

BOB BUDOWNICZY

konsultacje w 703

pon 10¹⁵-11¹⁵

czw 12⁰⁰-13⁰⁰

AKSJOMATY

ZBIOR i NALEZENIE sa *pojeciami pierwotnymi* - nie definiujemy ich, ale opisujemy ich wlasnosci

1. **AKSJOMAT EKSTENSJONALNOSCI** - zbior jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy
$$\forall x \forall y \quad (x = y \iff \forall z \quad (z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakładamy, że od tego momentu istnieją wyłącznie zbiory. Nie ma nie-zbiorów. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorów i okazuje się, że w tym świecie można zinterpretować całą matematykę.

2. **AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO** - istnieje zbior pusty \emptyset
$$\exists x \forall y \quad \neg y \in x$$

Na podstawie tych dwóch aksjomatów można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden zbior pusty:

Istnienie - aksjomat zbioru pustego

Jedynosci - niech P_1, P_2 będą zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego $z \neg z \in P_1 \wedge \neg z \in P_2$, czyli $z \in P_1 \iff z \in P_2$. Wobec tego na mocy aksjomatu ekstensjonalności mamy $P_1 = P_2$.

Przyjrzyjmy się następującemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N} \cap [10, +\infty), < \rangle$$

W systemie spełnione są oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Spełnianie bez interpretacji oznacza, że dla dowolnej interpretacji jest to spełnione.

3. **AKSJOMAT PARY** - dla dowolnych zbiorów x, y istnieje para $\{x, y\}$
$$\forall x, y \exists z \forall t \quad (t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Para nieuporządkowana jest wyznaczona jednoznacznie.

Aksjomat mówi tylko o istnieniu z , a można łatwo udowodnić, korzystając z aksjomatu ekstensjonalności, że takie z istnieje tylko jedno.

SINGLETONEM elementu x nazywamy zbior $\{x\} := \{x, x\}$

PARA UPORZĄDKOWANA (wg. Kuratowskiego) elementów x i y nazywamy zbior:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dla dowolnych elementów a, b, c, d mamy

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

dowód jako jedno z ćwiczeń

4. **AKSJOMAT SUMY** - dla dowolnego zbioru istnieje jego suma
$$\forall x \exists y \forall z \quad (z \in y \iff (\exists t \quad t \in x \wedge z \in t))$$

Ponieważ wszystko w naszym świecie jest zbiorem, to *każdy zbior możemy postrzegać jako rodzinę zbiorów* - jego elementy też są zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

kwantyfikator ograniczony: $\exists t \in x \quad z \in t$

Suma jest określona jednoznacznie *dowód jako jedno z ćwiczeń*
ten jedyny y oznaczamy przez $\bigcup x$

Suma dwóch zbiorów:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}$$

DOWOD: Ustalmy dowolne z . Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z \in \bigcup \{x, y\} &\stackrel{4.}{\iff} \exists t \ (t \in \{x, y\} \wedge z \in t) \stackrel{3.}{\iff} \exists t \ ((t = x \vee t = y) \wedge z \in t) \iff \\ &\iff \exists t \ ((t = x \wedge z \in t) \vee (t = y \wedge z \in t)) \iff \exists t \ (t = x \wedge z \in t) \vee \exists t \ (t = y \wedge z \in t) \implies \\ &\implies \exists t \ z \in x \vee \exists t \ z \in y \iff z \in x \vee z \in y \end{aligned}$$

uffff

5. AKSJOMAT ZBIORU POTEHOWEGO - dla każdego zbioru istnieje jego zbior potegowy

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \forall z \ (z \in y &\iff \forall t \in z \ t \in x) \\ \forall x \exists y \forall z \ (z \in y &\iff z \subseteq x) \end{aligned}$$

Zbior potegowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go $\mathcal{P}(x)$ dowod na cwiczeniach <3

6. AKSJOMAT WYROZNIANIA (wycinania)

to tak naprawdę *schemat aksjomatu*, czyli nieskończona rodzina aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(t)$ będzie formuła języka teorii mnogości. Wtedy dla tej pormuły mamy aksjomat:

$$\begin{aligned} A_{6\varphi} \text{ dla każdego zbioru } x \text{ istnieje zbior,} \\ \text{którego elementu spełniają te własności } \{t \in x : \varphi(t)\} \\ \forall x \exists y \forall t \ (t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t)) \end{aligned}$$

FULL VERSION: niech $\varphi(t, z_0, \dots, z_n)$ będzie formuła języka teorii mnogości. Wtedy pozostałe zmienne wolne będą parametrami (czasem zamiast z_0, \dots, z_n pisze się \bar{z}).

Dla każdego układu parametrów i dla każdego x istnieje y , taki że dla każdego $t \in y$ t należy do x i t spełnia formułę φ

$$\forall z_0 \forall z_1 \dots \forall z_n \forall x \exists y \forall t \ (t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t, z_0, \dots, z_n))$$

PRZYKŁAD: Weźmy półprosta otwarta: $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Druga półprosta $(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ i tak dalej. Czyli ogólna definicja półprostej to: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Dla każdej z tych półprostych trzeba wziąć inną formułę. Ale tak naprawdę one wszystkie są zdefiniowane za pomocą jednej formuły:

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie a funkcjonuje jako parametr.

7. AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA znowu to tak naprawdę schemat a nie aksjomat
ostatni z serii aksjomatów konstrukcyjnych

SKROT: istnieje dokładnie jedno x :

$$\exists! x \ \varphi(x) \iff \exists x \ (\varphi(x) \wedge \forall y \ (\varphi(y) \implies y = x))$$

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(x, y)$ będzie formuła języka teorii mnogości, taka, że:

$$\forall x \exists! y \ \varphi(x, y)$$

$A_{7\varphi}$ dla każdego zbioru x istnieje
zbior $\{z : \exists t \in x \ \varphi(t, z)\}$

$$\forall x \exists y \forall z \ (z \in y \iff \exists t \in x \ \varphi(t, z))$$

Czyli, w skrócie, *każdy zbior można opisać za pomocą operacji*.

FULL VERSION: niech $\varphi(x, y, p_0, \dots, p_n)$ będzie formuła języka teorii mnogości.

Miech dla każdego parametru i dla każdego x istnieje dokładnie jedno y , takie, że jeśli formuła jest spełniona dla x, y i \bar{p} , to dla każdego x istnieje y takie, że dla każdego z należącego do y istnieje t należące do x takie, że zachodzi t, z, \bar{p}

$$\forall p_0 \dots \forall p_n \ (\forall x \exists! y \ \varphi(x, y, \bar{p}) \implies \forall x \exists y \forall z \ (z \in y \iff \exists t \in x \ \varphi(t, z, \bar{p})))$$

KONSTRUKCJE

Niech x, y beda dowolnymi zbiorami. Wtedy:

$$x \cap y = \{t \in x : t \in y\}$$

$$x \setminus y = \{t \in x : t \notin y\}$$

$$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : \exists s \in x \exists t \in y \quad z = \langle s, t \rangle\}$$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjanskiego nie dziala w nowych warunkach - problemem jest z czego wyrozniamy te pare uporządkowana. $s, t \in x \cup y$, wiec $\{s\}, \{s, t\} \subseteq x \cup y$ a wiec $\{\{s\}, \{s, t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$, czyli nasza para potegowa jest elementem zbioru potegowego zbioru potegowego sumy zbiorow c:

$$\bigcap x = \{z \in \bigcup x : \forall y \in x \quad z \in y\} \text{ i wowczas } \bigcap \emptyset = \emptyset$$

RELACJA - definiujemy $\text{rel}(r)$ tak, ze r jest relacja. Mozemy definiowac relacje jako dowolny zbior par uporządkowanych:

$$\text{rel}(r) := \exists x \exists y \quad r \subseteq x \times y$$

FUNKCJA - bycie funkcja to bycie relacja taka, ze nie ma dwoch par o tym samym poprzedniku i roznych nastepnikach:

$$\text{fnc}(f) := \text{rel}(f) \wedge \forall x \forall y \forall z \quad (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \implies y = z)$$

wowczas dziedzine definiujemy:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \bigcup \bigcup f : \exists y \quad \langle x, y \rangle \in f\}$$

$$\text{rng}(f) = \{y \in \bigcup \bigcup f : \exists x \quad \langle x, y \rangle \in f\}$$

bo $\langle x, y \rangle \in f$, wiec $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in f$. No to wtedy $\{x\}, \{x, y\} \in \bigcup f$, czyli golutki $x, y \in \bigcup \bigcup f$

poki dzialamy na zbiorach skonczonych, zawsze dostaniemy zbior skonczone - nie moze skonstruowac zbioru nieskonczonego

8. AKSJOMAT NIESKONCZONOSCI

W wersji popularnonaukowej mowi, ze istnieje zbior nieskonczony.

W wersji naukowej wiemy, ze *istnieje zbior induktywny*:

$$\exists x \quad (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x \quad (y \cup \{y\} \in x))$$

Skoro nalezy do naszego x zbior \emptyset , to rowniez $\{\emptyset\}$ do x nalezy. Ale wtedy nalezy tez $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \dots$

TWIERDZENIE: istnieje najmniejszy zbior induktywny, czyli najmniejszy wzgledem zawierania. Zbior induktywny, ktory zawiera sie w kazdym innym zbiorze induktywnym.

DOWOD: Niech x bedzie zbiorem indukcyjnym, ktory istnieje z aksjomatu. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem indukcyjnym}\}$$

Teraz musze to udowodnic, czyli \emptyset nalezy do ω :

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla kazdego zb. induk. } y \subseteq x$$

Wtedy dla dowolnego $t \in \omega$ chce pokazac $t \cup \{t\} \in \omega$. Wtedy dla kazdego zbioru induktywnego $y \subseteq x$ mamy $t \in y$. Ale wtedy z definicji zbioru induktywnego, skoro $t \in y$, a y jest induktywny, to $t \cup \{t\} \in y$. Zatem z definicji przekroju $t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem indukcyjnym}\} = \omega$

ω jest najmniejszym zbiorem induktywnym, Niech z bedzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy $z \cap x$ jest zbiorem induktywnym i $z \cap x \subseteq x$. Czyli z jest jednym z elementow rodziny, ktorej przekroj daje ω : $z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ zb. ind}\} = \omega$

Kazdy element $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \dots$ mozemy utozsamic z **kolejnymi liczbami naturalnymi**. W takim razie ten najmniejszy zbior induktywny bedziemy utozsamiac z zbiorem liczb naturalnych, a jego elementy z kolejnymi liczbami naturalnymi.

Konsekwencja tego jest **zasada indukcji matematycznej**:

Niech $\varphi(x)$ bedzie formula o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{N}$, takiej, ze zachodzi $\varphi(0)$ i $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\varphi(n) \implies \varphi(n+1))$. Wowczas

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n)$$

DOWOD: Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$. Wtedy $A \in \mathbb{N}$ oraz A jest induktywny. Kolejne zbiory nalezace do zbioru induktywnego utozsamiac z $n \in \mathbb{N}$, wiec skoro dla $\varphi(n)$ nalezy do tego zbioru induktywnego, to rowniez $\varphi(n+1)$ nalezy do A . Skoro A jest zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq A$, wiec $A = \mathbb{N}$.

9. AKSJOMAT REGULARNOSCI (unfundowania)

Mielismy aksjomaty o istnieniu i serie aksjomatów konstrukcyjnych. Aksjomat regularności nie jest rzadnym z nich.

W każdym niepustym zbiorze istnieje element ε -minimalny:

$$\forall x \quad (x \neq \emptyset \implies (\exists y \in x \forall z \in x \quad \neg z \in y))$$

eliminuje patologie: $x \in x, x \in y \in x, \dots$

Antynomia Russella $\{x : x \notin x\}$ mogłby być zbiorem wszystkich zbiorów, ale jest eliminowany przez aksjomat regularności.

10. AKSJOMAT WYBORU [AC]

Dla każdej rozłącznej rodziny parami rozłącznych zbiorów niepustych istnieje selektor:

$$\forall x ((\forall y, z \in x \quad y \neq \emptyset \wedge (y \neq z \implies y \cap z = \emptyset)) \implies \exists s \forall y \in x \exists ! t \quad t \in s \cap y)$$

Problemem nie jest znalezienie tych punktów, ale znalezienie zbioru, który je wszystkie zawiera dla nieskończonego x .

Równoważność ciągłości w sensie Cauchyego i Heinego – dowód potrzebuje skorzystać z aksjomatu wyboru.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO – jeżeli mamy kule, to możemy ją rozłożyć na 5 kawałków i poprzesuwać je izometrycznie tak, żeby złożyć z nich dwie identyczne kule jakich mieliśmy na początku. Kawałki na które dzielimy są niemierzalne, nie mają objętości, i są *maksymalnie patologiczne*. Dzieje się dlatego, że aksjomat wyboru mówi o istnieniu selektora, ale nie jak on wygląda.

FUNKCJA WYBORU – niech \mathcal{A} będzie rodzina zbiorów niepustych. Funkcja wyboru dla rodziny \mathcal{A} nazywamy wtedy dowolną funkcję f

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad f(A) \in A$$

Aksjomat wyboru jest równoważny z tym, że dla każdej takiej rodziny istnieje funkcja wyboru. Czyli istnienie selektora utożsamiamy z istnieniem funkcji wyboru.