**1.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań.

a) $y = x^3$, $y = x^{1/3}$
b) $y = x^2 + 1$, $y = -2x + 9$
c) $y = x^3 + 1$, $y = (x + 1)^2$
ḋ) $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$
ė) $y^2 = 2x - 5$, $y = x - 4$
f) $y = x + 2$, $y = -3x + 6$, $y = (2 - x)/3$
ġ) $x = y^2 - y$, $x = y - y^2$
h) $x = y^2$, $x = 6 - y - y^2$

**2.** Obliczyć długość krzywych opisanych parametrycznie.

ȧ) $x = 3t$, $y = 2t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 3$
ḃ) $x = t^4/4 + 1$, $y = t^6/6$, $0 \leq t \leq 1$
ċ) $x = \sin(t) - t\cos(t)$, $y = t\sin(t) + \cos(t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$
ḋ) $x = \frac{2}{3}t^{3/2}$, $y = \frac{4}{9}t^{9/4}$, $0 \leq t \leq 4$
ė) $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

**3.** Obliczyć długość krzywych podanych równaniem we współrzędnych biegunowych.

ȧ) $r = 2\cos(\theta)$
ḃ) $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq 4\sqrt{2}$
ċ) $r = 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
ḋ) $r = \sin^2(\theta/2)$, $0 \leq \theta \leq \pi$
ė) $r = \sin^3(\theta/3)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
ḟ) $\theta = \frac{1}{2}(r + 1/r)$, $1 \leq r \leq 3$

**4.** Narysuj w układzie współrzędnych krzywą zadaną parametrycznie w następujący sposób:

$$x = \cos(t), y = \sin(t) + 1, \ t \in [0, \pi].$$

Co to za krzywa? Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót tej krzywej wokół osi $x$. Narysować tę bryłę.

**5.** Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót wokół osi $x$ podanych wykresów.

ȧ) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [2, 6]$
ḃ) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [0, \sqrt{2}]$
ċ) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $x \in [1, \sqrt{2}]$
ḋ) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
ė) $x = \sin^2(t)$, $y = \cos^2(t)$, $t \in [0, \pi]$
ḟ) $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

**6.** Jakościowo narysować krzywą zadaną równaniem parametrycznym $r^2 = 4\cos(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

**7.** Jakościowo narysować `lemniskatę` $r^2 = \sin(2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

**8.** Jakościowo narysować podane `róże`: $r = \cos(m\theta)$, $m \in \{1/3, 2, 3, 7\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

**9.** Jakościowo narysować `różę w róży` $r = 1 - 2\sin(3\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

**10.** Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi $x$ obszarów pod wykresami podanych funkcji.

ȧ) $f(x) = x^{3/2}$, $x \in [0, 1]$
ḃ) $f(x) = \frac{-1}{x}$, $x \in [-3, -2]$
ċ) $f(x)\sqrt{\cos(x)}$, $x \in [0, \pi/6]$
ḋ) $f(x) = \sqrt{x}(1 - x)^{1/4}$, $x \in [0, 1]$

**11.** Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi $x$ obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

ȧ) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = -\sqrt{x-1}$, $x \in [1,3]$

ḃ) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, $g(x) = \cos(x) - \sin(x)$, $x \in [0, \pi/4]$

ċ) $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$

ḋ) $y = x^{1/2}$, $y = 2x^{1/4}$

ė) $y = x^3 + 2$, $y = x^2 + 2x + 2$

**12.** Obliczyć objętość brył opierając się na informacji o przekrojach. Zrobić odpowiedni rysunek.

a) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramionach $L_1$ i $L_2$ długości 4. Przekroje prostopadłe do $L_1$ są półkolami.

b) Podstawą bryły jest koło o promieniu 1. Przekroje prostopadłe do ustalonej średnicy podstawy są kwadratami.

c) Podstawą bryły jest trójkąt równoboczny o boku 10. Przekroje prostopadłe do ustalonej wysokości trójkąta są kwadratami.

**13.** Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi $y$ obszarów pod wykresami podanych funkcji.

ȧ) $f(x) = \frac{4}{x^3}$, $x \in [1,3]$

ḃ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x \in [0, \sqrt{3}]$

ċ) $g(x) = \sin(x^2)$, $x \in [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}]$

ḋ) $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $x \in [0,4]$

**14.** Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi $y$ obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

ȧ) $f(x) = 1$, $g(x) = x - 2$, $x \in [2,3]$

ḃ) $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = \sin(x^2)$, $x \in [0, \sqrt{\pi}/2]$

**15.** W kuli o promieniu 2 wydrążono otwór o promieniu 0.5. O ile zmniejszyła się objętość? Zrobić dokładny rysunek.

**16.** Opisać hiperbolę we współrzędnych biegunowych.