SZUFLADKOWANIE I DWUMIAN

INFORMACJE WSTEPNE

kontakt mailowy
czesci:
1. odpowiedzi na pytania ile to jest, ile jest tych rzeczy - podstawy kombinatoryki
2. czy i jak cos zrobic?

ZASADA SZUFLADKOWA

ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA - jezeli n+1 przedmiotow umiescimy w n szufladach, to pewne dwa przedmioty znajduja sie w tej samej szufladzie.

Wsrod 101 liczb ze zbioru $\{1, 2, ..., 200\}$ istnieja dwie rozne a, b takie, ze $a|b$
Kazda liczbe naturalna x mozemy zapisac jako iloczyn potegi dwojki 2^k i liczby nieparzystej y:

$$x = 2^k \cdot y$$

Skoro $1 \leq x \leq 200$, to $y = 2m - 1$, gdzie $1 \leq m \leq 100$, wiec jest 100 roznych wartosci dla y. Opiszmy 100 szufladek kolejnymi wartosciami y. W takim wypadku wrzucajac 101 liczb do tych szufladek, co najmniej dwie beda w tej samej szufladce:

$$x_1 \neq x_2$$
$$x_1 = 2^{k_1} y \quad x_2 = 2^{k_2} y.$$

Wowczas wieksza liczba jest podzielna przez liczbe mniejsza.

Dla kazdego ciagu $a_1, a_2, ..., a_n$ liczb calkowitych istnieje blok $a_i + a_{i+1} + ... + a_j$ podzielny przez n.
Jest n blokow zaczynajacych sie od pierwszego elementu. Pierwsza mozliwoscia jest to, ze suma ktoregos z nich jest podzielna przez n.
Jesli zadna z nich nie dzieli sie przez n, to kazda daje jakas reszte z dzielenia przez n i takich reszt roznych od 0 jest $n - 1$, wiec na pewno dwie z tych sum beda dawaly taka sama reszte z dzielenia przez n, a wiec ich roznica bedzie podzielna przez n.

Jesli $n(r - 1) + 1$ przedmiotow umiescimy w n szufladach, to pewna szuflada zawiera $\geq r$ przedmiotow.

Dowod przez indukcje w rozwiazaniach listy 1.

TWIERDZENIE ERDÖS-SZEKERES - kazdy ciag $a_1, ..., a_{n^2+1}$ roznych liczb rzeczywistych zawiera podciag monotoniczny dlugosci n+1

Przypuscmy, ze nie istnieje w tym ciagu podciag rosnacy dlugosci $n + 1$. Chcemy udowodnic, ze wowczas istnieje podciag malejacy dlugosci $n+1$. Caly pomysl dowodu opiera sie na wprowadzeniu nowego paramteru, czyli m_k - maksymalna dlugosc podciagu rosnacego od wyrazu a_k.
Poniewaz zalozylismy, ze nie istnieje ciag rosnacy o dlugosci $n + 1$, to wszyskie $m_k \leq n$. Gdyby kazda z tych wartosci powtarzala sie co najwyzej n razy, to mielibysmy co najwyzej n^2 wartosci m_k, a nie $n^2 + 1$. Czyli dla jednego $m_k = m$ mamy $n + 1$ liczb, od ktorych mozemy utworzyc ciag rosnacy tej samej dlugosci, w dodatku kazda z tych liczb jest mniejsza od poprzedniej. Gdyby ktorakolwiek nastepna byla wieksza od poprzedniej, to moglibysmy od poprzedniej utworzyc ciag rosnacy o dlugosci $m + 1$. W takim razie wybierajac te wszystkie $n + 1$ liczb, od ktorych mozemy utowrzyc ciag rosnacy o co najwyzej dlugosci m, dostaniemy ciag malejacy o dlugosci $n + 1$.

PODSTAWOWE ZASADY ZLICZANIA

ADDYTYWNOSC:
$$A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$$

MULTYPLIKATYWNOSC:
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

KOMPLEMENTARNOSC:
dla $A \subseteq X$ zachodzi wzor $|A| = |X| - |X \setminus A|$

jesli $|A| = n$, to $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, bo kazdy element A jest lub go nie ma w danym podzbiorze

PERMUTACJA KOLOWA - na ile sposobow mozna usadzic grupe osob przy kolowym stole (obroty to jest to samo)

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

WARIACJA - jezeli $|A| = n$, to istnieje

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

k-wyrazowych ciagow roznych wyrazow tego zbioru.

SYMBOL NEWTONA - liczba k-elementowych podzbiorow zbioru n-elementowego.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

na tyle sposobow mozemy wybrac k elementow na ile mozemy zostawic n-k elementow poza zbiorem.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Po prawej stronie wyliczamy $k+1$ elementowe podzbiory zbioru $n+1$ elementowego.
Po lewej wyrozniamy ostatni element. Liczymy zbiory $k+1$ elementowe w zaleznosci od tego, czy zawieraja czy nie element wyrozniony. Pierwszy element, $\binom{n}{k}$, liczy zbioru zawierajace ten element (wybiera z pozostalych n elementow i dokleja ten wyrozniony), a drugi element, $\binom{n}{k+1}$, zlicza $k+1$ elementowe zbiory niezawierajace wyroznionego elementu.

WZOR DWUMIANOWY NEWTONA:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}^{n}$$

jak wymnozymy wszystko przez wszystko, to dostajemy sume wyrazow postaci $a^k b^{n-k}$, bo z kazdego nawasu mozemy wybrac a albo b, przy czym z kazdego nawiasu wybieramy tylko jedno.
Ile razy pojawi sie konkretny wyraz? Tyle razy, na ile mozemy sobie wybrac nawiasy gdzie wybierzemy tylko a, czyli $\binom{n}{k}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Prawa strona zlicza ilosc sposob na jakie mozna wybrac n elementowe podzbiory zbioru $2n$ elementowego. Po lewej wybiramy najpierw k elementow z pierwszej polowki tego zbioru, a potem dokladamy $n-k$ elementami z drugiej czesci tego zbioru.

NA $\mathbb{R}$ ZACHODZI

$$x \in \mathbb{R} \ \land \ k \in \mathbb{N}_+ : \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$$

Dla $|x| < 1$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (a+x)^\alpha$$