

Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podstawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem seksualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.



Spis treści

1	JĘZYK LOGIKI	3
1.1	FUNKCJE	3
1.2	OPERACJE UOGÓLNIONE	3
1.3	JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU	4
1.4	SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA	5
1.5	KONSTRUOWANIE JĘZYKA	5
1.6	JĘZYK TEORII MNOGOŚCI	6
2	AKSJOMATY	7
2.1	AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI	7
2.2	AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO	7
2.3	AKSJOMAT PARY	7
2.4	AKSJOMAT SUMY	8
2.5	AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO	9
2.6	AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA	9
2.7	AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA	10
2.8	KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH	10
2.9	AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI	11
2.10	AKSJOMAT REGULARNOŚCI	12
2.11	AKSJOMAT WYBORU	12
3	LICZBY PORZĄDKOWE	13
3.1	LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA	13
3.2	DOBRE PORZĄDKI	15
3.3	ZBIÓR TRANZYTYWNY	16
3.4	LICZBY PORZĄDKOWE	17
3.5	DZIAŁANIA NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH	19
3.6	INDUKCJA POZASKOŃCZONA	21
3.7	REKURSJA POZASKOŃCZONA	21
4	LICZBY KARDYNALNE	23
4.1	WŁASNOŚCI	23
4.2	DZIAŁANIA NA LICZBACH KARDYNALNYCH	23
4.3	HIERARCHIA ALEFÓW	25
4.4	POTĘGOWANIE	26
4.5	UOGÓLNIONE OPERACJE NA LICZBACH KARDYNALNYCH	26

1 JĘZYK LOGIKI

1.1 FUNKCJE

FUNKCJA - zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczności, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji - nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\begin{aligned}\text{dom}(f) &= \{x : (\exists y) \langle x, y \rangle \in f\} \\ \text{rng}(f) &= \{y : (\exists x) \langle x, y \rangle \in f\}.\end{aligned}$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako podzbioru $f \in X \times Y$ takiego, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$ takie, że $\langle x, y \rangle \in f$ jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej $\{A_i : i \in I\}$ definiujemy:

- jej sumę: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists i \in I) x \in A_i\}$
- jej przekrój: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall i \in I) x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów \mathcal{A} definiujemy:

- suma: $\bigcup \mathcal{A} = \{x : (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\}$
- przekrój: $\bigcap \mathcal{A} = \{x : (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rodzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y \rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z \rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i więcej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny - iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3 \rangle \rangle.$$

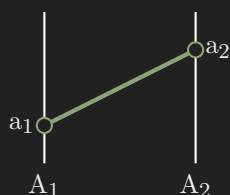
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

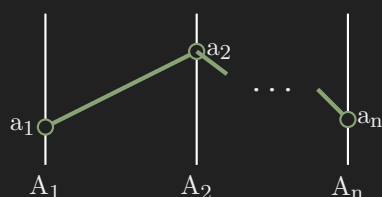
$$A : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym indeksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I : (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla $I = \{1, 2\}$ nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są różne. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

JĘZYK RZĘDU ZERO, czyli rachunek zdań: $p, q, r, \dots, \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych: $V = \{x_0, x_1, \dots\}$
2. symbole spójników logicznych: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów: $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości: $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne: $F = \{f_i : i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty): $R = \{r_j : j \in J\}$
3. symbole stałe: $C = \{c_k : k \in K\}$

ARNOŚĆ - odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

SYGNATURA - zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA

Znała suma cała rzeka,
Więc raz przbył lin z daleka
I powiada: "Drogi panie,
Ja dla pana mam zadanie,
Jeśli pan tak liczyć umie,
Niech pan powie, panie sumie,
Czy pan zdoła w swym pojęciu,
Odjąć zero od dziesięciu?"
(...)
"To dopiero mam z tym biedę -
Może dziesięć? Może jeden?"

Jak odjąć 0 od 10:

semantycznie: $10 - 0 = 10$

syntaktycznie: od ciągu 1 i 0 odjęcie 0 to zostawienie tylko 1

SEMANTYKA - patrzy na znaczenie zapisów, nie sam napis.

SYNTAKTYKA - interesuje ją tylko zapis, język, a znaczenia nie ma.

1.5 KONSTRUOWANIE JĘZYKA

TERMY - bazowy zbiór termów to
zbiór zmiennych i zbiór stałych:

$$T_0 = V \cup C$$

Do ich budowy wykorzystujemy symbole funkcyjne (F)

Założmy, że mamy skonstruowane termy aż do rzędu n i chcemy skonstruować termy rzędu $n+1$. Jeśli mamy symbol funkcyjny arności k , to termem jest zastosowanie tego symbolu do wcześniej skonstruowanych termów, których mamy k :

$f \in F$ f - arności k

$$F(t_1, \dots, t_k) \quad t_1, \dots, t_k \in \bigcup_{i=0}^n T_i$$

Czyli jeśli mamy zbiór termów, to biorąc wszystkie dostępne symbole funkcyjne i stosując je na wszystkie możliwe sposoby do dotychczas skonstruowanych termów tworzone są nowe termy.

Termy to potencjalne wartości funkcji

FORMUŁY - budowane są rekurencyjnie, zaczynając
od formuł atomowych:

$$t = s, \quad t, s \in TM$$

stosując wszystkie relacje równoważności termów

$$r \in R \quad r(t_1, \dots, t_k)$$

zastosowanie symbolu relacyjnego na odpowiedniej ilości termów tworzy formułę

Bazowym poziomem formuł jest formuła atomowa:

$$F_{m_0} = \{\varphi : \varphi - \text{formuła atomowa}\}$$

Jeśli mamy F_{m_k} dla pewnego $k < n$, czyli wszystkie formuły poniżej n zostały skonstruowane, to

$$F_{m_n} : \neg(\varphi), \varphi \vee \phi, \varphi \wedge \phi, \dots \quad \text{dla } \varphi, \phi \in \bigcup_{k < n} F_{m_k},$$

czyli używamy wszystkich spójników logicznych dla poprzednich formuł

$$F_{m_n} : (\forall \varphi) (\exists x_i) \text{ dla } \varphi \in \bigcup_{k < n} F_{m_k}, x_i \in V$$

kwantyfikujemy też po wszystkich możliwych zmiennych wszystkie możliwe formuły

$$FM = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{m_n}$$

1.6 JĘZYK TEORII MNOGOŚCI

$$L = \{\in\}$$

składa się z jednego binarnego predykatu,
który nie jest jeszcze należeniem

W rachunku zdań przejście z syntaktyki do semantyki to nadanie symbolom wartości prawda lub fałsz.

SYSTEM ALGEBRAICZNY:

$$\mathcal{A} = \langle A, \{F_i : i \in I\}, \{R_j : j \in J\}, \{C_k : k \in K\} \rangle$$

odpowiednio: zbiór (uniwersum), funkcje na A, relacje na A, stałe w A

przykłady: $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \leq \rangle$

Język L możemy interpretować w systemie \mathcal{A} o ile mają one tę samą sygnaturę.

INTERPRETACJA to funkcja ze zbioru wartości w uniwersum:

$$i : V \rightarrow \mathcal{A},$$

którą można rozszerzyć do funkcji ze zbioru termów w uniwersum:

$$\begin{aligned} \bar{i} : TM &\rightarrow \mathcal{A} \\ i &\subseteq \bar{i} \end{aligned}$$

Ponieważ sygnatury są takie same, to każdemu symbolowi funkcyjnemu możemy przypisać funkcję o dokładnie tej samej arności. *Czyli jeśli dany symbol funkcyjny jest nakładany na termy, to odpowiadająca mu funkcja jest nakładana na wartości tych termów.*

W systemie \mathcal{A} formuła φ jest spełniona przy interpretacji i :

$$\mathcal{A} \models \varphi[i]$$

Zaczynamy od formuł atomowych, czyli:

$\mathcal{A} \models (t = s)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą interpretację (czyli $\bar{i}(t) = \bar{i}(s)$)
$\mathcal{A} \models r_j(t_1, \dots, t_k)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca temu predykatowi relacja zachodzi na wartościach termów (czyli $R_j(\bar{i}(t_1), \dots, \bar{i}(t_k))$)
$\mathcal{A} \models (\neg \varphi)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathcal{A} \models \varphi[i]$, i tak ze wszystkimi spójnikami logicznymi
$\mathcal{A} \models (\forall x_m) \varphi[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\mathcal{A} \models \varphi[i(\frac{x_m}{a})]$ (sprawdzamy dla konkretnego a czy spełnia φ , a potem dla x_m przypisujemy to a , natomiast inne wartości dostają podstawienie $(\frac{x_m}{a})$?)

2 AKSJOMATY

Zbiór oraz należenie uznajemy za pojęcia pierwotne, więc nie definiujemy ich tylko opisujemy ich własności.

2.1 AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI

zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy

$$(\forall x) (\forall y) (x = y \iff (\forall z) (z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakładamy, że *istnieją wyłącznie zbiory*. Nie ma nie-zbiorów. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorów i okazuje się, że w tym świecie można zinterpretować całą matematykę.

2.2 AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO

istnieje zbiór pusty \emptyset

$$(\exists x)(\forall y)\neg y \in x$$

Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności oraz aksjomaty zbioru pustego można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

1. istnienie: aksjomat zbioru pustego
2. jedyność: niech P_1, P_2 będą zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego z zachodzi $\neg z \in P_1 \wedge \neg z \in P_2$, czyli $z \in P_1 \iff z \in P_2$. Wobec tego, na mocy aksjomatu ekstensjonalności mamy $P_1 = P_2$.

Przyjrzyjmy się następującemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N} \cap [10, +\infty), <)$$

W systemie spełnione są oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Ponieważ nie mamy podanej interpretacji, a nasze aksjomaty są spełnione, to spełnione są dla dowolnej interpretacji.

2.3 AKSJOMAT PARY

dla dowolnych zbiorów x, y istnieje para $\{x, y\}$

$$(\forall x, y) (\exists z) (\forall t) (t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Para nieuporządkowana jest jednoznacznie wyznaczona. Aksjomat mówi tylko o istnieniu z , a można łatwo udowodnić, korzystając z aksjomatu ekstensjonalności, że takie z istnieje tylko jedno.

Niech P_1, P_2 będą parami nieuporządkowanymi x, y . W takim razie jeśli $t \in P_1$, to $t = x \vee t = y$. Tak samo $t \in P_2 \iff t = x \vee t = y$. Czyli $P_1 = P_2$ bo posiadają te same elementy.

.....
SINGLETONEM elementu x nazywamy zbiór $\{x\} := \{x, x\}$

PARĄ UPORZĄDKOWANĄ (wg. Kuratowskiego)
elementów x i y nazywamy zbiór:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dla dowolnych elementów a, b, c, d zachodzi:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

DOWOD:

Rozważmy dwa przypadki:

1. $a = b$

$$\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

Czyli jeśli $x \in \{\{a\}\}$, to $x = \{a\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

A więc jeśli $x \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie mamy $\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$, a więc z aksjomatu ekstensjonalności, $a = c = d$.

2. $a \neq b$

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Jeśli więc $x \in \langle a, b \rangle$, to $x = \{a\}$ lub $x = \{a, b\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Jeśli $x \in \langle c, d \rangle$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie otrzymujemy $\{c\} = \{a\}$ i $\{c, d\} = \{a, b\}$. Z aksjomatu ekstensjonalności mamy $a = c$ oraz $d = b$.

i smiga



2.4 AKSJOMAT SUMY

Dla dowolnego zbioru istnieje jego suma

$$(\forall x) (\exists y) (\forall z) (z \in y \iff (\exists t) (t \in x \wedge z \in t))$$

Ponieważ wszystko w naszym świecie jest zbiorem, to *każdy zbiór możemy postrzegać jako rodzinę zbiorów* - jego elementy też są zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

Suma jest określona jednoznacznie i oznaczamy ją $\bigcup x$.

DOWOD:

Założmy nie wprost, że istnieją dwie sumy zbioru x : S_1 i S_2 . Wtedy

$$(\forall z)(z \in S_1 \iff (\exists t \in x)(z \in t))$$

$$(\forall z)(z \in S_2 \iff (\exists t \in x)(z \in t))$$

Zauważamy, że

$$z \in S_1 \iff (\exists t \in x) z \in t \iff z \in S_2$$

a więc S_1 i S_2 mają dokładnie te same elementy, więc z aksjomatu ekstencjonalności są tym samym zbiorem.

i smiga



Suma dwóch zbiorów:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne z . Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z \in \bigcup \{x, y\} &\stackrel{4}{\iff} (\exists t) (t \in \{x, y\} \wedge z \in t) \stackrel{3}{\iff} (\exists t)((t = x \vee t = y) \wedge z \in t) \iff \\ &\iff (\exists t)((t = x \wedge z \in t) \vee (t = y \wedge z \in t)) \iff \\ &\iff (\exists t)(t \in x \wedge z \in t) \vee (\exists t)(t \in y \wedge z \in t) \implies \\ &\implies (\exists t)(z \in x) \vee (\exists t)(z \in y) \iff z \in x \vee z \in y \end{aligned}$$



2.5 AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

dla każdego zbioru istnieje jego zbiór potęgowy

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)z \in y \iff (\forall t \in z)t \in x$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)z \in y \iff z \subseteq x$$

Zbiór potęgowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go $\mathcal{P}(x)$

DOWÓD:

Założmy, nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory potęgowe P_1 i P_2 dla pewnego zbioru x . Wówczas

$$(\forall z)z \in P_1 \iff z \subseteq x$$

$$(\forall z)z \in P_2 \iff z \subseteq x$$

Zauważamy, że

$$z \in P_1 \iff z \subseteq x \iff z \in P_2,$$

czyli zbiory P_1 i P_2 mają dokładnie te same elementy, więc na mocy aksjomatu ekstencjonalności $P_1 = P_2$



2.6 AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

To tak naprawdę schemat aksjomatu, czyli nieskończona rodzina aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(t)$ będzie formułą języka teorii mnogości.

Wtedy dla tej formuły mamy $A_{6\varphi}$ dla każdego zbioru x istnieje zbiór, którego elementy spełniają własność φ

$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t))$$

FULL VERSION: niech $\varphi(t, z_0, \dots, z_n)$ będzie formułą języka teorii mnogości.

Wtedy pozostałe zmienne wolne będą parametrami (zapis skrócony

$$z_0, \dots, z_n := \bar{z})$$

Dla każdego układu parametrów i dla każdego x istnieje y taki, że dla każdego $t \in y$ t należy do x i t spełnia formułę φ

$$(\forall z_0) \dots (\forall z_n)(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t, z_0, \dots, z_n))$$

Weźmy półprostą otwartą:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},$$

druga półprosta to

$$(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

i tak dalej. Czyli ogólna definicja półprostej to:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$

Dla każdej z tych półprostych trzeba wziąć inną formułę, które wszystkie są zdefiniowane za pomocą formuły

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie a funkcjonuje jako parametr.

2.7 AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA

Ostatni aksjomat konstrukcyjny, jest to schemat rodziny aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(x,y)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że:

$$(\forall x)(\exists ! y)\varphi(x,y).$$

Wówczas dla każdego zbioru x istnieje zbiór $\{z : (\exists t \in x) \varphi(t,z)\}$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \iff (\exists t \in x) \varphi(t,z))$$

Czyli każdy zbiór można *opisać za pomocą operacji*.

FULL VERSION: niech $\varphi(x,y,p_0,...,p_n)$ będzie formułą języka teorii mnogości.

$$(\forall p_0), ..., (\forall p_n) ((\forall x) (\exists ! y) \varphi(x,y,\bar{p}) \implies (\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \iff (\exists t \in x) \varphi(t,z,\bar{p})))$$

2.8 KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH

Niech x,y będą dowolnymi zbiorami. Wtedy definiujemy:

$$x \cap y = \{t \in x : t \in y\}$$

$$x \setminus y = \{t \in x : t \notin y\}$$

$$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : (\exists s \in x)(\exists t \in y) z = \{s,t\}\}$$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjańskiego nie działa w nowych warunkach, bo nie wiemy z czego wyróżnić tę parę uporządkowaną. Ponieważ $s,t \in x \cup y$, mamy

$$\{s\}, \{s,t\} \subseteq x \cup y,$$

a więc

$$\{\{s\}, \{s,t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y).$$

Czyli nasza para uporządkowana jest elementem zbioru potęgowego zbioru potęgowego sumy zbiorów.

$$\bigcap x = \{z \in \bigcup x : (\forall y \in x) z \in y\} \text{ i wówczas } \bigcap \emptyset = \emptyset$$

RELACJA - definiujemy $\text{rel}(r)$ jako dowolny zbiór par uporządkowanych:

$$\text{rel}(r) := (\exists x)(\exists y) r \subseteq x \times y$$

FUNKCJA - relcja, która nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i różnych następnych:

$$\text{fnc}(f) := \text{rel}(f) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z) (\langle x,y \rangle \in f \wedge \langle x,z \rangle \in f) \implies y = z$$

Dziedzinę i zbiór wartości możemy wówczas zdefiniować jako:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \bigcup \bigcup f : (\exists y) \langle x,y \rangle \in f\}$$

$$\text{rng}(f) = \{y \in \bigcup \bigcup f : (\exists x) \langle x,y \rangle \in f\},$$

ponieważ

$$\{\{x\}, \{x,y\}\} \in f \implies \{x\}, \{x,y\} \in \bigcup f \implies x,y \in \bigcup \bigcup f$$

Dopóki działamy na zbiorach skończonych, wynikiem operacji zawsze będzie kolejny zbiór skończony - niemożliwe jest otrzymanie zbioru nieskończonego.

2.9 AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Istnieje zbiór induktywny:
 $(\exists x) (\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x) (y \cup \{y\} \in x))$

Na początku do naszego zbioru x dodajemy \emptyset . Potem, skoro \emptyset należy do x , to należy też $\{\emptyset\}$. Ale skoro do x należy $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, to również $\{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$ jest jego elementem i tak dalej.

TW. Istnieje zbiór induktywny najmniejszy względem zawierania, czyli taki, który zawiera się w każdym innym zbiorze induktywnym.

DOWOD:

Niech x będzie zbiorem induktywnym, który istnieje z aksjomatu nieskończoności. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem induktywnym}\}$$

Chcę pokazać, że ω jest zbiorem induktywnym, czyli $\emptyset \in \omega$.

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla każdego zbioru induktywnego } y \subseteq x$$

Ponieważ każdy zbiór induktywny zawiera \emptyset , także ω zawiera \emptyset .

Pozostaje pokazać, że dla dowolnego $t \in \omega$ mamy

$$t \cup \{t\} \in \omega$$

Dla każdego zbioru induktywnego $y \subseteq x$ mamy $t \in y$. ale ponieważ y jest zbiorem induktywnym, mamy

$$t \cup \{t\} \in y.$$

Z definicji przekroju zbioru x mamy

$$t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem induktywnym}\} = \omega$$

Czyli istnieje zbiór induktywny ω będący przekrojem wszystkich innych zbiorów induktywnych. Pokażemy teraz, że jest to zbiór najmniejszy.

Niech z będzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy $z \cap x$ jest zbiorem induktywnym i $z \cap x \subseteq x$. Czyli z jest jednym z elementów rodziny, której przekrój daje ω :

$$z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x) : Y \text{ zb. ind.}\} = \omega$$

i smiga



Każdy element $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}...$ możemy utoższamić z kolejnymi liczbami naturalnymi. W takim razie ten najmniejszy zbiór induktywny będzie utożsamiany ze zbiorem liczb naturalnych. Konsekwencją tego jest *zasada indukcji matematycznej*.

Niech $\varphi(x)$ będzie formułą ozakresionej zmiennej $x \in \mathbb{N}$ takiej, że zachodzi $\varphi(0)$ oraz

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \varphi(n) \implies \varphi(n+1).$$

Wówczas

$$(\forall z \in \mathbb{N}) \varphi(z)$$

DOWOD:

Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}.$$

Wtedy $0 \in A$ oraz A jest induktywny. Kolejne zbiory należące do zbioru induktywnego utożsamialiśmy z $n \in \mathbb{N}$, więc skoro $\varphi(n)$ należy do tego zbioru induktywnego, to również $\varphi(n+1)$ należy do A . Skoro A jest zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq A$, więc $A = \mathbb{N}$.

i smiga



2.10 AKSJOMAT REGULARNOŚCI

Do tej pory poznaliśmy aksjomaty o instnieniu i serie aksjomatów konstrukcyjnych. Aksjomat regularności nie jest żadnym z nich.

W każdym niepustym zbiorze istnieje element \in -minimalny:

$$(\forall x) x \neq \emptyset \implies ((\exists y \in x) (\forall z \in x) \neg z \in y),$$

a więc eliminowane są patologie jak np: $x \in x, y \in y \in x$.

Antynomia Russlla,

$$\{x : x \notin x\},$$

jest eliminowana przez aksjomat regularności.

2.11 AKSJOMAT WYBORU

Dla każdej rozłącznej rodziny parami rozłącznych zbiorów niepustych istnieje SELEKTOR

$$(\forall x) ((\forall y, z \in x) (y \neq \emptyset \wedge (y \neq z \implies y \cap z = \emptyset))) \implies (\exists s)(\forall y \in x)(\exists ! t) t \in s \cap y)$$

Problematyczne nie jest znalezienie punktów, które są reprezentantami zbiorów naszej rodziny, a wskazanie zbioru, który je wszystkie zawiera. Dlatego w tym może nam pomóc aksjomat wyboru. Wystarczy pokazać, że rozważamy rodzinę rozłącznych zbiorów i już z tego wiemy, że możemy wybrać selektor. Handy.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO:

Kulę możemy rozłożyć na 5 kawałków i przesuwając je izometrycznie w taki sposób, żeby złożyć z nich dwie identyczne kule jak ta, którą mieliśmy na początku. Kawałki na które dzielimy są niemierzalne, nie mają objętości, są maksymalnie patologiczne, ale nadal możemy powiedzieć że istnieją korzystając z aksjomatu wyboru. Daje on nam tylko informację, że istnieje selektor, a nie o tym jak on wygląda, więc może być absurdalny i patologiczny jak tylko ma ochotę.

FUNKCJA WYBORU - niech \mathcal{A} będzie rodziną zbiorów niepustych. Funkcją wyboru dla rodziny \mathcal{A} nazywamy wtedy dowolną funkcję f :

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A} \\ (\forall A \in \mathcal{A}) f(A) \in A$$

Aksjomat wyboru jest równoważny temu, że dla każdej rozłącznej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru (selektor).

Dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzi

$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$$

DOWOD:

Musimy skonstruować zbiór częściowo uporządkowany X , do którego będziemy mogli zastosować LKZ. Elementami tego zbioru niech będą przybliżenia tego, co chcemy otrzymać:

$$X = \{f : \text{fnc}(f) \wedge \text{dom}(f) \subseteq A \wedge \text{rng}(f) \subseteq B \wedge f \text{ jest 1-1}\}$$

3 LICZBY PORZĄDKOWE

3.1 LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jeśli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch jest ograniczony z góry, to w X istnieje element maksymalny.

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorów jest przeliczalna:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |A_n| \leq \aleph_0 \implies \aleph_0 \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

DOWOD:

Ponieważ $|A_n| \leq \aleph_0$, to istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

Chcemy pokazać, że istnieje też bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$f(n, k) = f_n(k) \quad (\text{☕})$$

Musimy znać wszystkie elementy (f_n) jednocześnie, więc skorzystamy z aksjomatu wyboru. Rozpatrzmy zbiór funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}} : \varphi \text{ jest bijekcją}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ oznacza wszystkie funkcje

$$g : \mathbb{N} \rightarrow A_n$$

Niech F będzie funkcją wyboru dla rodziny

$$\{F_n : n \in \mathbb{N}\},$$

czyli każdej rodzinie przypisujemy element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Opiszmy (☕) korzystając z funkcji wyboru:

$$f(n, k) = F(F_n)(k).$$

Ponieważ $F(F_n)$ jest bijekcją, to również funkcja f jest bijekcją.

i smiga



Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi

$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$$

$$\varphi' \in X$$

nie jest iniekcja, bo $t \notin \text{rng}(\varphi)$. Dodatkowo,

$$\varphi \subsetneq \varphi',$$

czyli φ nie jest elementem maksymalnym w X , stąd zachodzi tylko 1 lub 2, czyli $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$.

i smiga



3.2 DOBRE PORZĄDKI

Dobry porządek - w każdym niepustym podzbiorze $\langle X, \leq \rangle$ istnieje element najmniejszy.

CZĘŚCIOWY LINIOWY DOBRY PORZĄDEK $\langle X, \leq \rangle$, $\text{Lin}(X)$???

$$(\forall A \subseteq X) A \neq \emptyset \implies ((\exists a \in A)(\forall x \in A) x \leq a)$$

$$(\forall a, b \in A) a \leq b \vee b \leq a$$

oraz \leq jest zwrotny, przechodni i słabo antysymetryczny.

Do tej pory ostry porządek $<$ definiowaliśmy jako skrót

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y.$$

Teraz chcemy, żeby stał się on bytem. Seria twierdzeń z tym związanych:

- relacja $<$ jest przechodnia i silnie antysymetryczna
- jeśli $<$ jest relacją przechodnią i silnie antysymetryczną, to relacja zadana warunkiem $x \leq y \iff x < y \vee x = y$ jest częściowym porządkiem
- każdemu częściowemu porządkowi odpowiada tylko jeden ostry porządek i każdemu ostremu porządkowi odpowiada tylko jeden częściowy porządek.

SPÓJNOŚĆ to warunek mówiący, że

$$(\forall x, y) x \neq y \implies (xRy \vee yRx)$$

PRZYKŁADY - dobry porządek

1. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 0 zasada minimum mówi, że w każdym niepustym podzbiorze \mathbb{N} istnieje element najmniejszy, co jest równoważne zasadzie indukcji matematycznej
2. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ - izomorficzne ze zbiorem \mathbb{N}
3. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{1\}, \leq \rangle$
4. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\}, \leq \rangle$
5. $\langle n - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}, \leq \rangle$

ODCINEK POCZĄTKOWY - niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem z dobrym porządkiem \leq i $a \in X$. Wówczas odcinkiem początkowym tego zbioru wyznaczonym przez a jest zbiór

$$\text{pred}(X, a, \leq) = \{x \in X : x < a\}$$

W przykładach wyżej każdy zbiór jest odcinkiem początkowym dla zbioru następnego. 'Krótsze porządki' są odcinkami początkowymi dla dłuższych porządków.

TWIERDZENIE: dla dowolnego $a \in X$

$$\text{pred}(X, a, \leq) \neq X$$

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że dla pewnego $a \in X$ mamy

$$\text{pred}(X, a, \leq) \simeq X,$$

czyli istnieje izomorfizm

$$f : X \rightarrow \text{pred}(X, a, \leq).$$

Wtedy $f(a) < a$, bo izomorfizm zachowuje porządek, i zbiór

$$A = \{x \in X : f(x) < x\}$$

jest niepusty. Niech $b = \min A$, ale wtedy

$$f(b) < b \implies f(f(b)) < f(b),$$

czyli $b > f(b) \in A$, co jest sprzeczne z $b = \min A$.

i smiga



Niech $\langle X, \leq_X \rangle, \langle Y, \leq_Y \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi. Wtedy zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. te dwa zbiory są izomorficzne ($X \simeq Y$), czyli są tej samej długości
pierwszy jest dłuższy od drugiego:

$$(\exists a \in X) \langle \text{pred}(X, a, \leq_X), \leq \rangle \simeq \langle Y, \leq_Y \rangle$$

3. drugi jest dłuższy od pierwszego:

$$(\exists a \in Y) \langle \text{pred}(Y, a, \leq_Y), \leq \rangle \simeq \langle X, \leq_X \rangle$$

Wypadałoby to wszystko udowodnić, ale to jest przyjemny wykład i uznamy, że wszystko śmiga, żeby przejść do bardziej podniecających rzeczy, gdzie będziemy korzystać z poprawności tego nieistniejącego dowodu :3

3.3 ZBIÓR TRANZYTIVNY

Elementy moich elementów są moimi elementami!

Zbiór A nazywamy zbiorem **TRANZYTIVNYM**, gdy każdy jego element jest zarazem jego podzbiorem:

$$(\forall x \in A) x \subseteq A$$

\emptyset jest zbiorem tranzytywnym, bo nie ma elementów – ponieważ nie istnieją, to mogą mieć dowolne własności, w szczególności mogą być podzbiorami \emptyset . Tak jak wwierszy Na wyspach Bergamota.

$\{\emptyset\}$ – jego jedyny element to zbiór pusty, który jest jednocześnie jego podzbiorem.

$\text{Tran}(\omega)$ – każda liczba naturalna jest zbiorem liczb od siebie mniejszych – dowód na liście zadań :v

Jeżeli zbiór jest tranzytywny, to tranzytywna jest też jego suma, zbiór potęgowy i jego następnik:

$$\text{Tran}(A) \implies \text{Tran}(\bigcup A) \implies \text{Tran}(\mathcal{P}(A)) \implies \text{Tran}(A \cup \{A\})$$

DOWOD:

Udowodnimy, że $\text{Tran}(A) \implies \text{Tran}(A \cup \{A\})$

Ustalmy dowolne $x \in A \cup \{A\}$. Wtedy zachodzi jeden z dwóch przypadków:

1. $x \in A$, a ponieważ $\text{Tran}(A)$, to

$$(\forall y \in x) y \in A$$

2. $x \in \{A\}$, czyli $x = A$, a więc z $\text{Tran}(A)$ otrzymujemy, że $y \in x \implies y \in A \implies y \in \{A\}$.

i smiga



3.4 LICZBY PORZĄDKOWE

Zbiór tranzytywny A nazywamy **LICZBĄ PORZĄDKOWĄ**,
jeśli spełnia warunek

$$(\forall x, y \in A) x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

i używamy oznaczenia $\text{On}(A)$.

Jeśli $\text{On}(\alpha)$, to α jest dobrze uporządkowane przez \in , czyli każdy niepusty zbiór $A \subseteq \alpha$ ma element \in -minimalny:

$$(\forall A \subseteq \alpha) A \neq \emptyset \implies (\exists x \in A)(\forall y \in A) x = y \vee x \in y,$$

co wynika z aksjomatu regularności.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI LICZB PORZĄDKOWYCH:

α, β - liczby porządkowe, C - zbiór liczb porządkowych

1. $(\forall x \in \alpha) \text{On}(x)$ - elementy liczby porządkowej są liczbami porządkowymi.

Ustalmy dowolne $x \in \alpha$. Ponieważ $\text{Tran}(\alpha)$, to

$$x \in \alpha.$$

Zatem $\text{Lin}(x)$, bo $\text{Lin}(\alpha)$. Ustalmy dowolne $y \in x$ i $x \in y$. Skoro $x \subseteq \alpha$, to $y \in \alpha$, czyli $y \subseteq \alpha$, zatem $z \in \alpha$. W takim razie x, z są porównywalne jako elementy α . Mamy trzy możliwości: $z \in x$, $x \in z$ (sprzeczne z aksj. regularności), $z = x$ (sprzeczne z aksj. regularności).

2. $\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$

3. $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ - dowolne dwie liczby porządkowe są porównywalne.

Niech $A = \alpha \cap \beta$. Wtedy $\text{On}(A)$. Przypuśćmy, że

$$A \neq \alpha \wedge A \neq \beta.$$

Wówczas A jest prawdziwym podzbiorem zarówno α jak i β . Ale z 2 mamy

$$A \in \alpha \wedge A \in \beta,$$

czyli

$$A \in \alpha \cap \beta = A.$$

Jest to sprzeczne z aksjomatem regularności, więc $A = \alpha$ lub $A = \beta$, czyli $\alpha \subseteq \beta$ lub $\beta \subseteq \alpha$, co z 2 daje nam $\alpha \in \beta$ lub $\beta \in \alpha$.

4. $\text{Tran}(C) \implies \text{On}(C)$

5. $C \neq \emptyset \implies (\exists \alpha \in C)(\forall \beta \in C) \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta.$

Liczbę porządkową α utożsamiamy ze zbiorem dobrze uporządkowanym $\langle \alpha, \in \rangle$. Możemy w takim razie mówić o $\text{pred}(\alpha, \in, \beta)$, ale skróćmy to do zapisu:

$$\text{pred}(\alpha, \in, \beta) = \text{pred}(\alpha, \beta) = \{x \in \alpha : x \in \beta\} = \beta,$$

czyli każda liczba porządkowa jest zbiorem liczb porządkowych od niej mniejszych.

Jeśli $\text{On}(\alpha)$, to wtedy $\alpha \cup \{\alpha\}$ jest najmniejszą liczbą porządkową większą od α i nazywamy ją **NASTĘPNIKIEM** porządkowym liczby α

$$\alpha \cup \{\alpha\} := \alpha + 1$$

Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych

paradoks Burali-Forti

DOWOD:

Przypuśćmy nie wprost, że ON jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych. Wtedy

$$\text{Tran}(\text{ON}),$$

bo jeśli $\alpha \in \text{ON}$ i $\beta \in \alpha$, to $\beta \in \text{ON}$. Ponadto, $\text{Lin}(\text{ON})$ z własności 3. Zatem

$$\text{On}(\text{ON}),$$

czyli $\text{ON} \in \text{ON}$, co jest sprzeczne z aksjomatem regularności.

i smiga



Nich $\langle X, < \rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba porządkowa α taka, że

$$\langle X, < \rangle \simeq \langle \alpha, \in \rangle$$

Czyli każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z jakąś liczbą porządkową.

DOWOD:

1. JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, nie wprost, że istnieją dwie różne liczby porządkowe α, β spełniające zależność z twierdzenia. Wtedy

$$\alpha \simeq \beta,$$

co jest sprzeczne z ich różnością – któraś musi być mniejsza i wyznaczać odcinek początkowy w drugiej. Zbiór nie może być izomorficzny ze swoim odcinkiem początkowym.

2. ISTNIENIE

Zdefiniujmy zbiór

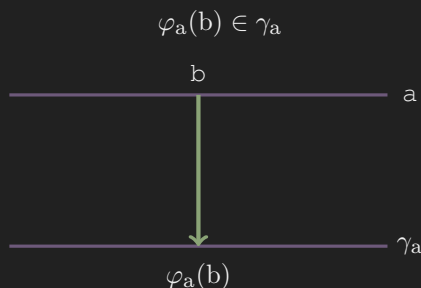
$$Y = \{a \in X : (\exists \gamma_a) \text{On}(\gamma_a) \wedge \langle \text{pred}(X, a, <), < \rangle \simeq \gamma_a\},$$

czyli wybieram podzbiory X , dla których twierdzenie zachodzi. Zauważmy, że $Y \neq \emptyset$, bo w X istnieje element minimalny (z dobrego porządku).

Dla $a \in Y$ rozważmy izomorfizm

$$\varphi_a : \text{pred}(X, a, <) \rightarrow \gamma_a.$$

Niech $b \in Y$ o $b < a$. Wtedy



W takim razie, $\varphi_a|_{\text{pred}(X,b,<)}$ jest izomorfizmem pomiędzy $\text{pred}(X,b,<)$ i $\varphi_a(b)$. W takim razie $b \in Y$, czyli Y jest zamknięty w dół.

Stąd możemy wnioskować, że $X = Y$ lub $Y = \text{pred}(X,c,<)$. Załóżmy, że $Y = \text{pred}(X,c,<)$:

$$X \neq Y \implies X \setminus Y \neq \emptyset.$$

Niech $c = \min(X \setminus Y)$, wówczas

$$Y = \text{pred}(X,c,<).$$

Mam więc zbiór Y , z którego każdym elementem jest związana jakaś liczba porządkowa. Z aksjomatu zastępowania mogę stworzyć zbiór wszystkich tych liczb porządkowych.

$$f: Y \rightarrow \text{ON}$$

$$f(a) = \gamma_a$$

$$A = \text{rng}(f) = \{\gamma_a : a \in Y\}.$$

Wystarczy pokazać:

1. $\text{Tran}(A) \implies \text{On}(A)$ (z 4.):

Ustalmy $\xi \in A$ oraz $\zeta \in \xi$. Skoro $\xi \in A$, to $\xi = \gamma_a$ dla pewnego $a \in Y$. Wtedy istnieje $b < a$ takie, że $\varphi_a(b) = \zeta$. Stąd wynika, że $\zeta = \gamma_b$, czyli $\zeta \in A$.

2. f jest izomorfizmem porządkowym.

Jest funkcją 1-1 z definicji zbioru Y , a funkcją na z definicji zbioru A . Zachowuje porządek, bo rozważamy odcinki początkowe.

3. $X = Y$

$Y = \text{pred}(X,c,<)$, a pokazaliśmy, że $c \in Y$, bo $Y \simeq \text{On}(\alpha)$, więc jest dobrym porządkiem (ma element najmniejszy). W takim razie tu byłaby sprzeczność.

Wyżej zakładaliśmy, że $X \neq Y \implies Y = \text{pred}(X,c,<)$. Ponieważ !?!?!?!?

i smiga



TWIERDZENIE NA BOCZKU

TWIERDZENIE HARTOGSA - Dla każdego zioru X istnieje liczba porządkowa α , dla której nie istnieje funkcja różnowartościowa w zbiór X

TYPEM PORZDKOWYM zbioru dobrze uporządkowanego nazywamy liczbę porządkową, z którą jest on homeomorficzny.

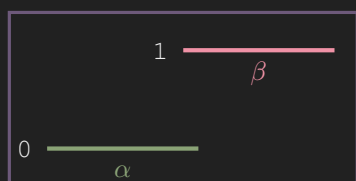
$$\text{ot}(\mathbb{N}, \leq) = \text{ot}(\langle \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq) = \omega$$

$$\text{ot}(\langle \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \leq) = \omega + 1$$

3.5 DZIAŁANIA NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

Niech α, β będą liczbami porządkowymi. Wówczas dodawanie definiujemy:

$$\alpha + \beta = \text{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, \leq)$$



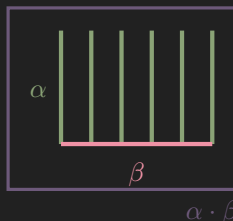
$\alpha + \beta$

czyli najpierw rozdzielamy je, a potem sumujemy. Relację porządku na sumie liczb porządkowych definiujemy (porządek leksykograficzny):

$$\langle \gamma, i \rangle \leq_{\text{lex}} \langle \xi, j \rangle \iff i < j \vee (i = j \wedge \gamma < \xi).$$

Mnożenie liczb porządkowych to z kolei typ porządkowy ich iloczynu z porządkiem leksykograficznym:

$$\alpha \cdot \beta = \text{ot}(\beta \times \alpha, \leq_{\text{lex}})$$



czyli bierzemy β kopii α – wygodniej na to patrzeć jak na takiego jerzyka z iloczynu kartezjańskiego.

Kilka przykładów:

$$\omega + \omega = \text{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq)$$

$$\omega + \omega + 1 = \text{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}, \leq)$$

$$\omega \cdot \omega = \text{ot}(\{m - \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}, \leq)$$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

- dodawanie i mnożenie są *łączne*
- nie są *przemienne* – *kolejność jest ważna*

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$$

- mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania

NASTĘPNIKIEM liczby porządkowej α nazywamy liczbę porządkową

$$\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 = \beta:$$

$$\text{Succ}(\beta) \iff (\exists \alpha) \text{On}(\alpha) \wedge \beta = \alpha + 1$$

LICZBĄ GRANICZNĄ nazywamy liczbę porządkową $\text{Lim}(\beta)$, jeśli nie jest ona następnikiem innej liczby.

Najmniejszą liczbą graniczną jest 0, kolejną jest ω , a wszystkie liczby naturalne są następnikami.

$$\text{Lim}(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha$$

DOWOD:

\implies

Wiem, że $\text{Lim}(\alpha)$, czyli

$$\neg (\exists \beta) \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Jeśli założymy, że

\Leftarrow

Ponieważ $\text{Tran}(\alpha)$, to również $\text{Tran}(\bigcup \alpha)$. Załóżmy, nie wprost, że $\text{Succ}(\alpha)$, czyli

$$(\exists \beta) \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Wtedy

$$\bigcup \alpha = \bigcup (\beta \cup \{\beta\}) = \beta,$$

ale wówczas

$$\beta \cup \{\beta\} = \beta,$$

czyli wówczas $\beta \in \beta \cup \{\beta\} = \beta$, co daje nam sprzeczność.

3.6 INDUKCJA POZASKOŃCZONA

Niech $\varphi(\alpha)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że

$$(\forall \beta)(\forall \alpha < \beta) \varphi(\alpha) \implies \varphi(\beta)$$

$$\text{Wtedy } (\forall \alpha) \varphi(\alpha).$$

Jest to TWIERDZENIE O INDUKCJI POZASKOŃCZONEJ

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że

$$(\exists \alpha) \neg \varphi(\alpha).$$

Wtedy zbiór

$$C = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\} : \varphi(\gamma)\}$$

jest niepustym zbiorem liczb porządkowych. Wtedy w C istnieje element najmniejszy ξ . Jego minimalność oznacza, że

$$(\forall \varepsilon < \xi) \varphi(\varepsilon).$$

Z założenia, że

$$(\forall \alpha)(\forall \beta < \alpha) \varphi(\beta) \implies \varphi(\alpha)$$

wynika, że $\varphi(\xi)$, czyli mamy sprzeczność z $\xi \in C$.

i smiga



Struktura indukcji:

1. krok bazowy – sprawdzamy dla najmniejszej możliwej liczby
2. krok indukcyjny:
 - krok następnikowy
 - krok graniczny

3.7 REKURSJA POZASKOŃCZONA

Od twierdzenia o indukcji różni się swoją istotą – indukcja służy dowodzeniu, a rekursja – tworzeniu konstrukcji.

Niech $\varphi(x, y)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że

$$(\forall x)(\exists !y) \varphi(x, y).$$

Wówczas dla każdej liczby porządkowej α istnieje funkcja f taka, że

$$\text{dom}(f) = \alpha$$

i spełniony jest warunek

$$(\forall \beta < \alpha) \varphi(f \upharpoonright \beta, f(\beta)) \quad (\text{☞})$$

Tworzymy pozaskończony ciąg indeksowany liczbami porządkowymi, gdzie kolejny krok wynika z tego co już mamy.

DOWOD:

JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, że dla pewnego α istnieją dwie różne funkcje f_1, f_2 o dziedzinie α spełniające (☞). Wtedy zbiór jest niepusty

$$\{\beta \in \alpha : f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\} \neq \emptyset.$$

Niech β_0 będzie najmniejszym elementem tego zbioru. Wtedy dla $\varepsilon < \beta_0$ mamy

$$f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon),$$

4 LICZBY KARDYNALNE

Mamy kolekcję zbiorów, które wszystkie mają tę samą moc. Ale my byśmy chcieli wiedzieć co to jest ta moc - liczby kardynalne pozwalają nam wybierać zbiory według ich mocy.

LICZBA KARDYNALNA to liczba porządkowa,
która nie jest równoliczna z żadnym swoim elementem.

$$\text{Card}(\alpha) := \text{On}(\alpha) \wedge (\forall \beta < \alpha) |\beta| < |\alpha|$$

Zazwyczaj oznaczamy je κ, λ , chociaż kiedyś używało się gotyku.

Każda liczba kardynalna jest liczbą porządkową graniczną.

$\text{Card}(0)$

$\text{Card}(\omega)$, ale już $\neg \text{Card}(\omega + \omega)$, $\neg \text{Card}(\omega \cdot \omega)$ i $\neg \text{Card}(\omega^\omega)$.

$(\forall n \in \omega) \text{Card}(n)$ - dowód później

4.1 WŁASNOŚCI

Każdy zbiór jest równoliczny z pewną liczbą kardynalną.

DOWOD:

Ustalmy dowolny zbiór X . Wiemy, że X można dobrze uporządkować przez $<$. Wtedy istnieje liczba porządkowa α z nim izomorficzna:

$$\varphi : X \xrightarrow[1-1]{\text{izo}} \alpha$$

W takim razie φ jest bijekcją między X a α , więc

$$|X| = |\alpha|.$$

Niech

$$\kappa = \min\{\alpha : |\alpha| \geq |X|\}$$

Wtedy $\kappa \sim X$, a z minimalności κ mamy $\text{Card}(\kappa)$.

Jeśli $|X| = |\kappa_1|$ i $|X| = |\kappa_2|$, to $|\kappa_1| = |\kappa_2|$.

NOWY WYKŁAD

4.2 DZIAŁANIA NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech κ, λ będą liczbami kardynalnymi, wtedy:

$$\kappa + \lambda = |(K \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$$

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

Jeśli $\kappa \geq \omega$, to $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

DOWOD:

Indukcja po liczbach kardynalnych lub po liczbach porządkowych - obie wersje będą poprawne.

1. $\kappa = \omega$ $|\omega \times \omega| = |\omega|$
2. Przypśćmy, że dla nieskończonych liczb kardynalnych $< \kappa$ teza zachodzi.

Na $\kappa \times \kappa$ definiujemy dobry porządek:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle \prec \langle \zeta, \xi \rangle &\iff \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\zeta, \xi\} \vee \\ &\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha < \zeta) \vee \\ &\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha = \zeta \wedge \beta < \xi)\end{aligned}$$

Sprawdzanie, że to jest częściowy porządek zostaje na liście

Niech $\gamma = \text{ot}(\kappa \times \kappa, \prec)$. Niech $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$ i niech $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$. Wtedy

$$\langle \alpha, \beta \rangle \preceq \langle \delta, \delta \rangle$$

i mamy

$$\text{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \text{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \delta, \delta \rangle) \subseteq (\delta + 1) \times (\delta + 1)$$

Ale $\delta < \kappa$, więc

$$|\text{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \alpha, \beta \rangle)| \leq |\delta + 1|^2 < \kappa$$

Jeśli wezmę dowolne $\eta < \gamma$, to η jest odcinkiem początkowym γ , czyli $\eta < \kappa$. Wobec tego $\gamma \leq \kappa$. Ale $|\gamma| = |\kappa \times \kappa|$, zatem

$$\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| \leq \kappa.$$

Zdeciniujmy funkcję

$$\begin{aligned}f &: \kappa \rightarrow \kappa \times \kappa \\ f(\alpha) &= \langle \alpha, 0 \rangle\end{aligned}$$

która jest iniekcją, więc

$$|\kappa| \leq |\kappa \times \kappa|$$

Czyli $\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa$.

i smiga



Wniosek:

$$\kappa, \lambda \leq \omega \implies \kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

DOWOD:

$$\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \max\{\kappa, \lambda\} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Wypadałoby pokazać, że $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$, ale to się narysuje

i smiga



Dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba kardynalna od niej większa.

DOWOD:

Ustalmy dowolne κ . Wtedy $|\mathcal{P}(\kappa)| > \kappa$ z twierdzenia Cantora.

DOWOD:

Wersja bez aksjomatu wyboru:

Z twierdzenia Harcośtam: Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa, z którą nie istnieje iniekcja z α w X .

$$X \mapsto H(X) = \min\{\alpha : \neg (\exists \varphi : \alpha \rightarrow X) \varphi \text{ to iniekcja}\}$$

Utalmy κ . Wtedy $\text{Card}(H(\kappa))$ i $H(\kappa) > \kappa$.

i smiga



NASTĘPNIKIEM liczby κ nazywamy najmniejszą
liczbę kardynalną od niej większą i oznaczamy ją
 κ^+

Czyli κ ma dwa następniki: kardynalny i porządkowy.

Liczbę kardynalną κ nazywamy NASTĘPNIKIEM,
jeśli $\kappa = \lambda^+$ dla pewnego $\text{Card}(\lambda)$.

Liczbę kardynalną nazywamy GRANICZNA,
jeśli nie jest następnikiem.

4.3 HIERARCHIA ALEFÓW

Konstrukcja rekurencyjna:

$$\begin{aligned}\aleph_0 &= \omega \\ \aleph_{\alpha+1} &= \aleph_{\alpha}^+ \\ \aleph_{\gamma} &= \bigcup_{\xi < \gamma} \aleph_{\xi} \quad \text{Lim}(\gamma)\end{aligned}$$

Alternatywny zapis to $\aleph_{\alpha} = \omega_{\alpha}$, ale używamy \aleph żeby podkreślić kardynalny charakter badanego obiektu.

$$\text{CARD} = \omega \cup \{\aleph_{\gamma} : \gamma \in \text{On}\}$$

Każda nieskończona liczba kardynalna jest jakimś \aleph .

DOWÓD:

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $\kappa \geq \omega$

$$(\forall \alpha \in \text{ON}) \kappa \neq \aleph_{\alpha}$$

Bez zmniejszenia ogólności κ jest minimalna.

Rozważmy zbiór

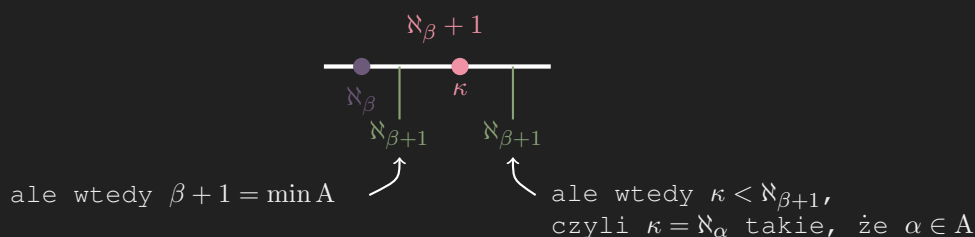
$$A = \{\xi : \aleph_{\xi} < \kappa\} \neq \emptyset.$$

Jest to zbiór niepusty, ponieważ $\kappa \neq \omega$, bo $\omega = \aleph_0$. W takim razie

$$\beta = \bigcup A \wedge \text{On}(\beta).$$

Są dwie możliwości:

1. $\beta \in A$, czyli β jest największym elementem A . Ale wówczas istnieje największa liczba kardynalna mniejsza od κ : \aleph_{β} . Ale wtedy $\kappa = \aleph_{\beta+1}$.



2. $\beta \notin A$, czyli $\text{Lim}(\beta)$. Wtedy $\kappa = \aleph_{\beta}$.

i smiga



4.4 POTEĞOWANIE

Hipoteza continuum Czy jest \mathfrak{c} ?

$$\mathfrak{c} > \aleph_0 \implies \mathfrak{c} \geq \aleph_1$$

$$?\mathfrak{c} = \aleph_1?$$

POTEĞOWANIE liczb kardynalnych:

$$\kappa^\lambda := |\kappa^\lambda|$$

Bierzemy zbiór funkcji z λ w κ i to jest moc tego zbioru.

$$2^\kappa > \kappa$$

$$\kappa \leq \lambda \implies \kappa^\mu \leq \lambda^\mu$$

$$\kappa^{\mu+\lambda} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\lambda$$

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\mu \cdot \lambda}$$

Niech $2 \leq \kappa \leq \lambda$ oraz $\lambda \geq \omega$. Wtedy

$$\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda.$$

DOWOD:

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$$

i smiga



4.5 UOGÓLNIONE OPERACJE NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną liczb kardynalnych.

Wówczas dla tej rodziny definiujemy:

$$\text{sumę: } \sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \right|$$

$$\text{iloczyn: } \prod_{i \in I} \kappa_i := \left| \prod_{i \in I} \kappa_i \right|,$$

przy czym po prawej mamy uogólniony iloczyn kartezjański zbiorów

Niech $(\forall i \in I) \kappa_i = \kappa$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \kappa_i &= \bigcup_{i \in I} \kappa \times \{i\} = \kappa \times \bigcup_i \{i\} = \kappa \cdot |I| \\ \prod_{i \in I} \kappa_i &= \kappa^{|I|} \end{aligned}$$

Za tydzień:

$$\langle \kappa_i : i \in I \rangle, \langle \lambda_i : i \in I \rangle \quad (\forall i \in I) \kappa_i < \lambda_i$$

wtedy

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$