STRZALKA (Sorgenfrey line), przyklad w $\mathbb{R}$

$$B = \{[a,b) \ : \ a < b\}$$

sa zbiorami otwartymi (otwarto-domknietymi, tak jak $\mathbb{R}$ czy $\emptyset$ w $\mathbb{R}$).

BAZA dla topologii to taka *rodzina zbiorow otwartych*, ze kazdy niepusty i otwarty podzbior tej przestrzeni mozna wysumowac przy pomocy pewnych elementow bazy.

Topologia strzalki jest bogatsza (silniejsza, wieksza) niz topologia euklidesowa - kazdy otwarty zbior w sensie euklidesowym jest tez otwarty w sensie strzalki

Strzalka jest przestrzenia Handsdorffa

Jak wygladaja ciagi zbiezne w strzalce?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

$\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest zbiezny, bo wszystkiw wyrazy sa poza przedzialem

nie jest to przestrzen metryzowalna

UZWARCENIE ALEKSANDROWA (aka przestrzen z gruszka) na $\mathbb{R}$, ale moze byc to dowolna przestrzen

przestrzen zwarta - przestrzen topologiczna, ze z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi mozna wybrac podpokrycie skonczone

uzwarcenie - rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by byla ona przestrzenia zwarta

otoczenie - dowolny zbior, ktory zawiera zbior otwarty zawierajacy dany punkt

Mamy $\mathbb{R}$ i mamy jakiegos . Otoczenia wszystkich liczb $\mathbb{R}$ to

$$r : \{r\},$$

czyli signletony liczb rzeczywitych sa otwarte. Otoczeniem  sa

 $: \{$  $\} \cup A,$

takie, ze $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus A$ jest skonczony.

Topologie mozemy w uzwarceniu Aleeksandrowa zdefiniowac w dowolny sposob, musi tylko jasno wynikac, co jest zbiorem otwartym, a co zamknietym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenia Hansdorffa
Jak wygladaja ciagi zbiezne?

$\left(\frac{1}{n}\right) \to$ ,

bo tylko skonczenie wiele punktow moze byc zignorowanych przez otoczenie . W takim razie mozemy powiedziec, ze jesli mamy dowolny (x_n) roznowartosciowy, to

$\lim x_n =$ 

bo  $\underset{otw}{\in} U$ i istnieje skonczenie wiele n takich, ze $x_n \notin U$.

PRZESTRZEN OSRODKOWA

Ciag zbiezny - byl definiowany jako ciag, ktorego wszystkie elementy leza w kuli o coraz to mniejszym promieniu

$$\text{Int}A = \{x \in A \ : \ \exists\, x \underset{otw}{\in} U \quad U \subseteq A\}$$

natomiast zbiorem domknietym byly dopelnienia otwartych:

$$\overline{A} = \{x \in X \ : \ \forall\, x \underset{otw}{\in} U \quad U \cap A \neq \emptyset\}.$$

X - przestrzen topologiczna

Zbior $A \subseteq X$ jest GESTY (dense), jezeli

$$\forall\, U \underset{otw}{\neq} \emptyset \quad U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

jest to zbior otwarty, ktory
kroi sie niepusto z kazdym zbiorem otwartym
(lub dopelnia sie do calej przestrzeni)

Przestrzen X jest OSRODKOWA,
jesli istnieje w niej *przeliczalny zbior gesty*

PRZYKLADY - OSRODKOWA

$\mathbb{R}$ z metryka euklidesowa - osrodkowy (separable) bo $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ z metryka euklidesowa: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest gesty

$\mathbb{R}^2$ z metryka miasto: $\mathbb{Q}^2$ bo zbiory otwarte w miescie sa takie same jak w euklidesie

kostka Cantora ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) - bierzemy wszystkie skonczone ciagi stale od pewnego miesjca (czyli skonczone, ale sztucznie przedluzone do nieskonczonosci) - jest ich przeliczalnie wiele, a ich zbior jest gesty. Wezmy kule $B_r(x)$ o promieniu $r > \frac{1}{2^n}$

$$y(i) = x(i) \quad i \leq n+1$$
$$y(i) = 0 \quad i > n+1$$

ANTYPRZYKLADY:

$(\mathbb{R}, d_{dyskretna})$. Zbior gesty $A \subseteq \mathbb{R}$ musi kroic sie niepusto z kazdym singletonem, wiec

$$\forall\, x \quad A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

czyli zbior gesty nie jest przeliczalny.

$(\mathbb{R}^2, d_{centrum})$. Intuicja podpowiada, ze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ byloby geste i wtedy to bylby przeliczalny. Jednak, jesli kula lezy na prostej o wyrazach niewymiernych, na przyklad

$$y = \pi x,$$

to tnie sie pusto ze zbiorem $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

FAKT: W przestrzeni metrycznej $\langle X, d\rangle$ zbior $A \subseteq X$ jest gesty,
wtedy i tylko wtedy, gdy dla kazdej kuli $B_r(x)$ istnieje $a \in A$ blizej x niz kula:

$$A \text{ zb. gesty} \iff \forall\, x \in X\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a \in A \quad d(x,a) < \varepsilon$$

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Zalozmy, ze twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gestego A i przestrzeni metrycznej $\langle X, d\rangle$ istnieje kula o promieniu ε i srodku $x \in X$ taka, ze nie zawiera elementow z A:

$$\exists\, x \quad B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie A tnie sie pusto ze zbiorem otwartym $B_\varepsilon(x)$, czyli nie jest zbiorem gestym.

$\Longleftarrow$

Wezmy jakis zbior otwarty

$$U \underset{otw}{\subseteq} X,$$

czyli mozemy zalozyc, ze istnieje kula:

$$\exists\, B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula $B_r(x)$ zawiera sie otwartym zbiorze U, wiec istnieje w U punkt ktory lezy w tej kuli:

$$\exists\, u \in U \quad d(x,u) < r,$$

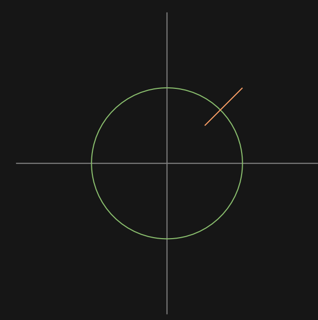
a wiec kula tnie sie niepusto ze zbiorem U:

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset$$

i smiga

NA CO TO BYL PRZYKLAD? POWROT DO METRYKI CENTRUM
Rozwazmy okrag i robimy kule promieniscie i jest ich c wiele

$$S^1 = \{x \ : \ d(x, \langle 0,0 \rangle = 1)\}$$



Przestrzen supremum jest osrodkowa, bo wielomiany tworza ciag gesty.

Jesli istnieje $f : X \to Y$ ktora jest ciagla i na, to jezeli
X jest przestrzenia osrodkowa, to Y tez jest przestrzenia osrodkowa

osrodkowoosc przenosi sie przez ciagle suriekcje

DOWOD:

Celem dowodu jest zdefiniowanie przeliczalnego zbioru gestego w Y.
Niech $A \subseteq$ bedzie przeliczalnym zbiorem gestym w X. Wtedy zbiorem gestym w Y bedzie obraz A przez funkcje f

$$B = f[A].$$

Poniewaz B jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciagla suriekcje, to jest on zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowdnic, ze B jest zbiorem gestym.
Wezmy dowolny zbior otwarty w Y: $U \underset{otw}{\subseteq} Y$. Wtedy $f^{-1}[U] \subseteq X$, poniewaz f jest funkcja "na".

No to w takim przypadku zbiorem gestym w Y bedzie $f[A]$. Jest to zbior przeliczalny, bo jest obrazem zbioru przeliczalnego, a czy jest gesty?
Bierzemy dowolny zbior otwarty w $U \subseteq Y$, to wtenczas $f^{-1}[U] \subseteq X$

$$\exists\, a \in A \quad a \in f^{-1}[U] \quad f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

ZBIOR CANTORA <3

$$C \subseteq [0,1]$$

C jest przekrojem zbiorow domknietych, wiec sam tez jest zbioreom dokmnietym.

ZBIOR CANTORA jest homeomorficzny z kostka Cantora

$$Cant \underset{home}{\simeq} 0,1$$

DOWODZIK:

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Cant$$

s - skonczony ciag 0,1. Wowczas C_s to jest ciag, ktory w zbiorze Cantora pokolei przyjmuje lewy lub prawy podbior poprzedniego zbioru (skaczemy lew-prawa)

$$f(x) = y \qquad \bigcap_{s - odc\ pocz\ x} D_s = \{y\}$$

Co nas czeka:
- zobaczenie ze to D_s jest niepuste
- ze to jest 1-1 i na

1-1 bo mamy dwa rozne ciagi, to one sie nam rozjeda i nie ma opcji zeby sie znowu pozniej spotkaly
bo zawsze dojdziemy d odowolnego x
- dowod ciaglosci i ciaglosci f^{-1}

i smiga