauważmy, że jeżeli będziemy wybierać losowo punkty kwadratu o polu 1, to $\frac{\pi}{4}$ z nich powinno znaleźć się w ćwiartce koła o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu (Rysunek 3.).

Korzystając z algorytmu Monte Carlo możemy wybierać losowo współrzędne $x, y \in [0, 1]$ kolejnych punktów, a następnie sprawdzać ile z nich spełnia warunek

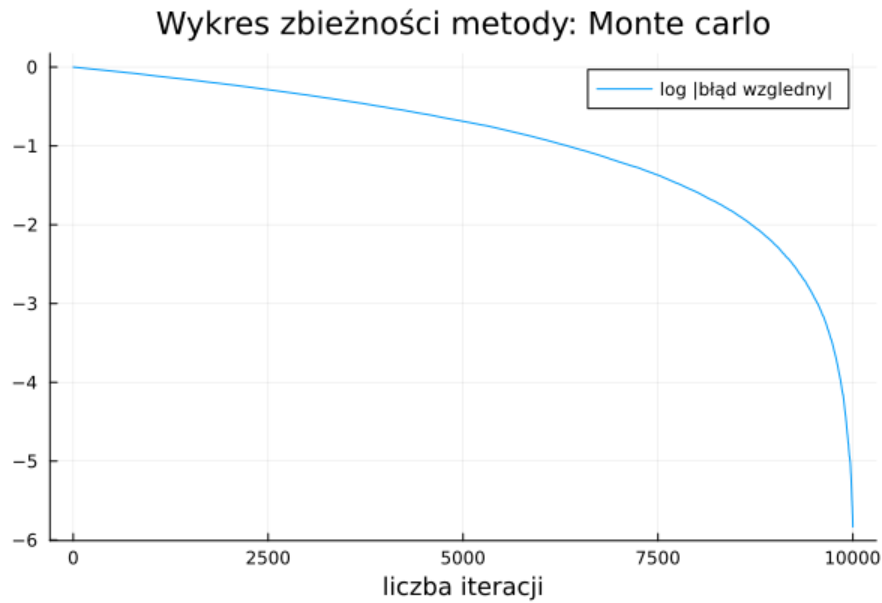
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Otrzymany stosunek będzie coraz bliższy $\frac{\pi}{4}$ wraz ze zwiększaniem ilości testowanych punktów.

Na Wykresie 4. Zaprezentowany jest logarytm dziesiętny z błędem względnym metody Monte Carlo. Szacowanie zbieżności tej metody jest trudne, ale możemy zauważyć, że jest ona gorsza niż zbieżność liniowa.



Rysunek 3. Stosunek pola ćwiartki koła jednostkowego do kwadratu o boku 1



Wykres 4. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędą względną uzyskanego dla metody przybliżenia π z pomocą algorytmu Monte Carlo.

2.3. Szereg Taylora

W matematyce bardzo często w celu przybliżania porządkanych wartości używa się szeregów Taylora. Tak dla przykładu, korzystając z rozszerzenia funkcji $\arctan x$ w punkcie 0 możemy oszacować wartość $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^{(k)} 0}{k!} (1-0)^k = \\
 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.
 \end{aligned}$$

W obliczeniach praktycznych nie możliwe jest dodawanie kolejnych elementów sumy w nieskończoność. Konieczne jest więc zatrzymanie się na pewnym N , co daje pewien błąd, R_N :

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_N.$$

Oznaczmy tę sumę jako P_N . Ponieważ dla przybliżeń funkcji szeregiem Taylora coraz wyższego stopnia dostajemy coraz dokładniejszy wynik, to P_{N+1} powinno być dokładniejsze niż P_N . Zauważamy też, że

$$P_{N+1} - P_N = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$$

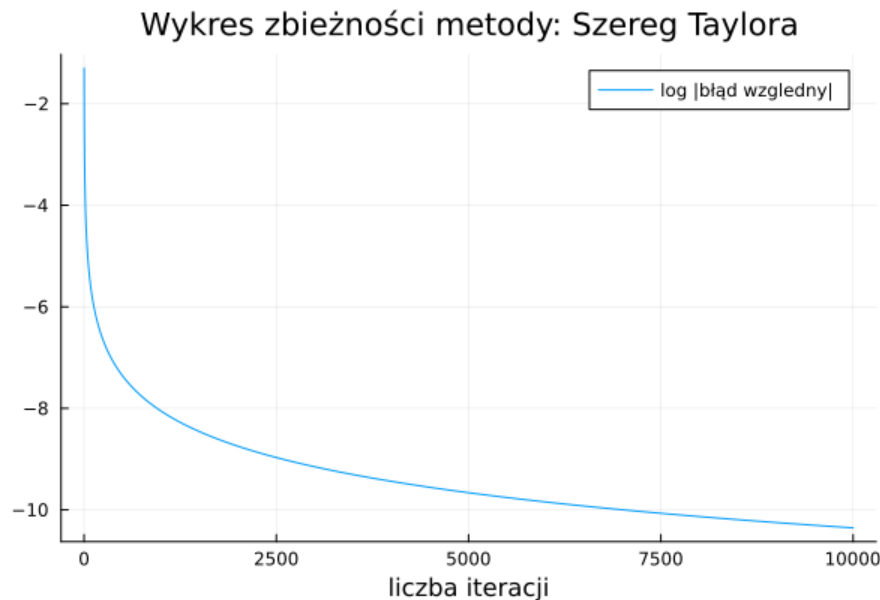
w takim razie możemy oszacować błąd dla szeregu Taylora N -tego stopnia za pomocą

$$R_N \approx \max \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3},$$

co daje zbieżność liniową.

Problem tego przybliżenia π został przeanalizowany już przez Madhawa z Sangamagramy w XIV wieku. Zaproponował on następującą korekcję wzoru dla skończonych sum:

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} \pm \frac{N^2+1}{4N^3+5N}.$$



Wykres 5. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędów względnego uzyskanego dla metody przybliżenia π za pomocą szeregu Taylora.

3. Wzór Viete'a

Viete wyprowadził swoją formułę na π obserwując stosunek pola 2^n -kąta foremnego do pola 2^{n+1} -kąta foremnego. Poprzez zwiększanie n w nieskończoność, jesteśmy w stanie dostać stosunek 2^2 -kąta foremnego, czyli kwadratu, do pola koła w które został on wpisany. Można ją też wyprowadzić za pomocą tożsamości udowodnionej przez Eulera ponad 100 lat po śmierci Viete'a.

Wzór zaproponowany przez Viete'a, uznawany za prekursor analizy matematycznej w matematyce poprzez pierwsze wykorzystanie nieskończonego ilorazu, jest następujący:

$$(3) \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{2},$$

gdzie $a_1 = \sqrt{2}$ oraz

$$a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}.$$

Wiemy, że

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$$

oraz

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Jeśli wstawimy $x = \frac{\pi}{2}$ i oznaczymy $b_k = \cos \frac{x}{2^k}$, $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dostaniemy

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{2},$$

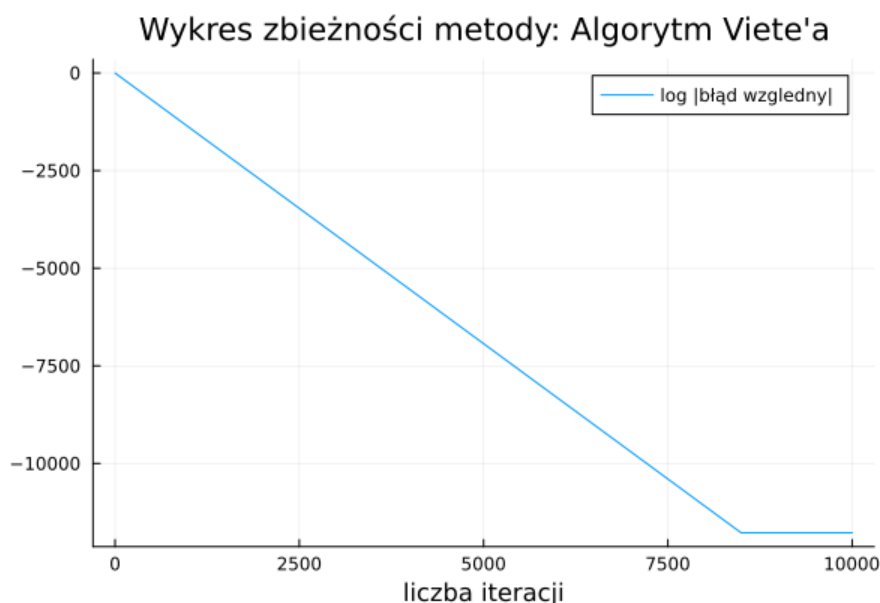
gdzie

$$a_k = 2b_k = 2\sqrt{\frac{1 + b_{k-1}}{2}} = \sqrt{2 + 2b_{k-1}} = \sqrt{2 + a_{k-1}}$$

i $a_1 = \sqrt{2}$.

3.1. Wyniki

Na Wykresie 6. zaprezentowany jest wykres zbieżności algorytmu Viete'a. Eksperymentalne wyznaczenie rzędu zbieżności, tak jak i gradient prezentowanego wykresu, sugerują liniową zbieżność tej metody wyliczania Viete. Od około 8750 iteracji wartość zwracana przez metodę Viete'a pokrywa się z wartością wyliczaną bibliotecznie.



Wykres 6. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędów względnego dla przybliżenia π za pomocą metody Viete'a.

Zbieżność liniowa jest dobrym wynikiem, tak samo jak w podejściu geometrycznym opisanym w Sekcji 2.1

4. Wzór Ramanujana

Tutaj trzeba ogarnąć co się odpiędała bo w sumie to nawet porządni matematycy nie są pewni, to co dopiero student debil.

5. Algorytm Gaussa-Legendre'a

