Znaleźć liczbę kombinacji różnych, niekolejnych liczb Fibonacciego, których suma wynosi n.

W pierwszym kroku zauważamy, że jeśli n jest liczbą Fibonacciego, to jest tylko jeden ciąg, który sumuje się do n i nie zawiera dwóch kolejnych liczb Fibonacciego:

$$x + F(0)$$

Jawny wzór na k-tą liczbę Fibonacciego to

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

W dodatku wiemy, że $\binom{n}{k}$ jest równe 0 jeśli $k > n$. Rozważmy sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{F(k)}{n}\binom{n}{F(k)}$$

Jeśli n jest liczbą Fibonacciego, to dokładnie jeden czynnik jest niezerowy:

$$\binom{n}{n}\binom{n}{n} = 1$$

natomiast jeśli n nie jest liczbą Fibonacciego, to wszystkie wyrazy są zerowe.

Teraz zauważamy, że jeśli n nie jest liczbą Fibonacciego, to zapisać ją jako sumę różnych i niekolejnych liczb Fibonacciego można znajdując najpierw największą liczbę Fibonacciego która jest od niej mniejsza i powtarzając to samo dla ich różnicy. Jeśli dojdziemy w ten sposób do liczby 1, możemy naszą liczbę zapisać na 3 sposoby.
Suma większych liczb Fibonacciego będzie niezmienna, natomiast liczbę 1 możemy dodać na trzy sposby:

$$1 = F(0) + F(2)$$

$$1 = F(2)$$

$$1 = F(1)$$

W przeciwnym przypadku mamy dwa sposoby dodania liczb Fibonacciego: z $F(0)$ lub bez.
Zauważamy, że liczba 1 będzie czynnikiem dodawania tylko dla liczb $k+1$, gdzie k jest liczbą Fibonacciego. Natomiast, jeśli możemy dodać liczbę 3, to możemy to zrobić dodając 3, $3+0$, $2+1$ i takie liczby wystepują co 3, a zaraz po nich jest liczba z 1.

Łącząc te fakty, dostajemy przeokropnie wyglądający wzór:

$$G(1) = 1$$

$$G(2) = 1$$

$$G(n) = \left(1 - \sum_{k=0}^{n}\binom{F(k)}{n}\binom{n}{F(k)}\right)\left(2 + \lceil\frac{|G(n-1)-G(n-2)|}{2}\rceil - \lfloor\frac{1}{G(n-1)}\rfloor\right) + \sum_{k=0}^{n}\binom{F(k)}{n}\binom{n}{F(k)} + \lfloor\frac{4}{n}\rfloor$$