

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.0.12.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 15 października 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Przybliżanie wartości $\ln \frac{1}{2}$	2
2.1. Metoda	2

1. Wstęp

W matematyce bardzo często pojawiają się wartości niewymierne, takie jak $\ln 3$, których nie możemy wyrazić w sposób przystępny dla człowieka. Z tego powodu, powstało wiele metod przybliżania funkcji w określonych punktach. Jedną z nich jest użycie szeregu Taylora, opisanego przez Brooka Taylora w 1715 roku oraz wspomniana przez Jamesa Gregory’ą w 1671 r.

W swojej istocie twierdzenie Taylora mówi, że jeśli dana jest funkcja f klasy C^n , czyli różniczkowalna n razy w każdym punkcie jej dziedziny, to możemy ją przybliżyć w otoczeniu dowolnego punktu a za pomocą szeregu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a),$$

gdzie $R_n(x, a)$ spełnia

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{\|x - a\|^n} = 0.$$

Jak nietrudno zauważyć, wartość $R_n(x, a)$ przy x bardzo blisko a jest zanedbywalnie mała, więc w trakcie obliczeń możemy ją pominąć.

Innym ciekawym zastosowaniem szeregów Taylora jest tworzenie grafów funkcji. Możemy zdefiniować na przykład $\tan x$ w pobliżu punktu 0 jako zwykły wielomian, co pozwala na obliczenie przybliżonych wartości funkcji i naniesienie ich na oś współrzędnych. W matematyce szereg Taylora, który aproksymuje funkcje w pobliżu punktu 0 nosi nazwę szeregu Maclaurina.

Celem niniejszego sprawozdania jest sprawdzenie dokładności przybliżania funkcji za pomocą szeregów Taylora. W §§2-3 omówiono dwa ważne zastosowania szeregów Taylora: przybliżanie wartości niewymiernych oraz rysowanie grafów funkcji. Dokładniej, w §§2. przedstawiono wyniki przybliżania wartości $\ln \frac{1}{2}$ przy pomocy szeregów Maclaurina różnego stopnia. §§3. zajmuje się natomiast rysowaniem grafu funkcji $\tan x$ w pobliżu 0 oraz porównaniem tego z wartościami otrzymanymi za pomocą bibliotecznej funkcji \tan w języku Julia.

2. Przybliżanie wartości $\ln \frac{1}{2}$

2.1. Metoda

W celu obliczenia wartości $\ln \frac{1}{2}$ użyte zostanie przybliżanie funkcji

$$f(x) = \ln(1+x)$$

w pobliżu $a = 0$ za pomocą szeregu Maclaurina.

Wzór na pochodną funkcji $\ln(x+1)$ jest powszechnie znany:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x+1},$$

natomiast wzór na pochodną k -tego stopnia, można wyliczyć w prosty sposób:

$$(1) \quad \frac{d^k}{dx^k} \ln(x+1) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Wzór na szereg Taylora $\ln(1+x)$ w pobliżu $a = 0$, to:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i + R(x,0) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + R(x,0).$$

