Kolorowania węzłów i niezmienniki homologiczne

Praca napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Tadeusza Januszkiewicza

Weronika Jakimowicz

06.12.2024

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Węzeł i jego grupa

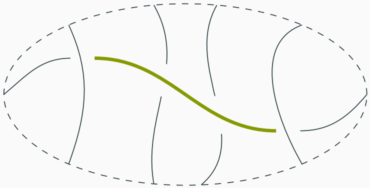
Definicja

Węzeł to gładkie zanurzenie $S^1 \hookrightarrow S^3$.

Definicja

Niech $K \subseteq S^3$ będzie węzłem. Wtedy grupa $\pi_1(S^3 - K)$ jest nazywana **grupą węzła** K.

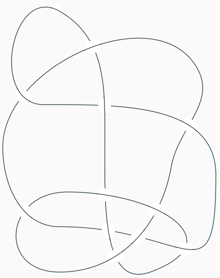
Rzutowanie $D : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ węzła nazywa się *diagramem*.



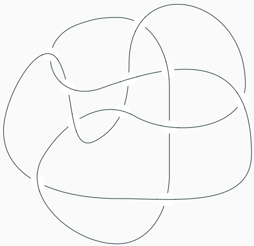
Niezmienniki węzłów

- Grupa węzła jest skomplikowana do wyliczenia.
- Wielomian Alexandera liczymy m.in. z diagramu, ale nie zawsze jest pomocny, np:

$K11n85$



$K11n164$



$$-t^3 + 5t^2 - 10t + 13 - 10t^{-1} + 5t^{-2} - t^{-3}$$

Poszukiwania niezmienników

W wyliczaniu wielomianu Alexandera tworzymy macierz $n \times n$, której kolumny odpowiadają segmentom, a wiersze skrzyżowaniom. Wielomian Alexandera to minor $(n-1) \times (n-1)$.

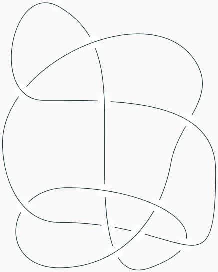
Czy tak stworzona macierz kryje inne, delikatniejsze niezmienniki?

Grupa węzła ma prezentację Wirtingera, która przychodzi z diagramu.

Czy przejście z grupy homotopii do modułów homologii ułatwia zrozumienie niezmiennika?

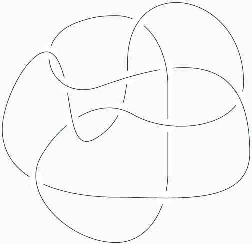
Zredukowana postać normalna Smitha macierzy odwzorowania $D\phi$ przychodzącego z kolorowania diagramu D paletą Alexandera jest **niezmiennikiem węzła**.

$K11n85$



$$\begin{bmatrix} -t^3+5t^2-10t+13-10t^{-1}+5t^{-2}-t^{-3} \end{bmatrix}$$

$K11n164$



$$\begin{bmatrix} 1-t+t^2 & 0 \\ 0 & -t^{-1}+4-5t+4t^2-t^3 \end{bmatrix}$$

Co więcej, macierz ta niesie tę samą informację, co macierz Alexandera A_D, tzn.

$$\ker(A_D) \cong \ker(D\phi)$$

oraz

$$\operatorname{coker}(A_D) \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \cong \operatorname{coker}(D\phi).$$

Bibliografia

- James W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Transactions of the American Mathematical Society **30** (1928), 275–306.
- M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- John. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Transactions of the Americal Mathematical Society (1967), no. 2.