PRZYKLAD

Strzalka (Sorgenfrey line), przyklad w $\mathbb{R}$
Baza: $\{[a,b)\ :\ a<b\}$ staja sie zbiorami otwartymi

Baza dla topologii to taka rodzina, ze kazda ??? jest suma zbiorow otwartych?

topologia strzalki jest bogatsz niz topologia euklidesowa - kazdy otwarty zbior w sensie euklidesowym jest tez otwarty w sensie strzalki

strzalka jest handsdorffa

Jak wygladaja ciagi zbiezne w strzalce?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

$\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest zbiezny, bo wszystkiw wyrazy sa poza przedzialem

nie jest to przestrzen metryzowalna

UZWARCENIE ALEKSANDROWA (aka przestrzen z gruszka)

znowu przestrzen to $\mathbb{R}$, ale moze byc dowolne

Mamy $\mathbb{R}$ i mamy jakiegos kota. Otoczenia $r : \{r\}$ - signletony liczb rzeczywitych sa otwarte (no to wszystko jest otwarte). Otoczeniem  sa  $: \{$$\} \cup A$, takie, ze $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}\setminus A$ jest skonczony

Topologie definujemy jak nam sie podoba, tylko musi jasno wynikac, co jest otwarte, a co jest zamkniete.

Jest to przestrzen Hansdorffa
Jak wygladaja ciagi zbiezne?

$$\left(\frac{1}{n}\right) \to$$ 

po tylko skonczenie wiele punktow moze byc zignorowanych przez otoczenie 
czyli ogolem, jesli mamy dowolny (x_n) roznowartosciowy, to

$$\lim x_n =$$ 

bo  $\underset{otw}{\in} U$ bo istnieje skonczenie wiele n takich, ze $x_n \notin U$

COS

Ciag zbiezny - byl definiowany
Int$A = \{x \in A\ :\ \exists\, x \underset{otw}{\in} U \quad U \subseteq A\}$
$\overline{A} = \{x \in X\ :\ \forall\, x \underset{otw}{\in} U \quad U \cap A \neq \emptyset\}$
zbiory domkniete = dopelnienia otwartych

X - przestrzen topologiczna

$A \subseteq X$ jest GESTY, jezeli
$$\forall\, U \underset{otw}{\neq} \emptyset \quad U\cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$
czyli zb otwarty, ktory kroi sie niepusto z kazdym zbiorem otwartym (lub dopelnia sie do calej przestrzeni)

Przestrzen X jest OSRODKOWA, jesli istnieje w niej przeliczalny zbior gesty

PRZYKLADY - OSRODKOWA

$\mathbb{R}$ z metryka euklidesowa - osrodkowy bo $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ z metryka euklidesowa: $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ jest gesty

$\mathbb{R}^2$ z metryka miasto: $\mathbb{Q}^2$ bo zbiory otwarte w miescie sa takie same jak w euklidesie

kostka Cantora $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ - bierzemy wszystkie skonczone ciagi stale od pewnego miesjca (czyli skonczone, ale sztucznie przedluzone do nieskonczonosci) - jest ich przeliczalnie wiele i to jest geste
Wezmy kule $B_r(x)$ o promieniu $r > \frac{1}{2^n}$

$$y(i) = x(i) \quad i \leq n+1$$
$$y(i) = 0 \quad i > n+1$$

ANTYPRZYKLAD: $(\mathbb{R}, d_{dysk})$. Zbior gesty $A \subseteq \mathbb{R}$ musi kroic sie nipusto z kazdym singletoenm, wiec

$$\forall\, x \quad A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

BARDZIEJ SUBTELLNY ANTYPRZYKLAD: $(\mathbb{R}^2, d_{centrum})$. Intuicja podpowiada, ze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ byloby geste i wtedy to bylby przeliczalny, ale kula ktora lezy na prostej $y = \pi x$ wymyka sie temu zbiorowi.
FAKT: Jesli mamy przestrzen metryczna, to gestosc mozemy opisac $A \subseteq X$ jest gest, jesli dla kazdej kuli itnieje cos z tego zbioru blizej x niz kula

$$\forall\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon$$

dowodzi <3
$\Longrightarrow$: zalozmy, ze $\exists\, x \quad \exists\, \varepsilon$ ze jest zle, czyli

$$\exists\, x \quad B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

czyli nie mozemy byc gesci
$\Longleftarrow$: wezmy jakis zbior otwraty $U \underset{otw}{\subseteq} X$, czyli mozemy zalozyc, ze jets taka kula:

$$\exists\, B_r(x) \subseteq U$$

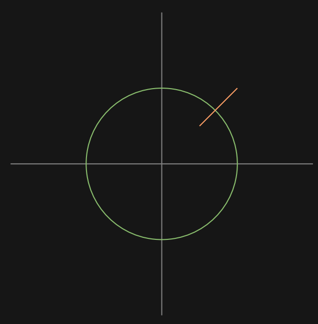
i wowczasj z wlasnosci z faktu

$$\exists\, a \in A \quad d(x, a) < r$$

$$A \cap B_r(x, a) = \emptyset$$

POWROT DO METRYKI CENTRUM
Rozwazmy okrag i robimy kule promieniscie i jest ich $\mathfrak{c}$ wiele

$$S^1 = \{x \,:\, d(x, \langle 0, 0\rangle = 1)\}$$



Przestrzen supremum jest osrodkowa, bo wielomiany tworza ciag gesty.