DOBRE PORZADKI, LICZBY PORZADKOWE

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorow jest przeliczalna:

$$\aleph_0 \geq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |A_n| \leq \aleph_0$$

DOWOD:

Poniewaz $|A_n| \leq \aleph_0$ $n \in \mathbb{N}$, istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Chcemy pokazac, ze istnieje rowniez bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$f(n,k) = f_n(k) \quad (☕)$$

Musimy skorzystac z aksjomatu wyboru, poniewaz nie wystarczy nam tylko jeden element z (f_n) - potrzebujemy znac wlasnosci wszystkich elementow (f_n) jednoczesnie. Rozpatrujemy wiec zbior funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}} \,:\, \varphi \text{ jest bijekcja}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ to wszystkie funckje $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *lub z* $\mathbb{N}$ *do podzbioru* A_n. Niech F bedzie funkcja wyboru dla rodziny $\{F_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, czyli kazdej rodzinie przypisuje element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Przepiszmy wiec (☕) w sposob bardziej formalny:

$$f(n,k) = F(F_n)(k).$$

Poniewaz $F(F_n)$ jest bijekcja, to rowniez f jest bijekcja.

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jesli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem czesciowo uporzadkowanym, w ktorym kazdy lancuch jest ograniczony z gory, to w X istnieje element maksymalny.

TWIERDZENIE: dla dowolnych zbiorow A, B zachodzi $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$

DOWOD:

Musimy skonstruowac *zbior czesciowo uporzadkowany* X*, do ktorego bedziemy mogli zastosowac LKZ*. Elementami tego zioru niech beda przyblizenia tego, co chcemy otrzymac:

$$X = \{f \,:\, \mathrm{fnc}(f) \,\wedge\, f \subseteq A \,\wedge\, \mathrm{rng}(f) \subseteq B \,\wedge\, \text{f jest 1-1}\}.$$

Bedziemy rozpatrywali $\langle X, \subseteq \rangle$. Chcemy zastosowac do niego LKZ, czyli musimy sprawdzic zalozenia.
Niech

$$\mathcal{L} \subseteq X$$

bedzie lancuchem w X. Chcemy pokazac, ze ma on ograniczenie gorne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L},$$

wtedy L jest ograniczeniem gornym $\mathcal{L}$, bo zawiera wszystkie elementy tego lancucha.