Symbole Newtona

1. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k$ i $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}10^k$.

2. Używając argumentacji kombinatorycznej udowodnić tożsamość dla $n \geqslant 3$ (w podanej formie)
$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$
`Wskazówka:` Niech S będzie zbiorem z 3 wyróżnionymi elementami a, b i c. Zliczyć pewne k-kombinacje S.

3. Wyprowadzić wzór
$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$
`Wskazówka 1:` zróżniczkować wzór na $(1+x)^n$. `Wskazówka 2:` Jesteś szefem zespołu n pracowników. Oblicz na ile sposobów możesz dać pewnej liczbie osób podwyżkę i dodatkowo jedną z tych osób awansować.

4. Przypomnijmy, że dla $x \in \mathbb{R}$ i naturalnej liczby $k \geqslant 1$ definiujemy
$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$
Dodatkowo, $\binom{x}{0} = 1$ i $\binom{x}{-k} = 0$. Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i wszystkich liczb całkowitych k i m zachodzą wzory
$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}, \quad \binom{-x}{k} = (-1)^k\binom{x+k-1}{k}, \quad \binom{x}{m}\binom{m}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{m-k}.$$

5. Używając argumentacji kombinatorycznej pokazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m_1, m_2 i n mamy
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

6. Znaleźć wzór na
$$\sum_{\substack{r,\ s,\ t \geqslant 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t},$$
gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych r, s i t spełniających $r+s+t=n$.

7. Udowonić za pomocą wzoru Taylora, że dla $|x|<1$ i dowolnej liczby α zachodzi wzór
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

8. Udowodnić przez indukcję, że dla dowolnej naturalnej liczby n mamy
$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k, \qquad |z|<1.$$

9. Sprawdzić przez indukcję wzór
$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

10. Obliczyć sumę $1^2+2^2+\ldots+n^2$ korzystając ze wzoru $m^2=2\binom{m}{2}+\binom{m}{1}$ oraz z poprzedniego zadania.

11. Znaleźć liczby całkowite a, b i c spełniające
$$m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}.$$
Następnie znaleźć wzór na $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

Zbiory z powtórzeniami

12. Wyznaczyć liczbę 11 elementowych wariacji (z powtórzeniami) zbioru z powtórzeniami $S=\{3\cdot a,\ 4\cdot b,\ 5\cdot c\}$. Wyznaczyć też liczbę 10 elementowych takich wariacji.

13. Wyznaczyć liczbę wszystkich kombinacji (dowolnego rozmiaru) zbioru z powtórzeniami $S=\{n_1\cdot a_1,\ldots,n_k\cdot a_k\}$.

14. Wyznaczyć liczbę r elementowych kombinacji zbioru $\{1\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \ldots,\ \infty\cdot a_k\}$. Ogólniej, wyprowadzić wzór na liczbę r-kombinacji zbioru, w którym liczby powtórzeń są równe 1 lub ∞.

15. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3=14$ w nieujemnych liczbach całkowitych.

16. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ w liczbach całkowitych takich, że $1\leqslant x_1$, $0\leqslant x_2$, $4\leqslant x_3$ i $2\leqslant x_4$.

17. Sekretarka pracuje w budynku położonym 9 przecznic na wschód i 7 na północ od swojego domu. Codziennie przechodząc do pracy przechodzi 16 odcinków ulic. Ile jest możliwych tras ? Załóżmy, że odcinek ulicy w kierunku wschodnim, zaczynający się 4 przecznice na wschód i 3 na północ, został zalany, a sekretarka nie umie (lub nie chce) pływać. Ile jest wtedy możliwych tras ?

Zasada włączeń i wyłączeń

18. Niech A_1,A_2,A_3 będą podzbiorami zbioru skończonego X. Sprawdzić, że
$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

19. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 5 ani 6 ?

20. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), które nie są kwadratami ani sześcianami liczb całkowitych ?

21. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3=14$ w nieujemnych liczbach całkowitych nie przekraczających 8.

22. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ w liczbach całkowitych takich, że $1\leqslant x_1\leqslant 6$, $0\leqslant x_2\leqslant 7$, $4\leqslant x_3\leqslant 8$ i $2\leqslant x_4\leqslant 6$.

Zadanie uzupełniające (autorstwa Piotra BN, dla odczuwających niedosyt:-)

Udowodnić, że jeżeli dwie funkcje f,g określone na skończonym zbiorze X spełniają dla każdego $x\in X$ warunek $f(x)\neq g(x)$ to istnieje $A\subseteq X$, taki że $|A|\geqslant |X|/4$ i $f[A]\cap g[A]=\emptyset$.

Być może następująca wersja zawiera wskazówkę: jeżeli funkcja $h:X\to Y\times Y$ nie przyjmuje wartości na przekątnej to istnieje $B\subseteq Y$, taki że
$$\left|h^{-1}[B\times(Y\setminus B)]\right|\geqslant |X|/4.$$