NIEPORZADKI

Nieporzadkiem na danym zbiorze nazywamy permutacje jego elementow bez punktow stalych.

(bijekcja bez punktow stalych)

Jak przy losowaniu komu kupimy prezent na mikolajki - nie chcemy kupowac prezentu sobie samemu. Jak czesto sie zdarza, ze ktos wylosuje siebie samego?

$$D_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

DOWOD:

Ze zbioru wszystkich permutacji S_n, ktory ma moc $n!$ odejmujemy zbiory, w ktorych i zostaje na swoim miejscu:

$$D_n = |S_n| - |Z(1) \cup Z(2) \cup ... \cup Z(n)|$$

Stosujemy zasade z poprzedniego wykladu:

$$|Z(1) \cup Z(2) \cup ... \cup Z(n)| = |Z(1)| + |Z(2)| + ... + |Z(n)| - (|Z(1) \cap Z(2)| + |Z(1) \cap Z(3)| + ...) + ...$$

Mamy $|Z(i)| = (n-1)!$, bo nie ruszamy jednego elementu, a reszta moze sie przemieszczac dowoli. Analogicznie $|Z(i) \cap Z(j)| = (z-2)!$. Pokolei rozpiszmy prawa strone rownania:

$$Z(n)| = |Z(1)| + |Z(2)| + ... + |Z(n)| = n \cdot (n-1)!$$

bo mamy n zbiorow, kazdy o mocy $(n-1)!$.

$$|Z(1) \cap Z(2)| + |Z(1) \cap Z(3)| + ... = \binom{n}{2}(n-2)!$$

czyli dwa zbiory mozemy wybrac na $\binom{n}{2}$ sposobow, a ich przekroj ma moc $(n-2)!$.
Rozpiszmy rownanie:

$$|Z(1) \cup Z(2) \cup ... \cup Z(n)| = |Z(1)| + |Z(2)| + ... + |Z(n)| - (|Z(1) \cap Z(2)| + |Z(1) \cap Z(3)| + ...) + ... =$$

$$= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + ... = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ...)$$

Z analizy matematycznej wiemy, ze

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... \approx \frac{1}{e}$$

REKURENCJE

Ciag wyrazow rekurencyjnych to taki ciag, w ktorym n wyraz wyliczamy w zaleznosci od poprzednich wyrazow.

Przyblizanie pierwiastka z a:

$$a > 0$$
$$x_0 = a$$
$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$$
$$g = \frac{1}{2}(g + \frac{a}{g}) = \sqrt{a}$$

CIAG FIBONACCIEGO: Ile jest ciagow o wyrazach 1, 2, ktorych suma wynosi n?

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

wynik to ilosc sposobow, na jakie mozemy wyliczyc n uzywajac liczb naturalnych liczb 1 i 2.

DOWOD:

Mamy k przegrodek, w ktore mozemy wstawiac 1 i 2 tak, zeby uzyskac n. Na koncu moze byc 1 albo 2. Jesli na koncu jest 1, to na poprzednich miejscach musialo byc $n-1$, a jesli 2, to na porpzednich musialo byc $n-2$. Poniewaz mozliwosci sa rozlaczne, to do pierwszego przypadu mamy x_{n-1} mozliwosci dojscia, a do przypadku z 2 na kocu, mamy x_{n-2} mozliwosci dojscia.

NIEPORZADKI REKURENCYJNIE: dla $n \geq 3$

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

DOWOD:

Podzielmy nieporzadki na zbiorze $\{1, ..., n\}$ na dwie klasy.

1. element n-ty przechodzi na $i < n$, ale i przechodzi jednoczesnie na n.
   Jest $(n-1) \cdot D_{n-2}$ takich nieporzadkow, bo biore element i na $n-1$ sposobow, usuwam n i i, wiec na pozostalych musze utowrzyc nieporzadek.
2. n przechodzi na $i < n$, ale i nie przechodzi na n, tylko na $j < n$.
   Jest $(n-1)D_{n-1}$ takich nieporzadkow. Wciskamy n na jakies miejsce wsrod $n-1$ elementow - ile jest nieporzadkow na $n-1$ elementach.

Zliczamy obie klasy i dostajemy D_n.

PRZYKLAD: Na ile sposobow mozna polaczyc elementy zbioru mocy $2n$ w pary?

Wybieram pierwsza pare

$$\binom{2n}{2},$$

wybieram druga pare

$$\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2}$$

i tak dalej

$$\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot ... \binom{2}{2}.$$

Ale my nie numerujemy tych par, wiec musimy to podzielic na $n!$

$$\frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot ... \binom{2}{2}}{n!}.$$

Rozwiazanie rekurencyjne:

Niech x_n bedzie szukana liczba. Musimy napisac, jak sie ma x_n do poprzednich wyrazow.
Mamy $2n$ elementow, zaznaczamy element ostatni i dobieramy mu pare. Mozemy to zrobic na $2n-1$ sposobow, wiec

$$x_n = (2n-1)x_{n-1}$$

czyli jak sie to przeliczy otrzymujemy

$$x_n = (2n-1)(2n-3)(2n-5)...$$

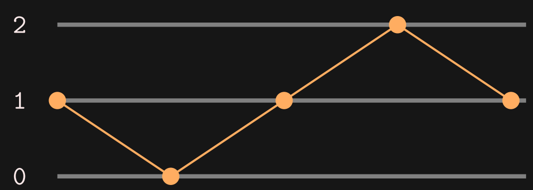
WIEZE W HANOI

Mamy 3 prety: A, B i C. Na pierwszym precie jest n malejacych krazkow, ktore chcemy przelozyc na drugi pret, ale mozemy tylko manipulowac pierwszym z gory i nie mozemy polozyc wiekszego krazka na mniejszy.

podejscie informatyczne - przekopiowac moj kod z WDI

UKLADY ROWNAN REKURENCYJNYCH

Ile jest ciagow dlugosci n o wyrazach z $\{0, 1, 2\}$ takich, ze kazdy nastepny wyraz jest o 1 wiekszy lub o jeden mniejszy? Przedstawmy to jako pileczke odbijajaca sie miedzy 3 liniami:



Niech a_n bedzie iloscia szukana. Nie da sie tego zrobic od razu, wiec podzielmy liczbe n na dwie czesci:

- a_n^1 to liczba ciagow konczacych sie na 1
- $a_n^{0,2}$ to liczba ciagow konczacych sie na 0 lub 2.

Ilosc pierwszej czesci: chcemy konczyc na 1, wiec musielismy byc w 0 lub 2. Dopisujemy do krotszego ciagu 1 i gotowe

$$a_n^1 = a_{n-1}^{0,2}.$$

Ale mozemy popatrzec dwa miejsca w tym - bylismy w 1 i chcemy wrocic na 1. Moglismy zachaczyc o 0 lub o 2, wiec mamy dwie mozliwosci.

$$a_n^1 = 2 \cdot a_{n-2}^1$$

Znamy pierwsze wyrazy:

$$a_n^1 = 1, \quad a_2^1 = 2$$

Mozemy znalezc wzor jawny:

$$a_n^1 = 2^{[\frac{n}{2}]}$$

I wzor ogolem:

$$a_n = a_n^1 + a_n^{0,2} = a_n^{[\frac{n}{2}]} + a_n^{[\frac{n+1}{2}]}$$

PRZYKLAD: Na ile sposobow mozna zbudowac plotek o wymiarach $2 \times n$ majac do dyskozycji klepki 1×2?

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} \end{aligned}$$