JADRA

*

Jezeli $F : V \to W$ jest liniowe, to jadro jest podprzestrzenia V, a obraz - podprzestrzenia W: $\ker F \leq V$, F $\leq W$
DOWOD:
$\ker: \vec{0} \in \ker F$: $F(\vec{0}) = \vec{0}$
Jesli $v_1, v_2 \in \ker F$, to wowczas $F(v_1, v_2) = f(v_1) + F(v_2) = 0 + 0 = 0$
dokonczyc dowod
Jadro pozwala nam zrozumiec, kiedy przekszta1cenie jest roznowartosciowe: $F : V \to W$ jest "na" jesli im$F = V$, a jest 1-1 tylko jesli $\ker F = 0 = \{\vec{0}\}$ i wowczas jadro jest trywialne.
DOWOD: Zalozmu, ze jest 1-1. $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Jezeli $v \neq 0$, to $F(v) \neq F(\vec{0}) = 0 \in W$.
Zalozmy, ze $\ker F = 0$ wiemy, ze $v_1, v_2 \in V$ takie, ze $F(v_1) = f(v_2)$ wowczas $F(v_1) - F(v_2) = 0$ $F(v_1 - v_2) = 0$, czyli $v_1 - v_2 \in \ker F \implies v_1 - v_2 = 0$ $v_1 = 0 + v_2 = v_2$
PRZYKLADY:
Wezmy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & y \end{pmatrix}$$

kotra jest macierza przeksztalcenia bedacego endomorfizmem, czyli $F_1 = F_2 \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$. Wowczas:

$$\text{im}F_A = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

$$\ker F_A = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + 4y + 7z = 0 \\ 2x + 5y + 8z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y + 3z = 0\} = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})\}$$

$F_4 : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad F_4(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$

$$\text{im}F_4 = \mathbb{R}$$

$$\ker F_4 = \{f : \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$$

$F_5 : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N} \quad F_5((a_0, a_1, ...)) = (a_1, a_2, ...)$

$$\text{im}F_5 = \mathbb{R}^\mathbb{N}$$

$$\ker F_5 = \{(a_0, 0, 0, 0, ...) : a_0 \neq 0\}$$

RZEDY

Jesli V jest przestrzenia liniowa, a $A, B \subseteq V$, takimi, ze $a \cap B \neq \emptyset$ oraz $A \cup B$ jest lnz, to wowczas $\text{Lin}(A) \cap \text{Lin}(B) = 0$.

Jezeli $F : V \to W$ jest liniowe, to RZAD jest rk$F = \dim \text{im}F$

Tw o rzedzie $\dim V = \dim \ker F + \dim \text{im}F = \dim \ker F + \text{rk}F$ Twierdzenie o indeksie: $\dim V < \infty$, to wowczas

$$\dim \ker F = \dim V - \dim \text{im}F$$

$$\dim \text{im}F = \dim V - \dim \ker F$$

PRZYKLAD $V = \{P \in \mathbb{R}_{50}[X] : \int_{-1}^{1} P(t)e^{-t^2}dt = 0\}$ Wezmy funkcje $G : \mathbb{R}_{50}[X] \to \mathbb{R}$ zadane $G(P) = \int_{-1}^{1} P(t)e^{-t^2}dt$

im$G = \mathbb{R}$, bo $G(1) = \int_{-1}^{1} P(t)e^{-t^2}dt > 0$ $\dim \ker G = \dim \mathbb{R}_{50}[X] - \dim \text{im}G = 51 - 1 = 50$ Dowod twierdzenia o rzedzie:
Niech A bedzie baza $\ker F \leq V$. A jest lnz, wiec $\exists\, A \subseteq C \quad B = C \setminus A$, gdzie C to baza V.
Chcemy pokazac, ze $|F[B]| = |B|$ i $F[B]$ jest baza dla im$F$, bo

$$|A| = \dim \ker F$$

$$|B| = \dim \text{im } F$$

$$\dim V = |C| = |A| + |B| = \dim \ker F + \dim \text{im } F$$

Wezmy dowonle $v \in V$. Chcemy sprawdzic, ze $F(v) \in \texttt{Lin}(F[B])$.

$$v = \sum_{\alpha \in A} \alpha_a \cdot a + \sum_{b \in B} \beta_b \cdot b$$

$$F(v) = \sum_{\alpha \in A} \alpha_a \cdot F(a) + \sum_{b \in B} \beta_b \cdot F(b)$$

$$A \subseteq \ker F$$

$$F(v) = \sum_{b \in B} \beta_b \cdot F(b) \in]LinF[B]$$

$A \cap B =$ oraz $A \cup B = C$ jest lnz, wiec ze witerdzenia $\texttt{Lin}(A) \cap \texttt{Lin}(B) = 0 = \{0\}$. Jezeli tak, to $0 = \ker F = \texttt{Lin}(A) \cap \texttt{Lin}(B)$ oraz $\ker F \cap \texttt{Lin}(B) = \{0\}$ i wtedy $\ker F\texttt{Lin}(B) \implies F \restriction \texttt{Lin}(B)$ i F jest 1-1 na B Jezeli $\sum_{b \in B} \beta_b F(b) = 0$, to wtedy $F(\sum_{b \in B} \beta_b F(b)) = 0 \in \ker F$, ale B jest lnz, wiec wszystkie $\beta_b = 0$ i $F[B]$ jest lnz
WNIOSEK: $F : V \to W$, $\texttt{Lin}(V) = \texttt{Lin}(W) < \infty$ wtedy: $\ker F = 0$ jest "na" i 1-1 o jest izomorfizmem.
Zalozmy, ze F jest "na". W takim wypadku $\dim \text{im } F = \dim W = \dim V$ i z twierdzenia o indeksie $\dim \ker F = \dim V - \dim \text{im } F = \dim V - \dim V = 0 \implies \ker F = \{0\}$. Tak samo implikacja w druga strone.
F jest 1-1 i F jest "na, wiec F jest bijekcja i jest izmorofizmemem
DEF: izomorfizm $F : V \to V$ nazywamy automorfizmem
zbior automorfizmow przestrzeni liniowej V oznaczamy $GL(V)$ lub $\texttt{Aut}(V)$
wniosek 2: jESLI MAMY KROTKI CIAG PRZESTRZENI LINIOWYCH: $V_1 \xrightarrow{F_1} V_2 \xrightarrow{F_2} V_3$ (krotki ciag dokladny) taki, ze F_1 jest 1-1, F_2 jest na i $\ker F_2 = \text{im}F_1$, to wtedy

$$\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$$

DOWOD: F_1 jest 1-1, wiec z tw o rzedzie $\dim V_1 = \dim \text{im}F_1 + \dim \ker F_1 = \dim \text{im } G = \dim \ker F_2$, z drugiej strony $\dim V_2 = \dim \ker F_2 + \dim \text{im } F_2 = \dim V_1 + \dim V_3$

SUMA PROSTA

Jesli mamy dwie przestrzenie liniowe V, W, ich SUMA PROSTA to $V \times W$ z dzialaniami

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

i oznaczamy $V \oplus W$
Jesli $F_1 : V_1 \to W_1$ i $F_2 : V_2 \to W_2$, to $F_1 \oplus F_2 : (V_1 \oplus V_2) \to (W_1 \oplus W_2)$
Jesli $V_1 \xrightarrow{F_1} W_1 \xrightarrow{G_1} U_1$ i $V_2 \xrightarrow{F_2} W_2 \xrightarrow{G_2} U_2$, to

$$(G_1 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus F_2) = (G_1 \circ F_1) \oplus (G_2 \oplus F_2)$$

wystarczy podstawic arg $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ i przerachowac (CWICZENIA)
Jesli mamy $V \geq U, W$, takie, ze $U \cap W = 0$, to wowczas mamy izomorfizm naturalny $U \oplus W \to U + W$ zadany $(u, w) \mapsto u + w$. Jesli $V = U + w$, to mowimy, ze V jest suma prosta U i W.

PRZESTRZEN DUALNA

Jesli V to przestrzen liniowa, to $V^* = \texttt{Hom}(V, k) = \{f : V \to K \ : \ f \text{ jest liniowe}\}$ i elementy V^* nazywamy funkcjonalami (na V).
LEMAT: $V^* \geq K^V$ to przestrzen wszystkich funkcji $V \to K$, niekoniecznie liniowych