Lista 6, Analiza Matematyczna II

1. Rozważmy ciąg funkcyjny:

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ dla } x \in (0, 1/n), \\ 0 \text{ w.p.p.} \end{cases}$$

Oblicz: granicę punktową, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Czy ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie?

2. Rozważmy ciąg funkcyjny $f_n(x) = n\left(\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 - x^3\right)$. Obliczyć wartość

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

na dwa sposoby.

a) Obliczyć bezpośrednio.

b) Znaleźć $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ i uzasadnić, że jest to granica jednostajna. Następnie napisać

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

3. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1000\pi} e^{-x^3} \sin(nx)\,dx.$$

4. Przy użyciu twierdzenia o całkowaniu ciągu funkcyjnego obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

[1]

5. Zbadać, czy całka po przedziale $[0, 1]$ z ciągu funkcyjnego jest równa granicy całek

a) $x(1 - x^n)$,

b) $n^2 x(1 - x^n)$,

c) $x^n(1 - x^n)$,

d) $\frac{nx}{1+nx}$.

6. Obliczyć sumę

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{n}{n}$$

stosując do całki $\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$ podstawienie $x = \cos(\theta)$.

7. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-n}.$$

[2]

8. Obliczyć następujące całki nieoznaczone stosując całkowanie przez części

---

[1] *Wskazówka:* Rozważyć $f_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

[2] *Wskazówka:* $x^{-x} = e^{-x\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$

a) $\int x^2 \log(x)\, dx$
b) $\int (\log(x))^2\, dx$
c) $\int x^2 e^{4x}\, dx$
d) $t2^t\, dt$
e) $\int u \sin(u)\, du$
f) $\int \arctan(s)\, ds$
g) $\int \arccos(-7x)\, dx$
h) $\int \sin(\log(x))\, dx$
i) $\int x^n \log(x)\, dx$

9. Obliczyć następujące całki nieoznaczone stosując całkowanie przez podstawienie

a) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\, dx$
b) $\int x\sqrt{x-1}\, dx$
c) $\int x^2\sqrt{x+3}\, dx$
d) $\int \left(1-\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-3}\, dx$
e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)^5}\, dx$
f) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$
g) $\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$
h) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{81-x^4}}$
i) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

ï10. Obliczyć

$$\int_1^{2021} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2022-x}+\sqrt{x}}\, dx.$$

ï11. Obliczyć

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^{2017}(x)}\, dx.$$

ï12. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2022}^{2022} e^{-2n}\, dx.$$

ï13. Udowodnić, że

$$\int_0^2 \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}\, dx = \frac{19}{6}.$$

[3]

[3] *Wskazówka:* formalnie należy to interpretować jako granicę punktową odpowiedniego ciągu funkcyjnego