# POWROT

Dowod ze suma przeliczalnie wilu przeliczalnych zbiorow jest przeliczalna:
$\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, $|A_n| = \aleph_0$ Dla $n \in \mathbb{N}$ ustalalismy bijekcje $f_n : \mathbb{N} \to A_n$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$f(n,k) = f_n(k)(\heartsuit)$$

Korzystamy z aksjomatu wyboru, bo nie starczy miec jedna $f_n$, tylko wszystkie na raz. Czyli dla $n \in \mathbb{N}$ rozpatruje zbior funkcji

$$F_n = \{\psi \in S_n^{\mathbb{N}} \ : \ \psi \text{ jest bijekcja}\}$$

$F$ t ofunckja wyboru dla rodziny $\{F_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, czyli kazdej rodzinie przypisuje element tej rodziny

$$F(F_n) \in F_n$$

czyli formaalnie $(\heartsuit)$ wyglada:

$$f(n,k) = F(F_n)(k)$$

LKZ: Jesli $\langle X, \leq \rangle$ zbior czesciowo uporzadkowany w ktorym kazdy lancuch jest ograniczony z gory, to w $X$ jest element maksymalny.

TW: dla dowolnych zbiorow $A, B$ zachodzi $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$

DOWOD:

Musimy skonstruowac zb. cz.up. do ktorego zastosujemy LKZ. Elemenatmi tego zb cz up sa przyblizenia tego, co chcemy otrzymac:

Niech

$$X = \{f \ : \ \text{fnc}(f) \ \wedge \ \text{dom}(f) \subseteq A \ \wedge \ \text{tng}(f) \subseteq B \ \wedge \ \text{f jest 1-1}\}.$$

Bedziemy rozpatrywali $\langle X, \subseteq \rangle$. Chcemy zastosowac do niego LKZ, czyli musimy sprawdzic zalozniea.
Niech

$$\mathcal{L} \subseteq X$$

bedzie lancuchem. Chcemy pokazac, ze ma on ograniczenie gorne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L},$$

wtedy $L$ jest ograniczeniem gornym, bo zawiera wszystkie elementy z $\mathcal{L}$, ale czy $L$ jest w $X$?
Pokazemy, ze $L \in X$, czyli musimy pokazac, ze

1. $L$ jest zbiroem par uporzadkowanych
2. $L$ jest funkcja

chcemy pokaza, ze

$$\forall \, x, y, z \quad \langle x, y \rangle \in L \ \wedge \ \langle x, z \rangle \in L \implies y = z$$

Ustalmy, dowolne $x, y, z$ takie, ze $< x, y > \in L$ i $< x, z > \in L$. Zatem istnieja $F, G \in \mathcal{L}$ takie, ze $< x, y > \in F$ i $< x, z > \in G$
Mamy pewien lancuch i cos go ogranicza od gory. Tutaj korzystajac ze skonczonosci schodzimy do tego lancucha. A $\mathcal{L}$ jest lancuchem, wiec bez straty ogolnosci $F \subseteq G$. Wtedy $< x, y > \in G$ i $< x, z > \in G$, zatem $y = z$, bo $\text{fnc}(G)$

3. $\text{dom}(L) \subseteq A$

$$\text{dom}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \text{dom}(F)$$

4. $\text{rg}(L) \subseteq B$

$$\text{dom}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \text{rng}(F)$$

*3. i 4. wynikaj z definicji*

5. $L$ jest 1-1

Analogicznie do o2.
Niech $\varphi \in X$ bedziie elementem maksymalnym w $X$ istniejacym na mocy LKZ. Mamy 3 mozliwosci
1. $\text{dom}(\varphi) = A$
Wowczas $\varphi : A \to B$ i jest 1-1, czyli $|A| \leq |B|$
2. $\text{rng}(\varphi) = B$
Wowczas $\varphi : \text{dom}(\varphi) \to B$ jest bijekcja, czyli $\varphi^{-1} : B \to \text{dom}(\varphi) \subseteq A$, ktoar jest 1-1 i na, czyli $|B| \leq |A|$
3. $\neg\, 1. \wedge \neg\, 2.$
Wtenczas $\text{dom}(\varphi) jest wlasciwym podzbiorem A$ i $\text{rng} \varphi jest wlasciwym podzbiorem B$, zatem istnieja $s \in A$ i $t \in B \text{rng}(\varphi)$, ale wtedy moge rozszerzyc

$$\varphi' = \varphi \cup \{< s, t >\}$$

Wtedy $\varphi' \in X$ jest funkcja roznowartosciowas, bo nic wczesniej sie nie psuje. w dodatku, $\varphi jest wlasciwym podzbiorem \varphi'$, czyli jest sprzeczne z maksymalnoscia $\varphi$, czyli zachodzi tylko 1 lub 2, wiec jest tak jak chcemy

# LICZBY PORZADKOWE <3

CZESCIOWY LINIOWY DOBRY PORZADEK - znalezc warunki
w dodatku uzywalismy skrotu:

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y$$

Teraz chcemy, zeby zaczal to byla definicja pewnego bytu:
TW: < jest relacja prpzechodznia i silnie antysymetryczna
TW: Jesli < jest relacja przechodnia i silnie antysymetryczna, to relacja zadana warunkiej $x \leq y \iff x <$

$y \vee x = y$ jest czesciowym porzadkiem.
TW: Powyzsza oodpowiedniosc jest wzajemnie jednoznaczna. Czyli jesli wezme czesciowy porzadek i zwiazamy z nim ostry porzadek, to moge sobie przechodzic w koleczku miedzy nimi - kazdemu czesciowego odpowiada tylko jeden ostry porzadek
DEF: Spojnosc' (krach nie wie jak sie to nazywa), czyli silna spojnosc to warunek mowiacy, ze $\forall\, x, y \quad x \neq y \implies xRy \vee yRx$ x jest wrelacji z y lub y jest w relacji z y, co jest rownowazne z $\forall\, x, y \quad xRy \vee x = y \vee yRx$ TW:Porzadek ejst liniowy wtw zwiazany z nim ostry czesciowy porzadek ejst spojny'
TW: Porzadek liniowy jest dobry wtw ostry porzadek z nim zwiazany jestdobry.

$$\forall\, A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A\, \forall\, y \in A \quad \neg y < x$$

co dla porz. liniowych jest rownowazne z

$$\forall\, A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A\, \forall\, y \in A \quad \neg y \leq x$$

czyli teraz nie bedzie rozrozniania miedzy porzadkiem ostrym a porzadkiem slabym - bedziemy sie odwolywac do tego, co jest w danym mmomencie wygodne

## RZECZY BARDZIEJ PODNIECAJACE, czyli przyklady

Zajmujemy sie dobrymi prozadkami.

1. $<\mathbb{N}, \leq>$ - zasada minimum mowi, ze w kazdym niepusty podzbiorem $\mathbb{N}$ jest element najmneijszy, co ojest rownowazne z zasada indukcji.
2. $<\{1 - \frac{1}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\}, \leq>$ - jest w naturalny sposob izomorficzny ze zbiorem $\mathbb{N}$ ($n \models 1 - \frac{1}{n+1}$)
3. $<\{1 - \frac{1}{n++1} \;:\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \leq>$ - mozemy rozwazac czy do podzbioru nalezy czy nie nalezy 1 LUB czy kroi sie z przedzialem zawartym w [0,1] pusto czy nie pusto.
4. $<\{1 - \frac{1}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\}>$ - tez, bo bierzemy podzbior [0,1] lub [1,2] i on jest niepusty
5. $<\{n - \frac{1}{m} \;:\; n, m \in \mathbb{N}\}, \leq>$ - tak jak wczesniej, ale nakazdym przedziale od $n$ do $n+1$. Tez jest dobry, bo jak sie wzemie jakikolwiek niepusty podbior $A$ to on sie kroi $A \cap [n, n+1) \neq \emptyset$ i bierzemy z tego el. min: $\min\{n \in \mathbb{N} \;:\; A \cap [n, n+1) \neq \emptyset\}$

sa podobne, ale sa rozne - bo nie sa izomorficzne (np 1 i 3 nie sa izomorficzne, bo 1 ma max, a 3 nie mam max)
DEF ODCINEK POCZATKOWY - niech $< X, \leq>$ bedzie dobrze uporzadkowany i $a \in X$. Odcinkiem poczatkowym tego zbioru dobrze uporzadkowanym wyznaczonym przez $x$ nazywamy zbior

$$\mathtt{pred}(X, a, \leq) = \{x \in X \;:\; x < a\}$$

Widac, ze w przykladach kazdy poprzedni jest odcinkiem poczatkowym tego nastepnego (2 do 3 jest odc wyznaczonym przez 1). Bycie "krotszym porzadkiem" odpowiada byciu odcinkiem poczatkowym
TW: Dla dowolnego $a \in X$

$$\mathtt{pred}(X, a, \leq) \simeq\neq X$$

DOWOD:Przypuscmy nie wprost, ze dla pewnego $a \in X$ mamy $\mathtt{pred}(X, a, \leq) \simeq X$, czyli istnieje izomorfizm $f : X \to$ pred. Wtedu $f(a) < a$. Zatem zbior

$$A = \{x \in X \;:\; f(x) < x\}$$

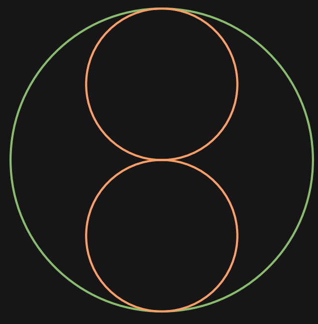
jest niepusty. Niech $b = \min A$, ale wtenczas $f(b) < b$, zatem $f(f(b)) < f(b)$, bo $f$ jest izomorfizmem, wiec zachowuje porzadek. Czyli $f(b) \in A$. I mamy sprzecznsoc z minimalnoscia $b$.

TW: Niech $< X, \leq_x >, < Y, \leq_y >$ beda zbiorami dobrze uporzadkowanymi. Wtedy zachodzi jedna z trzech mozliwosci:
1. te dwa zbiory sa izomorficzne ($(X,) \simeq (Y)$), czyli sa tej samej dlugosci
2. pierwszy jest dluzszy od drugiego:

$$\exists\, a \in X \quad < \mathtt{pred}(X, a, \leq), \leq > \simeq < Y, \leq_y >$$

3. lub w druga strone
to wymagaloby udowodnic, ale nie bedziemy tego robic, bo to jes zmudny i nieprzyjemny dowod, gdzie sie trzeba nagrzebac, ale to jest przyjemny wyklad i za niedlugo to wykorzystamy :3

Jesli mam kolekcje wszystkich dobrych porzadkow i na niej mamy cos jakby relacje rownowaznosci (izomorficznosc) i cala kolekcja rozpada sie na podkolekcje, ktore sa izomorfoczine



i to nasze twierdzenie wyzej daje namjakies porzadki na tej kolecji do porownywania porzadkow. I teraz grupujemy te elementy w podzbiorach skupiajac sie na konkretnej cesze i w tych grupach mamy elementy o tej samej cesze i ona jest na fladze. My dazymy do zbioru tych flag. Tutaj te podzbiory maja dobre porzadki i flagi sa dlugosciami tych porzadkow. Tak sie keidys wprowadzalo liczby porzadkowe.
My bedziemy chcieli wskazac sposob kanonicznego wybierania reprezentantow tych klas.
*o ja pierdole jeszcze 25 min*

# ZBIOR TRANZYTYWNY

DEF: Zbior A nazywamy tranzytywnym, jesli $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ kazdy jego element jest jego podzbiorem.

$$\texttt{Tran}(A)$$

PRZYKLADY:
$\emptyset$jest tranzytywny bo "Na wyspach Bergamuta", bo el $\emptyset$moga miec dowolne wl, w szczgolnosci moga byc podzbiorami
$\{\emptyset\}$ - on juz ma elementy, ale nie ma watpliwosci ze ten element jest jego podzbiorem
Tran$(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ - $\emptyset$latwo, a singleton tez
Tran$(\omega)$ - porzadnie udowodnimy na cwiczeniach (kazda l.nat. jest zbiroem liczb od siebie mniejszych)
FAKT: Tran$(A) \iff \forall\, x \in A \,\forall\, t \in x \quad t \in A$ - *elememnty moich elemenntow sa moimi elementami*
FAKT: Jezeli zbior jest tranzytywny, to trazytywna jest jego zbiora i jego zbior potegowi i jego nastepny

$$\texttt{Trans}(A) \implies \texttt{Trans}(\bigcup A) \implies \texttt{Trans}(\mathcal{P}(A)) \implies \texttt{Trans}(A \cup \{A\})$$

udowodnimy to ostatni: Ustalmy $x \in A \cup \{A\}$ i $t \in x$ Wtedy mamy dwa przypadki:
1. $x \in A$. Wtedy z Trans$(A)$ skoro $t \in x$, to $t \in A$
2. $x \in \{A\}$, czyli $x = A$, czyli z $t \in x$ mamy $t \in A$

DEF Zbior tranzytywny A nazywamy LICZBA PORZADKOWA, jesli spelnia warunek (lin. uporz przez rel. nalezenia)

$$\forall\, x, y \in A \quad x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

i uzywamy oznaczenia On$(A)$
ZANIM RZACZY FAJNE, to OZNACZENIA
liczby porzadkowe oznaczamy $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \xi$
TW: jesli On$(]alpha)$, to $\alpha$ jest dobrze uporzadkowane przez $\in$, czyli kazdy niepusty zb $A \subseteq \alpha$ ma element $\in$-minimalny

$$\forall\, A \subseteq \alpha \quad (A \neq \emptyset \implies \exists\, x \in A \,\forall\, y \in A \quad x = y \vee x \in y)$$

z aksjomatu regularnosci
TW: (podstawowe tw mowiace o wlasnosciach wlasnie liczb porzadkowych)
niech $\alpha, \beta$ to beda liczby porzadkowe, a $C$ - zb liczb porzadwkocyh
1. jesli $y \in \alpha$ to On$(y)$ - el licz porz sa licz porz
2. $\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$
3. $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ - dowolne l porz sa porownywalne (nie uzywamy 3 jako dowodu 2, bo w dow 3 uzywamy 2)
4. Trans$(C) \implies$ On$(C)$
5. $C \neq \emptyset \implies \exists\, \alpha \in C \,\forall\, \beta \in C \quad \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta$