

Zad 1. Opisz, jak wyglądaja ciagi zbiezne w kostce Cantora

Kostka kantora to zbior ciagow $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Wezmy metryke

$$d(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

gdzie $\Delta(x,y) = \min\{k : x(k) \neq y(k)\}$.

Wezmy $\varepsilon > 0$ taki, ze $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ciag bedzie zbiezny do (x_n) , jesli znajdziemy kule o promieniu ε i srodku w (x_n) , w ktorej sa prawie wszystkie jego wyrazy. W takim wypadku, tylko pierwsze k wyrazow musi byc takich samych, a dalsze moga przyjmowac dowolne wartosci. Im wieksze k wezwiemy, tym dluzej te ciagi sa takie same. Wiec ciagi zbiezne w kostce Cantora to ciagi takich ciagow, ktore roznia sie po raz pierwszy na coraz to dalszym wyrazie od ciagu do ktorego sa zbiezne.

Zad 2. Pokaz, ze ciag (x_n) w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^k jest zbiezny wtw gdy kazdy z ciagow $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbiezny (w \mathbb{R})

(x_n) jest zbiezny do x , jezeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + \dots + (x_n(k-1) - x(k-1))^2} < \varepsilon$$

W zadaniu chcemy pokazac:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d(x_n, x) < \varepsilon \iff \forall i < k \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) < \varepsilon$$

Indukcja \Leftarrow : Jezeli dla kazdego $i < k$

$$\lim d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) = \lim \sqrt{(x_n(i) - x(i))^2} = x(i)$$

To wowczas

$$d_{\mathbb{R}}(x_n(0), x(0)) + \dots + (x_n(k-1), x(k-1)) = \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2} + \dots + \sqrt{(x_n(k-1) - x(k-1))^2}$$

Zad 3. Udowodnij, ze ciag (x_n) punktow plaszczyzny jest zbiezny do x w metryce euklidesowej wtw gdy jest zbiezny w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce euklidesowej, to dla $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2} \geq \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} = \\ &= \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) = \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|), \end{aligned}$$

czyli

$$\varepsilon > \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|)$$

wiec jest zbiezne w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce maksimum, to dla $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|) \\ \varepsilon &> \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0)x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \geq \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2} \end{aligned}$$

Zad 4. Wykaz, ze podzbiory \mathbb{R}^n postaci $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ sa otwarte, a $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ sa domkniete.

Pokazac, ze $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ jest przedzialem otwartym,

W dowolnym punkcie chce stworzyc kule ktora sie w nim zawiera. Czyli potrzebuje znalezc promien dla kuli od dowolnego x :

$$r = \min(|a - x|, |b - x|),$$

gdzie $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$

Pokazac, ze $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ jest domkniety.

$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ bedzie domkniety, jesli wszystkie ciagi o wyrazach z P beda mialy granice w P . Jezeli by tak nie bylo, czyli (x_n) zbiegalyby do x poza P , to wowczas od pewnego momentu wszystkie wyrazy (x_n) bylyby w kuli o srodku w punkcie x i promieiniu $\varepsilon > 0$.

Niech ciag o wyrazach z P zmieza do

$$(x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ \dots \\ b_n + 2 \end{pmatrix} = b,$$

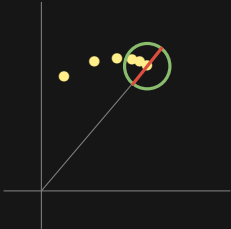
Wowczas, od pewnego momentu wszystkie wyrazy tego ciagu naleza do kuli o srodku b i promieniu 1, czyli sa poza P . Ale jest to sprzeczne ze stwierdzeniem, ze ciag (x_n) ma wszystkie wyrazy w P .

Zad 5. Uzasadnij, że nie istnieje ciąg (x_n) elementów \mathbb{R}^2 , który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny w metryce euklidesowej (na \mathbb{R}^2), ale nie jest w metryce centrum.

Kula o środku x i promieniu r w metryce centrum zawsze będzie zawierała otwarty przedział należący do prostej przechodzącej przez środek układu współrzędnych oraz x o długości $2r$ i środku w x .

Z kolei kula o środku x i promieniu r w metryce euklidesowej będzie zawierała kule pomniejszona o okrag o środku x i promieniu r , czyli zawiera w sobie kule w metryce centrum. Jeśli więc ciąg zbiega w metryce centrum, to również zbiega w metryce euklidesowej.

Weźmy ciąg



wówczas wszystkie jego wyrazy blisko elementu do którego zbiegają mogą zostać wpisane w dowolną **kulę w metryce euklidesowej**, ale już nie wszystkie **kule w metryce centrum** i środku w x zawierają ostatnie wyrazy tego ciągu (jeśli wybierzemy promień mniejszy od odległości x od środka układu współrzędnych, to tylko x będzie należeć do tej kuli).

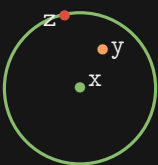
Zad 6. Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) sfera, a więc zbiór postaci $\{y \in X : d(x, y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, że $B_r(x) \subseteq \{y : d(x, y) \leq r\}$, ale nie koniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Jeśli sfera jest zbiorem domkniętym, wtedy wszystkie ciągi o wyrazach z niej są zbieżne do wyrazu zawartego w niej. Załóżmy, nie wprost, że istnieje ciąg (z_n) o wyrazach ze sfery o środku w x i promieniu r , którego wyrazy dążą do y , który nie należy do sfery. Rozważmy dwie możliwości.

1. Odległość $d(x, y) < r$



Wyberzmy dowolny element ciągu (z_n)



Z warunku trójkąta otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &\geq d(x, z) \\ d(y, z) &\geq d(x, z) - d(x, y). \end{aligned}$$

Ponieważ $d(x, z) = r$, a $d(x, y)$ jest stałe, niech $d(x, y) = \rho$. Czyli możemy napisać:

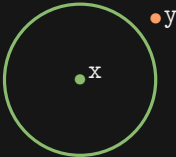
$$d(y, z) \geq r - \rho,$$

ale ponieważ ciąg (z_n) zbiega do y , to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy obrać taki z , że

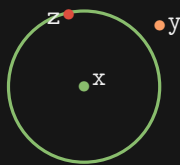
$$\varepsilon > d(y, z) \geq r - \rho.$$

Jednak odległość $d(y, z)$ jest ograniczona od dołu przez stałą $r - \rho$, więc dla $\varepsilon = r - \rho - \frac{1}{r}$ nie znajdziemy z spełniającego tę nierówność. Stąd ciąg taki nie jest zbieżny.

2. Odległość $d(x, y) > r$



Wyberzmy element (z_n)



Wówczas, z warunku trójkąta:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, y) - d(x, z) &\leq d(z, y), \end{aligned}$$

ale ponieważ $d(x, z) = r$, a $d(x, y) = \rho$ jest stałe dla danego ciągu, możemy napisać:

$$\rho - r \leq d(z, y).$$

Aby ciąg (z_n) był zbieżny, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ musimy móc dobrać taki element (z_n) , że

$$\varepsilon > d(z, y) \geq \rho - r,$$

ale ponieważ $d(y, z)$ jest ograniczone od dołu przez $\rho - r$, to dla $\varepsilon = \rho - r = \frac{1}{r}$ nie znajdziemy elementu (z_n) spełniającego tę nierówność.

Rozpiszmy $A = \{y \in Y : d(x, y) \leq r\}$ jako sumę dwóch zbiorów:

$$A = \{y \in Y : d(x, y) < r\} \cup \{y \in Y : d(x, y) = r\}$$

Pierwszy element tej sumy jest równy $\{y \in Y : d(x, y) < r\} = B_r(x)$, więc

$$B_r(x) \subseteq A$$

W przeciwną stronę inkluzja nie zachodzi, ponieważ

$$B_r(x) \cap \{y \in Y : d(x, y) = r\} = \emptyset$$

czyli A posiada wszystkie elementy $B_r(x)$, ale dodatkowo ma jeszcze sferę, która jest rozłączna z kulą.

Zad 7. Wykaz, że zbieżność jednostajna ciągu funkcji ciągłych na $[0, 1]$ jest równoważna zbieżności w metryce supremum w $C[0, 1]$. (Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Metryka supremum:

$$d(f, g) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

Chcę udowodnić, że ciąg funkcji (f_n) jest jednostajnie zbieżny $\iff (f_n)$ jest zbieżny w metryce supremum.

Niech $S = \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Jeśli $(f_n) \rightarrow f$ w metryce supremum, to wówczas

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \varepsilon > \sup S \wedge \forall x \in [0, 1] \quad \sup S \geq |f_n(x) - f(x)|) &\implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Jeśli $(f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f$, to wówczas

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

ale ponieważ

$$(\heartsuit) \quad \exists p \in [0, 1] \quad (|f_n(p) - f(p)| = \sup S \wedge \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(p) - f(p)| \geq |f_n(x) - f(x)|)$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|) \wedge (\heartsuit) &\implies \\ \implies \forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad \varepsilon > \sup S, \end{aligned}$$

czyli ciąg jest zbieżny w metryce supremum.

Zad 8. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla każdego $A, B \subseteq X$ zachodzą równości i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaz, że nie muszą zachodzić inkluzje odwrotne):