

# DOBRE PORZADKI , LICZBY PORZADKOWE

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorow jest przeliczalna:

$$\aleph_0 \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |A_n| \leq \aleph_0$$

DOWOD:

Poniewaz  $|A_n| \leq \aleph_0 \quad n \in \mathbb{N}$ , istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

Chcemy pokazac, ze istnieje rowniez bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$f(n,k) = f_n(k) \quad (\text{☕})$$

Musimy skorzystac z aksjomatu wyboru, poniewaz nie wystarczy nam tylko jeden element z  $(f_n)$  - potrzebujemy znac wlasnosci wszystkich elementow  $(f_n)$  jednocześnie. Rozpatrujemy wiec zbior funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}} : \varphi \text{ jest bijekcja}\}$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie  $S_n^{\mathbb{N}}$  to wszystkie funckje  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  lub z  $\mathbb{N}$  do podzbioru  $A_n$ . Niech  $F$  bedzie funkcja wyboru dla rodziny  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ , czyli kazdej rodzinie przypisuje element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Przepiszmy wiec (☕) w sposob bardziej formalny:

$$f(n,k) = F(F_n)(k).$$

Poniewaz  $F(F_n)$  jest bijekcja, to rowniez  $f$  jest bijekcja.



## LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jesli  $\langle X, \leq \rangle$  jest zbiorem czesciowo uporzadkowanym, w ktorym kazdy lancuch jest ograniczony z gory, to w  $X$  istnieje element maksymalny.

**TWIERDZENIE:** dla dowolnych zbiorow  $A, B$  zachodzi  $|A| \leq |B|$  lub  $|B| \leq |A|$

DOWOD:

Musimy skonstruowac zbior czesciowo uporzadkowany  $X$ , do ktorego bedziemy mogli zastosowac LKZ. Elementami tego zioru niech beda przyblizenia tego, co chcemy otrzymac:

$$X = \{f : \text{fnc}(f) \wedge f \subseteq A \wedge \text{rng}(f) \subseteq B \wedge f \text{ jest 1-1}\}.$$

Bedziemy rozpatrywali  $\langle X, \subseteq \rangle$ . Chcemy zastosowac do niego LKZ, czyli musimy sprawdzic zalozenia. Niech

$$\mathcal{L} \subseteq X$$

bedzie lancuchem w  $X$ . Chcemy pokazac, ze ma on ograniczenie gorne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L},$$

wtedy  $L$  jest ograniczeniem gornym  $\mathcal{L}$ , bo zawiera wszystkie elementy tego lancucha.