Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podostawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem sekualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.

Spis treści

1 JĘZYK LOGIKI

1.1 FUNKCJE

FUNKCJA – zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczości, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji – nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x : (\exists\, y)\ \langle x, y\rangle \in f\}$$
$$\mathrm{rng}(f) = \{y : (\exists\, x)\ \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako *podzbioru* $f \in X \times Y$ *takiego, że dla każdego* $x \in X$ *istnieje dokładnie jeden* $y \in Y$ *takie, że* $\langle x, y\rangle \in f$ jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej $\{A_i : i \in I\}$ definiujemy:

- jej sumę: $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : (\exists\, i \in I)\ x \in A_i\}$
- jej przekrój: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : (\forall\, i \in I)\ x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ definiujemy:

- suma: $\bigcup \mathcal{A} = \{x : (\exists\, A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$
- przekrój: $\bigcap \mathcal{A} = \{x : (\forall\, A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rdzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y\rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z\rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i wiecej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny – iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle\langle a_1, a_2\rangle a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle.$$

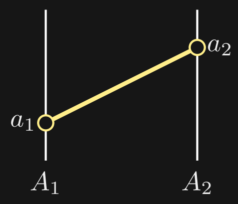
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

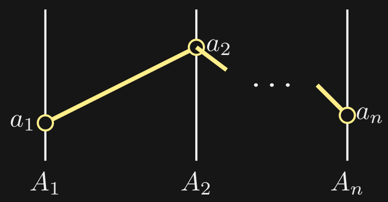
$$A : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym indeksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I \ : \ (\forall\, i \in I)\ f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla $I = \{1, 2\}$ nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są róże. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

JĘZYK RZĘDU ZERO, czyli rachunek zdań: $p, q, r, \dots, \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych: $V = \{x_0, x_1, \dots\}$
2. symbole spójników logicznych: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów: $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości: $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne: $F = \{f_i \ : \ i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty): $R = \{r_j \ : \ j \in J\}$
3. symbole stałe: $C = \{c_k \ : \ k \in K\}$

ARNOŚĆ – odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

SYGNATURA – zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA

Znała suma cała rzeka,
Więc raz przybył lin z daleka
I powiada: "Drogi panie,
Ja dla pana mam zadanie,
Jeśli pan tak liczyć umie,
Niech pan powie, panie sumie,
Czy pan zdoła w swym pojęciu,
Odjąć zero od dziesięciu?"
(...)
"To dopiero mam z tym biedę -
Może dziesięć? Może jeden?"

Jak odjąć 0 od 10:
semantycznie: 10 - 0 = 10
syntaktycznie: od ciągu 1 i 0 odjęcie 0 to zostawienie tylko 1

SEMANTYKA - patrzy na znaczenie zapisów, nie sam napis.
SYNTAKTYKA - interesuje ją tylko zapis, język, a znaczenia nie ma.

1.5 KONSTRUOWANIE JĘZYKA

TERMY - bazowy zbiór termów to
zbiór zmiennych i zbiór stałych:

$$T_0 = V \cup C$$

Do ich budowy wykorzystujemy symbole funkcyjne (F)

Załóżmy, że mamy skonstruowane termy aż do rzędu n i chcemy skonstruować termy rzędu $n+1$. Jeśli mamy symbol funkcyjny arności k, to termem jest zastosowanie tego symbolu do wcześniej skonstruowanych termów, których mamy k:

$$f \in F \quad f \text{ -arności k}$$

$$F(t_1, ..., t_k) \quad t_1, ..., t_k \in \bigcup_{i=0}^{n} T_i$$

Czylil jeśli mamy zbiór termów, to *biorąc wszystkie dostępne symbole funkcyjne i stosując je na wszystkie możliwe sposoby do dotychczas skonstruowanych termów* tworzone są nowe termy.

Termy to potencjalne wartości funkcji

FORMUŁY - budowane są rekurencyjnie, zaczynając
od formuł atomowych:

$$t = s, \quad t, s \in TM$$

stosując wszystkie relacje równoważności termów

$$r \in R \quad r(t_1, ..., t_k)$$

zastosowanie symbolu relacyjnego na odpowiedniej ilości termów tworzy formułę

Bazowym poziomem frmuł jest formuła atomowa:

$$F_{m_0} = \{\varphi : \varphi \text{ - formuła atomowa}\}$$

Jeśli mamy F_{m_k} dla pewnego $k < n$, czyli wszystkie formuły poniżej n zostały skonstruowane, to

$$F_{m_n} : \neg(\varphi),\ \varphi \vee \phi,\ \varphi \wedge \phi, ... \quad \text{dla } \varphi, \phi \in \bigcup_{k<n} F_{m_k},$$

czyli używamy wszystkich spójników logicznych dla poprzednich formuł

$$F_{m_n} \ : \ (\forall\, \varphi)\ (\exists\, x_i) \quad \text{dla } \ \varphi \in \bigcup_{k<n} F_{m_k},\ x_i \in V$$

kwantyfikujemy też po wszystkich możliwych zmiennych wszystkiemożliwe formuły

$$FM = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{m_n}$$

1.6 JĘZYK TEORII MNOGOŚCI

$$L = \{\in\}$$

składa się z jednego binarnego predykatu,
który nie jest jeszcze należeniem

W racuhnku zdań przejście z syntaktyki do semantyki to nadanie symbolom wartości prawda lub fałsz.

SYSTEM ALGEBRAICZNY:

$$\mathcal{A} = \langle A, \{F_i \ : \ i \in I\}, \{R_j \ : \ j \in J\}, \{C_k \ : \ k \in K\}\rangle$$

odpowiednio: zbiór (uniwersum), funkcje na A, relacje na A, stałe w A

przykłady: $\langle \mathcal{P}\mathbb{N}, \subseteq\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \leq\rangle$

Język L możemy interpretować w systemie $\mathcal{A}$ o ile mają one tę samą sygnaturę.