PRZYKLAD

Strzalka (Sorgenfrey line), przyklad w $\mathbb{R}$

Baza: $\{[a, b) \ : \ a < b\}$ staja sie zbiorami otwartymi

Baza dla topologii to taka rodzina, ze kazda ??? jest suma zbiorow otwartych?

topologia strzalki jest bogatsz niz topologia euklidesowa - kazdy otwarty zbior w sensie euklidesowym jest tez otwarty w sensie strzalki

strzalka jest handsdorffa

Jak wygladaja ciagi zbiezne w strzalce?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to 0$$

$\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest zbiezny, bo wszystkiw wyrazy sa poza przedzialem

nie jest to przestrzen metryzowalna

UZWARCENIE ALEKSANDROWA (aka przestrzen z gruszka)

znowu przestrzen to $\mathbb{R}$, ale moze byc dowolne

Mamy $\mathbb{R}$ i mamy jakiegos kota. Otoczenia $r : \{r\}$ - signletony liczb rzeczywitych sa otwarte (no to wszystko jest otwarte). Otoczeniem  sa  : {} $\cup A$, takie, ze $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus A$ jest skonczony

Topologie definujemy jak nam sie podoba, tylko musi jasno wynikac, co jest otwarte, a co jest zamkniete.

Jest to przestrzen Hansdorffa

Jak wygladaja ciagi zbiezne?

$$\left(\frac{1}{n}\right) \to$$ 

po tylko skonczenie wiele punktow moze byc zignorowanych przez otoczenie 

czyli ogolem, jesli mamy dowolny (x_n) roznowartosciowy, to

$$\lim x_n =$$ 

bo  $\underset{otw}{\in} U$ bo istnieje skonczenie wiele n takich, ze $x_n \notin U$

COS

Ciag zbiezny - byl definiowany

Int$A = \{x \in A \ : \ \exists \, x \underset{otw}{\in} U \quad U \subseteq A\}$

$\overline{A} = \{x \in X \ : \ \forall \, x \underset{otw}{\in} U \quad U \cap A \neq \emptyset\}$

zbiory domkniete = dopelnienia otwartych

X - przestrzen topologiczna

$A \subseteq X$ jest GESTY (dense), jezeli

$$\forall \, U \underset{otw}{\neq} \emptyset \quad U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

czyli zb otwarty, ktory kroi sie niepusto z kazdym zbiorem otwartym (lub dopelnia sie do calej przestrzeni)

Przestrzen X jest OSRODKOWA, jesli istnieje w niej przeliczalny zbior gesty

PRZYKLADY - OSRODKOWA

$\mathbb{R}$ z metryka euklidesowa - osrodkowy (separable) bo $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ z metryka euklidesowa: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest gesty

$\mathbb{R}^2$ z metryka miasto: $\mathbb{Q}^2$ bo zbiory otwarte w miescie sa takie same jak w euklidesie

kostka Cantora ($\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) - bierzemy wszystkie skonczone ciagi stale od pewnego miesjca (czyli skonczone, ale sztucznie przedluzone do nieskonczonosci) - jest ich przeliczalnie wiele i to jest geste

Wezmy kule $B_r(x)$ o promieniu $r > \frac{1}{2^n}$

$$y(i) = x(i) \quad i \leq n+1$$

$$y(i) = 0 \quad i > n+1$$

ANTYPRZYKLAD: $(\mathbb{R}, d_{dysk})$. Zbior gesty $A \subseteq \mathbb{R}$ musi kroic sie nipusto z kazdym singletoenm, wiec

$$\forall \, x \quad A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

BARDZIEJ SUBTELLNY ANTYPRZYKLAD: $(\mathbb{R}^2, d_{centrum})$. Intuicja podpowiada, ze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ byloby geste i wtedy to bylby przeliczalny, ale kula ktora lezy na prostej $y = \pi x$ wymyka sie temu zbiorowi.

FAKT: Jesli mamy przestrzen metryczna, to gestosc mozemy opisac $A \subseteq X$ jest gest, jesli dla kazdej kuli itnieje cos z tego zbioru blizej x niz kula

$$\forall\, x \in X \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, a \in A \quad d(x,a) < \varepsilon$$

dowodzi <3
$\implies$: zalozmy, ze $\exists\, x \quad \exists\, \varepsilon$ ze jest zle, czyli

$$\exists\, x \quad B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

czyli nie mozemy byc gesci
$\impliedby$: wezmy jakis zbior otwraty $U \underset{otw}{\subseteq} X$, czyli mozemy zalozyc, ze jets taka kula:

$$\exists\, B_r(x) \subseteq U$$

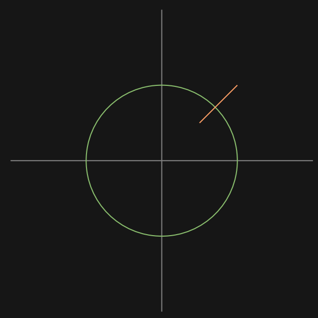
i wowczasj z wlasnosci z faktu

$$\exists\, a \in A \quad d(x,a) < r$$

$$A \cap B_r(x,a) = \emptyset$$

POWROT DO METRYKI CENTRUM
Rozwazmy okrag i robimy kule promieniscie i jest ich c wiele

$$S^1 = \{x \;:\; d(x, \langle 0,0 \rangle = 1)\}$$



Przestrzen supremum jest osrodkowa, bo wielomiany tworza ciag gesty.

TWIERDZONKA

TW: $f : X \to Y$, ktora jest ciagla i na, to jezeli X osrodkowa, to jest Y tez (osrodkowosc prznosi sie przez ciage subwiekcje).

DOWODZIK:
Chcemy zdefiniowac przeliczalny zbior gesty w Y.
Niech $A \subseteq$ bedzie przeliczalnym zbiorem gestym w X. No to w takim przypadku zbiorem gestym w Y bedzie $f[A]$.
Jest to zbior przeliczalny, bo jest obrazem zbioru przeliczalnego, a czy jest gesty?
Bierzemy dowolny zbior otwarty w $U \subseteq Y$, to wtenczas $f^{-1}[U] \subseteq X$

$$\exists\, a \in A \quad a \in f^{-1}[U] \quad f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

ZBIOR CANTORA <3

$$C \subseteq [0,1]$$

C jest przekrojem zbiorow domknietych, wiec sam tez jest zbioreom dokmnietym.

ZBIOR CANTORA jest homeomorficzny z kostka Cantora

$$Cant \underset{home}{\simeq} 0,1$$

DOWODZIK:

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Cant$$

s - skonczony ciag 0,1. Wowczas C_s to jest ciag, ktory w zbiorze Cantora pokolei przyjmuje lewy lub prawy podbior poprzedniego zbioru (skaczemy lew-prawa)

$$f(x) = y \qquad \bigcap_{s-odc\; pocz\; x} D_s = \{y\}$$

Co nas czeka:
- zobaczenie ze to D_s jest niepuste
- ze to jest 1-1 i na

1-1 bo mamy dwa rozne ciagi, to one sie nam rozjeda i nie ma opcji zeby sie znowu pozniej spotkaly
bo zawsze dojdziemy d odowolnego x
- dowod ciaglosci i ciaglosci f^{-1}