BOB BUDOWNICZY

konsultacje w 703
pon 10 ^{15}-11^{15}
czw 12^{00}-13^{00}

AKSJOMATY

ZBIOR i NALEZENIE sa *pojeciami pierwotnymi* - nie defniujemy ich, ale opisujemy ich wlasnosci

1. AKSOMAT EKSTENSJONALNOSCI - zbior jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy

$$\forall\, x \,\forall\, y \quad (x = y \iff \forall\, z \quad (z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakladamy, ze od tego momentu istnieja wylacznie zbiory. Nie ma nie-zbiorow. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorow i okazuje sie, ze w tym swiece mozna zinterpretowac cala matematyke.

2.AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO - istnieje zbior pusty $\emptyset$

$$\exists\, x \,\forall\, y \quad \neg y \in x$$

Na podstawie tych dwoch aksjomatow mozna udowodnic, ze istnieje dokladnie jeden zbior pusty:

Istnienie - aksjomat zbioru pustego

Jedynosci - niech $P_1,\ P_2$ beda zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego z $\neg\, z \in P_1 \ \wedge\ \neg\, z \in P_2$, czyli $z \in P_1 \iff z \in P_2$. Wobec tego na mocy aksjomatu ekstensjonalnosci mamy $P_1 = P_2$.

Przyjrzyjmy sie nastepujacemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N} \cap [10, +\infty), < \rangle$$

W systemie spelnione sa oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Spelnianie bez interpretacji oznacza, ze dla dowolnej interpretacji jest to spelnione.

3. AKSJOMAT PARY - dla dowolnych zbiorow x, y istnieje para $\{x, y\}$

$$\forall\, x, y \,\exists\, z \,\forall\, t \quad (t \in z \iff t = x \ \vee\ t = y)$$

Para nieuporzadkowana jest wyznaczona jednoznaczenie.

Aksjomat mowi tylko o istnieniu z, a mozna latwo udowodnic, korzystajac z aksjomatu ekstensjonalnosci, ze takie z istnieje tylko jedno.

SINGLETONEM elementu x nazywamy zbior $\{x\} := \{x, x\}$

PARA UPORZADKOWANA (*wg. Kuratowskiego*) elementow x i y nazywamy zbior:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dla dowolnych elementow a, b, c, d mamy

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \ \wedge\ b = d$$

dowod jako jedno z cwiczen

4. AKSJOMAT SUMY - dla dowolnego zbioru istnieje jego suma

$$\forall\, x \,\exists\, y \,\forall\, z \quad (z \in y \iff (\exists\, t \quad t \in x \ \wedge\ z \in t))$$

Poniewaz wszystko w naszym swiecie jest zbiorem, to *kazdy zbior mozemy postrzegac jako rodzine zbiorow* - jego elementy tez sa zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

kwantyfikator ograniczony: $\exists\, t \in x \quad z \in t$

Suma jest okreslona jednoznacznie *dowod jako jedno z cwiczen*

ten jedyny y oznaczamy przez $\bigcup x$

Suma dwoch zbiorow:

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\}$$

DOWOD: Ustalmy dowolne z. Wtedy mamy

$$z \in \bigcup\{z,y\} \overset{4.}{\iff} \exists\, t \quad (t \in \{x,y\} \;\wedge\; z \in t) \overset{3.}{\iff} \exists\, t \quad ((t = x \;\vee\; t = y) \;\wedge\; z \in t) \iff$$

$$\iff \exists\, t \quad ((t = x \;\wedge\; z \in t) \;\vee\; (t = y \;\wedge\; z \in t)) \iff \exists\, t \quad (t = x \;\wedge\; z \in t) \;\vee\; \exists\, t \quad (t = y \;\wedge\; z \in t) \implies$$

$$\implies \exists\, t \quad z \in x \;\vee\; \exists\, t \quad z \in y \iff z \in x \;\vee\; z \in y$$

uffff

5. AKSJOMAT ZBIORU POTEGOWEGO - dla kazdego zbioru istnieje jego zbior potegowy

$$\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z \quad (z \in y \iff \forall\, t \in z \quad t \in x)$$

$$\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z \quad (z \in y \iff z \subseteq x)$$

Zbior potegowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go $\mathcal{P}(x)$ *dowod na cwiczeniach <3*

6. AKSJOMAT WYROZNIANIA (wycinania)

to tak naprawde *schemat aksjomatu*, czyli nieskonczona
rodzina aksjomatow

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(t)$ bedzie formula jezyka teorii mnogosci. Wtedy dla tej pormuly mamy aksjomat:

$A_{6\varphi}$ dla kazdego zbioru x istnieje zbior,
ktorego elementu spelniaja te wlasnosc $\{t \in x : \varphi(t)\}$

$$\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, t \quad (t \in y \iff t \in x \;\wedge\; \varphi(t))$$

FULL VERSION: niech $\varphi(t, z_0, ..., z_n)$ bedzie formula jezyka teorii mnogosci. Wtedy pozostale zmienne wolne beda parametrami (czasem zamiast $z_0, ..., z_n$ pisze sie $\overline{z}$).

Dla kazdego uklady parametrow i dla kazdego x istnieje y, taki ze dla kazdego $t \in y$ t nalezy do x i t spelnia formule φ

$$\forall\, z_0\, \forall\, z_1 \,...\forall\, z_n\, \forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, t \quad (t \in y \iff t \in x \;\wedge\; \varphi(t, z_0, ..., z_n))$$

PRZYKLAD: Wezmy polprosta otwarta: $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Druga polprosta $(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ i tak dalej. Czyli ogolna definicja polprostej to: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
Dla kazdej z tych polprostych trzeba wziac inna formule. Ale tak naprawde one wszystkie sa zdefiniowane za pomoca jednej formuly:

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie a funkcjonuje jako parametr.

7. AKSJOMAT ZASTEPOWANIA znowu to tak naprawde schemat a nie aksjomat

ostatni z serii aksjomatow konstrukcyjnych

SKROT: istnieje dokladnie jedno x:
$\exists\, !x \quad \varphi(x) \iff \exists\, x \quad (\varphi(x) \;\wedge\; \forall\, y \quad (\varphi(y) \implies y = x))$

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(x, y)$ bedzie formula jezyka teorii mnogosci, taka, ze:

$$\forall\, x \exists\, !y \quad \varphi(x, y)$$

$A_{7\varphi}$ dla kazdego zbioru x istnieje
zbior $\{z :\; \exists\, t \in x \quad \varphi(t, z)\}$

$$\forall\, x \exists\, y\, \forall\, z \quad (z \in y \iff \exists\, t \in x \quad \varphi(t, z))$$

Czyli, w skrocie, *kazdy zbior mozna opisac za pomoca operacji*.

FULL VERSION: niech $\varphi(x, y, p_0, ..., p_n)$ bedzie formula jezyka teorii mnogosci.

Miech dla kazdego parametru i dla kazdegu x istnieje dokladnie jedno y, takie, ze jesli formula jest spelniona dla x, y i $\overline{p}$, to dla kazdego x istnieje y takie, ze dla kazdego z nalezacego y istniaje t nalezace do x takie, ze zachodzi $t, z, \overline{p}$

$$\forall\, p_0 \,...\forall\, p_n \quad (\forall\, x \exists\, !y \quad \varphi(x, y, \overline{p}) \implies \forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z \quad (z \in y \iff \exists\, t \in x \quad \varphi(t, z, \overline{p})))$$

KONSTRUKCJE

Niech x, y beda dowolnymi zbiorami. Wtedy:

$x \cap y = \{t \in x \;:\; t \in y\}$

$x \setminus y = \{t \in x \;:\; t \notin y\}$

$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) \;:\; \exists\, s \in x\, \exists\, t \in y \quad z = \langle s, t \rangle\}$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjanskiego nie dziala w nowych warunkach - problemem jest z czego wyrozniamy te pare uporzadkowana. $s, t \in x \cup y$, wiec $\{s\}, \{s, t\} \subseteq x \cup y$ a wiec $\{\{s\}, \{s, t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$, czyli nasza para potegowa jest elementem zbioru potegowego zbioru potegowego sumy zbiorow c:

$\bigcap x = \{z \in \bigcup x \;:\; \forall\, y \in x \quad z \in y\}$ i wowczas $\bigcap \emptyset = \emptyset$

RELACJA - definiujemy rel(r) tak, ze r jest relacja. Mozemy definiowac relacje jako dowolny zbior par uporzadkowanych:

$$\texttt{rel}(r) := \exists\, x\, \exists\, y \quad r \subseteq x \times y$$

FUNCKJA - bycie funkcja to bycie relacja taka, ze nie ma dwoch par o tym samym poprzedniku i roznych nastepnikach:

$$\texttt{fnc}(f) := \texttt{rel}(f) \wedge \forall\, x \forall\, y \forall\, z \quad (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \implies y = x)$$

wowczas dziedzine definiujemy:

$$\texttt{dom}(f) = \{x \in \bigcup \bigcup f \;:\; \exists\, y \quad \langle x, y \rangle \in f\}$$

$$\texttt{rng}(f) = \{y \in \bigcup \bigcup f \;:\; \exists\, x \quad \langle x, y \rangle \in f\}$$

bo $\langle x, y \rangle \in f$, wiec $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in f$. No to wtedy $\{x\}, \{x, y\} \in \bigcup f$, czyli golutkie $x, y \in \bigcup \bigcup f$

poki dzialamy na zbiorach skonczonych, zawsze dostaniemy
zbior skonczony - nie moge skonstruowac zbioru nieskonczonego

8. AKSJOMAT NIESKONCZONOSCI

W wersji popularnonaukowej mowi, ze istnieje zbior nieskonczony.

W wersji naukowej wiemy, ze *istnieje zbior indkuktywny*:

$$\exists\, x \quad (\emptyset \in x \;\wedge\; \forall\, y \in x \quad (y \cup \{y\} \in x))$$

Skoro nalezy do naszego x zbior $\emptyset$, to rowniez $\{\emptyset\}$ do x nalezy. Ale wtedy nalezy tez $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$...

TWIERDZENIE: istnieje najemniejszy zbior induktywny, czyli najmniejszy wzgledem zawierania. Zbior induktywny, ktory zawiera sie w kazdym innym zbiorze induktywnym.

DOWOD: Niech x bedzie zbiorem indukcyjnym, ktory istnieje z aksjomatu. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) \;:\; y \text{ jest zbiorem indukcyjnym}\}$$

Teraz musze to udowodnic, czyli $\emptyset$nalezy do ω:

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla kazdego zb. induk. } y \subseteq x$$

Wtedy dla dowolnego $t \in \omega$ chce pokazac $t \cup \{t\} \in \omega$. Wtedy dla kazdego zbioru induktywnego $y \subseteq x$ mamy $t \in y$. Ale wtedy z definicji zbioru induktywnego, skoro $t \in y$, a y jest induktywny, to $t \cup \{t\} \in y$. Zatem z definicji przekroju $t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) \;:\; y \text{ jest zbiorem induktywnym}\} = \omega$

ω jest najmniejszym zbiorem induktywny, Niech z bedzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy $z \cap x$ jest zbiorem induktywnym i $z \cap x \subseteq x$. Czyli z jest jednym z elementow rodziny, ktorej przekroj daje ω: $z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x) \;:\; y \text{ zb. ind}\} = \omega$

Kazdy element $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$... mozemy utozszamic z kolejnymi liczbami naturalnymi. W takim razie ten najmniejszy zbior induktywny bedziemy utozsamiany ze zbiorem liczb naturalnych, a jego elementy z kolejnymi liczbami naturalnymi.

Konsekwencja tego jest zasada indukcji matematycznej:

Niech $\varphi(x)$ bedzie formula o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{N}$, takiej, ze zachodzi $\varphi(0)$ i
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\varphi(n) \implies \varphi(n+1))$. Wowczas

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n)$$

DOWOD: Niech $A = \{n \in \mathbb{N} \;:\; \varphi(n)\}$. Wtedy $A \in \mathbb{N}$ oraz A jest induktywny. Kolejne zbiory nalezace do zbioru induktywnego utozsamialismy z $n \in \mathbb{N}$, wiec skoro dla $\varphi(n)$ nalezy do tego zbioru induktywnego, to rowniez $\varphi(n+1)$ nalezy do A. Skoro A jest zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq A$, wiec $A = \mathbb{N}$.

9. AKSJOMAT REGULARNOSCI (unfundowania)

Mielismy aksjomaty o istnieniu i serie aksjomatow konstrukcyjnych. Aksjomat regularnosci nie jest rzadnym z nich.

W kazdym niepustym zbiorze istnieje element ε-minimalny:

$$\forall\, x \quad (x \neq \emptyset \implies (\exists\, y \in x \forall\, z \in x \quad \neg z \in y))$$

eliminuje patologie: $x \in x$, $x \in y \in x$, ...

Antynomia Russella $\{x \quad : \quad x \notin x\}$ moglby byc zbiorem wszystkich zbiorow, ale jest eliminowany przez aksjomat regularnosci.

10. AKSJOMAT WYBORU [AC]

Dla kazdej rozlacznej rodziny parami rozlacznych zbiorow niepustych istnieje selektor:

$$\forall\, x\, ((\forall\, y, z \in x \quad y \neq \emptyset \,\wedge\, (y \neq z \implies y \cap z = \emptyset)) \implies \exists\, s\, \forall\, y \in x\, \exists\, !t \quad t \in s \cap y)$$

Problemem nie jest znalezienie tych punktow, ale znalezienie zbioru, ktory je wszystkie zawiera dla nieskonczonego x.

Rownowaznosc ciaglosci w sensie Cauchyego i Heinego - dowod potrzebuje skorzystac z aksjomatu wyboru.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO - jezeli mamy kule, to mozemy ja rozlozyc na 5 kawalkow i poprzesuwac je izometrycznie tak, zeby zlozyc z nich dwie identyczne kule jakie mielismy na poczatku. Kawalki na ktore dzielimy sa niemiezalne, nie maja objetosci, i sa *maksymalnie patologiczne*. Dzieje sie dlatego, ze aksjomat wyboru mowi o istnieniu selektora, ale nie jak on wyglada.

FUNKCJA WYBORU - niech $\mathcal{A}$ bedzie rodzina zbiorow niepustych. Funckja wyboru dla rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy wtedy dowolna funckje f

$$f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A} \quad \forall\, A \in \mathcal{A} \quad f(A) \in A$$

Aksjomat wyboru jest rownowazny z tym, ze dla kazdej takiej rodziny istnieje funckja wyboru. Czyli istnienie selektora utozsamiamy z istnieniem funkcji wyboru.