Liczby Stirlinga

1. Przypomnijmy, że **liczby Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{ n \atop k \right\}$, można zdefiniować

(a) kombinatorycznie: $\left\{ n \atop k \right\}$ jest liczbą podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów

(b) analitycznie: $\left\{ n \atop k \right\}$ są współczynnikami we wzorze

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}, \text{ gdzie } x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Sprawdzić samemu lub przeczytać w notatkach do wykładu, że w obu przypadkach otrzymujemy te same liczby, spełniające warunek rekurencyjny

$$\left\{ n \atop k \right\} = k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Wykazać, że $k! \left\{ n \atop k \right\}$ jest ilością surjekcji zbioru n elementowego na zbiór k elementowy.

3. Zauważyć (kombinatorycznie), że $\left\{ n \atop n-1 \right\} = \binom{n}{2}$. Udowodnić, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi wzór

$$\left\{ n \atop n-2 \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

WSKAZÓWKA: Zapewne indukcja działa. Ale lepiej zauważyć, że podział n elementów na $n-2$ części jest tożsamy z wybraniem dwóch dubletonów lub jednej trójki.

4. Znaleźć dowód tożsamości

$$\sum_{k=0}^{m} k \left\{ n+k \atop k \right\} = \left\{ n+m+1 \atop m \right\}$$

WSKAZÓWKA: Albo indukcja, albo kombinatorycznie: prawa strona obliczą liczbę podziałów zbioru o $n+m+1$ elementach na m części, lewa zlicza te podziały w pewien sposób.

5. **Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju**. Definiujemy $\left[n \atop k \right]$ jako liczbę sposobów rozmieszczenia n obiektów w k cyklach, przy czym $\left[1 \atop 0 \right] = 0, \left[1 \atop 1 \right] = 1$. Obrazowo, $\left[n \atop k \right]$ wylicza, na ile sposobów można posadzić n osób przy k okrągłych stołach (przy każdym ma ktoś siedzieć).

Sprawdzić, że

$$\left[n \atop k \right] = (n-1) \left[n-1 \atop k \right] + \left[n-1 \atop k-1 \right] \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

6. Obliczyć $\sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right]$.

WSKAZÓWKA: Podział n elementów na rozłącze cykle wyznacza jednoznacznie premutację wszystkich elementów, patrz UWAGA.

7. Udowodnić kombinatorycznie, że

$$\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Rozważmy permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o k cyklach, z których jeden został wyróżniony. Odpowiada jej permutacja zbioru $\{1, ...n+1\}$ o dwóch cyklach: jednym z nich jest wyróżniony cykl wyjściowej permutacji; patrz też Uwaga.

8. Znaleźć (jakiekolwiek) dowody tożsamości

$$\sum_{k=0}^{m} (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} \qquad \sum_{k=m}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}.$$

9. Sprawdzić indukcyjnie, że oznaczając $x^{\overline{k}} = x(x+1)\ldots(x+k-1)$, mamy

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}, \qquad x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

10. **Liczby Bella**. Niech $B(n)$ będzie liczbą wszystkich partycji zbioru n-elementowego na niepuste podzbiory; sprawdzić że $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$; zauważyć, że $B(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

11. Sprawdzic, że liczby Bella spełniają wzór rekurencyjny

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

Uwaga: Pewne spostrzeżenia dotyczące premutacji, na przykładzie.
Przykładowa permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, 6\}$ w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie zapis oznacza, że $\sigma(1) = 6$, $\sigma(2) = 5$ itd. Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle: w przykładzie $\sigma = (16)(253)(4)$ - w nawiasie każdy element przechodzi na następny, ostatni na pierwszy.
Przydatna jest uwaga, że każda permutacja 6 elementów wyznacza jednoznacznie cykl siedmioelementowy, w przykładzie jest to (6524317).
Podsumowując, istnieje bijekcja pomiędzy podziałem zboru mocy 6 na cykle, a cyklami zbioru siedmioelementowego.