Lista 3, Analiza Matematyczna II

1. Funkcja całkowalna w sensie Riemanna f różni się od funkcji g w jednym punkcie z przedziału $[a, b]$. Pokazać, że g jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

2. Funkcja całkowalna w sensie Riemanna f różni się od funkcji g w skończeniu wielu punktach przedziału $[a, b]$. Pokazać, że g jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Można skorzystać z poprzedniego zadania.

3. Dla pewnego podziału P przedziału $[a, b]$ spełniony jest warunek $L(P, f) = U(P, f)$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że f jest całkowalna w sensie Riemanna.

4. Funkcja f jest całkowalna osobno na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Pokazać, że f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$.

5. Rozstrzygnij, czy dana funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna. Jeśli jest, to oblicz jej całkę po zadanym przedziale.
   a) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1, \\ -x^2 & 1 < x \le 2. \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \le x \le \pi, \\ \cos(x) & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$
   c) $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 0,\ x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & 0 < x \le 1,\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & -1 \le x \le 1,\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

6. Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Używając definicji całki Riemanna uzasadnić, że dla ustalonego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $f_c(x) = f(x - c)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a + c, b + c]$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c+a}^{c+b} f_c(x)\,dx$.

7. Niech f będzie całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, niech $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Udowodnij, że $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b - a)$.

8. Udowodnij, że
   a) jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,
   b) jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

9. Udowodnij, że jeśli f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna okresową o okresie p, to mamy $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

10. Oblicz całkę

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(x^3)^2 \cos(x^3)\,dx.$$

11. Obliczyć pochodne następujących funkcji
   a) $f(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)\,dt$,
   b) $f(x) = \int_{-\sin(x)}^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$,
   c) $f(x) = \int_0^x [t]\,dt$,
   d) $f(x) = \int_{-x^2}^{x^4} \{t\}\,dt$.

i2. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną. Udowodnić, że

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(y)\,dy = f(0).$$

i3. Obliczyć

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\int_0^t (\arcsin(y))^2\,dy.$$

14. Obliczyć całki stosując całkowanie przez podstawienie. Dla ułatwienia, podstawienie jest podane:

a) $\int_0^1 2x(x^2+2)^{2022}\,dx,\ u = x^2+2,$

b) $\int_0^1 t^9\sin(t^{10})\,dt,\ u = t^{10},$

c) $\int_2^3 x\sqrt{2x+1}\,dx,\ u = 2x+1,$

d) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}} x\sqrt{x^2-1}\,dx,\ u = x^2-1.$