

Zadanie 1. Rozstrzygnij (z uzasadnieniem), które z podanych zbiorów są ciałami.

- a) \mathbb{Q} , b) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, c) $\mathbb{Q}[i]$, d) \mathbb{Z} , e) \mathbb{Z}_n .

Tu \mathbb{Z}_n to liczby całkowite od 0 do $n - 1$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n . W pozostałych zbiorach dodajemy i mnożymy jak zwykle w \mathbb{C} .

(Możesz założyć bez dowodu, że działania dodawania i mnożenia w \mathbb{C} spełniają oczywiste własności łączności, przemienności i rozdzielności.)

Zadanie 2. Używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie, że $5(u + w) + 2w = 7(u + w) + (-2)u$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem, to elementy odwrotny i przeciwny do danego są jedyne, to znaczy:

- a) dla każdych x, y , jeżeli $x + y_1 = x + y_2 = 0$, to $y_1 = y_2$,
b) dla każdych x, y , jeżeli $xy_1 = xy_2 = 1$, to $y_1 = y_2$.

Zadanie 4. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory):

- a) $-(v - w) = (-v) + w$; b) $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$;
c) $(a - b)v = av - bv$; d) $a(-v) = (-a)v = -av$;
e) $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$.

Zadanie 5. Znajdź $\text{Lin}((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ w \mathbb{R}^3 (opisz ten zbiór równaniem lub układem równań).

Zadanie 6. Odwołując się do wiedzy z I semestru opisz wszystkie podprzestrzenie \mathbb{R}^3 .

Zadanie 7. Uzasadnij, że jeśli w układzie v_1, \dots, v_n pewne dwa wektory są równe, to układ ten jest lz. Uzasadnij, że jeśli w układzie v_1, \dots, v_n pewien wektor jest równy 0, to układ ten jest lz.

Zadanie 8. Załóżmy że V jest przestrzenią liniową nad ciałem skończonym K o p^k elementach.¹ Niech $v_1, v_2, v_3 \in V$ będą liniowo niezależne. Ile elementów ma $\text{Lin}(v_1, v_2, v_3)$?

Zadanie 9. Dla $z \in \mathbb{C}$ spróbuj zdefiniować, czym powinno być $\mathbb{Q}[z]$ (jak wyglądają jego elementy), jeżeli ma być zamknięte na mnożenie i dodawanie, przy założeniu że:

- a) $z^3 \in \mathbb{Z}$, b) $z^2 + z + 1 = 0$, c) z jest dowolna.

Kiedy $\mathbb{Q}[z]$ jest ciałem? Podaj przykład $z \in \mathbb{C}$, dla którego $\mathbb{Q}[z]$ nie jest ciałem.

¹Można pokazać, że liczba elementów ciała skończonego zawsze jest potęgą liczby pierwszej. Możemy to zrobić na konwersatorium.