

# Pracownia z analizy numerycznej

## Sprawozdanie do zadania P.0.12.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 12 października 2022, 21:37

### Spis treści

1. Wstęp . . . . .	1
2. Przybliżanie wartości $\ln 3$ . . . . .	2
2.1. Metoda . . . . .	2

### 1. Wstęp

W matematyce bardzo często pojawiają się wartości niewymierne, takie jak  $\ln 3$ , których nie możemy wyrazić w sposób przystępny dla człowieka. Z tego powodu, powstało wiele metod przybliżania funkcji w określonych punktach. Jedną z nich jest użycie szeregu Taylora, opisanego przez Brooka Taylora w 1715 roku oraz wspomniana przez Jamesa Gregory’ą w 1671 r.

W swojej istocie twierdzenie Taylora mówi, że jeśli dana jest funkcja  $f$  klasy  $C^n$ , czyli różniczkowalna  $n$  razy w każdym punkcie jej dziedziny, to możemy ją przybliżyć w otoczeniu dowolnego punktu  $a$  za pomocą szeregu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a),$$

gdzie  $R_n(x, a)$  spełnia

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{\|x - a\|^n} = 0.$$

Jak nietrudno zauważyć, wartość  $R_n(x, a)$  przy  $x$  bardzo blisko  $a$  jest zaniedbywalnie mała, więc w trakcie obliczeń możemy ją pominąć.

Innym ciekawym zastosowaniem szeregów Taylora jest tworzenie grafów funkcji. Możemy zdefiniować na przykład  $\tan x$  w pobliżu punktu 0 jako zwykły wielomian, co pozwala na obliczenie przybliżonych wartości funkcji i naniesienie ich na oś współrzędnych. W matematyce szereg Taylora, który aproksymuje funkcje w pobliżu punktu 0 nosi nazwę szeregu Maclaurina.

Celem niniejszego sprawozdania jest sprawdzenie dokładności przybliżania funkcji za pomocą szeregów Taylora. W §§2-3 omówiono dwa ważne zastosowania szeregów Taylora: przybliżanie wartości niewymiernych oraz rysowanie grafów funkcji. Dokładniej, w §§2. przedstawiono wyniki przybliżania wartości  $\ln 3$  przy pomocy szeregów Taylora różnego stopnia. §§3. zajmuje się natomiast rysowaniem grafu funkcji  $\tan x$  w pobliżu 0 oraz porównaniem tego z wartościami otrzymanymi za pomocą bibliotecznej funkcji  $\tan$  w języku Julia.

## 2. Przybliżanie wartości $\ln 3$

### 2.1. Metoda

W celu obliczenia wartości  $\ln 3$  użyte zostanie przybliżanie funkcji

$$f(x) = \ln x$$

w punkcie  $a = 3$  za pomocą szeregów Taylora 4, 8, 16 stopnia.

Wzór na pochodną funkcji  $\ln x$  jest powszechnie znany:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$$

natomiast wzór na pochodną  $k$ -tego stopnia, można wyliczyć w prosty sposób:

$$\frac{d^k}{dx^k} \ln x = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{1}{x} = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \dots = (-1)^{k-1} \frac{1}{x^k}. \quad (1)$$