

2. Udowodnij, że $\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

\supseteq

Weźmy dowolny $x \in \mathcal{A}$. Z aksjomatu zbioru potegowego wiemy, że

$$(\exists y \in \mathcal{P}(\mathcal{A})) x \in y \subseteq \mathcal{A}$$

Dalej, na mocy aksjomatu sumy wiemy, że

$$x \in \bigcup \{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

czyli

$$x \in \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

\subseteq

Weźmy dowolny $x \in \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Z aksjomatu sumy wiemy, że

$$(\exists y \in \mathcal{P}(\mathcal{A})) x \in y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

ale z aksjomatu zbioru potegowego wiemy, że

$$y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff y \subseteq \mathcal{A}.$$

W takim razie

$$x \in y \subseteq \mathcal{A} \implies x \in \mathcal{A}$$

i smiga



3. Niech A będzie zbiorem niepustym. Które z poniższych twierdzeń są prawdziwe?

(a) Jeśli $A = \bigcup A$, to $\emptyset \in A$

Nie, ponieważ

$$A = \bigcup A$$

na przykład jeśli

$$A = \emptyset.$$

A z aksjomatu ekstensjonalności wiemy, że $\emptyset \notin \emptyset$.

(b) Jeśli $\emptyset \in A$, to $A = \bigcup A$

Nie, weźmy na przykład

$$A = \{\emptyset, \{7\}\}.$$

Wtedy

$$\bigcup A = \{7\} \supsetneq \emptyset,$$

ale

$$\emptyset \notin \{7\} = \bigcup A.$$

(c) Jeśli $\bigcup A = \bigcap A$, to $A = \{x\}$ dla pewnego x . TAK:

$$x \in \bigcup A \iff (\exists y \subseteq A) x \in y$$

$$x \in \bigcap A \iff (\forall y \subseteq A) x \in y$$

$$U = \bigcup A = \bigcap A$$

$$((x \in U \iff (\exists y \subseteq A) x \in y) \iff (x \in U \iff (\forall y \subseteq A) x \in A)) \implies (\exists x) A = \{x\}$$

4. Która z poniższych równości zachodzi dla dowolnego zbioru A?

(a) $\bigcap \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

NIE:

$$A = \{1\}$$

$$\bigcap \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \bigcap \{\{1\}, \emptyset\} = \emptyset$$

$$\{\bigcap \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap \{\{1\}, \emptyset\}, \bigcap \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

(b) $\bigcup \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcup \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

TAK:

Pokazemy, że $L = \mathcal{P}(A) = P$

$$L = \mathcal{P}(A)$$

Z aksjomatu sumy wiemy, że

$$x \in \bigcup \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} \iff ((\exists t \in \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}) x \in t) \iff$$

$$\iff ((\exists t \subseteq A) x \in t) \iff$$

$$\iff x \in \mathcal{P}(A)$$

$$P = \mathcal{P}(A)$$

$$x \in \{\bigcup \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} \iff x \in \{y : ((\exists z \subseteq \mathcal{P}(B)) y \in z) \wedge B \subseteq A\} \iff$$

$$\iff x \in \{y : y \in \mathcal{P}(A)\} \iff$$

$$\iff x \in \mathcal{P}(A)$$

i smiga



4.5 Sprawdzic, ze para nieuporzadkowana, suma i zbior potegowy sa zdefiniowane jednoznacznie.

para nieuporzadkowana jest zdefiniowana jednoznacznie

Zalozmy niewprost, ze istnieja pary

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

$$\begin{aligned} ((x \in \{a, b\} \iff (x = a \vee x = b)) \iff (x \in \{c, d\} \iff (x = c \vee x = d))) \iff \\ \iff ((x = a \vee x = b) \iff x = c \vee x = d) \iff ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)) \end{aligned}$$

i cyraneczka komutuje

i smiga



5. Udowodnij, ze aksjomat pary wynika z pozostalych aksjomatow teorii ZF₀.

Z aksjomatu zbioru pustego i zbioru potegowego mozemy skonstruowac zbior

$$P = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

W wersji uproszczonej chcemy napisac formule $\varphi(t, z, a, b)$, ktora

$$(\forall t)(\exists ! y) \varphi(t, z, a, b)$$

$$(t = \emptyset \wedge z = a) \vee (t = \{\emptyset\} \wedge z = b) \vee (t \neq \emptyset \wedge t \neq \{\emptyset\} \wedge x = \emptyset)$$

Wersja krotsza

$$(t = \emptyset \wedge z = a) \vee (t \neq \emptyset \wedge z = b)$$

Czyli z aksjomatu zastepowania nasza funkcja produkuje zbior $y = \{a, b\}$

$$(\forall a)(\forall b)(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \iff (\exists t \in x) \varphi(t, z, a, b))$$

6. Udowodnij, ze aksjomat wyrozniania wynika z pozostalych aksjomatow teorii ZF_0

Wezmy dowolny zbior x i dowolna formule $\varphi(t, \bar{a})$.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Nie istnieje $y \in x$ takie, ze $\varphi(y, \bar{a}) == \text{true}$. Wtedy po przefiltrowaniu mam \emptyset .
2. Istnieje $y \in x$ takie, ze $\varphi(y, \bar{z}) == \text{true}$. Wowczas konstrukcja mojego przefiltrowanego zbioru uzywajaca aksjomat zastepowania i formule $\sigma(t, z, \bar{a})$

$$(t = z \wedge \varphi(t, \bar{a})) \vee (y = z \wedge \neg \varphi(t, \bar{a}))$$

7. Udowodnij (w teorii ZF), ze $\neg (\exists x_1, \dots, x_n) x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$

Poniewaz jestesmy ekstra upierdliwi, to konstruuemy sobie zbior $s = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wezmy pare

$$\{x_1, x_1\}$$

i jego sume $\bigcup \{x_1, x_1\}$. Dalej $\bigcup \{\{x_1, x_1\}, \{x_2, x_2\}\}$ i znowu sume tego. Analogicznie dalej.

Z aksjomatu regularnosci wiemy, ze istnieje takie k , ze x_k jest elementem \in -minimalnym utworzonego wyzej zbioru. W takim razie

$$(\forall y \in s) y \notin x_k.$$

Rozwazmy dwa przypadki:

1. $k = 1$

Wtedy $x_n \notin x_1$ i mamy sprzeczność.

2. $k \neq 1$

Wtedy $x_{k-1} \notin x_k$ i mamy sprzeczność.

8. Udowodnij (w teorii ZF), ze

$$\neg (\exists f)(\text{fnc}(f) \wedge \text{dom}(f) = \omega \wedge (\forall n \in \omega) f(n+1) \in f(n))$$

Zalozmy, ze f jest funkcja, dla ktorej ta formala nie smiga.

\triangle sa affiniczne <3

Zbior $p_{\text{ysio}} = \{f(0), f(1), \dots\}$ tworzymy zastepujac przy pomocy aksjomatu zastepowania elementy dziedziny $\text{dom}(f)$ przez odpowiadajace im elementy obrazu, gdzie formala bylaby tak naprawde relacja rownowazna naszej funkcji ($\psi(t, z, f)$)

$$z = f(t)$$

W takim razie istnieje k takie, ze $f(k)$ jest elementem \in -minimalnym zbioru p_{ysio} . Ale w takim razie nie moze zajsc $f(k+1) \in f(k)$. Wiec mamy sprzeczność <3

9. Udowodnij, że aksjomat wyboru jest równoważny zdaniu

$$(\forall x)((\forall y \in x) y \neq \emptyset) \implies (\exists f) \text{fnc}(f) \wedge \text{dom}(f) = x \wedge (\forall y \in x) f(y) \in y$$

AKSJOMAT \iff FUNCKJA

\Leftarrow

Czyli potrzebuje skonstruować mając funkcję zbiór wartości tej funkcji. Robię to zastępując elementy dziedziny przez ich wartości na mocy aksjomatu zastępowania. Wystarczy pokazać, że to rzeczywiście jest selektor.

$$(\forall y \in x)(\exists ! t) t \in s \cap y$$

Weźmy dowolne $y \in x$. Z definicji funkcji wiemy, że $f(y) \in y$. W takim razie $f(y) \cap y = f(y)$.

Dlaczego jest to jedyne? Jeśli istniałyby dwa t_1, t_2 będące w selektorze i w y , to wówczas $f^{-1}[t_1] \neq f^{-1}[t_2]$, bo f jest funkcją. Ale ponieważ x jest rozłączną rodziną zbiorów, to nie może być, że się pokrywają dwa zbiory żeby oba miały t_1 i t_2 . sprzeczność.

\implies

Na mocy aksjomatu wyboru bierz selektor s z rodziny x . Teraz chcę zastąpić jego elementy parami uporządkowanymi gdzie poprzednik to zbiór do którego dany element należy, a następnik to on sam. Piszemy formuły $\theta(t, z, x, s)$

$$(t \notin s \wedge z = \emptyset) \vee ((\exists y \in x) t \in y \wedge z = \langle t, y \rangle)$$

alternatywnie, biorę $x \times s$ i filtruję na mocy aksjomatu wyróżniania przy pomocy formuły $\rho(t, x, s)$

$$s \cap \bigcup_{x \in x} n t$$

i smiga



10. Udowodnij, że aksjomat wyboru jest równoważny faktowi, że jeśli $\langle X_i : i \in I \rangle$ jest niepusta rodzina zbiorów niepustych, to iloczyn kartezjański $\prod_{i \in I} X_i$ jest niepusty. Sformułuj powyższy fakt bez użycia pojęcia rodziny indeksowanej.

AKSJOMAT WYBORU \iff NIEPUSTE

\Leftarrow

Weźmy dowolną rozłączną rodzinę zbiorów niepustych $\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}$

Wiemy, że to jest niepusty zbiór funkcji z indeksów w sumy zbiorów X_i , więc mogę wziąć z niego pewną funkcję, m . Do mojego selektora chcę wrzucić po jednym elemencie z każdego elementu mojej rodziny, więc zrobię to wrzucając do niego wartości m dla poszczególnych $i \in I$, bo mam aksjomat zastępowania (zastępuje m przez $m(i)$ – funkcję jej obrazem).

Pokazemy, że jest to faktycznie selektor.

Weźmy dowolny element $o \in \mathcal{X}$. Chcę pokazać, że $o \cap m(i)$ ma tylko jeden element. Istnieje co najmniej jeden, bo istnieje $i \in I$ takie, że

$$m(i) \in o.$$

Z drugiej strony, jeśli istniałoby więcej niż jeden, to istniałyby $i, j \in I$ takie, że $i \neq j$ oraz

$$m(i) \in o \wedge m(j) \in o,$$

to wówczas elementy \mathcal{X} nie byłyby rozłączne, tzn $X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

\implies

Mam podaną niepustą indeksowaną rodzinę niepustych zbiorów.

Z 9 mamy, że aksjomat wyboru jest równoważny funkcji wyboru, więc polećmy z funkcją wyboru.

Wiem, że istnieje funkcja wyboru z \mathcal{X} . Należy do iloczynu kartezjańskiego, tj jej domena jest I , a zbiorem wartości jest suma \mathcal{X} . Czyli mogę zrobić drugą funkcję, która dla $i \in I$ daje mi konkretnie element z X_i . Jest to element zbioru kartezjańskiego. Korzystam z aksjomatu zastępowania.

