BEZY I WYMIARY

BAZA przestrzeni liniowej V nazywamy
taki podzbior $B \subseteq V$, ktory:

1. B jest lnz i $\mathrm{Lin}(B) = V$

Czyli B rozpina cala przestrzen V.

2. $\forall\, v \in V \setminus B \quad B \cup \{v\}$ jest lz

Wynika z poprzedniego zalozenia oraz tego, ze $B \cup \{v\}$ jest liniowo zalezny jesli $v \in V \setminus B$. CWICZENIA

3. B jest max lnz

Jesli B daloby sie powiekszyc do jakiegos liniowo niezaleznego zbioru istotnie wiekszego A, to moglibysmy wziac jeden element $a \in A \setminus B$ i wowczas $B \cup \{a\}$ jest liniowo zalezny, wiec mamy sprzecznosc.

4. $\forall\, v \in V \quad v$ zapisuje sie jednoznaczie jako $\sum_{b \in B} \alpha_b b$

Wezmy $v \in V$:

jesli $v \in B$ to oznacza, ze sam siebie zapisuje,

jesli $v \notin B$, to wowczas z dwoch poprzednich twierdzen wiemy, ze $B \cup \{v\}$ jest liniowo zalezne. To znaczy, ze *pewna nietrywialna kombinacja liniowa wektorow z $B \cup \{v\}$ jest zerowa*:

$$\alpha \cdot v + \sum_{b \in B} \alpha_b b = 0.$$

Gdyby $\alpha = 0$, to wowczas wszystkie $\alpha_b = 0$. Czyli kombinacja liniowa wektorow z $B \cup \{v\}$ jest 0 tylko wtedy, gdy wszystkie wspolczynniki sa zerowe, a to oznaczaloby, ze $B \cup \{v\}$ jest lnz - *sprzecznosc*.
W takim razie $\alpha \neq 0$, wiec:

$$\alpha \cdot v = -\sum_{b \in B} \alpha_b b$$

$$v = \sum_{b \in B} (-\alpha^{-1} \alpha_b) b.$$

Pokazalismy, ze v mozna zapisac jako kombinacje liniowa wektorow z B. Zalozmy, ze istnieja dwie takie kombinacje liniowe:

$$v = \sum_{b \in B} \alpha_b b$$

$$v = \sum_{b \in B} \beta_b b.$$

Odejmujac obie strony rownania dostajemy:

$$\sum_{b \in B} (\alpha_b - \beta_b) b = 0.$$

Skoro B jest lnz, to wszystkie $\alpha_b - \beta_b = 0$, a wiec $\alpha_b = \beta_b$.

Pozostaje nam udowodnic implikacje $4. \implies 1.$
4. mowi, ze kazdy wektor $v \in V$ zapisuje sie jednoznacznie jako kombinacja liniowa elementow B. Z tego wynika, ze

$$\mathrm{Lin}(B) = V,$$

a skoro B jest lnz, to w szczegolnosci wektor 0 zapisuje sie jednoznacznie:

$$\sum_{b \in B} \alpha_b b = \vec{0} = \sum_{b \in B} 0 \cdot b = 0$$

Z jednoznacznosci zapisu wektorow mamy dla kazdego $\alpha_b = 0$, w takim razie B jest lnz.

PRZYKLADY:

Baza K^n jest zbior $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, takich, ze na k-tej pozycji wektor e_k ma 1, a na pozostalch 0 (czyli zbior weresorow).

Jesli A jest skonczony, to baza K^A jest zbior funkcji postaci

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a. \end{cases}$$

Ten zbior jest liniowo niezalezny, jezeli $\sum_{a \in A} \alpha_a f_a = \vec{0}$. Dla kazdego $b \in A$ mamy

$$\sum \alpha_a f_a(b) = 0,$$

bo ta funkcja zawsze daje 0 poza $f_a(a)$, wiec zbior jest liniowo niezalezny.

Wezmy $g \in K^A$. Wowczas mozemy te funckje zapisac jako

$$g = \sum_{a \in A} \underbrace{f(a)}_{\in K} \cdot f_a$$

Wtedy

$$g(b) = \sum f(a) \cdot f_a(b),$$

ktore faktycznie tyle wynosi, bo prawie wszystko sie zeruje poza tym jednym wyrazem gdzie jest 1 i tam mamy $g_a(b)$.

Jesli A jest nieskonczone, to

$$\{f_a \ : \ a \in A\},$$

jest lnz, ale nie rozpina calego zbioru. Na przyklad *funkcja stala ktora zawsze przyjmuje 1* nie moze byc zapisana jako kombinacja liniowa wektorow z $\{f_a \ : \ a \in A\}$.

W zbiorze wszystkich wielomianow o wspolczynnikach z X, $W[X]$, mamy baze $\{1, X, X^2, X^3, ...\}$.

Jesli nasze wielomiany maja co najwyzej okreslony stopien n, to wtedy baza zbiory $K_n[X]$ jest rowna $\{1, X, X^2, X^3, ..., X^n\}$

LEMAT KURATOWKIEGO-ZORNA (LKZ) - jezeli mamy zbior czesciowo uporzadkowany $(P, \leq)$ taki, ze $P \neq \emptyset$ i kazdy lancuch w P ma ograniczenie gorne, to wtedy P ma element maksymalny.

TWIERDZENIE O ISTNIENIU BAZY - kazda przestrzen liniowa ma baze.

Ustalmy dowolna przestrzen liniowa V nad cialem K. Chcemy zastosowac lemat K-Z. Niech $P = \{$liniowo niezalzezne podz iuporzadkowane przez $\leq \subseteq$. Na pewno $P \neq \emptyset$, bo $\emptyset \in P$.

Wezmy $L \leq P$, ktory jest lancuchem. Wtedy $l^* = \bigcup L = \{v \ : \ \exists\, l \in L \quad v \in l\}$ jest ograniczeniem gornym. Wystarczy sprawdzic, ze $l^8 \in P$. Wezmy dowolny uklad $v_1, ..., v_n \subset l^*$ roznych wektorow. Chcemy sprawdzic, czy jest on lnz. Kazdy $v_k \in l_k \in L$, ale poniewaz L jest lancuchem, to

$$\exists\, k_0\, \forall\, k \quad l_{k_0} \supseteq l_k$$

Wtedy $v_1, ..., v_n \in l_{k_0} \in P$, wiec jest lnz.

Z LK-Z P ma element maksymalny, czyli V ma baze.

Jezeli V jest pzestrzenia liniowa i mamy jej podzbiory$N \subseteq G \subseteq V$ takii, ze N jest lnz, a $\text{Lin}(G) = V$ (G rozpina przestrzen V), to wtedy istnieje baza dla V taka, ze $N \subseteq N$ i $b \subseteq G$.

Rozwazamy $P = \{A \subseteq G \ : \ N \subseteq A \ \wedge \ A$ jest lnz$\}$. $P \neq$, bo $N \in P$. Drugie zalozenie LK-Z sprawdzamy analogicznie do poprzedniego dowodu. Stad dostajemy analogicznie maksymalny liniowo niezalezny podzbior $B \subseteq G$, ktory jest nadzbiorem N. Zostaje sprawdzic, ze on jest baza, czyli rozpina V.

Poniewaz B jest max lnz w G. W takim razie $\forall\, g \in G \quad g \in \text{Lin}(B)$, czyli $G \subseteq\subseteq \text{Lin}(B)$. Skoro $\text{Lin}(G) = V$, to $\text{Lin}(G) = V \subseteq \text{Lin}(\text{Lin}(B)) = \text{Lin}(B)$.

Jezeli V jest przestrzenia liniowa, to wtedy $\forall\, N \subseteq V$lnz $\exists\, b \supseteq N$ oraz $\forall\, G \subseteq V \quad \text{Lin}(G) = V\ \exists\, B \subseteq G$

CWICZENIA $v_a, ..., v_k$ - ln i v_{k+1} nie jest kombinacja lin $v_1, ..., v_k$, to wtedy $v_1, ..., v_{k+1}$ jest lnz

Zalozmy, ze $V = \text{Lin}(v_1, .., v_k)$ i zdefiniujmy rekurencyjnie podzbiory:

$$B_0 = \quad B_{k+1} = \begin{cases} B_k & v_{k+1} \in \text{Lin}(B_k) \\ B_k \cup v_{k+1} \end{cases}$$

Wtedy B_n jest baza V.

Dowod: $v_k \in \text{Lin}(B_k) \subseteq \text{Lin}(B_n)$ bo w innym przypadku dorzucamy go w kroku rekurencyjnym.To teraz wiemy, ze $\text{Lin}(B_n) \supseteq \text{Lin}(v_1, ..., v_n)$, czyli B_n rozpina V.
Pokazujemy, ze B_n jest lnz przez indukcje:
B_0 jest lnz
Jezeli B_k jest lnz, to wtedy
a. jesli $V_{k+1} \in \text{Lin}(B_k)$, to wtedy $B_{k+1} = B_k$ i jest lnz
b. jesli $v_{k+1} \notin \text{Lin}(B_k)$, to wtedy B_{k+1} jest liniowo niezalezny.

LEMAT STEINITZA

Jesli B jest baza V, a $a_1, ..., a_n \in V$ sa lnz, to
B ma przynajmniej n elementow
B ma $c_1, ..., c_n \in B$ takie, ze $(B \setminus \{c_1, ..., c_n\} \cup \{a_1, ..., a_n\})$ jest baza.

Wniozek to twierdzenie o wymiarze - kazde dwie bazy V maja tyle samo elementow.
Dowod tylko kiedy jedna z baz jest skonczona.
Niech B_1, B_2 to skonczone bazy V. Z tw. dla B_1 i ciagu$\{a_1, ..., a_n\} = B_2$ dostajemy $|B_1| \geq n = |B_2|$. Symetrycznie, $|B_2| \geq |B_1|$. W takim razie, $|B_1| = |B_2|$.
WYMIAR przestrzeni liniowej V ($\dim V$) to moc dowolnej bazy V.
Na przyklad

$$\dim K^n = n$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Jesli B jest baza V i jakis wektor $a = \sum_{b \in B} \alpha_b b$, to wtedy dla $c \in B$ taie, ze $\alpha_c \neq 0$, to mozemy wyrzucic c i dodac a i dostajemy baze V
Z zalozenia mozemy wrzucic c na druga strone:

$$c = \alpha_c^{-1}(a - \sum_{c \in B \setminus \{c\}} \alpha_b b) \implies c \in \texttt{Lin}((B \setminus \{c\}) \cup \{a\}) \implies B \subseteq \texttt{Lin}((B \setminus \{c\}) \cup \{a\}) = V$$

Teraz pokazujemy lnz:

$$\beta_a \cdot a + \sum_{b \in B \setminus \{c\}} \beta_b b = 0$$

Za a popdstawiamy sume

$$\beta_a \cdot \sum_{b \in B} \alpha_b b + \sum_{b \in B \setminus \{c\}} \beta_b b = \beta_a \alpha_c c + \sum_{b \in B \setminus \{c\}} (\beta_b + \beta_a \alpha_b) b = 0$$

Jest to kombinacja liniowa elementow B. Wszystkie te wspolczynniki sa rowne 0, wiec $\beta_a \alpha_c = 0$, wiec $\beta_a = 0 \lor \alpha_c = 0$, ale w zalozeniu mielismy, ze $\alpha_c \neq 0$, skad mamy, ze $\beta_a = 0$, ale Wowczas

$$0 = 0c + \sum_{b \in B \setminus \{c\}} (0\alpha_b + \beta_b) b$$

$$0 = \sum_{b \in B \setminus \{c\}} \beta_b$$

wiec wszystkie $\beta_a = 0$.
DOWOD LEMATU STEINITZA
B - baza, $a_1, ..., a_n$ jest lnz. Szukamy $c_1, ..., c_n$ tak ze $(B \setminus \{c_1, ..., c_n\}) \cup \{a_1, ..., a_n\}$ jest baza.
Dowood indukcyjnie B jest baza i $a_1 \in V$, czyli $0 \neq a_1 = \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b \implies \exists\, c_1 \in B$ takie, ze $\alpha_{c_1} \neq 0$. Co sugeruje, ze istnieje $B_1 = (B \setminus \{c_1\}) \cup \{a_1\}$.
Wydaje sie, ze mozemy teraz powtorzyc ten argument, ale to mogloby sie nie sprawdzic, bo moze wybralisy ten sam wektor co w pierwszym kroki.
Wezmy $a_2 = \sum_{b \in B_1} \alpha_b b = \alpha_{a_1} a_1 + \sum_{b \in B_1 \setminus \{a_1\}} \alpha_b b$ i wtedy ktorys ze wspolczynnikow jest niezerowy, wiec mozemy wziac jakis element $c_2 \in B_1 \setminus \{a_1\} = B \setminus \{c_1\}$. W szczegolnosci $c_1 \neq c_1$.
Zalozmy, ze mamy $c_1, ..., c_k \subseteq B$ parami rozne, takie, ze $B_k >))2 \setminus \{c_1, ..., c_k\} \cup \{a_1, ..., a_k\}$l ktora jest baza.
Teraz zauwazamy, ze $a_{k+1} \in \texttt{Lin}(B_k) = \sum_{\{} b \in B_k\} \alpha_b b = \alpha_{a_1} a_1 + ... + \alpha_{a_k} a_k + \sum_{b \in B_k} \alpha_b b$, czyli jais element tej sumy jest niezerowy.
Wezmy $c_{k+1} \in B_k'$ taki, ze $\alpha_{k+1} \neq 0$ i z twierdzenia

$$B_{k+1} = (B_k' \setminus \{c_{k+1}\}) \cup \{a_{k+1}\} = B \setminus \{c_1, c_2, ..., c_{n+1}\} \cup \{a_1, ..., a_{n+1}\}$$

ten zbior jest baza.
$c_{k+1} \neq c_1, ..., c_k$.
B_n dziala, czyli jest baza.