TOPOLOGIA

notatki

Spis treści

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazyway funkcję

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x,x) = 0 \wedge d(x,y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall\, x,y)\ d(x,y) = d(y,x)$ - symetria
3. $(\forall\, x,y,z)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ - warunek $\triangle$

METRYKI EUKLIDESOWE:

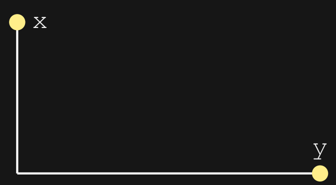
$\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x - y|$

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + ... + (x(n-1) + y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

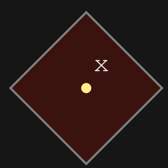
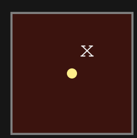
$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

<table>
<tr><td>$\mathbb{R}$, m. euklidesowa:</td><td>$\mathbb{R}^2$, m. euklidesowa</td><td>$\mathbb{R}^2$, m. miasto</td><td>$\mathbb{R}^2$, m. maksimum</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbb{R}^2$, m. centrum</td><td>$C[0,1]$, m. supremum</td><td>$C[0,1]$, m. całkowa</td></tr>
<tr><td colspan="2">narysję potem</td><td>narysuje</td><td>potem</td></tr>
</table>

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie szystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$

$$(x_n) \overset{d}{\to} x \iff (\forall\, i < m)\ x_n(i) \to x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \overset{d_{sup}}{\to} f \iff (f_n) \rightrightarrows f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, jeśli na każdym punkcie
ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

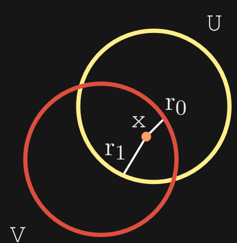
$$(\forall\, z \in U)(\exists\, r > 0)\ B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V, których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



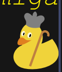
Dla dowlnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists\, r_0 > 0)\ B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists\, r_1 > 0)\ B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będa zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga



DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists\, U \in \mathcal{U})\; x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x. Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisac kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga

U jest zbiorem otwartym $\iff$ U jest sumą kul.

DOWOD:

$\Longleftarrow$ wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Longrightarrow$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall\, x \in U)(\exists\, r_x > 0)\; B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U, suma ta nie może być większa niż U. Zawierają się w niej wszystkie punkty z U, więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga

1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c. Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegac do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists\, r > 0)\; B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U, co jest sprzeczen z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c.

i smiga

2 LEMAT URYSOHNA

2.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń X jest przestrzenią NORMALNĄ (również T_4), jeżeli

$$(\forall\, F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X)\ F \cap G = \emptyset$$

$$(\exists\, U, V \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\ U \cap V = \emptyset\ \wedge\ F \subseteq U\ \wedge\ G \subseteq V$$

Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

2.2 LEMAT URYSOHNA

Załóżmy, że przestrzeń X jest normalna. Niech $F, G \underset{\text{dom}}{\subseteq} X$ będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X. Wówczas:

$$(\forall\, f : X \xrightarrow{\text{ciga}} [0,1])\ f_{\restriction F} \equiv 0\ \wedge\ f_{\restriction G} \equiv 1$$

Warunek ten jest silniejszy od normalności.

3 ZBIÓR DEFINICJI

PRZESTRZEŃ NORMALNA - przestrzeń, w której każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi:

$$(\forall\, \mathrm{F}, \mathrm{G} \underset{\text{domk}}{\subseteq} \mathrm{X})\; \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \emptyset (\exists\, \mathrm{U}, \mathrm{V} \underset{\text{otw}}{\subseteq} \mathrm{X})\; \mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset \;\wedge\; \mathrm{F} \subseteq \mathrm{U} \;\wedge\; \mathrm{G} \subseteq \mathrm{V}$$