Lista 1, Analiza Matematyczna II

1. Funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu punktu 0 i dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ spełnia
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$
Pokaż, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla $0 \le k \le n$. (Można na przykład zastosować wzór Taylora, albo indukcję).

2. Funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i ma ciągła pochodną w (a, b). Udowodnij, że jeśli f ma k różnych pierwiastków w $[a, b]$ to f' ma co najmniej $k - 1$ pierwiastków w (a, b).

3. Załóżmy, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu punktu 0. Rozważmy $g(x) = f(x^2)$. Udowodnij, że $g^{(2k)}(0) = 0$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

4. Pokazać, że wielomian
$$p(x) = x^n + \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \quad k \le n - 2,$$
ma co najwyżej $k + 2$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

5. Niech $r_1 < r_2 < ... < r_\ell$ oznaczają pierwiastki wielomianu
$$p(x) = x^n + \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \quad k \le n - 2, \quad a_k \ne 0,$$
$k(r_j)$ ich krotności. Pokaż, że
$$k(r_1) + k(r_2) + ... + k(r_\ell) \le k + 2.$$

6. Załóżmy, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$ jest zbieżny dla $y \in (-R, R)$. Niech $a \in (-R, R)$ i niech $x \in (a - r, a + r)$. Udowodnij, że
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m \right| < \infty.$$
[1]

7. Udowodnij następujące twierdzenie. Szereg potęgowy
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
jest zbieżny w $(-R, R)$ do funkcji $f(x)$. Niech $a \in (-R, R)$ i niech $r > 0$ będzie takie że $|a| + r < R$. Wówczas f rozwija się w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - a)^n$ w przedziale $(a - r, a + r)$. [2]

8. Szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że funkcja f może mieć skończoną liczbę miejsc zerowych w każdym przedziale $[a, b]$. Możesz skorzystać z poprzedniego zadania.

---

[1] *Wskazówka:* Wskazówka: $|a| + |x - a| \le |x|$

[2] *Wskazówka:* Wskazówka: użyj poprzedniego zadania i napisz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x - a) + a]^n. \tag{1}$$

9. Podaj przykład szeregu potęgowego:

a) który nie ma miejsc zerowych;

b) którego miejscami zerowymi jest $\mathbb{Z}$.

1̈0. Niech $0 < r_1 < r_2 < \ldots$ będą miejscami zerowymi szeregu potęgowego o promieniu zbieżności ∞. Czy

$$\sum \frac{1}{r_j^2} < \infty?$$

Czy

$$\sum e^{-r_j^2} < \infty?$$

1̈1. Rozważmy tablicę liczb $\{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$. Załóżmy, że przy ustalonym m granica $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = A_m$ istnieje, oraz, że zbieżność ta jest jednostajna (napisz co to znaczy). Załóżmy dodatkowo, że przy ustalonym n granica $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = B_n$ istnieje. Wykaż, że oba ciągi $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są albo jednocześnie rozbieżne, albo jednocześnie zbieżne (wtedy do tej samej granicy).

1̈2. Rozważmy tablicę liczb $\{a_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że

$$\sup_N \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} |a_{n,m}| < \infty.$$

Uzasadnij, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = A_m, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = B_n$$

są zbieżne. Ponadto szeregi

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

są zbieżne i to do tej samej sumy.

13. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rozstrzygnij, czy z tego da się jednoznacznie wyznaczyć $f(2)$. Rozstrzygnij, czy da się jednoznacznie wyznaczyć $f(-1)$.

1̇4. Wyznacz wszystkie funkcje 2022-krotnie różniczkowalne takie, że

$$f^{(2022)}(x) = e^{3x}.$$

1̇5. Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 6x + 6 \text{ dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$. Wyznacz $f(3)$.

Uwaga 1: Większość zadań pochodzi z list prof. R. Szwarca.

Uwaga 2: Zadania zielone są za 0,5 pkt (bez kropki nad numerem zadania), zdania pomarańczowe za 1 pkt (jedna kropka), zadania czerwone za 2 pkt (dwie kropki).