surjekcja - funckja na

DOBRE PORZADKI, LICZBY PORZADKOWE

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorow jest przeliczalna:

$$\aleph_0 \geq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |A_n| \leq \aleph_0$$

DOWOD:

Poniewaz $|A_n| \leq \aleph_0$ $n \in \mathbb{N}$, istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Chcemy pokazac, ze istnieje rowniez bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$f(n, k) = f_n(k) \quad (☕)$$

Musimy skorzystac z aksjomatu wyboru, poniewaz nie wystarczy nam tylko jeden element z (f_n) - potrzebujemy znac wlasnosci wszystkich elementow (f_n) jednoczesnie. Rozpatrujemy wiec zbior funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}} \ : \ \varphi \text{ jest bijekcja}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ to wszystkie funckje $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *lub z* $\mathbb{N}$ *do podzbioru* A_n. Niech F bedzie funkcja wyboru dla rodziny $\{F_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, czyli kazdej rodzinie przypisuje element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Przepiszmy wiec (☕) w sposob bardziej formalny:

$$f(n, k) = F(F_n)(k).$$

Poniewaz $F(F_n)$ jest bijekcja, to rowniez f jest bijekcja.

i smiga

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jesli $\langle X, \leq\rangle$ jest zbiorem czesciowo uporzadkowanym, w ktorym kazdy lancuch jest ograniczony z gory, to w X istnieje element maksymalny.

TWIERDZENIE: dla dowolnych zbiorow A, B zachodzi $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$

DOWOD:

Musimy skonstruowac *zbior czesciowo uporzadkowany* X*, do ktorego bedziemy mogli zastosowac LKZ*. Elementami tego zioru niech beda przyblizenia tego, co chcemy otrzymac:

$$X = \{f \ : \ \texttt{fnc}(f) \ \wedge \ \texttt{dom}(f) \subseteq A \ \wedge \ \texttt{rng}(f) \subseteq B \ \wedge \ \text{f jest 1-1}\}.$$

Bedziemy rozpatrywali $\langle X, \subseteq\rangle$. Chcemy zastosowac do niego LKZ, czyli musimy sprawdzic zalozenia.

Niech

$$\mathcal{L} \subseteq X$$

bedzie lancuchem w X. Chcemy pokazac, ze ma on ograniczenie gorne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L},$$

wtedy L jest ograniczeniem gornym $\mathcal{L}$, bo zawiera wszystkie elementy tego lancucha.

Znalezlismy juz ograniczenie gorne lancucha $\mathcal{L}$, teraz musimy pokazac, ze L jest elementem zbioru X z zalozenia, czyli spelnia nastepujace warunki:

1. L jest zbiorem par uporzadkowanych. Stwierdzenie to wynika bezposrednio z faktu, ze L jest suma lancucha.
2. L jest funkcja, gdyz elementami zbioru X sa funkcje.

Chcemy pokazac, ze

$$\forall\, x, y, z \quad \langle x, y\rangle \in L \ \wedge \ \langle x, z\rangle \in L \implies y = z,$$

czyli L jest zbiorem takich par uporzadkowanych, ze jesli dwie pary maja ten sam poprzednik, to maja tez ten sam nastepnik (def. funkcji).

Ustalmy dowolne x, y, z takie, ze $\langle x, y\rangle \in L$ i $\langle x, z\rangle \in L$. Zatem istnieja $F, G \in \mathcal{L}$ takie, ze

$$\langle x, y\rangle \in F \ \wedge \ \langle x, z\rangle \in G.$$

Poniewaz $\mathcal{L}$ ma ograniczenie gorne (czyli jest zbior do ktorego naleza wszystkie pozostale) i jest lancuchem, wszystkie jego elementy mozemy porownac miedzy soba. Czyli, bez straty ogolnosci, mozemy zalozyc, ze $F \subseteq G$ i wowczas

$$\langle x, y\rangle \in G \text{ i } \langle x, z\rangle \in G \implies y = z$$

gdyz zbior G jest funkcja ($\mathtt{fnc}(G)$).

3. $\mathtt{dom}(L) \subseteq A$
4. $\mathtt{rng}(L) \subseteq B$

zalozenie 3. i 4. wynikaja bezposrednio z definicji zbioru X oraz L

$$\mathtt{dom}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \mathtt{dom}(F)$$

$$\mathtt{rng}(\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \mathtt{rng}(F)$$

5. L jest funkcja roznowartosciowa (iniekcja), czyli jesli $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ to $x = z$.

Ustalmy dowolne x, y, z takie, ze $\langle x, y\rangle \in L$ i $\langle z, y\rangle \in L$. Zatem istnieja $F, G \in \mathcal{L}$ takie, ze

$$\langle x, y\rangle \in F \ \land \ \langle z, y\rangle \in G$$

Poniewaz $\mathcal{L}$ jest lancuchem, to mozemy zalozyc, ze $F \subseteq G$, a poniewaz $\mathcal{L} \subseteq X$ i X zawiera jedynie iniekcje, to

$$\langle x, y\rangle \in G \ \land \ \langle z, y\rangle \in G \implies x = z.$$

Poniewaz pokazalismy, ze dowolny lancuch X jest ograniczony z gory, to na mocy w X istnieje element maksymalny $\varphi \in X$. Rozpatrzmy trzy mozliwosci:

1. $\mathtt{dom}(\varphi) = A$. Wowczas z definicji zbioru X otrzymujemy $\varphi : A \xrightarrow{1-1} B$, czyli $|A| \leq |B|$.
2. $\mathtt{rng}(\varphi) = B$. Wtedy $|B| \leq |A|$, bo

$$\varphi : \mathtt{dom}(\varphi) \xrightarrow[\text{"}na\text{"}]{1-1} B$$

$$\varphi^{-1} : B \xrightarrow[\text{"}na\text{"}]{1-1} \mathtt{dom}(\varphi) \subseteq A$$

3. $\mathtt{dom}(\varphi) \neq A \ \land \ \mathtt{rng}(\varphi) \neq B$. Czyli $\mathtt{dom}(\varphi) \subsetneq B$ i $\mathtt{rng}(\varphi) \subsetneq B$, zatem istnieja $s \in A \setminus \mathtt{dom}(\varphi)$ i $t \in B \setminus \mathtt{rng}(\varphi)$. W takim razie φ moze byc rozszerzona do:

$$\varphi' = \varphi \cup \{\langle s, t\rangle\}.$$

$\varphi' \in X$ jest iniekcja, bo $t \notin \mathtt{rng}(\varphi)$. Dodatkowo,

$$\varphi \subsetneq \varphi',$$

czyli φ nie jest elementem maksymalnym X, stad zachodzi tylko 1 lub 2.

i smiga