



# Spis treści

1	METRYKI	3
1.1	METRYKA . . . . .	3
1.2	KULA . . . . .	3
1.3	ZBIEŻNOŚĆ . . . . .	4
1.4	ZBIORY OTWARTE . . . . .	4
1.5	ZBIORY DOMKNIĘTE . . . . .	5
2	PODPRZESTRZENIE METRYCZNE	6
2.1	PODPRZESTRZEŃ . . . . .	6
2.2	HOMEOMORFIZMY . . . . .	7
2.3	TOPOLOGIA . . . . .	7
2.4	BAZA . . . . .	8
2.5	TOPOLOGIA STRZAŁKI . . . . .	8
2.6	UZWARCENIE ALEKSANDROWA na $\mathbb{R}$ . . . . .	8
2.7	PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA . . . . .	9
3	ZBIÓR CANTORA	11
4	KOSTKA HILBERTA $[0, 1]^{\mathbb{N}}$	11
5	ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ	13
5.1	PRZESTRZEŃ ZWARTA . . . . .	13
6		14

# 1 METRYKI

## 1.1 METRYKA

**METRYKA** na zbiorze  $X$  nazywamy funkcję  
$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$
*przedstawia sposób mierzenia odległości*

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

- 1.  $d(x, x) = 0 \wedge d(x, y) > 0$ , jeśli  $x \neq y$
- 2.  $(\forall x, y) d(x, y) = d(y, x)$  - symetria
- 3.  $(\forall x, y, z) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  - warunek  $\triangle$

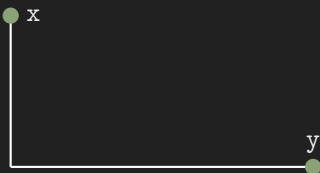
.....

### METRYKI EUKLIDESOWE:

$\mathbb{R}$  :  $d(x, y) = |x - y|$   
 $\mathbb{R}^2$  :  $d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$   
 $\mathbb{R}^n$  :  $d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \dots + (x(n - 1) - y(n - 1))^2}$

### METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2$  :  $d(x, y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



### METRYKA MAKSIMUM

$\mathbb{R}^2$  :  $d(x, y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

## 1.2 KULA

Kulą o środku  $x \in X$  i promieniu  $r$  nazywamy:  
$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$\mathbb{R}$ , m. euklidesowa:	$\mathbb{R}^2$ , m. euklidesowa	$\mathbb{R}^2$ , m. miasto	$\mathbb{R}^2$ , m. maksimum
$\mathbb{R}^2$ , m. centrum		$C[0, 1]$ , m. supremum	$C[0, 1]$ , m. całkowa
narysuję potem		narysuje	potem

## 1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG  $(x_n)$  ZBIEGA do  $x \in X$ , jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) d(x_n, x) < \varepsilon$$

*W każdej kuli o środku w  $x$  leżą prawie wszystkie wyrazy  $(x_n)$*

Dla przestrzeni metrycznej  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall i < \infty) x_n(i) \rightarrow x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla  $r \geq 1$  to cała przestrzeń, a dla  $r < 1$  kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{\text{sup}}} f \iff (f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f.$$

## 1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$  jest **zbiorem otwartym**, jeśli na każdym punkcie ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze  $U$

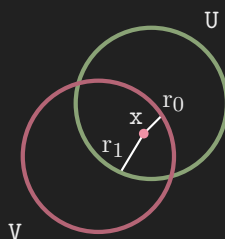
$$(\forall z \in U)(\exists r > 0) B_r(z) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory,  $U$  i  $V$ , których przekrój  $U \cap V$  jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych  $\mathcal{U}$  która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowolnego  $x \in U \cap V$  możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists r_0 > 0) B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists r_1 > 0) B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będą zawierać się w  $U \cap V$ , ale jedna na pewno będzie się zawierać.



DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech  $x$  należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists U \in \mathcal{U}) x \in U.$$

Ponieważ  $U$  jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na  $x$ . Skoro  $U$  należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisać kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga  


.....  
 $U$  jest zbiorem otwartym  $\iff U$  jest sumą kul.

DOWÓD:

$\Leftarrow$  wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Rightarrow$

Ponieważ  $U$  jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall x \in U)(\exists r_x > 0) B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w  $U$ , suma ta nie może być większa niż  $U$ . Zawierają się w niej wszystkie punkty z  $U$ , więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga  


## 1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$  jest **zbiorem domkniętym**, jeśli każdy ciąg zbieżny z  $F$  ma granicę w  $F$

Jeżeli  $U$  jest zbiorem otwartym, to  $U^c$  jest zbiorem domkniętym

DOWÓD:

Niech  $(x_n)$  będzie ciągiem zbieżnym z  $U^c$ . Jeśli  $U^c$  nie jest domknięte, to  $(x_n)$  musi zbiegać do pewnego punktu  $x \in U$ , czyli

$$(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu  $(x_n)$  należy do  $U$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $(x_n)$  jest ciągiem zbieżnym z  $U^c$ .

i smiga  


## 2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

### 2.1 PODPRZESTRZEŃ

PODPRZESTRZEŃ  $(X, d)$  to  $(A, d)$ ,  $A \subseteq X$

*formalnie  $(A, d)$  nie jest przestrzenią metryczną - musimy obciąć  $d|_{A \times A}$*

PRZYKŁAD:

Dana jest prosta  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową. Rozważmy na niej zbiór  $[0, 1]$ . Jednym ze zbiorów w tej podprzestrzeni jest:



Ponieważ dla podprzestrzeni  $[0, 1]$  nie istnieją punkty mniejsze niż 0, to ten zbiór jest otwartą kulą.

Na  $\mathbb{R}^2$  z metryką centrum wybieramy okrąg o promieniu  $\frac{1}{2}$  i środku w  $(0, 0)$ . Taka podprzestrzeń jest bardzo podobna do przestrzeni dyskretnej - każde dwa różne punkty są oddalone od siebie o dokładnie 1.

Funkcja z jednej przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  w inną przestrzeń metryczną  $(Y, \rho)$ :

$$f : X \rightarrow Y$$

jest ciągła, jeśli

$$(\forall x \in X)(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y) d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dodatkowo, wówczas równoważne są warunki:

1.  $f$  jest funkcją ciągłą
2.  $(x_n)$  - ciąg z  $X$  taki, że  $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$  (zbieżność wg. Heinego - ciąg wartości zbiega do wartości granicy)
3.  $f^{-1}[U]$  jest otwarty dla każdego otwartego  $U \subseteq Y$

DOWOD:

Pokażemy implikację  $3 \implies 1$

Dana jest funkcja

$$f : X \rightarrow Y$$

Weźmy kulę  $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$ . Ponieważ jest zbiorem otwartym, to z założenia 3

$$(\exists U \underset{\text{otw}}{\subseteq} X) f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))] = U.$$

Z definicji zbioru otwartego wiemy, że na dowolnym punkcie  $U$  możemy opisać kulę

$$(\exists \delta > 0) B_\delta(x) \subseteq U$$

Dla  $y \in B_\delta(x)$

$$d(x, y) < \delta.$$

Natomiast

$$f(y) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$

czyli  $d(x, y) < \delta$  oraz  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

i smiga



## 2.2 HOMEOMORFIZMY

**HOMEOMORFIZM**  $(X \cong Y)$  nazywamy taką funkcję  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ , która:

1.  $f$  jest ciągłą bijekcją
2.  $f^{-1}$  jest ciągła

**PRZYKŁADY:**

$[0, 1] \cong [0, 2]$  dla funkcji np.  $f(x) = 2x$

$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{\text{miast}})$  dla funkcji  $f(x, y) = \langle x, y \rangle$

$(X, d)$  - dowolna przestrzeń metryczna. Rozważmy poniższą metrykę:

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Wtedy  $(X, d) \cong (X, d')$ . Możemy zmieniać zakres punktów, które wyrzucamy i to nie wpływa na istnienie homeomorfizmu.

## 2.3 TOPOLOGIA

**TOPOLOGIA** na zbiorze  $X$  nazywamy

rodzinę  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  taką, że

$$\emptyset \in \mathcal{U}, X \in \mathcal{U}$$

jest zamknięta na skończone przekroje

jest zamknięta na dowolne sumy

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, to **topologią** jest rodzina zbiorów otwartych, która spełnia warunki topologii.

$(X, \mathcal{U})$  to przestrzeń topologiczna

Dla pewnego zbieżnego ciągu elementów  $X \lim x_n = x$ . Korzystając z pojęcia *przestrzeni topologicznych*, zbieżność można zdefiniować:

$$(\forall U \in \mathcal{U}) x \in U \implies (\exists N)(\forall n > N) x_n \in U$$

Przestrzeń topologiczna jest **PRZESTRZENIĄ HANSDORFA**, jeżeli

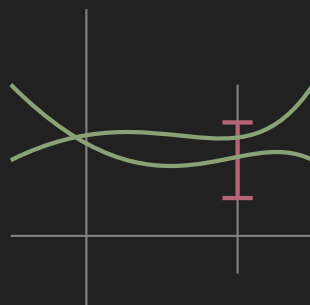
$$(\forall x \neq y \in X)(\exists U, V) (x \in U \wedge y \in V) \wedge U \cap V = \emptyset$$

Czyli dla dowolnych dwóch punktów mogą znaleźć dwa rozłączne zbiory otwarte

$C[0, 1]$  - funkcje ciągłe na odcinku  $[0, 1]$ . Weźmy  $I$ , przedział otwarty na  $\mathbb{R}$ . Niech  $x \in [0, 1]$  oraz

$$A_x^I = \{f \in C[0, 1] : f(x) \in I\}.$$

Czyli wybieramy  $x$  i stawiamy n nim bramkę równą  $I$ . Do zbioru  $A_x^I$  będą należeć wszystkie fnkcje, które przez tę bramkę przejdą.



Rozważmy zbiory postaci  $A_{x_0}^{I_0} \cap \dots \cap A_{x_n}^{I_n}$ . Z sum takich zbiorów tworzę rodzinę  $\mathcal{U}$ , która jest topologią na  $[0, 1]$ .

Przyjrzyjmy się ciągom zbieżnym w tej topologii.

$$f_n \rightarrow f \implies (\forall x \in [0, 1]) f_n(x) \xrightarrow{\text{euk}} f(x)$$

Wiemy, że  $f_n$  jest zbieżne, ale czemu  $f_n(x)$  miałoby być zbieżne?

DOWOD:

Dla pewnego  $\varepsilon > 0$  i przedziału

$$I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

mamy:

$$(\exists N)(\forall n > N) f_n \in A_x^I.$$

Ponieważ  $f(x)$  jest środkiem naszego przedziału i  $f_n \rightarrow f$ , to  $f \in A_x^I$ . Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall n > N) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa się **topologią zbieżności punktowej**.

i smiga



## 2.4 BAZA

BAZA dla topologii to taka  
rodzina zbiorów otwartych,  
że każdy niepusty i otwarty podzbiór tej  
przestrzeni można wysumować przy  
pomocy pewnych elementów bazy

## 2.5 TOPOLOGIA STRZAŁKI

Rozważamy zbiory w  $\mathbb{R}$

$$B = \{[a, b) : a < b\},$$

które są otwarte (otwarto-domknięte)



Topologia strzałki jest bogarsza niż topologia euklidesowa - każdy otwarty zbiór w sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie topologii strzałki. W dodatku jest to przestrzeń **Handsdorffa**.

Ciągi zbieżne w strzałce to

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0,$$

ale już  $\left(\frac{a}{n}\right)$  nie jest ciągiem zbieżnym w strzałce, bo wszystkie jego wyrazy są poza badanym przedziałem.

Strzałka nie jest metryzowalna.

## 2.6 UZWARCENIE ALEKSANDROWA na $\mathbb{R}$

aka przestrzeń z gruszką

**PRZESTRZEŃ ZWARTA** - przestrzeń topologiczna,  
że z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi  
można wybrać pokrycie skończone

**UZWARCENIE** - rozszerzenie danej przestrzeni  
topologicznej tak, by była ona przestrzenią zwartą.

**OTOCZENIE** - dowolny zbiór, który zawiera zbiór otwarty zawierający dany punkt.



## PRZESTRZEŃ Z GRUSZKĄ



Mamy  $\mathbb{R}$  i jakieś  $a \in \mathbb{R}$ . Otoczenia wszystkich liczb  $\mathbb{R}$  to

$$r : \{r\},$$

czyli singletony liczb rzeczywistych są tutaj otwarte. Otoczeniem  $a$  są z kolei

$$a : \{a\} \cup A,$$

takie, że  $A \subseteq \mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \setminus A$  jest skończony.

Topologię w uzwarceniu Aleksandrowa można zdefiniować w dowolny sposób, musi tylko jasno wynikać, co jest zbiorem otwartym, a co zamkniętym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenią **Hansdorffa**

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$$

ponieważ tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie  $a$ . W takim razie możemy powiedzieć, że jeśli mamy dowolny  $(x_n)$  różnowartościowy, to

$$\lim x_n = a,$$

bo  $a \in U$ , gdzie  $U$  jest zbiorem otwartym i istnieje skończenie wiele  $n$  takich, że  $x_n \notin U$ .

## 2.7 PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA

Zbiór  $A \subseteq X$  jest **ZBIOREM GĘSTYM**, jeżeli

$$(\forall U \underset{\text{otw}}{\neq} \emptyset) U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

jest to zbiór otwarty, który kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń  $X$  jest **OŚRODKOWA**,  
jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

**PRZYKŁADY:**

$\mathbb{R}$  z metryką euklidesową:  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$  z metryką euklidesową:  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^2$  z metryką miasto:  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  bo zbiory otwarte w metryce miasto są takie same jak w euklidesowej

kostka Cantora  $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ : ciągi stałe od pewnego miejsca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) - jest ich przeliczalnie wiele i jest to zbiór gęsty.

**ANTYPRZYKŁAD:**

$\mathbb{R}^2$  z metryką dyskretną: zbiór gęsty  $A$  musi się kroić niepusto z każdym singletonem, więc

$$(\forall x) A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$  z metryką centrum: intuicja podpowiada, że  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ale jeśli kula leży na prostej o wyrazach niewymiernych, np  $y = \pi x$ , to kroi się pusto z  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  **zbiór  $A \subseteq X$  jest gęsty**  $\iff$  dla każdej kuli  $B_r(x)$  istnieje  $a \in A$  bliżej  $x$  niż kula

$$A - \text{zb. gęsty} \iff (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) d(x, a) < \varepsilon$$

DOWOD:

$\implies$

Założmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gęstego  $A$  i przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  istnieje kula o promieniu  $\varepsilon$  i środku  $x \in X$  taka, że nie zawiera elementów z  $A$ :

$$(\exists x) B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie  $A$  nie się pusto ze zbiorem otwartym  $B_\varepsilon(x)$ , więc nie jest zbiorem gęstym.

$\impliedby$

Niech  $U$  będzie zbiorem otwartym

$$U \in X,$$

czyli możemy założyć, że istnieje kula:

$$(\exists B_r(x)) B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula  $B_r(x)$  zawiera się w otwartym zbiorze  $U$ , więc istnieje w  $U$  punkt, który leży w tej kuli:

$$(\exists u \in U) d(x, u) < r,$$

a więc kula nie się pusto ze zbiorem  $U$ :

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

i smiga



Jeśli istnieje  $f: X \rightarrow Y$ , która jest ciągła i na,  
to jeżeli  $X$  jest przestrzenią ośrodkową,  
to  $Y$  też jest przestrzenią ośrodkową

Ośrodkowość **przenosi się przez ciągłe suriekcje**

DOWOD:

Chcemy zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w  $Y$  mając tylko  $f: X \rightarrow Y$ .

Niech  $A \subseteq X$  będzie zbiorem gęstym. Rozważmy obraz  $A$  przez funkcję  $f$ :

$$B = f[A].$$

Ponieważ  $B$  jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciągłą suriekcję, to on też jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowodnić, że jest to zbiór gęsty.

Weźmy dowolny zbiór otwarty w  $Y$ :

$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} Y.$$

Wtedy  $f^{-1}[U] \subseteq X$  jest zbiorem otwartym, ponieważ  $f$  jest ciągła i na. W takim razie, zbiorem gęstym w  $Y$  jest  $f[A]$ :

$$(\exists a \in A) a \in f^{-1}[U] \wedge f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

i smiga



### 3 ZBIÓR CANTORA



Zbiór Cantora,  $C$ , jest przekrojem zbiorów domkniętych, więc sam też jest zbiorem domkniętym. Zbiór Cantora jest homeomorficzny z kostką Cantora

$$C \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Zdefiniujmy odpowiednią funkcję:

$$f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$$

Niech  $s$  będzie skończonym ciągiem 0, 1. Wówczas  $C$  to ciąg, który w zbiorze Cantora przyjmuje lewy lub prawy podzbiór poprzedniego zbioru w zależności od tego, czy pojawia się 0 czy 1:

$$f(x) = y \quad \bigcap D_s = \{y\}$$



### 4 KOSTKA HILBERTA $[0, 1]^{\mathbb{N}}$

**METRYKA NA KOSTCE HILBERTA:**

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$C^{(a,b)} = \{x \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : x(n) \in (a, b)\}$  - wszystkie ciągi z kostki Hilberta, które na  $n$  współrzędnej spełniają pewne wymagania. Można to wyobrazić sobie jako bramki ustawione na odpowiedniej  $n$  i tylko ciągi, które przechodzą przez nią należą do  $C_n^{(a,b)}$ .

Skończone przekroje zbiorów postaci  $C_n^{(a,b)}$  stanowią bazę  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ .

**DOWÓD:**

Pokażemy, że baza  $\mathcal{B}$  topologii to suma pewnych jej elementów:

$$(\forall x)(\forall U \underset{\text{otw}}{\ni} x)(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq U$$

W przypadku przestrzeni metrycznej nie musimy brać każdego zbioru otwartego z osobna, bo wiemy, że wszystkie zbioru otwarte są sumą kul, a zbiór kul jest bazą przestrzeni metrycznych.

$$(\forall x \in [0, 1]^{\mathbb{N}})(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq B_{\varepsilon}(x).$$

Weźmy dowolny punkt  $x \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  oraz dowolny  $\varepsilon > 0$ . Chcemy ustawić na  $x$  bramkę tak, żeby nasz ciąg przez niego przeszedł oraz żeby ta bramka na pewno była w kuli.

W kostce Hilberta musimy ociąć ogony (nieskończone rozwinięcia zamienić na rozwinięcia od pewnego momentu zawierające tylko 0):

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \sum_{k > N} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech dla każdego  $n \leq N$

$$I_n = (x(n) - \frac{\varepsilon}{4}, x(n) + \frac{\varepsilon}{4}),$$

czyli na kolejnych miejscach ustawiamy bramki o średnicy  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Ich przekrój to

$$x \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}.$$

Weźmy dowolny  $y \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$ . Jego odległość od  $x$  to

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} = \sum_{n \leq N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n > N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} < \varepsilon$$

Czyli każdy punkt w przekroju należy do kuli  $B_\varepsilon(x)$ .

i smiga



WNIOSKI:

1.  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  jest przestrzenią  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , bo kulami są przekroje  $\bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$  - ustawiamy bramki na prefiksach
2. Topologia na  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  jest topologią zbieżności punktowej: ciąg zbiega w kostce Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi jego współrzędnych zbiegają w  $\mathbb{R}$ .

Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną i ośrodkową. Wtedy

$$(\exists Y \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}) X \cong Y$$

DOWOD:

Ponieważ  $X$  jest przestrzenią ośrodkową, to istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty, który kroi się niepusto ze wszystkimi zbiorami otwartymi:

$$(\exists D = \{d_1, \dots, d_n\}) D \subseteq Y$$

Zdefiniujmy funkcję

$$h : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

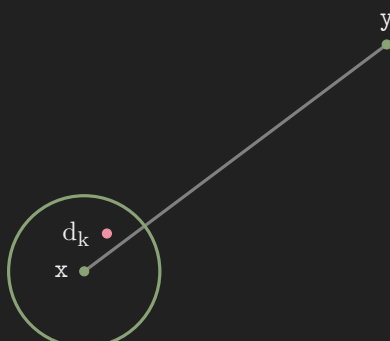
$$h(x) = \langle d(x, d_1), d(x, d_2), \dots, d(x, d_n) \rangle,$$

która liczy kolejno odległości  $x$  od elementów zbioru gęstego w  $X$ .

Ponieważ działamy w przestrzeni metrycznej, to korzystając z twierdzenia wcześniej, możemy określić metrykę taką, że

$$(\forall x, y \in X) d(x, y) \leq 1$$

Funkcja  $h$  jest różnowartościowa, ponieważ dla każdych dwóch punktów możemy znaleźć kulę w której odległość od elementu zbioru bazowego do  $x$  i do  $y$  będą różne:



$$d(x, d_k) < d(y, d_k)$$

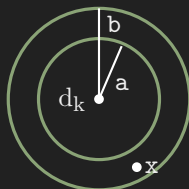
Funkcja  $h$  nie musi być na - jeśli tak by było, to każda przestrzeń metryczna byłaby homeomorficzna z kostką Hilberta. Wystarczy, że pokażemy  $Y = h[X]$ .

Pokażemy, że  $h$  i  $h^{-1}$  są ciągłe. Przyjrzyjmy się przeciwbrazom zbiorów bazowych

$$h^{-1}[C_n^{(a,b)}].$$

Jeżeli są one otwarte, to również skończone przekroje takich zbiorów są otwarte.

$$C_n^{(a,b)} = \{x \in X : d(x, d_k) \in (a, b)\}$$



DOKONCZYĆ DOWÓD

## 5 ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ

### 5.1 PRZESTRZEŃ ZWARTA

**POKRYCIE** - rodzina zbiorów otwartych  
sumująca się do  $X$   
 $\bigcup \mathcal{U} = X$

Przestrzeń topologiczna  $X$  jest **ZWARTA**,  
gdy z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone.

$(0,1)$  w metryce euklidesowej nie jest zbiorem zwartym. Kontrprzykładem są coraz to mniejsze w średnicy przedziały otwarte:



Ich prawe granice zbiegają do 1, więc wyrzucenie nawet jednego zbioru nie da nam pokrycia.

$[0,1]$  w metryce euklidesowej jest zbiorem zwartym. Jeśli znowu podzielimy na coraz to mniejsze przedziały, to zawsze zostaje ten malutki, który musi się sumować do 1. Wystarczy że go wybierzemy, a resztę tych maleństw wyrzucimy i w ten sposób otrzymamy podpokrycie skończone.

Przestrzeń metryczna jest **ZWARTA** wtedy  
i tylko wtedy, gdy z **każdego ciągu** możemy wybrać **podciąg zbieżny**.

TO WYPADAŁOBY DOWIEŚĆ, ALE MUSZĘ ZROZUMIEĆ SPÓJNOŚĆ

Twierdzenie Boltzana-Weierstrassa - każdy podciąg ograniczony na prostej ma podciąg zbieżny

$(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $X \subseteq Y$

Jeżeli  $X$  jest zwarta, to

1.  $X$  jest ograniczona
2.  $X$  jest domknięty w  $Y$ .

Jeśli mamy metrykę euklidesową i  $\mathbb{R}^n$ , to implikacja zamienia się w równoważność, tzn  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zwarty  $\iff$  jest domknięty i ograniczony.

Zbieżność jest przechodnia przez funkcje ciągłe i na, tzn  $f : X \rightarrow Y$  jest ciągła i na oraz  $X$  jest zwarta, to  $Y$  jest zwarta.

KOSTKA HILBERTA, SPOJNOSC