TOPOLOGIA

notatki

Spis treści

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazyway funkcję

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x,x) = 0 \wedge d(x,y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall\, x, y)\ d(x,y) = d(y,x)$ - symetria
3. $(\forall\, x, y, z)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ - warunek $\triangle$

METRYKI EUKLIDESOWE:

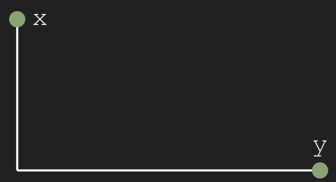
$\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x - y|$

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \ldots + (x(n-1) + y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

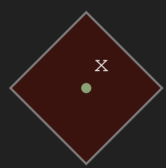
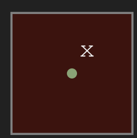
$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

$\mathbb{R}$, m. euklidesowa:	$\mathbb{R}^2$, m. euklidesowa	$\mathbb{R}^2$, m. miasto	$\mathbb{R}^2$, m. maksimum
			
$\mathbb{R}^2$, m. centrum		$C[0,1]$, m. supremum	$C[0,1]$, m. całkowa
narysję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N)(\forall\ n > N)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie szystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall\ i < m)\ x_n(i) \to x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{sup}} f \iff (f_n) \rightrightarrows f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, jeśli na każdym punkcie ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

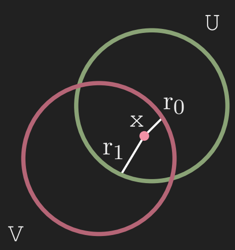
$$(\forall\ z \in U)(\exists\ r > 0)\ B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V, których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowlnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists\ r_0 > 0)\ B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists\ r_1 > 0)\ B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będa zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga

DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists\, U \in \mathcal{U})\; x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x. Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \land x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisac kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga

U jest zbiorem otwartym $\iff$ U jest sumą kul.

DOWOD:

$\Longleftarrow$ wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Longrightarrow$
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall\, x \in U)(\exists\, r_x > 0)\; B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U, suma ta nie może być większa niż U. Zawierają się w niej wszystkie punkty z U, więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga

1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c. Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegac do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists\, r > 0)\; B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U, co jest sprzeczen z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c.

i smiga

2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

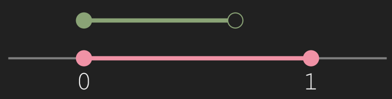
2.1 PODPRZESTRZEŃ METRYCZNA

PODPRZESTRZEŃ (X, d) to (A, d), $A \subseteq X$

formalnie (A, d) *nie jest metryką - należy obciąć* d *:* $d_{\restriction A \times A}$

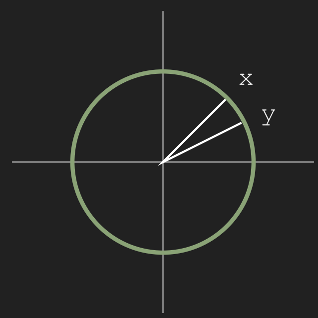
PRZYKŁADY

1. Rozważmy $[0, 1]$ jako podzbiór $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. W takiej podprzestrzeni możemy otrzymać kulę:



2. Ta kula jest otwarta, bo w tej podprzestrzeni nie istnieją punkty mniejsza od 0.

Na $\mathbb{R}^2$ z przestrzenią centrum wyróżnijmy okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, 0)$. Ta przestrzeń zachowuje się podobnie do przestrzeni dyskretnej - każde dwa różne punkty są odległe od siebie o 1.



2.2 FUNKCJA CIĄGŁA

Funckja między dwoma przestrzeniami metrycznymi (X, d) i (Y, ρ):

$$f : X \to Y$$

jest CIĄGŁA, jeśli:

$$(\forall\ x \in X)(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ y)\ d(x, y) \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dodatkowo, wówczas równoważne są warunki:

1. f jest funkcją ciągłą
2. (x_n) - ciąg z X taki, że $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$ (zbieżność wg. Heinego - ciąg wartści zbiega do wartości granicy)
3. $f^{-1}[U]$ jest otwarty dla każdego otwartego $U \subseteq Y$

DOWOD:

Pokażemy implikację $3 \implies 1$

Dana jest funkcja

$$f : X \to Y$$

Weźmy kulę $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$. Ponieważ jest zbiorem otwartym, to z założenia 3

$$(\exists\ U \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\ f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))] = U.$$

Z definicji zbioru otwartego wiemy, że na dowolnym punkcie U możemy opisać kulę

$$(\exists\ \delta > 0)\ B_\delta(x) \subseteq U$$

Dla $y \in B_\delta(x)$
$$d(x,y) < \delta.$$
Natomiast
$$f(y) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$
czyli $d(x,y) < \delta$ oraz $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

i smiga

2.3 HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM $(X \cong Y)$ nazywamy taką funkcję $f : (X,d) \to (Y,\rho)$, która:

1. f jest ciągłą bijekcją
2. f^{-1} jest ciągła

PRZYKŁADY:

$[0,1] \cong [0,2]$ dla funkcji np. $f(x) = 2x$
$(\mathbb{R}^2, d_{euk}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{miast})$ dla funkcji $f(x,y) = \langle x,y \rangle$
(X,d) – dowolna przestrzeń metryczna. Rozważmy poniższą metrykę:
$$d'(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$
Wtedy $(X,d) \cong (X,d')$. Możemy zmieniać zakres punktów, które wyrzucamy i to nie wpływa na istnienie homeomorfizmu.

2.4 TOPOLOGIA

TOPOLOGIĄ na zbiorze X nazywamy
rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że
$\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$
jest zamknięta na skończone przekeroje
jest zamknięta na dowolne sumy

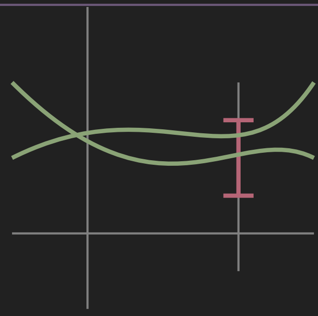
Jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to topologią jest rodzina zbiorów otwartych, która spełnia warunki topologii.

$(X,\mathcal{U})$ to przestrzeń topologiczna

Dla pewnego zbieżnego ciągu elementów X $\lim x_n = x$. Korzystając z pojęcia *przestrzeni topologiicznych*, zbieżność można zdefiniować:
$$(\forall\, U \in \mathcal{U})\; x \in U \implies (\exists\, N)(\forall\, n > N)\; x_n \in U$$

Przestrzeń topologiczna jest PRZESTRZENIĄ HAUSDORFA, jeżeli
$$(\forall\, x \neq y \in X)(\exists\, U,V)\; (x \in U \wedge y \in V) \;\wedge\; U \cap V = \emptyset$$
Czyli dla dowolnych dwóch punktów mogę znaleźć dwa rozłączne zbiory otwarte

$C[0,1]$ – funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$. Weźmy I, przedział otwarty na $\mathbb{R}$. Niech $x \in [0,1]$ oraz
$$A_x^I = \{f \in C[0,1] \;:\; f(x) \in I\}.$$
Czyli wybieramy x i stawiamy n nim bramkę równą I. Do zbioru A_x^I będą należeć wszystkie fnkcje, które przez tę bramkę przejdą.



Rozważmy zbiory postaci $A_{x_0}^{I_0} \cap \ldots \cap A_{x_n}^{I_n}$. Z sum takich zbiorów tworzę rodzinę $\mathcal{U}$, która jest topologią na $[0,1]$.

Przyjrzymy się ciągom zbieżnym w tej topologii.

$$f_n \to f \implies (\forall\, x \in [0,1])\, f_n(x) \overset{euk}{\to} f(x)$$

Wiemy, że f_n jest zbieżne, ale czemu $f_n(x)$ miałoby być zbieżne?

DOWOD:

Dla pewnego $\varepsilon > 0$ i przedziału

$$I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

mamy:

$$(\exists\, N)(\forall\, n > N)\, f_n \in A_x^I.$$

Ponieważ $f(x)$ jest środkiem naszego przedziału i $f_n \to f$, to $f \in A_x^I$. Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall\, n > N)\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa się topologią zbieiżności punktowej.

i smiga

BAZA dla topologii to taka rodzina zbiorów otwartych, że każdy niepsty i otwarty podzbiór tej przestrzeni można wysumować przy pomocy pewnych elementów bazy

2.5 TOPOLOGIA STRZAŁKI

Rozważamy zbiory w $\mathbb{R}$

$$B = \{[a,b)\ :\ a < b\},$$

które są otwarte (owarto-domknięte)

Topologia strzałki jest bogarsza niż topoologia euklidesowa - każdy otwarty zbiórw sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie topologii strałki. W dodatku jest to przestrzeń Handsdorffa.

Ciągi zbieżne w strzałce to

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0,$$

ale już $\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest ciągiem zbieżnym w strzałce, bo wszystkie jego wyrazy są poza badanym przedziałem.

Strzałka nie jest metryzowalna.

2.6 PRZESTRZEŃ ZWARTA

PRZESTRZEŃ ZWARTA – przestrzeń topologiczna, że z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone

UZWARCENIE – rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by była ona przestrzenia zwartą.

OTOCZENIE – dowolny zbiór, który zawiera zbiór otwarty zawierający dany punkt.

UZWARCENIE ALEKSANDROWA *aka przestrzeń z gruszką*

Mamy $\mathbb{R}$ i jakieś . Otoczenia wszystkich liczb $\mathbb{R}$ to

$$r : \{r\},$$

czyli singletony liczb rzeczywistych są tutaj otwarte. Otoczeniem  są z kolei

 $: \{$  $\} \cup A,$

takie, że $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \setminus A$ jest skończony.

Topologię w uzwarceniu Aleksandrowa można zdefiniować w dowolny sposób, musi tylko jasno wynikać, co jest zbiorem otwartym, a co zamkniętym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenią Hausdorffa

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to$$ 

ponieważ tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie . W takim razie możemy powiedzieć, że jeśli mamy dowolny (x_n) różnowartościowy, to

$$\lim x_n =$$ ,

bo  $\in U$, gdzie U jest zbiorem otwartym i istnieje skończenie wiele n takich, że $x_n \notin U$.

2.7 PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA

Zbiór $A \subseteq X$ jest ZBIOREM GĘSTYM, jeżeli

$$(\forall \underset{\text{otw}}{U \neq \emptyset})\ U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

jest to zbiór otwarty, kóry kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń X jest OŚRODKOWA, jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

PRZYKŁADY:

$\mathbb{R}$ z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^2$ z metryką miasto: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ bo zbiory otwarte w metryce miasto są takie same jak w euklidesowej

kostka Cantora $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$: ciągi stałe od pewnego miesjca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) - jest ich przeliczalnie wiele i jest to zbiór gęsty.

ANTYPRZYKŁAD:

$\mathbb{R}^2$ z metryką dyskretną: zbiór gęsty A musi się kroić niepusto z każdym singletonem, więc

$$(\forall\, x) A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$ z metryką centrum: intuicja podpowiada, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ale jeśli kula leży na prostej o wyrazach niewymiernych, np $y = \pi x$, to kroi się pusto z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

W przestrzeni metrycznej (X, d) zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty $\iff$ dla każdej kuli $B_r(x)$ istnieje $a \in A$ bliżej x niż kula

A - zb. gęsty $\iff (\forall\, x \in X)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, a \in A)\; d(x, a) < \varepsilon$

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gęstego A i przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje kula o promieniu ε i środku $x \in X$ taka, że nie zawiera elementów z A:

$$(\exists\, x)\; B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie A tnie się pusto ze zbiorem otwartym $B_\varepsilon(x)$, więc nie jest zbiorem gęstym.

$\Longleftarrow$

Niech U będzie zbiorem otwartym

$$U \in X,$$

czyli możemy założyć, że istnieje kula:

$$(\exists\, B_r(x))\; B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula $B_r(x)$ zawiera się w otwartym zbiorze U, więcistnieje w U punkt, który leży w tej kuli:

$$(\exists\, u \in U)\; d(x, u) < r,$$

a więc kula tnie się niepusto ze zbiorem U:

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

i smiga

Jeśli istnieje $f : X \to Y$, która jest ciągła i na, to jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową, to Y też jest przestrzenią ośrodkową

Ośrodkowość przenosi się przez ciągłe suriekcje

DOWOD:

Chcemy zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w Y mając tylko $f : X \to Y$.

Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem gęstym. Rozważmy obraz A przez funkcję f:

$$B = f[A].$$

Ponieważ B jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciągłą suriekcję, to on też jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowodnić, że jest to zbiór gęsty.

Weźmy dowolny zbiór otwarty w Y:

$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} Y.$$

Wtedy $f^{-1}[U] \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, ponieważ f jest ciągłe i na. W takim razie, zbiorem gęstym w Y jest $f[A]$:

$$(\exists\, a \in A)\ a \in f^{-1}[U] \wedge f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

i smiga

Niech X będzie przestrzenią metryczną i ośrodkową. Wtedy
$$(\exists\, Y \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}})\ X \cong Y$$

DOWOD:

Ponieważ X jest przestrzenią ośrodkową, to istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty, który kroi się niepusto ze wszystkimi zbiorami otwartymi:

$$(\exists\, D = \{d_1, ..., d_n\})\ D \subseteq Y$$

Zdefiniujmy funkcję

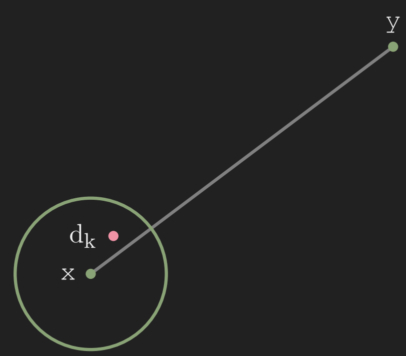
$$h : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$$
$$h(x) = \langle d(x, d_1), d(x, d_2), ..., d(x, d_n) \rangle,$$

która liczy kolejno odległości x od elementów zbioru gęstego w X.

Ponieważ działamy w przestrzeni metrycznej, to korzystając z twierdzenia wcześniej, możemy określić metrykę taką, że

$$(\forall\, x, y \in X)\ d(x,y) \leq 1$$

Funkcja h jest różnowartościowa, ponieważ dla każdych dwóch punktów możemy znaleźć kulę w której odległości od elementu zbioru bazowego do x i do y będą różne:



$$d(x, d_k) < d(y, d_k)$$

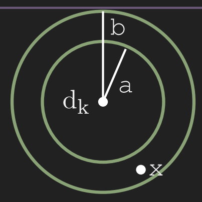
Funkcja h nie musi być na - jeśli tak by było, to każda przestrzeń metryczna byłaby homeomorficzna z kostką Hilberta. Wystarczy, że pokażeby $Y = h[X]$.

Pokażemy, że h i h^{-1} są ciągłe. Przyjrzyjmy się przeciwobrazom zbiorów bazowych

$$h^{-1}[C_n^{(a,b)}].$$

Jeżeli są one otwarte, to również skończone przekroje takich zbiorów są otwarte.

$$C_n^{(a,b)} = \{x \in X \ :\ d(x, d_k) \in (a,b)\}$$



DOKONCZYC DOWOD

2.8 ZBIÓR CANTORA

$$C \subseteq [0,1]$$

Zbiór Cantora, C, jest przekrojem zbiorów domkniętych, więc sam też jest zbiorem domkniętym. Zbiór Cantora jest homeomorficzny z kostką Cantora

$$C \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Zdefiniujmu odpowiednią funkcję:

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$$

Niech s będzie skończonym ciągiem 0, 1. Wóczas C to ciąg, który w zbiorze Cantora przyjmuje lewy lub prawy podzbiór poprzedniego zbioru w zależności od tego, czy pojawia się 0 czy 1:

$$f(x) = y \quad \bigcap D_s = \{y\}$$

2.9 KOSTKA HILBERTA $[0,1]^{\mathbb{N}}$

METRYKA NA KOSTCE HILBERTA:

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$C^{(a,b)} = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} : x(n) \in (a,b)\}$ - wszystkie ciągi z kostki Hilberta, które na n współrzędnej spełniają pewne wymagania. Można to wyobrazić sobie jako bramki ustawione na odpowiedniej n i tylko ciągi, które przechodzą przez nią należą do $C_n^{(a,b)}$.

Skończone przekroje zbiorów postaci $C_n^{(a,b)}$ stanowią bazę $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

DOWOD:

Pokażemy, że baza $\mathcal{B}$ topologii to suma pewnych jej elementów:

$$(\forall\, x)(\forall\, U \underset{otw}{\ni} x)(\exists\, B \in \mathcal{B})\; x \in B \subseteq U$$

W przypadku przestrzeni metrycznej nie musimy brać każdego zbioru otwartego z osobna, bo wiemy, że wszystkie zbioru otwarte są sumą kul, a zbiór kul jest bazą przestrzeni metrycznych.

$$(\forall\, x \in [0,1]^{\mathbb{N}})(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Weźmy dowolny punkt $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ oraz dowolny $\varepsilon > 0$. Chcemy ustawić na x bramkę tak, żeby nasz ciąg przez niego przeszedł oraz żeby ta bramka na pewno była w kuli.

W kostce Hilberta musimy ociąć ogony (nieskończone rozwinięcia zamienić na rozwinięcia od pewnego momentu zawierające tylko 0):

$$(\exists\, N \in \mathbb{N}) \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech dla każdego $n \leq N$

$$I_n = (x(n) - \frac{\varepsilon}{4},\ x(n) + \frac{\varepsilon}{4}),$$

czyli na kolejnych miejscach ustawiamy bramki o średnicy $\frac{\varepsilon}{2}$. Ich przekrój to

$$x \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}.$$

Weźmy dowolny $y \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$. Jego odległość od x to

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} = \sum_{n \leq N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n > N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} < \varepsilon$$

Czyli każdy punkt w przekroju należy do kuli $B_\varepsilon(x)$.

i smiga

WNIOSKI:

1. $\{0,1^{\mathbb{N}}\}$ jest podrzestrzenią $[0,1]^{\mathbb{N}}$, bo kulami są przekroje $\bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$ – ustawiamy bramki na prefiiksach
2. Topologia na $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jest topologią zbieżności punktowej: ciąg zbiega w kostce Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi jego współrzędnych zbiegają w $\mathbb{R}$.

3 ZWARTOŚĆ

3.1 PRZESTRZEŃ ZWARTA

POKRYCIE - rodzina zbiorów otwartych
sumująca się do X

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

Przestrzeń topologiczna X jest ZWARTA,
gdy z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone.

$(0,1)$ w metryce euklidesowej nie jest zbiorem zwartym. Kontrprzykładem są coraz to mniejsze w średnicy przedziały otwarte:

Ich prawe granice zbiegają do 1, więc wyrzucenie nawet jednego zbioru nie da nam pokrycia.

$[0,1]$ w metryce euklidesowej jest zbiorem zwartym. Jeśli znowu podzielimy na coraz to mniejsze przedziały, to zawsze zostaje ten malutki, który musi sie sumować do 1. Wystarczy że go wybierzemy, a resztę tych maleństw wyrzucimy i w ten sposób otrzymamy podpokrycie skończone.

Przestrzeń metryczna jest ZWARTA wtedy
i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny.

DOWOD:

Chcemy pokazać $\iff$.

$\implies$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem w przestrzeni zwartej X. Wtedy może zajść jedna z dwóch możliwość:

1. Niech $A = \{a : (\exists\, k)\; a = x_k\}$, wtedy $(\exists\, x \in X)(\forall\, \varepsilon > 0)\; B_\varepsilon(x) \cap A$ jest nieskończony, czyli nieskończenie wiele wyrazów zawiera się w kuli o dowolnym promieniu $\varepsilon > 0$ i środku w x (czli x jest PUNKTEM SKUPIENIA CIĄGU).

Wybieżmy rosnący ciąg (n_k) taki, że

$$x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x).$$

Ale taki ciąg musi spełniać $(x_{n_k}) \to x$, czyli mamy podciąg zbieżny.

2. Załóżmy, że (x_n) nie ma punktu skupienia.

Weźmy dowolne $x \in X$. Wówczas istnieje $B_r(x)$, czyli kula o środku x, która zawiera skończenie wiele wyrazów ciągu (x_n). Rozważmy zbiór takich kul

$$\{B_r(x) \,:\, x \in X\}$$

że są one pokryciem X. Ponieważ X jest zwarte, to istnieje takie F, że

$$B_r(x) \,:\, x \in F$$

jest skończonym pokryciem X. Ale wtedy ciąg tych x jest ciągiem skończonym i mamy sprzeczność (?).

$\impliedby$

ZROBIĆ DOWOD

3.2 ZWARTA PRZESTRZEŃ METRYCZNA

(X, d) jest przestrzenią metryczną, $X \subseteq Y$

Jeżeli X jest zwarta, to

1. X jest ograniczona
2. X jest domknięty w Y.

Jeśli mamy metrykę euklidesową i $\mathbb{R}^n$, to implikacja zamienia się w równoważność, tzn $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty $\iff$ jest domknięty i ograniczony.

DOWOD:

1. Wiemy, że przestrzeń X jest ograniczony wtw gdy jej średnica jest skończona:

$$X \text{ jest ograniczona} \iff \operatorname{diam}(X) < \infty$$

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Załóżmy, że X jest nieograniczona. Wskażemy wówczas ciąg, który nie ma podciągu zbieżnego.

$$\begin{aligned}
&x_0 \in X \\
&x_1 \quad d(x_0, x_1) > 1 \\
&x_2 \quad d(x_0, x_2) > 1 \wedge d(x_1, x_2) > 1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

(x_n) nie ma podciągu zbieżnego, bo wszystkie jego elmenty są odległe od siebie o więcej niż 1.

2. Załóżmy, że X nie jest domknięty, czyli istnieje ciąg, który jest zbieżny w Y, ale nie jest zbieżny w X.

$$(x_n) \quad ((\forall\, n)\, x_n \in X) \wedge ((\exists\, y \in Y)\, (x_n) \to y)$$

Ale to jest sprzeczne z warunkiem zwartości, bo każdy podciąg (x_n) jest zbieżny do tego samego $y \in Y$, więc żaden nie jest zbieżny w X.

i smiga

3.3 PRZECHODNOŚĆ ZWARTOŚCI

Jeśli istnieje $f : X \xrightarrow[\text{ciagla}]{\text{na}} Y$, to zachodzi

$$X \text{ zwarta} \implies Y \text{ zwarta}$$

Zbieżność jest przechodnia przez funckje ciągłe i na.

DOWOD:

Na Y wyróżniamy pewne pokrycie i chcemy pokazać, że możemy wybrać z niego podpokrycie skończone.

Rozważmy rodzinę $\mathcal{U}$ otwartych zbiorów w Y taką, że

$$\bigcup \mathcal{U} = Y$$

oraz przeciwobrazy zbiorów tej rodzny:

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}[U]\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Ponieważ f jest funkcją ciągłą, to $f^{-1}[U]$ są zbiorami otwartymi. Łatwo zauważyć, że

$$\bigcup \mathcal{B} = X.$$

Ponieważ X jest przestrzenią zwartą, możemy wybrać skończone podpokrycie z $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_1 = \{f^{-1}[U] \ : \ \mathcal{U}_1\}.$$

Ale funkcja f jest na, więc

$$\bigcup \mathcal{U}_1 = Y,$$

a z ciągłości wiemy, że każdy zbiór w $\mathcal{U}_1$ jest zbiorem otwartym. W takim razie dowolne pokrycie Y ma podpokrycie skończone.

i smiga

WNIOSKI:

1. $X \cong Y$ i X jest zwarta, to Y też musi być zwarta
2. funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na przedziale domkniętym jest ograniczone i przyjmuje swoje kresy.

Zwartość przenosi się na podzbiory domknięte

DOWOD:

Weźmy dowolne $\mathcal{U}$ pokrycie $X \subseteq Y$. Żeby dostać pokrycie Y, wystarczy do niego dodać X^c, które jest otwarte, bo X jest zbiorem domkniętym. Czyli otrzymujemy pokrycie zwartego zbioru Y:

$$\mathcal{U} \cup X^c.$$

Możemy z niego wybrać podpokrycie skończone, bo Y jest przestrzenią zwartą. Dostajemy

$$\mathcal{U}_1 \cup X^c,$$

ale $\mathcal{U}_1$ jest skończonym podzbiorem $\mathcal{U}$ i pokrywa X, dostajemy więc skończone podpokrycie X, więc jest on zwarty.

i smiga

Jeśli X jest przestrzenią zwartą oraz $X \subseteq Y$, Y jest przestrzenią Hausdorffa, to wtedy X jest domknięty w Y.

DOWOD:

Chcemy pokazać, że $Y \setminus X$ jest zbiorem otwartym.

Weźmy dosolny $y \in Y \setminus X$. Chcemy znaleźć zbiór otwarty, który oddzieli nas od X. Weźmy dowolne $x \in X$.

Z przestrzeni Hausdorffa wiemy, że istnieje $U_x \ni x$ oraz $V_x \ni y$, które są rozłączne

$$U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Dla każdego punktu $x \in X$ możemy wybrać taki zbiór, więc rodzina

$$\mathcal{A} = \{U_x \cap X \ : \ x \in X\}$$

jest pokryciem X. Ze zwartości X wiemy, że istnieje skończony podzbiór $X_1 \subseteq X$ takie, że

$$\mathcal{A}_1 = \{U_x \cap X \ : \ x \in X_1\}$$

jest skończonym pokryciem X. Weźmy przekrój

$$\bigcap_{x \in X_1} V_x.$$

Jest on zbiorem otwartym, bo jest przekrojem skończenie wielu zbiorów otwartych.
Z własności przestrzeni Hausdorffa wiemy, że

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap U_x = \emptyset,$$

a ponieważ U_x należało do pokrycia X, to również

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap X = \emptyset.$$

Wobec dowolności $y \in Y \setminus X$ mamy $Y \setminus X$ jest zbiorem otwartym, więc X jest domknięte w Y.

i smiga

Jeżeli $f : X \xrightarrow{\text{ciagla}} Y$ jest bijekcją, to jeśli X jest przestrzenią zwartą, f jest homeomorfizmem

DOWOD:

Wystarczy pokazać, że f^{-1} jest funkcją ciągłą, tzn $f[D]$ jest domknięty dla każdego $D \underset{\text{dom}}{\subseteq} X$.

Ponieważ D jest domkniętym podzbiorem zwartej przestrzeni, to D również jest zwarte. W takim razie $f[D]$ jest zwartym podzbiorem Y, a więc jest jego domkniętym podzbiorem.

i smiga

Jeśli X jest zwartą przestrzenią metryczną, to X jest całkowicie ograniczone, czyli
$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, F \subseteq X)(\forall\, x \in X)(\exists\, f \in F)\ d(x, f) < \varepsilon$

DOWOD:

Gdyby X nie był całkowicie ograniczony, to

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, F \subseteq X)(\forall\, x \in X)(\exists\, f \in F)\ d(x, f) > \varepsilon,$$

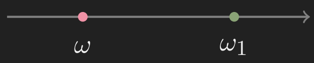
czyli istnałby ciąg bez podciągu zbieżnego. Spróbujmy go wytworzyć:

$$\begin{aligned}
&x_0 \in X \\
&x_1 \quad d(x_0, x_1) > \varepsilon \\
&x_2 \quad d(x_1, x_2) > \varepsilon \wedge d(x_0, x_2) > \varepsilon
\end{aligned}$$

Każdy kolejny wyraz jest odległy od poprzednich o co najmniej ε, więc mamy ciąg bez podciągu zbieżnego, co jest sprzeczne ze zwartością przestrzeni metrycznej.

i smiga

4 PRZESTRZENIE ABSTRAKCYJNE



ω_1 – najmniejsza nieprzeliczalna liczba porządkowa. Rozważmy przestrzeń

$$X = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$$

z topologią

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) &= \{\xi \in \omega_1 \ : \ \alpha \in \xi \in \beta\}\\ (\cdot,\beta) &= \{\xi \in \omega_1 \ : \ \xi \in \beta\}\\ (\beta,\cdot) &= \{\xi \in \omega_1 \ : \ \beta \in \xi\}.\end{aligned}$$

Nazywamy ją topologią porządkową, bo jest zadana dobrym porządkiem na liczbach porządkowych ($\in$ odpowiada $<$). Jest to *przestrzeń Hausdorffa*.

Rozważmy podzbiór X:

$$A = \omega_1 \subseteq X$$

A nie jest zbiorem domkniętym, bo $\overline{A} = X \neq A$. Zazwyczaj jeśli zbiór jest całą przestrzenią z wyłączeniem jednego punktu, to nie jest domknięty (wyjątkiem jest przestrzeń gdzie wyjęty punkt nie ma otoczenia lub ma otoczenie dyskretne).

5 SPÓJNOŚĆ

Przestrzeń X NIE JEST SPÓJNA jeśli istnieją otwarte niepuste $U, v \subseteq X$ takie, że
$$U \cap V = \emptyset \wedge U \cup V = X$$

Przestrzeń $[0,1]$ jest spójna.

DOWOD:

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq [0,1]$ takie, że $U \cup V = [0,1]$. Załóżmy, bez straty ogólności, że $0 \in U$.

Niech $b \in \inf V$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $b \in V$

Wówczas każde otoczenie b kroi się niepusto z U, czyli nie należy do V, a więc V nie jest zbiorem otwartym.

2. $b \notin V$

Wtedy U nie jest otwarty, bo $b \in U$ i otoczenia b kroją się niepusto z V, więc one nie należa od U, a więc U nie jest otwarte.

Mamy sprzecznośc w obu przypadkach, więc nie istnieją rozłączne zbiory $U, V \underset{otw}{\subseteq} [0,1]$ takie, że $U \cup V = [0,1]$. W takim razie $[0,1]$ jest spójne.

i smiga

Jeśli $(X_i)_{i \in I}$, $X_i \subseteq X$, to przestrzenie spójne oraz
$\bigcap X_i \neq \emptyset$,
to wówczas
$\bigcup X_i$ jest przestrzenią spójną.

DOWOD:

nie wiem co się zadziało

5.1 ŁUKOWA SPÓJNOŚĆ

Przestrzeń X jest ŁUKOWO SPÓJNA jeśli
$$(\forall\, x \neq y \in X)(\exists\, h : [0,1] \xrightarrow[\text{ciagla}]{} X)\ h(0) = x \wedge h(1) = y$$

Przeliczalne zbiory nie są łukowo spójne. Przeliczalne zbiory Hausdorffa nie są spójne.

Łukowa spójność pociąga za sobą spójność.

DOWOD:

Załóżmy, nie wprost, że przestrzeń X jest łukowo spójna i jest niespójna, czyli istnieją dwa rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $U \cup V = X$. Niech $x \in U$ oraz $y \in V$. Ze spójności łukowej wiemy, że
$$(\exists\, h : [0,1] \to X)\ h(0) = x \wedge h(1) = y.$$

Spróbujemy znaleźć punkt w obrazie h, który nie należy ani do U ani do V.

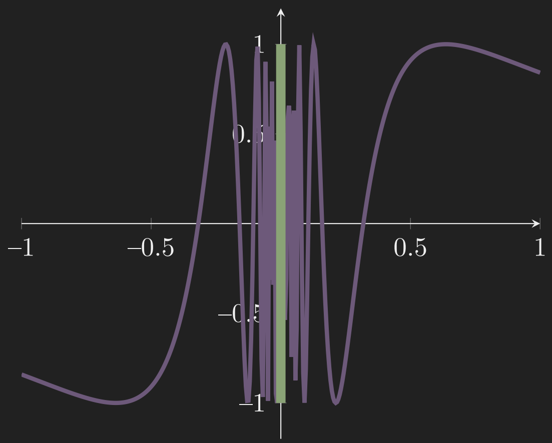
Niech
$$h[[0,1]] = I \cong [0,1]$$
wtedy
$$x \in I \cap U \neq \emptyset$$
$$y \in I \cap V \neq \emptyset.$$

Zatem I nie jest spójne, bo możemy je wyrazić jako $(I \cap U) \cup (I \cap V)$, co jest sprzeczneCZEMU?

5.2 KOŁO WARSZAWSKIE i przyjaciele

Czy twierdzenie wyżej działa w drugą stronę? Nie, spójrzmy na przestrzeń nazwaną Kołem warszawskim:

$$X = \{\sin \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$



Jest to przestrzeń spójna, ale nie jest spójna łukowo. Jeśli zostanie tylko $\{\sin \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}\}$, to przestrzeń staje się spójna łukowo.

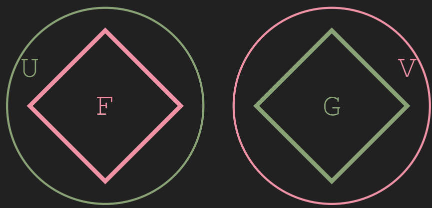
6 LEMAT URYSOHNA

6.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń X jest przestrzenią NORMALNĄ (również T_4), jeżeli

$$(\forall\, F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X)\; F \cap G = \emptyset$$

$$(\exists\, U, V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\; U \cap V = \emptyset \;\wedge\; F \subseteq U \;\wedge\; G \subseteq V$$



Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

6.2 LEMAT URYSOHNA

Załóżmy, że przestrzeń X jest normalna. Niech $F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X. Wówczas:

$$(\forall\, f : X \xrightarrow{\text{ciagla}} [0,1])\; f_{\restriction F} \equiv 0 \;\wedge\; f_{\restriction G} \equiv 1$$

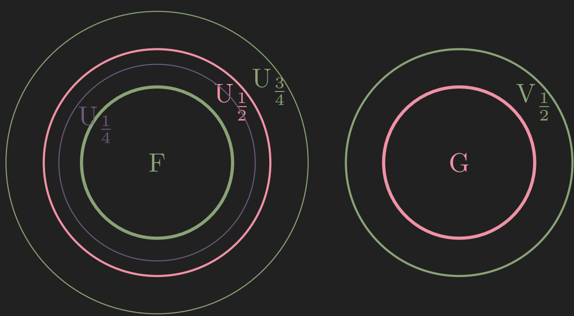
Warunek ten jest silniejszy od normalności.

DOWOD:

Niech F, G będą zbiorami domkniętymi spełniającymi założenia lematu. Z normalności tych zbiorów możemy wziąć zbiory otwarte $U_{\frac{1}{2}}$ i $V_{\frac{1}{2}}$ takie, że $U_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G. Ponieważ $U_{\frac{1}{2}}$ jest zbiorem otwartym, to $U^c_{\frac{1}{2}}$ jest domknięte, więc możemy oddzielić F od $U_{\frac{1}{2}}$ za pomocą $U_{\frac{1}{4}}$.

Ponieważ $V_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G, to $\overline{U}_{\frac{1}{2}} \cap G = \emptyset$ oraz możemy utowrzyć zbiór $U_{\frac{3}{4}}$ oddzielający $\overline{U}_{\frac{1}{2}}$ od G i tak dalej.

Powstaje nam konstrukcja:



Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem liczb diadycznie wymiernych (tzn postaci $\frac{k}{2^n}$) z przedziału $[0,1)$. Wówczas zbiór

$$\{U_d \,:\, d \in \mathcal{D}\}$$

opisuje nam powyższą konstrukcję:

$$(\forall\, d)\; F \subseteq U_d$$

$$(\forall\, d < d')\; \overline{U}_d \subseteq U_{d'}$$

$$(\forall\, d)\; U_d \cap G = \emptyset$$

Zdefiniujmy funkcję
$$f : X \to [0,1]$$
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} & (\exists\, q \in \mathcal{D})\ x \in U_q \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$
Zbiory otwarte na przedziale $[0,1]$ mają postać $(a,b) = [0,b) \setminus [0,a]$. Sprawdzamy ciągłość:
$$\begin{aligned} f^{-1}[[0,b)] &= \{x \,:\, \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} < b\} = \\ &= \{x \,:\, (\exists\, q < b)\ x \in U_q\} = \\ &= \bigcup_{q<b} U_q \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f^{-1}[[0,a]] &= \{x \,:\, \inf\{q \in \mathcal{D} \,:\, x \in U_q\} \leq a\} = \\ &= \{x \,:\, (\exists\, q \leq a)\} = \\ &= \bigcap_{q \leq a} U_q^c \end{aligned}$$
$$f^{-1}[(a,b)] = f^{-1}[[0,b)] \setminus f^{-1}[[0,a]] = \bigcup_{q<b} U_q \setminus \bigcap_{q\leq a} U_q^c$$
DOCZYTAC W KLAUS JANICH "TOPOLOGIA"BO NADZIEJA POMIESZAŁ

6.3 TWIERDZENIE TIETZEGO

Niech X będzie przestrzenią normalną, a $D \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Wtedy ciągłą funkcję
$$f : D \xrightarrow{\text{ciagla}} \mathbb{R}$$
możemy rozszerzyć do ciągłej funkcji
$$F : X \to \mathbb{R}$$
takiej, że $(\forall\, x \in D)\ F(x) = f(x)$

7 PRZESTRZEŃ ILORAZOWA

7.1 KOPRODUKTY *(sumy proste rozłączne)*

Jeśli dana jest rodzina zbiorów indeksowana $(X_i)_{i\in I}$, to jej koproduktem nazywamy $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ z najsilniejszą topologią taką, że wszystkie funkcje:

$$f_i : X_i \to \bigsqcup X_i$$
$$f_i(x) = \langle x, i\rangle \text{ są ciągłe.}$$

Zauważmy, że f_i to prawie identyczność na X_i, tylko z dodatkowym elementem. W takim razie w przestrzeni $\bigsqcup X_i$ może znaleźć się co najwyżej tyle zbiorów otwartych, ile jest w każdej z przestrzeni X_i łącznie. W takim razie zbiór otwarty w $\bigsqcup X_i$ to zbiór postaci

$$U_i \times \{i\}, \quad U_i \underset{otw}{\subseteq} X_i$$

Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest homeomorficzna z żadnym koproduktem więcej niż jednej przestrzeni.

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Załóżmy nie wprost, że istnieje przestrzeń spójna X homeomorficzna z koproduktem dwóch różnych przestrzeni

$$X \cong X_0 \sqcup X_1.$$

Ale przestrzenie te są otwarte i rozłączne, więc mamy dwa zbiory otwarte

$$X_0 \times \{0\}$$

$$X_1 \times \{1\},$$

które są otwarte i rozłączne, więc nie są spójne - sprzeczność.

$\Longleftarrow$

Załóżmy, że istnieje niespójna przestrzeń która nie jest homeomorficzna z żadnym koproduktem dwóch przestrzeni. Niech

$$X = A \cup B,$$

gdzie A, B są zbiorami otwartymi, a X nie jest spójne. Wówczas mamy

$$X \cong A \sqcup B$$

czyli X jest homeomorficzne z koproduktem dwóch przestrzeni, co daje nam sprzeczność.

i smiga

7.2 PRZESTRZEŃ ILORAZOWA

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $\sim$ relacją równoważności na niej. Rozważmy $X_{/\sim}$ - PRZESTRZEŃ ILORAZOWĄ. Topologią takiej przestrzeni jest najsilniejsza ciągła funkcja f:

$$f : X \to X$$
$$f(x) = [x]_\sim$$

Na WDM klasy abstrakcji reprezentowaliśmy jako pola z flagą - wtedy jeśli $x \sim y$, to należą one do tego samego pola. W przestrzeni ilorazowej takie paski są punktami, a więc ich zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy zbiór punktów X które należą do każdej klasy abstrakcji zawartej w tym zbiorze jest otwarty:

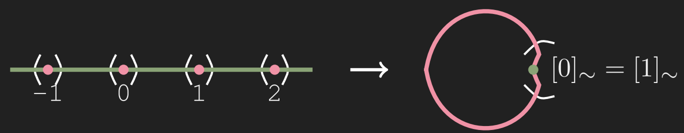
$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} X_{/\sim} \iff \{x \in X : [x]_\sim \in U\} \underset{\text{otw}}{\subseteq} X.$$

PRZYKŁADY

$$\langle [0,1], d_{\text{euklid}} \rangle$$
$$0 \sim 1$$

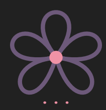
Zbiory otwarte niezawierające punktu $[0]_\sim = [1]_\sim$ są normalnie otwarte w X. Jeśli zahaczymy o ten punkt zlepienia, to dostajemy dwa zbiory domknięte przy 0 i 1 i otwarte po drugiej stronie, więc jest to nadal zbiór otwarty.

$$X = \langle \mathbb{R}, d_{\text{euklid}} \rangle$$
$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$



Podobnie jak w poprzednim przykładzie, tutaj też zlepiamy ze sobą klasę abstrakcji zera, tylko dodatkowo zbiór otwarty w $X_\sim$ zmienia się w wiele przedziałów na $\mathbb{R}$.

$$X = \langle \mathbb{R}, d_{\text{euklid}} \rangle$$
$$x \sim y \iff x, y \in \mathbb{Z}$$



Punktem centralnym jest całe $\mathbb{Z}$, natomiast "płatki", to odcinki między kolejnymi liczbami całkowitymi. Nie jest to podzbiór przestrzeni euklidesowej, chociaż może się tak wydawać. Na każdym płatku zbiory otwarte mogą przyjmować dowolną postać, ale przez punkt w środku nie mamy bazy przeliczalnej - czyli jest to niemetryzowalny kwiatek.

$$X = \bigsqcup_{i \in A} \mathbb{R} \quad |A| = 2^{2^{2^{\mathfrak{c}}}}$$
$$\langle x, a \rangle \sim \langle y, b \rangle \iff x = y = 0$$

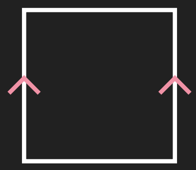
Wszystkie proste które wcześniej były w koproduktcie sklejamy w punkie 0 i dostajemy bardzo dużo nastroszonych prostych. Taka przestrzeń nazywa się jerzem i jest potężna. Dodatkowo, jest spójna łukowo, ale nie jest ośrodkowa.

8 ROZMAITOŚCI

8.1 RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

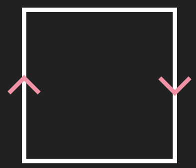
$$X = [0,1]^2$$

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



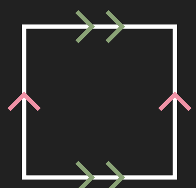
Tutaj zlepiamy dwa przeciwne boki prostokąta i otrzymujemy tubę.

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1-y\rangle$$



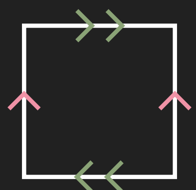
Powstaje nam wstęga Mobiusa.

$$\mathrm{parlx}, 0\rangle \sim \langle x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



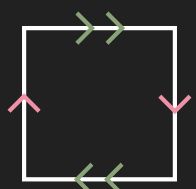
Zlepiamy górę i dół oraz prawo i lewo - dostajemy torus.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1-x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



Jak to się zrobi na przemian strzałki na górze i dole to dostajemy torus z obrotem, czyli butelkę Kleina.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1-x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1-y\rangle$$



Na przemian wszystkie strzałki i dostajemy płaszczyznę rzutową.

8.2 ROZMAITOŚĆ

N - ROZMAITOŚĆ to przestrzeń topologiczna, łukowo spójna, lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$ (to znaczy, że $(\forall\, x \in X)(\exists\, U \underset{otw}{\ni} x)\; U \cong \mathbb{R}^n$)

kula - przykład, rura (z końcem) - antyprzykład

Czym się różni sfera od torusa?

Wyobraźmy sobie pętelkę na spherze, jeśli będziemy ją ściskać, to zrobimy supełek. Natomiast jeśli na torusie weźmiemy pętelkę ale taką oplatającą go, to tego nie możemy ścisnąć do supełka.

PĘTLA to funkcja

$$p : [0, 1] \to X$$

która jest ciągła i $p(0) = p(1)$

Funkcje stałe też są pętlami.

Przestrzeń topologiczna jest JEDNOSPÓJNA, gdy jest łukowo spójna i dla każdej pętli istnieje punkt, z którym jest ona homotopijnie równoważna (jest ściągalna do punktu).

jakaś dygresja

$$X \cong Y,$$

jeśli X jest jednospójna, to Y jest też jednospójna.

Weźmy koło bez brzegu i pół okręgu z otwartymi końcami. Obie te przestrzenie są jednospójne, ale jeśli z koła wyjmiemy jeden punkt, to przestaje ono być jednospójne, a jeśli z pół okregu wyjmiemy, to on nadal jest jednospójny.

8.3 PRZESTRZEŃ ŚCIĄGALNA

Przestrzeń topologiczna jest ŚCIĄGALNA, jeżeli identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stała

$$\mathrm{id} : X \to X \quad \mathrm{id}(x) = x$$
$$f : X \to X \quad f(x) = a$$

Na przykład dysk jest ściągalny:

$$H(x, t) = t \cdot a + (1 - t)x,$$

identyczność jest homotopijnie spójna z funckją $f(x) = a$. Sfera nie jest homotopijnie spójna.

TWIERDZENIE BROUWERA

jeśli istnieje ciągła $f : D^n \to D^n$, gdzie D^n to dysk n-wymiarowy, to

$$(\exists\, x)\; f(x) = x,$$

czyli istnieje punkt stały.

DOWOD:

Dla $n = 2$.

Wyobraźmy sobie, że mamy ciągłą funkcję

$$f : D^2 \to D^2,$$

któa nie ma punktu stałego

$$(\forall\ x)\ f(x) \neq x.$$

Korzystając z niej konstruujemy drugą funkcję

$$r : D^2 \to S^1,$$

gdzie S^1 to brzeg D^2. Prowadzimy prostą przez x i jego obraz $f(x)$, po czym przypisujemy $r(x)$ jako
punkt przecięcia tej prostej i S^1. Co możemy o r powiedzieć?

- r jest ciągła
- $r_{\restriction S^1} = id_{\restriction S^1}$

Rozważmy funkcję:

$$H : D^2 \times [0, 1] \to S^1$$

$$H(x, t) = r(tx)$$

H jest ciągłe, $H(x, 0) = r(0)$, gdzie $r(0)$ bedzie środkiem dysku $H(x, 1) = r(x) = x$. Czyli dostaliśmy, że okrąg jest ściągalny, ale on nie jest więc mamy sprzeczność

i smiga

9 PRZESTRZENIE ZUPEŁNE

9.1 CIĄG CAUCHY'EGO

Ciąg (x_n) jest Chauchy'ego, jeśli
$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N)(\forall\ n, m \geq N)\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Jeśli ciąg jest zbieżny, to
jest Cauchy'ego, ale nie musi być odwrotnie.

Przestrzeń metryczna jest ZUPEŁNA,
gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny

Przykłady metryk gdzie ciągi Cauchyego mogą być niezbieżne:

1. $(0, 1)$ z ciągiem $(\frac{1}{n})$
2. $\mathbb{Q}$ wiele ciągów Cauchyego, które zbiegają do $a \in \mathbb{R}$, czyli nie są zbieżne w $\mathbb{Q}$.

PRZYKŁADY

1. przestrzeń dyskretna
2. $[0, 1]$
3. $\mathbb{R}$, bo jeśli mamy ciąg Cauchyego, to on musi być ograniczony, czyli

$$(\exists\ a, b)(\forall\ n)\ x_n \in [a, b]$$

i stosujemy zwartość $[a, b]$ (fakt niżej)

Przestrzenie zwarte są zupełne.

DOWOD:

Jeśli (x_n) ma podciąg zbieżny i jest Cauchyego, to jest zbieżny. (więcej na liście zadań)

Zupełność nie jest własnością topologiczną - $(0, 1)$ jest homeomorficzne z $\mathbb{R}$, ale $(0, 1)$ nie jest zupełna, a $\mathbb{R}$ jest zupełn - NIE ZACHOWUJE SIĘ PRZEZ HOMEOMORFIZMY

Przestrzeń metryczna jest METRYZOWALNA W SPOSÓB ZUPEŁNY, gdy
$$(\exists\ Y)\ X \cong Y \quad Y - \text{zupelna}$$

9.2 TWIERDZENIE BANACHA

TWIERDZENIE BANACHA O PUNKCIE STAŁYM

jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną i mamy
$$f : X \to X$$
która jest kontrakcją (tzn $(\exists\ c < 1)(\forall\ x, y \in X)\ d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \cdot c$)
to $(\exists\ x \in X)\ f(x) = x$

DOWOD:

Tworzymy ciąg w następujący sposób (iterujemy f):

$$x_0 \in X$$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Będziemy się starali pokazać, że jest to ciąg Cauchyego. Pomiędzy x_0, x_1 odgległość jest średnio kontrolowana, ale już odległość

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1).$$

Robimy tak n razy i dostajemy

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le c^n \cdot d(x_0, x_1),$$

czyli kolejne wyrazy ciągu są coraz bliżej siebie.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \le \\ &\le c^n d(x_0, x_1) + ... + c^m d(x_0, x_1) = \\ &= d(x_0, x_1)(x^n + ... + c^m) = \\ &= d(x_0, x_1) \sum c^k \end{aligned}$$

Ale wtedy

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N) \sum_{n=N}^{\infty} c^n d(x_0, x_1) < \varepsilon,$$

bo $\sum c^n < \infty$. Wtedy dla $n, m > N$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le (c^n + ... + c^m) d(x_0, x_1) \le \\ &\le \sum_{k=N}^{\infty} c^k d(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

Z zupełności $(\exists\, x)\, (x_n) \to x$, czyli $x = \lim x_n$. W takim razie

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

i smiga

9.3 TWIERDZENIE CANTORA

TWIERDZENIE CANTORA: jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną, a (F_n) to ciąg zbiorów domkniętych taki, że

$\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, gdzie $\mathrm{diam}(F) = \sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in F\}$,

oraz $(\forall\, n)\; F_{n+1} \subseteq F_n$.

Wtedy $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

DOWOD:

Chcemy wskazać przynajmniej jeden element tego, co chcemy pokazać że jest niepuste. Skonstruujmy więc ciąg

$$x_0 \in F_0$$

$$x_1 \in F_1$$

$$x_2 \in F_2$$

$$x_n \in F_n.$$

Sprawdźmy, że jest to ciąg Cauchyego. Niech $\varepsilon > 0$, a N będzie takie, że

$$(\forall\, n > N)\; \mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon.$$

To wtedy

$$(\forall\, n, m > N)\; x_n, x_m \in f_N.$$

Czyli istnieje granicaL $x = \lim(x_n)$. Jeśli należy do przekroju, to należy do wszystkich zbiorów:

$$x \in F_0, \text{ bo } (\forall\, n)\; x_n \in F_0$$

$$x_m \in F_n, \text{ bo } (\forall\, m > n)\; x_m \in F_n$$

czyli $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

i smiga

9.4 TWIERDZENIE BARE'A

TWIERDZENIE BARE'A: jeśli (X, d) jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, to jeśli (F_n) jest ciągiem zbiorów domkniętych o pustym wnętrzu, to
$$\bigcup F_n \neq X$$

DOWOD:

Załóżmy, że X jest zupełna. Będziemy konstruować ciąg Cauchyego, który zbiega do punktu spoza $\bigcup F_n$.

$$x_0,\ r_0 < 1 \quad \overline{B(x_0, r_0)} \cap F_0 = \emptyset,$$

czyli wybieram punkt z dopełnienia F_0 i opisuję na nim kulę, która tnie się pusto z F_0.

$$x_1 \in B(x_0, r_0),\ r_1 < \frac{1}{2} \quad \overline{B(x_1, r_1)} \cap F_1 = \emptyset,$$

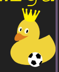
co jest możliwe, bo F_1 ma puste wnętrze.

(x_n) jest Cauchyego, bo $r_n \to 0$. Z zupłności $(\exists\, x)\, x = \lim(x_n)$. Chcę pokazać, że $x \notin \bigcup F_n$.

$$x \notin F_0,\ \text{bo}\ (x_n) \subseteq \overline{B(x_0, r_0)}$$

czyli $x \notin \bigcup F_n$.

i smiga



WNIOSKI

1. $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
2. $\mathbb{Q}$ nie jest metryzowalne w sposób zupełny, bo nie spełnia twierdzenia Bare'a, bo $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.

Istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ niemonotoniczna na żadnym przedziale

DOWOD:

Niech I będzie przedziałem, a $C^I_\nearrow$ niech będzie zbiorem funkcji ciągłych na $[0, 1]$, które są niemalejące. Pokażemy, że jest to zbiór domknięty o pustym wnętrzu. ????

9.5 NIE WIEM CO SIĘ DZIAŁO

$C[0, 1]$ z metryką supremum jest przestrzenią zupełną.

DOWOD:

Niech (f_n) będzie ciągiem Cauchyego funkcji ze zbioru $C[0, 1]$. Wówczas

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n, m > N) d_sup(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Ustalmy dowolne $x \in [0, 1]$ takie, że $(f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R}$ jest ciągiem Cauchyego. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z tego, że jest to ciąg Cauchyego wiemy, że istnieje N takie, że

$$(\forall\, n, m > N)\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Zatem $(f_n(x))$ ma granicę. Niech f będzie taką funckją, że

- f jest granicą (f_n), czyli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N)(\forall\, x \in [0, 1])\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- f jest ciągłe - bo jest jednostają granicą ciągu funkcji ciągłych. Czyli pokazaliśmy, że dowolny ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do pewnego f, więc przestrzeń jest zupełna ????

Przestrzeń $C[0,1]$ z metryką całkową nie jest zupełna, bo w ciągu Cauchyego pola dążą do 0, wystarczy ograniczyć je prostokątami – nie ma ciągłości. Jeśli z kolei zdefiniujemy metrykę korzystając z całki Lebesgue'ga, co znajduje zastosowanie w rachunku prawdopodobieństwa.

Jeśli X jest przestrzenią zupełną, a $F_n \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu, czyli $\bigcup F_n \neq X$. Wtedy

$A \subseteq X$ jest 1 kategorii (Barë'a), gdy

$$A = \bigcup F_n$$

dla pewnych F_n domkniętych o pustym wnętrzu.

9.6 TWIERDZENIE ASOLIEGO-ARZELI

Niech $F \subseteq C[0,1]$ takie, że

- F jest wspólnie ograniczony, czyli
  $(\exists\, c > 0)(\forall\, f \in F)(\forall\, x \in [0,1])|f(x)| < c$
- F są jednakowo ciągłe, czyli
  $(\forall\, x)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, f \in F)\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Wtedy $\overline{F}$ jest podprzestrzenią zwartą (*jest domknięte*).

DOWOD:

Korzystając z faktu udowodnionego na ćwiczeniach: zupełnośc i całkowita ograniczoność $\implies$ zwartość, a ta z kolei pociąga zupełność.

Wiemy, że przestrzeń $C[0,1]$ jest przestrzenią zupełną oraz że $\overline{F}$ jest domknięciem przestrzeni zupełnej, więc też jest zupełne.
Chcemy miec całkowitą ograniczoność, czyli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, A \text{ – skończone})(\exists\, a \in A)\ d(x,a) < \varepsilon.$$

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{A} = \{U \underset{\text{otw}}{\subseteq} C[0,1]\ :\ (\forall\, f \in F)\ \mathrm{diam}(f[U]) < \varepsilon\}$$

jest pokryciem, ponieważ dla dowolnego $x \in [0,1]$ istnieje δ dobrana do $\frac{\varepsilon}{2}$ z jednakowej ciągłości:

$$(\forall\, f \in F)\ \mathrm{diam}(f[B_j(x)]) < \varepsilon$$
$$x \in B_\delta(x) \in \mathcal{A}.$$

NIE ROZUMIEM TEGO DOWODU

9.7 PRZESTRZEŃ POLSKA

X jest PRZESTRZENIĄ POLSKĄ, jeśli X jest zupełna i ośrodkowa.

NIE ROZUMIEM TUTAJ RESZTY

9.8 ZBIORY I KATEGORII

Zbiór $M \subseteq X$ jest zbiorem I KATEGORII, jeżeli $M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, gdzie F_n to domknięte zbiory o pustym wnętrzu.

$A \subseteq X$ ma WŁASNOŚĆ BAIRE'a, jeśli istnieje zbiór otwarty U oraz M I kategorii takie, że

$$A = U \Delta M = (U \setminus M) \cup (M \setminus U)$$

czyli jest otwarty modulo zbiór I kategorii

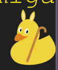
Jeżeli $F \subseteq \mathbb{R}$ jest domknięty, to ma własność Baire'a

DOWOD:

$$F = \mathrm{Int}(F) \cup (F \setminus \mathrm{Int}(F))$$

Zauważmy, że zbiór $(F \setminus \mathrm{Int}(F))$ jest domkniętym zbiorem o pustym wnętrzu, a $\mathrm{Int}(F)$ jest zbiorem otwartym. W takim razie F spełnia własnośc Baire'a $(F = (\mathrm{Int}(F) \setminus \mathrm{Bd}(F)) \cup (\mathrm{Bd}(F) \setminus \mathrm{Int}(F)))$

i smiga



Zbiory I kategorii również mają własność Baire'a.

Rodzina zbiorów o własności Baire'a jest zamknięta na dopełnienia i nieskończone sumy

DOWOD:

Niech zbiór A będzie zbiorem spełniającym własność Baire'a, czyli

$$A = U \Delta M.$$

W takim razie

$$A^c = \mathrm{Int}(A^c) \Delta (M \cup ((U^c) \setminus \mathrm{Int}(U^c))),$$

gdzie $(U^c) \setminus \mathrm{Int}(U^c)$ jest zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu.

10 ZBIÓR DEFINICJI

PRZESTRZEŃ NORMALNA - przestrzeń, w której każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi:

$$(\forall\, F, G \underset{\text{domk}}{\subseteq} X)\; F \cap G = \emptyset (\exists\, U, V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\; U \cap V = \emptyset \;\wedge\; F \subseteq U \;\wedge\; G \subseteq V$$