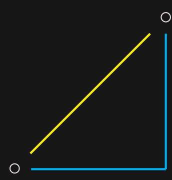
PRZESTRZENIE METRYCZNE

konsultacje - poniedzialek godz 9:00

METRYKI

odleglosc nie jest dana raz na zawsze - mozna isc na skos z punktu do punku, a mozna pojsc po siatce prostokatnej



METRYKA na zbiorze X nazwyamy pewna funkcje

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

taka, ze

1. $d(x,x) = 0 \ \wedge \ d(x,y) > 0$ odleglosc miedzy roznymi punktami jest wieksza niz 0
2. $d(x,y) = d(y,x)$ symetria
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ warunek trojkata

PRZYKLADY

$\mathbb{R}$ $d(x,y) = |x,y|$

$\mathbb{R}^2$ $d(x,y) = \sqrt{(x(0)-y(0))^2 + (x(1)-y(1))^2}$

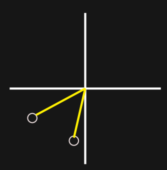
$\mathbb{R}^n$ $d(x,y) = \sqrt{(x(0)-y(0))^2 + ... + (x(n-1)-y(n-1))^2}$ metryki euklidesowe

$\mathbb{R}^2$ $d(x,y) = |x(0)-y(0)| + |x(1)-y(1)|$ metryka miasto

$\mathbb{R}^2$ $d(x,y) = \max(|x(0)-y(0)|, |x(1)-y(1)|)$ metryka maksimum

$\mathbb{R}^2$ $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ metryka dyskretna (jest czesto kontrprzykladem)

$\mathbb{R}^2$ metryka centrum mierzymy odleglosci obu punktow od srodka



PRZESTRZEN METRYCZNA - zbior, w ktorym zostala okreslona pewna metryka
(X, d), gdzie d jest metryka na X

metryka supremum - potrzebujemy zamkniety przedzial, gdyz chcemy zeby kresy istnialy

$C[0,1]$ - zbior funkcji ciaglych

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

metryka calkowa - liczyny pole pomiedzy dwoma wykresami funkcji

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

metryka bez nazwy??? (dla nas domyslna na ciagu liczb 0, 1)

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$\Delta(x,y) = \min\{k : x(k) \neq y(k)\}$ - minimalne miejsce, gdzie ciagi sie rozjezdzaja

metryka Hamminga zwraca, na ilu miejscach dwa ciagi sie roznia i ile trzeba zmian zeby je na siebie nalozyc

DEFINICJE

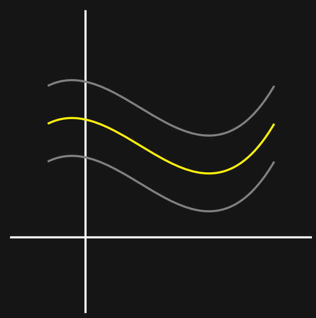
dzialamy caly czas na przestrzeni metrycznej (X, d)

KULA o srodku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

kula dla nas jest kula otwarta, czyli nie zawiera krawedzi i *nie zawsze musi wygladac jak kula* - na przyklad w $(\mathbb{R}^2, d_{\mathtt{miasto}})$ to obrocony kwadrat, a w $(\mathbb{R}^2, d_{\mathtt{dyskretna}})$ to albo punkt (gdy $r \leq 1$) lub cala przestrzen

$(C[0,1], d_{\mathtt{sup}})$ - kula o $r = 1$ beda wszystkie funkcje, ktore nie wychodza poza "korytaryk" od ustalonego f na r i wiecej (wszystkie funkcje ograniczone szarymi liniami nizej)



ciag (x_n) zbiega do $x \in X$, jezeli

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N \quad d(x_n, x) < \epsilon$$

czyli w kazdej kuli o srodku w x leza prawie wszystkie wyrazy (x_n)

$(\mathbb{R}^n, d_{\mathtt{eukl}})$ zachodzi zbieznosc po wspolrzednych: $(x_n) \xrightarrow{d} x \iff \forall\, i < n \quad x_n(i) \to x(i)$ jednostajna zbieznosc - w metryce supremum, definicja na liscie zadan

zbior $U \subseteq X$ jest otwarty, jezeli

$$\forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 \quad B_r(x) \subseteq U$$

czyli w kazdym elemencie zbioru mozna narysowac kule, ktora sie w nim zawiera

U, V - otwarte $\implies U \cap V$ - otwarty
$x \in U \cap V$
$\exists\, r_0 > 0 \quad B_{r_0} \subseteq U$
$\exists\, r_1 > 0 \quad B_{r_1} \subseteq V$
$r = \mathtt{min}(r_0, r_1)$
$B_r(x) \subseteq U \cap V$

$\mathcal{U}$ - rodzina zbiorow otwartych $\implies \bigcup \mathcal{U} = \{x : \exists\, U \in \mathcal{U}\ x \in U\}$ jest otwarte
NAPISAC DOWOD

U jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy U jest suma kul. Wynika to z powyzszego faktu (tj. suma zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym) oraz tego, ze kula jest zbiorem otwartym