1 UMRZEĆ PRZYJDZIE

1.1 ZWARTOŚCI

PRZESTRZEŃ ZWARTA – z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone

– w przypadku przestrzeni metrycznej – z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny

Zwartość jest przechodnia przez ciągłe suriekcje.

Jeśli X jest przestrzenią zwartą oraz $X \subseteq Y$ jest przestrzenią Hausdorffa, to X jest domknięty w Y.

Jeżeli X jest zwartą przestrzenią metryczną, to X jest całkowicie ograniczona, czyli

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists F \subseteq X)\,(\forall x \in X)\,(\exists f \in F)\; d(x, f) < \varepsilon$$

1.2 SPÓJNOŚĆ

Przestrzeń X jest SPÓJNA, jeżeli nie istnieją $U, V \underset{otw}{\subseteq} X$ takie, że

$$U \cap V = \emptyset \land U \cup V = X$$

Jeżeli $(X_i)_{i \in I}$ to rodzina spójnych podprzestrzeni X, gdzie $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, to wówczas $\bigcup_{i \in I} X_i$ jest przestrzenią spójną.

Spójność jest przechodnia przez ciągłe suriekcje.
SPÓJNOŚĆ ŁUKOWA – jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ zachodzi

$$(\forall x \neq y \in X)\,(\exists h : \xrightarrow{ciagla} X)\; h(0) = x \land h(1) = y$$

Zbiory przeliczalne nie są łukowo spójne, a przeliczalne zbiory Hausdorffa nie są ogółem spójne.

Przestrzeń jest CAŁKOWICIE NIESPÓJNA, jeżeli nie zawiera niejednopunktowych podprzestrzeni spójnych

Punkt $x \in X$ rozspaja spójną przestrzeń X, jeżeli $X \setminus \{x\}$ nie jest spójne.

Jeżeli x rozspaja X na α części i $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to $h(x)$ rozspaja Y na α części

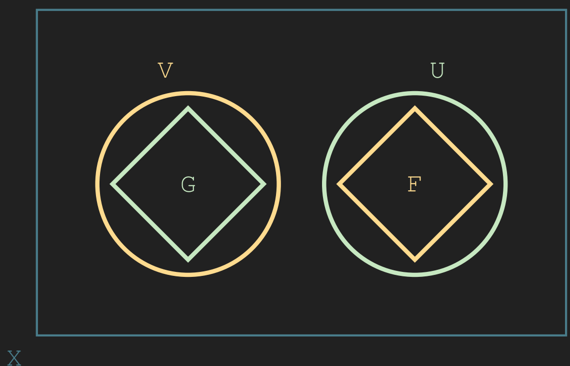
PRZESTRZEŃ ZEROWYMIAROWA – ma bazę ze zbiorów otwarto-domkniętych, a jedynymi jej podzbiorami spójnymi są zbiory jednopunktowe i zbiór pusty.

1.3 NORMALNOŚĆ

Przestrzeń X jest przestrzenią NORMALNĄ, jeżeli

$$(\forall F, G \underset{dom}{\subseteq} X)\; F \cap G = \emptyset$$

$$(\exists U, V \underset{otw}{\subseteq} X)\; U \cap V = \emptyset \land F \subseteq U \land G \subseteq V$$



LEMA URYSOHNA - jeżeli przestrzeń X jest normalna, a $F, G \underset{\text{dom}}{X}$ są rozłączne, to

$$(\exists\, f : X \xrightarrow{\text{ciagla}} [0,1])\ f_{\restriction F} \equiv 0 \wedge f_{\restriction G} \equiv 1$$

TWIERDZENIE TIETZEGO - niech X będzie przestrzenią normlaną, a $D \subseteq X$ będzie zbiorem domkniętym. Wtedy ciągłą funkcję

$$f : D \xrightarrow{\text{ciagla}} \mathbb{R}$$

możemy rozszerzyć do ciągłej funkcji

$$F : X \to \mathbb{R}$$

$$(\forall\, x \in D)\ F(x) = f(x)$$

1.4 PRZESTRZEŃ ILORAZOWA

Jeśli dana jest indeksowana rodzina zbiorów $(X_i)_{i \in I}$ to jej KOPRODUKTEM nazywamy

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i$$

z najsliniejszą topologią taką, że wszystkie funkcje

$$f_i : X_i \to \bigsqcup X_i$$

$$f_i(x) = \langle x, i \rangle$$

są ciągłe.

Przestrzeń jest spójna $\iff$ nie jest homeomorficzna z koproduktem dwóch różnych przestrzeni.

PRZESTRZEŃ ILORAZOWA to przestrzeń topologiczna z określoną na niej relacją równoważności $\sim$. Topologią takiej przestrzeni jest ciągła funkcja $f : X \to X$, $f(x) = [x]_\sim$

N-ROOZMAITOŚĆ to łukowo spójna przestrzeń topologiczna, która jest lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$, to znaczy, że

$$(\forall\, x \in X)\ (\exists\, U \underset{\text{otw}}{\ni} x)\ U \cong \mathbb{R}^n$$

1.5 ŚCIĄGALNOŚĆ

PĘTLA to ciągła funkcja

$$p : [0,1] \to X$$

$$pp(0) = p(1)$$

PRZESTRZEŃ JEDNOSPÓJNA - łukowo spójna i każdą pętle można ściągnąc do punktu (jest homotopijnie równoważna z pewnym punktem)

Jednospójność zachowuje się przez homeomorfizmy.

PRZESTRZEŃ ŚCIĄGALNA - identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stała, czyli możemy ją ściągnąć do jdnego punktu :v

TWIERDZENIE BROUWERA - jeśli istnieje ciągła funckja

$$f : D^n \to D^n,$$

gdzie D^n to n-wymiarowy dysk, to

$$(\exists\, x)\ f(x) = x,$$

czyli na dysku istnieje punkt stały.

1.6 PRZESTRZENIE ZUPEŁNE

Ciąg (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall n, m \geq N)\; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Przestrzeń metryczna jest ZUPEŁNA, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Przestrzenie zwarte są zupełne.

Przestrzeń metryczna jest METRYZOWALNA W SPOSÓB ZUPEŁNY, jeśli jest homeomorficzna z pewną przestrzenią zupełną.

KONTRAKCJA to funkcja

$$f : X \to X$$

taka, że

$$(\exists c < 1)\,(\forall x, y \in X)\; d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

TWIERDZENIE BANACHA o punkcie stałym - jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną, a

$$f : X \to X$$

jest kontrakcją, to

$$(\exists x \in X)\; f(x) = x.$$

TWIERDZENIE CANTORA - jeśli X jest przestrzenią zupełną, a (F_n) to ciąg zbiorów domkniętych takich, że

$$\operatorname{diam}(F_n) \to 0$$

oraz

$$(\forall n)\; F_{n+1} \subseteq F_n,$$

to wówczas

$$\bigcap F_n \neq \emptyset$$

TWIERDZNIE BARE'A - jeśli X jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, a (F_n) jest ciągiem domkniętych zbiorów o pustym wnętrzu, to

$$\bigcup F_n \neq X.$$

Jeśli X jest przestrzenią zupełną, a $F_n \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym o pustym wnętrzy, to $A \subseteq X$ jest zbiorem 1 kategorii, jeśli

$$A = \bigcup F_n.$$

TWIERDZENIE AASOLIEGO-ARZELI - niech $F \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem takim, że

- F jest wspólnie ograniczony, czyli

$$(\exists c > 0)\,(\forall f \in F)\,(\forall x \in [0,1])\; |f(x)| < c$$

- F są jednakowo ciąagłe, czyli

$$(\forall x)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall f \in F)\; |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wtedy $\overline{F}$ jest podprzestrzenią zwartą.
PRZESTRZEŃ POLSKA - zupełna i ośrodkowa :v
Zbuór $A \subseteq X$ ma WŁASNOŚĆ BAIRE'a, jeśli istnieje zbiór otwartu U oraz zbiór 1 kategorii M takie, że

$$A = U \Delta M = (U \setminus M) \cup (M \setminus U)$$

czyli jest zbiorem otwartym modulo zbiór 1 kategorii?

Domknięte podzbiory $\mathbb{R}$ mają własność Baire's

Rodzina zbiorów o własności Baire'a jest zamknięta na dopełnienia i nieskończone sumy.

Rodziny zbiorów o własności Baire'a są zamknięte na przekroje.

Rodziną ZBIORÓW BORERLOWSKICH nazyzwamy najmniejszą rodzinę, która:

- zawiera wszystkie zbiory otwarte
- jest zamknięta na dopełnienia i przekroje.

Każdy zbiór boerlowski ma własność Baire'a.