SZEREGI FORMALNE (i nieformalne)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots$$

W analizie f okreslona na $(-\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdzie $\mathbb{R} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ - cos z promieniem zbieznosci.

Dodawanie nam smiga normalnie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Mnozenie

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad gdzie\ c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Wezmy teraz

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Mozemy to pokazac analitycznie, a mozemy zrobic hop siup

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots = 1$$

$$1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \dots = 1 + 0 = 1$$

Przyklad

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

To znaczy, ze

$$1 = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$$

no i smiga, nie chce mi sie dzisiaj pisac

FUNKCJA TWORZACA CIAGU $a_0, a_1, \dots$ to $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Manipulowanie ciagami czasami pozwala nam rozwiazywac rekurencje.

Zaczniemy od Fibonacciego

$a_0 = a_1 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

wezmy funkcje tworzaca

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 + \dots = 1 + x + (a_1 + a_0)x^2 + (a_2 + a_1)c^3 + \dots =$$

$$= 1 + x + (a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots) + (a_0 x^2 + a_1 x^3 + \dots) = 1 + x + x(t(x) - 1) + x^2(t(x))$$

Mamy rownanie uwiklane, chce je rozwiazac z punktu widzenia $t(x)$.

$$t(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(p_1 - x)(p_2 - x)} = zapisacsobiejakorozniceulamkow$$

Czyli zapisujemy to sobie

$$\frac{A}{1 - cx} + \frac{B}{1 - dx} = A(1 + cx + c^2x^2 + \dots) + B(1 + dx + d^2x^2 + \dots)$$

czyli nasze $a_n = Ac^n + Bd^n$. Wydaje sie byc bardziej zawile niz oryginalny pomysl tego ziomka z Pizy, ale ma wiecej zastosowan.

PRZYKLAD - liczby Catalona
Rozwazmy funkcje tworzaca

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

Potrzebuje $g^2(x)$

$$g^2(x) = g(x)g(x) = (c_1 x + c_2 x^2 + \dots)(c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = (c_1^2 x^2) + (c_2 c_1 + c_1 c_2)x^3 + \dots$$

$$= c_1^2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots = g(x) - x$$

W takim razie mamy wniosek

$$g^2(x) - g(x) + x = 0$$

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

interesuje nas rozwiazanie gdzie dla malych wartosci x mamy zeczy dodatniie, wiec

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$