KOSTKA HILBERTA $[0,1]^{\mathbb{N}}$

METRYKA NA KOSTCE HILBERTA:

chwilowo $0 \notin \mathbb{N}$

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$C^{(a,b)} = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \ : \ x(n) \in (a,b)\}$ - wszystkie ciagi z kostki hilberta, ktore na n wspolrzednej wspelniaja pewne wymagania

Skonczone przekroje zbiorow postaci $C_n^{(a,b)}$ stanowia baze $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

DOWOD:

Wystarczy pokazac, ze baza topologii to suma pewnych jej elementow:

$$\forall\, x\, \forall\, U \underset{otw}{\ni} x\, \exists\, B \text{ - bazowy} \quad x \in B \subseteq U.$$

W przypadku przestrzeni metrycznej nie musimy brac kazdego zbioru otwartego (wiemy, ze kule stanowia baze)

$$\forall\, x \in [0,1]^{\mathbb{N}}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, B \text{ - bazowy} \quad x \in B \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Wezmy dowolny punkt $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ oraz dowolny $\varepsilon > 0$. Jak ustawic te bramki, zeby x przeszedl przez te bramki ale tez na pewno bycw tej kuli.

W kostce Hilberta musimy odciac ogony

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech dla kazdego $n \leq N$

$$I_n = (x(n) - \frac{\varepsilon}{4}, x(n) + \frac{\varepsilon}{4})$$

Czyli na kolejnych miejscach ustawiamy bramki o srednicy $\frac{\varepsilon}{2}$. Teraz ich przekroj:

$$x \in \bigcap_{n\leq N} C_n^{I_n} \subseteq B_\varepsilon(x)$$

Czemu ten przekroj jest w kuli? Wezmy element $y \in \bigcap C_n^{I_n}$ i policzby jak bardzo to jest od x

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^n} = \sum_{n\leq N} \frac{|x(n)-y(n)}{2^n|} + \sum_{n>N} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^n} < \varepsilon.$$

Czyli w kostce Hilberta lepiej jest myslec o bramkach niz o kulach :c

i smiga

WNIOSKI:

1. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest podprzestrzenia $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Bo kule sa dokladnie takiej postaci jak przekroc $\bigcap_{n\leq N} C_n^{I_n}$, czyli ustawiamy bramki na ktorys pierwszych wyrazach (bramka jest prefiks).
2. Topologia $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jest topologia zbieznosci punktowej. Ciag zbiega w kostce Hilberta wtw ciagi jego wspolrzedych zbiegaja w $\mathbb{R}$. (to wypadaloby pokazac)

Niech X bedzie przestrzenia metryczna i osrodkowa. Wtedy
$$\exists\, Y \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}} \quad X \cong Y$$

DOWOD:

Skoro X jest przestrzenia osrodkowa, wiec

$$\{d_1, d_2, ..., d_n\} \exists\, D \subseteq X$$

istnieje przeliczalny zbior gesty (kroi sie niepusto ze wszystkimi otwartymi).

Zdefiniujmy funkcje

$$h : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$$

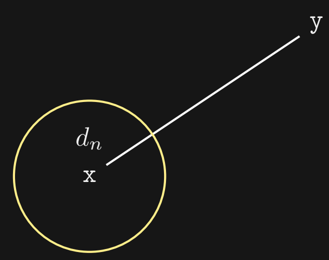
$$h(x) = \langle d(x,d_1), d(x,d_2), ..., d(x,d_n) \rangle$$

czyli liczymy pokolei odleglosci od kolejnych elementow naszego zbioru gestego.

Jesli mamy przestrzen metryczna, to mozemy zalozyc, ze punkty tej przestrzeni sa odlegle od siebie o mniej niz jeden (tw sprzed dwoch tyg.). Zakladamy wiec, bez zmniejszenia ogolnosci,

$$\forall\, x,y \in X \quad d(x,y) \leq 1$$

Dlaczego ta funkcja jest 1-1?



Musimy znalezc taki element zbioru gestego, ze odleglosc od x i y jest rozna. Czyli bierzemy sobie odleglosc miedzy x i y i rysujemy w x kule o promieniu 100 razy mniejszym - wtedy $d(x, d_n)$ musi byc mniejsza od promienia tej kuli, a $d(y, d_n)$ musi byc wieksza.

Dlaczego ta funkcja jest na?

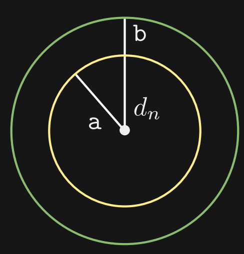
Nie chcemy tego pokazywac - to by bylo, ze kazda przestrzen metryczna jest homeomorf z kostka Hilberta. Nam jest potrzebny tylko $h[X] = Y$.

Wystarczy pokazac, ze h jest ciagla i ze h^{-1} tez jest ciagla. Wezmy zbiory bazowe

$$h^{-1}[C_n^{(a,b)}]$$

i pokaze ze to jest otwarte. Wtedy przeciwobrazy skonczonych przekroi takich zbiorow tez jest otwarty.

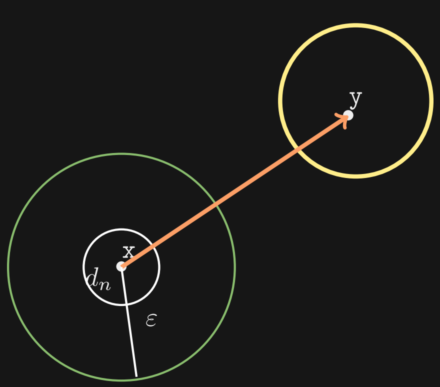
$$C_n^{(a,b)} = \{x \in X \ : \ d(x, d_n) \in (a,b)\}$$



I to jest zbior otwarty.
Teraz zakladamy, ze h^{-1} jest ciagla i chcemy pokazac, ze przeciwobrazy zbiorow otwartych sa otwarte:

$$h[B_\varepsilon(x)] \ni y = h(x).$$

Zeby uniknac technicznych rzeczy, bierzemi $y = h(x)$, ale on wcale taki byc nie musi.



Patrze na kule $B_\varepsilon(x)$ i o wiele mniejsza kule $B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x)$. W niej znajuje d_n. Za pomoca tego d_n zdefniuje bramke, czyli chce wszystko to, co jest blizej y niz $\frac{\varepsilon}{10}$:

$$y \in C_n^{(y(n)-\frac{\varepsilon}{10}, y(n)+\frac{\varepsilon}{10})} \subseteq h[b_\varepsilon(x)]$$

Chce pokzazac, ze

$$z = h(x) \in C_n^{(y(n)-\frac{\varepsilon}{10}, y(n)+\frac{\varepsilon}{10})}$$

No ale teraz wiem, ze

$$|z(n) - y(n)| < \frac{\varepsilon}{10}$$

Odleglosc v i x od d_n i ich roznica nie jest wieksza niz $\frac{\varepsilon}{10}$. W takim razie

$$d(x, v) < \frac{\varepsilon}{5}$$

Ale wtedy tym bardziej $v \in B_\varepsilon(x)$, co oznacza, ze

$$h(v) \in h[B_\varepsilon(x)]$$

Nadzieja wszystko pomieszal

i smiga

ZWARTOSC

POKRYCIE - rodzina zbiorow otwartych pokrywajaca X

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

Przestrzen topologiczna X jest ZWARTA, gdy z kazdego pokrycia mozna wybrac podpokrycie skonczone.

$(0,1)$ w metryce euklidesowej nie jest zwarty. Nie mozemy wybierac takich przedzialikow otwartych, ze one ladnie zbiegaja do 1 (jesli wyrzucimy jeden zbior to to juz nie jest pokrycie).

$[0,1]$ w metryce euklidesowej jesli dzielimy znowu na coraz to mniejsze przedzialy otwarte, to zawsze zostaje ten malutki i jak go sobie wybiore, to cala reszta moze byc wyrzucona i jest pokrycie.

Przestrzen metryczna jest ZWARTA wtedy i tylko wtedy, gdy z kazdego ciagu mozemy wybrac podciag zbiezny.

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Wybiezmy dowolny ciag (x_n). Mamy dwie sytuacje:

1. $\exists\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap A$ jest nieskonczony, czyli nieskonczenie wiele wyrazow wpada do naszej kuli (jest to PUNKT SKUPIENIA CIAGU).

Wtedy wybieramu (n_k) rosnacy taki, ze

$$B_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$$

Taki ciag nie ma wyboru:

$$(x_{n_k}) \to x$$

2. Zalozmy, ze (x_n) nie ma punktu skupienia.

Wezmy dowolny $x \in X$. Istnieje B_x, czyli kula o srodku x, ktora zawiera tylko skonczenie wiele wyrazow naszego ciagu.

$$\{B_x\ :\ x \in X\}$$

jest pokryciem. To w takim razie istnieje F skonczony taki, ze

$$\{B_x\ :\ x \in F\}$$

jest pokrycim X. Ale to jest sprzecznosc, bo wtedy mamy skonczony ciag.

$\Longleftarrow$

Nadziei sie nie chce i to pominie

i smiga

Kazdy ciag ograniczony na prostej ma podciag zbiezy - czyje to? (Boltzana-Weiestrassa) - dowodzi czemu $[0,1]$ jest zwarty (czyli ma pokrycie).