TOPOLOGIA

notatki

Spis treści

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazyway funkcję

$$d\,:\,X\times X\to[0,\infty)$$

przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x,x)=0\wedge d(x,y)>0$, jeśli $x\neq y$
2. $(\forall\, x,y)\; d(x,y)=d(y,x)$ - symetria
3. $(\forall\, x,y,z)\; d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ - warunek $\triangle$

METRYKI EUKLIDESOWE:

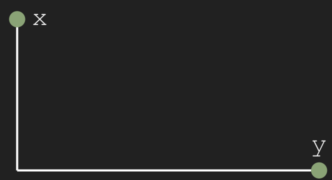
$\mathbb{R}\;:\;\; d(x,y)=|x-y|$

$\mathbb{R}^2\;:\;\; d(x,y)=\sqrt{(x(0)-y(0))^2+(x(1)-y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n\;:\;\; d(x,y)=\sqrt{(x(0)-y(0))^2+...+(x(n-1)+y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2\;:\;\; d(x,y)=|x(0)-y(0)|+|x(1)-y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

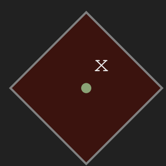
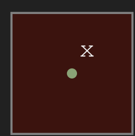
$\mathbb{R}^2\;:\;\; d(x,y)=\max(|x(0)-y(0)|,|x(1)-y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x\in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x)=\{y\in X\;:\;d(x,y)<r\}$$

$\mathbb{R}$, m. euklidesowa:	$\mathbb{R}^2$, m. euklidesowa	$\mathbb{R}^2$, m. miasto	$\mathbb{R}^2$, m. maksimum
			
$\mathbb{R}^2$, m. centrum		$C[0,1]$, m. supremum	$C[0,1]$, m. całkowa
narysję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie szystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall\, i < m)\ x_n(i) \to x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{sup}} f \iff (f_n) \underset{\to}{\to} f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

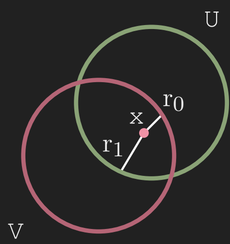
$U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, jeśli na każdym punkcie
ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U
$$(\forall\, z \in U)(\exists\, r > 0)\ B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V, których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowlnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists\, r_0 > 0)\ B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists\, r_1 > 0)\ B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będa zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga

DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists\, U \in \mathcal{U})\; x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x. Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisac kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga

U jest zbiorem otwartym $\iff$ U jest sumą kul.

DOWOD:

$\Longleftarrow$ wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Longrightarrow$
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall\, x \in U)(\exists\, r_x > 0)\; B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U, suma ta nie może być większa niż U. Zawierają się w niej wszystkie punkty z U, więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga

1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c. Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegac do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists\, r > 0)\; B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U, co jest sprzeczen z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c.

i smiga

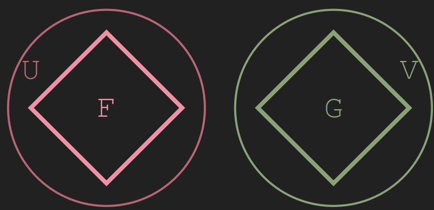
2 LEMAT URYSOHNA

2.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń X jest przestrzenią NORMALNĄ (również T_4), jeżeli

$$(\forall\, F,G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X)\ F\cap G=\emptyset$$

$$(\exists\, U,V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\ U\cap V=\emptyset\ \wedge\ F\subseteq U\ \wedge\ G\subseteq V$$



Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

2.2 LEMAT URYSOHNA

Załóżmy, że przestrzeń X jest normalna. Niech $F,G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X. Wówczas:

$$(\forall\, f : X \xrightarrow{\text{ciga}} [0,1])\ f_{\restriction F}\equiv 0\ \wedge\ f_{\restriction G}\equiv 1$$

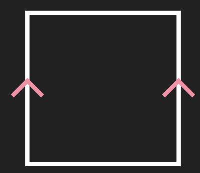
Warunek ten jest silniejszy od normalności.

3 ROZMAITOŚCI

3.1 RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

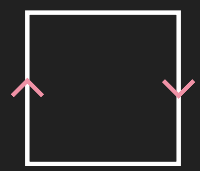
$$X = [0,1]^2$$

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



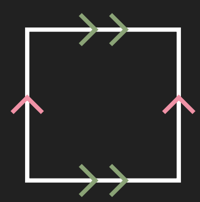
Tutaj zlepiamy dwa przeciwne boki prostokąta i otrzymujemy tubę.

$$\langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1-y\rangle$$



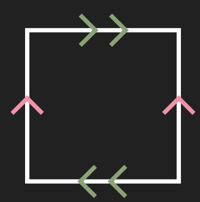
Powstaje nam wstęga Mobiusa.

$$parlx, 0\rangle \sim \langle x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



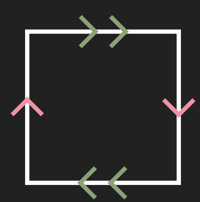
Zlepiamy górę i dół oraz prawo i lewo - dostajemy torus.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1-x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, y\rangle$$



Jak to się zrobi na przemian strzałki na górze i dole to dostajemy torus z obrotem, czyli butelkę Kleina.

$$\langle x, 0\rangle \sim \langle 1-x, 1\rangle \cup \langle 0, y\rangle \sim \langle 1, 1-y\rangle$$



Na przemian wszystkie strzałki i dostajemy płaszczyznę rzutową.

3.2 ROZMAITOŚĆ

N – ROZMAITOŚĆ to przestrzeń topologiczna, łukowo spójna, lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$ (to znaczy, że $(\forall\, x \in X)(\exists\, U \underset{\text{otw}}{\ni} x)\; U \cong \mathbb{R}^n$)

kula - przykład, rura (z końcem) - antyprzykład

Czym się różni sfera od torusa?

Wyobraźmy sobie pętelkę na spherze, jeśli będziemy ją ściskać, to zrobimy supełek. Natomiast jeśli na torusie weźmiemy pętelkę ale taką oplatającą go, to tego nie możemy ścisnąć do supełka.

PĘTLA to funkcja

$$p : [0, 1] \to X$$

która jest ciągła i $p(0) = p(1)$

Funkcje stałe też są pętlami.

Przestrzeń topologiczna jest JEDNOSPÓJNA, gdy jest łukowo spójna i dla każdej pętli istnieje punkt, z którym jest ona homotopijnie równoważna (jest ściągalna do punktu).

jakaś dygresja

$$X \cong Y,$$

jeśli X jest jednospójna, to Y jest też jednospójna.

Weźmy koło bez brzegu i pół okręgu z otwartymi końcami. Obie te przestrzenie są jednospójne, ale jeśli z koła wyjmiemy jeden punkt, to przestaje ono być jednospójne, a jeśli z pół okregu wyjmiemy, to on nadal jest jednospójny.

3.3 PRZESTRZEŃ ŚCIĄGALNA

Przestrzeń topologiczna jest ŚCIĄGALNA, jeżeli identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stała

$$id : X \to X \quad id(x) = x$$
$$f : X \to X \quad f(x) = a$$

Na przykład dysk jest ściągalny:

$$H(x, t) = t \cdot a + (1 - t)x,$$

identyczność jest homotopijnie spójna z funckją $f(x) = a$. Sfera nie jest homotopijnie spójna.

TWIERDZENIE BROUWERA

jeśli istnieje ciągła $f : D^n \to D^n$, gdzie D^n to dysk n-wymiarowy, to

$$(\exists\, x)\; f(x) = x,$$

czyli istnieje punkt stały.

DOWOD:

Dla $n = 2$.

Wyobraźmy sobie, że mamy ciągłą funkcję

$$f : D^2 \to D^2,$$

któa nie ma punktu stałego

$$(\forall\ x)\ f(x) \neq x.$$

Korzystając z niej konstruujemy drugą funkcję

$$r : D^2 \to S^1,$$

gdzie S^1 to brzeg D^2. Prowadzimy prostą przez x i jego obraz $f(x)$, po czym przypisujemy $r(x)$ jako
punkt przecięcia tej prostej i S^1. Co możemy o r powiedzieć?

- r jest ciągła
- $r_{\restriction S^1} = id_{\restriction S^1}$

Rozważmy funkcję:

$$H : D^2 \times [0, 1] \to S^1$$

$$H(x, t) = r(tx)$$

H jest ciągłe, $H(x, 0) = r(0)$, gdzie $r(0)$ bedzie środkiem dysku $H(x, 1) = r(x) = x$. Czyli dostaliśmy, że okrąg jest ściągalny, ale on nie jest więc mamy sprzeczność

i smiga

4 ZBIÓR DEFINICJI

PRZESTRZEŃ NORMALNA - przestrzeń, w której każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi:

$$(\forall\, \mathrm{F},\mathrm{G} \underset{\mathrm{domk}}{\subseteq} \mathrm{X})\; \mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\emptyset(\exists\, \mathrm{U},\mathrm{V} \underset{\mathrm{otw}}{\subseteq} \mathrm{X})\; \mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\emptyset \;\wedge\; \mathrm{F}\subseteq\mathrm{U} \;\wedge\; \mathrm{G}\subseteq\mathrm{V}$$