Zad 8. Uzasadnij, ze jezeli $A \subseteq V$ jest dowolnym zbiorem i $v \in \mathrm{Lin}(A) \setminus A$, to $A \cup \{v\}$ jest liniowo zalezy

Z definicji otoczki liniowej:

$$\mathrm{Lin}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

gdzie $a_k \in K$, K to cialo.

Skoro $v \in \mathrm{Lin}(A)$, to jest on:
1. wektorem w A
2. wektorem nienalezacym do A, ale bedacym suma wektorow znajdujacych sie w A.

Pierwsza mozliwosc jest wykluczona w zadaniu. Pozostaje nam wiec v bedace kombinacja liniowa wektorow w A. W takim razie, jesli do jakiegos zbioru wektorow dokladamy wektor bedacy liniowo zalezny od wektorow znajdujacych sie w tym zbiorze, to taka suma przestaje byc liniowo niezalezna.

Zad 13. Uzasadnij, ze jesli 3-elementowy zbior $\{u, v, w\}$ jest baza V, to rowniez $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest baza V

1. $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest liniowo niezalezny.

$$w = a(u+v) + b(u+2v+w)$$

$$w = au + av + bu + 2bv + bw$$

$$w - bw = au + bu + av + 2bv + bw - bw$$

$$w(1-b) = (a+b)u + (a+2b)v$$

$$w = \frac{a+b}{1-b}u + \frac{a+2b}{1-b}v$$

Ale zbior $\{u, v, w\}$ jest liniowo niezalezny, wiec nie mozemy przedstawic w jako kombinacji liniowej u i v.

$$u + v = a(w) + b(u+2v+w)$$

$$u + v = (a+b)w + b(u+2v)$$

$$u + v - b(u+2v) = (a+b)w$$

$$(1-b)u + (1-2b)v = (a+b)w$$

$$\frac{1-b}{a+b}u + \frac{1-2b}{a+b}v = w$$

Tak samo prowadzi do sprzecznosci.

$$u + 2v + w = a(u+v) + bw$$

$$u + 2v - a(u+v) = (b-1)w$$

$$(1-a)u + (2-a)v = (b-1)w$$

$$\frac{1-a}{b-1}u + \frac{2-a}{b-1}v = w$$

Analogicznie.

2. Jest maksymalnym zbiorem liniowo niezaleznym.

Tak samo jak baza $\{u, v, w\}$ ma 3 elementy i jest liniowo niezalezny, wiec jest maksymalnym zbiorem liniowo niezaleznym.

3. Dla kazdego elementu V zjaduje sie jednoznaczna kombinacja liniowa wektorow w $\{u+v, u+2v+w, w\}$

$$au = 2a(u+v) - a(u+2v+w) + aw$$

$$av = a(u+2v+w) - a(u+v) - aw$$

$$aw = aw$$

$$au + bv = (a-b)(u+v) + (b-a)(u+2v+w) + (a-b)w$$

$$au + bw = 2a(u+v) - a(u+2v+w) + (a+b)w$$

$$au + bv + cw = (a-b)(u+v) + (b-a)(u+2v+w) + (a-b+c)w$$

$$av + bw = a(u+2v+w) - a(u+v) + (b-a)w$$