METRYKI I PRZESTRZENIE METRYCZNE

METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazywamy funkcje

$d: \ X \times X \to [0, \infty)$

przedstawia sposob mierzenia odleglosci

Zeby dana funkcja byla metryka, musi spelniac nastepujace warunki:

1. $d(x, y) = 0 \ \wedge \ d(x, y) > 0$ jesli $x \neq y$
2. $\forall \ x, y \quad d(x, y) = d(y, x)$: symetria
3. $\forall \ x, yz \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$: warunek $\triangle$ <3

najtrudnijesze bywa sprawdzenie warunku $\triangle$

PRZYKLADY:

METRYKI EUKLIDESOWE:

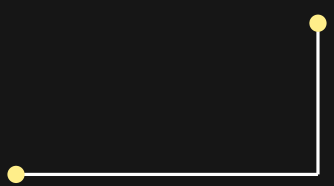
$\mathbb{R} \ : \ d(x, y) = |x - y|$

$\mathbb{R}^2 \ : \ d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n \ : \ d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + ... + (x(n-1) - y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksowkowa, nowojorska:

$\mathbb{R}^2 \ : \ d(x, y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM:

$\mathbb{R}^2 \ : \ d(x, y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

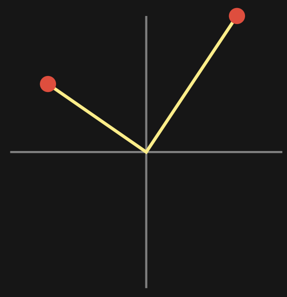
METRYKA DYSKRETNA:

$\mathbb{R}^2 \ : \ d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

dobra do dowodzenia, dziala na kazdym zbiorze

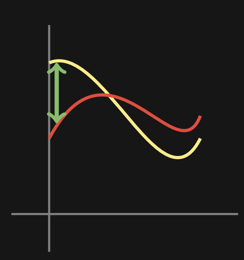
METRYKA CENTRUM:

Jesli punkty leza na jednej prostej przechodzacej przez srodek ukladu wspolrzednych, liczymu ich odleglosc jak w metryce euklidesowej. W przeciwyn wypadku, najpierw liczymy odleglosc danego punktu od srodka ukladu wspolrzednych, a pozniej odleglosc drugiego punkltu od srodka ukladu wspolrzednych i sumujemy je:



METRYKA SUPREMUM:

$C[0,1]$ - zbior wszystkich funkcji ciaglych z $\mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x) \ : \ x \in [0, 1]\}$



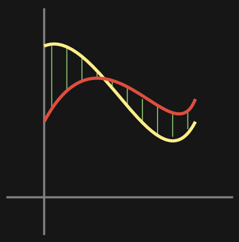
Jesli zamiast funkcji ciaglych na przedziale $[0,1]$ bedziemy rozwazac funckje ciagle na zbiorze $\{0,1\}$, to dostaniemy tak naprzwde metryke maksimum.

Przedzial domkiety, zeby uniknac nieskonczonosci - chcemy, zeby istnialo maksimum na tym przediale
co z funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$?

METRYKA CALKOWA:

liczy pole miedzy wykresami dwoch funkcji:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$



PRZESTRZEN METRYCZNA (X,d)
to zbior i sposob mierzenia odleglosci
na nim (czyli metryka)

METRYKA HAMINGA - porownuje dwa ciagi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ takiej samej dlugosci i liczy ich odleglosc przez ilosc miejsc, w ktorych sie roznia.

Domyslna metryka na zbiorze ciagoe 0 i 1:

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\Delta(x,y)}} & x \neq y \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

gdzie $\Delta(x,y) = \min\{k \ : \ x(k) \neq y(k)\}$. Pokazuje, na ktorym miejscu po raz pierwszy dwa ciagi sie roznia (w przeciwienstwie do metryki Haminga nadaje sie do ciagow nieskonczonych).

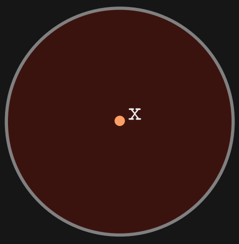
KULA

caly czas jesetesmy w przestrzeni etrycznej (X,d)

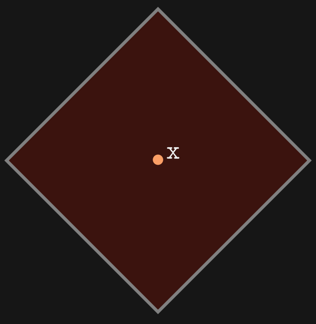
KULA o srodku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:
$$B_r(x) = \{y \in Y \ : \ d(x,y) < r\}$$

$\mathbb{R}$, metryka euklidesowa:

$\mathbb{R}^2$, metryka euklidesowa:

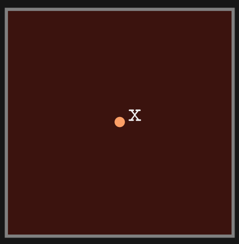


$\mathbb{R}^2$, matryka miasto:



bo sznurek rozwija sie tylko poziomo i horyzontanie, a suma sznureczkow zawsze nie przekracza r

$\mathbb{R}^2$, metryka maksimum:



bo wspolrzednie nie moge byc od siebie odlegle o wiecej niz 1.

$\mathbb{R}^2$, metyka centru: