

Zad 1. Opisz, jak wyglądaja ciagi zbiezne w kostce Cantora

Kostka kantora to zbior ciagow  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . Wezmy metryke

$$d(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

gdzie  $\Delta(x,y)=\min\{k : x(k) \neq y(k)\}$ .

Wezmy  $\varepsilon > 0$  taki, ze  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Ciag bedzie zbiezny do  $(x_n)$ , jesli znajdziemy kule o promieniu  $\varepsilon$  i srodku w  $(x_n)$ , w ktorej sa prawie wszystkie jego wyrazy. W takim wypadku, tylko pierwsze  $k$  wyrazow musi byc takich samych, a dalsze moga przyjmowac dowolne wartosci. Im wieksze  $k$  wezwiemy, tym dluzej te ciagi sa takie same. Wiec ciagi zbiezne w kostce Cantora to ciagi takich ciagow, ktore roznia sie po raz pierwszy na coraz to dalszym wyrazie od ciagu do ktorego sa zbiezne.

Zad 2. Pokaz, ze ciag  $(x_n)$  w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^k$  jest zbiezny wtw gdy kazdy z ciagow  $x_n(i)$  dla  $i < k$  jest zbiezny (w  $\mathbb{R}$ )

$(x_n)$  jest zbiezny do  $x$ , jezeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + \dots + (x_n(k-1) - x(k-1))^2} < \varepsilon$$

W zadaniu chcemy pokazac:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d(x_n, x) < \varepsilon \iff \forall i < k \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) < \varepsilon$$

Indukcja  $\Leftarrow$  : Jezeli dla kazdego  $i < k$

$$\lim d_{\mathbb{R}}(x_n(i), x(i)) = \lim \sqrt{(x_n(i) - x(i))^2} = x(i)$$

To wowczas

$$d_{\mathbb{R}}(x_n(0), x(0)) + \dots + (x_n(k-1), x(k-1)) = \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2} + \dots + \sqrt{(x_n(k-1) - x(k-1))^2}$$

Zad 3. Udowodnij, ze ciag  $(x_n)$  punktow plaszczyzny jest zbiezny do  $x$  w metryce euklidesowej wtw gdy jest zbiezny w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce euklidesowej, to dla  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2} \geq \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} = \\ &= \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) = \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|), \end{aligned}$$

czyli

$$\varepsilon > \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|)$$

wiec jest zbiezne w metryce maksimum.

Jesli jest zbiezny w metryce maksimum, to dla  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \max(|x_n(0) - x(0)|, |x_n(1) - x(1)|) \\ \varepsilon &> \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0) - x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \max(\sqrt{(x_n(0)x(0))^2}, \sqrt{(x_n(1) - x(1))^2}) \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2} \cdot \sqrt{\max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \\ \sqrt{2} \cdot \varepsilon &> \sqrt{2 \cdot \max((x_n(0) - x(0))^2, (x_n(1) - x(1))^2)} \geq \sqrt{(x_n(0) - x(0))^2 + (x_n(1) - x(1))^2} \end{aligned}$$

Zad 4. Wykaz, ze podzbiory  $\mathbb{R}^n$  postaci  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  sa otwarte, a  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  sa domkniete.

Pokazac, ze  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  jest przedzialem otwartym,

W dowolnym punkcie chce stworzyc kule ktora sie w nim zawiera. Czyli potrzebuje znalezc promien dla kuli od dowolnego  $x$ :

$$r = \min(|a - x|, |b - x|),$$

gdzie  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$

Pokazac, ze  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  jest domkniety.

$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  bedzie domkniety, jesli wszystkie ciagi o wyrazach z  $P$  beda mialy granice w  $P$ . Jezeli by tak nie bylo, czyli  $(x_n)$  zbiegalyby do  $x$  poza  $P$ , to wowczas od pewnego momentu wszystkie wyrazy  $(x_n)$  bylyby w kuli o srodku w punkcie  $x$  i promieiniu  $\varepsilon > 0$ .

Niech ciag o wyrazach z  $P$  zmieza do

$$(x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ \dots \\ b_n + 2 \end{pmatrix} = b,$$

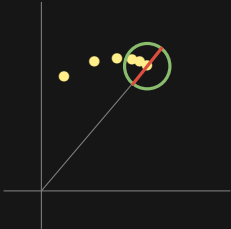
Wowczas, od pewnego momentu wszystkie wyrazy tego ciagu naleza do kuli o srodku  $b$  i promieniu 1, czyli sa poza  $P$ . Ale jest to sprzeczne ze stwierdzeniem, ze ciag  $(x_n)$  ma wszystkie wyrazy w  $P$ .

Zad 5. Uzasadnij, że nie istnieje ciąg  $(x_n)$  elementów  $\mathbb{R}^2$ , który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny w metryce euklidesowej (na  $\mathbb{R}^2$ ), ale nie jest w metryce centrum.

Kula o środku  $x$  i promieniu  $r$  w metryce centrum zawsze będzie zawierała otwarty przedział należący do prostej przechodzącej przez środek układu współrzędnych oraz  $x$  o długości  $2r$  i środku w  $x$ .

Z kolei kula o środku  $x$  i promieniu  $r$  w metryce euklidesowej będzie zawierała kule pomniejszona o okrag o środku  $x$  i promieniu  $r$ , czyli zawiera w sobie kule w metryce centrum. Jeśli więc ciąg zbiega w metryce centrum, to również zbiega w metryce euklidesowej.

Weźmy ciąg



wówczas wszystkie jego wyrazy blisko elementu do którego zbiegają mogą zostać wpisane w dowolną **kulę w metryce euklidesowej**, ale już nie wszystkie **kule w metryce centrum** i środku w  $x$  zawierają ostatnie wyrazy tego ciągu (jeśli wybierzemy promień mniejszy od odległości  $x$  od środka układu współrzędnych, to tylko  $x$  będzie należeć do tej kuli).

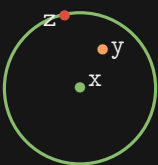
Zad 6. Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  sfera, a więc zbiór postaci  $\{y \in X : d(x, y) = r\}$  (dla ustalonego  $x \in X$  i  $r > 0$ ) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, że  $B_r(x) \subseteq \{y : d(x, y) \leq r\}$ , ale nie koniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Jeśli sfera jest zbiorem domkniętym, wtedy wszystkie ciągi o wyrazach z niej są zbieżne do wyrazu zawartego w niej. Załóżmy, nie wprost, że istnieje ciąg  $(z_n)$  o wyrazach ze sfery o środku w  $x$  i promieniu  $r$ , którego wyrazy dążą do  $y$ , który nie należy do sfery. Rozważmy dwie możliwości.

1. Odległość  $d(x, y) < r$



Wyberzmy dowolny element ciągu  $(z_n)$



Z warunku trójkąta otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &\geq d(x, z) \\ d(y, z) &\geq d(x, z) - d(x, y). \end{aligned}$$

Ponieważ  $d(x, z) = r$ , a  $d(x, y)$  jest stałe, niech  $d(x, y) = \rho$ . Czyli możemy napisać:

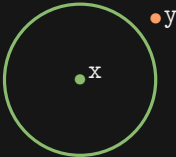
$$d(y, z) \geq r - \rho,$$

ale ponieważ ciąg  $(z_n)$  zbiega do  $y$ , to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  możemy obrąć taki  $z$ , że

$$\varepsilon > d(y, z) \geq r - \rho.$$

Jednak odległość  $d(y, z)$  jest ograniczona od dołu przez stałą  $r - \rho$ , więc dla  $\varepsilon = r - \rho - \frac{1}{r}$  nie znajdziemy  $z$  spełniającego tę nierówność. Stąd ciąg taki nie jest zbieżny.

2. Odległość  $d(x, y) > r$



Wyberzmy element  $(z_n)$



Wówczas, z warunku trójkąta:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, y) - d(x, z) &\leq d(z, y), \end{aligned}$$

ale ponieważ  $d(x, z) = r$ , a  $d(x, y) = \rho$  jest stałe dla danego ciągu, możemy napisać:

$$\rho - r \leq d(z, y).$$

Aby ciąg  $(z_n)$  był zbieżny, dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  musimy móc dobrać taki element  $(z_n)$ , że

$$\varepsilon > d(z, y) \geq \rho - r,$$

ale ponieważ  $d(y, z)$  jest ograniczone od dołu przez  $\rho - r$ , to dla  $\varepsilon = \rho - r = \frac{1}{r}$  nie znajdziemy elementu  $(z_n)$  spełniającego tę nierówność.

Rozpiszmy  $A = \{y \in Y : d(x, y) \leq r\}$  jako sumę dwóch zbiorów:

$$A = \{y \in Y : d(x, y) < r\} \cup \{y \in Y : d(x, y) = r\}$$

Pierwszy element tej sumy jest równy  $\{y \in Y : d(x, y) < r\} = B_r(x)$ , więc

$$B_r(x) \subseteq A$$

W przeciwną stronę inkluzja nie zachodzi, ponieważ

$$B_r(x) \cap \{y \in Y : d(x, y) = r\} = \emptyset$$

czyli  $A$  posiada wszystkie elementy  $B_r(x)$ , ale dodatkowo ma jeszcze sferę, która jest rozłączna z kulą.

**Zad 7. Wykaz, że zbieżność jednostajna ciągu funkcji ciągłych na  $[0, 1]$  jest równoważna zbieżności w metryce supremum w  $C[0, 1]$ . (Ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny jednostajnie do  $f$ , jeżeli**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Metryka supremum:

$$d(f, g) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

Chce udowodnić, że ciąg funkcji  $(f_n)$  jest jednostajnie zbieżny  $\iff (f_n)$  jest zbieżny w metryce supremum.

Niech  $S = \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\}$ . Jeśli  $(f_n) \rightarrow f$  w metryce supremum, to wówczas

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \varepsilon > \sup S \wedge \forall x \in [0, 1] \quad \sup S \geq |f_n(x) - f(x)|) &\implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Jeśli  $(f_n) \xrightarrow{\sup} f$ , to wówczas

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$$

ale ponieważ

$$(\heartsuit) \quad \exists p \in [0, 1] \quad (|f_n(p) - f(p)| = \sup S \wedge \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(p) - f(p)| \geq |f_n(x) - f(x)|)$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] \quad \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|) \wedge (\heartsuit) &\implies \\ \implies \forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad \varepsilon > \sup S, \end{aligned}$$

czyli ciąg jest zbieżny w metryce supremum.

**Zad 8. Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla każdego  $A, B \subseteq X$  zachodzą równości i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaz, że nie muszą zachodzić inkluzje odwrotne):**

$$\overline{A} = (\text{Int}(A^c))^c$$

$\overline{A}$  to najmniejszy zbiór domknięty, taki, że  $A \subseteq \overline{A}$ .

1. Jeśli  $A$  jest zbiorem domkniętym, wówczas  $A^c$  jest zbiorem otwartym, więc  $\text{Int}(A^c) = A^c$ . W takim razie

$$\text{Int}(A^c)^c = (A^c)^c = A$$

i ponieważ  $A$  jest zbiorem domkniętym, otrzymujemy

$$\text{Int}(A^c)^c = A = \overline{A}$$

2. Jesli  $A$  jest zbiorem otwartym, wowczas  $A^c$  jest zbiorem domknietym.  
Z definicji wiemy, ze  $\text{Int}(A^c) \subset A^c$  i jest zbiorem otwartym, wiec  $\text{Int}(A^c)^c$  jest zbiorem domknietym. Co wiecej,

$$\text{Int}(A^c) \subset A^c \wedge A^c \cap A = \emptyset \implies \text{Int}(A^c) \cap A = \emptyset,$$

wiec  $A \cap \text{Int}(A^c)^c \neq \emptyset$ , ale skoro  $\text{Int}(A^c) \cup \text{Int}(A^c)^c = X = A^c \cup A$  i  $\text{Int}(A^c) \subset A^c$ , to  $A \subset \text{Int}(A^c)^c$ . No to kurwa musowo ze  $\overline{A} = \text{Int}(A^c)^c$  bo  $A \subset \text{Int}(A^c)^c$ , a  $\text{Int}(A^c)$  jest najwiekszym zbiorem otwartym do ktorego nie nalezy  $A$ , czyli kiedy odejmiemy

$$X \setminus \text{Int}(A^c)$$

to dostajemy najmniejszy zbior domkniety, do ktorego nalezy  $A$ .

TO TERAZ WERSJA NADZIEI

$$x \in (\text{Int}(A^c))^c \iff x \notin \text{Int}(A^c)$$

czyli z definicji wnetrza:

$$\forall r > 0 \quad B_r(x) \cap (A^c)^c \neq \emptyset \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

a to jest rownowazne z tym, ze kazda kula tnie sie niepusto ze zbiorem  $A$ , wiec  $x \in \overline{A}$

$$\text{Bd}(A \cup B) = \text{Bd}(A) \cup \text{Bd}(B)$$

Jesli wezwiemy  $A$  jako okrag o srodku w  $(-1, 0)$  i promieniu 1, a  $B$  jako  $(1, 0)$ , to brzeg sumy nie jest rowny sumie brzegow. POWINNO BYC TYLKO  $\subseteq$

## Zad 9. Znajdz wnetrze, domkniecie (i brzeg)

$$\{(x, y) \in (0, \infty)^2 : y = \sin \frac{1}{x}\}$$

Wnetrze - puste

Domkniecie: musimy dodac punkty na osi OX i na osi OY punkty  $[0,1]$