METRYKI i PRZESTRZENIE METRYCZNE

METRYKA

METRYKA na ziorze X nazywamy funkcje

$$d: \; X \times X \to [0, \infty)$$

przedstawia sposob mierzenia odleglosci

Zeby dana funckja byla metryka, musi spelniac nastepujace warunki:

1) $d(x,x) = 0 \;\wedge\; d(x,y) > 0$, jesli $x \neq y$
2) $\forall\, x, y \quad d(x,y) = d(y,x)$: symetria
3) $\forall\, x, y, z \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$: warunek $\triangle$ <3

najtrudniejsze bywa sprawdzenie warunku trojkata

PRZYKLADY

METRYKI EUKLIDESOWE:

$\mathbb{R} \;:\; d(x,y) = |x - y|$
$\mathbb{R}^2 \;:\; d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$
$\mathbb{R}^n \;:\; d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \ldots + (x(n-1) - y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksowkowa, nowojorska:

$\mathbb{R}^2 \;:\; d(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$

METRYKA MAKSIMUM:

$\mathbb{R}^2 \;:\; d(x,y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

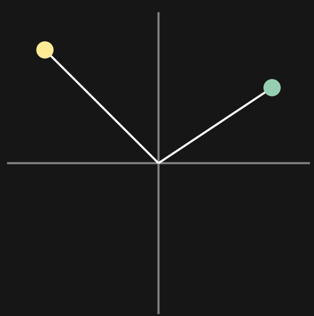
METRYKA DYSKRETNA:

$\mathbb{R}^2 \;:\; d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

fajna do dowodzenia, dziala na kazdym zbiorze

METRYKA CENTRUM:

Jesli punkty leza na jednej prostej przechodzacej przez srodek ukladu wspolrzednych, liczymy ich odleglosc jak w metryce euklidesowej. W przeciiwnym wypadku, najpierw liczymy odleglosc danego punktu do srodka ukladu wspolrzednych, a pozniej odleglosc drugiego punktu od srodka ukladu wspolrzednych i sumujemy je:

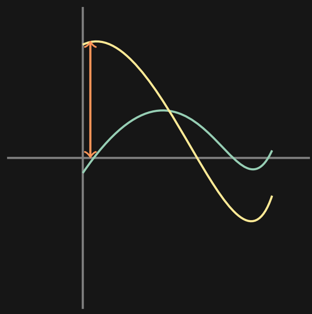


METRYKA SUPREMUM:

$C[0,1]$ - zbior wszystkich funkcji ciaglych na przedziale $[0,1]$:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$



Jesli zamiast funkcji ciaglych na przedziale $[0,1]$ bedziemy rozwazac funkcje ciagle na zbiorze $\{0,1\}$, to dostaniemy tak naprawde metryke maksimum.

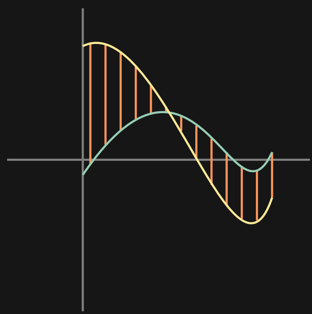
Przedzial domknietey, zeby uniknac nieskonczonosci - chcemy, zeby istanialo maksimum na tym przedziale

co z funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$?

METRYKA CALKOWA:

liczy pole miedzy wykresami dwoch funkcji:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$



PRZESTRZEN METRYCZN (X,d)

to zbior i sposob mierzenia odleglosci na nim (czyli metryka)

METRYKA HAMINGA - porownuje dwa ciagi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ takiej samej dlugosci i liczy ich odleglosc przez ilosc miejsc w ktorych sie roznia

Domyslna metryka na zbiorze ciagow 0 i 1:

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

gdzie $\Delta(x,y) = \min\{k : x(k) \neq y(k)\}$. Pokazuje, na ktorym miejscu po raz pierwszy dwa ciagi sie roznia.

KULE

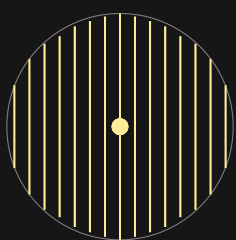
caly czas jestesmy w przestrzeni metrycznej (X,d)

KULA o srodku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

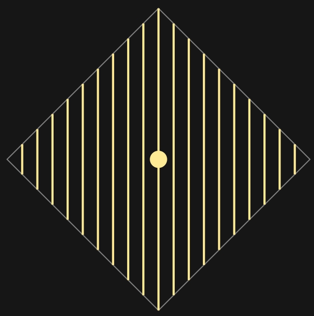
$$B_r(x) = \{y \in X \ : \ d(x,y) < r\}$$

$\mathbb{R}$, metryka euklidesowa:

$\mathbb{R}^2$, metryka euklidesowa:

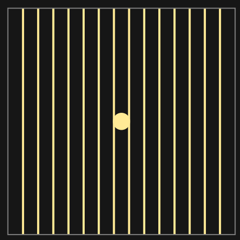


$\mathbb{R}^2$, metryka miasto:



bo sznurek rozwija sie tylko poziomo i horyzontalnie, a suma sznureczkow zawsze nie przekroczy r

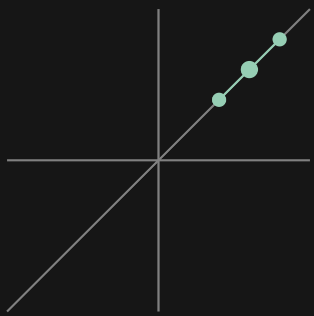
$\mathbb{R}^2$, metryka maksimum:



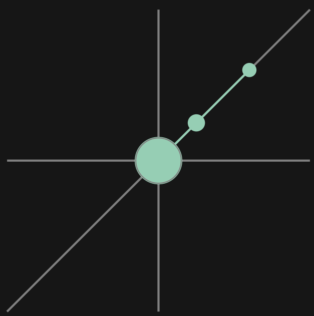
bo wspolrzedne nie moga byc od siebie odlegle o wiecej niz 1

$\mathbb{R}^2$, metryka centrum:

jesli r jest mniejsze niz odleglosc x od srodka:

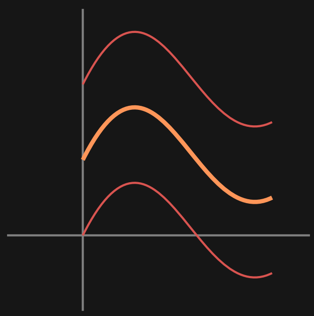


jesli r jest wieksze niz odleglosc x od srodka:



$C[0,1]$, metryka supremum:

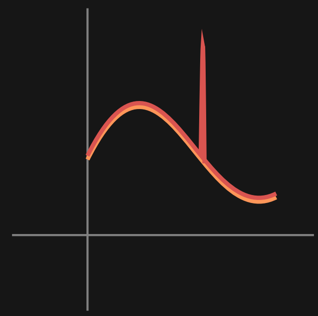
warto narysowac sobie "tunel":



kula sa wszystkie funkcje, ktore nie wychodza poza tunel

$C[0,1]$, metryka calkowa:

nie da sie jej narysowac, gdyz funckja bedaca bardzo blisko naszego f, ale majaca jeden duzy, waski peak bedzie nalezec do kuli nie wazne jak duzy jest ten skok:



ZBIEZNOSC

CIAG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jezeli
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N \quad d(x_n, x) < \varepsilon$

W kazdej kuli o srodku w x leza prawie wszystie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{\text{ eukl}})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff \forall\, i < m \quad x_n(i) \to x(i)$$

te dwie strzalki oznaczja co innego: peirwsza to zbieganie dla pewnej konkretnej metryki, a druga to zwykla zbieznosc liczb rzeczywistych.

Jesli ciag zbiega w metryce miasta, to zbiega tez w metryce euklidesowej i vice versa. Czyli zbieznosc w metryce miasta to to samo co zbieznosc w metryce euklidesowej.

W metryce dyskretnej prawie nie ma ciagow zbieznych - tylko ciagi stale moga zbiegac.

$(C[0,1], d_{\text{sup}})$, czyli co oznacza ze jakis ciag funckji zbiega do danej funkcji:

$$(f_n) \to f$$

jest to to samo, co zbieznosc jednostajna
$$(f_n) \rightrightarrows f$$
czyli prawie to samo co zbieznosc na liczbach rzeczywistych.

PODZBIORY PRZESTRZENI METRYCZNYCH

$U \subseteq X$ jest otwarty, jesli gdziekolwiek popatrzymy
do zbioru, to znajdziemy taka kule, ktora
zawiera sie w zbiorze U
$\forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 \quad B_r(x) \subseteq U$

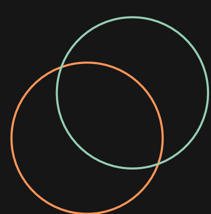
PRZYKLADY:

$(\mathbb{R}, d_{\text{eukl}})$ odcinek otwarty na obu koncach (ale nie dziala to w $\mathbb{R}^2$), cale $\mathbb{R}$, suma przedzialow otwartych, $\emptyset$

Jesli mamy dwa zbiory otwarte, U, V, ktorych przekroj $(U \cap V)$ jest otwarty, i rodzine zbiorow otwarych $(\mathcal{U})$ ktora je zawiera, to suma tej rodziny tez jest otwarta

Czyli rodzina zbiorow otwartych jest zamknieta na wszelkie mozliwe sumy.

DOWOD: przekroj zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym



$$x \in U \cap V$$

$$\exists\, r_0 > 0 \quad B_{r_0}(x) \subseteq U$$

$$\exists\, r_1 > 0 \quad B_{r_1}(x) \subseteq V$$

Nie mamy gwararncji, ze obie sie zawieraja w przekroju, ale mamy gwarancje, ze chociaz jedna sie zawiera.

DOWOD: suma rodziny zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

$$x \in \bigcup \mathcal{U}$$

czyli

$$\exists\, U \imath \mathcal{U} \quad x \in U$$

ale to U jest zbiorem otwartym, wiec zawiera sie w nim kula, a skoro U nalezy do sumy rodziny zbiorow otwartych, to dla kazdego punktu tejze sumy mozemy znalezc kule w niej zawarta.

$$U \text{ jest zbiorem otwartym} \iff U \text{ jest suma kul}$$

DOWOD:
Z sumy kul do zbioru otwartego jest latwo dojsc - poprzedni argument i to, ze kule nie sa domkniete. mozna korzystac z warunku trojkata, ale pisze to o 1:15 i mi sie nie chcemy
W druga strone:

$$forall\ x \in U \,\exists\, r_x > o \quad B_{r_x} \subseteq U$$

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

ta suma nie moze byc wieksza niz U, bo wszystkie elementy tej rodziny sa podzbiorami U, wiec go nie przekroczy
Zbiory otwarte w metryce dyskretnej na X to wszystkie zbiory zawierajace sie w X, czyli $\mathcal{P}(X)$

ZBIORY DOMKNIETE

$$F \subseteq X \text{ jest zbiorem domknietym, jesli kazdy ciag zbiezny z } F \text{ ma granice w } F$$

dlaczego pojecie zbioru domknietego i otwartego jest dualne?
jesli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest domkniety:

$$(x_n)\text{- ciag zbiezny z } U^c$$

co musialoby sie stac, zeby to dopelnienie nie bylo domkniete? Ten ciag musialby byc zbiezny do punktu poza dopeelnieniem, czyli nalezy do U, czyli

$$\exists\, r > 0 \quad B_r(x) \subseteq U$$

jest to sprzeczne, bo gdyby tak bylo, to w kazdej kuli o srodku w x musialyby byc wszystkie wyrazy tego ciagu - czyli jest on w U a nie w jego dopelnieniu