Lista 2, Analiza Matematyczna II

1. Oblicz sumy dolne i górne dla podanych całek i podziałów:

a) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$; $\quad P = \{-2, -1, 0, 1\}$,

b) $\int_0^2 |x-1|\,dx$; $\quad P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$,

c) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$; $\quad P = \{-\frac{\pi}{4}, 0, 1, \frac{\pi}{4}\}$.

$\dot{2}$. Oblicz całki poprzez znalezienie podziałów dla których sumy dolne i górne są blisko siebie (uwaga:dwa przykłady liczą się jako całe zadanie)

$$\int_{-1}^{1} x\,dx, \quad \int_0^2 [x]\,dx, \quad \int_1^2 x^2\,dx, \quad \int_0^2 \{x\}\,dx.$$

3. Które z funkcji są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$?

a) $f(x) = x + [2x]$,

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,

$\dot{c}$) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 1$,

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,

$\dot{e}$) $f(x) = \operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}$, $f(0) = 0$,

$\dot{f}$) $f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, $f(0) = 0$.

$\dot{4}$. Nieujemna funkcja ciągła f spełnia warunek $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Pokaż, że $f(x) = 0$ dla $x \in [a,b]$.

$\dot{5}$. Pokazać, że jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$ i spełnia warunek $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$, to istnieje przedział $[a,b] \subset [0,1]$, że $f(x) > 0$ dla $x \in [a,b]$.

$\dot{6}$. Funkcja f jest monotoniczna na $[0,1]$. Udowodnij, że $f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$ i

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right| \le \frac{c}{n}$$

dla pewnej stałej $c > 0$.

7. Oblicz całki przy pomocy odpowiednio dobranych sum całkowych

$\dot{a}$) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$,

$\dot{b}$) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$,

$\dot{c}$) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $\quad 0 < a < b$,

$\dot{d}$) $\int_0^1 a^x, dx$,

$\ddot{e}$) $\int_0^x \cos t\,dt$.

8. Udowodnić oszacowania

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < 2$,

b) $\frac{1}{5} \int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{2}$,

c) $5 < \int_1^3 x^x\,dx < 31$,

$\dot{d}$) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx < \frac{3}{4}$.

$\ddot{9}$. Co jest większe $\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx$ czy $\frac{3\pi}{2}$?

10. Oblicz podane granice przy pomocy całek Riemanna odpowiednich funkcji ȧ) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$,

ḃ) $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$,

ċ) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$,

d̈) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+(1/2)}+\dots\frac{2^{n/n}}{n+(1/n)}\right)$.

1̇1. Dowieść, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2.$$

1̇2. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

Wskazówka. Zlogarytmuj wyrażenie pod granicą.

1̈3. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły na $[a,b]$ i

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big).$$

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

1̈4. Funkcja f jest całkowalna na $[0,2\pi]$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\cos nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Wskazówka. Rozbić przedział całkowania na $2n$ części.

1̈5. Dowieść, że jeśli f jest funkcją ciągłą nieujemną na $[a,b]$, to

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p}=\max_{[a,b]} f(x).$$

1̈6. Funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$. Udowodnić, że dla dowolnych $a<c<d<b$ mamy

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

Wskazówka. Przy założeniu $h>0$ i $d\le c+nh\le b$ zauważyć, że

$$\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx\le U(P,f)-L(P,F)$$

dla podziału odcinka $[c,c+nh]$ punktami $p=\{c,c+h,c+2h,\dots,c+nh\}$.