

Zadanie 0. Niektóre zera na poprzedniej liście oznaczają wektor zerowy. Znajdź je wszystkie i dorysuj nad nimi strzałki.

Zadanie 1. Wykaż, że w dowolnym ciele zachodzą tożsamości: $(-1)x = -x$, $-(-x) = x$, $(-1)(-1) = 1$, $(-x)y = -xy$, $(x-y)z = xz - yz$, $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$ (dla $z \neq 0$), $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $\frac{z}{x} + \frac{t}{y} = \frac{zy+tx}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $x - (y-z) = (x-y) - z$.

Zadanie 2. Sprawdź starannie, że przestrzeń \mathbf{R}^A wszystkich funkcji z A w \mathbf{R} jest (z działaniami zadanymi przez $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $(\alpha f)(a) = \alpha \cdot f(a)$) przestrzenią liniową.

Zadanie 3. Pokaż że jeżeli $W_1, W_2 \leq V$, to $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Zadanie 4. Podaj przykład trójki $V_1, V_2 < W$, takiej że ani $V_1 \cup V_2$, ani $V_1 \setminus V_2$ nie jest podprzestrzenią W .

Zadanie 5. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:

- $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2f(x) = 0)\}$;
- przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^\infty \mid a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) \mid (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;
- \mathbf{R}^3 – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;
- przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

Zadanie 6. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\text{Lin}(A \cup B) = \text{Lin}(A) + \text{Lin}(B)$, $\text{Lin}(A \cap B) = \text{Lin}(A) \cap \text{Lin}(B)$, $A \subseteq B \Rightarrow \text{Lin}(A) \subseteq \text{Lin}(B)$, $\text{Lin}(\text{Lin}(A)) = \text{Lin}(A)$.

Zadanie 7. Uzasadnij, że jeśli v_1, \dots, v_n są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to v_1, \dots, v_n, v_{n+1} są lnz. Czy jest też odwrotnie?

Zadanie 8. Uzasadnij że jeżeli $A \subseteq V$ jest dowolnym zbiorem i $v \in \text{Lin}(A) \setminus A$, to $A \cup \{v\}$ jest liniowo zależny. Czy zachodzi odwrotna implikacja?

Zadanie 9. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(-1) = 0\}$.

Zadanie 10. W zbiorze $A = \{(0, 0, 0, 0)^\top, (1, 0, 1, 0)^\top, (1, 2, 1, 3)^\top, (2, 2, 2, 3)^\top, (0, 0, 0, 1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\text{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w \mathbf{R}^4).

Zadanie 11. Znajdź bazę podprzestrzeni \mathbf{R}^5 zadanej układem równań:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$
 (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)

Zadanie 12. W każdej przestrzeni liniowej, której baza została wskazana na wykładzie, wskaż inną bazę (o ile się da). Czy istnieje przestrzeń liniowa (nad \mathbf{R}), która ma jedyną bazę?

Zadanie 13. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V , to również $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest bazą V .

Zadanie 14. Uzasadnij że jeżeli $(K, +, \cdot, 0, 1)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała, poza tym że $0 = 1$, to K ma dokładnie jeden element. Następnie zastanów się, czy naprawdę potrzeba do tego wszystkich aksjomatów ciała.

Algebra liniowa 2 R, Lista 1

Zadanie 15. Uzasadnij, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych, który ma przynajmniej jeden niezerowy współczynnik, nie zadaje funkcji zerowej.

Zadanie 16. Dla $V = \mathbf{R}^2$ stwierz, jak duży (jakiej mocy) jest zbiór P , o którym mowa w dowodzie istnienia bazy. Jak długi może być łańcuch w (P, \subseteq) w tym przypadku? Uzasadnij, że \mathbf{R}^2 ma bazę, w możliwie łatwy sposób.

Zadanie 17. Niech $V = \mathbf{R}_3[X]$, $A = \{1 + X - X^2 - X^3, 1 + 2X^2 - 3X^3, X - 2X^2 + X^3\}$. Spróbuj możliwie prosto opisać $\text{Lin}(A)$: podaj warunek, pozwalający łatwo stwierdzić dla danych a, b, c, d , czy wielomian $aX^3 + bX^2 + cX + d$ należy do $\text{Lin}(A)$. Przetestuj swój warunek na wielomianach $5X^3 + 4X - 8$, $X^2 + 2X - 3$.

Zadanie 18. Udowodnij, że B jest bazą przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym podzbiorem V liniowo generującym V . [Bardziej symbolicznie, udowodnij że: B jest bazą $V \iff (B \subseteq V) \wedge ((\forall C \subseteq V)((\text{Lin}(C) = V \wedge C \subseteq B) \Rightarrow (C = B)))$.]