DOBRE PORZADKI, LICZBY PORZADKOWE

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorow jest przeliczalna:

$$\aleph_0 \geq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |A_n| \leq \aleph_0$$

DOWOD:

Poniewaz $|A_n| \leq \aleph_0$ $n \in \mathbb{N}$, istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Chcemy pokazac, ze istnieje rowniez bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$f(n,k) = f_n(k) \quad (☕)$$

Musimy skorzystac z aksjomatu wyboru, poniewaz nie wystarczy nam tylko jeden element z (f_n) - potrzebujemy znac wlasnosci wszystkich elementow (f_n) jednoczesnie. Rozpatrujemy wiec zbior funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}} \;:\; \varphi \text{ jest bijekcja}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ to wszystkie funckje $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *lub z* $\mathbb{N}$ *do podzbioru* A_n. Niech F bedzie funkcja wyboru dla rodziny $\{F_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, czyli kazdej rodzinie przypisuje element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Przepiszmy wiec (☕) w sposob bardziej formalny:

$$f(n,k) = F(F_n)(k).$$

Poniewaz $F(F_n)$ jest bijekcja, to rowniez f jest bijekcja.

i smiga

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jesli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem czesciowo uporzadkowanym, w ktorym kazdy lancuch jest ograniczony z gory, to w X istnieje element maksymalny.

TWIERDZENIE: dla dowolnych zbiorow A, B zachodzi $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$

DOWOD:

Musimy skonstruowac *zbior czesciowo uporzadkowany* X*, do ktorego bedziemy mogli zastosowac LKZ*. Elementami tego zioru niech beda przyblizenia tego, co chcemy otrzymac:

$$X = \{f \;:\; \mathtt{fnc}(f) \;\wedge\; \mathtt{dom}(f) \subseteq A \;\wedge\; \mathtt{rng}(f) \subseteq B \;\wedge\; \text{f jest 1-1}\}.$$

Bedziemy rozpatrywali $\langle X, \subseteq \rangle$. Chcemy zastosowac do niego LKZ, czyli musimy sprawdzic zalozenia.

Niech

$$\mathcal{L} \subseteq X$$

bedzie lancuchem w X. Chcemy pokazac, ze ma on ograniczenie gorne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L},$$

wtedy L jest ograniczeniem gornym $\mathcal{L}$, bo zawiera wszystkie elementy tego lancucha.

Znalezlismy juz ograniczenie gorne lancucha $\mathcal{L}$, teraz musimy pokazac, ze L jest elementem zbioru X z zalozenia, czyli spelnia nastepujace warunki:

1. L jest zbiorem par uporzadkowanych. Stwierdzenie to wynika bezposrednio z faktu, ze L jest suma lancucha.
2. L jest funkcja, gdyz elementami zbioru X sa funkcje.

Chcemy pokazac, ze

$$\forall\, x, y, z \quad \langle x, y \rangle \in L \;\wedge\; \langle x, z \rangle \in L \implies y = z,$$

czyli L jest zbiorem takich par uporzadkowanych, ze jesli dwie pary maja ten sam poprzednik, to maja tez ten sam nastepnik (def. funkcji).

Ustalmy dowolne x, y, z takie, ze $\langle x, y \rangle \in L$ i $\langle x, z \rangle \in L$. Zatem istnieja $F, G \in \mathcal{L}$ takie, ze

$$\langle x, y \rangle \in F \;\wedge\; \langle x, z \rangle \in G.$$

Poniewaz $\mathcal{L}$ ma ograniczenie gorne (czyli jest zbior do ktorego naleza wszystkie pozostale) i jest lancuchem, wszystkie jego elementy mozemy porownac miedzy soba. Czyli, bez straty ogolnosci, mozemy zalozyc, ze $F \subseteq G$ i wowczas

$$\langle x, y \rangle \in G \text{ i } \langle x, z \rangle \in G \implies y = z$$

gdyz zbior G jest funkcja ($\mathtt{fnc}(G)$).

3. $\text{dom}(L) \subseteq A$
4. $\text{rng}(L) \subseteq B$

zalozenie 3. i 4. wynikaja bezposrednio z definicji zbioru X oraz L

$$\text{dom}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \text{dom}(F)$$

$$\text{rng}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \text{rng}(F)$$

5. L jest funkcja roznowartosciowa (iniekcja), czyli jesli $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ to $x = z$.

Ustalmy dowolne x, y, z takie, ze $\langle x, y \rangle \in L$ i $\langle z, y \rangle \in L$. Zatem istnieja $F, G \in \mathcal{L}$ takie, ze

$$\langle x, y \rangle \in F \ \wedge \ \langle z, y \rangle \in G$$

Poniewaz $\mathcal{L}$ jest lancuchem, to mozemy zalozyc, ze $F \subseteq G$, a poniewaz $\mathcal{L} \subseteq X$ i X zawiera jedynie iniekcje, to

$$\langle x, y \rangle \in G \ \wedge \ \langle z, y \rangle \in G \implies x = z.$$

Poniewaz pokazalismy, ze dowolny lancuch X jest ograniczony z gory, to na mocy w X istnieje element maksymalny $\varphi \in X$. Rozpatrzmy trzy mozliwosci:

1. $\text{dom}(\varphi) = A$. Wowczas z definicji zbioru X otrzymujemy $\varphi : A \xrightarrow{1-1} B$, czyli $|A| \leq |B|$.
2. $\text{rng}(\varphi) = B$. Wtedy $|B| \leq |A|$, bo

$$\varphi : \text{dom}(\varphi) \xrightarrow[\text{"}na\text{"}]{1-1} B$$

$$\varphi^{-1} : B \xrightarrow[\text{"}na\text{"}]{1-1} \text{dom}(\varphi) \subseteq A$$

3. $\text{dom}(\varphi) \neq A \ \wedge \ \text{rng}(\varphi) \neq B$. Czyli $\text{dom}(\varphi) \subsetneq B$ i $\text{rng}(\varphi) \subsetneq B$, zatem istnieja $s \in A \setminus \text{dom}(\varphi)$ i $t \in B \setminus \text{rng}(\varphi)$. W takim razie φ moze byc rozszerzona do:

$$\varphi' = \varphi \cup \{\langle s, t \rangle\}.$$

$\varphi' \in X$ jest iniekcja, bo $t \notin \text{rng}(\varphi)$. Dodatkowo,

$$\varphi \subsetneq \varphi',$$

czyli φ nie jest elementem maksymalnym X, stad zachodzi tylko 1 lub 2, czyli $|A| \leq |B|$ lub $|A| \geq |B|$.

i smiga

LICZBY PORZADKOWE

jeli $\langle X, \leq \rangle$ jest liniowo uporzadkowany i w kazdym niepustym podzbiorze zbioru X istnieje element najmniejszy, to $\leq$ jest dobrym porzadkiem

CZESCIOWY LINIOWY DOBRY PORZADEK $\langle X, \leq \rangle$

$$\forall\, A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \implies (\exists\, a \in A\, \forall\, x \in A \quad x \leq A)$$

$$\forall\, a, b \in A \quad a \leq b \vee b \leq a$$

oraz $\leq$ jest *zwrotny, przechodni i slabo antysymetryczny*

Ostry porzadek $<$ zdefiniowalismy jako skrot

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y,$$

teraz chcemy go zdefiniowac jako pewien byt.

TW: relacja $<$ jest przechodnia ($\forall\, x, y, z \in X \quad x < y \wedge y < z \implies x < z$) i silnie antysymetryczna.

TW: Jesli $<$ jest relacja przechodnia i slniei antysymetryczna, to relacja zadana warunkiem

$$x \leq y \iff x < y \vee x = y$$

jest czesciowym porzadkiem.

TW: Kazdemu czesciowemu porzadkowi odpowiada tylko jeden ostry porzadek i kazdemu ostremu porzadkowi odpowiada tylko jeden czesciowy porzadek - powyzsza odpowiedniosc jest wzajemnie jednoznaczna.

SPOJNOSC (!krach nie wie jak to sie nazywa!) to warunek mowiacy, ze

$$\forall\, x, y \quad x \neq y \implies xRy \vee yRx$$

TWIERDZENIE: Porzadek jest liniowy wtw zwiazany z nim ostry czesciowy porzadek jest spojny.

TWIERDZENIE: Porzadek liniowy jest dobry wtw osty porzadek z nim zwiazany jest dobry

$$\forall\, A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A\, \forall\, y \in A \quad \neg\, y < x$$

co dla porzadkow liniowych jest rownowazne z:

$$\forall\, A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A\, \forall\, y \in A \quad \neg\, y \leq x$$

czyli teraz nie bedziemy rozrozniac miedzy porzadkiem ostrym a porzadkiem slabym - bedziemy sie odwoliwac do tego, co jest w danym moemncie wygodne.

RZECZY BARDZIEJ PODNIECAJACE

Zajmujemy sie dobrymi porzadkami

NA CO ONE KURWA SA PRZYKLADAMI
NA DOBRE PORZADKI??

1. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ - zasada minimum mowi, ze w kazdym niepystym podzbiorze $\mathbb{N}$ jest element najmniejszy, co jest rownowazne z zasada indukcji matematycznej.
2. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ jest w naturalny sposob izomorrficzny ze zbiorem $\mathbb{N}$
3. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \leq \rangle$ mozemy rozwazac, czy do podzbioru nalezy czy nie nalezy 1 LUB czy kroi sie z przedzialem awartym w $[0, 1]$ pusto czy nie pusto.
4. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ - tak samo jak wyzej, bo bierzemy podzbiory $[0, 1]$ i $[1, 2]$ i sa one niepuste
5. $\langle \{n - \frac{1}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ - rozwazamy przedzialy od n do $n + 1$. Jest to dobry porzadek, bo jesli wezmiemy dowolny niepusty podzbior A, to on sie kroi niepusto z przedzialem $[n, n + 1) \neq \emptyset$. Wtedy element minimalny to $\min\{n \in \mathbb{N} \ : \ A \cap [n, n + 1) \neq \emptyset\}$

Wszystkie powyzsze porzadki sa podobne, ale sa od siebie rozne - na przyklad 1 i 3 nie sa izomorficzne, bo 1 ma element maksymalny, a 3 nie ma elementu maksymalnego.

ODCINEK POCZATKOWY - niech $\langle X, \leq \rangle$ bedzie zbiorem z dobrym porzadkiem $\leq$ i $a \in X$. Wowczas odcinkiem poczatkowym tego zbioru wyznaczonym przez a jest zbior

$$\texttt{pred}(X, a, \leq) = \{x \in X \ : \ x < a\}$$

Widac, ze w przykladach wyzej kazdy poprzedni zbior jest odcinkiem poczatkowych tego nastepnego (przyklady 2 do 3 sa odcinkami wyznaczonymi przez $1 \in \mathbb{R}$). Bycie "krotszym porzadkiem" odpowiada byciu odcinkiem poczatkowym dluzszego porzadku.

TWIERDZENIE: dla dowolnego $a \in X$:

$$\texttt{pred}(X, a, \leq) \not\simeq X$$

DOWOD:

Przypuscmy, nie wprost, ze dla pewnego $a \in X$ mamy

$$\texttt{pred}(X, a, \leq) \simeq X,$$

czyli istnieje izomorfizm $f : X \to \texttt{pred}(X, a, \leq)$. Wtedy $f(a) < a$ i zbior

$$A = \{x \in X \ : \ f(x) < x\}$$

jest niepusty. Niech $b = \min A$, ale wtedy

$$f(b) < b \implies f(f(b)) < f(b),$$

bo f jest izomorfizmem, wiec zachowuje porzadek. Czyli $b > f(b) \in A$, co jest sprzeczne z $b = \min A$.

i smiga

Niech $\langle X, \leq_x \rangle$, $\langle Y, \leq_y \rangle$ beda zbiorami dobrze uporzadkowanymi. Wtedy zachodzi jedna z trzech mozliwosci:

1. te dwa zbiory sa izomorficzne ($X \simeq Y$), czyli sa tej samej dlugosci
2. pierwszy jest dluzszy od drugiego:

$$\exists\, a \in X \quad \langle \texttt{pred}(X, a, \leq_x), \leq \rangle \simeq \langle Y, \leq_y \rangle$$

3. drugi jest dluzsze od pierwszego:

$$\exists\, a \in Y \quad \langle \texttt{pred}(Y, a, \leq_y), \leq \rangle \simeq \langle X, \leq_x \rangle$$

To wymagaloby udowodnic, ale nie bedziemy tego robic, bo sa ciekawsze rzeczy, a dowod jest zmudny i nieprzyjemny, gdzie trzeba sie nagrzebac, a to jest przyjemny wyklad i za niedlugo bedziemy z tego korzystac bez dowodzenia :3

ZBIOR TRANZYTYWNY

Zbior A nazywamy zbiorem TRANZYTYWNYM,
gdy kazdy jego element jest zarazem jego podzbiorem:

$$\forall\, x \in A \quad x \subseteq A,$$

co jest rownowazne zapisowi:

$$\forall\, y \forall\, z \quad z \in y \in x \implies z \in x$$

PRZYKLADY:

$\emptyset$ jest tranzytywny, bo nie ma elementow - skoro one nie istnieja, to moga miec dowolne wlasnosci, w szczegolnosci moga byc podzbiorami $\emptyset$. Tak jak na *Wystach Bergamota*.

$\{\emptyset\}$ jest to zbior, ktorego jedynym elementem jest $\emptyset$, a poniewaz jest on tez jego podzbiorem, to smiga.

$\mathtt{Tran}(\emptyset, \{\emptyset\})$ jest zbiorem tranzytywnym, bo jednym jego elementem jest $\emptyset$, drugim singleton $\emptyset$. Oba sa elementami i zawieraja sie w tym zbiorze.

$\mathtt{Tran}(\omega)$ kazda liczba naturalna jest zbiorem liczb od siebie mniejszych, *bardziej dokladny dowod pojawi sie na cwiczeniach*.

¡¡¡elementy moich elementow sa moimi elementami!!!

$$\mathtt{Tran}(A) \iff \forall\, x \in A\, \forall\, t \in x \quad t \in A$$

Jezeli zbior jest tranzytywny, to tranzytywna jest tez jego suma, zbior potegowy i jego nastepny:

$$\mathtt{Tran}(A) \implies \mathtt{Tran}(\bigcup A) \implies \mathtt{Tran}(\mathcal{P}(A)) \implies \mathtt{Tran}(A \cup \{A\})$$

DOWOD:

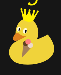
Udowodnimy ostatnia implikacje, czyli

$$\mathtt{Tran}(A) \implies \mathtt{Tran}(A \cup \{A\})$$

Ustalmy $x \in A \cup \{A\}$. Wtedy mamy dwa przypadki:

1. $x \in A$, a poniewaz $\mathtt{Tran}(A)$, to $\forall\, x \in x \quad t \in A$.
2. $x \in \{A\}$, czyli $x = A$, a z $\mathtt{Tran}(A)$ otrzymujemy, ze $t \in x \implies t \in A \implies t \in \{A\}$.

i smiga



LICZBY PORZADKOWE

Zbior tranzytywny A nazywamy LICZBA PORZADKOWA, jesli spelnia warunek

$$\forall\, x, y \in A \quad x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

jest liniowo uporzadkowany przez relacje nalezenia

i uzywamy oznaczenia $\mathtt{On}(A)$

Liczby porzadkowe oznaczamy przy pomocy liter greckich: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \zeta, \xi$.

Jesli $\mathtt{On}(\alpha)$, to α jest dobrze uporzadkowane przez $\in$, czyli kazdy niepusty zbior $A \subseteq \alpha$ ma element $\in$- minimalny:

$$\forall\, A \subseteq \alpha \quad (A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A\, \forall\, y \in A \quad x = y \vee x \in y),$$

co wynika z aksjomatu regularnosci.

PODSTAWOWE WLASNOSCI LICZB PORZADKOWYCH:

1. Jesli $y \in \alpha$, to $\mathtt{On}(y)$ - elementy liczby porzadkowej sa liczbami porzadkowymi
2. $\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$
3. $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ - dowolne dwie liczby porzadkowe sa porownywalne (nie mozemy uzyc 3. jako dowodu 2., bo w dowodzie 3. uzywamy 2.)
4. $\mathtt{Tran}(C) \implies \mathtt{On}(C)$
5. $C \neq \emptyset \implies \exists\, \alpha \in C\, \forall\, \beta \in C \quad \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta$