

PODSTAWOWE POJECIA ALGEBRY LINIOWEJ

CIALO

CIALO to zbior K z dwoma dzialniami, dodawaniem i mnozeniem, i ich elementami neutralnymi ($0, 1 \in K$)
dodawanie i mnozenie to funkcje $+: K \times K \rightarrow K$

WLASNOSCI CIAL:

- 1. dodawanie i mnozenie sa laczne, przemienne i rozdzielne
- 2. istnieja elementy neutralne: $0 + x = 1 \cdot x = x$
- 3. dla kazdego elementu ciala istnieje element przeciwny: $\forall x \exists (-x) \quad x + (-x) = 0$
- 4. dla kazdego $x \neq 0$ istnieje element odwrotny: $\forall x \neq 0 \exists x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$
- 5. $0 \neq 1$ - wyklucza zbior jednoelementowy

Jesli istnieja odpowiednie $-x, x^{-1}$, to sa one jedyne - **dowod na cwiczeniach**

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ sa cialami, natomiast \mathbb{Z} nie jest cialem (nie ma elementu odwrotnego do 2, **pierscienie**)

Kazdy podzbior $K \subseteq \mathbb{C}$, ktory jest zamkniety na dodawanie, mnozenie oraz dla kazdego elementu K mozna znalezc w K element do niego przeciwny i odwrotny, tez jest cialem.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z dodawaniem i mnozeniem modulo 5 jest cialem: jest element neutralny: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 4 = 1$
 $\{0, 1, \dots, p - 1\}$, gdzie p jest liczba pierwsza jest cialem (**dowod z algorytmu euklidesa**)

Dla kazdej liczby naturalnej n i dla kazdej liczby pierwszej p jest cialo, ktore ma dokladnie p^n elementow i sa to wszystkie ciala skonczone.

Dla dowolnego $d \in K$ mozemy zdefiniowac $\mathbb{Q}[d] = \{a + b \cdot d : a, b \in \mathbb{Q}\}$

Jesli K jest cialem, to mozemy rozpatrzec zbior wszystkich wielomianow o wspolczynnikaach w K : $K[X]$ i nie jest cialem (nie istnieje X^{-1}).

Mozemy rozpatrzyc tez zbior wiekszy, **cialo funkcji wymiernych** $K(X)$, czyli formalne ilorazy wspolczynnikaow z K , tyle ze w mianowniku nie moze pojawic sie 0:

$$K(X) = \{ \frac{p}{q} : p, q \in K[X], q \neq 0 \}$$

Jak dowodzic twierdzenia:

$$\forall x \in K \quad 0 \cdot a = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \\ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) &= 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a) \\ 0 &= 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a \end{aligned}$$

PRZESTRZEN LINIOWA

PRZESTRZEN LINIOWA nad K to zbior V z dzialaniem dodawaniem i mnozeniem:
 $+: V \times V \rightarrow V$
 $\cdot: K \times V \rightarrow V$
 $0 \in V$

WLASNOSCI:

$+$ i \cdot spelniaja oczywiste wlasnosci
Lacznosc mieszana dla mnozenia:

$$(\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V \gamma = \alpha \cdot_V (\beta \cdot_V \gamma)$$

Rozdzielosc mnozenia wzgledem dodawania:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_V (u +_K w) &= \alpha \cdot_V u +_V \alpha \cdot_V w \\ (\alpha +_V \beta) \cdot_V u &= \alpha \cdot_V u +_V \beta \cdot_V u \end{aligned}$$

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ to przestrzenie liniowe nad \mathbb{R}

Dla kazdego iloczynu kartezjanskiego ciala, iloczyn ten jest cialem. Bardziej ogolnie mozna to ujac, ze jesli A jest dowolnym zbiorem, a K^A jest zbiorem wszystkich funkcji z A w K , to K^A jest przestrzenia liniowa nad K

$K[X]$ to zbior wielomianow o wspolczynnikaach z K , to jest on przestrzenia liniowa nad K . Tak samo $K_n[X]$ (wielomiany co najwyzej stopnia n) rowniez sa przestrzenia liniowa.

$C(\mathbb{R})$ to zbior wszystkich funkcji ciaglych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i jest on przestrzenia liniowa nad \mathbb{R}

Jesli przemnozymy dowolny wektor przez 0, to dostaniemy **wektor zerowy**:

$$0 \cdot v = \vec{0}$$

Dla kazdego wektora z V i kazdego skalaru z K istnieje dokładnie jeden wektor w taki, że:

$$\forall v \in V \forall a \in K \exists! w \in V \quad a \cdot v + w = 0$$

Weźmy $v = -a^{-1} \cdot w$. Chcemy udowodnić równanie

$$a \cdot v + w = 0$$

$$a \cdot (-a^{-1} \cdot w) + w = 0$$

$$(-1 \cdot 1) \cdot w + w = 0$$

$$(-1 + 1) \cdot w = 0$$

$$0 \cdot w = 0$$

Z tego wynika, że $(-1) \cdot w = -w$ oraz $-(v + w) = (-v) + (-w)$.

.....

LEMAT jeśli V jest przestrzenią liniową, a $W \subseteq V$, takim, że $W \neq \emptyset$ oraz

$$\forall a \in K \forall w \in W \quad a \cdot w \in W$$

$$\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W,$$

to W jest przestrzenią liniową. Jest to odpowiednik twierdzenia dla ciał.

DOWÓD:

Własności dodawania i odejmowania przenoszą się automatycznie. Zostaje sprawdzić, że

$$1. \quad 0 \in W$$

$$2. \quad \forall w \in W \exists -w \in W$$

1. Ponieważ $W \neq \emptyset$, stąd istnieje jakieś $w \in W$. Wówczas,

$$0 \cdot w = \vec{0}$$

z tego, że W jest zamknięte na mnożenie przez skalary. Więc pokazaliśmy, że $0 \in W$.

2. Tak samo, skoro możemy przemnożyć $w \in W$ przez każdy skalar i otrzymać element W , Wówczas

$$(-1) \cdot w = -w \in W$$

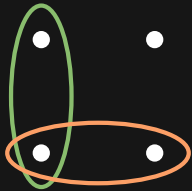
Podzbiór $W \subseteq V$, którego istnienie udowodnilismy wyżej, nazywamy **PODPRZESTRZENIĄ** i oznaczamy

$$W \leq V$$

.....

PRZYKŁADY:

Proste przechodzące przez 0 w K^2 są podprzestrzeniami. Niech $K = F_2 = \{0, 1\}$ (K to ciałko dwuelementowe)



Tak samo proste przechodzące przez 0 w K^3 są przestrzeniami. Na przykład dla $K = F_3 = \{0, 1, 2\}$



PROSTA – podprzestrzeń rozpięta przez jeden wektor, czyli bierzemy jeden wektor i patrzymy na wszystkie jego skalarno nierówności.

W ogólności, $n > m \implies K^n \geq K^m$.

$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R})$ zbiór funkcji różniczkowalnych jest podprzestrzenią zbioru funkcji ciągłych. Ten z kolei jest podprzestrzenią zbioru wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ($C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$):

$$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Zbiór funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} zbiegających do dowolnego x_0 to też jest podprzestrzenia:

$$\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}:\lim_{x\rightarrow x_0}f(x)=0\}\leq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Mozemy też przekroic dwie podprzestrzenie. Na przykład wszystkie funkcje rozniczkwane, ktore daza do 0.
Zbiór ciagow spelniajacych rekurencje:

$$\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}:\forall n\quad a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\}\leq\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

jest podprzestrzenia zbioru wszystkich ciagow o indeksach w \mathbb{N} i wyrazach \mathbb{R}

.....

LEMAT: dla dwóch podprzestrzeni $W_1, W_2 \leq V$ zachodzi:

1. $W_1 \cap W_2 \leq V$

2. $W = W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

czyli **suma kompleksowa podprzestrzeni jest podprzestrzenia**

1. lematu zostanie udowodniona **NA CWICZENIACH**.
2. Niepustosc jest oczywista. Chcemy sprawdzic, czy ten zbiór jest zmakniety na dzialania.
Zmakniecie na mnozenie przez skalary:

$$a \in K, \quad w_1 + w_2 \in W$$
$$a \cdot (w_1 + w_2) = \underbrace{a \cdot w_1}_{\in W_1} + \underbrace{a \cdot w_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2 = W.$$

Zamkniecie na dodawanie:

$$(w_1 + w_2), (w'_1, w'_2) \in W, \quad w_1, w'_1 \in W_1, \quad w_2, w'_2 \in W_2$$
$$(w_1 + w_2) + (w'_1 + w'_2) = w_1 + w_2 + w'_1 + w'_2 = \underbrace{(w_1 + w'_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w'_2)}_{\in W_2} \in W$$

1. $W_1 \leq V \wedge W_1 \leq W_2 \implies W_2 \leq V$
2. $W_1, W_2 \leq V \wedge W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 \leq W_2$

CWICZENIA

.....

KOMBINACJA LINIOWA

Dla pewnej przestrzeni liniowej V i zbioru $A \subseteq V$ **OTOCZKA LINIOWA** A
to najmniejsza podprzestrzen V , ktora zaiwera A

$$\text{Lin}(A) = \{v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k : \alpha_k \in K \wedge v_k \in A\}$$

DOWOD:
 $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \in \text{Lin}(A)$ mozna pokazac korzystajac z prostej **indukcji**.
Wystarczy pokazac, ze zbiór takich wektorow jest podprzestrzenia.

$$\text{Lin}(A) \neq \emptyset$$

Bo pusta suma jest rowna zero (czyli wektor zerowy)

$$\text{Lin}(\emptyset) = \sum_{k=1}^0 \alpha_k v_k = 0.$$

Wezwiemy dwa wektory bedace sumami wektorow w A :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k + \sum_{l=1}^m \beta_l w_l.$$

Rozpiszmy to:

$$\begin{array}{ll} \gamma_1, \dots, \gamma_n & \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n & \beta_1, \quad \dots, \quad \beta_m \\ v_1, \dots, v_n & w_1, \quad \dots, \quad w_m \\ u_1, \dots, u_n & u_{n+1}, \dots, u_{n+m} \end{array}$$

Z tego widac, ze

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k + \sum_{l=1}^m \beta_l w_l = \sum_{j=1}^{n+m} \gamma_j u_j.$$

Czyli $\text{Lin}(A)$ jest zamkniety na dodawanie.

Zamkniecie na mnozenie, przy pomocy sumy kompleksowej:

$$\alpha \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n (\alpha \cdot \alpha_k) v_k$$

Z powyzzszego rozumowania wynika, ze

$$\text{Lin}(A) = \bigcap \{W \leq V : A \subseteq W\}$$

DOWOD:

Z definicji $\text{Lin}(A) \subseteq W$, czyli

$$\text{Lin}(A) \subseteq \bigcap \{W \leq V : A \subseteq W\},$$

a otoczka liniowa nalezy do tej rodziny podprzestrzeni:

$$\text{Lin}(A) \in \{W \leq V : A \subseteq W\}$$

wiec zawiera jego przekroj

$$\text{Lin}(A) = \bigcap \{W \leq V : A \subseteq W\}$$

KOMBINACJA LINIOWA wektorow $v_1, ..., v_n$ to element $\text{Lin}(v_1, ..., v_n)$, czyli wektor postaci

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$$

PRZYKLADY:

prosta rozpieta przez niezerowy wektor v :

$$\text{Lin}(v) = \{\alpha \cdot v : \alpha \in K\}$$

kombinacja punktow nalezacych do hiperboli na \mathbb{R}^2 :

$$\text{Lin}(\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \}) = \mathbb{R}^2$$

kombinacja liniowa wszystkich punktow na plaszczyźnie:

$$\text{Lin}(\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \}) = \mathbb{R}^3$$

.....

$$A \subseteq B \implies \text{Lin}(A) \subseteq \text{Lin}(B)$$

DOWOD: $A \subseteq B \subseteq \text{Lin}(B)$ i $\text{Lin}(B) \leq V$, wiec $\text{Lin}(A) \leq \text{Lin}(B)$

$$\text{Lin}(\text{Lin}(A)) = \text{Lin}(A)$$

DOWOD: $\text{Lin}(A) \leq V$, wiec jest najmniejsza podprzestrzena zawierajaca $\text{Lin}(A)$

$$b \in \text{Lin}(A) \iff \text{Lin}(A) = \text{Lin}(A \cup \{b\})$$

DOWOD: $b \in \text{Lin}(A)$, wiec $A \subseteq A \cup \{b\} \subseteq \text{Lin}(A \cup \{b\})$ i $A \subseteq \text{Lin}(A) \subseteq \text{Lin}(A \cup \{b\})$.

Z drugiej strony, wiemy, ze $A \cup \{b\} \subseteq \text{Lin}(A)$, czyli $\text{Lin}(A \cup \{b\}) \subseteq \text{Lin}(\text{Lin}(A)) = \text{Lin}(A)$.

Dostajemy $\text{Lin}(A \cup \{b\}) \subseteq \text{Lin}(A)$ oraz $\text{Lin}(A) \subseteq \text{Lin}(A \cup \{b\})$. Mamy inkluzje w obie strony, takze $\text{Lin}(A \cup \{b\}) = \text{Lin}(A)$.

LINIOWO NIEZALEZNE

Mowimy, ze wektory $v_1, ..., v_n$ sa LINIOWO NIEZALEZNE (lnz), gdy

$$\sum \alpha_k v_k = 0 \implies \forall k \quad \alpha_k = 0$$

Zbior $A \subseteq V$ jest lnz, gdy kazdy (skonczony) zbior roznnych wektorow z A jest lnz.