LISTA 0

ZAD 1. Rozstrzygnij, z uzasadnieniem, ktore z podanych zbiorow sa cialami

a. $\mathbb{Q}$
b. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
c. $\mathbb{Q}[i]$
d. $\mathbb{Z}$
e. $\mathbb{Z}_n$

Tu $\mathbb{Z}_n$ to liczby calkowite od 0 do $n-1$ z dodawaniem i imnozeniem modulo n. W pozostalych zbiorach dodajemy i mnozymy jak zwykle w C.
(Mozesz zalozyc bez dowodu, ze dzialania dodawania i mnozenia w C spelniaja oczywiste wlasnosci lacznosci, przemiennosci i rozdzielnosci).

a. $\mathbb{Q}$: TAK

dodawanie i mnozenie sa przemienne oraz laczne, a mnozenie jest rozdzielne wzgledem dodawania

0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 jest elementem neutralnym mnozenia i oba naleza do liczb wymiernych

dla kazdego $x \in \mathbb{Q}$ istnieje $-x$ takie, ze $x + (-x) = 0$

dla kazdego $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ istnieje takie X^{-1}, ze $x \cdot x^{-1} = 1$

$0 \neq 1$

ZAD 2. Uzywajac jedynie aksjomatow przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjni, ze $5(u+w)+2w = 7(u+w)+(-2)u$.

$$5(u+w)+2w = 7(u+w)+(-2)u$$

Mnozenie przez skalar jest rozdzielne wzgledem dodawania wektorow:

$$5u+5w+2w = 7u+7w+(-2)u$$

Dodawanie wektorow jest przemienne:

$$5u+5w+2w = 7u+(-2)u+7w$$

Mnozenie przez wektor jest rozdzelne wzgledem dodawania skalarow:

$$5u+(5+2)w = (7+(-2))u+7w$$

$$5u+7w = 5u+7w$$

ZAD 3. Uzasadnij, ze jesi K jest cialem, to elementy odwrotny i przeciwny do danego sa jedyne, to znaczy:

a. dla kazdych x, y, jezeli $x + y_1 = x + y_2 = 0$, to $y_1 = y_2$

$$\begin{cases} x + y_1 = 0 \\ x + y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y_1 \\ x = -y_2 \end{cases}$$

$$-y_1 = -y_2$$

$$y_1 = y_2$$

b. dla kazdych x, y, jezeli $xy_1 = xy_2 = 1$, to $y_1 = y_2$

$$\begin{cases} xy_1 = 1 \\ xy_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y_1} \\ xy_2 = \frac{1}{y_2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{y_2}$$

$$y_2 = y_1$$

ZAD 4. Udowodnij, ze w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w to wektoy):

a. $-(v-w) = (-v) + w$

$$-(v-w) = (-v) + w$$
$$-v - (-w) = -v + w$$
$$-v + w = -v + w$$

b. $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$???
c. $(a-b)v = av - bv$
mnozenie przez wektor jest rozdzielne wzgledem dodawania skalarow
d. $a(-v) = (-a)v = -av$
mnozenie przez skalar jest zgodne z mnozeniem skalarow
e. $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$
1. $a = b$
$L = av + bw = bv + bw = bv + aw = P$
2. $v = w$
$L = av + bw = aw + bw = aw + bv = bv + aw = P$

ZAD 5. Znajdz Lin$((1,2,3)^T, (4,5,6)^T)$ w $\mathbb{R}^3$ (opisz ten zbior rownaniem lub ukladem rownan).

jest to otoczka liniowa tego wektora

ZAD 6. Odwolujac sie do wiedzy z I semestru opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$

ZAD 7. Uzasadnij, ze jesli w ukladzie $v_1, ..., v_n$ pewne dwa wektory sa rowne, to uklad ten jest lz. Uzasadnij, ze jesli w ukladzie $v_1, ..., v_n$ pewien wektor jest rowny 0, to uklad ten jest lz.

ZAD 8. Zalozmy, ze V jest przestrzenia liniowa nad cialem skonczonym K o p^k elementach. Niech $v_1, v_2, v_3 \in V$ beda liniowa niezalezne. Ile elementow Lin$(v_1, v_2, v)_3$?

ZAD 9. Dla $z \in \mathbb{C}$ sprobuj zdefiniowac, czym powinno byc $\mathbb{Q}[z]$ (jak wygladaja jego elementy), jezeli ma byc zamniete na mnozenie i dodawanie, przy zalozeniu, ze

a. $z^3 \in \mathbb{Z}$
b. $z^2 + z + 1 = 0$
c. z jest dowolna.

Kiedy $\mathbb{Q}[z]$ jest cialem? Podaj przyklad $z \in \mathbb{C}$ dla ktorego $\mathbb{Q}[z]$ nie jest cialem.