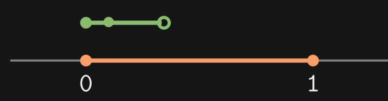
PODPRZESTRZENIE METRYCZNEEEE

PODPRZESTRZEN (X,d) to (A,d), $A \subseteq X$

formalnie (A,d) nie jest metryka - musimy obciac $d_{\upharpoonright A\times A}$

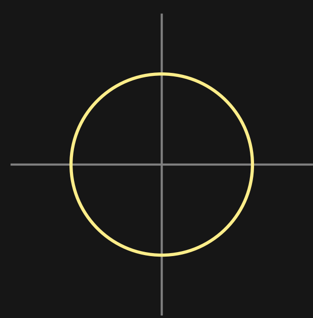
PRZYKLAD

Mamy prosta $\mathbb{R}$ z metryka euklidesowa. Rozwazmy na niej zbior $[0,1]$. Jesli zastanowimy sie nad kulami w tej podprzestrzeni, to mozemy otrzymac kule:



I ta kula jest otwarta, bo dla tej podprzestrzeni nie istnieja punkty mniejsze od 0.

Na $\mathbb{R}^2$ z metryka centrum wybieramy okrag o promieniu $\frac{1}{2}$ i srodku w $(0,0)$. Taka podprzestrzen jest bardzo podobna do przestrzeni dyksretnej - kazde dwa punkty, ktore nie sa tym samym punktem, sa od siebie odlegle o 1.



Dwie przestrzenie metryczne: (X,d) i (Y,ρ), i funkcja z jednej w druga:

$$f : X \to Y$$

jest ciagla jesli (warunek Cauchyego):

$$\forall\, x \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, y \quad d(x,y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Jesli mamy (X,d), (Y,ρ) oraz funkcje $f : X \to Y$, wowczas
1. f jest funkcja ciagla
2. (zbieznosc wg. Heinego): mamy (x_n) - ciag z X, taki, ze $\lim x_n = x$, to $\lim f(x_n) = f(x)$ (*ciag wartosci zbiega do wartosci granicy*)
3. $f^{-1}[U]$ jest otwarty, dla kazdego otwartego $U \subseteq Y$

Pokazemy implikacje : 3. $\implies$ 1..

Mamy funkcje $f : X \to Y$, i mamy sprawdzic, czy jest ciagla w sensie Cauchyego (z 1., warunek ciaglosci wyzej). Dla dowolnego $x \in X, \varepsilon > 0$ mamy dobrac δ tak, zeby warunek ciaglosci byl spelniony, majac do dyspozycji tylko to, ze przeciwobrazy zbiorow otwartych sa otwarte.

Czyli chce pokazac, ze jesli bedziemy brali cos z kuli o promieniu δ, to bedzie do tego nalezec wszystko w kuli o promieniu ε i do tego chce korzystac z otwartosci przeciwobrazow zbiorow otwartych.

Wartosci musze byc w kuli o srodku w $f(x)$ i promieniu ε:

$$U = B_\varepsilon(f(x)).$$

Z zalozenia 3. jesli wezmiemy dowolny punkt u ze zbioru $f^{-1}[U]$, to on siedzi w tym zbiorze wraz z pewna kula. Wybierzmy $u = x \in f^{-1}[U]$, bo $f(x) \in U$. Z definicji zbioru otwartego:

$$\exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x) \subseteq f^{-1}[U].$$

Jesli weze dowolne y z kuli B_δ, to jak naloze y f, bedzie oon blizej x niz ε, czyli $f(y) \in B_\epsilon(f(y))$

HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM ($X \underset{hom}{\cong} Y$) nazywamy taka funkcje $f : (X,d) \to (y,\rho)$, ktora:

f jest 1-1 i na i ciagla oraz

f^{-1} jest ciagla.

X jest homeomorfizmem z Y, jesli istnieje homomorfizm

PRZYKLADY

$[0,1] \cong [0,2]$, wezmy funkcje $f(x) = 2$ - jest ciagla bijekcja i funkcja odwrotna jest ciagla (najprostszy przyklad)

$(\mathbb{R}^2, d_{euk}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{miast})$ dla funkcji $f(x,y) = \langle x, y\rangle$, czyli dla identycznosci 34:05