## Zad 1. Sprawdz, ze $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \implies a=c \ \wedge\ b=d$

Z definicji pary uporzadkowanej wg. Kuratowskiego:

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne $abcd$ takie, ze $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$. Wowczas

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

Rozpatrzmy pzypadki:

1. $a=b$

Wtedy mamy

$$\{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

i wtedy z aksjomatu ekstencjonalnosci

$$\{a\} = \{c\} = \{c,d\}$$

wiec $a=c=d$, czyli $a=c \ \wedge\ b=d$.

2. $a\neq b$

Wtedy $\{a\}\neq\{a,b\}$, stad wnioskujemy

$$\{c\}=\{a\},$$

wiec $c=a$.

Dalej zauwazamy, ze $\{a,b\}\neq\{c\}$, bo $c=a\neq b$, wiec

$$\{a,b\}=\{c,d\}=\{a,d\}$$

i poniewaz $a\neq b$, to $b=d$.

## Zad 2. Udowodnij, ze $\bigcup\mathcal{P}(A)=A$.

DOWOD:

1. $\bigcup\mathcal{P}(A)\supseteq A$

Ustalmy dowolne $x\in A$. *Chcemy pokazac, ze* $x\in\bigcup\mathcal{P}(A)$. Zauwazmy, ze

$$A\in\mathcal{P}(A),$$

wiec z definicji sumy otrzymujemy

$$x\in\bigcup\mathcal{P}(A).$$

2. $\bigcup\mathcal{P}(A)\subseteq A$

Ustalmy dowolne $x\in\bigcup\mathcal{P}(A)$. Wowczas istnieje $B\in\mathcal{P}(A)$ takie, ze

$$x\in B.$$

Z definicji zbioru potegowego

$$B\subseteq A,$$

zatem z definicji zawierania $x\in A$.

## Zad 3. Niech $A$ bedzie zbiorem niepustym. Ktore z ponizszych twierdzen sa prawdziwe?

### Jesli $A=\bigcup A$, to $\emptyset\in A$.

Teza $A=\bigcup A \implies \emptyset\in A$.

Z aksjomatu regularnosci wiemy, ze istnieje $x\in A$ taki, ze

$$(\heartsuit)\forall\, a\in A \quad \neg\,(y\in x).$$

Gdyby $\emptyset\neq x$, to istnialoby $z\in x$. Poniewaz $z\in x$ i $x\in A$, to

$$z\in\bigcup A,$$

czyli z zalozenia mamy $z\in A$, co jest sprzeczne z $(\heartsuit)$. Wobec tego $x=\emptyset\in A$.

### Jesli $\emptyset\in A$, to $A=\bigcup A$.

NIE: Niech $A=\{\emptyset\}$. Wowczas $\emptyset\in\{\emptyset\}$ i $\bigcup A=\emptyset\neq\{\emptyset\}=A$

### Jesli $\bigcup A=\bigcap A$, to $A=\{x\}$ dla pewnego $x$

Teza: $\bigcup A=\bigcap A \implies \exists\, x \quad A=\{x\}$

Niech $x\in A$. Zalozmy nie wprost, ze istnieje $y\in A$ takie, ze $y\neq x$. Bez straty ogoolnosci mozemy zalozyc, ze istnieje $t\in x$ i $t\notin y$.

Z definicji sumy $t\in\bigcup A$, a z drugiej strony, z definicji przekroju, $t\notin\bigcap A$. Czyli $\bigcap A\neq\bigcup A$ i otrzymujemy sprzecznosc z zalozeniem.

## Zad 4. Ktora z ponizszych rownosci zachodzi dla dowolnego zbioru $A$?

$\bigcap\{\mathcal{P}(B) \,:\, B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) \,:\, B \subseteq A\}$

Po lewej szukamy wspolnego elementu wszystkich podzbiorow zbioru $A$ - jest to $\emptyset$. Z prawej strony mam rodzine wszystkich przekrojow. Czyli zeby byc podzbiorem wszystkich podzbiorow zbioru $A$ trzeba byc $\emptyset$

$\bigcap\{\mathcal{P}(B) \,:\, B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) \,:\, B \subseteq A\}$

$\mathcal{P}(A)$

## Zad 5. Udowodnij, ze aksjomat pary wynika z pozostalych aksjomatow teorii $ZF_0$.

Bierzemy zbior induktywny i pzetlaczamy go przez odpowiednia funkcje.

Ustalmy dwa dowoolne $x, y$. Rozwazmy zbior

$$p = \{z \,:\, \exists\, t \in \omega \quad (t = \emptyset \wedge z = x) \vee (t \neq \emptyset \wedge z = y)\}$$

na mocy aksjomatu zastepowania.
Ustalmy dowolne $z$. Mamy

$$\begin{aligned} z \in p &\iff \exists\, t \in \omega \quad (t = \emptyset \wedge z = x) \vee (t \neq \emptyset \wedge z = y) \iff \\ &\iff \exists\, t \in \omega \quad (t = \emptyset \wedge z = x) \vee \exists\, t \in \omega \quad (t \neq \emptyset \wedge z = y) \\ &dokonczyc\ przekszta lcanie \\ &\iff z = x \vee z = y \end{aligned}$$

Musimy wziac zbior min 2-el i otrzymac pare jako el tego zbioru.
!!nie ma w jezyku $\emptyset$, czyli musimy to zastapic nieuzywajac znaczka

## Zad 6.

Mamyzbior $A$ i formule jezyka TM $\varphi$. Rozwazmy dwa przypadki

1.$\forall\, x \in A \quad \neg\, \varphi(x)$. Wtedy

$$\{x \in A \,:\, \varphi(x)\} = \emptyset$$

2. $\exists\, x \in A \quad \varphi(x)$. Niech $x$ bedzie tym istniejacym elementem $A$, wtedy

$$\psi(t, z, p) = (\varphi(t) \wedge z = t) \vee (\neg\, \varphi(t) \wedge z = p).$$

Mamy formule i mamy parametr - teraz bedziemy stosowac te formule do tego parametru.

Niech $b$ bedzie zbiorem istniejacym na mocy aksjomatu zastepowania.

$$\begin{aligned} z \in b &\iff (\exists\, t \in a \quad (\varphi(t) \wedge z = t) \vee (\neg\, \varphi(t) \wedge z = p)) \iff \\ &\iff \exists\, t \in A \quad (\varphi(t) \wedge z = t) \vee (\exists\, t \in A \quad (\neg\, \varphi(t) \wedge z = x)) \iff \\ &\iff (\exists\, t \quad (z \in A \wedge \varphi(z))) \vee (\exists\, t \quad t \in A \wedge \neg\, \varphi(t) \wedge z = x) \iff \\ &\iff (z \in A \wedge \varphi(z)) \vee z = x \iff \\ &\iff z \in A \wedge \varphi(z) \end{aligned}$$

## Zad 9

Latwiej jest zfunkcji wyboru (FW) w selektor (AC).

FW $\implies$ AC

Niech $\mathcal{A}$ bedzie niepusta, rozlaczna rodzina zbiorow niepustych. Chcemy dla tej rodziny znalezc slektor. Wiemy, ze istniejedla niej funkcja.
Niech

$$F : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$$

bedzie funkcja wyboru rodziny $\mathcal{A}$, czyli

$$\forall\, A \in \mathcal{A} \quad F(A) \in A.$$

Niech $S = \mathrm{rng}(F)$. $S$ jest selekorem, bo

1. dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ mamy $|A \cap S \geq 1$ (bo $F(A) \in A\mathrm{rng}(F)$)
2. dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ mamy $|A \cap S| \leq 1$, bo $\mathcal{A}$ jest rozlaczne (gdyby $F(A_1) \in A \cap S$ dla pewnego $A_1 \in \mathcal{A}$, to poniewaz $F(A_1) \in A_1$, wiec $A \cap A_1 \neq \emptyset$ - sprzecznosc).

AC $\Longrightarrow$ FW

Ustalmy dowolna rodzine zbiorow niepustych $\mathcal{A}$.
Rozwazmy rodzine

$$\mathcal{A}' = \{\{A\} \times A \,:\, A \in \mathcal{A}\}$$

i ta rodzina jest parami rozlaczna - kazdy ze zbiorow zostaje wysuniety na inny poziom. Do tej rodziny mozemy teraz zastosowac aksjomat wyboru, czyli istnieje dla niej selektor $S$.
Okazuje sie, ze $S$ sam w sobie jest funkcja wyboru rodziny $\mathcal{A}$:

$$|S \cap (\{A\} \times A)| = 1,$$

wiec $S$ jest zbiorem par $\{A\} \times A$, czyli funkcja gdzie $\mathrm{dom}(S) = \mathcal{A}$, a $\mathrm{rng}(S) = \bigcup \mathcal{A}$.