Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podostawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem sekualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.

Spis treści

1 JĘZYK LOGIKI

1.1 FUNKCJE

FUNKCJA – zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczości, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji – nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x : (\exists\, y)\ \langle x, y\rangle \in f\}$$
$$\mathrm{rng}(f) = \{y : (\exists\, x)\ \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako *podzbioru* $f \in X \times Y$ *takiego, że dla każdego* $x \in X$ *istnieje dokładnie jeden* $y \in Y$ *takie, że* $\langle x, y\rangle \in f$ jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej $\{A_i : i \in I\}$ definiujemy:

- jej sumę: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists\, i \in I)\ x \in A_i\}$
- jej przekrój: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall\, i \in I)\ x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ definiujemy:

- suma: $\bigcup \mathcal{A} = \{x : (\exists\, A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$
- przekrój: $\bigcap \mathcal{A} = \{x : (\forall\, A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rdzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y\rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z\rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i wiecej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny – iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle\langle a_1, a_2\rangle a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle.$$

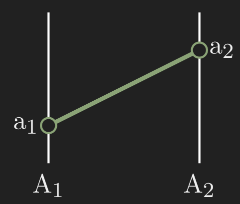
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

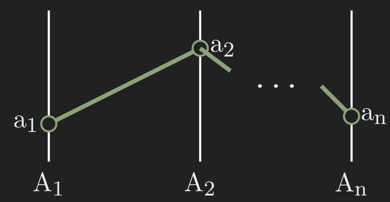
$$A : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym indeksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I \ : \ (\forall\, i \in I)\ f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla $I = \{1, 2\}$ nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są róże. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

JĘZYK RZĘDU ZERO, czyli rachunek zdań: $p, q, r, ..., \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych: $V = \{x_0, x_1, ...\}$
2. symbole spójników logicznych: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów: $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości: $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne: $F = \{f_i : i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty): $R = \{r_j : j \in J\}$
3. symbole stałe: $C = \{c_k : k \in K\}$

ARNOŚĆ – odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

SYGNATURA – zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA

Znała suma cała rzeka,
Więc raz przybył lin z daleka
I powiada: "Drogi panie,
Ja dla pana mam zadanie,
Jeśli pan tak liczyć umie,
Niech pan powie, panie sumie,
Czy pan zdoła w swym pojęciu,
Odjąć zero od dziesięciu?"
(...)
"To dopiero mam z tym biedę -
Może dziesięc? Może jeden?"

Jak odjąc 0 od 10:
  semantycznie: 10 - 0 = 10
  syntaktycznie: od ciągu 1 i 0 odjęcie 0 to zostawienie tylko 1

SEMANTYKA - patrzy na znaczenie zapisów, nie sam napis.
SYNTAKTYKA - interesuje ją tylko zapis, język, a znaczenia nie ma.

1.5 KONSTRUOWANIE JĘZYKA

TERMY - bazowy zbiór termów to zbiór zmiennych i zbiór stałych:

$$T_0 = V \cup C$$

Do ich budowy wykorzystujemy symbole funkcyjne (F)

Załóżmy, że mamy skonstruowane termy aż do rzędu n i chcemy skonstruować termy rzędu $n+1$. Jeśli mamy symbol funkcyjny arności k, to termem jest zastosowanie tego symbolu do wczesniej skonstruowanych termów, których mamy k:

$$f \in F \quad f \text{ -arności } k$$

$$F(t_1, ..., t_k) \quad t_1, ..., t_k \in \bigcup_{i=0}^{n} T_i$$

Czylil jeśli mamy zbiór termów, to *biorąc wszystkie dostępne symbole funkcyjne i stosując je na wszystkie możliwe sposoby do dotychczas skonstruowanych termów* tworzone są nowe termy.

Termy to potencjalne wartości funkcji

FORMUŁY - budowane są rekurencyjnie, zaczynając od formuł atomowych:

$$t = s, \quad t, s \in TM$$

stosując wszystkie relacje równoważności termów

$$r \in R \quad r(t_1, ..., t_k)$$

zastosowanie symbolu relacyjnego na odpowiedniej ilości termów tworzy formułę

Bazowym poziomem frmuł jest formuła atomowa:

$$F_{m_0} = \{\varphi : \varphi \text{ - formuła atomowa}\}$$

Jeśli mamy F_{m_k} dla pewnego $k < n$, czyli wszystkie formuły poniżej n zostały skonstruowane, to

$$F_{m_n} : \neg(\varphi),\ \varphi \vee \phi,\ \varphi \wedge \phi, ... \quad \text{dla } \varphi, \phi \in \bigcup_{k<n} F_{m_k},$$

czyli używamy wszystkich spójników logicznych dla poprzednich formuł

$$\mathrm{Fm_n} \ : \ (\forall\, \varphi)\ (\exists\, x_i) \quad \text{dla } \varphi \in \bigcup_{k<n} \mathrm{Fm_k},\ x_i \in V$$

kwantyfikujemy też po wszystkich możliwych zmiennych wszystkiemożliwe formuły

$$\mathrm{FM} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fm_n}$$

1.6 JĘZYK TEORII MNOGOŚCI

$$L = \{\in\}$$

składa się z jednego binarnego predykatu,
który nie jest jeszcze należeniem

W racuhnku zdań przejście z syntaktyki do semantyki to nadanie symbolom wartości prawda lub fałsz.

SYSTEM ALGEBRAICZNY:

$$\mathcal{A} = \langle A, \{F_i \ : \ i \in I\}, \{R_j \ : \ j \in J\}, \{C_k \ : \ k \in K\}\rangle$$

odpowiednio: zbiór (uniwersum), funkcje na A, relacje na A, stałe w A

przykłady: $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \leq\rangle$

Język L możemy interpretować w systemie $\mathcal{A}$ o ile mają one tę samą sygnaturę.

INTERPRETACJA to funkcja ze zbioru wartości w uniwersum:

$$i \ : \ V \to \mathcal{A},$$

którą można rozszerzyć do funkcji ze zbioru termów w uniwersum:

$$\bar{i} \ : \ \mathrm{TM} \to \mathcal{A}$$
$$i \subseteq \bar{i}$$

Ponieważ sygnatury są takie same, to każdemu symbolowi funkcyjnemu możemy przypisać funkcję o dokładnie tej samej arności. *Czyli jeśli dany symbol funkcyjny jest nakładany na termy, to odpowiadająca mu funkcja jest nakładana na wartości tych termów.*

W systemie $\mathcal{A}$ formuła φ jest spełniona przy interpretacji i:

$$\mathcal{A} \models \varphi[i]$$

Zaczynamy od formuł atomowych, czyli:

$\mathcal{A} \models (t = s)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą interpretację (czyli $\bar{i}(t) = \bar{i}(s)$)
$\mathcal{A} \models r_j(t_1, \ldots, t_k)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedająca temu predykatowi relacja zachodzi na wartościach termów (czyli $R_j(\bar{i}(t_1), \ldots, \bar{i}(t_k))$)
$\mathcal{A} \models (\neg\, \varphi)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathcal{A} \models \varphi[i]$, i tak ze wszystkimi spójnikami logicznymi
$\mathcal{A} \models (\forall\, x_m)\ \varphi[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\mathcal{A} \models \varphi[i(\frac{x_m}{a})]$ (sprawdzamy dla konkretnego a czy spełniaφ, a potem dla x_m przypisujemy to a, natomiast inne wartości dostają podstawienie $(\frac{x_m}{a})$?)

2 AKSJOMATY

Zbiór oraz należenie uznajemy za pojęcia pierwotne, więc nie definiujemy ich tylko opisujemy ich własności.

2.1 AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI

zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy

$$(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (x = y \iff (\forall\, z)\ (z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakładamy, że *istnieją wyłącznie zbiory*. Nie ma nie-zbiorów. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorów i okazuje się, że w tym świecie można zinterpretować całą matematykę.

2.2 AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO

istnieje zbiór pusty ∅

$$(\exists\, x)(\forall\, y)\neg\, y \in x$$

Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności oraz aksjomaty zbioru pustego można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

1. istnienie: aksjomat zbioru pustego
2. jedyność: niech P_1, P_2 będą zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego z zachodzi $\neg\, z \in P_1 \wedge \neg\, z \in P_2$, czyli $z \in P_1 \iff z \in P_2$. Wobec tego, na mocy aksjomatu ekstensjonalności mamy $P_1 = P_2$.

Przyjrzyjmy się następującemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N} \cap [10, +\infty), < \rangle$$

W systemie spełnione są oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Ponieważ nie mamy podanej interpretacji, a nasze aksjomaty są spełnione, to spełnione są dla dowolnej interpretacji.

2.3 AKSJOMAT PARY

dla dowolnych zbiorów x, y istnieje para $\{x, y\}$

$$(\forall\, x, y)\ (\exists\, z)\ (\forall\, t)\ (t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Para nieuporządkowana jest jednoznacznie wyznaczona. Aksjomat mówi tylko o istnieniu z, a można łatwo udowodnić, korzystając z aksjomatu ekstencjonalności, że takie z istnieje tylko jedno.

Niech P_1, P_2 będa parami nieuporządkowanymi x, y. W takim razie jesli $t \in P_1$, to $t = x \vee t = y$. Tak samo $t \in P_2 \iff t = x \vee t = y$. Czyli $P_1 = P_2$ bo posiadają te same elementy.

SINGLETONEM elementu x nazywamy zbiór $\{x\} := \{x, x\}$

PARĄ UPORZĄDKOWANĄ (wg. Kuratowskiego)
elementów x i y nazyway zbiór:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dla dowolnych elementów a, b, c, d zachodzi:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff a = c \wedge b = d$$

DOWOD:

Rozważmy dwa przypadki:

1. $a = b$

$$\langle a, a\rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

Czyli jeśli $x \in \{\{a\}\}$, to $x = \{a\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d\rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

A więc jeśli $x \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie mamy $\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$, a więc z aksjomatu ekstensjonalności, $a = c = d$.

2. $a \neq b$

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Jeśli więc $x \in \langle a, b\rangle$, to $x = \{a\}$ lub $x = \{a, b\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d\rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Jeśli $x \in \langle c, d\rangle$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie otrzymujemy $\{c\} = \{a\}$ i $\{c, d\} = \{a, b\}$. Z aksjomatu ekstensjonalności mamy $a = c$ oraz $d = b$.

i smiga

2.4 AKSJOMAT SUMY

Dla dowolnego zbioru istnieje jego suma

$$(\forall\, x)\ (\exists\, y)\ (\forall\, z)\ (z \in y \iff (\exists\, t)\ (t \in x \wedge z \in t))$$

Ponieważ wszystko w naszym świecie jest zbiorem, to *każdy zbiór możemy postrzegać jako rodzinę zbiorów* - jego elementy też są zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

Suma jest określona jednoznacznie i oznaczamy ją $\bigcup x$.

DOWOD:

Załóżmy nie wprost, ze istnieją dwie sumy zbioru x: S_1 i S_2. Wtedy

$$(\forall\, z)(z \in S_1 \iff (\exists\, t \in x)(z \in t))$$

$$(\forall\, z)(z \in S_2 \iff (\exists\, t \in x)(z \in t))$$

Zauważamy, że

$$z \in S_1 \iff (\exists\, t \in x) z \in t \iff z \in S_2$$

a więc S_1 i S_2 mają dokładnie te same elementy, więc z aksjomatu ekstencjonalności są tym samym zbiorem.

i smiga

Suma dwóch zbiorów:

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne z. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z \in \bigcup\{z, y\} &\overset{4}{\iff} (\exists\, t)\ (t \in \{x, y\} \wedge z \in t) \overset{3}{\iff} (\exists\, t)((t = x \vee t = y) \wedge z \in t) \iff \\ &\iff (\exists\, t)\ ((t = x \wedge z \in t) \vee (t = y \wedge z \in t)) \iff \\ &\iff (\text{exists } t)(t = x \wedge z \in t) \vee (\exists\, t)(t = y \wedge z \in t) \implies \\ &\implies (\exists\, t)(z \in x) \vee (\exists\, t)(z \in y \iff z \in x \vee z \in y) \end{aligned}$$

i smiga

2.5 AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

dla każdego zbioru istnieje jego zbiór potęgowy

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z) z \in y \iff (\forall\ t \in z) t \in x$$

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z)\ z \in y \iff z \subseteq x$$

Zbiór potęgowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go $\mathcal{P}(x)$

DOWOD:

Załóżmy, nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory potęgowe P_1 i P_2 dla pewnego zbioru x. Wówczas

$$(\forall\ z)\ z \in P_1 \iff z \subseteq x$$

$$(\forall\ z)\ z \in P_2 \iff z \subseteq x$$

Zauważamy, że

$$z \in P_1 \iff z \subseteq x \iff z \in P_2,$$

czyli zbiory P_1 i P_2 mają dokładnie te same elementy, więc na mocy aksjomatu ekstencjonalności $P_1 = P_2$

i smiga

2.6 AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

To tak naprawdę schemat aksjomatu, czyli nieskończona rodzina aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(t)$ będzie formułą języka teorii mnogości. Wtedy dla tej formuły mamy $A_{6\varphi}$ dla każdego zbioru x istnieje zbiór, którego elementy spełniają własność φ

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ t)(t \in y \iff t \in x \land \varphi(t))$$

FULL VERSION: niech $\varphi(t, z_0, ..., z_n)$ będzie formułą jezyka teorii mnogści. Wtedy pozostałe zmienne wolne będa parametrami (zapis skrócony $z_0, ..., z_n := \overline{z}$)

Dla każdego układu parametrów i dla każdego x istnieje y taki, że dla każdego $t \in y$ t należy do x i t spełnia formułę φ

$$(\forall\ z_0)...(\forall\ z_n)(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ t)(t \in y \iff t \in x \land \varphi(t, z_0, ..., z_n))$$

Weźmy półprostą otwartą:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 0\},$$

druga półprosta to

$$(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 1\}$$

i tak dalej. Czyli ogólna definicja półprostej to:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > a\}.$$

Dla każdej z tych półprostych trzeba wziąc inną formułę, które wszystkie są zdefiniowane za pomocą formuły

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie a funkcjonuje jako parametr.

2.7 AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA

Ostatni aksjomat konstrukcyjny, jest to schemat rodziny aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(x,y)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że:

$$(\forall\, x)(\exists\,!\, y)\varphi(x,y).$$

Wówczas dla każdego zbioru x istnieje zbiór $\{z : (\exists\, t \in x)\; \varphi(t,z)\}$

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\; (z \in y \iff (\exists\, t \in x)\; \varphi(t,z))$$

Czyli każdy zbiór można *opisać za pomocą operacji*.

FULL VERSION: niech $\varphi(x,y,p_0,...,p_n)$ będzie formułą języka teorii mnogości.

$$(\forall\, p_0),...,(\forall\, p_n)\; ((\forall\, x)\; (\exists\, !y)\; \varphi(x,y,\overline{p}) \implies (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\; (z \in y \iff (\exists\, t \in x)\; \varphi(t,z,\overline{p})))$$

2.8 KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH

Niech x,y będą dowolnymi zbiorami. Wtedy definiujemy:

$x \cap y = \{t \in x : t \in y\}$
$x \setminus y = \{t \in x : t \notin y\}$
$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : (\exists\, s \in x)(\exists\, t \in y)\; z = \langle s,t\rangle\}$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjańskiego nie działa w nowych warunkach, bo nie wiemy z czego wyróżnić tę parę uporządkowaną. Ponieważ $s,t \in x \cup y$, mamy

$$\{s\},\{s,t\} \subseteq x \cup y,$$

a więc

$$\{\{s\},\{s,t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y).$$

Czyli nasza para uporządkowana jest elementem zbioru potęgowego zbioru potęgowego sumy zbiorów.

$\bigcap x = \{z \in \bigcup x : (\forall\, y \in x)\; z \in y\}$ i wówczas $\bigcap \emptyset = \emptyset$

RELACJA - definiujemy rel(r) jako dowolny zbiór par uporządkowanych:

$$\mathrm{rel}(r) := (\exists\, x)(\exists\, y)\; r \subseteq x \times y$$

FUNKCJA - relcja, która nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i różnych następnikach:

$$\mathrm{fnc}(f) := \mathrm{rel}(f) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)\; (\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f) \implies y = x$$

Dziedzinę i zbiór wartości możemy wówczas zdefiniować jako:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \bigcup\bigcup f : (\exists\, y)\langle x,y\rangle \in f\}$$

$$\mathrm{rng}(f) = \{y \in \bigcup\bigcup f : (\exists\, x)\langle x,y\rangle \in f\},$$

ponieważ

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in f \implies \{x\},\{x,y\} \in \bigcup f \implies x,y \in \bigcup\bigcup f$$

Dopóki działamy na zbiorach skończonych, wynikiem operacji zawsze będzie kolejny zbiór skończony - niemożliwe jest otrzymanie zbioru nieskończonego.

2.9 AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Istnieje zbiór induktywny:

$$(\exists\, x)\ (\emptyset \in x \wedge (\forall\, y \in x)\ (y \cup \{y\} \in x))$$

Na początku do naszego zbioru x dodajemy $\emptyset$. Potem, skoro $\emptyset$ należy do x, to należy też $\{\emptyset\}$. Ale skoro do x należy $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, to również $\{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$ jest jego elementem i tak dalej.

TW. Istnieje zbiór induktywny najmniejszy względem zawierania, czyli taki, który zawiera się w każdym innym zbiorze induktywnym.

DOWOD:

Niech x będzie zbiorem induktywnym, który istnieje z aksjomatu nieskończoności. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x)\ :\ y \text{ jest zbiorem induktywnym}\}$$

Chcę pokazać, że ω jest zbiorem induktywnym, czyli $\emptyset \in \omega$.

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla każdego zbioru induktywnego } y \subseteq x$$

Ponieważ każdy zbiór induktywny zawiera $\emptyset$, także ω zawiera $\emptyset$.

Pozostaje pokazać, że dla dowolnego $t \in \omega$ mamy

$$t \cup \{t\} \in \omega$$

Dla każdego zbioru induktywnego $y \subseteq x$ mamy $t \in y$. ale ponieważ y jest zbiorem induktywnym, mamy

$$t \cup \{t\} \in y.$$

Z definicji przekroju zbioru x mamy

$$t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x)\ :\ y \text{ jest zbiorem induktywnym}\} = \omega$$

Czyli istnieje zbiór induktywny ω będący przekrojem wszystkich innych zbiorów induktywnych. Pokażemy teraz, że jest to zbiór najmniejszy.

Niech z będzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy $z \cap x$ jest zbiorem induktywnym i $z \cap x \subseteq x$. Czyli z jest jednym z elementów rodziny, której przekrój daje ω:

$$z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x)\ :\ Y \text{ zb. ind.}\} = \omega$$

i smiga

Każdy element $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$... możemy utoższamić z kolejnymi liczbami naturalnymi. W takim razie ten najmniejszy zbiór induktywny będzie utożsamiany ze zbiorem liczb naturalnych. Konsekwencją tego jest *zasada indukcji matematycznej*.

Niech $\varphi(x)$ będzie formułą ozakresiie zmiennej $x \in \mathbb{N}$ takiej, że zachodzi $\varphi(0)$ oraz

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \varphi(n) \implies \varphi(n+1).$$

Wówczas

$$(\forall\, z \in \mathbb{N})\ \varphi(n)$$

DOWOD:

Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N}\ :\ \varphi(n)\}.$$

Wtedy $A \in \mathbb{N}$ oraz A jest induktywny. Kolejne zbiory należące do zbioru induktywnego utożsamialiśmy z $n \in \mathbb{N}$, więc skoro $\varphi(n)$ należy do tego zbioru induktywnego, to również $\varphi(n+1)$ należy do A. Skoro A jest zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq A$, więc $A = \mathbb{N}$.

i smiga

2.10 AKSJOMAT REGULARNOŚCI

Do tej pory poznaliśmy aksjomaty o instnieniu i serie aksjomatów konstrukcyjnych. Aksjomat regularności nie jest żadnym z nich.

W każdym niepustym zbiorze istnieje element $\in$-minimalny:
$$(\forall\, x)\, x \neq \emptyset \implies ((\exists\, y \in x)\, (\forall\, z \in x)\, \neg\, z \in y),$$
a więc eliminowane są patologie jak np: $x \in x$, $y \in y \in x$.

Antynomia Russlla,
$$\{x\, :\, x \notin x\},$$
jest eliminowana przez aksjomat regularności.

2.11 AKSJOMAT WYBORU

Dla każdej rozłącznej rodziny parami rozłącznych zbiorów niepustych istnieje SELEKTOR
$$(\forall\, x)\ ((\forall\, y, z \in x)\ (y \neq \emptyset\ \wedge\ (y \neq z\ \implies\ y \cap z = \emptyset))\ \implies\ (\exists\, s)(\forall\, y \in x)(\exists\, !t)\ t \in s \cap y)$$

Problematyczne nie jest znalezienie punktów, które są reprezentantami zbiorów naszej rodziny, a wskazanie zbioru, który je wszystkie zawiera. Dlatego w tym może nam pomóc akjomat wyboru. Wystarczy pokazać, że rozważamy rodzinę rozłącznych zbiorów i już z tego wiemy, że możemy wybrać selektor. Handy.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO:

Kulę możemy rozłożyć na 5 kawałków i przesuwać je izometrycznie w taki sposób, żeby złożyć z nich dwie identyczne kule jak ta, którą mieliśmy na początku. Kawałki na które dzielimy są niemieżalne, nie mają objętości, są maksymalnie patologiczne, ale nadal możemy powiedzieć że istnieją korzystając z aksjomatu wyboru. Daje on nam tylko informację, że istnieje selektor, a nie o tym jak on wygląda, więc może być absurdalny i patologiczny jak tylko ma ochotę.

FUNKCJA WYBORU - niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów niepustych. Funkcją wyboru dla rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy wtedy dowolną funkcję f:
$$f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$$
$$(\forall\, A \in \mathcal{A})\ f(A) \in A$$

Aksjomat wyboru jest równoważny temu, że dla każdej rozłącznej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru (selektor).

Dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzi
$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$$

DOWOD:

Musimy skonstruować zbiór częściowo uporządkowany X, do którego będziemy mogli zastosować LKZ. Elementami tego zbioru niech będą przybliżenia tego, co chcemy otrzymać:
$$X = \{f\ :\ \mathrm{fnc}(f)\ \wedge\ \mathrm{dom}(f) \subseteq A\ \wedge\ \mathrm{rng}(f) \subseteq B\ \wedge\ f\ \text{jest}\ 1-1\}$$

3 LICZBY PORZĄDKOWE

3.1 LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jeśli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch jest ograniczony z góry, to w X istnieje element maksymalny.

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorów jest przeliczalna:

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})\ |A_n| \leq \aleph 0 \implies \aleph_0 \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

DOWOD:

Ponieważ $|A_n| \leq \aleph_0$, to istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Chcemy pokazać, że istnieje też bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$f(n, k) = f_n(k) \quad (☕)$$

Musimy znać wszystkie elementy (f_n) jednocześnie, więc skorzystamy z aksjomatu wyboru. Rozpatrzmy zbiór funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}}\ :\ \varphi \text{ jest bijekcją}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ oznacza wszstkie funkcje

$$g : \mathbb{N} \to A_n$$

Niech F będzie funkcją wyboru dla rodziny

$$\{F_n\ :\ n \in \mathbb{N}\},$$

czyli każdej rodzinie przypisujemy element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Opiszmy (☕) korzystając z funkcji wyboru:

$$f(n, k) = F(F_n)(k).$$

Ponieważ $F(F_n)$ jest bijekcją, to również funkcja f jest bijekcją.

i smiga

Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi

$$|A| \leq |B|\ \vee\ |B| \leq |A|$$

DOWOD:

Musimy skonstruować zbiór częściowo uporządkowany X, do którego będziemy mogli zastosować LKZ. Chcemy pokazać, że istnieje iniekcja lub suriekcja między tymi dwoma zbiorami, więc potrzebujemy zbioru zawierającego funkcje z jednego do drugiego:

$$X = \{f \,:\, \mathrm{fnc}(f) \,\wedge\, \mathrm{dom}(f) \subseteq A \,\wedge\, \mathrm{rng}(f) \subseteq B \,\wedge\, f \text{ jest } 1-1\}.$$

Rozpatrzmy porządek $\langle X, \subseteq$. Aby zastosować do niego LKZ musimy sprawdzić założenia. Weźmy łańcuch X:

$$\mathcal{L} \subseteq X.$$

Musimy pokazać, że ma on ograniczenie górne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L}.$$

Ponieważ każdy element $\mathcal{L} \in L$, to L jest ograniczeniem górnym $\mathcal{L}$.

Należy teraz pokazać, że L jest elementem zbioru X, czyli spełnia warunki:

1. L jest zbiorem par uporządkowanych - bezpośrednio z tego, że L jest sumą łańcucha $\mathcal{L} \subseteq X$.
2. L jest funckją, czyli

$$(\forall\, x, y, z)\,(\langle x, z\rangle \in L \,\wedge\, \langle x, z\rangle \in L) \implies y = z.$$

Ustalmy dowolne x, y, z takie, że $\langle x, y\rangle \in L$ oraz $\langle x, z\rangle \in L$. Zatem istnieją $F, G \in \mathcal{L}$ takie, że

$$\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in G.$$

Ponieważ $\mathcal{L}$ ma ograniczenie górne i jest łańcuchem, to wszystkie jego elementy mogą być między sobą porównywane. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że $F \subseteq G$ i z tego wynika, że

$$(\langle x, y\rangle \in G \text{ i } \langle x, z\rangle \in G) \implies y = z,$$

bo $\mathrm{fnc}(G)$.

3. $\mathrm{dom}(L) \subseteq A$ z tego, że $\mathcal{L} \subseteq X$.
4. $\mathrm{rng}(L) \subseteq A$ z tego, że $\mathcal{L} \subseteq X$.
5. L jest funkcją różnowartościową, czyli $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle \implies x = z$.

Ustalmy dowolne x, y, z takie, że

$$\langle x, y\rangle \in L \text{ i } \langle z, y\rangle \in L.$$

Zatem istnieją $F, G \in \mathcal{L}$ takie, że

$$\langle x, y\rangle \in F \,\wedge\, \langle z, y\rangle \in G.$$

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem, to możemy założyć, że $F \subseteq G$, a ponieważ $\mathcal{L} \subseteq X$ i X zawiera jedynie iniekcje, to

$$\langle x, y\rangle \in G \,\wedge\, \langle z, y\rangle \in G \implies x = z.$$

Ponieważ pokazaliśmy, że dowolny łańcuch X jerst ograniczony z góry, to na mocy LKZ w X istnieje element maksymalny

$$\varphi \in X.$$

Rozpatrzmy trzy możliwości: 1. $\mathrm{dom}(\varphi) = A$: wówczas z definicji zbioru X otrzymujemy

$$\varphi : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$$

a więc $|A| \leq |B|$.

2. $\mathrm{rng}(\varphi) = B$: wtedy $|B| \leq |A|$, bo

$$\varphi \,:\, \mathrm{dom}(\varphi) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$$

$$\varphi^{-1} \,:\, B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathrm{dom}(\varphi) \subseteq A.$$

3. $\mathrm{dom}(\varphi) \neq A \,\wedge\, \mathrm{rng}(\varphi) \neq B$: czyli $\mathrm{dom}(\varphi) \subsetneq A$ i $\mathrm{rng}(\varphi) \subsetneq B$, zatem istnieją $s \in A \setminus \mathrm{dom}(\varphi)$ oraz $t \in B \setminus \mathrm{rng}(\varphi)$. W takim razie φ może być rozszerzona do:

$$\varphi' = \varphi \cup \{\langle s, t\rangle\}.$$

$$\varphi' \in X$$

nie jest iniekcją, bo $t \notin \text{rng}(\varphi)$. Dodatkowo,

$$\varphi \subsetneq \varphi',$$

czyli φ nie jest elementem maksymalnym w X, stąd zachodzi tylko 1 lub 2, czyli $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$.

i smiga

3.2 DOBRE PORZĄDKI

Dobry porządek – w każdym niepustym podzbiorze $\langle X, \leq \rangle$ istnieje element najmniejszy.

CZĘŚCIOWY LINIOWY DOBRY PORZĄDEK $\langle X, \leq \rangle$, $\text{Lin}(X)$???

$$(\forall\ A \subseteq X)\ A \neq \emptyset \implies ((\exists\ a \in A)(\forall\ x \in A)\ x \leq A)$$

$$(\forall\ a, b \in A)\ a \leq b\ \vee\ b \leq a$$

oraz $\leq$ jest zwrotny, przechodni i słabo antysymetryczny.

Do tej pory ostry porządek < definiowaliśmy jako skrót

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y.$$

Teraz chcemy, żeby stał się on bytem. Seria twierdzeń z tym związanych:

- relacja < jest przechodznia i silnie antysymetryczne
- jeśli < jest relacją przechodnią i silnie antysymetryczną, to relacja zadana warunkiem $x \leq y \iff x < y \vee x = y$ jest częściowym porządkiem
- każdemu częściowemu porządkowi odpowiada tylko jeden osry porządek i każdemu ostremu porządkowi odpowiada tylko jeden częściowy porządek.

SPÓJNOŚĆ to warunek mówiący, że

$$(\forall\ x, y)\ x \neq y \implies (xRy\ \vee\ yRx)$$

PRZYKŁADY – dobry porządek

1. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 0 zasada minimum mówi, że w każdym niepustym podzbiorze $\mathbb{N}$ istnieje element najmnijszy, co jest róownoważne zasadzie indukcji matematycznej
2. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ – izomorficzne ze zbiorem $\mathbb{N}$
3. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{1\}, \leq \rangle$
4. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\}, \leq \rangle$
5. $\langle n - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}, \leq \rangle$

ODCINEK POCZĄTKOWY – niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem z dobrym porządkiem $\leq$ i $a \in X$. Wówczas odcinkiem początkowym tego zbioru wyznaczonym przez a jest zbiór

$$\text{pred}(X, a, \leq) = \{x \in X\ :\ x < a\}$$

W przykładach wyżej każdy zbiór jest odcinkiem początkowym dla zbioru następnego. 'Krótsze porządki' są odcinkami początkowymi dla dłuższych porządków.

TWIERDZENIE: dla dowolnego $a \in X$

$$\mathrm{pred}(X, a, \leq) \not\simeq X$$

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że dla pewnego $a \in X$ mamy

$$\mathrm{pred}(X, a, \leq) \simeq X,$$

czyli isitnieje izomorfizm

$$f : X \to \mathrm{pred}(X, a, \leq).$$

Wtedy $f(a) < a$, bo izomorfizm zachowuje porządek, i zbiór

$$A = \{x \in X \;:\; f(x) < x\}$$

jest niepusty. Niech $b = \min A$, ale wtedy

$$f(b) < b \implies f(f(b)) < f(b),$$

czyli $b > f(b) \in A$, co jest sprzeczne z $b = \min A$.

i smiga

Niech $\langle X, \leq_X \rangle$, $\langle Y, \leq_Y \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi. Wtedy zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. te dwa zbiory są izomorficzne $(X \simeq Y)$, czyli są tej samej długości

   pierwszy jest dłuższy od drugiego:

$$(\exists\, a \in X)\ \langle \mathrm{pred}(X, a, \leq_X), \leq \rangle \simeq \langle Y, \leq_Y \rangle$$

3. drugi jest dłuższy od pierwszego:

$$(\exists\, a \in Y)\ \langle \mathrm{pred}(Y, a, \leq_Y), \leq \rangle \simeq \langle X, \leq_X \rangle$$

Wypadałoby to wszystko udowodnić, ale to jest przyjemny wykład i uznamy, że wszystko śmiga, żeby przejść do bardziej podniecających rzeczy, gdzie będziemy korzystać z poprawności tego nieistniejącego dowodu :3

3.3 ZBIÓR TRANZYTYWNY

Elementy moich elemntów są moimi elementami!

Zbiór A nazywamy zbiorem TRANZYTYWNYM, gdy każdy jego element jest zarazem jego podzbiorem:

$$(\forall\, x \in A)\ x \subseteq A$$

$\emptyset$ jest zbiorem tranzytywym, bo nie ma elementów - ponieważ nie istnieją, to mogą mieć dowolne własności, w szczególności mogą być podzbiorami $\emptyset$. Tak jak wwierszy *Na wyspach Bergamota*.

$\{\emptyset\}$ - jego jedyny element to zbiór pusty, który jest jednocześnie jego podzbiorem.

$\mathrm{Tran}(\omega)$ - każda liczba naturalna jest zbiorem liczb od siebie mniejszych - dowód na liście zadanek :v

Jeżeli zbiór jest tranzytywny, to tranzytywna jest też jego suma, zbiór potęgowy i jego następnik:

$$\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{Tran}(\bigcup A) \implies \mathrm{Tran}(\mathcal{P}(A)) \implies \mathrm{Tran}(A \cup \{A\})$$

DOWOD:

Udowodnimy, że $\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{Tran}(A \cup \{A\})$

Ustalmy dowolne $x \in A \cup \{A\}$. Wtedy zachodzi jeden z dwóch przypadków:

1. $x \in A$, a ponieważ $\mathrm{Tran}(A)$, to
$$(\forall\, y \in x)\; y \in A$$
2. $x \in \{A\}$, czyli $x = A$, a więc z $\mathrm{Tran}(A)$ otrzymujemy, że $y \in x \implies y \in A \implies y \in \{A\}$.

i smiga

3.4 LICZBY PORZĄDKOWE

Zbiór tranzytywny A nazywamy LICZBĄ PORZĄDKOWĄ, jeśli spełnia warunek
$$(\forall\, x, y \in A)\; x \in y \;\vee\; x = y \;\vee\; y \in x$$
i używamy oznaczenia $\mathrm{On}(A)$.

Jeśli $\mathrm{On}(\alpha)$, to α jest dobrze uporządkowane przez $\in$, czyli każdy niepusty zbiór $A \subseteq \alpha$ ma element $\in$-minimalny:
$$(\forall\, A \subseteq \alpha)\; A \neq \emptyset \implies (\exists\, x \in A)(\forall\, y \in A)\; x = y \;\vee\; x \in y,$$
co wynika z aksjomatu regularności.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI LICZB PORZĄDKOWYCH:

α, β - liczby porządkowe, C- zbiór liczb porządkowych

1. $(\forall\, x \in \alpha)\; \mathrm{On}(\alpha)$ - elementy liczby porządkowej są liczbami porzadkowymi.

Ustalmy dowolne $x \in \alpha$. Ponieważ $\mathrm{Tran}(\alpha)$, to
$$x \in \alpha.$$
Zatem $\mathrm{Lin}(x)$, bo $\mathrm{Lin}(\alpha)$. Ustalmy dowolne $y \in x$ i $x \in y$. Skoro $x \subseteq \alpha$, to $y \in \alpha$, czyli $y \subseteq \alpha$, zatem $z \in \alpha$. W takim razie x, z są porównywalne jako elementy α. Mamy trzy możliwości: $z \in x$, $x \in z$ (sprzeczne z aksj. regularności), $z = x$ (sprzeczne z aksj. regularności).

2. $\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$
3. $\alpha \in \beta \;\vee\; \alpha = \beta \;\vee\; \beta \in \alpha$ - dowolne dwie liczby porządkowe są porównywalne.

Niech $A = \alpha \cap \beta$. Wtedy $\mathrm{On}(A)$. Przypuśćmy, że
$$A \neq \alpha \;\wedge\; A \neq \beta.$$
Wówczas A jest prawdziwym podzbiorem zarówno α jak i β. Ale z 2 mamy
$$A \in \alpha \;\wedge\; A \in \beta,$$
czyli
$$A \in \alpha \cap \beta = A.$$
Jest to sprzeczne z aksjomatem regularności, więc $A = \alpha$ lub $A = \beta$, czyli $\alpha \subseteq \beta$ lub $\beta \subseteq \alpha$, co z 2 daje nam $\alpha \in \beta$ lub $\beta \in \alpha$.

4. $\mathrm{Tran}(C) \implies \mathrm{On}(C)$
5. $C \neq \emptyset \implies (\exists\, \alpha \in C)(\forall\, \beta \in C)\; \alpha = \beta \;\vee\; \alpha \in \beta.$

Liczbę porządkową α utożsamiamy ze zbiorem dobrze uporządkowanym $\langle\alpha,\in\rangle$. Możemy w takim razie mówić o $\mathrm{pred}(\alpha,\in,\beta)$, ale skrócimy to do zapisu:

$$\mathrm{pred}(\alpha,\in,\beta)=\mathrm{pred}(\alpha,\beta)=\{x\in\alpha\ :\ x\in\beta\}=\beta,$$

czyli każda liczba porządkowa jest zbiorem liczb porządkowych od niej mniejszych.

Jeśli $\mathrm{On}(\alpha)$, to wtedy $\alpha\cup\{\alpha\}$ jest najmniejszą liczbą porządkową większą od α i nazywamy ją NASTĘPNIKIEM porządkowym liczby α

$$\alpha\cup\{\alpha\}:=\alpha+1$$

Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych

paradoks Burali-Forti

DOWOD:

Przypuścmy nie wprost, że ON jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych. Wtedy

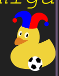
$$\mathrm{Tran}(\mathrm{ON}),$$

bo jeśli $\alpha\in\mathrm{ON}$ i $\beta\in\alpha$, to $\beta\in\mathrm{ON}$. Ponadto, $\mathrm{Lin}(\mathrm{ON})$ z własności 3. Zatem

$$\mathrm{On}(\mathrm{ON}),$$

czyli $\mathrm{ON}\in\mathrm{ON}$, co jest sprzeczne z aksjomatem regularności.

i smiga



Nich $\langle X,<\rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba porządkowa α taka, że
$$\langle X,<\rangle\simeq\langle\alpha,\in\rangle$$

Czyli każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z jakąś liczbą porządkową.

DOWOD:

1. JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, nie wprost, że istnieją dwie różne liczby porządkowe α,β spełniające zależność z twierdzenia. Wtedy
$$\alpha\simeq\beta,$$

co jest sprzeczne z ich różnością - któraś musi być mniejsza i wyznaczać odcinek początkowy w drugiej. Zbiór nie może być izomorficzny ze swoim odcinkiem poczatkowym.

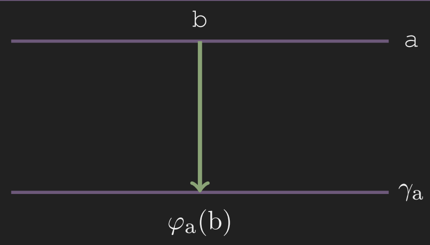
2. ISTNIENIE

Zdefiniujmy zbiór
$$Y=\{a\in X\ :\ (\exists\,!\gamma_a)\ \mathrm{On}(\gamma_a)\ \wedge\ \langle\mathrm{pred}(X,a,<),<\rangle\simeq\gamma_a\},$$

czyli wybieram podzbiory X, dla których twierdzenie zachodzi. Zauważmy, że $Y\neq\emptyset$, bo w X istnieje element minimalny (z dobrego porządku).

Dla $a\in Y$ rozważmy izomorfizm
$$\varphi_a:\mathrm{pred}(X,a,<)\to\gamma_a.$$

Niech $b\in Y$ o $b<a$. Wtedy
$$\varphi_a(b)\in\gamma_a$$



W takim razie, $\varphi_{a \restriction \mathrm{pred}(X,b,<)}$ jest izomorfizmem pomiędzy $\mathrm{pred}(X,b,<)$ i $\varphi_a(b)$. W takim razie $b \in Y$, czyli Y jest zamknięty w dół.

Stąd możemy wnioskować, że $X = Y$ lub $Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$. Załóżmy, że $Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$:

$$X \neq Y \implies X \setminus Y \neq \emptyset.$$

Niech $c = \min(X \setminus Y)$, wówczas

$$Y = \mathrm{pred}(X,c,<).$$

Mam węc zbiór Y, z którego każdym elementem jest związana jakaś liczba porządkowa. Z aksjomatu zastępowania mogę stworzyć zbiór wszystkich tych liczb porządkowych.

$$f : Y \to ON$$

$$f(a) = \gamma_a$$

$$A = \mathrm{rng}(f) = \{\gamma_a \ : \ a \in Y\}.$$

Wystarczy pokazać:

1. $\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{On}(A)$ (z 4.):

Ustalmy $\xi \in A$ oraz $\zeta \in \xi$. Skoro $\xi \in A$, to $\xi = \gamma_a$ dla pewnego $a \in Y$. Wtedy istnieje $b < a$ takie, że $\varphi_a(b) = \zeta$. Stąd wynika, że $\zeta = \gamma_b$, czyli $\zeta \in A$.

2. f jest izomorfizmem porządkowym.

Jest funkcją 1-11 z definicji zbioru Y, a funkcją ńaź definicji zbioru A. Zachowuje porządek, bo rozważamy odcinki początkowe.

3. $X = Y$

$Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$, a pokazaliśmy, że $c \in Y$, bo $Y \simeq \mathrm{On}(\alpha)$, więc jest dobrym porządkiem (ma elememnt najmniejszy). W takim razie tu byłaby sprzeczność.
Wyżej zakładaliśmy, że $X \neq Y \implies Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$. Ponieważ !?!?!?!?!?

i smiga

TWIERDZENIE NA BOCZKU

TWIERDZENIE HARTOGSA - Dla każdego zioru X istnieje liczba porządkowa α, dla której nie istnieje funkcja różnowartościowa w zbiór X

TYPEM PORZDKOWYM zbioru dobrze uporządkowanego nazywamy liczbę porządkową, z którą jest on homeomorficzny.

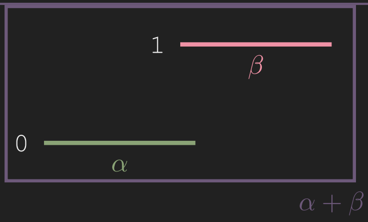
$$\mathrm{ot}(\mathbb{N}, \leq) = \mathrm{ot}(\langle\{1 - \tfrac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}\rangle, \leq) = \omega$$

$$\mathrm{ot}(\langle\{1 - \tfrac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \leq\rangle) = \omega + 1$$

3.5 DZIAŁANIA NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

Niech α, β będą liczbami porządkowymi. Wówczas dodawanie definiujemy:

$$\alpha + \beta = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, \leq)$$

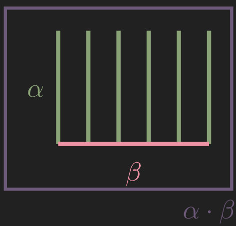


czyli najpierw rozdzielamy je, a potem sumujemy. Relację porządku na sumie liczb porządkowych definiujemy (porządek leksykograficzny):

$$\langle\gamma, \mathrm{i}\rangle \leq_{\mathrm{lex}} \langle\xi, \mathrm{j}\rangle \iff \mathrm{i} < \mathrm{j} \ \vee\ (\mathrm{i} = \mathrm{j} \ \wedge\ \gamma < \xi).$$

Mnożenie liczb porządkowych to z kolei typ porządkowy ich iloczynu z porządkiem leksykograficznym:

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ot}(\beta \times \alpha, \leq_{\mathrm{lex}})$$



czyli bierzemy β kopii α – wygodniej na to patrzeć jak na takiego jerzyka z iloczynu kartezjańskiego.

Kilka przykładów:

$\omega + \omega = \mathrm{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}, \leq)$

$\omega + \omega + 1 = \mathrm{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}, \leq)$

$\omega \cdot \omega = \mathrm{ot}(\{m - \frac{1}{n}\ :\ n, m \in \mathbb{N}\}, \leq)$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

- dodawanie i mnożenie są *łączne*
- nie są przemienne – *kolejność jest ważna*

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$$

- mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania

NASTĘPNIKIEM liczby porządkowej α nazywamy liczbę porządkową $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 = \beta$:

$$\mathrm{Succ}(\beta) \iff (\exists\ \alpha)\ \mathrm{On}(\alpha)\ \wedge\ \beta = \alpha + 1$$

LICZBĄ GRANICZNĄ nazywamy liczbę porządkową $\mathrm{Lim}(\beta)$, jeśli nie jest ona następnikiem innej liczby.

Najmniejszą liczbą graniczną jest 0, kolejną jest ω, a wszytkie liczby naturalne są następnikami.

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha$$

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\mathrm{Lim}(\alpha)$, czyli

$$\neg\,(\exists\ \beta)\ \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Jeśli założymy, że

$\Longleftarrow$

Ponieważ $\mathrm{Tran}(\alpha)$, to również $\mathrm{Tran}(\bigcup\alpha)$. Załóżmy, nie wprost, że $\mathrm{Succ}(\alpha)$, czyli

$$(\exists\ \beta)\ \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Wtedy

$$\bigcup\alpha = \bigcup(\beta \cup \{\beta\}) = \beta,$$

ale wówczas

$$\beta \cup \{\beta\} = \beta,$$

czyli wówczas $\beta \in \beta \cup \{\beta\} = \beta$, co daje nam sprzeczność.

3.6 INDUKCJA POZASKOŃCZONA

Niech $\varphi(\mathrm{n})$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że

$$(\forall\ \beta)(\forall\ \alpha < \beta)\ \varphi(\alpha) \implies \varphi(\beta)$$

Wtedy $(\forall\ \alpha)\varphi(\alpha)$.

Jest to TWIERDZENIE O INDUKCJI POZASKOŃCZONEJ

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że

$$(\exists\ \alpha)\neg\ \varphi(\alpha).$$

Wtedy zbiór

$$\mathrm{C} = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}\ :\ \varphi(\gamma)\}$$

jest niepustym zbiorem liczb porządkowych. Wtedy w C istnieje element najmniejszy ξ. Jego minimalność oznacza, że

$$(\forall\ \varepsilon < \xi)\ \varphi(\varepsilon).$$

Z założenia, że

$$(\forall\ \alpha)(\forall\ \beta < \alpha)\ \varphi(\beta) \implies \varphi(\alpha)$$

wynika, że $\varphi(\xi)$, czyli mamy sprzeczność z $\xi \in \mathrm{C}$.

i smiga

Struktura indukcji:

1. krok bazowy - sprawdzamy dla najmniejszej możliwej liczby
2. krok indukcyjny:
   - krok następnikowy
   - krok graniczny

3.7 REKURSJA POZASKOŃCZONA

Od twierdzenia o indukcji różni się swoją istotą - indukcja służy dowodzeniu, a rekursja - tworzeniu konstrukcji.

Niech $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że

$$(\forall\ \mathrm{x})(\exists\ !\mathrm{y})\ \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}).$$

Wówczas dla każdej liczby porządkowej α istnieje funkcja f taka, że

$$\mathrm{dom}(\mathrm{f}) = \alpha$$

i spełniony jest warunek

$$(\forall\ \beta < \alpha)\ \varphi(\mathrm{f} \restriction \beta, \mathrm{f}(\beta)) \quad (☕)$$

Tworzymy pozaskończony ciąg indeksowany liczbami porządkowymi, gdzie kolejny krok wynika z tego co juz mamy.

DOWOD:

JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, że dla pewnego α istnieją dwie różne funkcje f_1, f_2 o dziedzinie α spełniające (☕). Wtedy zbiór jest niepusty

$$\{\beta \in \alpha : f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\} \neq \emptyset.$$

Niech β_0 będzie najmniejszym elementem tego zbioru. Wtedy dla $\varepsilon < \beta_0$ mamy

$$f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon),$$

czyli $f_1 \restriction \beta_0 = f_2 \restriction \beta_0$, czyli z (☕) i $\mathrm{fnc}(\varphi)$

$$f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0),$$

co daje sprzeczność.

ISTNIENIE

Indukcja po α

1. $\alpha = 0$ OK

2. Krok indukcyjny

Ustalmy α takie, że dla $\gamma < \alpha$ istnieje funkcja taka, że $\mathrm{dom}(f)_\gamma = \gamma$ i spełnia (☕).

krok następnikowy $\alpha = \beta + 1$

Wtedy istnieje f_β jak powyżej. Wiemy, że istnieje dokładnie jedno y takie, że zachodzi

$$\varphi(f_\beta, y).$$

Niech

$$f_\alpha = f_\beta \cup \{\langle \beta, y \rangle\}.$$

Wtedy $\mathrm{fnc}(f_\alpha)$ oraz

$$\mathrm{dom}(f_\alpha) = \mathrm{dom}(f_\beta) \cup \{\beta\} = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1 = \alpha.$$

Wystarczy pokazać, że f_α spełnia (☕). Trzeba ustalić jakieś

$$\eta < \alpha = \beta + 1.$$

Więc jeśli $\eta < \beta$, to $f_\alpha \restriction \eta = f_\beta \restriction \eta$ oraz $f_\alpha(\eta) = f_\beta(\eta)$. Czyli spełnia z założenia indukcyjnego..

Jeśli $\eta = \beta$, to mamy $\varphi(f_\alpha \restriction \beta, f_\alpha(\beta))$, bo $f_\alpha(\beta) = y$, co również jest prawdziwe.

krok graniczny $\mathrm{Lim}(\alpha)$

Wiemy, że

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha.$$

4 LICZBY KARDYNALNE

Mamy kolekcję zbiorów, które wszystkie mają tę samą moc. Ale my byśmy chcieli wiedzieć co to jest ta moc – liczby kardynalne pozwalają nam wybierać zbiory według ich mocy.

LICZBA KARDYNALNA to liczba porządkowa,
która nie jest równoliczna z żadnym swoim elementem.

$$\mathrm{Card}(\alpha) := \mathrm{On}(\alpha) \;\wedge\; (\forall\, \beta < \alpha)\; |\beta| < |\alpha|$$

Zazwyczaj oznaczamy je κ, λ, chociaż kiedyś używało się gotyku.

Każda liczba kardynalna jest liczbą porządkową graniczną.

$\mathrm{Card}(0)$

$\mathrm{Card}(\omega)$, ale już $\neg\,\mathrm{Card}(\omega+\omega)$, $\neg\,\mathrm{Card}(\omega\cdot\omega)$ i $\neg\,\mathrm{Card}(\omega^{\omega})$.

$(\forall\, \mathrm{n} \in \omega)\; \mathrm{Card}(\mathrm{n})$ – dowód później

4.1 WŁASNOŚĆI

Każdy zbiór jest równoliczny z pewną liczbą kardynalną.

DOWOD:

Ustalmy dowolny zbiór X. Wiemy, że X można dobrze uporządkować przez $<$. Wtedy istnieje liczba porządkowa α z nim izomorficzna:

$$\varphi : \mathrm{X} \xrightarrow[1-1]{\text{izo}} \alpha$$

W takim razie φ jest bijekcją między X a α, więc

$$|\mathrm{X}| = |\alpha|.$$

Niech

$$\kappa = \min\{\alpha \;:\; |\alpha| \geq |\mathrm{X}|\}$$

Wtedy $\kappa \sim \mathrm{X}$, a z minimalności κ mamy $\mathrm{Card}(\kappa)$.

Jeśli $|\mathrm{X}| = |\kappa_1|$ i $|\mathrm{X}| = |\kappa_2|$, to $|\kappa_1| = |\kappa_2|$.
NOWY WYKŁAD

4.2 DZIAŁANIA NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech κ, λ będą liczbami kardynalnymi, wtedy:

$$\kappa + \lambda = |(\mathrm{K} \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$$

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

Jeśli $\kappa \geq \omega$, to $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

DOWOD:

Indukcja po liczbach kardynalnych lub po liczbach porządkowych – obie wersje będą poprawne.

1. $\kappa = \omega$ $\;|\omega \times \omega| = |\omega|$
2. Przypśćmy, że dla nieskończonych liczb kardynalnych $< \kappa$ teza zachodzi.

Na $\kappa \times \kappa$ definiujemy dobry porządek:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \prec \langle \zeta, \xi, \rangle \iff \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\zeta, \xi\} \vee$$
$$\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha < \zeta) \vee$$
$$\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha = \zeta \wedge \beta < \xi)$$

Sprawdzanie, że to jest częściowy porządek zostaje na liście

Niech $\gamma = \mathrm{ot}(\kappa \times \kappa, \prec)$. Niech $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$ i niech $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$. Wtedy

$$\langle \alpha, \beta \rangle \preccurlyeq \langle \delta, \delta \rangle$$

i mamy

$$\mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \delta, \delta \rangle) \subseteq (\delta + 1) \times (\delta + 1)$$

Ale $\delta < \kappa$, więc

$$|\mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec \langle \alpha, \beta \rangle)| \leq |\delta + 1|^2 < \kappa$$

Jeśli wezmę dowolne $\eta < \gamma$, to η jest odcinkiem początkowym γ, czyli $\eta < \kappa$. Wobec tego $\gamma \leq \kappa$. Ale $|\gamma| = |\kappa \times \kappa|$, zatem

$$\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| \leq \kappa.$$

Zdeciniujmy funckję

$$\mathrm{f} : \kappa \to \kappa \times \kappa$$
$$\mathrm{f}(\alpha) = \langle \alpha, 0 \rangle$$

któa jest inikcją, więc

$$|\kappa| \leq |\kappa \times \kappa|$$

Czyli $\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa$.

i smiga

Wniosek:

$$\kappa, \lambda \leq \omega \implies \kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

DOWOD:

$$\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \max\{\kappa, \lambda\} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Wypadałoby pokazać, że $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$, ale to się narysuje

i smiga

Dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba kardynalna od niej większa.

DOWOD:

Ustalmy dowolne κ. Wtedy $|\mathcal{P}(\kappa)| > \kappa$ z twierdzenia Cantora.

DOWOD:

Wersja bez aksjomatu wyboru:

Z twierdzenia Harcoštam: Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa, z którą nie istnieje iniekcja z α w X.

$$\mathrm{X} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{X}) = \min\{\alpha \ : \ \neg (\exists\ \varphi : \alpha \to \mathrm{X})\ \varphi \text{ to iniekcja}\}$$

Utalmy κ. Wtedy $\mathrm{Card}(\mathrm{H}(\kappa))$ i $\mathrm{H}(\kappa) > \kappa$.

i smiga

NASTĘPNIKIEM liczby κ nazywamy najmniejszą liczbę kardynalną od niej większą i oznaczamy ją

$$\kappa^+$$

Czyli κ ma dwa następniki: kardynalny i porządkowy.

Liczbę kardynalną κ nazywamy NASTĘPNIKIEM, jeśli $\kappa = \lambda^+$ dla pewnego $\mathrm{Card}(\lambda)$.

Liczbę kardynalną nazywamy GRANICZNĄ, jeśli nie jest następnikiem.

4.3 HIERARCHIA ALEFÓW

Konstrukcja rekurencyjna:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} \aleph_\xi \ \mathrm{Lim}(\gamma)$$

Alternatywny zapis to $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$, ale używamy $\aleph$ żeby podkreślić kardynalny charakter badanego obiektu.

$$\mathrm{CARD} = \omega \cup \{\aleph_\gamma \ : \ \gamma \in \mathrm{On}\}$$

Każda nieskończoa liczba kardynalna jest jakimś $\aleph$.

DOWOD:

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $\kappa \geq \omega$

$$(\forall\ \alpha \in \mathrm{ON})\ \kappa \neq \aleph_\alpha$$

Bez zmniejszenia ogólności κ jest minimalna.

Rozważmy zbiór

$$\mathrm{A} = \{\xi \ : \ \aleph_\xi < \kappa\} \neq \emptyset.$$

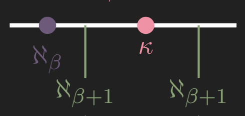
Jest to zbiór niepusty, ponieważ $\kappa \neq \omega$, bo $\omega = \aleph_0$. W takim razie

$$\beta = \bigcup \mathrm{A} \ \wedge \ \mathrm{On}(\beta).$$

Są dwie możliwości:

1. $\beta \in \mathrm{A}$, czyli β jest największym elementem A. Ale wówczas istnieje największa liczba kardnalna mniejsza od κ: $\aleph_\beta$. Ale wtedy $\kappa = \aleph_{\beta+1}$.

$\aleph_\beta + 1$



ale wtedy $\beta + 1 = \min \mathrm{A}$

ale wtedy $\kappa < \aleph_{\beta+1}$,
czyli $\kappa = \aleph_\alpha$ takie, że $\alpha \in \mathrm{A}$

2. $\beta \notin \mathrm{A}$, czyli $\mathrm{Lim}(\beta)$. Wtedy $\kappa = \aleph_\beta$.

i smiga

4.4 POTĘGOWANIE

Hipoteza continuum Czym jest $\mathfrak{c}$?

$$\mathfrak{c} > \aleph_0 \implies \mathfrak{c} \geq \aleph_1$$

$$?\mathfrak{c} = \aleph_1?$$

POTĘGOWANIE liczb kardynalnych:

$$\kappa^\lambda := |\kappa^\lambda|$$

Bierzemy zbiór funkcji z λ w κ i to jest moc tego zbioru.

$$2^\kappa > \kappa$$

$$\kappa \leq \lambda \implies \kappa^\mu \leq \lambda^\mu$$

$$\kappa^{\mu+\lambda} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\lambda$$

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\mu \cdot \lambda}$$

Niech $2 \leq \kappa \leq \lambda$ oraz $\lambda \geq \omega$. Wtedy $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

DOWOD:

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$$

i smiga

4.5 UOGÓLNIONE OPERACJE NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną liczb kardynalnych. Wówczas dla tej rodziny definiujemy:

sumę: $\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}|$

iloczyn: $\prod_{i \in I} \kappa_i := |\prod_{i \in I} \kappa_i|$,

przy czym po prawej mamy uogólniony iloczyn kartezjański zbiorów

Niech $(\forall\, i \in I)\ \kappa_i = \kappa$. Wtedy

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \bigcup_{i \in I} \kappa \times \{i\} = \kappa \times \bigcup_i \{i\} = \kappa \cdot |I|$$

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$$

Za tydzień:

$$\langle \kappa_i : i \in I \rangle, \langle \lambda_i : i \in I \rangle \quad (\forall\, i \in I)\ \kappa_i < \lambda_i$$

wtedy

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$