Zad 1. Opisz, jak wygladaja ciagi zbiezne w kostce Cantora

Kostka kantora to zbior ciagow $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Wezmy metryke

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

gdzie $\Delta(x,y) = \min\{k \,:\, x(k) \neq y(k)\}$.

Wezmy $\varepsilon > 0$ taki, ze $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ciag bedzie zbiezny do (x_n), jesli znajdziemy kule o promieniu ε i srodku w (x_n), w ktorej sa prawie wszystkie jego wyrazy. W takim wypadku, tylko pierwsze k wyrazow musi byc takich samych, a dalsze moga przyjmowac dowolne wartosci. Im wieksze k wezmiemy, tym dluzej te ciagi sa takie same.

Wiec ciagi zbiezne w kostce Cantora to ciagi takich ciagow, ktore roznia sie po raz pierwszy na coraz to dalszym wyrazie od ciagu do ktorego sa zbiezne.

Zad 2. Pokaz, ze ciag (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbiezny wtw gdy kazdy z ciagow $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbiezny (w $\mathbb{R}$)

(x_n) jest zbiezny do x, jezeli

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N \quad \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + ... + (x_n(k-1) - x(k-1))^2} < \varepsilon$$

W zadaniu chcemy pokazac:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N \quad d(x_n, x) < \varepsilon \iff \forall\, i < k\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N \quad d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) < \varepsilon$$

Indukcja $\Longleftarrow$: Jezeli dla kazdego $i < k$

$$\lim d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) = \lim \sqrt{(x_n(i) - x(i))^2} = x(i)$$

To wowczas

$$d_{\mathbb{R}}(x_n(0), x(0)) + ... + (x_n(k-1), x(k-1)) = \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2} + ... + \sqrt{(x_n(k-1) - x(k-1))^2}$$

Zad 3. Udowodnij, ze ciag (x_n) punktow plaszczyzny jest zbiezny do x w metryce euklidesowej wtw gdy jest zbiezny w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce euklidesowej, to dla $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2} \geq \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} =$$
$$= \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) = \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|),$$

czyli

$$\varepsilon > \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|)$$

wiec jest zbiezne w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce maksimum, to dla $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|)$$
$$\varepsilon > \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2})$$
$$\sqrt{2} \cdot \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2})$$
$$\sqrt{2} \cdot \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0)x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2})$$
$$\sqrt{2} \cdot \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)}$$
$$\sqrt{2} \cdot \varepsilon > \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)}$$
$$\sqrt{2} \cdot \varepsilon > \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \geq \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2}$$

Zad 4. Wykaz, ze podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ sa otwarte, a $[a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$ sa domkniete.

Pokazac, ze $(a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ jest przedzialem otwartym,

W dowolnym punkcie chce stworzyc kule ktora sie w nim zawiera. Czyli potrzebuje znalezc promien dla kuli od dowolnego x:

$$r = \min(|a - x|, |b - x|),$$

gdzie $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

Pokazac, ze $[a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$ jest domkniety.

$P = [a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$ bedzie domkniety, jesli wszystkie ciagi o wyrazach z P beda mialy granice w P. Jezeli by tak nie bylo, czyli (x_n) zbiegalby do x poza P, to wowczas od pewnego momentu wszystkie wyrazy (x_n) bylyby w kuli o srodku w punkcie x i promeiniu $\varepsilon > 0$.

Niech ciag o wyrazach z P zmieza do

$$(x_n) \to \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ ... \\ b_n + 2 \end{pmatrix} = b,$$

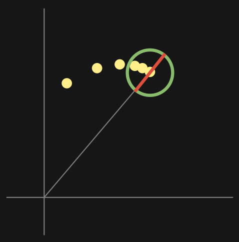
Wowczas, od pewnego momentu wszystkie wyrazy tego ciagu naleza do kuli o srodku b i promieniu 1, czyli sa poza P. Ale jest to sprzeczne ze stwierdzeniem, ze ciag (x_n) ma wszystkie wyrazy w P.

Zad 5. Uzasadnij, ze nie istnieje ciag (x_n) elementow $\mathbb{R}^2$, ktory jest zbiezny w metryce centrum, ale nie jest zbiezny w metryce euklidesowej. Podaj przyklad ciagu, ktory jest zbiezny w metryce euklidesowej (na $\mathbb{R}^2$), ale nie jest w metryce centrum.

Kula o srodku x i promieniu r w metryce centrum zawsze bedzie zawierala otwarty przedzial nalezacy do prostej przechodzacej przez srodek ukladu wspolrzadnych oraz x o dugosci $2r$ i srodku w x.

Z kolei kula o srodku x i promieniu r w metryce euklidesowej bedzie zawierala kule pomniejszona o okrag o srodku x i promieniu r, czyli zawiera w sobie kule w metryce centrum. Jesli wiec ciag zbiega w metryce centrum, to rowniez zbiega w metryce euklidesowej.

Wezmy ciag

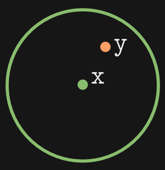


wowczas wszystkie jego wyrazy blisko elementu do ktorego zbiegaja moga zostac wpisane w dowolna kule w metryce euklidesowej, ale juz nie wszystkie kule w metryce centrum i srodku w x zawieraja ostatnie wyrazy tego ciagu (jesli wybierzemy promien mniejszy od odleglosci x od srodka ukladu wspolrzednych, to tylko x bedzie nalezec do tej kuli).

Zad 6. Sprawdz, ze w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) sfera, a wiec zbior postaci $\{y \in X \ : \ d(x, y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domknietym. Pokaz, we $B_r(x) \subseteq \{y \ : \ d(x, y) \leq r\}$, ale nie koniecznie musi zachodzic przeciwna inkluzja.

Jesli sfera jest zbiorem domknietym, wtedy wszystkie ciagi o wyrazach z niej sa zbiezne do wyrazu zawartego w niej. Zalozmy, nie wprost, ze istnieje ciag (z_n) o wyrazach ze sfery o srodku w x i promieniu r, ktorego wyrazy daza do y, ktory nie nalezy do sfery. Rozwazmy dwie mozliwosci.

1. Odleglosc $d(x, y) < r$



Wybierzmy dowolny element ciagu (z_n)

Z warunku trojkata otrzymujemy:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

$$d(y, z) \geq d(x, z) - d(x, y).$$

Poniewaz $d(x, z) = r$, a $d(x, y)$ jest stale, niech $d(x, y) = \rho$. Czyli mozemy napisac:

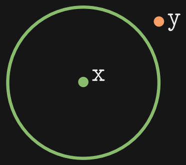
$$d(y, z) \geq r - \rho,$$

ale poniewaz ciag (z_n) zbiega do y, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mozemy obrac taki z, ze

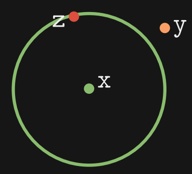
$$\varepsilon > d(y, z) \geq r - \rho.$$

Jednak odleglosc $d(y, z)$ jest ograniczona od dolu przez stala $r - \rho$, wiec dla $\varepsilon = r - \rho - \frac{1}{r}$ nie znajdziemy z spelniajacego te nierownosc. Stad ciag taki nie jest zbiezny.

2. Odleglosc $d(x, y) > r$



Wybierzmy element (z_n)



Wowczas, z warunku trojkata:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$
$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y),$$

ale poniewaz $d(x, z) = r$, a $d(x, y) = \rho$ jest stale dla danego ciagu, mozemy napisac:

$$\rho - r \leq d(z, y).$$

Aby ciag (z_n) byl zbiezny, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ musimy moc dobrac taki element (z_n), ze

$$\varepsilon > d(z, y) \geq \rho - r,$$

ale poniewaz $d(y, z)$ jest ograniczone od dolu przez $\rho - r$, to dla $\varepsilon = \rho - r = \frac{1}{r}$ nie znajdziemy elementu (z_n) spelniajacego te nierownosc.

Rozpiszmy $A = \{y \in Y \ : \ d(x, y) \leq r\}$ jako sume dwoch zbiorow:

$$A = \{y \in Y \ : \ d(x, y) < r\} \cup \{y \in Y \ : \ d(x, y) = r\}$$

Pierwszy element tej sumy jest rowny $\{y \in Y \ : \ d(x, y) < r\} = B_r(x)$, wiec

$$B_r(x) \subseteq A$$

W przeciwna strone inkluzja nie zachodzi, poniewaz

$$B_r(x) \cap \{y \in Y \ : \ d(x, y) = r\} = \emptyset$$

czyli A posiada wszystkie elementy $B_r(x)$, ale dodatkowo ma jeszcze sfere, ktora jest rozlaczna z kula.

Zad 7. Wykaz, ze zbieznosc jednostajna ciagu funkcji ciaglych na $[0, 1]$ jest rownowazna zbieznosci w metryce supremum w $C[0, 1]$. (Ciag (f_n) jest zbiezny jednostajnie do f, jezeli

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \, \forall \, n > N \, \forall \, x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Metryka supremum:

$$d(f, g) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \ : \ x \in [0, 1]\}$$

Chce udowodnic, ze ciag funckji (f_n) jest jednostajnie zbiezny $\iff$ (f_n) jest zbiezny w metryce supremum.

Niech $S = \{|f_n(x) - f(x)| \ : \ x \in [0, 1]\}$. Jesli $(f_n) \to f$ w metryce supremum, to wowczas

$$(\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \, \forall \, n > N \quad \varepsilon > \sup S \ \wedge \ \forall \, x \in [0, 1] \quad \sup S \geq |f_n(x) - f(x)|) \implies$$
$$\implies \forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \, \forall \, n > N \, \forall \, x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

Jesli $(f_n) \rightrightarrows f$, to wowczas

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \, \forall \, n > N \, \forall \, x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

ale poniewaz

$$(\heartsuit) \quad \exists \, p \in [0, 1] \quad (|f_n(p) - f(p)| = \sup S \ \wedge \ \forall \, x \in [0, 1] \quad |f_n(p) - f(p)| \geq |f_n(x) - f(x)|)$$

mozemy napisac

$$(\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \, \forall \, n > N \, \forall \, x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|) \ \wedge \ (\heartsuit) \implies$$
$$\implies \forall \, \varepsilon \, \exists \, N \, \forall \, n > N \quad \varepsilon > \sup S,$$

czyli ciag jest zbiezny w metryce supremum.

Zad 8. Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Pokaz, ze dla kazdego $A, B \subseteq X$ zachodza rownosci i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaz, ze nie musza zachodzic inkluzje odwrotne):

$\overline{A} = (\text{Int}(A^c))^c$

$\overline{A}$ to najmniejszy zbior domkniety, taki, ze $A \subseteq \overline{A}$.

1. Jesli A jest zbiorem dokmnietym, wowczas A^c jest zbiorem otwartym, wiec $\text{Int}(A^c) = A^c$. W takim razie

$$\text{Int}(A^c)^c = (A^c)^c = A$$

i poniewaz A jest zbiorem domknietym, otrzymujemy

$$\text{Int}(A^c)^c = A = \overline{A}$$

2. Jesli A jest zbiorem otwartym, wowczas A^c jest zbiorem domknietym.

Z definicji wiemy, ze $\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c$ i jest zbiorem otwartym, wiec $\mathtt{Int}(A^c)^c$ jest zbiorem domknietym. Co wiecej,

$$\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c \ \wedge \ A^c \cap A = \emptyset \implies \mathtt{Int}(A^c) \cap A = \emptyset,$$

wiec $A \cap \mathtt{Int}(A^c)^c \neq \emptyset$, ale skoro $\mathtt{Int}(A^c) \cup \mathtt{Int}(A^c)^c = X = A^c \cup A$ i $\mathtt{Int}(A^c) \subset A^c$, to $A \subset \mathtt{Int}(A^c)^c$. No to kurwa musowo ze $\overline{A} = \mathtt{Int}(A^c)^c$ bo $A \subset \mathtt{Int}(A^c)^c$, a $\mathtt{Int}(A^c)$ jest najwiekszym zbiorem otwartym do ktorego nie nalezy A, czyli kiedy odejmiemy

$$X \setminus \mathtt{Int}(A^c)$$

to dostajemy najmniejszy zbior domkniety, do ktorego nalezy A.