Algebra liniowa 2 R. Lista 2

Zadanie 1. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar $\mathrm{im}(F)$? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^{100}$?

Zadanie 2. Z twierdzenia Bezout wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1, 2, 3, \ldots, 14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2 \ldots, P(14) = a_{14}$. [Zdefiniuj odpowiednie przekształcenie liniowe z $\mathbf{R}_{13}[X]$ w $\mathbf{R}^{14}$.]

Zadanie 3. Wyznacz bazę i wymiar $\mathrm{Lin}(A)$ dla:
a) $A = \{(1,0,0,-1)^\top, (2,1,1,0)^\top, (1,1,1,1)^\top, (1,2,3,4)^\top, (0,1,2,3)^\top\}$
b) $A = \{(1,1,1,1,0)^\top, (1,1,-1,-1,-1)^\top, (2,2,0,0,-1)^\top, (1,1,5,5,2)^\top, (1,-1,-1,0,0)^\top\}$.

Zadanie 4. Wskaż bazę $\mathbf{R}_3[X]$ do której należą wielomiany $1 + X^2, 1 + 2X + X^3$.

Zadanie 5. Udowodnij, że
a) przekształcenie identycznościowe jest izomorfizmem liniowym;
b) przekształcenie odwrotne do izomorfizmu liniowego jest izomorfizmem liniowym;
c) złożenie izomorfizmów liniowych jest izomorfizmem liniowym.
Sformułuj konkluzję tego zadania używając słowa „relacja".

Zadanie 6. Załóżmy, że $\varphi \colon V \to W$ jest izomorfizmem liniowym. Pokaż, że
a) U jest k-wymiarową podprzestrzenią $V \iff \varphi[U]$ jest k-wymiarową podprzestrzenią W.
b) $v_1, \ldots, v_k$ są lnz $\iff \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ są lnz.
c) $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) = U \iff \mathrm{Lin}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)) = \varphi[U]$.
d) zachodzą inne podobne własnosci – aż Ci się znudzi.

Zadanie 7. Stosując algorytm Steinitza dokonaj wymiany dla bazy $(1,0,0)^\top, (1,1,0)^\top, (1,1,1)^\top$ i liniowo niezależnego podzbioru $(0,0,1)^\top, (0,1,1)^\top$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 8. Uzasadnij, że jeśli $(b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą V zaś $a = 0 \cdot b_1 + \sum_{i=2}^n t_i b_i$, to $(a, b_2, \ldots, b_n)$ nie jest bazą V.

Zadanie 9. Dla dowolnych podzbiorów W_1, W_2 przestrzeni liniowej V, uzasadnij że:
a) jeżeli $W_2 \leqslant V$ i $W_1 \leqslant W_2$, to $W_1 \leqslant V$,
b) jeżeli $W_1, W_2 \leqslant V$ i $W_1 \subseteq W_2$, to $W_1 \leqslant W_2$.

Zadanie 10. Sprawdź że złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 11. Sprawdź ze jeżeli $A, B \subseteq V$ są rozłączne i $A \cup B$ jest lnz, to $\mathrm{Lin} A \cap \mathrm{Lin} B = \{0\}$.

Zadanie 12. Wyznacz (pewną) bazę i wymiar następujących podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$:

a) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

c) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

d) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

e) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$

f) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\n\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$

g) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \cap \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

h) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

i) $\operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ j) $\operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\} \cap \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Zadanie 13. *Flagą* w przestrzeni liniowej V nazywamy ciąg $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$ podprzestrzeni V, taki że $V_i \lneq V_{i+1}$. Udowodnij, że wymiar V jest o 1 mniejszy od maksymalnej możliwej długości flagi w V. (Zakładamy, że wymiar V jest skończony.)

Zadanie 14.
a) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) \neq 0$.
b) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = 0$, ale $P(2) \neq 0$.
c) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = P(2) = 0$, ale $P'''(0) \neq 0$.
d) Wywnioskuj, że $\dim\{ P \in \mathbf{R}_5[X] \mid P'(-1) = P(2) = P'''(0) = 0 \} \leq 3$.

Zadanie 15. Znajdź wymiar przestrzeni $\{ P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 2P(0) + P''(0) = 0 \}$.

Zadanie 16. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F\colon \mathbf{R}^3 \to V$, dla
a) $V = \{ (x, y, z, t)^\top \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + z + 3t = 0 \}$;
b) $V = \{ P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P''(0) = P(1) = 0 \}$.
W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X - X^3)$.

Zadanie 17. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W \leqslant V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F\colon V \to K^n$, taki że $F[W] = \{ (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^\top \mid x_1, \ldots, x_k \in K \}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{ P \in V \mid P'(1) + P(0) = 0 \}$.

Zadanie 18. Podaj przykład 4-elementowego podzbioru $\mathbf{R}^3$, w którym zawarte są jedynie 3 bazy $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 19. Podaj przykład dwóch baz (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że (a_1, b_2, b_3) jest bazą $\mathbf{R}^3$, ale (b_1, a_2, a_3) nie jest bazą $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 20. Czy prawdą jest, że jeśli $B = (b, b_2, b_3)$ i $C = (c, b_2, b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$, to dla dowolnego $P \in \mathbf{R}_2[X]$ wektory $[P]_B$ i $[P]_C$ mogą się różnić tylko pierwszą współrzędną?

Zadanie 21. Sprawdź, że $B = \{1, X-2, (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}_n[X]$; znajdź wzór na $[P]_B$.

Zadanie 22. Uzasadnij, że $\dim \operatorname{Lin}(B) \leq |B|$. Czy prawdą jest, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy B jest lnz?

Zadanie 23. Niech $F : V \to W$ będzie funkcją. Udowodnij, że F jest liniowa $\iff$ $F \leqslant V \times W$.

Zadanie 24. Czy jest prawdą, że w dowolnej przestrzeni liniowej, dla dowolnych jej podprzestrzeni liniowych U, V, W zachodzi $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$?

Zadanie 25. Nie używając całkowania sprawdź, czy są liniowo niezależne następujące podzbiory przestrzeni funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$: a) $\{\sin x, \cos x\}$; b) $\{1, \cos(2x), \cos^2 x\}$; c) $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$.

Zadanie 26. Oblicz $\dim\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n) \}$.

Zadanie 27. Uzasadnij, że jeśli V i W są podprzestrzeniami pewnej (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej, to $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$. (wsk. Wybierz bazę $V \cap W$; uzupełnij ją do bazy …). (Ta własność nazywa się *modularnością*.)

Zadanie 28. Ile k-wymiarowych podprzestrzeni ma n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem q-elementowym?