Topo Listy

Zadanie 1.

Opisz jak wyglądają ciągi zbieżne w Kostce Carnota.

Kostka Carnota to zbiór wszystkich ciągów 0,1, w metryce $d(x,y) = \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}}$ gdzie $\Delta(x,y)$ to miejsce na którym ~~różnią~~ zaczynaj się różnić ciągi

To piszę bo samemu nie wiem co się dzieje

Zbieżność definicja.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(d(x; x_n) < \varepsilon)$

Definicja
zwykle dowody polegają na podstawieniu do definicji:

Ustalmy dowolny ciąg (y_n) i x będący jego granicą

Wszystko co używamy w dowodzie musi zostać przedstawione

Zgodnie z powyższą definicją dla dowolnego ε i.d.d.n.

$d(x; y_n) < \varepsilon$ gdzie $d(x; y_n) = \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}}$ (1)

czyli:

$\varepsilon > \frac{1}{2^{\Delta(x, y_n)}}$

powiedzmy że $\varepsilon > \frac{1}{2^k}$ gdzie k jest największą l. naturalną dla której zachodzi ta nierówność (2)

Zatem $\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2^{\Delta(x, y_n}}$ czyli x, y_n mają takie same conajmniej pierwsze k wyrazów

Gdy ε maleje do 0 to k rośnie do ∞, zatem zbieżność w Kostce Cantora jest równoznaczna z byciem pierwszych dużo wyrazów takich samych. □ (3)

Dowód - jakieś podstawienie do definicji (1)
jakieś łatwe poczarowanie
i to o co pytali (3)

Zad 2

Załóżmy nie wprost że któryś z ciągów nie jest zbieżny
Czyli dla każdego g istnieje ∞ wiele punktów nie należących do $g \pm \varepsilon$
Zatem nie potrafimy wybrać liczb takiej że cały ciąg jest zbieżny $\square$

L 1

Zad 3

1

maksimum $\geq$ każdego >0

$\downarrow \qquad \downarrow$

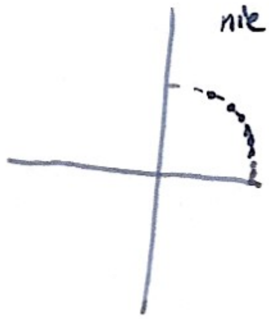
$0 \Rightarrow 0 \quad >0$ z 3 ciągów $\square$

każdy w tym max $\to 0$ $\square$

Zad 5. ~~???~~ d.

centrum => euklidesowa

i działa



nie umiem.
to jest d.

~~Zad 7~~

Zbieżna w sup: wszystkie pt oddalone o conajwyżej ε
zb. jednostajna: w każdym ε otoczeniu znajduje się cała fun f

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x \in [0,1]\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (1)

$d(f_n, f) = \sup\{ f_n(x)-f(x) : x \in [0,1]\}$

zauważmy że (1) zachodzi po zam. ε na $\frac{d(f_n, f)}{2}$
bo wtedy

zb. f => zb sup.
oznaczmy przez d
maxim odl.
zauważmy że $d<\varepsilon$
gdy $d \to 0$ $\varepsilon \to 0$

1

~~Zad 8.~~

$\bar{A} = \{x \in X : \exists (x_n) \text{ z } A \lim x_n = x\} = \left(\text{Int} A = \{x \in A^C : \exists r>0\ B_r(x) \subseteq A\}\right)^C$

$\{x \in X : \exists (x_n) \in A\ \lim x_n = x\} = \neg\{x \in A^C : (\exists r>0) B_r(x) \subseteq A\}$

$= \{x \in A^C : (\forall r>0)\ B_r(x) \nsubseteq A\}$

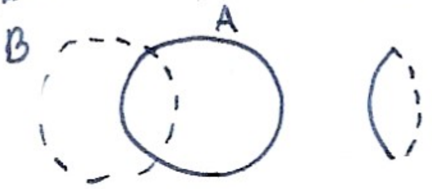
raczej nie wyszło....

$\{x\in A\cap B : (\exists (x_n)\in A\cap B) \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \subseteq$

$\{x\in A : (\exists (x_n)\in A) \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \cap \{x\in B : (\exists (x_n)\in B) \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$

weźmy dowolnego $x\in A\cap B$ takiego że ist ciąg $x_n \in A\cap B$ że $\lim x_n = x$

zatem $x\in A$ i $x\in B$ a ciąg $x_n\in A$ i $x_n\in B$ zatem działa



nie wiem?

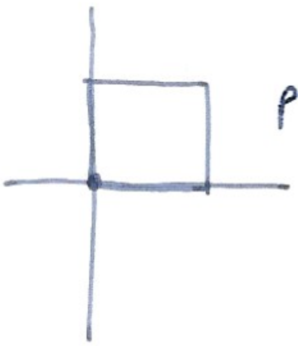
$\{x\in A\cap B : (\exists (x_n)\in A\cap B) \lim_{n\to\infty} x_n = x\} = \{x\in A : \exists (x_n\in A) \lim x_n = x\}$
$\cup \{x\in B : \exists (x_n\in B) \lim x_n = x\}$

weźmy dowolnego $x\in A\cup B$, i jego ciąg $x_n\in A\cap B$

- jeśli $x\in A$ to potrzebujemy żeby ∞ wiele el. ciągu żeby było w A
  - załóżmy że się udało ✓
  - załóżmy że się nie udało wtedy ∞ wiele wyrazów z ciągu x_n należało do B ???

Weźmy dowolny $x\in A$ wtedy w A x_n ciąg x_n
dla wtedy $x\in A\cap B$ i ciąg należy do $A\cap B$

Zad 11



pewnie nie.
zauważmy że kule są otwarte zawsze.
to jest ~~zamknięte~~ domknięte

Zad 9. cd.

$\mathbb{R}\times\mathbb{N}$
$Int=\emptyset$
$cl=\mathbb{R}\times\mathbb{N}$
$Bd=\mathbb{R}\times\mathbb{N}$

$\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\}$
$Int=\emptyset$
$cl=\{\dots\}$
$Bd=\{\dots\}$

$\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$
— ″ —

$\{\langle x,y\rangle : y=2x\}$
— ″ —

$\{\langle x,y\rangle \in (0,\infty)^2 : y=\sin\frac{1}{x}$

maximum ≅ tak sam

$\mathbb{R}\times\mathbb{N} = A$	B	C	D
$Int\,A = A$	$Int\,B \neq \emptyset$	$Int\,C = \emptyset$	$Int\,D = \emptyset$
$cl\,A = A$	$cl\,B = \emptyset$	$cl\,C = C$	$cl\,D = D$
$Bd\,A = \emptyset$	$Bd = B$	$Bd\,C = C$	$Bd\,D = D$
miasto.			$Int\,D = D$
″			$cl\,D = D$
			$Bd\,D = D$

Zadanie 9.

Znajdź wnętrze, domknięcie i brzeg

W metryce Euklidesowej:

$\mathbb{R}\times\mathbb{N}$

+ $Int(\mathbb{R}\times\mathbb{N})=\emptyset$ bo w metryce euklidesowej w prostej nie mieści się kula
+ $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ bo ciągi zbieżne są na jednej prostej i może być każdy z nich
+ $Bd(\mathbb{R}\times\mathbb{N}) = \mathbb{R}\times\mathbb{N}\setminus Int(\mathbb{R}\times\mathbb{N}) = \mathbb{R}\times\mathbb{N}$

W normie maksimum

$Int(A)=\emptyset$ +

$\overline{A}=A$ +

$Bd(A)=A$ +

W metryce centrum

Int

$\cancel{Int}(\mathbb{R}\times\mathbb{N}) = (\mathbb{R}\times 0)\setminus\{0,0\}$

$\overline{(\mathbb{R}\times\mathbb{N})} = \cancel{\mathbb{R}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})\cup\{0,0\}}\ \mathbb{R}\times\mathbb{N}$

$Bd(\mathbb{R}\times\mathbb{N}) = \mathbb{R}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})\cup\{0,0\}$

$\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\} = B$

$Int(B)=\emptyset$ +

$\overline{B}=B$ +

$Bd(B)=B$ +

(w euklidesie)

(w maksimum)

$Int(B)=\emptyset$ + bo znowu się nie mieści

$\overline{B}=B$ +

$Bd(B)=B$ +

(w centrum)

$Int\ B=\emptyset$

$\overline{B}=B$

$Bd=B$

$\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=C$

(w euklidesie)

$Int(C)=\emptyset$

$\overline{C}=C$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$

$Bd(C)=C$ $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$

(w maksimum)

$Int(C)=\emptyset$

$\overline{C}=C$ $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$

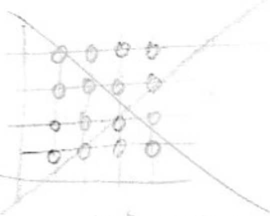
$Bd(C)=C$

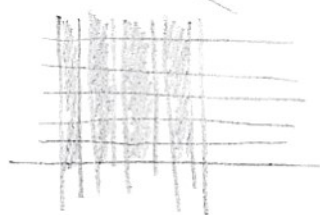
(w centrum)

$Int(C)=\emptyset$

$\overline{C}=C$ $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$

$Bd(C)=C$





$\{\langle x,y\rangle : y=2x\}=D$

$Int(D)=\emptyset$ +

$\overline{D}=D$ +

$Bd=D$ +

$Int(D)=\emptyset$

$\overline{D}=D$

$Bd(D)=D$

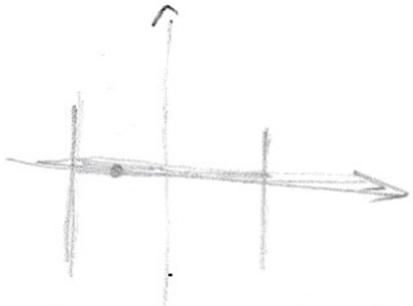
$Int(D)=D\setminus\{0,0\}$

$\overline{D}=D$

$Bd(D)=\{0,0\}$

homeomorfizmy afiniczne

Zad 1.



gdy $\varrho(m,n) = \max\{m,n\}$

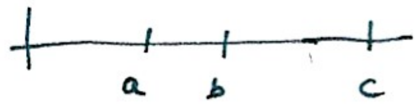
~~to oraz b.s.o. $|m|>|n|$~~

to $\max\{m,n\} \geq |m|, |n|$

~~ogólnie trochę ile je zde~~ jest obcięte. już lepiej

Weźmy dowolny $x \in \text{int} A \cup \text{int} B$

- dodatnio określona bo obcięta do dodatnich
- symetryczna
- warunek trójkąta $\varrho(a,b) + \varrho(b,c) > \varrho(a,c)$



$\max\{a,b\} + \max\{b,c\} > \{\max\{a,c\}$ $\Leftarrow\Rightarrow$

BSO. $c > a$

$\max\{c,b\} \geq \{\max c\}$

zatem działa

$x \in \text{int}(A)$

$\vee\, x \in \text{int}(B)$

zatem

$B_\varepsilon(x) \subseteq \text{int}(A)$

$\vee\ B_\varepsilon(x) \subseteq \text{int}(B)$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \text{int}(A \cup B)$

- $B_{\varepsilon A}$ gdy $x \in A$
- $B_{\varepsilon B}$ gdy $x \notin A$

(1) tak, to metryka.

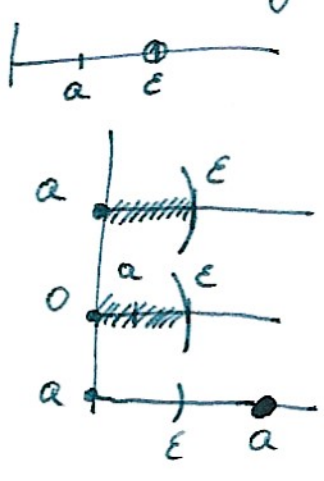
(2) kula:

z tym punktem

~~czyli kula to przedział zamknięty [0, ε]~~

bo:

- Weźmy dowolne a ~~(jakby w ndi ε)~~ dowolny przedział. chcemy się zmieścić o ε
- gdy a = 0 to ...,
  to a ~~ε trzymać~~ [0, ε) jak my 0 to ε mało pasuje.
- gdy a < |ε| to przedział otwarty [0, ε]



- gdy a > ε to punkt a

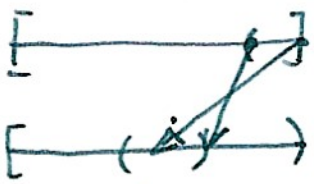
raczej nie.
nie mamy jak wepchnąć przedziału w 3° otwartego.

a) zbiór zamknięty kojarzy się z ciągami
a ciągi z coraz bliżej.

$\forall \varepsilon \; \forall x_1, x_2 \; \exists \delta \; (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$

[——] ——> [————]   [to mamy z twierdzenia]

myślę nie wprost: gdy przejdę na otwarty to gdzieś zgubię punkt
i teraz z tego mam jakoś sprzeczność bo te dwa są odległe?



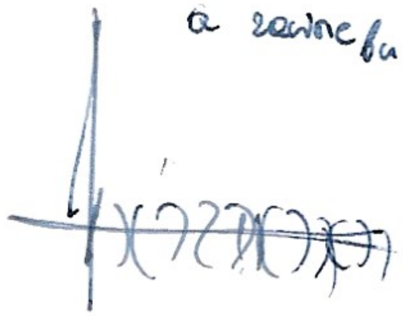
jednostajna ciągłość — to taki cud
czemu jej tu nie ma?
może mogę ją wziąć z zawartości przedziału?
zatrzymuję się może.

czyli koniec. Z => a) a nie który odwr.

a => b

każdy element jest sumą. bazy no ma sens.

ma sens. bo.... z bazy dla się wszystko zbudować
a zawsze budujemy z otwartych?



gdyby otw. prz. nie
nie był by przedziałem
dla $\underline{k}$ dodat.

$x \in (\mathrm{Int}(A^c))^c \Leftrightarrow x \notin \mathrm{Int}(A^c) \Leftrightarrow \forall_{r>0}\ B_r(x) \cap (A^c)^c \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{r>0}\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

czyli x jest w domknięciu zbioru A. $\Leftrightarrow x \in \overline{A}$

Zad 3

a) NIE

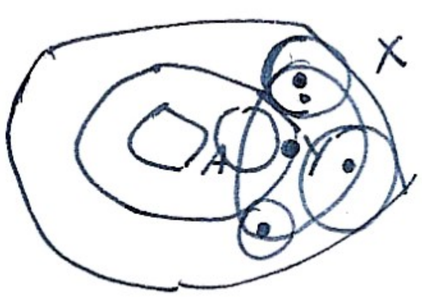
$(\mathbb{R}^2, d_{\substack{euk \\ \text{centrum}}})$

$(\mathbb{R}_2, d_{euk})$

otwarte w $\mathbb{R}$

b) TAK

on jest jedynym z U



A w każdej kuli jest w Y

a ta kula jest w kuli ile rekul...

i czemu one są coraz drugą?

gdzie? jest w tym zbiorze.

Zwarowane trójkąty

dowolna przestrzeń topologiczna

zawiera bazę

bo topologia jest bazą

bierzemy $\frac{1}{n}$ i odległość jest coraz $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ i to cały dowód?

Jak wyznaczyć czyli?

liwowe - bijekcja

Zadanie 1.

Znajdź podprzestrzeń X przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ zawierającą zbiór $A=[0,1)$ taką, że A w X jest otwarty („ale nie jest domknięty" chyba znaczy tylko tyle że to nie punkt, lub cała płaszczyzna)

$X=[0,2)$, bo wtedy kula idzie tylko w jedną stronę.

Zadanie 2.

Pokaż że podprzestrzeń X ~~przestrzeni Euklidesowej~~ $=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}$ jest dyskretna (tzn. każdy podzbiór jest otwarty)

(podprzestrzeń zachowuje metrykę, ale obcina ją do swoich wartości)

Sprawdzamy więc czy gdzieś mieści się kula (w metryce Euklidesowej - więc przedział) w której otoczeniu będzie

co znaczy podprzestrzeń jest dyskretna? każdy podzbiór jest otwarty...

nie dajem sobie rady.

Zad 6.

Weźmy dowolny ciąg należący do tej sfery, przyjmijmy nie wprost że granica nie należy do sfery, zatem pt odległa od x o $r' \neq r$, biorąc ε-otoczenie wielkości $\frac{|r'-r|}{2}$ granicy nie znajdujemy żadnych punktów.

Napis kolejny chyba ma błąd...

L1

Zad 12

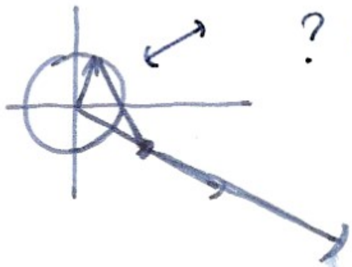
Niech X będzie przestrzenią liniową. Normą na X nazywamy funkcję, która uogólnia pojęcia długości wektora w analogiczny sposób jak metryka uogólnia pojęcie odległości punktów.

① Norma generuje metrykę.

Ma sens.

i zinterpretujmy od normy jako odległość w odpowiedniej metryce □

② Weźmy metrykę centrum.



? to jeszcze jakoś przejdzie. Zależnie od definicji...

Kostka Cantora $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & \end{cases} \qquad \Delta(x,y) = \min\{n : x(n) \neq y(n)\}$$

① Coś się rozpisuje o ε.

Jak zrobić Δ z ciągu o wiem. ciąg to iloczyn kartezjański ?

No w sumie, bo innych operacji nie ma?

Nie, bez sensu.

Zadanie 4

Pewnie jakoś indukcja:

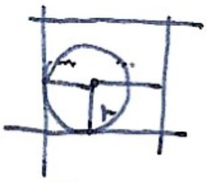
Weźmy dowolny punkt ze zb. (a_1, b_1) i oznaczmy go x

dla $\mathbb{R}$ zbiór (a_1, b_1) jest otwarty bo $\forall x \exists r > 0 \ B_r(x) \subseteq (a_1, b_1)$

$r = \min\left(\frac{x-a_1}{2}, \frac{b_1-x}{2}\right)$

Krok. Załóżmy że dla pewnego n wiemy że dla $\mathbb{R}^n$ zbiór $(a_1, b_1)\times \ldots \times(a_n, b_n)$ jest otwarty. Weźmy dowolnego x ∈ do zbioru. Z definicji mamy istnieje r

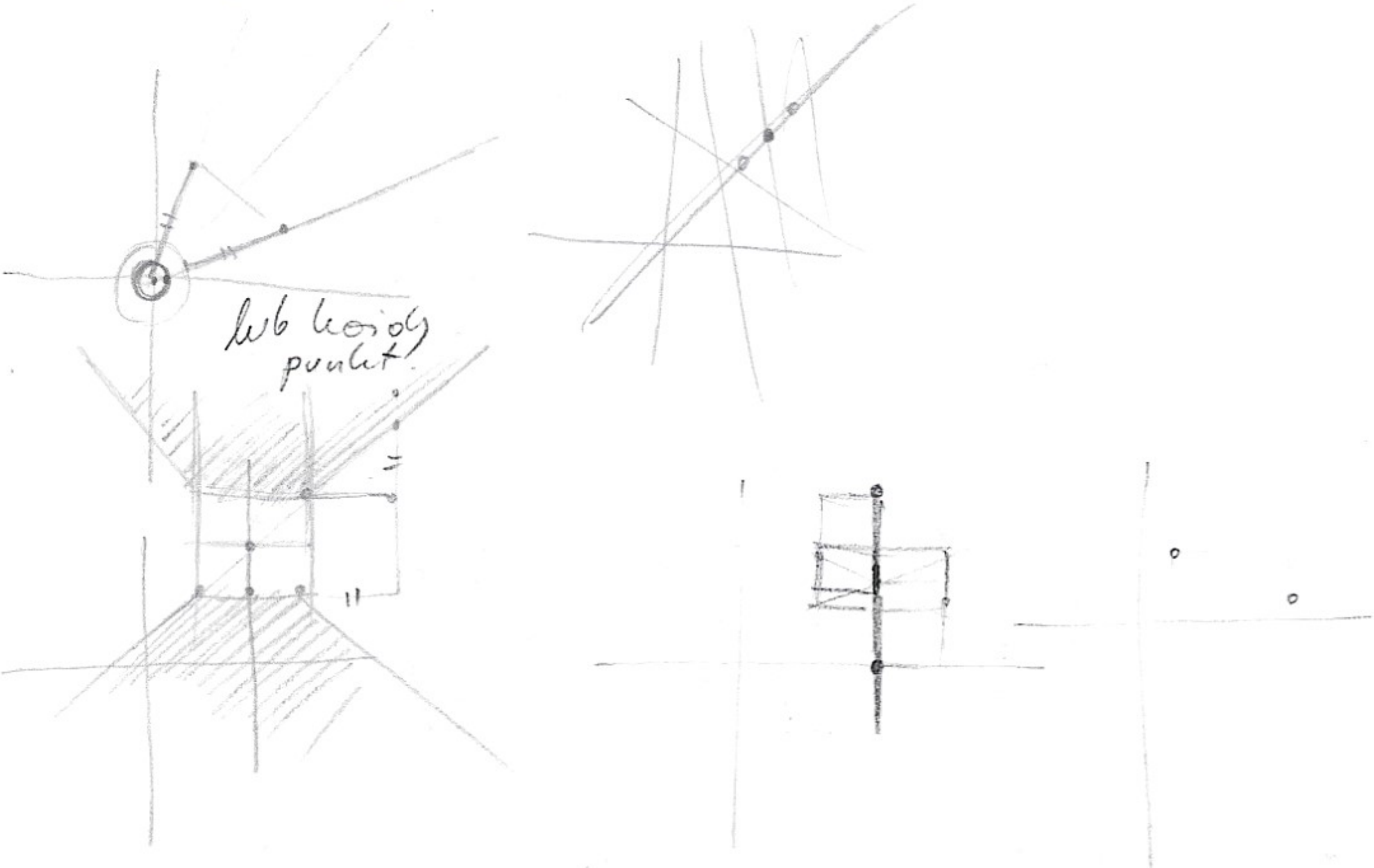
chcemy udowodnić że dla $\mathbb{R}^{n+1}$ zbiór $(a_1, b_1)\times \ldots (a_n, b_n)\times(a_{n+1}, b_{n+1})$ również jest otwarty. Ze odcinka weźmy dowolny punkt y. Jest to równoważne z wzięciem punktu w $\mathbb{R}^{n+1}$ $x \times y$. Sprawdźmy czy dla $r = \min\left(r, \frac{|a_n-y|}{2}, \frac{b_n-y}{2}\right)$ działa. Tak bo r mieści się w $\cancel{\mathbb{R}^n}$ podm $\mathbb{R}^n$, więc min też.



Widać.

cw II.

słownie: widać bo jak weźmiemy $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ to dla każdego ε kula się nie mieści:



ilor

• graf skier ~~po~~ dł. el. najdłuższej ścieżki
• graf nieskier dł. el. najdł ścieżki
• graf nie spójny V + O dla niedopas.

• dodaj okrąg V
• symetryczn
• warunek trójkąta też

• zb. słów

abc
abcd

abcd
abc

ilość tych samych liter na tych samych węzł
albo najdł wspólny podciąg?

a b c d e $\frac{1}{3}$ eeebcd

~~eeb~~

a

abcd $\xrightarrow{1/2}$ abdc

$1/1$ acbd $\xrightarrow{1/1}$ abdc

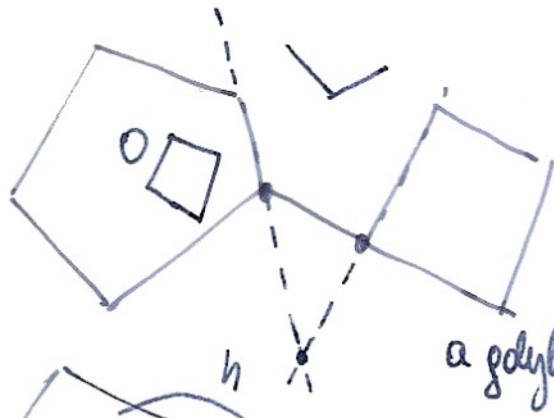
1/7

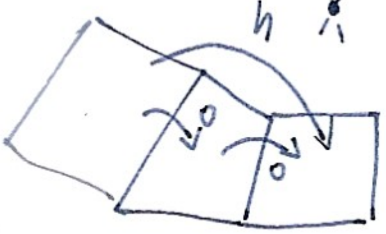
$1/1$ abcde $\xrightarrow{1/4}$ abcd

acc $\xrightarrow{1/1}$ abcd

przechodzić
chodzić

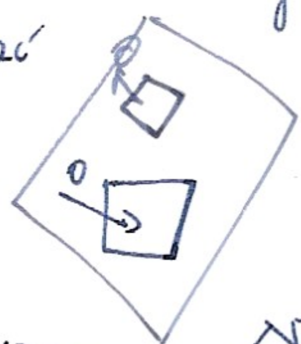
abcd
abbd





a gdyby brać sup?
podwoto.

wyjdzie dalej nie.



odl najdł wench