

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.1.6.

Prowadzący: mgr. Filip Chudy

Wrocław, 20 listopada 2022, 21:37

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Pierwsze próby	1
2.1. Interpretacja geometryczna	1
2.2. Algorytm Monte Carlo	3
2.3. Szereg Taylora	4
3. Wzór Viete'a	4
4. Wzór Ramanujana	5
5. Algorytm Gaussa-Legendre'a	5

1. Wstęp

Indiana Bill

Metoda Chudowskiego - rekord cyfr pi z 2009, na podstawie wzoru Ramanujana

2. Pierwsze próby

2.1. Interpretacja geometryczna

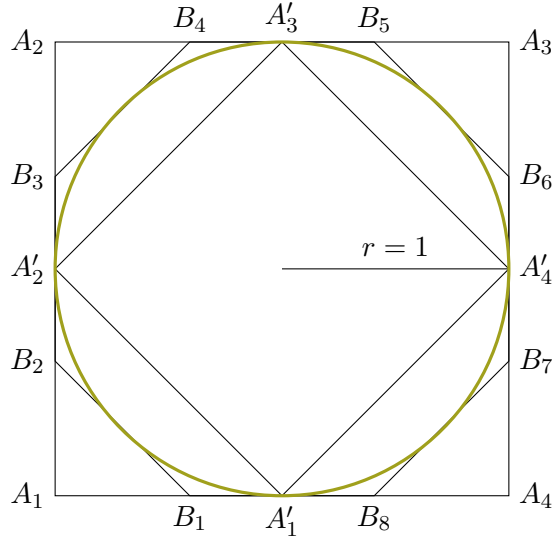
Bardzo często π jest definiowane jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W historii pojawiało się wiele prób wyznaczenia π korzystając z obwodu wielokątów foremnych wpisanych w oraz opisanych na okręgu jednostkowym. Wraz ze wzrostem liczby boków zwiększa się dokładność oszacowań obwodu okręgu, co daje coraz to bliższe prawdy granice na wartość ludolfiny.

Takie podejście stosował już w starożytności Archimedes. Wyprowadził on wzór rekursyjny na obwód $2n$ -kąta foremnego wpisanego oraz opisanego na okręgu na podstawie obwodu n -kąta.

Wpiszmy n -kąć foremny w okrąg o promieniu 1. Teraz na tym samym okręgu opiszmy n -kąć tak, żeby wierzchołki wielokąta wpisanego były środkami boków wielokąta opisywanego. Dostajemy w ten sposób n -kąć foremny opisany na okręgu o promieniu 1. Nietrudno zauważyć, że teraz jeśli połączymy sąsiednie boki n -kąta opisanego odcinkami stycznymi do okręgu o końcach w równej odległości od najbliższego wierzchołka, to dostaniemy $2n$ -kąć foremny. Sytuacja dla $n = 4$ została przedstawiona na Rysunku 1.

Rozważmy teraz trójkąt $\triangle A'_1 A_1 A_2$. Zauważmy, że odcinek $\overline{B_1 B_2}$ dzieli go na dwa trójkąty podobne:

$$\triangle B_1 A_1 B_2 \sim \triangle A'_1 A_1 A'_2.$$



Rysunek 1. Wielokąty opisane i wpisane w okrąg o promieniu 1.

Dla przejrzystości zapisów oznaczmy $|\overline{A_1 A_2}| = A$, $|\overline{B_1 B_2}| = B$ oraz $|\overline{A'_1 A'_2}| = a$. Z proporcji w trójkątach podobnych mamy:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B} &= \frac{a}{\frac{1}{2}A} \\ B &= \frac{a}{A}(A - B) \\ B &= a - \frac{a}{A}B \\ B &= \frac{aA}{A + a} \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz obwód n -kąta wpisanego jako l_n , a n -kąta opisanego - L_n . Według Rysunku 1 są one równe:

$$\begin{aligned} l_n &= na \\ L_n &= nA \\ L_{2n} &= 2nB = 2n \frac{aA}{A + a} = 2n^2 \frac{aA}{An + an} = 2 \frac{L_n l_n}{L_n + l_n} \end{aligned}$$

Dalej, oznaczmy długość boku $2n$ -kąta wpisanego jako b . Zauważmy, że wówczas:

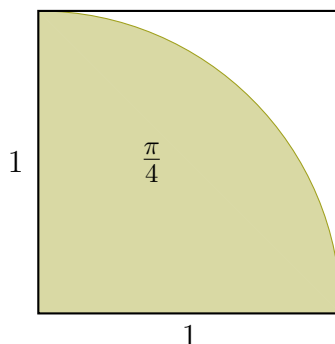
$$\begin{aligned} B &= 2 \tan \frac{\pi}{2n} \\ a &= 2 \sin \frac{\pi}{n} \\ b &= 2 \sin \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} l_{2n} &= 2nb = 4n \sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{16n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = \sqrt{8n^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \sqrt{8n^2 \tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{n}} = \sqrt{2nBna} = \sqrt{L_{2n} l_n}. \end{aligned}$$

2.2. Algorytm Monte Carlo

Tak jak w poprzedniej metodzie, możemy skorzystać z faktu, że dla koła jednostkowego π jest równe jego polu. Zauważmy, że jeżeli będziemy wybierać losowo punkty kwadratu o polu 1, to $\frac{\pi}{4}$ z nich powinno znaleźć się w ćwiartce koła o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu (Rysunek 2.).



Rysunek 2. Stosunek pola ćwiartki koła jednostkowego do kwadratu o boku 1

Korzystając z algorytmu Monte Carlo możemy wybierać losowo współrzędne $x, y \in [0, 1]$ kolejnych punktów, a następnie sprawdzać ile z nich spełnia warunek

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Otrzymany stosunek będzie coraz bliższy $\frac{\pi}{4}$ wraz ze zwiększaniem ilości testowanych punktów.

NAKLEPAĆ I TYM LOGIEM PRZYBLIŻYĆ ZBIEŻNOŚĆ CZY INNE CHUJU MUJU



2.3. Szereg Taylora

W matematyce bardzo często w celu przybliżania porządkanych wartości używa się szeregów Taylora. Tak dla przykładu, korzystając z rozszerzenia funkcji $\arctan x$ w punkcie 0 możemy oszacować wartość $\frac{\pi}{4}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^{(k)} 0}{k!} (1-0)^k = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

W obliczeniach praktycznych nie możliwe jest dodawanie kolejnych elementów sumy w nieskończoność. Konieczne jest więc zatrzymanie się na pewnym N , co daje pewien błąd, R_N :

$$\frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_N.$$

Oznaczmy tę sumę jako P_N . Ponieważ dla przybliżeń funkcji szeregiem Taylora coraz wyższego stopnia dostajemy coraz dokładniejszy wynik, to P_{N+1} powinno być dokładniejsze niż P_N . Zauważamy też, że

$$P_{N+1} - P_N = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3}$$

w takim razie możemy oszacować błąd dla szeregu Taylora N -tego stopnia za pomocą

$$R_N \approx \max \frac{(-1)^{N+1}}{2N+3},$$

co daje zbieżność liniową.

Problem tego przybliżenia π został przeanalizowany już przez Madhawa z Sangamagramy w XIV wieku. Zaproponował on następującą korekcję wzoru dla skończonych sum:

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2k+1} \pm \frac{N^2+1}{4N^3+5N}.$$

WYPADAŁOBY NAKLEPAĆ I PRZEDSTAWIĆ WYNIKI

3. Wzór Viete'a

Viete wyprowadził swoją formułę na π obserwując stosunek pola 2^n -kąta foremnego do pola 2^{n+1} -kąta foremnego. Poprzez zwiększanie n w nieskończoność, jesteśmy w stanie dostać stosunek 2^2 -kąta foremnego, czyli kwadratu, do pola koła w które został on wpisany. Pole koła o promieniu 1 wynosi

$$P_k = \pi$$

a pole kwadratu w nie wpisanego:

$$P_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

W takim razie stosunek pola kwadratu do pola koła wynosi:

$$\frac{P_2}{P_k} = \frac{2}{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{P_{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{P_{2^3}} \frac{P_{2^3}}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_1}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{a_k},$$

gdzie a_k to pole 2^k -kąta foremnego, z $a_1 = 2$.

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \sqrt{2 - a_k} \\ a_1 &= 0 \\ a_k &= \sqrt{2 + a_{k+1}} \end{aligned}$$

4. Wzór Ramanujana

Tutaj trzeba ogarnąć co się odpierdala bo w sumie to nawet porządni matematycy nie są pewni, to co dopiero student debil.

5. Algorytm Gaussa-Legendre'a