zrobione: 4, 1, 2, 5, 8, 10
zglosili sie do: 11

ZAD 3. Ktore z funckji sa calkowalne w sensie Riemanna na przedizale $[0,1]$?

a. $f(x) = x + [2x]$

Podzielmy $[0,1]$ w miesjcach $\frac{1}{2k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Otrzymamy przedzialy $[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-2}]$. Na pierwszym takim przedziale wartosc minimalna to 0, natomiast wartosc

b. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Nie wazne jak maly przedzial liczb rzeczywistych wezmiemy, zawsze znajdziemy tam liczbe niewymierna. Czyli suma dolna zawsze bedzie wynosic 0:

$$L(\mathcal{P}, f) = 0$$

bez wzgledu na podzial $\mathcal{P}$.
Tak samo, na kazdym przedziale liczb rzeczywistych znajdzie sie liczba wymierna, wiec suma gorna wynosi:

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1})$$

Funkcja jest calkowalna w sensie Riemanna tylko kiedy $L(\mathcal{P}, f) = U(\mathcal{P}, f)$, co w tym przypadku nie jest spelnione.
NIESKONCZONE

c. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 1$

Podzielmy przedzial $[0,1]$ w punktach $\frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$ Miedzy kazdymi dwoma punktami przedzialu znajduje sie pelen okres funckji $\sin x$, czyli $f(x)$ przyjmuje wszystkie wartosci od -1 do 1. W takim razie, dolna suma bedzie wynosic -1, natomiast suma gorna to 1.

Zad 9. Co jest wieksze: $\int\limits_0^\pi e^{\sin^2 x} dx$ czy $\frac{3\pi}{2}$?

Zauwazmy, ze

$$\sin^2 x + 1 \leq e^{\sin^2 x}.$$

W takim razie

$$\int\limits_0^\pi (\sin^2 x + 1)\, dx \leq \int\limits_0^\pi e^{\sin^2 x} dx.$$

Zajmijmy sie lewa strona rownania. Ze wzoru na $\cos 2x$ mozemy otrzymac:

$$\cos 2x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Podstawmy to do calki

$$\int\limits_0^\pi (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) = \int\limits_0^\pi \frac{3}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2x\, dx = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{3\pi}{2}.$$

W takim razie calka $\int\limits_0^\pi e^{\sin^2 x} dx$ jest ograniczona od dolu przez wartosc wieksza od $\frac{3\pi}{2}$.