TOPOLOGIA

notatki

Spis treści

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazyway funkcję

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x,x) = 0 \wedge d(x,y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall\ x, y)\ d(x,y) = d(y,x)$ - symetria
3. $(\forall\ x, y, z)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ - warunek $\triangle$

METRYKI EUKLIDESOWE:

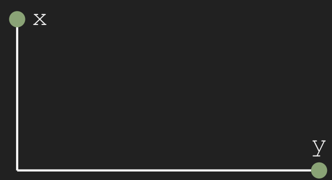
$\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x - y|$

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + ... + (x(n-1) + y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

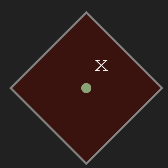
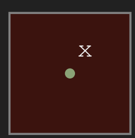
$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

$\mathbb{R}$, m. euklidesowa:	$\mathbb{R}^2$, m. euklidesowa	$\mathbb{R}^2$, m. miasto	$\mathbb{R}^2$, m. maksimum
	 x	 x	 x
$\mathbb{R}^2$, m. centrum		$C[0,1]$, m. supremum	$C[0,1]$, m. całkowa
narysję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie szystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall\, i < m)\ x_n(i) \to x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{sup}} f \iff (f_n) \underset{\to}{\to} f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, jeśli na każdym punkcie
ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

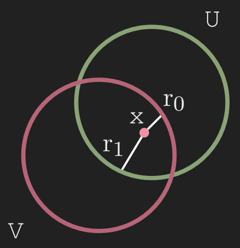
$$(\forall\, z \in U)(\exists\, r > 0)\ B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V, których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowlnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists\, r_0 > 0)\ B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists\, r_1 > 0)\ B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będa zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga

DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli
$$(\exists\, U \in \mathcal{U})\ x \in U.$$
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x. Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to
$$x \in U \land x \in \bigcup \mathcal{U}.$$
W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisac kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga

U jest zbiorem otwartym $\iff$ U jest sumą kul.

DOWOD:

$\Longleftarrow$ wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Longrightarrow$
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji
$$(\forall\, x \in U)(\exists\, r_x > 0)\ B_{r_x} \subseteq U$$
Rozważmy sumę
$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$
Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U, suma ta nie może być większa niż U. Zawierają się w niej wszystkie punkty z U, więc możemy napisać
$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga

1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c. Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegac do pewnego punktu $x \in U$, czyli
$$(\exists\, r > 0)\ B_r(x) \subseteq U.$$
Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U, co jest sprzeczen z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c.

i smiga

2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

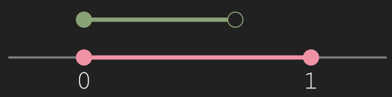
2.1 PODPRZESTRZEŃ METRYCZNA

PODPRZESTRZEŃ (X, d) to (A, d), $A \subseteq X$

formalnie (A, d) *nie jest metryką - należy obciąć* d *:* $d_{\restriction A \times A}$

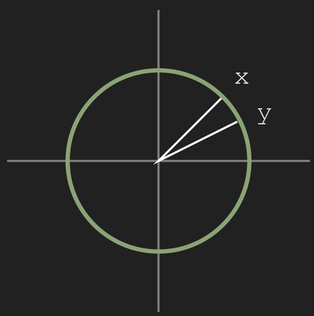
PRZYKŁADY

1. Rozważmy $[0, 1]$ jako podzbiór $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. W takiej podprzestrzeni możemy otrzymać kulę:



2. Ta kula jest otwarta, bo w tej podprzestrzeni nie istnieją punkty mniejsza od 0.

Na $\mathbb{R}^2$ z przestrzenią centrum wyróżnijmy okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, 0)$. Ta przestrzeń zachowuje się podobnie do przestrzeni dyskretnej - każde dwa różne punkty są odległe od siebie o 1.



2.2 FUNKCJA CIĄGŁA

Funckja między dwoma przestrzeniami metrycznymi (X, d) i (Y, ρ):

$$f : X \to Y$$

jest CIĄGŁA, jeśli:

$$(\forall\ x \in X)(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ y)\ d(x, y) \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

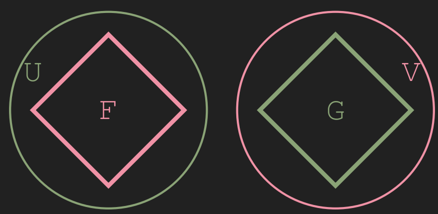
3 LEMAT URYSOHNA

3.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń X jest przestrzenią NORMALNĄ (również T_4), jeżeli

$$(\forall\, F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X)\; F \cap G = \emptyset$$

$$(\exists\, U, V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\; U \cap V = \emptyset \;\wedge\; F \subseteq U \;\wedge\; G \subseteq V$$



Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

3.2 LEMAT URYSOHNA

Załóżmy, że przestrzeń X jest normalna. Niech $F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X. Wówczas:

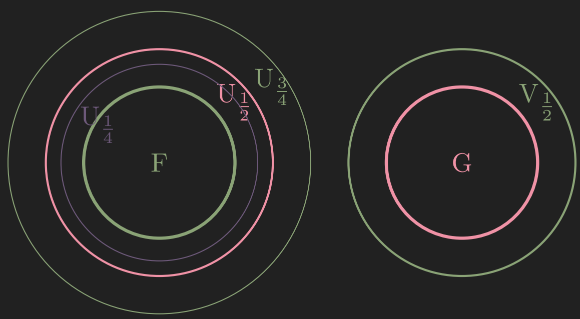
$$(\forall\, f : X \xrightarrow{\text{ciagla}} [0,1])\; f_{\restriction F} \equiv 0 \;\wedge\; f_{\restriction G} \equiv 1$$

Warunek ten jest silniejszy od normalności.

DOWOD:

Niech F, G będą zbiorami domkniętymi spełniającymi założenia lematu. Z normalności tych zbiorów możemy wziąć zbiory otwarte $U_{\frac{1}{2}}$ i $V_{\frac{1}{2}}$ takie, że $U_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G. Ponieważ $U_{\frac{1}{2}}$ jest zbiorem otwartym, to $U^c_{\frac{1}{2}}$ jest domknięte, więc możemy oddzielić F od $U_{\frac{1}{2}}$ za pomocą $U_{\frac{1}{4}}$.

Ponieważ $V_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G, to $\overline{U}_{\frac{1}{2}} \cap G = \emptyset$ oraz możemy utowrzyć zbiór $U_{\frac{3}{4}}$ oddzielający $\overline{U}_{\frac{1}{2}}$ od G i tak dalej.
Powstaje nam konstrukcja:



Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem liczb diadycznie wymiernych (tzn postaci $\frac{k}{2^n}$) z przedziału $[0,1)$. Wówczas zbiór

$$\{U_d \,:\, d \in \mathcal{D}\}$$

opisuje nam powyższą konstrukcję:

$$(\forall\, d)\; F \subseteq U_d$$

$$(\forall\, d < d')\; \overline{U}_d \subseteq U_{d'}$$

$$(\forall\, d)\; U_d \cap G = \emptyset$$

Zdefiniujmy funkcję

$$f : X \to [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} & (\exists\, q \in \mathcal{D})\, x \in U_q \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Zbiory otwarte na przedziale $[0,1]$ mają postać $(a,b) = [0,b) \setminus [0,a]$. Sprawdzamy ciągłość:

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0,b)] &= \{x \,:\, \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} < b\} = \\ &= \{x \,:\, (\exists\, q < b)\, x \in U_q\} = \\ &= \bigcup_{q<b} U_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0,a]] &= \{x \,:\, \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} \leq a\} = \\ &= \{x \,:\, (\exists\, q \leq a)\} = \\ &= \bigcap_{q \leq a} U_q^c \end{aligned}$$

$$f^{-1}[(a,b)] = f^{-1}[[0,b)] \setminus f^{-1}[[0,a]] = \bigcup_{q<b} U_q \setminus \bigcap_{q \leq a} U_q^c$$

DOCZYTAC W KLAUS JANICH "TOPOLOGIA"BO NADZIEJA POMIESZAŁ

3.3 TWIERDZENIE TIETZEGO

Niech X będzie przestrzenią normalną, a $D \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Wtedy istnieje

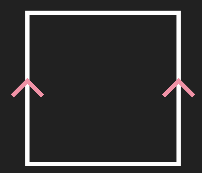
$$f : D \xrightarrow{\text{ciagla}} [0,1]$$

4 ROZMAITOŚCI

4.1 RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

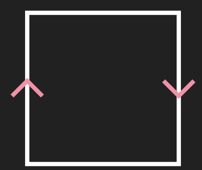
$$X = [0, 1]^2$$

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



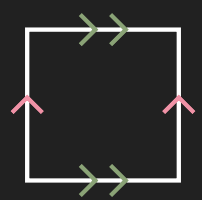
Tutaj zlepiamy dwa przeciwne boki prostokąta i otrzymujemy tubę.

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1 - y\rangle$$



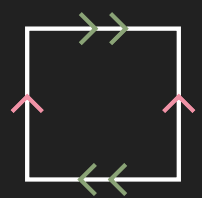
Powstaje nam wstęga Mobiusa.

$$\mathrm{parlx}, 0\rangle \sim \langle x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



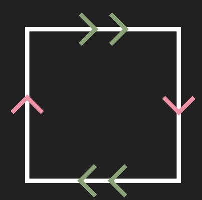
Zlepiamy górę i dół oraz prawo i lewo - dostajemy torus.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1 - x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



Jak to się zrobi na przemian strzałki na górze i dole to dostajemy torus z obrotem, czyli butelkę Kleina.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1 - x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1 - y\rangle$$



Na przemian wszystkie strzałki i dostajemy płaszczyznę rzutową.

4.2 ROZMAITOŚĆ

N – ROZMAITOŚĆ to przestrzeń topologiczna,
łukowo spójna, lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$ (to znaczy,
że $(\forall\, x \in X)(\exists\, U \underset{otw}{\ni} x)\ U \cong \mathbb{R}^n$)

kula – przykład, rura (z końcem) – antyprzykład

Czym się różni sfera od torusa?

Wyobraźmy sobie pętelkę na spherze, jeśli będziemy ją ściskać, to zrobimy supełek. Natomiast jeśli na torusie weźmiemy pętelkę ale taką oplatającą go, to tego nie możemy ścisnąć do supełka.

PĘTLA to funkcja
$$p : [0, 1] \to X$$
która jest ciągła i $p(0) = p(1)$

Funkcje stałe też są pętlami.

Przestrzeń topologiczna jest JEDNOSPÓJNA,
gdy jest łukowo spójna i dla każdej pętli istnieje
punkt, z którym jest ona homotopijnie równoważna (jest ściągalna do punktu).

jakaś dygresja

$X \cong Y$,
jeśli X jest jednospójna, to Y jest też jednospójna.

Weźmy koło bez brzegu i pół okręgu z otwartymi końcami. Obie te przestrzenie są jednospójne, ale jeśli z koła wyjmiemy jeden punkt, to przestaje ono być jednospójne, a jeśli z pół okregu wyjmiemy, to on nadal jest jednospójny.

4.3 PRZESTRZEŃ ŚCIĄGALNA

Przestrzeń topologiczna jest ŚCIĄGALNA,
jeżeli identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stała
$$\mathrm{id} : X \to X \quad \mathrm{id}(x) = x$$
$$f : X \to X \quad f(x) = a$$

Na przykład dysk jest ściągalny:
$$H(x, t) = t \cdot a + (1 - t)x,$$
identyczność jest homotopijnie spójna z funckją $f(x) = a$. Sfera nie jest homotopijnie spójna.

TWIERDZENIE BROUWERA
jeśli istnieje ciągła $f : D^n \to D^n$, gdzie D^n to dysk n-wymiarowy, to
$(\exists\, x)\ f(x) = x$,
czyli istnieje punkt stały.

DOWOD:

Dla $n = 2$.

Wyobraźmy sobie, że mamy ciągłą funkcję

$$f : D^2 \to D^2,$$

któa nie ma punktu stałego

$$(\forall\ x)\ f(x) \neq x.$$

Korzystając z niej konstruujemy drugą funkcję

$$r : D^2 \to S^1,$$

gdzie S^1 to brzeg D^2. Prowadzimy prostą przez x i jego obraz $f(x)$, po czym przypisujemy $r(x)$ jako
punkt przecięcia tej prostej i S^1. Co możemy o r powiedzieć?

- r jest ciągła
- $r_{\restriction S^1} = id_{\restriction S^1}$

Rozważmy funkcję:

$$H : D^2 \times [0, 1] \to S^1$$

$$H(x, t) = r(tx)$$

H jest ciągłe, $H(x, 0) = r(0)$, gdzie $r(0)$ bedzie środkiem dysku $H(x, 1) = r(x) = x$. Czyli dostaliśmy, że okrąg jest ściągalny, ale on nie jest więc mamy sprzeczność

i smiga

5 PRZESTRZENIE ZUPEŁNE

5.1 CIĄG CAUCHY'EGO

Ciąg (x_n) jest Chauchy'ego, jeśli
$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N)(\forall\ n, m \geq N)\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Jeśli ciąg jest zbieżny, to
jest Cauchy'ego, ale nie musi być odwrotnie.

Przestrzeń metryczna jest ZUPEŁNA,
gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny

Przykłady metryk gdzie ciągi Cauchyego mogą być niezbieżne:

1. $(0,1)$ z ciagiem $(\frac{1}{n})$
2. $\mathbb{Q}$ wiele ciągów Cauchyego, które zbiegają do $a \in \mathbb{R}$, czyli nie są zbieżne w $\mathbb{Q}$.

PRZYKŁADY

1. przestrzeń dyskretna
2. $[0,1]$
3. $\mathbb{R}$, bo jeśli mamy ciąg Cauchyego, to on musi być ograniczony, czyli

$$(\exists\ a, b)(\forall\ n)\ x_n \in [a, b]$$

i stosujemy zwartość $[a, b]$ (fakt niżej)

Przestrzenie zwarte są zupełne.

DOWOD:

Jeśli (x_n) ma podciąg zbieżny i jest Cauchyego, to jest zbieżny. (więcej na liście zadań)

Zupełność nie jest własnością topologiczną - $(0,1)$ jest homeomorficzne z $\mathbb{R}$, ale $(0,1)$ nie jest zupełna, a $\mathbb{R}$ jest zupełn - NIE ZACHOWUJE SIĘ PRZEZ HOMEOMORFIZMY

Przestrzeń metryczna jest METRYZOWALNA W SPOSÓB ZUPEŁNY, gdy
$$(\exists\ Y)\ X \cong Y \quad Y - \text{zupelna}$$

5.2 TWIERDZENIE BANACHA

TWIERDZENIE BANACHA O PUNKCIE STAŁYM

jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną i mamy
$$f : X \to X$$
która jest kontrakcją (tzn $(\exists\ c < 1)(\forall\ x, y \in X)\ d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \cdot c$)
to $(\exists\ x \in X)\ f(x) = x$

DOWOD:

Tworzymy ciąg w następujący sposób (iterujemy f):

$$x_0 \in X$$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Będziemy się starali pokazać, że jest to ciąg Cauchyego. Pomiędzy x_0, x_1 odglełość jest średnio kontrolowana, ale już odległość

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1).$$

Robimy tak n razy i dostajemy

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le c^n \cdot d(x_0, x_1),$$

czyli kolejne wyrazy ciągu są coraz bliżej siebie.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \le \\ &\le c^n d(x_0, x_1) + ... + c^m d(x_0, x_1) = \\ &= d(x_0, x_1)(x^n + ... + c^m) = \\ &= d(x_0, x_1) \sum c^k \end{aligned}$$

Ale wtedy

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N) \sum_{n=N}^{\infty} c^n d(x_0, x_1) < \varepsilon,$$

bo $\sum c^n < \infty$. Wtedy dla $n, m > N$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le (c^n + ... + c^m) d(x_0, x_1) \le \\ &\le \sum_{k=N}^{\infty} c^k d(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

Z zupełności $(\exists\ x)\ (x_n) \to x$, czyli $x = \lim x_n$. W takim razie

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

i smiga

5.3 TWIERDZENIE CANTORA

TWIERDZENIE CANTORA: jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną, a (F_n) to ciąg zbiorów domkniętych taki, że
$\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, gdzie $\operatorname{diam}(F) = \sup\{d(x, y)\ :\ x, y \in F\}$,
oraz $(\forall\ n)\ F_{n+1} \subseteq F_n$.

Wtedy $\bigcap F_n \ne \emptyset$.

DOWOD:

Chcemy wskazać przynajmniej jeden element tego, co chcemy pokazać że jest niepuste. Skonstruujmy więc ciąg

$$x_0 \in F_0$$

$$x_1 \in F_1$$

$$x_2 \in F_2$$

$$x_n \in F_n.$$

Sprawdźmy, że jest to ciąg Cauchyego. Niech $\varepsilon > 0$, a N będzie takie, że

$$(\forall\ n > N)\ \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon.$$

To wtedy

$$(\forall\ n, m > N)\ x_n, x_m \in f_N.$$

Czyli istnieje granicaL $x = \lim(x_n)$. Jeśli należy do przekroju, to należy do wszystkich zbiorów:

$$x \in F_0,\ \text{bo}\ (\forall\ n)\ x_n \in F_0$$

$$x_m \in F_n,\ \text{bo}\ (\forall\ m > n)\ x_m \in F_n$$

czyli $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

i smiga

5.4 TWIERDZENIE BARE'A

TWIERDZENIE BARE'A: jeśli (X, d) jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, to jeśli (F_n) jest ciągiem zbiorów domkniętych o pustym wnętrzu, to
$$\bigcup F_n \neq X$$

DOWOD:

Załóżmy, że X jest zupełna. Będziemy konstruować ciąg Cauchyego, który zbiega do punktu spoza $\bigcup F_n$.

$$x_0,\ r_0 < 1 \quad \overline{B(x_0, r_0)} \cap F_0 = \emptyset,$$

czyli wybieram punkt z dopełnienia F_0 i opisuję na nim kulę, która tnie się pusto z F_0.

$$x_1 \in B(x_0, r_0),\ r_1 < \frac{1}{2} \quad \overline{B(x_1, r_1)} \cap F_1 = \emptyset,$$

co jest możliwe, bo F_1 ma puste wnętrze.

(x_n) jest Cauchyego, bo $r_n \to 0$. Z zupłności $(\exists\, x)\ x = \lim(x_n)$. Chcę pokazać, że $x \notin \bigcup F_n$.

$$x \notin F_0,\ \text{bo}\ (x_n) \subseteq \overline{B(x_0, r_0)}$$

czyli $x \notin \bigcup F_n$.

i smiga

WNIOSKI

1. $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
2. $\mathbb{Q}$ nie jest metryzowalne w sposób zupełny, bo nie spełnia twierdzenia Bare'a, bo $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.

Istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ niemonotoniczna na żadnym przedziale

DOWOD:

Niech I będzie przedziałem, a $C^I_{\nearrow}$ niech będzie zbiorem funkcji ciągłych na $[0, 1]$, które są niemalejące. Pokażemy, że jest to zbiór domknięty o pustym wnętrzu.

6 ZBIÓR DEFINICJI

PRZESTRZEŃ NORMALNA - przestrzeń, w której każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi:

$$(\forall\, F, G \underset{\text{domk}}{\subseteq} X)\, F \cap G = \emptyset (\exists\, U, V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\, U \cap V = \emptyset \,\wedge\, F \subseteq U \,\wedge\, G \subseteq V$$