Zad 1. Opisz, jak wygladaja ciagi zbiezne w kostce Cantora

Kostka kantora to zbior ciagow $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Wezmy metryke

$$d(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x\neq y\\ 0 & x=y,\end{cases}$$

gdzie $\Delta(x,y)=\min\{k : x(k)\neq y(k)\}$.

Wezmy $\varepsilon>0$ taki, ze $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, $k\in\mathbb{N}$. Ciag bedzie zbiezny do (x_n), jesli znajdziemy kule o promieniu ε i srodku w (x_n), w ktorej sa prawie wszystkie jego wyrazy. W takim wypadku, tylko pierwsze k wyrazow musi byc takich samych, a dalsze moga przyjmowac dowolne wartosci. Im wieksze k wezmiemy, tym dluzej te ciagi sa takie same.

Wiec ciagi zbiezne w kostce Cantora to ciagi takich ciagow, ktore roznia sie po raz pierwszy na coraz to dalszym wyrazie od ciagu do ktorego sa zbiezne.

Zad 2. Pokaz, ze ciag (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbiezny wtw gdy kazdy z ciagow $x_n(i)$ dla $i<k$ jest zbiezny (w $\mathbb{R}$)

(x_n) jest zbiezny do x, jezeli

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\;\forall\,n>N\quad \sqrt{(x_n(0)-x(0))^2+...+(x_n(k-1)-x(k-1))^2}<\varepsilon$$

W zadaniu chcemy pokazac:

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\;\forall\,n>N\quad d(x_n,x)<\varepsilon \iff \forall\,i<k\;\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\;\forall\,n>N\quad d_{\mathbb{R}}(x_n(i),x(i))<\varepsilon$$

Indukcja $\Longleftarrow$: Jezeli dla kazdego $i<k$

$$\lim d_{\mathbb{R}}(x_n(i),x(i))=\lim\sqrt{(x_n(i)-x(i))^2}=x(i)$$

To wowczas

$$d_{\mathbb{R}}(x_n(0),x(0))+...+(x_n(k-1),x(k-1))=\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2}+...+\sqrt{(x_n(k-1)-x(k-1))^2}$$

Zad 3. Udowodnij, ze ciag (x_n) punktow plaszczyzny jest zbiezny do x w metryce euklidesowej wtw gdy jest zbiezny w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce euklidesowej, to dla $\varepsilon>0$:

$$\varepsilon>\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2+(x_n(1)-x(1))^2}\geq\sqrt{\max((x_n(0)-x(0))^2,(x_n(1)-x(1))^2)}=$$
$$=\max(\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2},\sqrt{(x_n(1)-x(1))^2})=\max(|x_n(0)-x(0)|,|x_n(1)-x(1)|),$$

czyli

$$\varepsilon>\max(|x_n(0)-x(0)|,|x_n(1)-x(1)|)$$

wiec jest zbiezne w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce maksimum, to dla $\varepsilon>0$:

$$\varepsilon>\max(|x_n(0)-x(0)|,|x_n(1)-x(1)|)$$
$$\varepsilon>\max(\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2},\sqrt{(x_n(1)-x(1))^2})$$
$$\sqrt{2}\cdot\varepsilon>\sqrt{2}\cdot\max(\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2},\sqrt{(x_n(1)-x(1))^2})$$
$$\sqrt{2}\cdot\varepsilon>\sqrt{2}\cdot\max(\sqrt{(x_n(0)x(0))^2},\sqrt{(x_n(1)-x(1))^2})$$
$$\sqrt{2}\cdot\varepsilon>\sqrt{2}\cdot\sqrt{\max((x_n(0)-x(0))^2,(x_n(1)-x(1))^2)}$$
$$\sqrt{2}\cdot\varepsilon>\sqrt{2\cdot\max((x_n(0)-x(0))^2,(x_n(1)-x(1))^2)}$$
$$\sqrt{2}\cdot\varepsilon>\sqrt{2\cdot\max((x_n(0)-x(0))^2,(x_n(1)-x(1))^2)}\geq\sqrt{(x_n(0)-x(0))^2+(x_n(1)-x(1))^2}$$

Zad 4. Wykaz, ze podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1,b_1)\times...\times(a_n,b_n)$ sa otwarte, a $[a_1,b_1]\times..\times[a_n,b_n]$ sa domkniete.

Pokazac, ze $(a_1,b_1)\times...\times(a_n,b_n)$ jest przedzialem otwartym,

W dowolnym punkcie chce stworzyc kule ktora sie w nim zawiera. Czyli potrzebuje znalezc promien dla kuli od dowolnego x:

$$r=\min(|a-x|,|b-x|),$$

gdzie $a=\begin{pmatrix}a_1\\ ...\\ a_n\end{pmatrix}$, $\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ ...\\ b_n\end{pmatrix}$.

Pokazac, ze $[a_1,b_1]\times..\times[a_n,b_n]$ jest domkniety.

$P=[a_1,b_1]\times..\times[a_n,b_n]$ bedzie domkniety, jesli wszystkie ciagi o wyrazach z P beda mialy granice w P. Jezeli by tak nie bylo, czyli (x_n) zbiegalby do x poza P, to wowczas od pewnego momentu wszystkie wyrazy (x_n) bylyby w kuli o srodku w punkcie x i promeiniu $\varepsilon>0$.

Niech ciag o wyrazach z P zmieza do

$$(x_n)\to\begin{pmatrix}b_1+2\\ ...\\ b_n+2\end{pmatrix}=b,$$

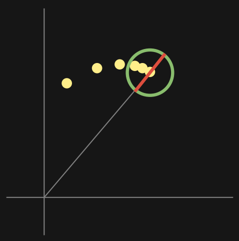
Wowczas, od pewnego momentu wszystkie wyrazy tego ciagu naleza do kuli o srodku b i promieniu 1, czyli sa poza P. Ale jest to sprzeczne ze stwierdzeniem, ze ciag (x_n) ma wszystkie wyrazy w P.

Zad 5. Uzasadnij, ze nie istnieje ciag (x_n) elementow $\mathbb{R}^2$, ktory jest zbiezny w metryce centrum, ale nie jest zbiezny w metryce euklidesowej. Podaj przyklad ciagu, ktory jest zbiezny w metryce euklidesowej (na $\mathbb{R}^2$), ale nie jest w metryce centrum.

Kula o srodku x i promieniu r w metryce centrum zawsze bedzie zawierala otwarty przedzial nalezacy do prostej przechodzacej przez srodek ukladu wspolrzadnych oraz x o dugosci $2r$ i srodku w x.

Z kolei kula o srodku x i promieniu r w metryce euklidesowej bedzie zawierala kule pomniejszona o okrag o srodku x i promieniu r, czyli zawiera w sobie kule w metryce centrum. Jesli wiec ciag zbiega w metryce centrum, to rowniez zbiega w metryce euklidesowej.

Wezmy ciag

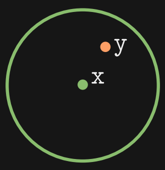


wowczas wszystkie jego wyrazy blisko elementu do ktorego zbiegaja moga zostac wpisane w dowolna kule w metryce euklidesowej, ale juz nie wszystkie kule w metryce centrum i srodku w x zawieraja ostatnie wyrazy tego ciagu (jesli wybierzemy promien mniejszy od odleglosci x od srodka ukladu wspolrzednych, to tylko x bedzie nalezec do tej kuli).

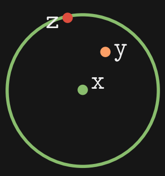
Zad 6. Sprawdz, ze w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) sfera, a wiec zbior postaci $\{y \in X \ : \ d(x, y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domknietym. Pokaz, we $B_r(x) \subseteq \{y \ : \ d(x, y) \leq r\}$, ale nie koniecznie musi zachodzic przeciwna inkluzja.

Jesli sfera jest zbiorem domknietym, wtedy wszystkie ciagi o wyrazach z niej sa zbiezne do wyrazu zawartego w niej. Zalozmy, nie wprost, ze istnieje ciag (z_n) o wyrazach ze sfery o srodku w x i promieniu r, ktorego wyrazy daza do y, ktory nie nalezy do sfery. Rozwazmy dwie mozliwosci.

1. Odleglosc $d(x, y) < r$



Wybierzmy dowolny element ciagu (z_n)



Z warunku trojkata otrzymujemy:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

$$d(y, z) \geq d(x, z) - d(x, y).$$

Poniewaz $d(x, z) = r$, a $d(x, y)$ jest stale, niech $d(x, y) = \rho$. Czyli mozemy napisac:

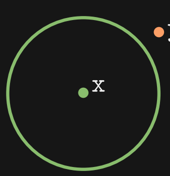
$$d(y, z) \geq r - \rho,$$

ale poniewaz ciag (z_n) zbiega do y, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mozemy obrac taki z, ze

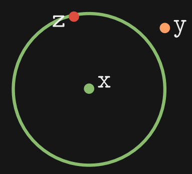
$$\varepsilon > d(y, z) \geq r - \rho.$$

Jednak odleglosc $d(y, z)$ jest ograniczona od dolu przez stala $r - \rho$, wiec dla $\varepsilon = r - \rho - \frac{1}{r}$ nie znajdziemy z spelniajacego te nierownosc. Stad ciag taki nie jest zbiezny.

2. Odleglosc $d(x, y) > r$



Wybierzmy element (z_n)



Wowczas, z warunku trojkata:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y),$$

ale poniewaz $d(x,z) = r$, a $d(x,y) = \rho$ jest stale dla danego ciagu, mozemy napisac:

$$\rho - r \leq d(z,y).$$

Aby ciag (z_n) byl zbiezny, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ musimy moc dobrac taki element (z_n), ze

$$\varepsilon > d(z,y) \geq \rho - r,$$

ale poniewaz $d(y,z)$ jest ograniczone od dolu przez $\rho - r$, to dla $\varepsilon = \rho - r = \frac{1}{r}$ nie znajdziemy elementu (z_n) spelniajacego te nierownosc.

Rozpiszmy $A = \{y \in Y \;:\; d(x,y) \leq r\}$ jako sume dwoch zbiorow:

$$A = \{y \in Y \;:\; d(x,y) < r\} \cup \{y \in Y \;:\; d(x,y) = r\}$$

Pierwszy element tej sumy jest rowny $\{y \in Y \;:\; d(x,y) < r\} = B_r(x)$, wiec

$$B_r(x) \subseteq A$$

W przeciwna strone inkluzja nie zachodzi, poniewaz

$$B_r(x) \cap \{y \in Y \;:\; d(x,y) = r\} = \emptyset$$

czyli A posiada wszystkie elementy $B_r(x)$, ale dodatkowo ma jeszcze sfere, ktora jest rozlaczna z kula.

Zad 7. Wykaz, ze zbieznosc jednostajna ciagu funkcji ciaglych na $[0,1]$ jest rownowazna zbieznosci w metryce supremum w $C[0,1]$. (Ciag (f_n) jest zbiezny jednostajnie do f, jezeli

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; \forall\, n > N\; \forall\, x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Metryka supremum:

$$d(f,g) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \;:\; x \in [0,1]\}$$

Chce udowodnic, ze ciag funckji (f_n) jest jednostajnie zbiezny $\iff$ (f_n) jest zbiezny w metryce supremum.

Niech $S = \{|f_n(x) - f(x)| \;:\; x \in [0,1]\}$. Jesli $(f_n) \to f$ w metryce supremum, to wowczas

$$(\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; \forall\, n > N \quad \varepsilon > \sup S \;\wedge\; \forall\, x \in [0,1] \quad \sup S \geq |f_n(x) - f(x)|) \implies$$
$$\implies \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; \forall\, n > N\; \forall\, x \in [0,1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

Jesli $(f_n) \rightrightarrows f$, to wowczas

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; \forall\, n > N\; \forall\, x \in [0,1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

ale poniewaz

$$(\heartsuit) \quad \exists\, p \in [0,1] \quad (|f_n(p) - f(p)| = \sup S \;\wedge\; \forall\, x \in [0,1] \quad |f_n(p) - f(p)| \geq |f_n(x) - f(x)|)$$

mozemy napisac

$$(\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; \forall\, n > N\; \forall\, x \in [0,1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|) \;\wedge\; (\heartsuit) \implies$$
$$\implies \forall\, \varepsilon\; \exists\, N\; \forall\, n > N \quad \varepsilon > \sup S,$$

czyli ciag jest zbiezny w metryce supremum.

Zad 8. Niech (X,d) bedzie przestrzenia metryczna. Pokaz, ze dla kazdego $A, B \subseteq X$ zachodza rownosci i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaz, ze nie musza zachodzic inkluzje odwrotne):

$\overline{A} = (\mathtt{Int}(A^c))^c$

$\overline{A}$ to najmniejszy zbior domkniety, taki, ze $A \subseteq \overline{A}$.

1. Jesli A jest zbiorem dokmnietym, wowczas A^c jest zbiorem otwartym, wiec $\mathtt{Int}(A^c) = A^c$. W takim razie

$$\mathtt{Int}(A^c)^c = (A^c)^c = A$$

i poniewaz A jest zbiorem domknietym, otrzymujemy

$$\mathtt{Int}(A^c)^c = A = \overline{A}$$

2. Jesli A jest zbiorem otwartym, wowczas A^c jest zbiorem domknietym.
Z definicji wiemy, ze $\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c$ i jest zbiorem otwartym, wiec $\mathtt{Int}(A^c)^c$ jest zbiorem domknietym. Co wiecej,

$$\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c \ \wedge \ A^c \cap A = \emptyset \implies \mathtt{Int}(A^c) \cap A = \emptyset,$$

wiec $A \cap \mathtt{Int}(A^c)^c \neq \emptyset$, ale skoro $\mathtt{Int}(A^c) \cup \mathtt{Int}(A^c)^c = X = A^c \cup A$ i $\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c$, to $A \subset \mathtt{Int}(A^c)^c$. No to kurwa musowo ze $\overline{A} = \mathtt{Int}(A^c)^c$ bo $A \subset \mathtt{Int}(A^c)^c$, a $\mathtt{Int}(A^c)$ jest najwiekszym zbiorem otwartym do ktorego nie nalezy A, czyli kiedy odejmiemy

$$X \setminus \mathtt{Int}(A^c)$$

to dostajemy najmniejszy zbior domkniety, do ktorego nalezy A.

TO TERAZ WERSJA NADZIEI

$$x \in (\mathtt{Int}(A^c))^c \iff x \notin \mathtt{Int}(A^c)$$

czyli z definicji wnetrza:

$$\forall\, r > 0 \quad B_r(x) \cap (A^c)^c \neq \emptyset \iff \forall\, r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

a to jest rownowazne z tym, ze kazda kula tnie sie niepusto ze zbiorem A, wiec $x \in \overline{A}$

$\mathtt{Bd}(A \cup B) = \mathtt{Bd}(A) \cup \mathtt{Bd}(B)$

Jesli wezmiemy A jako okrag o srodku w (-1, 0) i promieniu 1, a B jako (1, 0), to brzeg sumy nie jest rowny sumie brzegow. POWINNO BYC TYLKO $\subseteq$

Zad 9. Znajdz wnetrze, domkniecie (i brzeg)

$\{\langle x, y\rangle \in (0,\infty)^2 \ : \ y = \sin\frac{1}{x}\}$

Wnetrze - puste

Domkniecie: musimy dodac punkty na osi OX i na osi OY punkty [0,1]