2. Pokazac, ze $\mathrm{Tran}(x) \implies \mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x)) \land \mathrm{Tran}(\bigcup x)$.

$\mathrm{Tran}(x) \implies \mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x))$

Wezmy dowolny $a \in \mathcal{P}(x)$. Z definicji zbioru potegowego wiemy, ze

$$a \in \mathcal{P}(x) \iff a \subseteq x,$$

natomiast z $\mathrm{Tran}(x)$ dostajemy

$$b \in a \subseteq x \implies b \subseteq x.$$

W takim razie mamy

$$b \in a \in \mathcal{P}(x) \ \land \ b \in \mathcal{P}(x),$$

czyli $\mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x))$.

$\mathrm{Tran}(x) \implies \mathrm{Tran}(\bigcup x)$

Wezmy dowolny $a \in \bigcup x$. Z definicji sumy zbioru mamy, ze

$$a \in \bigcup x \iff (\exists\, b \subseteq x)\ a \in b$$

Ale skoro $b \subseteq x$ i $\mathrm{Tran}(x)$, to $b \in x$, czyli

$$b \in \bigcup x.$$

W takim razie $a \in b \in \bigcup x$ oraz $a \in \bigcup x$, a wiec $\mathrm{Tran}(\bigcup x)$.

3. Pokazac, ze $\mathrm{Tran}(x \cup \{x\}) \implies \mathrm{Tran}(x)$.

Wezmy dowolny $a \in x$. Poniewaz $x \in x \cup \{x\}$ oraz $\mathrm{Tran}(x \cup \{x\})$, to

$$a \in x \cup \{x\}.$$

W takim razie jesli $b \in a$, to $b \in x \cup \{x\}$. Rozwazmy dwa przypadki:

1. $b \in \{x\}$, czyli $b = x$, a wiec $x = b \in a \in x$, co jest sprzeczne.
2. $b \in x$, czyli $b \in a \in x$ oraz $b \in x$, czyli $\mathrm{Tran}(x)$.

4. Czy $\mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x)) \implies \mathrm{Tran}(x)$? Czy $\mathrm{Tran}(\bigcup x) \implies \mathrm{Tran}(x)$?

$\mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x)) \implies \mathrm{Tran}(x)$

Wezmy dowolny $a \in x$. Z definicji zbioru potegowego wiemy, ze

$$(\exists\, b \subseteq x)\ a \in b \in \mathcal{P}(x).$$

Ale poniewaz $\mathrm{Tran}(\mathcal{P}(x))$, to $a \in \mathcal{P}(x)$, czyli $a \subseteq x$. Czyli $a \in x$ oraz $a \subseteq x$, czyli $\mathrm{Tran}(x)$.

$\mathrm{Tran}(\bigcup x) \implies \mathrm{Tran}(x)$

$$x = \{\{\emptyset\}\}$$
$$\bigcup x = \{\emptyset\}$$

Mamy $\mathrm{Tran}(\bigcup x)$, ale nie $\mathrm{Tran}(x)$.

5. Pokazac, ze $\mathrm{Tran}(x) \iff \bigcup x \subseteq x$.

$\implies$

Wezmy dowolny $a \in \bigcup x$. Z aksjomatu sumy wiem, ze istnieje $b \subseteq x$ takie, ze $a \in b \subseteq x$. Ale poniewaz $\mathrm{Tran}(x)$, to $b \in x$ oraz $a \in x$, czyli $\bigcup x \subseteq x$.

$\impliedby$

Wezmy dowolny $a \in \bigcup x$. Z aksjomatu sumy wiemy, ze

$$(\exists\, b \in x)\ a \in b \in x.$$

Ale poniewaz $\bigcup x \subseteq x$, to $a \in x$. Czyli dostajemy $a \in b \in x$ oraz $a \in x$, wiec $\mathrm{Tran}(x)$.

6. Pokazac, ze $\mathrm{Tran}(\omega)$.