

# Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podstawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

*Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem seksualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.*



# Spis treści

<b>1</b>	<b>JĘZYK LOGIKI</b>	<b>3</b>
1.1	FUNKCJE . . . . .	3
1.2	OPERACJE UOGÓLNIONE . . . . .	3
1.3	JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU . . . . .	4
1.4	SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA . . . . .	5
1.5	KONSTRUOWANIE JĘZYKA . . . . .	5
1.6	JĘZYK TEORII MNOGOŚCI . . . . .	6
<b>2</b>	<b>AKSJOMATY</b>	<b>6</b>
2.1	AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI . . . . .	7
2.2	AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO . . . . .	7
2.3	AKSJOMAT PARY . . . . .	7
2.4	AKSJOMAT SUMY . . . . .	8
2.5	AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO . . . . .	9
2.6	AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA . . . . .	9
2.7	AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA . . . . .	10
2.8	KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH . . . . .	10
2.9	AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI . . . . .	11
2.10	AKSJOMAT REGULARNOŚCI . . . . .	12
2.11	AKSJOMAT WYBORU . . . . .	12
<b>3</b>	<b>LICZBY PORZĄDKOWE</b>	<b>12</b>
3.1	LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA . . . . .	12

# 1 JĘZYK LOGIKI

## 1.1 FUNKCJE

**FUNKCJA** - zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczności, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji - nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\begin{aligned}\text{dom}(f) &= \{x : (\exists y) \langle x, y \rangle \in f\} \\ \text{rng}(f) &= \{y : (\exists x) \langle x, y \rangle \in f\}.\end{aligned}$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako podzbioru  $f \in X \times Y$  takiego, że dla każdego  $x \in X$  istnieje dokładnie jeden  $y \in Y$  takie, że  $\langle x, y \rangle \in f$  jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

## 1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej  $\{A_i : i \in I\}$  definiujemy:

- jej sumę:  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists i \in I) x \in A_i\}$
- jej przekrój:  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall i \in I) x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów  $\mathcal{A}$  definiujemy:

- suma:  $\bigcup \mathcal{A} = \{x : (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\}$
- przekrój:  $\bigcap \mathcal{A} = \{x : (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rodzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

**UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI** (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y \rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z \rangle : x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i więcej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny - iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3 \rangle \rangle.$$

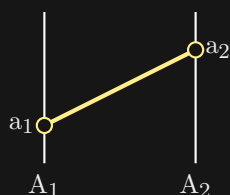
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech  $\langle A_i : i \in I \rangle$  będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

$$A : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym indeksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, **uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji** ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I : (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla  $I = \{1, 2\}$  nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są różne. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

## 1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

**JĘZYK RZĘDU ZERO**, czyli rachunek zdań:  $p, q, r, \dots, \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

**JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU** jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych:  $V = \{x_0, x_1, \dots\}$
2. symbole spójników logicznych:  $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów:  $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości:  $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne:  $F = \{f_i : i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty):  $R = \{r_j : j \in J\}$
3. symbole stałe:  $C = \{c_k : k \in K\}$

**ARNOŚĆ** - odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

**SYGNATURA** - zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

## 1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA

Znała suma cała rzeka,  
Więc raz przbył lin z daleka  
I powiada: "Drogi panie,  
Ja dla pana mam zadanie,  
Jeśli pan tak liczyć umie,  
Niech pan powie, panie sumie,  
Czy pan zdoła w swym pojęciu,  
Odjąć zero od dziesięciu?"  
(...)  
"To dopiero mam z tym biedę -  
Może dziesięć? Może jeden?"

Jak odjąć 0 od 10:

semantycznie:  $10 - 0 = 10$

syntaktycznie: od ciągu 1 i 0 odjęcie 0 to zostawienie tylko 1

**SEMANTYKA** - patrzy na znaczenie zapisów, nie sam napis.

**SYNTAKTYKA** - interesuje ją tylko zapis, język, a znaczenia nie ma.

## 1.5 KONSTRUOWANIE JĘZYKA

**TERMY** - bazowy zbiór termów to  
zbiór zmiennych i zbiór stałych:

$$T_0 = V \cup C$$

Do ich budowy wykorzystujemy symbole funkcyjne (F)

Założmy, że mamy skonstruowane termy aż do rzędu  $n$  i chcemy skonstruować termy rzędu  $n+1$ . Jeśli mamy symbol funkcyjny arności  $k$ , to *termem jest zastosowanie tego symbolu do wcześniej skonstruowanych termów*, których mamy  $k$ :

$f \in F$   $f$  - arności  $k$

$$F(t_1, \dots, t_k) \quad t_1, \dots, t_k \in \bigcup_{i=0}^n T_i$$

Czyli jeśli mamy zbiór termów, to *biorąc wszystkie dostępne symbole funkcyjne i stosując je na wszystkie możliwe sposoby do dotychczas skonstruowanych termów* tworzone są nowe termy.

Termy to potencjalne wartości funkcji

**FORMUŁY** - budowane są rekurencyjnie, zaczynając  
od formuł atomowych:

$$t = s, \quad t, s \in TM$$

stosując wszystkie relacje równoważności termów

$$r \in R \quad r(t_1, \dots, t_k)$$

zastosowanie symbolu relacyjnego na odpowiedniej ilości termów tworzy formułę

Bazowym poziomem formuł jest formuła atomowa:

$$F_{m_0} = \{\varphi : \varphi - \text{formuła atomowa}\}$$

Jeśli mamy  $F_{m_k}$  dla pewnego  $k < n$ , czyli wszystkie formuły poniżej  $n$  zostały skonstruowane, to

$$F_{m_n} : \neg(\varphi), \varphi \vee \phi, \varphi \wedge \phi, \dots \quad \text{dla } \varphi, \phi \in \bigcup_{k < n} F_{m_k},$$

czyli używamy wszystkich spójników logicznych dla poprzednich formuł

$$F_{m_n} : (\forall \varphi) (\exists x_i) \text{ dla } \varphi \in \bigcup_{k < n} F_{m_k}, x_i \in V$$

kwantyfikujemy też po wszystkich możliwych zmiennych wszystkie możliwe formuły

$$FM = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{m_n}$$

## 1.6 JĘZYK TEORII MNOGOŚCI

$$L = \{\in\}$$

składa się z jednego binarnego predykatu,  
który nie jest jeszcze należeniem

W rachunku zdań przejście z syntaktyki do semantyki to nadanie symbolom wartości prawda lub fałsz.

SYSTEM ALGEBRAICZNY:

$$\mathcal{A} = \langle A, \{F_i : i \in I\}, \{R_j : j \in J\}, \{C_k : k \in K\} \rangle$$

odpowiednio: zbiór (uniwersum), funkcje na A, relacje na A, stałe w A

przykłady:  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$

Jezyk L możemy interpretować w systemie  $\mathcal{A}$  o ile mają one tę samą sygnaturę.

INTERPRETACJA to funkcja ze zbioru wartości w uniwersum:

$$i : V \rightarrow \mathcal{A},$$

którą można rozszerzyć do funkcji ze zbioru termów w uniwersum:

$$\begin{aligned} \bar{i} : TM &\rightarrow \mathcal{A} \\ i &\subseteq \bar{i} \end{aligned}$$

Ponieważ sygnatury są takie same, to każdemu symbolowi funkcyjnemu możemy przypisać funkcję o dokładnie tej samej arności. *Czyli jeśli dany symbol funkcyjny jest nakładany na termy, to odpowiadająca mu funkcja jest nakładana na wartości tych termów.*

W systemie  $\mathcal{A}$  formuła  $\varphi$  jest spełniona przy interpretacji  $i$ :

$$\mathcal{A} \models \varphi[i]$$

Zaczynamy od formuł atomowych, czyli:

$\mathcal{A} \models (t = s)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą interpretację (czyli $\bar{i}(t) = \bar{i}(s)$ )
$\mathcal{A} \models r_j(t_1, \dots, t_k)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca temu predykatowi relacja zachodzi na wartościach termów (czyli $R_j(\bar{i}(t_1), \dots, \bar{i}(t_k))$ )
$\mathcal{A} \models (\neg \varphi)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathcal{A} \models \varphi[i]$ , i tak ze wszystkimi spójnikami logicznymi
$\mathcal{A} \models (\forall x_m) \varphi[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\mathcal{A} \models \varphi[i(\frac{x_m}{a})]$ (sprawdzamy dla konkretnego $a$ czy spełnia $\varphi$ , a potem dla $x_m$ przypisujemy to $a$ , natomiast inne wartości dostają podstawienie $(\frac{x_m}{a})$ ?)

## 2 AKSJOMATY

Zbiór oraz należenie uznajemy za pojęcia pierwotne, więc nie definiujemy ich tylko opisujemy ich własności.

## 2.1 AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI

zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy

$$(\forall x)(\forall y)(x = y \iff (\forall z)(z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakładamy, że *istnieją wyłącznie zbiory*. Nie ma nie-zbiorów. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorów i okazuje się, że w tym świecie można zinterpretować całą matematykę.

## 2.2 AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO

istnieje zbiór pusty  $\emptyset$

$$(\exists x)(\forall y)\neg y \in x$$

Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności oraz aksjomaty zbioru pustego można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

1. istnienie: aksjomat zbioru pustego
2. jedyność: niech  $P_1, P_2$  będą zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego  $z$  zachodzi  $\neg z \in P_1 \wedge \neg z \in P_2$ , czyli  $z \in P_1 \iff z \in P_2$ . Wobec tego, na mocy aksjomatu ekstensjonalności mamy  $P_1 = P_2$ .

Przyjrzyjmy się następującemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N} \cap [10, +\infty), < \rangle$$

W systemie spełnione są oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Ponieważ nie mamy podanej interpretacji, a nasze aksjomaty są spełnione, to spełnione są dla dowolnej interpretacji.

## 2.3 AKSJOMAT PARY

dla dowolnych zbiorów  $x, y$  istnieje para  $\{x, y\}$

$$(\forall x, y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Para nieuporządkowana jest jednoznacznie wyznaczona. Aksjomat mówi tylko o istnieniu  $z$ , a można łatwo udowodnić, korzystając z aksjomatu ekstensjonalności, że takie  $z$  istnieje tylko jedno.

Niech  $P_1, P_2$  będą parami nieuporządkowanymi  $x, y$ . W takim razie jeśli  $t \in P_1$ , to  $t = x \vee t = y$ . Tak samo  $t \in P_2 \iff t = x \vee t = y$ . Czyli  $P_1 = P_2$  bo posiadają te same elementy.

.....

SINGLETONEM elementu  $x$  nazywamy zbiór  $\{x\} := \{x, x\}$

PARĄ UPORZĄDKOWANĄ (wg. Kuratowskiego)  
elementów  $x$  i  $y$  nazywamy zbiór:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

.....

Dla dowolnych elementów  $a, b, c, d$  zachodzi:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

DOWOD:

Rozważmy dwa przypadki:

$$1. \quad a = b$$

$$\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

Czyli jeśli  $x \in \{\{a\}\}$ , to  $x = \{a\}$ . Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

A więc jeśli  $x \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ , to  $x = \{c\}$  lub  $x = \{c, d\}$ . W takim razie mamy  $\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$ , a więc z aksjomatu ekstensjonalności,  $a = c = d$ .

$$2. \quad a \neq b$$

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Jeśli więc  $x \in \langle a, b \rangle$ , to  $x = \{a\}$  lub  $x = \{a, b\}$ . Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Jeśli  $x \in \langle c, d \rangle$ , to  $x = \{c\}$  lub  $x = \{c, d\}$ . W takim razie otrzymujemy  $\{c\} = \{a\}$  i  $\{c, d\} = \{a, b\}$ . Z aksjomatu ekstensjonalności mamy  $a = c$  oraz  $d = b$ .

i smiga



## 2.4 AKSJOMAT SUMY

Dla dowolnego zbioru istnieje jego suma

$$(\forall x) (\exists y) (\forall z) (z \in y \iff (\exists t) (t \in x \wedge z \in t))$$

Ponieważ wszystko w naszym świecie jest zbiorem, to *każdy zbiór możemy postrzegać jako rodzinę zbiorów* – jego elementy też są zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

Suma jest określona jednoznacznie i oznaczamy ją  $\bigcup x$ .

DOWOD:

Założmy nie wprost, że istnieją dwie sumy zbioru  $x$ :  $S_1$  i  $S_2$ . Wtedy

$$(\forall z)(z \in S_1 \iff (\exists t \in x)(z \in t))$$

$$(\forall z)(z \in S_2 \iff (\exists t \in x)(z \in t))$$

Zauważamy, że

$$z \in S_1 \iff (\exists t \in x) z \in t \iff z \in S_2$$

a więc  $S_1$  i  $S_2$  mają dokładnie te same elementy, więc z aksjomatu ekstencjonalności są tym samym zbiorem.

i smiga



Suma dwóch zbiorów:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne  $z$ . Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z \in \bigcup \{x, y\} &\stackrel{4}{\iff} (\exists t) (t \in \{x, y\} \wedge z \in t) \stackrel{3}{\iff} (\exists t)((t = x \vee t = y) \wedge z \in t) \iff \\ &\iff (\exists t)((t = x \wedge z \in t) \vee (t = y \wedge z \in t)) \iff \\ &\iff (\exists t)(t = x \wedge z \in t) \vee (\exists t)(t = y \wedge z \in t) \implies \\ &\implies (\exists t)(z \in x) \vee (\exists t)(z \in y) \iff z \in x \vee z \in y \end{aligned}$$

i smiga





## 2.5 AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO

dla każdego zbioru istnieje jego zbiór potęgowy

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)z \in y \iff (\forall t \in z)t \in x$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)z \in y \iff z \subseteq x$$

Zbiór potęgowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go  $\mathcal{P}(x)$

DOWOD:

Założmy, nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory potęgowe  $P_1$  i  $P_2$  dla pewnego zbioru  $x$ . Wówczas

$$(\forall z)z \in P_1 \iff z \subseteq x$$

$$(\forall z)z \in P_2 \iff z \subseteq x$$

Zauważamy, że

$$z \in P_1 \iff z \subseteq x \iff z \in P_2,$$

czyli zbiory  $P_1$  i  $P_2$  mają dokładnie te same elementy, więc na mocy aksjomatu ekstencjonalności  $P_1 = P_2$

i smiga



## 2.6 AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

To tak naprawdę schemat aksjomatu, czyli nieskończona rodzina aksjomatów

**SIMPLIFIED VERSION:** niech  $\varphi(t)$  będzie formułą języka teorii mnogości.

Wtedy dla tej formuły mamy  $A_6\varphi$  dla każdego zbioru  $x$  istnieje zbiór, którego elementy spełniają własność  $\varphi$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t))$$

**FULL VERSION:** niech  $\varphi(t, z_0, \dots, z_n)$  będzie formułą języka teorii mnogości.

Wtedy pozostałe zmienne wolne będą parametrami (zapis skrócony  $z_0, \dots, z_n := \bar{z}$ )

Dla każdego układu parametrów i dla każdego  $x$  istnieje  $y$  taki, że dla każdego  $t \in y$   $t$  należy do  $x$  i  $t$  spełnia formułę  $\varphi$

$$(\forall z_0) \dots (\forall z_n)(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t, z_0, \dots, z_n))$$

Weźmy półprostą otwartą:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},$$

druga półprosta to

$$(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

i tak dalej. Czyli ogólna definicja półprostej to:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$

Dla każdej z tych półprostych trzeba wziąć inną formułę, które wszystkie są zdefiniowane za pomocą formuły

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie  $a$  funkcjonuje jako parametr.

## 2.7 AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA

Ostatni aksjomat konstrukcyjny, jest to schemat rodziny aksjomatów

**SIMPLIFIED VERSION:** niech  $\varphi(x,y)$  będzie formułą języka teorii mnogości taką, że:

$$(\forall x)(\exists ! y)\varphi(x,y).$$

Wówczas dla każdego zbioru  $x$  istnieje zbiór  $\{z : (\exists t \in x) \varphi(t,z)\}$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \iff (\exists t \in x) \varphi(t,z))$$

Czyli każdy zbiór można *opisać za pomocą operacji*.

**FULL VERSION:** niech  $\varphi(x,y,p_0,...,p_n)$  będzie formułą języka teorii mnogości.

$$(\forall p_0), ..., (\forall p_n) ((\forall x) (\exists ! y) \varphi(x,y,\bar{p}) \implies (\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \iff (\exists t \in x) \varphi(t,z,\bar{p})))$$

## 2.8 KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH

Niech  $x,y$  będą dowolnymi zbiorami. Wtedy definiujemy:

$$x \cap y = \{t \in x : t \in y\}$$

$$x \setminus y = \{t \in x : t \notin y\}$$

$$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : (\exists s \in x)(\exists t \in y) z = \{s,t\}\}$$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjańskiego nie działa w nowych warunkach, bo nie wiemy z czego wyróżnić tę parę uporządkowaną. Ponieważ  $s,t \in x \cup y$ , mamy

$$\{s\}, \{s,t\} \subseteq x \cup y,$$

a więc

$$\{\{s\}, \{s,t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y).$$

Czyli nasza para uporządkowana jest elementem zbioru potęgowego zbioru potęgowego sumy zbiorów.

$$\bigcap x = \{z \in \bigcup x : (\forall y \in x) z \in y\} \text{ i wówczas } \bigcap \emptyset = \emptyset$$

**RELACJA** - definiujemy  $\text{rel}(r)$  jako dowolny zbiór par uporządkowanych:

$$\text{rel}(r) := (\exists x)(\exists y) r \subseteq x \times y$$

**FUNKCJA** - relcja, która nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i różnych następnikach:

$$\text{fnc}(f) := \text{rel}(f) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z) (\langle x,y \rangle \in f \wedge \langle x,z \rangle \in f \implies y = z)$$

Dziedzinę i zbiór wartości możemy wówczas zdefiniować jako:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \bigcup \bigcup f : (\exists y) \langle x,y \rangle \in f\}$$

$$\text{rng}(f) = \{y \in \bigcup \bigcup f : (\exists x) \langle x,y \rangle \in f\},$$

ponieważ

$$\{\{x\}, \{x,y\}\} \in f \implies \{x\}, \{x,y\} \in \bigcup f \implies x,y \in \bigcup \bigcup f$$

Dopóki działamy na zbiorach skończonych, wynikiem operacji zawsze będzie kolejny zbiór skończony - niemożliwe jest otrzymanie zbioru nieskończonego.

## 2.9 AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Istnieje zbiór induktywny:  
 $(\exists x) (\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x) (y \cup \{y\} \in x))$

Na początku do naszego zbioru  $x$  dodajemy  $\emptyset$ . Potem, skoro  $\emptyset$  należy do  $x$ , to należy też  $\{\emptyset\}$ . Ale skoro do  $x$  należy  $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ , to również  $\{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$  jest jego elementem i tak dalej.

**TW.** Istnieje zbiór induktywny najmniejszy względem zawierania, czyli taki, który zawiera się w każdym innym zbiorze induktywnym.

**DOWOD:**

Niech  $x$  będzie zbiorem induktywnym, który istnieje z aksjomatu nieskończoności. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem induktywnym}\}$$

Chcę pokazać, że  $\omega$  jest zbiorem induktywnym, czyli  $\emptyset \in \omega$ .

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla każdego zbioru induktywnego } y \subseteq x$$

Ponieważ każdy zbiór induktywny zawiera  $\emptyset$ , także  $\omega$  zawiera  $\emptyset$ .

Pozostaje pokazać, że dla dowolnego  $t \in \omega$  mamy

$$t \cup \{t\} \in \omega$$

Dla każdego zbioru induktywnego  $y \subseteq x$  mamy  $t \in y$ . ale ponieważ  $y$  jest zbiorem induktywnym, mamy

$$t \cup \{t\} \in y.$$

Z definicji przekroju zbioru  $x$  mamy

$$t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem induktywnym}\} = \omega$$

Czyli istnieje zbiór induktywny  $\omega$  będący przekrojem wszystkich innych zbiorów induktywnych. Pokażemy teraz, że jest to zbiór najmniejszy.

Niech  $z$  będzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy  $z \cap x$  jest zbiorem induktywnym i  $z \cap x \subseteq x$ . Czyli  $z$  jest jednym z elementów rodziny, której przekrój daje  $\omega$ :

$$z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x) : Y \text{ zb. ind.}\} = \omega$$

i smiga



Każdy element  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}...$  możemy utoższamić z kolejnymi liczbami naturalnymi. W takim razie ten najmniejszy zbiór induktywny będzie utożsamiany ze zbiorem liczb naturalnych. Konsekwencją tego jest *zasada indukcji matematycznej*.

Niech  $\varphi(x)$  będzie formułą ozakresionej zmiennej  $x \in \mathbb{N}$  takiej, że zachodzi  $\varphi(0)$  oraz

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \varphi(n) \implies \varphi(n+1).$$

Wówczas

$$(\forall z \in \mathbb{N}) \varphi(z)$$

**DOWOD:**

Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}.$$

Wtedy  $A \in \mathbb{N}$  oraz  $A$  jest induktywny. Kolejne zbiory należące do zbioru induktywnego utożsamialiśmy z  $n \in \mathbb{N}$ , więc skoro  $\varphi(n)$  należy do tego zbioru induktywnego, to również  $\varphi(n+1)$  należy do  $A$ . Skoro  $A$  jest zbiorem induktywnym, to  $\mathbb{N} \subseteq A$ , więc  $A = \mathbb{N}$ .

i smiga



## 2.10 AKSJOMAT REGULARNOŚCI

Do tej pory poznaliśmy aksjomaty o instnieniu i serie aksjomatów konstrukcyjnych. Aksjomat regularności nie jest żadnym z nich.

W każdym niepustym zbiorze istnieje element  $\in$ -minimalny:

$$(\forall x) x \neq \emptyset \implies ((\exists y \in x) (\forall z \in x) \neg z \in y),$$

a więc eliminowane są patologie jak np:  $x \in x, y \in y \in x$ .

Antynomia Russlla,

$$\{x : x \notin x\},$$

jest eliminowana przez aksjomat regularności.

## 2.11 AKSJOMAT WYBORU

Dla każdej rozłącznej rodziny parami rozłącznych zbiorów niepustych istnieje SELEKTOR

$$(\forall x) ((\forall y, z \in x) (y \neq \emptyset \wedge (y \neq z \implies y \cap z = \emptyset))) \implies (\exists s)(\forall y \in x)(\exists ! t) t \in s \cap y)$$

Problematyczne nie jest znalezienie punktów, które są reprezentantami zbiorów naszej rodziny, a wskazanie zbioru, który je wszystkie zawiera. Dlatego w tym może nam pomóc aksjomat wyboru. Wystarczy pokazać, że rozważamy rodzinę rozłącznych zbiorów i już z tego wiemy, że możemy wybrać selektor. Handy.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO:

Kulę możemy rozłożyć na 5 kawałków i przesuwając je izometrycznie w taki sposób, żeby złożyć z nich dwie identyczne kule jak ta, którą mieliśmy na początku. Kawałki na które dzielimy są niemieżalne, nie mają objętości, są maksymalnie patologiczne, ale nadal możemy powiedzieć że istnieją korzystając z aksjomatu wyboru. Daje on nam tylko informację, że istnieje selektor, a nie o tym jak on wygląda, więc może być absurdalny i patologiczny jak tylko ma ochotę.

FUNKCJA WYBORU – niech  $\mathcal{A}$  będzie rodziną zbiorów niepustych. Funkcją wyboru dla rodziny  $\mathcal{A}$  nazywamy wtedy dowolną funkcję  $f$ :

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A} \\ (\forall A \in \mathcal{A}) f(A) \in A$$

Aksjomat wyboru jest równoważny temu, że dla każdej rozłącznej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru (selektor).

## 3 LICZBY PORZĄDKOWE

### 3.1 LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorów jest przeliczalna:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |A_n| \leq \aleph_0 \implies \aleph_0 \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

DOWOD:

Ponieważ  $|A_n| \leq \aleph_0$ , to istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n.$$

