ŻABA

rozwiązanie robocze

Julka Walczuk i W. Jakimowicz

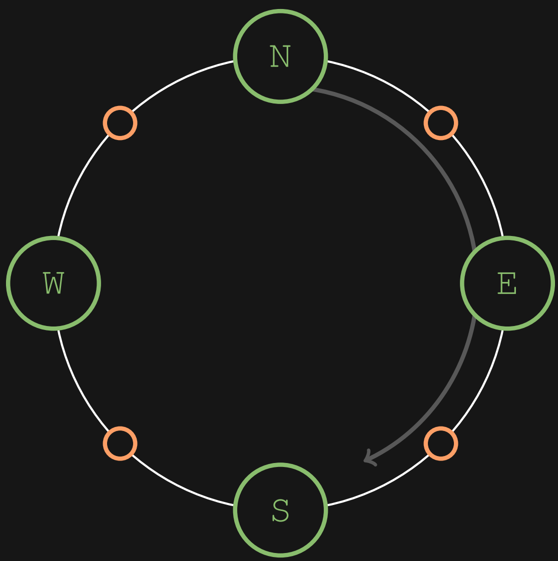
Rozważamy, na ile sposobów żaba może przeskoczyć na przeciwny wierzchołek ośmiokąta foremnego w $2n$ krokach.

Najpierw, pogrupujemy kroki w pary - wtedy żaba będzie ruszać się między 4 wierzchołkami, nazwijmy je: N, E, S, W. Niech N będzie naszym werzchołkiem startowym, a S – końcowym.

Możliwe ruchy żaby to

$$(1,1) \quad (-1,-1) \quad (1,-1) \quad (-1,1),$$

gdzie -1 oznacza skok w prawo, a 1 – w lewo (ale z kierunkami czasami są kontrowersje, więc zostają liczby).



Oznaczmy $S(n)$ jako liczbę sposobów na jakie do S możemy dojść z wierzchołka N w $2n$ krokach, $E(n)$ - liczbę sposobów żeby dojść do E i analogicznie dla $W(n)$ oraz $N(n)$.

ŻABA BEZ KÓŁEK ***(dla nas łatwiejsza)***

Szukamy wzoru na $S(n)$. Do wierzchołka S możemy dojść dodając do dojścia do $E(n-1)$ skok $(1,1)$ lub do dojścia $W(n-1)$ skok $(-1,-1)$:

$$S(n) = E(n-1) + W(n-1),$$

ale zauważamy, że te sposoby są symetryczne, więc do celów obliczeniowych możemy zapisać:

$$S(n) = 2 \cdot E(n-1). \quad (\;)$$

Znajdźmy teraz wzór na $E(n)$. Do wierzchołka E możemy doskoczyć z wierzchołka N lub z wierzchołka E na dwa sposoby (dwa skoki 'zerowe'):

$$E(n) = N(n-1) + 2 \cdot E(n-1). \quad \left(\; \right)$$

Do wierzchołka N możemy dojść skacząc z wierzchołków W oraz E lub wykonując zerową parę skoków z N:

$$N(n) = E(n-1) + W(n-1) + 2 \cdot N(n-1)$$

$$N(n) = 2 \cdot E(n-1) + 2 \cdot N(n-1) \qquad (❀)$$

Podstawiamy (❀) do (🦊):

$$E(n) = 2(E(n-2) + N(n-2)) + 2 \cdot E(n-1) \qquad (🐏)$$

I teraz z (🦊) mamy

$$N(n-1) = E(n) - 2 \cdot E(n-1)$$

i wstawiamy to do (🐏)

$$E(n) = 2(E(n-2) + E(n-1) - 2 \cdot E(n-2)) + 2 \cdot E(n-1)$$

$$E(n) = 4 \cdot E(n-1) - 2 \cdot E(n-2)$$

Rozwiązujemy tę rekurencję tak jak na wykładzie:

$$\begin{aligned} q^n &= 4 \cdot q^{n-1} - 2 \cdot q^{n-2} \\ q^2 &= 4 \cdot q - 2 \\ 2 &= q^2 - 4 \cdot q + 4 \\ 2 &= (q-2)^2 \\ q &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Teraz podstawiamy do wzorku z wykładu:

$$\begin{cases} E(0) = c_1 + c_2 \\ E(1) = c_1(2+\sqrt{2}) + c_2(2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 1 = c_1(2+\sqrt{2}) - c_1(2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

W takim razie

$$2 \cdot E(n) = \sqrt{2}((2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n)$$

więc podstawiając do (☕)

$$S(n) = 2 \cdot E(n)$$

$$S(n) = \sqrt{2}((2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n)$$

i smiga

ŻABA Z KÓŁKAMI *(za trudne dla nas)*

Pomysł jest podobny do rozwiązania wyżej, z tym, że możemy przejść dalej z S, więc wzorki dla poszczególnych wierzchołków to:

$$\begin{aligned} N(n) &= 2 \cdot N(n-1) + 2 \cdot E(n-1) \qquad (\heartsuit) \\ E(n) = W(n) &= 2 \cdot E(n-1) + N(n-1) + S(n-1) \qquad (\diamondsuit) \\ S(n) &= 2 \cdot S(n-1) + 2 \cdot E(n-1) \qquad (\clubsuit) \end{aligned}$$

Lemat D: $N(n) - S(n) = 2^n$

Wykażemy, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że różnica między $S(n)$ i $N(n)$ jest zawsze n-tą potęgą liczby 2.

Dla $n = 1$

$$N(1) = 2$$
$$S(1) = 0$$
$$N(1) - S(1) = 2 - 0 = 2 = 2^1$$

Zakładamy, że dla pewnego $n \geq 1$ zachodzi:

$$N(n) - S(n) = 2^n.$$

Pokażemy, że wówczas

$$N(n+1) - S(n+1) = 2^{n+1}$$

$$L = N(n+1) - S(n+1) = \underbrace{2 \cdot N(n) + 2 \cdot E(n)}_{(\heartsuit)} - \underbrace{2 \cdot S(n) - 2 \cdot E(n)}_{(\clubsuit)} =$$
$$= 2 \cdot N(n) + 2 \cdot S(n) = 2(N(n) + S(n)) \overset{ind}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = P$$

i smiga

Przekształćmy teraz wzór $(\diamondsuit)$

$$E(n) = 2 \cdot E(n-1) + N(n-1) + S(n-1) = \underbrace{N(n) - 2 \cdot N(n-1)}_{(\heartsuit)} + N(n-1) + S(n-1) =$$
$$= N(n) - N(n-1) + S(n-1) \overset{D}{=} 2^n + S(n) - 2^{n-1} - S(n-1) + S(n-1) =$$
$$= S(n) + 2^{n-1}$$

Wstawiamy teraz do $(\clubsuit)$

$$S(n) = 2 \cdot S(n-1) + 2 \cdot (S(n-1) + 2^{n-2}) = 4 \cdot S(n-1) + 2^{n-1}$$

Trywialne rozwiązanie rekurencji zostawiamy dociekliwemu czytelnikowi.

i smiga