PODSTAWOWE POJECIA ALGEBRY LINIOWEJ

CIALO

CIALO to zbior K z dwoma dzialniami,
dodawaniem i mnozeniem, i ich elementami neutralnymi $(0, 1 \in K)$
dodawanie i mnozenie to funkcje $+ : K \times K \to K$

WLASNOSCI CIAL:

1. dodawanie i mnozenie sa laczne, przemienne i rozdzielne
2. istnieja elementy neutralne: $0 + x = 1 \cdot x = x$
3. dla kazdego elementu ciala istnieje element przeciwny: $\forall\, x\, \exists\, (-x) \quad x + (-x) = 0$
4. dla kazdego $x \neq 0$ istnieje element odwrotny: $\forall\, x \neq 0\, \exists\, x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$
5. $0 \neq 1$ - wyklucza zbior jednoelementowys

Jesli istnieja odpowiednie $-x$, x^{-1}, to sa one jedyne - dowod na cwiczeniach

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ sa cialami, natomiast $\mathbb{Z}$ nie jest cialem (nie ma elementu odwrotnego do 2, pierscienie)

Kazdy podzbior $K \subseteq \mathbb{C}$, ktory jest zamkniety na dodawanie, mnozenie oraz dla kazdego elementu K mozna znalezc w K element do niego przeciwny i odwrotny, tez jest cialem.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z dodawaniem i mnozeniem modulo 5 jest cialem: jest element neutralny: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 4 = 1$
$\{0, 1, ..., p - 1\}$, gdzie p jest licza pierwsza jest cialem (dowod z algorytmu euklidesa)

Dla kazdej liczby naturalnej n i dla kazdej liczby pierwszej p jest cialo, ktore ma dokladnie p^n elementow i sa to wszystkie ciala skonczone.

Dla dowolnego $d \in K$ mozemy zdefiniowac $\mathbb{Q}[d] = \{a + b \cdot d \;:\; a, b \in \mathbb{Q}\}$

Jesli K jest cialem, to mozemy rozpatrzec zbior wszystkich wielomianow o wspolczynnikach w K: $K[X]$ i nie jest cialem (nie istnieje X^{-1}).
Mozemy rozpatrzyc tez zbior wiekszy, *cialo funkcji wymiernych* $K(X)$, czyli formalne ilorazy wspolczynnikow zK, tyle ze w mianowniku nie moze pojawic sie 0:

$$K(X) = \{\frac{p}{q} \;:\; p, q \in K[X], \mathbb{Q} \in 0\}$$

Jak dowodzic twierdzenia:

$$\forall x \in K \quad 0 \cdot a = 0$$

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a | + (-0 \cdot a)$$
$$0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a)$$
$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

PRZESTRZEN LINIOWA

PRZESTRZEN LINIOWA nad K to zbior V z dzialaniem dodawaniem i mnozeniem:

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$
$$0 \in V$$

WLASNOSCI:

+ i $\cdot$ spelniaja oczywiste wlasnosci

Lacznosc mieszana dla mnozenia:

$$(\alpha \underset{K}{\cdot} \beta) \underset{V}{\cdot} \gamma = \alpha \underset{V}{\cdot} (\beta \underset{V}{\cdot} \gamma)$$

Rozdzielnosc mnozenia wzgledem dodawania:

$$\alpha \underset{V}{\cdot} (u \underset{K}{+} w) = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \alpha \underset{V}{\cdot} w$$

$$(\alpha \underset{V}{+} \beta) \underset{V}{\cdot} u = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \beta \underset{V}{\cdot} v$$

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ to przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$

Dla kazdego iloczynu kartezjanskiego ciala, iloczyn ten jest cialem. Bardziej ogolnie mozna to ujac, ze jesli A jest dowolnym zbiorem, a K^A jest zbiorem wszystkich funkcji z A w K, to K^A jest przestrzenia liniowa nad K

$K[X]$ to zbior wielomianow o wspolczynnikach z K, to jest on przestrzenia liniowa nad K. Tak samo $K_n[X]$ (wielomiany co najwyzej stopnia n) rowniez sa przestrzenia liniowa.

$C(\mathbb{R})$ to zbior wszystkich funkcji ciaglych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i jest on przestrzenia liniowa nad $\mathbb{R}$

Jesli przemnozymy dowolny wetor przez 0, to dostaniemy wektor zerowy:

$$0 \cdot v = \vec{0}$$

Dla kazdego wektora z V i kazdego skalara z K istnieje dokladnie jeden wektor w taki, ze:

$$\forall\, v \in V\ \forall\, a \in K\ \exists! w \in V \quad a \cdot v + w = 0$$

Wezmy $v = -a^{-1} \cdot w$. Chcemy udowodnic rownanie

$$a \cdot v + w = 0$$
$$a \cdot (-a^{-1} \cdot w) + w = 0$$
$$(-1 \cdot 1) \cdot w + w = 0$$
$$(-1 + 1) \cdot w = 0$$
$$0 \cdot w = 0$$

Z tego wynika, ze $(-1) \cdot w = -w$ oraz $-(v + w) = (-v) + (-w)$.

LEMAT jesli V jest przestrzenia liniowa, a $W \subseteq V$, takim, ze $W \neq \emptyset$ oraz

$$\forall\, a \in K\ \forall\, w \in W \quad a \cdot w \in W$$
$$\forall\, w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W,$$

to W jest przestrzenia liniowa. Jest to odpowiednik twierdzenia dla cial.

DOWOD:

Wlasciwosci dodawania i odejmowania przenosza sie automatycznie. Zostaje sprawdzic, ze

$$0 \in W$$
$$\forall\, w \in W\ \exists\ -w \in W$$

Poniewaz $W \neq \emptyset$, stad istnieje jakies $w \in W$. Wowczas,

$$0 \cdot w = \vec{0}$$

z tego, ze W jest zamkniete na mnozenie przez skalary. Wiec pokazalismy, ze $0 \in W$. Tak samo, skoro mozemy przemnozyc $w \in W$ przez kazdy skalar i otrzymac element W, Wowczas

$$(-1) \cdot w = -w \in W$$

Podzbior, ktorego istnienie udowodnilismy wyzej, nazywamy PODPRZESTRZENIA V i oznaczamy

$$W \leq V$$

PRZYKLADY:

Proste przechodzace przez 0 w K^2 sa podprzestrzenia. MOGE OBRAZECZKI PROSTYCH ZROBIC

PROSTA - podprzestrzen rozpieta przez jeden wektor, czyli bierzemy jeden wektor i patrzymy na wszystkie jego skalarne nierownosci.

W ogolnosci, $n > m \implies K^n \geq K^m$.

$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R})$ zbior funkcji rozniczkowalnych jest podprzestrzenia zbioru funkcji ciaglych. Ten z kolei jest podprzestrzenia zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ ($C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$)

Zbioro funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ zbiegajacych do dowolnego x_0 to tez jest podprzestrzenia:

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ \lim_{x \to x_0} f(x) = 0\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Mozemy tez przekroic dwie podprzestrzenie.

Zbior ciagow spelniajacych rekurencje:

$$\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\ :\ \forall\, n \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

jest podprzestrzenia zbioru wszystkich ciagowo indeksach w $\mathbb{N}$ i wyrazach $\mathbb{R}$ *na dzisiaj chyba koniec, jutro rano kolejne 4h wykladow!*