Przestrzenie metryczne

kule -> zbiory otwarte

Przestrzenie topologiczne

baza (mozna o nich myslec jak o zbiorze kul, ulatwiaja opis rodziny zbiorow otwartych) <- zbiory otwarte (bez koniecznosci rozwazania kul)

ZWARTOSC

(X, d) jest przestrzenia metryczna, $X \subseteq Y$
Jezeli X jest zwarta, to
1. X jest ograniczona
2. X jest domniety w Y

DOWOD:

1. X jest ograniczona $\iff$ $diam(X) < \infty$ - srednica (diam) $diam(X) = \sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in X\}$

Zalozmy, ze X jest nieograniczona. Wskazmy ciag, ktory nie ma podciagu zbieznego

$$x_0 \in X$$

$$x_1 \; taki, \; ze \; d(x_0, x_1) > 1$$

$$x_2 \; taki, \; ze \; d(x_0, x_2) > 1 \wedge d(x_1, x_2) > 1$$

i tak dalej.

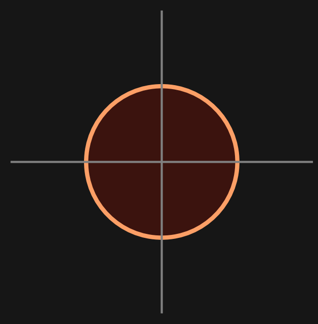
(x_n) nie ma podciagu zbieznego, bo wszystkie jego elementy sa odlegle od siebie o wiecej niz 1.

2. Zalozmy, ze X nie jest domkniety, czyli istnieje ciag, ktory jest zbiezmy w Y, ale nie jest zbiezny w X. I to przeczy zwartosci, bo kazdy podciag (x_n) jest zbiezny do tego samego $y \in Y$, wiec zaden nie jest zbiezny do elementu X.

i smiga

Jesli $X \subseteq \mathbb{R}^n$ z metyka euklidesowa, to X jest zwarty tylko jesli jest domkniety i ograniczony.
czyli nie ma innych wartunkow ktore moga popsuc zwartosc

PRZYKLAD KU PRZESTRODZE $\mathbb{R}^2$ z metryka centrum. Wezmy domknieta kule z brzegiem. Jest domkniete i jest ograniczone



jest ciag niezbiezny - na brzegu okregu.

DOWOD:

$\Longrightarrow$ z poprzedniego twierdzenia

$\Longleftarrow$

zbieznosc po wspolrzednych???

PRZYKLADY

strzalka ($\mathbb{R}$)- niet, bo pokrycie bez pokrycia wlasciwego

$[0, 1]$ w strzalce tez niet

przestrzen z gruszka () - tak (jednopunktowe uzwarcenie aleksandrowa) - mozemy pokrywac az do gruszki i wtedy bierzemy zbior ktory zawiera prawie wszystko poza skonczenie wieloma zbiorami.

Twierdzenie: $f : X \to Y$ ciagla i na, X jest zwarta $\Longrightarrow$ Y jest zwarta - zwartosc sie przenosi.

Mamy na Y jakies pokrycie i chcemy pokazac, ze jest to zwarte. Rozwazamy wiec rozdzielne

$$\{f^{-1}[U] \ : \ U \in \mathcal{U}\}$$

poniewaz f jest ciagla, to $f^{-1}[U]$ sa otwarte.
ze zwartosci X mozemy wybrac podpokrycie skonczone. Czyli

$$\exists\, \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$$

$$\{f^{-1}[U] \ : \ U \in \mathcal{U}_,\}$$

WNIOSKI:

1. $X \cong Y$ i X jest zwarta, to Y tez musi byc zwarta
2. funkcja ciagla $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na przedziale domknietym jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zwartosc przenosi sie na podzbior domkniety

DOWOD:

Wezmy jakies $\mathcal{U}$ pokrycie $X \subseteq Y$, Y jest zwarty. No to potrzebujemy jeszcze dokryc Y, wiec dobierammy X^C, ktore jest otwarte bo X jest zamkniety. To nasze pokrycie X jest podzbiorem pokrycia Y, wiec jest skonczone.

i smiga

X jest zwarta $X \subseteq Y$. Wtedy X jest domkniety w Y. X jest przestrzenia Hansdorffa.

DOWOD:

Nie mozemy poslugiwac sie ciagami, bo nie mamy metryki. Chcemy pokazac, ze $Y \setminus X$ jest otwarte. Wezmy dowolny $y \in Y \setminus X$. Chcemy znalezc zbior otwraty, ktory oddzieli nas od X. Wezmy $X \in X$.
Z Hansdorffa istnieje $x \in U_x$ oraz $y \in V_x$, ktore sie kroja $U_x \cap V_x = \emptyset$. Moge to zrobic dla kazdego punktu x.

$$\{U_x \cap X \ : \ x \in X\}$$

jest pokryciem X. Ze zwartosci X istnieje $X_0 \subseteq X$ taki, ze $\{U_x \cap X \ : \ x \in X_0\}$ nadal jest pokryciem. Wezmy przekroj

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x$$

i widzimy, ze jest on otwarty bo jest przekrojem skonczenie wielu zbiorow otwartych (bo X_0 jest sonczone).

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap U_x = \emptyset$$

a pon to bylo pokrycie, to sie on kroi pusto z X. czyli

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap X = \emptyset$$

Wobec dowolnosci $y \in Y \setminus X$ mamy $Y \setminus X$ jest otwarty, wiec X jest domkniete

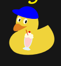
i smiga

Jesli $f : X \to Y$ jest ciagal bijekcja, to jesli X jest zwarta, to f jest homeomorfizmem.

DOWOD:

Wystarczy pokazac, ze f^{-1} jest ciagla, tzn $f[D]$ jest domkniety dla kazdego D- domknietego.
D - domkniety $\implies$ D - zwarty $\implies$ $f[D]$ - zwarty $\implies$ $f[D]$ - domkniety

i smiga



X - p zwarta, metryczna, to X jest calkowicie ograniczona.

DOWOD:

jakkolwiek sobie wybierzemy ε, to znajdziemy zbior skonczoy, taki, ze kazdy element naszej przestrzeni jest aprksymowany z dokladnoscia dla tego ε dla pewnego f z tego zbioru skonczongo
Jesli X nie jest calkowicie ogrniczony, to jest taki ε ze jakbys,to wtedy mozna znalezc x z tego zbioru ze nie ma do niego ciagu zbieznego.

Jesli X jest przestreznia metrzyczna zwarta, to X jest tez osrodkowa