2. Udowodnij, ze $\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

$\supseteq$

Wezmy dowolny $x \in \mathcal{A}$. Z aksjomatu zbioru potegowego wiemy, ze

$$(\exists\, y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}))\ x \in y \subseteq \mathcal{A}$$

Dalej, na mocy aksjomatu sumy wiemy, ze

$$x \in \bigcup\{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

czyli

$$x \in \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

$\subseteq$

Wezmy dowolny $x \in \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Z aksojatu sumy wiemy, ze

$$(\exists\, y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}))\ x \in y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}),$$

ale z aksjomatu zbioru potegowego wiemy, ze

$$y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff y \subseteq \mathcal{A}.$$

W takim razie

$$x \in y \subseteq \mathcal{A} \implies x \in \mathcal{A}$$

i smiga

3. Niech A bedzie zbiorem niepustym. Ktore z ponizszych twierdzen sa prawdziwe?

(a) Jesli $A = \bigcup A$, to $\emptyset \in A$

Nie, poniewaz

$$A = \bigcup A$$

na przyklad jesli

$$A = \emptyset.$$

A z aksjomatu ekstensjonalnosci wiemy, ze $\emptyset \notin \emptyset$.

(b) Jesli $\emptyset \in A$, to $A = \bigcup A$

Nie, wezmy na przyklad

$$A = \{\emptyset, \{7\}\}.$$

Wtedy

$$\bigcup A = \{7\} \supseteq \emptyset,$$

ale

$$\emptyset \notin \{7\} = \bigcup A.$$

(c) Jesli $\bigcup A = \bigcap A$, to $A = \{x\}$ dla pewnego x. TAK:

$$x \in \bigcup A \iff (\exists\, y \subseteq A)\ x \in y$$
$$x \in \bigcap A \iff (\forall\, y \subseteq A)\ x \in y$$
$$U = \bigcup A = \bigcap A$$
$$((x \in U \iff (\exists\, y \subseteq A)\ x \in y) \iff (x \in U \iff (\forall\, y \subseteq A)\ x \in A)) \implies (\exists\, x)\ A = \{x\}$$

4. Ktora z ponizszych rownosci zachodzi dla dowolnego zbioru A?

(a) $\bigcap\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

NIE:

$$A = \{1\}$$
$$\bigcap\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \bigcap\{\{1\}, \emptyset\} = \emptyset$$
$$\{\bigcap\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap\{\{1\}, \emptyset\}, \bigcap\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$$
$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

(b) $\bigcup\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcup\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

TAK:

Pokazemy, ze $L = \mathcal{P}(A) = P$

$L = \mathcal{P}(A)$

Z aksjomatu sumy wiemy, ze

$$\begin{aligned} x \in \bigcup\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} &\iff ((\exists\, t \in \{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\})\, x \in t) \iff \\ &\iff ((\exists\, t \subseteq A)\, x \in t) \iff \\ &\iff x \in \mathcal{P}(A) \end{aligned}$$

$P = \mathcal{P}(A)$

$$\begin{aligned} x \in \{\bigcup\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} &\iff x \in \{y : ((\exists\, z \subseteq \mathcal{P}(B))\, y \in z) \land B \subseteq A\} \iff \\ &\iff x \in \{y : y \in \mathcal{P}(A)\} \iff \\ &\iff x \in \mathcal{P}(A) \end{aligned}$$

i smiga

4.5 Sprawdzic, ze para nieuporzadkowana, suma i zbior potegowy sa zdefiniowane jednoznacznie.

para nieuporzadkowana jest zdefiniowana jednoznacznie

Zalozmy niewprost, ze istnieja pary

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

$$\begin{aligned} &((x \in \{a, b\} \iff (x = a \lor x = b)) \iff (x \in \{c, d\} \iff (x = c \lor x = d))) \iff \\ &\iff ((x = a \lor x = b) \iff x = c \lor x = d) \iff ((a = c \land b = d) \lor (a = d \land b = c)) \end{aligned}$$

i cyraneczka komutuje

i smiga

5. Udowodnij, ze aksjomat pary wynika z pozostalych aksjomatow teorii ZF_0.

Z aksjomatu zbioru pustego i zbioru potegowego mozemy skonstruowac zbior

$$P = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

W wersji uproszczonej chcemy napisac formule $\varphi(t, z, a, b)$, ktora

$$(\forall\, t)(\exists\, !y)\ \varphi(t, z, a, b)$$

$$(t = \emptyset \wedge z = a) \vee (t = \{\emptyset\} \wedge z = b) \vee (t \neq \emptyset \wedge t \neq \{\emptyset\} \wedge x = \emptyset)$$

Wersja krotsza

$$(t = \emptyset \wedge z = a) \vee (t \neq \emptyset \wedge z = b)$$

Czyli z aksjomatu zastepowania nasza funkcja produkuje zbior $y = \{a, b\}$

$$(\forall\ a)(\forall\ b)(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z)(z \in y \iff (\exists\ t \in x)\ \varphi(t, z, a, b))$$

6. Udowodnij, ze aksjomat wyrozniania wynika z pozostalych aksjomatow teorii ZF_0

Wezmy dowolny zbior x i dowolna formule $\varphi(t, \bar{a})$.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Nie istnieje $y \in x$ takie, ze $\varphi(y, \bar{a}) == \text{true}$. Wtedy po przefiltrowaniu mam $\emptyset$.
2. Istnieje $y \in x$ takie, ze $\varphi(y, \bar{z}) == \text{true}$. Wowczas konstrukcja mojego przefiltrowanego zbioru uzywajaca aksjomat zastepowania i formule $\sigma(t, z, \bar{a})$

$$(t = z\ \wedge\ \varphi(t, \bar{a})) \vee (y = z\ \wedge\ \neg\ \varphi(t, \bar{a}))$$

7. Udowodnij (w teori ZF), ze $\neg\ (\exists\ x_1, ..., x_n)\ x_1 \in x_2 \in ... \in x_n \in x_1$

Poniewaz jestesmy ekstra upierdliwi, to konstruujemy sobie zbiorek $s = \{x_1, ..., x_n\}$. Wezmy pare

$$\{x_1, x_1\}$$

i jego sume $\bigcup\{x_1, x_1\}$. Dalej $\bigcup\{\{x_1, x_1\}, \{x_2, x_2\}\}$ i znowu sume tego. Analogicznie dalej.

Z aksjomatu regularnosci wiemy, ze istnieje takie k, ze x_k jest elementem $\in$-minimalnym utworzonego wyzej zbioru. W takim razie

$$(\forall\ y \in s)\ y \notin x_k.$$

Rozwazmy dwa przypadki:

1. $k = 1$

Wtedy $x_n \notin x_1$ i mamy sprzecznosc.

2. $k \neq 1$

Wtedy $x_{k-1} \notin x_k$ i mamy sprzecznosc.

8. Udowodnij (w teorii ZF), ze $\neg(\exists\ f)(\text{fnc}(f)\ \wedge\ \text{dom}(f) = \omega\ \wedge\ (\forall\ n \in \omega) f(n+1) \in f(n))$

Zalozmy, ze f jest funckja, dla ktorej ta formula nie smiga.

$\triangle$ sa affiniczne <3

Zbiorek $p_{ysio} = \{f(0), f(1), ...\}$ tworzymy zastepujac przy pomocy aksjomatu zastepowania elementy dziedziny $\text{dom}(f)$ przez odpowiadajace im elementy obrazu, gdzie formula bylaby tak naprawde relacja rownowazna naszej funkcyji ($\psi(t, z, f)$)

$$z = f(t)$$

W takim razie istnieje k takie, ze $f(k)$ jest elementem $\in$-minimalnym zbioru p_{ysio}. Ale w takim razie nie moze zajsc $f(k+1) \in f(k)$. Wiec mamy sprzecznosc <3

9. Udowodnij, ze aksjomat wyboru jest rownowazny zdaniu $(\forall\ x)(((\forall\ y \in x)\ y \neq \emptyset) \implies (\exists\ f)\ \mathrm{fnc}(f)\ \wedge\ \mathrm{dom}(f) = x\ \wedge\ (\forall\ y \in x) f(y) \in y)$

AKSJOMAT $\iff$ FUNCKJA

$\Longleftarrow$

Czyli potrzebuje skonstruowac majac funckje zbior wartosci tejze funkcji. Robie to zastepujac elementy dziedziny przez ich wartosci na mocy aksjomatu zastepowania. Wystarczy pokazac, ze to rzeczywiscie jest selektor.

$$(\forall\ y \in x)(\exists\ !t)\ t \in s \cap y$$

Wezmy dowolne $y \in x$. Z definicji funkcji wiemy, ze $f(y) \in y$. W takim razie $f(y) \cap y = f(y)$.

Dlaczego jest to jedyne? Jesli istnialyby dwa t_1, t_2 bedace w selektorze i w y, to wowczas $f^{-1}[t_1] \neq f^{-1}[t_2]$, bo f jest funkcja. Ale poniewaz x jest rozlaczna rodzina zbiorow, to nie moze byc, ze sie pokryja dwa zbiory zeby oba mialy t_1 i t_2. sprzecznosc.

$\Longrightarrow$

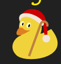
Na mocy aksjomatu wyboru biere selektor s z rodziny x. Teraz chce zastapic jego elementy parami uporzadkowanymi gdzie poprzednik to zbior do ktorego dany element nalezy, a nastepnik to on sam. Piszemy formuly $\theta(t, z, x, s)$

$$(t \notin s\ \wedge\ z = \emptyset) \vee ((\exists\ y \in x)\ t \in y\ \wedge\ z = \langle t, y\rangle)$$

alternatywnie, biore $x \times s$ i filtruje na mocy aksjomatu wyrozniania przy pomocy formuly $\rho(t, x, s)$

$$s \cap \bigcup x \in x \cap t$$

i smiga



10. Udowodnij, ze aksjomat wyboru jest rownowazny faktowi, ze jesli $\langle X_i\ :\ i \in I\rangle$ jest niepusta rodzina zbiorow niepustych, to iloczyn kartezjanski $\prod_{i \in I} X_i$ jest niepusty. Sformuluj powyzszy fakt bez uzycia pojecia rodziny indeksowanej.

AKSJOMAT WYBORU $\iff$ NIEPUSTE

$\Longleftarrow$

Wezmy dowolna rozlaczna rodzine zbiorow niepustych $\mathcal{X} = \{X_i\ :\ i \in I\}$

Wiemy, ze to jest niepusty zbior funkcji z indeksow w sumy zbiorow X_i, wiec moge wziac z niego pewna funkcje, m. Do mojego selektora chce wrzucic po jednym elemencie z kazdego elementu mojej rodziny, wiec zrobie to wrzucajac do niego wartosci m dla poszczegolnych $i \in I$, bo mam aksjomat zastepowania (zastepuje m przez $m(i)$ - funkcje jej obrazem).

Pokazemy, ze jest to faktycznie selektor.

Wezmy dowolny element $o \in \mathcal{X}$. Chce pokazac, ze $o \cap m(i)$ ma tylko jeden element. Istnieje co najmniej jeden, bo istnieje $i \in I$ takie, ze

$$m(i) \in o.$$

Z drugiej strony, jesli istnialoby wiecej niz jeden, to istnialyby $i, j \in I$ takie, ze $i \neq j$ oraz

$$m(i) \in o\ m(j) \in o,$$

to wowczas elementy $\mathcal{X}$ nie bylyby rozlaczne, tzn $X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$

Mam podana niepusta indeksowana rodzine niepustych zbiorow.

Z 9 mamy, ze aksjomat wyboru jest ronowazny funkcji wyboru, wiec polecmy z funkcja wyboru.

Wiem, ze istnieje funkcja wyboru z $\mathcal{X}$. Nalezy do iloczynu kartezjanskiego, tj jej domena jest I, a zbiorem wartosci jest suma $\mathcal{X}$. Czyli moge zrobic druga funkcje, ktora dla $i \in I$ daje mi konkretnie element z X_i. Jest to element zbioru kartezjanskiego. Korzystam z aksjomatu zastepowania.

11. Rozwazmy indeksowana rodzine zbiorow niepustych $\langle A_i : i \in I\rangle$, taka, ze $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Czy do niepustosci $\prod_{i\in I} A_i$ potrzebujemy aksjomatu wyboru?