

PODSTAWOWE POJECIA ALGEBRY LINIOWEJ

CIAŁO

CIAŁO to zbiór K z dwoma działaniami,
dodawaniem i mnożeniem, i ich elementami neutralnymi ($0, 1 \in K$)
dodawanie i mnożenie to funkcje $+: K \times K \rightarrow K$

WŁASNOŚCI CIAŁA:

1. dodawanie i mnożenie są łączne, przemienne i rozdzielne
2. istnieją elementy neutralne: $0 + x = 1 \cdot x = x$
3. dla każdego elementu ciała istnieje element przeciwny: $\forall x \exists (-x) \quad x + (-x) = 0$
4. dla każdego $x \neq 0$ istnieje element odwrotny: $\forall x \neq 0 \exists x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$
5. $0 \neq 1$ - wyklucza zbiór jednoelementowy

Jeśli istnieją odpowiednie $-x, x^{-1}$, to są one jedyne - **dowód na ćwiczeniach**

PRZYKŁADY:

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ są ciałami, natomiast \mathbb{Z} nie jest ciałem (nie ma elementu odwrotnego do 2, **pierścienie**)

Każdy podzbiór $K \subseteq \mathbb{C}$, który jest zamknięty na dodawanie, mnożenie oraz dla każdego elementu K można znaleźć w K element do niego przeciwny i odwrotny, też jest ciałem.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z dodawaniem i mnożeniem modulo 5 jest ciałem: jest element neutralny: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 4 = 1$

$\{0, 1, \dots, p-1\}$, gdzie p jest liczbą pierwszą jest ciałem (**dowód z algorytmu Euklidesa**)

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby pierwszej p jest ciałem, które ma dokładnie p^n elementów i są to wszystkie ciała skończone.

Dla dowolnego $d \in K$ możemy zdefiniować $\mathbb{Q}[d] = \{a + b \cdot d : a, b \in \mathbb{Q}\}$

Jeśli K jest ciałem, to możemy rozpatrzyć zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach w K : $K[X]$ i nie jest ciałem (nie istnieje X^{-1}).

Możemy rozpatrzyć też zbiór większy, **ciało funkcji wymiernych** $K(X)$, czyli formalne ilorazy współczynników z K , tyle że w mianowniku nie może pojawić się 0:

$$K(X) = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in K[X], q \neq 0 \right\}$$

Jak dowodzić twierdzenia:

$$\forall x \in K \quad 0 \cdot x = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \\ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) &= 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a) \\ 0 &= 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a \end{aligned}$$

PRZESTRZEN LINIOWA

PRZESTRZEN LINIOWA nad K to zbiór V z działaniem dodawaniem i mnożeniem:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V \\ \cdot: K \times V &\rightarrow V \\ 0 &\in V \end{aligned}$$

WŁASNOŚCI:

$+$ i \cdot spełniają oczywiste własności

Łączność mieszana dla mnożenia:

$$(\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V \gamma = \alpha \cdot_V (\beta \cdot_V \gamma)$$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_V (u +_K w) &= \alpha \cdot_V u +_V \alpha \cdot_V w \\ (\alpha +_K \beta) \cdot_V u &= \alpha \cdot_V u +_V \beta \cdot_V u \end{aligned}$$

PRZYKŁADY:

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ to przestrzenie liniowe nad \mathbb{R}

Dla każdego iloczynu kartezjanskiego ciała, iloczyn ten jest ciałem. Bardziej ogólnie można to ująć, że jeśli A jest dowolnym zbiorem, a K^A jest zbiorem wszystkich funkcji z A w K , to K^A jest przestrzenią liniową nad K

$K[X]$ to zbiór wielomianów o współczynnikach z K , to jest on przestrzenią liniową nad K . Tak samo $K_n[X]$ (wielomiany co najwyżej stopnia n) również są przestrzenią liniową.

$C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i jest on przestrzenią liniową nad \mathbb{R}