PODPRZESTRZENIE METRYCZNE i TOPOLOGIE

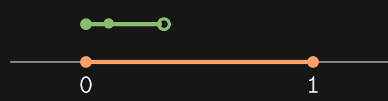
PODPRZESTRZEN METRYCZNA

PODPRZESTRZEN (X, d) to (A, d), $A \subseteq X$

formalnie (A, d) nie jest metryka - musimy obciac $d_{\restriction A \times A}$

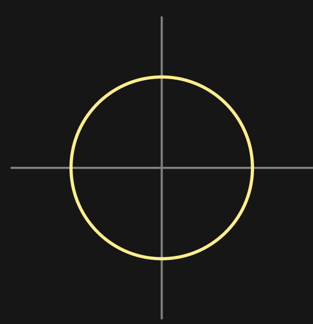
PRZYKLAD

Mamy prosta $\mathbb{R}$ z metryka euklidesowa. Rozwazmy na niej zbior $[0, 1]$. Jesli zastanowimy sie nad kulami w tej podprzestrzeni, to mozemy otrzymac kule:



I ta kula jest otwarta, bo dla tej podprzestrzeni nie istnieja punkty mniejsze od 0.

Na $\mathbb{R}^2$ z metryka centrum wybieramy okrag o promieniu $\frac{1}{2}$ i srodku w $(0, 0)$. Taka podprzestrzen jest bardzo podobna do przestrzeni dyksretnej - kazde dwa punkty, ktore nie sa tym samym punktem, sa od siebie odlegle o 1.



Dwie przestrzenie metryczne: (X, d) i (Y, ρ), i funkcja z jednej w druga:

$$f : X \to Y$$

jest ciagla jesli (warunek Cauchyego):

$$\forall\, x \in X\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, y \quad d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Jesli mamy (X, d), (Y, ρ) oraz funkcje $f : X \to Y$, wowczas

1. f jest funkcja ciagla
2. (zbieznosc wg. Heinego): mamy (x_n) - ciag z X, taki, ze $\lim x_n = x$, to $\lim f(x_n) = f(x)$ (*ciag wartosci zbiega do wartosci granicy*)
3. $f^{-1}[U]$ jest otwarty, dla kazdego otwartego $U \subseteq Y$

Pokazemy implikacje : 3. $\implies$ 1..

Mamy funkcje $f : X \to Y$, i mamy sprawdzic, czy jest ciagla w sensie Cauchyego (z 1., warunek ciaglosci wyzej). Dla dowolnego $x \in X, \varepsilon > 0$ mamy dobrac δ tak, zeby warunek ciaglosci byl spelniony, majac do dyspozycji tylko to, ze przeciwobrazy zbiorow otwartych sa otwarte.

Czyli chce pokazac, ze jesli bedziemy brali cos z kuli o promieniu δ, to bedzie do tego nalezec wszystko w kuli o promieniu ε i do tego chce korzystac z otwartosci przeciwobrazow zbiorow otwartych.

Wartosci musze byc w kuli o srodku w $f(x)$ i promieniu ε:

$$U = B_\varepsilon(f(x)).$$

Z zalozenia 3. jesli wezmiemy dowolny punkt u ze zbioru $f^{-1}[U]$, to on siedzi w tym zbiorze wraz z pewna kula. Wybierzmy $u = x \in f^{-1}[U]$, bo $f(x) \in U$. Z definicji zbioru otwartego:

$$\exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subseteq f^{-1}[U].$$

Jesli weze dowolne y z kuli B_δ, to jak naloze y f, bedzie oon blizej x niz ε, czyli $f(y) \in B_\epsilon(f(y))$

HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM ($X \underset{hom}{\cong} Y$) nazywamy taka funkcje $f : (X, d) \to (Y, \rho)$, ktora:

f jest 1-1 i na i ciagla oraz f^{-1} jest ciagla.

X jest homeomorfizmem z Y, jesli istnieje homomorfizm

PRZYKLADY

$[0,1] \cong [0,2]$, wezmy funkcje $f(x) = 2x$ - jest ciagla bijekcja i funkcja odwrotna jest ciagla (najprostszy przyklad)

$(\mathbb{R}^2, d_{euk}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{miast})$ dla funkcji $f(x,y) = \langle x, y\rangle$, czyli dla identycznosci

(X,d) - dowolna przestrzen metryczna. Rozwazmy taka metryke:

$$d'(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & d(x,y) < 1 \\ 1 & wpp \end{cases}$$

$(X,d) \cong (X,d')$, czyli jesli bedziemy ignorowac wszystkie punkty odlegle o dalej niz 1 to nam nic nie zmienia (i mozemy wybrac zakres ignorowania w dowolny sposob).

Ciaglosc: czy jesli ciag jest zbiezny w pierwszej metryce, to czy jest zbiezny w drugiej metryce? Tak, bo przy ciaglosci interesuja nas male odleglosci, a te nie zmieniaja sie w nowej metryce.

DOWOD FORMALNIEJSZY: wezmy funckje ciagla $f(x) = x$ oraz zbiezny (w sensie metryki d) ciag z $X : \lim x_n = x$.

$$f(x_n) = x_n$$

Chce sprawdzic, czy $\lim x_n = x$ w sensie metryki d'?

Wezmy jakiegos $1 > \varepsilon > 0$. Ze zbieznosci x_n w d oznacza to, ze

$$\exists\, N\, \forall\, n > N \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

Poniewaz $\varepsilon < 1$, to w takim razie $d'(x_n, x) < \varepsilon$.

Moze sie tez zdazyc, ze wybiore $\varepsilon \geq 1$.

TOPOLOGIE

TOPOLOGIA na zbiorze X
nazywamy rodzine $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taka, ze:

$\emptyset \in \mathcal{U},\ X \in \mathcal{U}$

jest zamknieta na skonczone przekroje

jest zmaknieta na dowolne sumy

Jesli (X,d) jest przestrzenia metryczna, to topologia jest *rodzina zbiorow otwartych*. Mozemy wziac X, wprowadzic rodzine ktora bedzie spelniala warunki topologii i nazywac to *rodzina zbiorow otwartych*, a nie topologia.

$(X, \mathcal{U})$ to przestrzen topologiczna

Dla pewnego zbieznego ciagu elementow X $\lim x_n = x$. Korzystajac z pojecia *przestrzeni topologicznych*, zbieznosc mozna zdefiniowac:

$$\forall\, U \in \mathcal{U} \quad x \in U \implies \exists\, N\, \forall\, n > N \quad x_n \in U$$

PRZYKLADY:

Wezmy zbior X oraz $A = \{\emptyset, X\}$. Poniewaz A zawiera zbior prosty oraz cale X, to jest topologia na X.

$(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ - wszystkie ciagi sa zbiezne do dowolnego punktu.

(X, τ) to przestrzen topologiczna
p.t. HANSDORFAA, jezeli

$$\forall\, x \neq y \in X\, \exists\, U, V \quad \begin{matrix} x \in U \\ y \in V \end{matrix} \text{ i } U \cap V = \emptyset$$

Czyli dla dowolnych dwoch punktow moge znalezc dwa rozlaczne zbiory otwarte.

Przestrzenie metryczne sa Hansdorffa.

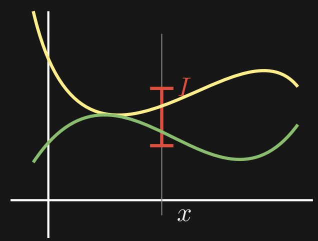
Wezmy dwa punkty, x, y. Odleglosc miedzy nimi to $d(x,y)$. Jesli $U = B_{\frac{d(x,y)}{10}}(x)$, a $Y = B_{\frac{d(x,y)}{10}}(y)$. Z definicji kuli one nigdy sie nie pokryja, hence ich przekroj jest pusty.

c.d. PRZYKLADY:

$C[0,1]$ - ciag funckji ciaglych na odcinku $[0,1]$. Wezmy I - przedzial otwarty na $\mathbb{R}$. Niech $x \in [0,1]$ i

$$A_x^I = \{f \in C[0,1]\ :\ f(x) \in I\},$$

czyli bierzemy x i stawiamy na nia bramke rowna I. Do zbioru A_x^I beda nalezec wszystkie funkcje, ktore przez te bramke przejda.



Rozwazmy wszystie zbiory postaci $A^{I_0}_{x_0} \cap ... \cap A^{I_n}_{x_n}$. Z sum takich zbiorow tworze rodzine $\mathcal{U}$, ktora jest topologia na $[0, 1]$.

Przyjzyjmy sie ciagom zbieznym w tej topologii.

$$f_n \to f \implies \forall\, x \in [0, 1] \quad f_n(x) \overset{euk.}{\to} f(x)$$

Dowod: Wezmy $x \in [0, 1]$. Wiemy, ze f_n jest zbiezne, ale czemu $f_n(x)$ mialoby tez byc zbiezne?
Dla pewnego $\varepsilon > 0$ i przedzialu o srodku w $f(x)$ i promieniu ε $I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$:

$$\exists\, N\, \forall\, n > N \quad f_n \in A^I_x.$$

$f \in A^I_x$, bo $f(x)$ jest srodkiem przedzialu I, a $f_n \to F$ bo jest A^I_x jest zbiorem otwartym. Pokazalismy, ze

$$\forall\, n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa sie *topologia zbieznosci punktowej*.