REKURENCJE NIELINIOWE

LICZBY CATALANA

Eugene Catalan

WSTAWIANIE NAWIASOW - mamy dzialanie laczne i pzemienne i na ile sposobow mozemy obliczyc:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Niech $x(n)$ bedzie ta liczba mozliwosci. Wtedy

$$x(1) = 1,$$
$$x(2) = 2,$$
$$x(3) = ?$$

Policzymy najpierw $x(n)$ korzystajac z rekurencji.

TEZA 1: $x(n) = [4(n-2)+1+1] \cdot x(n-1) = [4n-6] \cdot x(n-1)$

Zaleznosc nie jest liniowa.
Czynnik $(+1+1)$ jest spowodowany tym, ze a_n wyraz mozemy dopisac z prawej $(+1)$ lub z lewej $(+1)$ strony poprzedniego dzialania. Przy mnozeniu poprzednich liczb mamy $n-2$ miesjca, gdzie mozemy wstawic a_n. W takim razie, $x(n-1)$ moze zostac rozbity na nastepujace kombinajce:

$$A \cdot B \to (a_n A)B \quad (A \cdot a_n)B \quad A(a_n B) \quad A(B \cdot a_n),$$

Mamy wiec $(4(n-2))$ sposobow na dostawienie a_n w krotszy ciag.

Teza 2: $x(n) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$

DOWOD:

Indukcja :c

$$x(n) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(2n-4)!}{(n-2)!} \frac{(2n-3)(2n-4)}{n-1} = x(n-1)(4n-6)$$

i smiga

C_n - n-ta LICZBA CATALONA to ilosc sposobo
wykonania dzialania $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
gdy to dzialanie jest *laczne, ale nie jest przemienne*.

Twierdzenie:

$$C_n = \frac{x(n)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{2_n - 1}{n-1}.$$

Wazniejsza jest jednak formula rekurencyjna na liczbe Catalana:

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1$$

$$C_1 = 1$$
$$C2 = 1$$
$$C_3 = 2$$

Pokoeli patrzymy gdzie jest najwiekszy zewentrzy nawias, czyli mamy pierwsze dwa czynniki liczace:

$$a_1(\ldots) \quad (a_1 a_2)(\ldots)$$

Przyjzyjmy sie zadanku z sekretarka, ktor teraz bedzie chodzic po kwadracie $n \times n$. Moze wybrac trase na $\binom{2n}{n}$ sposobow, bo kazda droga jest kodowana ciagiem zlozonym z P i G, przy czym musi byc tyle samo P i G. Czyli jest to liczba permutacji zbioru $n \cdot P$ i $n \cdot G$.
Tym razem nasza sekretarka idzie od $(0,0)$ dp (n,n) nie chce przekraczac przekatnej.
Niech C'_n bedzie ta wielkoscia. Twierdzenie:

$$C'_n = C_0 C'_{n-1} + C'_1 C'_{n-2} + \ldots + C'_{n-1} C'_0$$

Czym to sie rozni od zwyklego C_n? zrobic tabelke ktora porownuje

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$$C'_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

DOWOD:

Skad sie bierze rekurencja w C'_n? Sortowany kiedy znowu odwiedzimy przekatna.
Pierwszy wyraz to kiedy poza poczatkiem pierwszy raz natrafiena przekatna, czyli dla $C'_k C'_{n-k-1}$ wracam na przekatna w punkcie $(k+1, k+1)$. No bo licze mniejszy trojkacik. Szczwana bestiia.
Na ile sposobow mozna podzielic (n+2) kat wypukly na trojkaty? //to przyklady z listy?

LICZBY STIRRLINGA

dziela sie na dwa rodzaje:

1. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ - k cykli z n jest liczba permutacji zbioru n-elementowego skladajacych sie z k cykli. Mamy n roznych koralikow i k roznych kobiet. Na ile sposobow mozemy utworzyc k roznych naszyjnikow? Jestesmy niewrazliwi na obroty.

Stwierdzenie: Kazda permutacja zbioru n-elementowego zapisuje sie jednoznacznie w postaci cyklu.
TEST: $[n1] + [n2] + ... + [nn] = n!$

2. $\{{n \atop k}\}$ - k czesci z n jest liczba podzialow zbioru n elementowego na k niepustych czesci

TWIERDZENIE: Dla $1 \leq k \leq n$ $\{{n \atop k}\} = k\{{n-1 \atop k}\} + \{{n-1 \atop k-1}\}$

Mamy zbior $A = \{1, ..., 5\}$ i $B = \{a, b, c\}$. Ile jest funkcji $f : A \to B$? 3^5 Ile jest funkcji roznowartosciowych $A \to B$? 0 Ile jest funkcji $B \to A$? 5^3 Roznowartosciowych? $5 \cdot 4 \cdot 3$. Ile jest funkcji $A \underset{na}{\to} B$? $3! \left\{ {5 \atop 3} \right\}$

LICZBY STIRRLINGA drugiego rodzaju

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

to liczba podzialow zbioru n elementowego na k niepustych czesci.
tabelkaz wikipedii

POTEGI KROCZACE

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)x(x-2)...(x-k+1)$$

Dla $1 \leq k \leq n$ zachodzi

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} x^{\underline{k}} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

DOWOD:

Pomocniczy fakt:

$$x^{\underline{k+1}} - kx^{\underline{k}} = xx^{\underline{k}}$$

najpierw zauwazymy, ze $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$

$$S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

odplywam