Algebra liniowa 2 R. Lista 3

Zadanie 1. Uzasadnij, że każda podprzestrzeń przestrzeni liniowej V jest (a) jądrem pewnego przekształcenia liniowego, którego dziedziną jest V; (b) obrazem pewnego przekształcenia liniowego, którego przeciwdziedziną jest V.

Zadanie 2. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V : P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W, to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

Zadanie 3. Dokończ „inny dowód" (ze skryptu) faktu o wymiarze $\dim(V \oplus W)$, tzn. pokaż że dla baz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz $c_1, \ldots, c_m$ przestrzeni V i W odpowiednio, układ $(b_1, 0), \ldots, (b_n, 0), (0, c_1), \ldots, (0, c_m)$ jest bazą $V \oplus W$.

Zadanie 4. Sprawdź że jeżeli $F \colon V \to W$ jest liniowe, to F jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje takie $G \colon W \to V$, że $F \circ G = \mathrm{id}_W$ i $G \circ F = \mathrm{id}_V$.

Zadanie 5. Sprawdź że jeżeli M jest dowolną macierzą $n \times m$, a $e_i \in K^n$, $e_j \in K^m$ to standardowe wektory bazowe, to $e_i^\top M e_j$ jest ij-tym wyrazem M.

Zadanie 6. Wywnioskuj z zadania 5, że jeżeli M, N spełniają $v^\top M w = v^\top N w$ dla każdych v, w, to $M = N$.

Zadanie 7. Uzasadnij że jeżeli F jest „na", to F^* jest 1-1, a jeżeli F jest 1-1, to F^* jest „na". Wywnioskuj stąd, że jeżeli $V \cong W$, to $V^* \cong W^*$.

Zadanie 8. Załóżmy że V jest dowolną przestrzenią liniową, a $A, B \subseteq V$ są rozłączne i $A \cup B$ jest liniowo niezależny. Uzasadnij że $\mathrm{Lin}(A) \cap \mathrm{Lin}(B) = \{\vec{0}\}$

Zadanie 9. Oblicz wymiary następujących przestrzeni: $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$, $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^{0} P(x)dx = P'(-7) = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100}(-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$.

Zadanie 10. Jeśli $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą V, zaś $F : V \to W$ jest izomorfizmem, to $F(b_1), \ldots, F(b_n)$ generują W. Jak bardzo potrafisz osłabić założenia tego twierdzenia?

Zadanie 11. Udowodnij lub obal:

a) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lz.
b) (dla formalistów) Jeśli zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ też jest lz.
c) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lnz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lnz.

Zadanie 12. Udowodnij, że jeśli $W \leqslant V$, zaś $F : W \to U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $\bar{F} : V \to U$, takie że F jest obcięciem $\bar{F}$ do W. Znajdź takie $\bar{F}$ dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] : P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $F(P) = \frac{P(X)}{X-3}$. Ile jest takich $\bar{F}$?

Zadanie 13. Udowodnij, że jeśli $F : V \to W$ jest monomorfizmem (tzn. jest liniowe i 1-1), to istnieje przekształcenie liniowe $G : W \to V$, takie że $G \circ F = \mathrm{id}_V$ (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?). Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 14. Czy jest prawdą, że dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni U, V, W dowolnej przestrzeni liniowej zachodzi wzór (udowodnij lub podaj kontrprzykład):

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)$$

Zadanie 15. Niech $W, U \leqslant V$ spełniają $W + U = V$. Uzasadnij, że jeśli $W \cap U = \{0\}$, to odzorowanie $W \oplus U \to V$ zadane wzorem $(w, u) \mapsto w + u$ jest izomorfizmem liniowym.

(Przypomnienie: w przypadku jak w zadaniu powyżej mówimy, że V jest sumą prostą W i U, piszemy $V = W \oplus U$.)

Zadanie 16. Niech $V = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$, $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{7}\}$. Wykaż, że

a) $\mathbf{R}^3$ nie jest sumą prostą V i W, tzn. odwzorowanie $V \times W \ni (v, w) \mapsto v + w \in \mathbf{R}^3$ nie jest izomorfizmem.

b) $V \oplus W \cong \mathbf{R}^3$.

Zadanie 17. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.

a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1, 2, 3)^\top$, $v_2 = (4, 5, 6)^\top$; (ii) $v_1 = (2, 6, -2)^\top$, $v_2 = (0, 1, 2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1, 0, 2)^\top$, $v_2 = (0, 3, 1)^\top$; (iv) $v_1 = (0, 0, 1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 0)^\top$.

b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2.

c) Niech $p : V \to V/W$ będzie naturalnym rzutowaniem (zadanym przez $p(v) = v+W$). Sprawdź, że $p|_{W^\perp}$ jest izomorfizmem liniowym. Czy potrafisz uzasadnić, że to samo będzie prawdą dla dowolnej prostej W przechodzącej przez 0 w $V = \mathbf{R}^3$? $[W^\perp = \{\, v \in V \mid \forall w \in W, \langle v, w\rangle = 0\,\}]$

Zadanie 18. Sprawdź że:

a) jeżeli F_1, F_2 są liniowe, to $F_1 \oplus F_2$ jest liniowe.

b) $F_1 \oplus F_2$ jest „na" lub 1-1 wtedy i tylko wtedy gdy F_1 i F_2 są „na" lub 1-1.

c) jeżeli $F \colon V \to W$ jest liniowe, to dla $f \in W^*$ mamy $F^*(f) \in V^*$ i $F^* \colon W^* \to V^*$ jest liniowe

Zadanie 19. Uzasadnij (na przykład korzystając z poprzedniego zadania), że jeżeli $V_1 \cong V_2$ i $W_1 \cong W_2$, to $V_1 \oplus W_1 \cong V_2 \oplus W_2$.

Zadanie 20. Sprawdź że:

a) dla dowolnych $V_1 \xrightarrow{F_1} W_1 \xrightarrow{G_1} U_1$, $V_2 \xrightarrow{F_2} W_2 \xrightarrow{G_2} U_2$ zachodzi

$$(G_1 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus F_2) = ((G_1 \circ F_1) \oplus (G_2 \circ F_2)),$$

b) jeżeli $F_1 \colon V_1 \to V_2$ i $F_2 \colon V_2 \to V_3$ są liniowe, to $(F_2 \circ F_1)^* = F_1^* \circ F_2^*$.

Zadanie 21. Oblicz wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$. Co potrafisz powiedzieć o wymiarze przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = \ldots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$?

Zadanie 22. Niech dla $i = 0, \ldots, n$ funkcja $f_i : V_i \to V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{im}(f_i)$ (dla $i = 0, \ldots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(V_i) = 0$.

Zadanie 23. Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, U podprzestrzenią $\ker(F)$, zaś $p : V \to V/U$ odwzorowaniem ilorazowym ($p(v) = v + U$). Uzasadnij, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $f : V/U \to W$, takie że $f \circ p = F$.