ASKJOMAT WYBORU I KOLEDZY

AC - aksjomat wyboru (w wersji z selektorem lub z funkcja wyboru)

WO - zasada dobrego uporzadkowania - kazdy zbior mozna dobrze uporzadkowac

LKZ - Lemat Kuratowskieg-Zorna - jesli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem czesciowo uporzadkowanym, w ktoym kazdy lancuch ma ograniczenie gorne, to w X istnieje element maksymalny

Twierdzenie

$$AC \iff WO \iff LKZ$$

DOWOD:

1) $WO \implies AC$

Niech $\mathcal{A}$ bedzie rozlaczna rodzina zbiorow niepustych. Chcemy pokazac, ze ta rodzina ma selektor.
Niech $\leq$ bedzie dobrym porzadkiem na $\bigcup \mathcal{A}$.
Jesli wszystko jest uporzadkowane, to w kazdym z tych zbiorow mozemy wziac element najmniejszy i to bedzie naszym selektorem
Niech $S = \{x \in \bigcup \mathcal{A} \,:\, \exists\, a \in \mathcal{A}\; x \; jest\ elementem\ min\ \mathcal{A}\}$. Wtedy S jest selektorem rodziny $\mathcal{A}$. Trzeba pokazac, ze z kazdym z elementow rodziny A selektor ma jednoelementowy przekroj. Ale jesl iwezme dowolny element rodziny A, to to jest niepusty podzbior sumy i i on ma element najmniejszy. W Zwiazku z tym przekros S z A jest niepusty i jednoelementowy, bo w kazdym elemencie z A mamy jeden element najmniejszy.

2) $LKZ \implies AC$

Niehc A bedzie rozlaczna rodzina zbiorow niepustych.
Niech $\mathcal{T} = \{T \subseteq \bigcup \mathcal{A} \,:\, \forall\, A \in \mathcal{A} \quad |T \cap A| \leq 1\}$ - czyli $\mathcal{T}$ jest zbiorem czesciowych sleketorow
Rozwazmy zbior up $\langle \mathcal{T}, \subseteq \rangle$. Tezn zbior spelnia LKZ
Nich $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$ nendzie lacuchem. Niech $L = \bigcup \mathcal{L}$. Wtedy L ogranicza od gory $\mathcal{L}$. Trzeba pokazac, ze $L \in \mathcal{T}$.
Chcemy pby dla kazdego $A \in \mathcal{A}$ miec $|A \cap L| \leq 1$. Przypuscmy nie wprost, ze istnieje $A \in \mathcal{A}$ takie, ze $|A \cap L| \geq 2$. To znaczy, ze istnieja x_1, x_2 takie, ze $x_1 \neq x_2$ i $x_1 . x_2 \in A \cap L$. Wtedy $x_1, x_2 \in \bigcup \mathcal{L}$, czyli istnieja L_1, L_2takie, ze $x_1 \in L_1$ o $x + 2 \in L_2$, ale L jest lancuchem , wiec bez straty ogolnosci moge zalozyc, ze $L_1 \subseteq L_2$, ale wted y$x_1, x_2 \in L_2$, czyli $|A \cap L_2| \geq 2$, ale to jest sprzeczne bo $L_2 \in \mathcal{T}$.

Wobec tego na mocy LKZ w $\mathcal{T}$ istnieje element maksymalny S. Pozostaje zauwazyc, ze S jest selektorem rodziny $\mathcal{A}$.