

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.1.6.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 20 listopada 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Pierwsze próby	1
2.1. Interpretacja geometryczna	1
2.2. Algorytm Monte Carlo	3
2.3. Szereg Taylora	4
3. Wzór Viete’a	5
3.1. Wyniki	6
4. Algorytm Chudnowsky’ch	7
4.1. Wyniki	7
5. Algorytm Gaussa-Legendre’a	8
5.1. Wyniki	9
Literatura	10

1. Wstęp

Indiana Bill

Metoda Chudowskiego - rekord cyfr pi z 2009, na podstawie wzoru Ramanujana

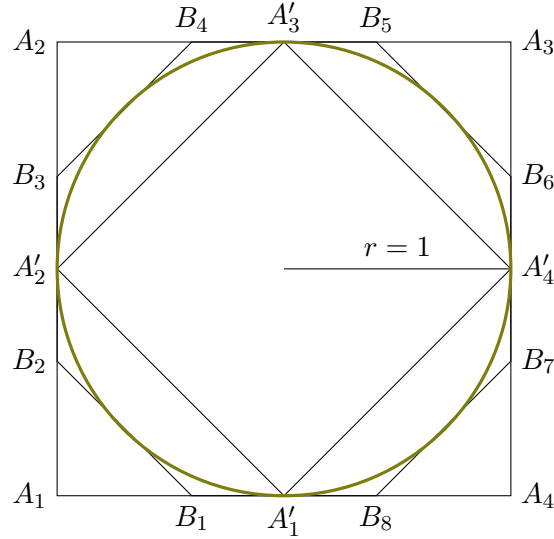
2. Pierwsze próby

2.1. Interpretacja geometryczna

Bardzo często π jest definiowane jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W historii pojawiało się wiele prób wyznaczenia π korzystając z obwodu wielokątów foremnych wpisanych w oraz opisanych na okręgu jednostkowym. Wraz ze wzrostem liczby boków zwiększa się dokładność oszacowań obwodu okręgu, co daje coraz to bliższe prawdy granice na wartość ludolfiny.

Takie podejście stosował już w starożytności Archimedes. Wyprowadził on wzór rekursyjny na obwód $2n$ -kąta foremnego wpisanego oraz opisane na okręgu na podstawie obwodu n -kąta.

Wpiszmy n -kąć foremny w okrąg o promieniu 1. Teraz na tym samym okręgu opiszmy n -kąć tak, żeby wierzchołki wielokąta wpisanego były środkami boków wielokąta opisywanego. Dostajemy w ten sposób n -kąć foremny opisany na okręgu o promieniu 1. Nietrudno zauważyć, że teraz jeśli połączymy sąsiednie boki n -kąta opisanego odcinkami stycznych do okręgu o końcach w równej odległości od najbliższego wierzchołka, to dostaniemy $2n$ -kąć foremny. Sytuacja dla $n = 4$ została przedstawiona na Rysunku 1.



Rysunek 1. Wielokąty opisanie i wpisane w okrąg o promieniu 1.

Rozważmy teraz trójkąt $\Delta A'_1 A_1 A_2$. Zauważmy, że odcinek $\overline{B_1 B_2}$ dzieli go na dwa trójkąty podobne:

$$\Delta B_1 A_1 B_2 \sim \Delta A'_1 A_1 A'_2.$$

Dla przejrzystości zapisów oznaczmy $|\overline{A_1 A_2}| = A$, $|\overline{B_1 B_2}| = B$ oraz $|\overline{A'_1 A'_2}| = a$. Z proporcji w trójkątach podobnych mamy:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B} &= \frac{a}{\frac{1}{2}A} \\ B &= \frac{a}{A}(A - B) \\ B &= a - \frac{a}{A}B \\ B &= \frac{aA}{A + a} \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz obwód n -kąta wpisanego jako l_n , a n -kąta opisanego - L_n . Według Rysunku 1 są one równe:

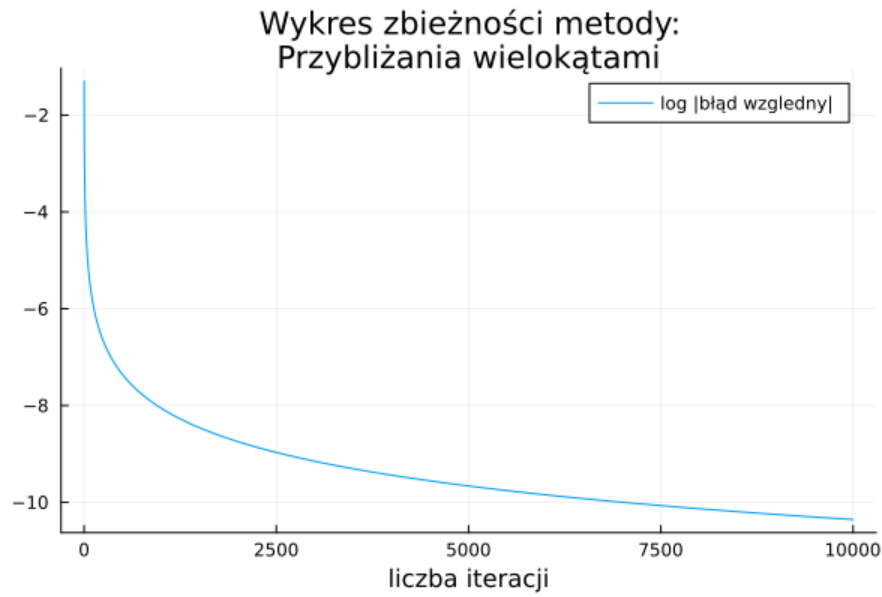
$$\begin{aligned} l_n &= na \\ L_n &= nA \\ L_{2n} &= 2nB = 2n \frac{aA}{A + a} = 2n^2 \frac{aA}{An + an} = 2 \frac{L_n l_n}{L_n + l_n} \end{aligned}$$

Dalej, oznaczmy długość boku $2n$ -kąta wpisanego jako b . Zauważmy, że wówczas:

$$\begin{aligned} B &= 2 \tan \frac{\pi}{2n} \\ a &= 2 \sin \frac{\pi}{n} \\ b &= 2 \sin \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} l_{2n} &= 2nb = 4n \sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{16n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = \sqrt{8n^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \sqrt{8n^2 \tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{n}} = \sqrt{2nBna} = \sqrt{L_{2n}l_n}. \end{aligned}$$



Wykres 2. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędów względnego dla przybliżenia π za pomocą metody geometrycznej.

Zauważmy, że $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = 2\pi$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 2\pi$ oraz dla każdego k mamy

$$l_n \leq 2\pi \leq L_n,$$

a więc możemy przybliżać π jako

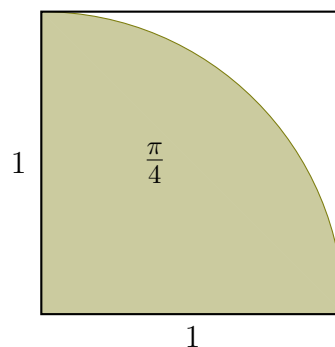
$$\pi \approx \frac{L_n - l_n}{4},$$

czyli jako środek przedziału $[l_n, L_n]$. Wybierzemy punkt startowy jako trójkąt równoboczny:

$$\begin{cases} l_3 = 3\sqrt{3} \\ L_3 = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

2.2. Algorytm Monte Carlo

Tak jak w poprzedniej metodzie, możemy skorzystać z faktu, że dla koła jednostkowego π jest równe jego polu. Zauważmy, że jeżeli będziemy wybierać losowo punkty kwadratu o polu 1, to $\frac{\pi}{4}$ z nich powinno znaleźć się w ćwiartce koła o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu (Rysunek 3.).



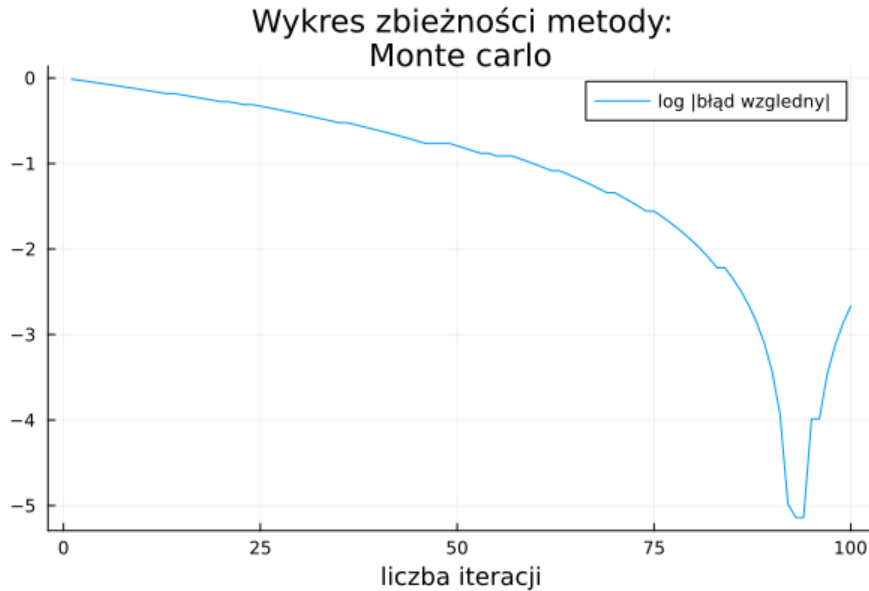
Rysunek 3. Stosunek pola ćwiartki koła jednostkowego do kwadratu o boku 1

Korzystając z algorytmu Monte Carlo możemy wybierać losowo współrzędne $x, y \in [0, 1]$ kolejnych punktów, a następnie sprawdzać ile z nich spełnia warunek

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Otrzymany stosunek będzie coraz bliższy $\frac{\pi}{4}$ wraz ze zwiększaniem ilości testowanych punktów.

Na Wykresie 4. Zaprezentowany jest logarytm dziesiętny z błędu względnego metody Monte Carlo. Szacowanie zbieżności tej metody jest trudne, ale możemy zauważyć, że jest ona gorsza niż zbieżność liniowa.



Wykres 4. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędu względnego uzyskanego dla metody przybliżenia π z pomocą algorytmu Monte Carlo.

2.3. Szereg Taylora

W matematyce bardzo często w celu przybliżania porządkanych wartości używa się szeregów Taylora. Tak dla przykładu, korzystając z rozszerzenia funkcji $\arctan x$ w punkcie 0 możemy oszacować wartość $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^{(k)} 0}{k!} (1-0)^k = \\
 (1) \quad &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.
 \end{aligned}$$

W obliczeniach praktycznych nie możliwe jest dodawanie kolejnych elementów sumy w nieskończoność. Konieczne jest więc zatrzymanie się na pewnym N , co daje pewien błąd, R_N :

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_N.$$

Oznaczmy tę sumę jako P_N . Ponieważ dla przybliżeń funkcji szeregiem Taylora coraz wyższego stopnia dostajemy coraz dokładniejszy wynik, to P_{N+1} powinno być dokładniejsze niż P_N . Zauważamy też, że

$$P_{N+1} - P_N = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$$

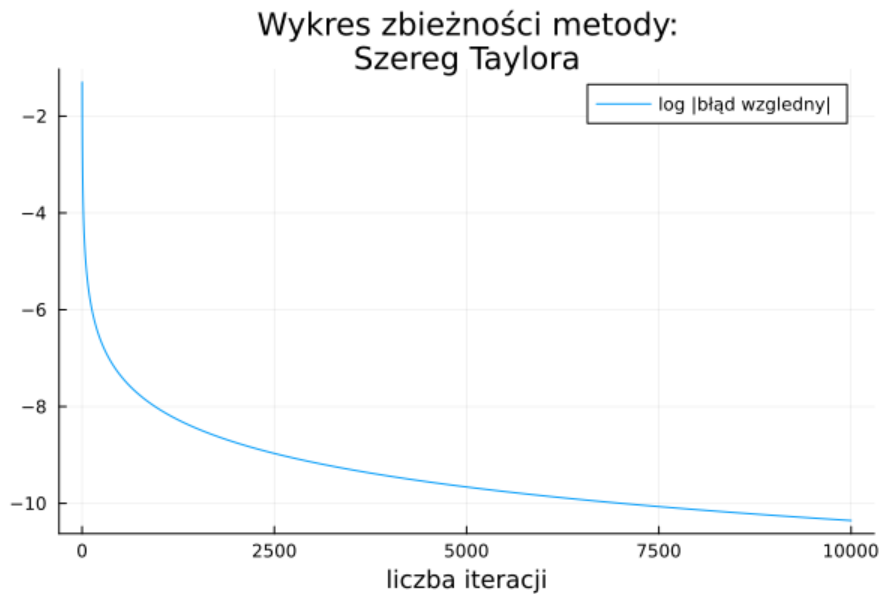
w takim razie możemy oszacować błąd dla szeregu Taylora N -tego stopnia za pomocą

$$R_N \approx \max \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3},$$

co daje zbieżność liniową.

Problem tego przybliżenia π został przeanalizowany już przez Madhawa z Sangamagramy w XIV wieku. Zaproponował on następującą korekcję wzoru dla skończonych sum:

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} \pm \frac{N^2+1}{4N^3+5N}.$$



Wykres 5. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędem względnym uzyskanego dla metody przybliżenia π za pomocą szeregu Taylora.

3. Wzór Viete’a

Viete wyprowadził swoją formułę na π obserwując stosunek pola 2^n -kąta foremnego do pola 2^{n+1} -kąta foremnego. Poprzez zwiększanie n w nieskończoność, jesteśmy w stanie dostać stosunek 2^2 -kąta foremnego, czyli kwadratu, do pola koła w które został on wpisany. Można ją też wyprowadzić za pomocą tożsamości udowodnionej przez Eulera ponad 100 lat po śmierci Viete’a.

Wzór zaproponowany przez Viete’a, uznawany za prekursor analizy matematycznej w matematyce poprzez pierwsze wykorzystanie nieskończonego ilorazu, jest następujący:

$$(3) \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{2},$$

gdzie $a_1 = \sqrt{2}$ oraz

$$a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}.$$

Wiemy, że

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$$

oraz

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Jeśli wstawimy $x = \frac{\pi}{2}$ i oznaczymy $b_k = \cos \frac{x}{2^k}$, $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dostaniemy

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{2},$$

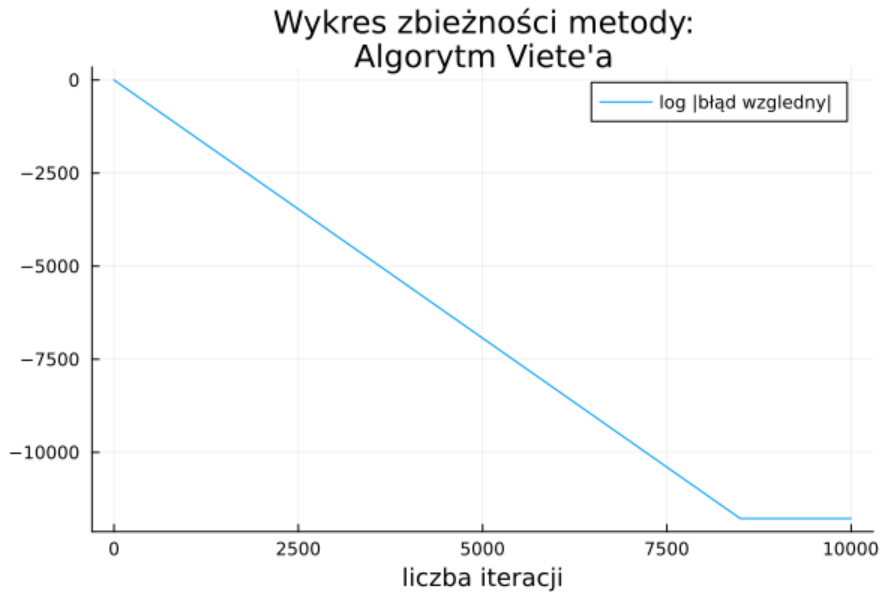
gdzie

$$a_k = 2b_k = 2\sqrt{\frac{1 + b_{k-1}}{2}} = \sqrt{2 + 2b_{k-1}} = \sqrt{2 + a_{k-1}}$$

i $a_1 = \sqrt{2}$.

3.1. Wyniki

Na Wykresie 6. zaprezentowany jest wykres zbieżności algorytmu Viete’a. Eksperymentalne wyznaczenie rzędu zbieżności, tak jak i gradient prezentowanego wykresu, sugerują liniową zbieżność tej metody wyliczania Viete. Od około 8750 iteracji wartość zwracana przez metodę Viete’a pokrywa się z wartością wyliczaną bibliotecznie.



Wykres 6. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędów względnym dla przybliżenia π za pomocą metody Viete’a.

Metoda Viete’a daje wyniki podobne do podejścia geometrycznego opisanego w Sekcji 2.1. Obie metody mają błąd bardzo bliski zera dla około 8000 iteracji metody. W obu metodach korzystamy z dwóch zmiennych, więc są podobne pamięciowo. W metodzie zaproponowanej przez Archimedes’a musimy zapamiętywać obwód figury opisaną i wpisaną w okrąg, natomiast dla metody Viete’a potrzebujemy zapisywać dotychczasowy iloczyn oraz kolejny wyraz ciągu a_k . Różnią się one jedynie ilością operacji jakie wykonujemy w jednej iteracji, więc metoda Viete’a ma marginalnie lepszą złożoność czasową.

4. Algorytm Chudnowsky'ch

Algorytm zaproponowany przez braci Chudnowsky opiera się na 17 wzorach na $\frac{1}{\pi}$ opracowanych przez Srinivasa Ramanujan[1]:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}.$$

Z tego można uzyskać π wprost w formie wzoru:

$$\pi = C \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{M_q \cdot L_q}{X_q} \right)^{-1},$$

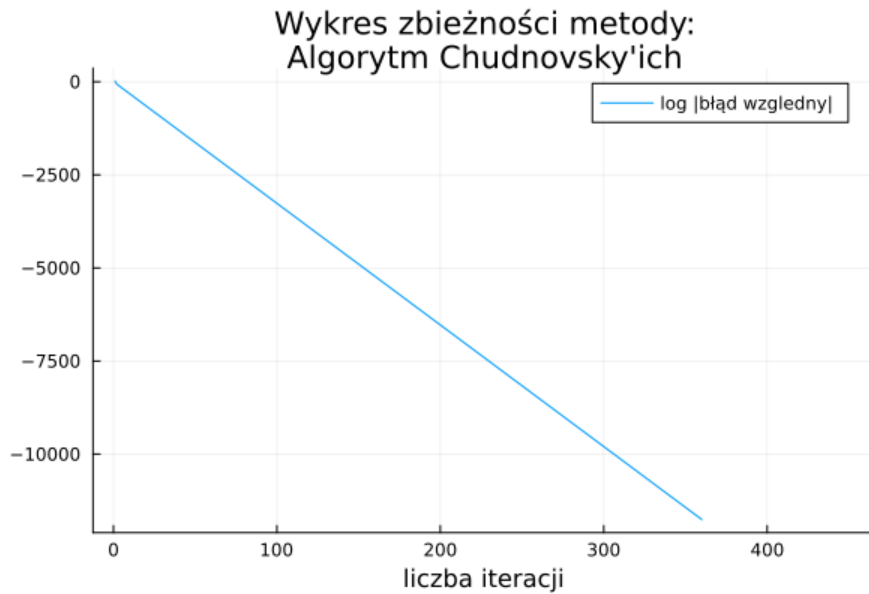
gdzie

$$\begin{cases} C = 426880\sqrt{10005} \\ L_{q+1} = L_q + 545140134 & L_0 = 13591409 \\ X_{q+1} = X_q \cdot (-262537412640768000) & X_0 = 1 \\ K_{q+1} = K_q + 12 & K_0 = -6 \\ M_{q+1} = M_q \cdot \left(\frac{K_{q+1}^3 - 16K_{q+1}}{(q+1)^3} \right) & M_0 = 1. \end{cases}$$

Aby wyprowadzić ten wzór, jak i inne podane przez Ramanujana, potrzebna jest znajomość między innymi teorii funkcji eliptycznych[1]. Z tego też względu w tym raporcie nie podejmujemy się uzasadniania poprawności wyżej podanego wzoru. Dla zainteresowanych polecamy lekturę "Collected Papers of Srinivasa Ramanujan"[2].

4.1. Wyniki

Logarytm z błędu względnego algorytmu Chudnowsky'ch dla pierwszych 400 iteracji został zaprezentowany na Wykresie 7. Już dla 359 iteracji błąd bezwzględny jest równy 0. Każę to sugerować, że to właśnie ta metoda została użyta jako implementacja funkcji `pi()` w języku Julia. Dlatego od 359 iteracji nie ma zaznaczonej wartości \log_{10} od błędu względnego.

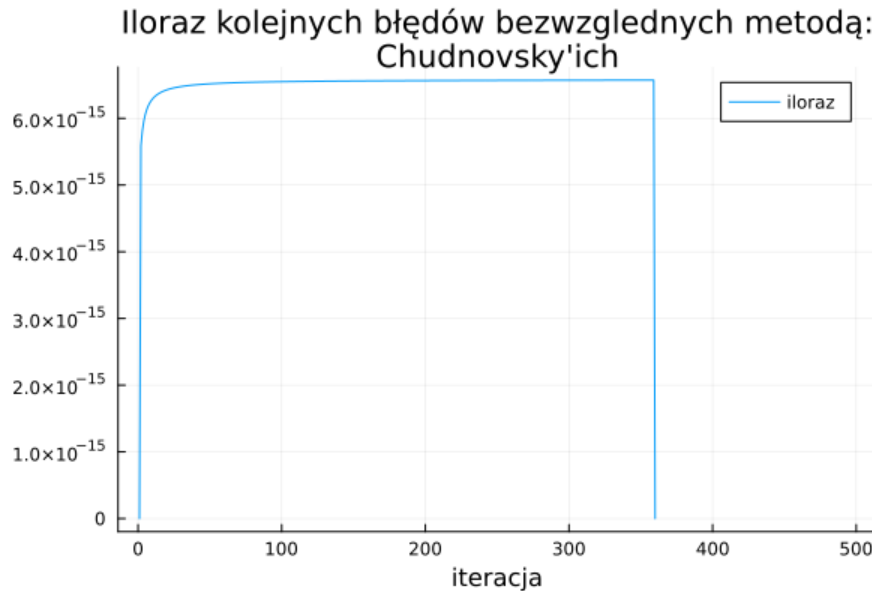


Wykres 7. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędem względnym dla przybliżenia π za pomocą algorytmu braci Chudnowsky'ch.

Eksperymentalne wyznaczanie zbieżności metody Chudnowsky'ch sugeruje zbieżność liniową, tak jak na Wykresie 8.. Nietypowe załamanie w okolicach 359 iteracji jest spowodowane zerową wartością błędu bezwzględnego w tym miejscu. Z pozostałej części wykresu możemy wydedukować, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \pi|}{|x_k - \pi|} \approx 6.5 \cdot 10^{-15},$$

gdzie x_k to oszacowanie π uzyskane w k -tej iteracji.



Wykres 8. Wykres ilorazu błędów względnych wyrazu $n + 1$ i n dla algorytmu Chudowsky'ch.

5. Algorytm Gaussa-Legendre'a

Algorytm Gaussa-Legendre'a jest aktualnie jednym z najszybciej zbiegających algorytmów używanych do wyliczania liczb π . Został wyprowadzony na podstawie prac Carla Friedricha Gaussa oraz Adrien-Marie Legendre na podstawie współczesnych algorytmów do mnożenia i pierwiastkowania. Jest on, niestety, bardzo wymagający pamięciowo. Poniżej prezentujemy implementację tego algorytmu[4]:

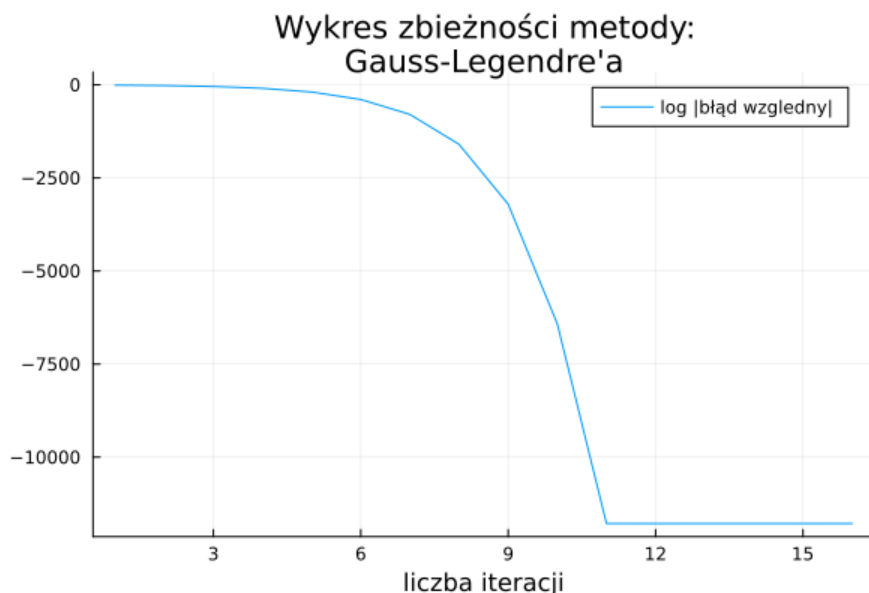
```

1 function gauss_legendre (max):
2     a = 1
3     b = 1 / sqrt(2)
4     t = 1 / 4
5     p = 1
6     i = 0
7     while i <= max:
8         an = (a + b) / 2
9         b = sqrt(a * b)
10        t = t - p * (a - an) * (a - an)
11        p = 2 * p
12        a = an
13
14    return (a + b) * (a + b) / (4 * t)

```

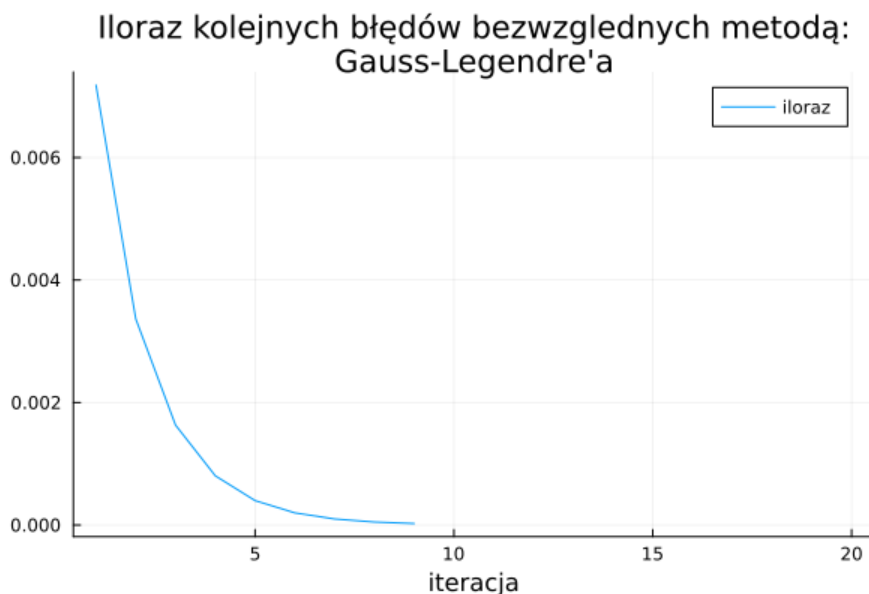

5.1. Wyniki

Metoda Gaussa-Legendre'a okazała się zbiegać do implementacji bibliotecznej funkcji `pi()` z języka Julia wyjątkowo szybko, bo już w 11 iteracji kwadrat błędu maszynowo był równy zero, co widać na Wykresie ??.



Wykres 9. Wykres logarytmu dziesiętnego z błędem względnym dla przybliżenia π za pomocą algorytmu Gaussa-Legendre'a.

Eksperymentalne obliczenia rzędu zbieżności tej metody jedynie potwierdzają wyższą zbieżność tego algorytmu niż w przypadku innych opisanych metod. Dla precyzji wynoszącej 16 069 bitów obliczenia na podstawie dzielenia błędu $(n + 1)$ -ego wyrazu przez kwadrat błędu n -tego wyrazu nie dają konkretnych wyników przez zbyt szybkie dążenie tej metody do π . W literaturze metoda ta jest określana jako zbieżna kwadratowo [3].



Wykres 10. Wykres ilorazu błędów względnych wyrazu $n + 1$ i n dla algorytmu Gaussa-Legendre'a.



Literatura

- [1] Baruah, Nayandeep Deka, Bruce C. Berndt, and Heng Huat Chan., *Ramanujan's Series for $\frac{1}{\pi}$: A Survey.*, The American Mathematical Monthly 116, no. 7 (2009): 567-87, <http://www.jstor.org/stable/40391165>.
- [2] Srinivasa Ramanujan, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge University Press, 1st edition, 2015
- [3] Richard P. Brent, *Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation*, 2010, <https://arxiv.org/pdf/1004.3412.pdf>.
- [4] Hans Herneave, *Gauss-Legendre Algorithm*, accessed 20.11.2022, <https://cage.ugent.be/~hvernaev/Gauss-L.html>