REKURENCJE LINIOWE

Leonardo z Pizy, z kraju dalekiego
Znalazl sposob na wzor Fibonacciego:
Podstaw ku-do-i
A delta wskaze Ci
Jawna postac rozwiazania ogolnego

FIBONACCI

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Na poprzednim wykladzie ustalilismy, ze x_n to liczba ciagow o wyrazach 1, 2 dostepnych w sumie n.

PIERWSZY POMYSL: sprawdzamy, czy istnieja takie ciagi geometryczne, ktore spelniaja to rownanie?

$$x_n = q^n$$

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$$

$$q^2 = q + 1$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

otrzymujemy

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

co nie zgadza sie z pierwszym wyrazem.

DRUGI GENIALNY POMYSL: kazde rozwiazanie rekurencji jest postaci

$$x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

jesli znajdziemy dwa sensowne rozwiazania, to kazde inne bedzie ich kombinacja liniowa. Podstawmy do tego wzoru dwa pierwsze wyrazy:

$$\begin{cases} x_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ x_1 = 1 = c_1 q_1 + c_2 q_2 \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$$

REKURENCJE LINIOWE JEDNORODE

JEDNORODNA LINIOWA REKURENCJA rzedu k:

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots a_k x(n-k) \quad (☕)$$

$a_1, \ldots, a_k$ to wyrazzy stale, a nie ma w tym ciagu wyrazow wolnych.

Cala idea rozwiazywania jest podobna do rozwiazywania Fibonacciego.

Zbior rozwiazan rownania (☕) stanowi przestrzen liniowa wymiaru $\leq k$. Jesli $x(n)$ i $y(n)$ spelniaja (☕), to rowniez $x(n) + y(n)$ tez jest spelnione przez (☕).

Kazdy x spelniajacy (☕) jest jednoznacznie wyznaczony przez k pierwszych wyrazow $(x(0), x(1), \ldots, x(k-1))$.

Rozwazmy ciagi geometryczne:

$$x(n) = q^n$$

$$q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_k q^{n-k}$$

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_k$$

Czyli mozemy swtierdzic, ze cig $x(n) = q^n$ postaci (☕) gdy q jest pieriastkiem wielomianu charakterystycznego

$$w(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - \ldots - a_k$$

Calosc teraz dzieli sie na dwa przypadki:

1. wielomian $w(t)$ ma k roznych pierwiastkow $q_1, \ldots, q_k$, to kazde rozwiazanie (☕) jest kombinacja liniowa bazowych rozwiazan, czyli ma postac:

$$x(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$$

Bo mamy przestrzen liniowa co najwyzej wymiar k, wiec jesli znajde k nieliniowo zaleznych wektorow, to wszystko inne mozna zapisac jako ich kombinacje liniowa

DOWOD:

Dla dowwolnych $x(0), x(1), ..., x(k-1)$ istnieja stale $c_1, ..., c_k$ takie, ze warunki sa spelnione:

$$c_1 + c_2 + ... + c_k = x(0)$$

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 + ... + c_k q_k = x(1)$$

$$...$$

$$c_k q_1^k + ... + c_2 q_2^k + ... c_k q_k^k = x(k-1)$$

Wystarczy pokzac, ze ten uklad zawsze ma rozwiazanie, czyli wyliczyc wyznacznik glowny macierzy (patrz lemat(🦇)).

i smiga

LEMAT: wyznacznik macierzy Vandermonde'a

$$V(q_1, ..., q_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ q_1 & q_2 & ... & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & ... & q_k^2 \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & ... & q_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (q_j - q_i) \neq 0 \quad (🦇)$$

DOWOD:

$$w(q_1, ..., q_{k-1}, t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ q_1 & q_2 & ... & t \\ q_1^2 & q_2^2 & ... & t^2 \\ q_1^{k-1} & t^{k-1} & ... & q_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Jesli podstawimy za t ktorakolwiek z poprzednich kolumnt, to dostajemy

$$w(q_1) = 0$$

$$w(q_2) = 0$$

$$...$$

Stad mozemy rozlozyc ten wielomian na czynniki:

$$W(t) = A(t - q_1)(t - q_2)...(t - q_{k-1})$$
$$W(0) = A q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_{k-1} \cdot (-1)^{k-1}$$

Z rozwiniecia Laplace'a i jednorodnosci:

$$W(0) = (-1)^{k-1} q_1 \cdot ... \cdot q_{k-1} V(q_1, ..., q_{k-1})$$

czyli wylaczamy sobie pierwszy wiersz i ostatnia kolumne i liczymy wyznacznik.

Indukcja otrzymujemy:

$$V(q_1, ..., q_k) = V(q_1, ..., q_{k-1})(q_k - q_1)(q_k - q_2)...(q_k - q_{k-1})$$

i smiga

TO JEST W GOOGLE JAKO WYZNACZNIK VANDERMONDE

PRZYKLADY:

$x(n) = -x(n-1)$ - tu beda liczby urojone:

$$q^n + q^{n-2} = 0$$

$$q^2 + 1 = 0$$

$$q = \pm i$$

$$x(n) = c_1 i^n + c_2 (-i)^n$$

$$x(n) = -2x(n-1) - x(n-2)$$

$$q^n = -2q^{n-1} - q^{k-2}$$

$$(q+1)^2 = 0 \implies q = -1$$

2. wielomian $w(t)$ ma pierwiastki podwojne

"Zgadujemy" drugi bazowy ciag, ktory rozwiazuje te rekurencje, czyli w przykladzie powyzej mnoymy razy n

$$x(n) = x(-1)^n$$

$$n(-1)^n = -2(n-1)(-1)^{n-1} - (n-2)(-1)^{n-2}$$

$$n = +2(n-1) - (n2)$$

$$x(n) = c_1(-1)^n + c_2 \cdot n(-1)^n$$

Przyklad bardziej ogolny:

Zalozmy, ze rekurerncja rzedu 6 ma wielomian charakterystyczny postaci

$$(t-2)(t-3)^2(t-5)^3$$

Mamy pojetyczny pierwiastek $t_1 = 2$, pierwiastek podwojny $t_2 = 3$ i pierwiastek potrojny $t_3 = 5$. Musimy napisac baze rozwiazan teje rekurencji:

$$2^n,\ 3^n,\ n \cdot 3^n,\ 5^n,\ n \cdot 5^n,\ n^2 \cdot 5^n$$

LEMAT: Jezeli t_0 jest k-krotnym pierwiastkeim wielomianu $w(t)$:

$$w(t_0) = w'(t_0) = w^{(k-1)}(t_0)$$

DOWOD:

Co to znaczy, ze cos jest k-krotnym pierwiastkiem? Wysetpuje k razy czynnik $(t - t_0)$:

$$w(t) = (t - t_0)^k \cdot w_1(t)$$

$$w'(t) = (k-1)(t - t_0)^{k-1} \cdot w_1(t) + (t - t_0)^k \cdot w_1'(t)$$

Jezeli wielomian charakterystyczny rekuurencji ma m-krotnypierwiastek q_0, to ciag postaci

$$\forall\ j < m \quad x(n) = n^j q_0^n$$

jest rowniez rozwiazaniem tej rekurencji

DOWOD:

Dla $j = 1$ rozwazmy

$$t^n = a_1 t^{n-1} + ... + a_k t^{n-l} \qquad (☕)$$

wiemy, ze q_0 rozwiazuje powyzsze rownanie. Zrozniczkujmy te tozszamosc

$$nt^{n-1} = a_1(n-1)t^{n-2} + ... + a_k(n-k)t^{n-k-1}$$

przywrocmy t, ktore zniklo przez roznoczkowanie

$$nt^n = a_1(n-1)t^{n-1} + ... + a_k(n-k)t^{n-k} \qquad (🐱)$$

Skoro q_0 bylo rozwiazaniem rownania (☕), to rozwiazuje rowniez rownanie (🐱), czyli $n \cdot q_0^n$ tez rozwiazuje rekurencje.

i smiga

PRZYKLADY:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1}$$

Wieksza zabawa powstaje, gdy zaczynamy liczyc

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + ...$$

mozna zrupowac to sobie zaczynajac od 0, 1 lub 2 i wtedy kazdy taki ciag to $\frac{1}{3}$ calosci

Myslenie bardziej kombinatoryczne.
Niech

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + ... = a_n$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + ... = b_n$$

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + ... = c_n$$

Zastanawiamy sie, jak wyrazic a_n w zaleznosci od b_n i c_n. Oznaczmy ostatni element, wtedy wybrac trzyelementowy podzbior bez niego mozemy wybrac tak jak wczesniej (a_{n-1}). Mozemy wybrac tez element z inna reszta (c_{n-1}). Piszemy 3 rekurencje i smiga

$$a_0 = 1$$
$$b_0 = 0$$
$$c_0 = 0$$
$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1}$$
$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$$
$$c_n = c_{n-1} + b_{n-1}$$

W NASTEPNYM ODCINKU: ciekawsze rekurencje,