Wprowadzenie do teorii zbiorów

Lista zadań nr 1.

1. Sprawdź, że $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Rightarrow a = c \wedge b = d$.

2. Udowodnij, że $\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

3. Niech A będzie zbiorem niepustym. Które z poniższych twierdzeń są prawdziwe?
(a) Jeśli $A = \bigcup A$, to $\emptyset \in A$.
(b) Jeśli $\emptyset \in A$, to $A = \bigcup A$.
(c) Jeśli $\bigcup A = \bigcap A$, to $A = \{x\}$ dla pewnego x.

4. Która z poniższych równości zachodzi dla dowolnego zbioru A?
(a) $\bigcap\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$.
(b) $\bigcup\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcup \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$.

4,5. Sprawdzić, że para nieuporządkowana, suma i zbiór potęgowy są zdefiniowane jednoznacznie.

5. Udowodnij, że aksjomat pary wynika z pozostałych aksjomatów teorii $\mathbf{ZF}_0$.

6. Udowodnij, że aksjomat wyróżniania wynika z pozostałych aksjomatów teorii $\mathbf{ZF}_0$.

7. Udowodnij (w teorii **ZF**), że $\neg(\exists x_1, \ldots, x_n)\, x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$.

8. Udowodnij (w teorii **ZF**), że

$$\neg(\exists f)(\mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \omega \wedge (\forall n \in \omega)\, f(n+1) \in f(n)).$$

9. Udowodnij, że aksjomat wyboru jest równoważny zdaniu

$$(\forall x)(((\forall y \in x) y \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists f)(\mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge (\forall y \in x) f(y) \in y)).$$

10. Udowodnij, że aksjomat wyboru jest równoważny faktowi, że jeśli $\langle X_i : i \in I\rangle$ jest niepustą rodziną zbiorów niepustych, to iloczyn kartezjański $\prod_{i\in I} X_i$ też jest niepusty. Sformułuj powyższy fakt bez użycia pojęcia rodziny indeksowanej.

11. Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów niepustych $\langle A_i : i \in I\rangle$, taką że $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Czy do niepustości produktu $\prod_{i\in I} A_i$ potrzebujemy aksjomatu wyboru?

Zadania dodatkowe

12. Niech $\langle X, \leq\rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Czy jeśli każdy łańcuch i każdy antyłańcuch w X jest skończony, to X jest skończony?

13. Dla dowolnego zbioru X i dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$, czy prawdą jest że:
(a) jeżeli istnieje taka rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, że $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathcal{A}\}$, to R jest relacją równoważności na X;
(b) jeżeli R jest relacją równoważności na X, to istnieje taka rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, że $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathcal{A}\}$.