Zad 1. Funkcja calkowalna w sensie Riemanna f rozni sie od funckji g w jednym punkcie z przedzialu $[a,b]$. Pokazac, ze g jest calkowalna w sensie Riemanna i $\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Niech $\rho \in [a,b]$ bedzie jedynym punktem takim, ze $f(\rho) \neq g(\rho)$. Rozwazmy dwa przypadki:

1. $\rho \in \{a,b\}$.

Wowczas, mozemy zapisac przedzial $[a,b]$ jako sume przedzialow

$$[a,b] = [a,\ a+r] \cup [a+r,\ b-r] \cup [b-r,\ b]$$

dla pewnego $r > 0$. Poniewaz ρ jest pojedynczym punktem, mozemy wybrac dowolnie male r, tak, ze otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b g(x)dx &= \int\limits_a^{a+r} g(x)dx + \int\limits_{a+r}^{b-r} g(x)dx + \int\limits_{b-r}^{b} g(x)dx = \\ &= \int\limits_a^{a+r} g(x)dx + \int\limits_{a+r}^{b-r} f(x)dx + \int\limits_{b-r}^{b} g(x)dx \xrightarrow{r\to 0} 0 + \int\limits_a^b f(x)dx + 0 = \int\limits_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

2. $\rho \in (a,b)$:

Ustalmy $r > 0$ takie, ze:

$$[a,b] = \left[a,\ \rho - \frac{r}{2}\right] \cup \left[\rho - \frac{r}{2},\ \rho + \frac{r}{2}\right] \cup \left[\rho + \frac{r}{2},\ b\right]$$

W takim razie mozemy rozpisac calke

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^{\rho-\frac{r}{2}} g(x)dx + \int\limits_{\rho-\frac{r}{2}}^{\rho+\frac{r}{2}} g(x)dx + \int\limits_{\rho+\frac{r}{2}}^{b} g(x)dx$$

Poniewaz funkcja g rozni sie od funkcji f tylko w punkcie ρ, to

$$\int\limits_a^{\rho-\frac{r}{2}} g(x)dx = \int\limits_a^{\rho-\frac{r}{2}} f(x)dx \ \wedge \int\limits_{\rho+\frac{r}{2}}^{b} g(x)dx = \int\limits_{\rho+\frac{r}{2}}^{b} f(x)dx.$$

W takim razie

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^{\rho-\frac{r}{2}} f(x)dx + \int\limits_{\rho-\frac{r}{2}}^{\rho+\frac{r}{2}} g(x)dx + \int\limits_{\rho+\frac{r}{2}}^{b} f(x)dx.$$

W trakcie dzielenia $[a,b]$ na mniejsze przedzialy, punkt ρ znalazl sie w przedziale a poniewaz tylko jeden punkt ρ jest punktem gdzie te dwie funkcje sie roznia, mozemy ograniczac przedzial na ktorym te funkcje sie roznia, czyli dla $\rho \to 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b g(x)dx &= \int\limits_a^{\rho-0} g(x)dx + \int\limits_{\rho-0}^{\rho+0} g(x)dx + \int\limits_{\rho+0}^{b} g(x)dx = \\ &= \int\limits_a^{\rho} g(x)dx + \int\limits_{\rho}^{\rho} g(x)dx + \int\limits_{\rho}^{b} g(x)dx = \\ &= \int\limits_a^{\rho} f(x)dx + 0 + \int\limits_{\rho}^{b} f(x)dx = \\ \int\limits_a^b g(x)dx &= \int\limits_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

Zad 2. Funkcja calkowalna w sensie Riemanna f rozni siie od funkcji$g$ w skonczenie wielu punktach przedzialu $[a,b]$. Pokazac, ze g jest calkowalna w sensie Riemanna i $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. Mozna skorzystac z poprzedniego zadania.

Niech $\rho_1, ..., \rho_n$ beda wszystkimi punktami przedzialu $[a,b]$ na ktorych funkcja g przyjmuje wartosci rozne od f.Mozemy wiec podzielic $[a,b]$ na mniejsze przedzialy takie, ze:

$$[a,b] = [a, \rho_1] \cup [\rho_1, \rho_2] \cup ... \cup [\rho_n, b]$$

Z pierwszego pierwszego podpunktu poprzedniego zadania mozna latwo zauwazyc, ze suma calek $g(x)$ na kazdym z tych przedzialow jest rowna $\int\limits_a^b f(x)dx$

i smiga

Zad 3. Dla pewnego podzialu P przedzialu $[a, b]$ spelniony jest warunek $L(P, f) = U(P, f)$. Roztrzygnac, czy z tego wynika, ze f jest calkowalna w sensie Riemanna.

TAK.

Funkcja f jest calkowalna w sensie Riemanna, jesli

$$\sup_P L(P, f) = \inf_P U(P, f) = \int_a^b f(x)dx$$

Jesli funkcja, ktora spelnia warunek $L(P, f) = U(P, f)$ nie jest calkowalna w sensie Riemanna, to wowczas

1. Istnieje taki podzial P_2, ze $L(P_2, f) > U(P_2, f)$, co szybko prowadzi do absurdu. Pole pod wykresem nie moze byc ograniczone od dolu przez liczbe wieksza niz od gory.
2. Istnieje taki podziel P_2, ze $L(P_2, f) < U(P_2, f)$, ale wtedy $L(P, f) > L(P_2, f) \neq \sup_P L(P, f)$ oraz $U(P, f) > U(P_2, f) \neq \inf_P U(P, f)$. W takim razie albo

$$\sup_P L(P, f) = L(P, f) = U(P, f) = \inf_P U(P, f),$$

albo

$$\sup_P L(P, f) > L(P, f) = U(P, f) < \inf_P U(P, f),$$

co jest wypadkiem rownoznacznym z 1.

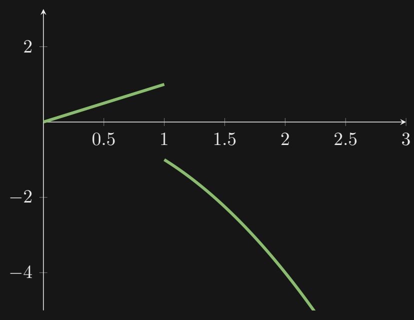
i smiga

Zad 4. Funkcja f jest calkowala osobno na przedzialach $[a, c]$ i $[c, b]$. Pokazac, ze f jest calkowalna na przedziale $[a, b]$.

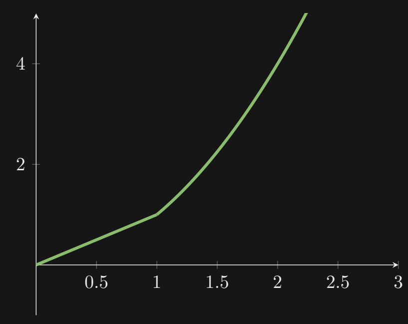
hyyyh ja z tego do tej pory korzystalam XD

Zad 5. Rozstrzygnij, czy dana funkcja jest calkowalna w sensie Riemanna. Jesli jest, to oblicz jej calke po zadanym przedziale.

a. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



Poniewaz interesuje nas pole miedzy wykresem funckji a osia OX, to mozemy odbic druga czesc funkcji wzgledem osi OX nie zmieniajac wartosci calki na rozwazanym przedziale.



Zad 6. Funckja f jest calkowalna na przedziale $[a, b]$. Uzywajac definicji calki Riemanna uzasadnic, ze dla ustalonego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $f_c(x) = f(x - c)$ jest calkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a + c,\ b + c]$ oraz $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{c+a}^{c+b} f_c(x)dx$

Z definicji Riemanna wiemy, ze na f zachodzi:

$$m(b-a) \le \sup_P L(P, f) = \int\limits_a^b f(x)dx = \inf_P U(P, f) \le M(b-a)$$

dla kazdego $x \in [a, b]$ oraz $m \le f(x) \le M$.
Przypuscmy, ze dla funkcji f_c oraz $x \in [a + c, b + c]$ i $m_c \le f_c(x) \le M_c$

$$m_c(b + c - a - c) \le \sup_P L(P, f_c) \le \inf_P U(P, f_c) \le M_c(b + c - a - c),$$

czyli

$$m_c(b-a) \le \sup_P L(P, f_c) \le \inf_P U(P, f_c) \le M_c(b-a). \quad (☕)$$

Poniewaz $f_c(x) = f(x - c)$, to dla $x \in [c + a, c + b]$ f_c przyjmuje te same wartosci co f, czyli mozemy stwierdzic nierownosc:

$$m = m_c \le f_c(x) \le M_c = M.$$

W takim razie nierownosc (☕) mozemy zapisac:

$$m(b-a) \le \sup_P L(P, f_c) \le \inf_P U(P, f_c) \le M(b-a),$$

a poniewaz f_c na przedziae $[a + c, b + c]$ przyjmuje nie tylko najwieksza i najmniejsza wartosc taka sama jak f na $[a, b]$, ale tez wszystkie inne wartosci sa takie same, to

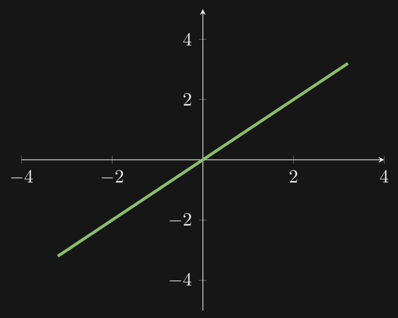
$$m(b-a) \le \sup_P L(P, f_c) = \sup_P (P, f) = \inf_P U(P, f) = \inf_P U(P, f_c) \le M(b-a),$$

tak wiec

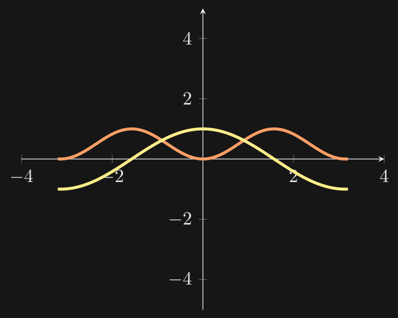
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sup_P (P, f) = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f_c) = \inf_P U(P, f_c) = \int\limits_{a+c}^{b+c} f_c(x)dx$$

Zad 10. Oblicz calke $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(x^3)\cos(x^3)dx$

Zastanowmy sie jak wygladaja poszczegolne czynniki calkowanej funkcji. Funkcja $f(x) = x$ jest nieprzysta:



Natomiast $\sin^2(x)$ orax $\cos(x)$ sa funkcjami parzystymi



W takim razie, funkcja $g(x) = x\sin^2(x^3)\cos(x^3)$ jest funkcja nieparzysta - jej calka na przedziale symetrycznym wzgledem osi OY jest rowna 0.

i smiga