

Spis treści

1	METRYKI	3
1.1	METRYKA	3
1.2	KULA	3
1.3	ZBIEŻNOŚĆ	4
1.4	ZBIORY OTWARTE	4
1.5	ZBIORY DOMKNIĘTE	5
2	LEMAT URYSOHNA	6
2.1	PRZESTRZEŃ NORMALNA	6
2.2	LEMAT URYSOHNA	6
2.3	TWIERDZENIE TIENTZEGO	7
3	ROZMAITOŚCI	8
3.1	RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI	8
3.2	ROZMAITOŚĆ	9
3.3	PRZESTRZEŃ ŚCIAĞALNA	9
4	ZBIÓR DEFINICJI	11

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazywamy funkcję
$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$
przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x, x) = 0 \wedge d(x, y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall x, y) d(x, y) = d(y, x)$ - symetria
3. $(\forall x, y, z) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ - warunek Δ

METRYKI EUKLIDESOWE:

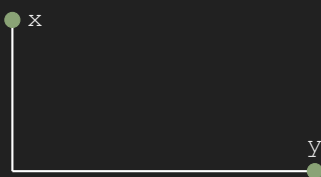
$$\mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$$

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$$

$$\mathbb{R}^n : d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \dots + (x(n-1) - y(n-1))^2}$$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$$



METRYKA MAKSIMUM

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

\mathbb{R} , m. euklidesowa:	\mathbb{R}^2 , m. euklidesowa	\mathbb{R}^2 , m. miasto	\mathbb{R}^2 , m. maksimum
\mathbb{R}^2 , m. centrum		$C[0, 1]$, m. supremum	$C[0, 1]$, m. całkowa
narysję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie wszystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall i < \infty) x_n(i) \rightarrow x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretniej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{\text{sup}}} f \iff (f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest **zbiorem otwartym**, jeśli na każdym punkcie ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

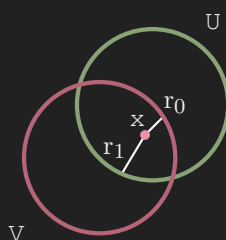
$$(\forall z \in U)(\exists r > 0) B_r(z) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V , których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych \mathcal{U} która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowolnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists r_0 > 0) B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists r_1 > 0) B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będą zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga



DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists U \in \mathcal{U}) x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x . Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisać kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga



U jest zbiorem otwartym $\iff U$ jest sumą kul.

DOWOD:

\Leftarrow wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

\Rightarrow

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall x \in U)(\exists r_x > 0) B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U , suma ta nie może być większa niż U . Zawierają się w niej wszystkie punkty z U , więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga



1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest **zbiorem domkniętym**, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c . Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegać do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U , co jest sprzeczne z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c .

i smiga



2 LEMAT URYSOHNA

2.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń X jest przestrzenią **NORMALNĄ** (również T_4), jeżeli

$$(\forall F, G \subseteq X) \underset{\text{dom}}{F \cap G = \emptyset} \\ (\exists U, V \subseteq X) \underset{\text{otw}}{U \cap V = \emptyset \wedge F \subseteq U \wedge G \subseteq V}$$



Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

2.2 LEMAT URYSOHNA

Założmy, że przestrzeń X jest normalna. Niech $F, G \subseteq X$ będą $\underset{\text{dom}}{\text{rozłącznymi zbiorami domkniętymi w } X}$. Wówczas:

$$(\forall f : X \xrightarrow{\text{ciągła}} [0, 1]) f|_F \equiv 0 \wedge f|_G \equiv 1$$

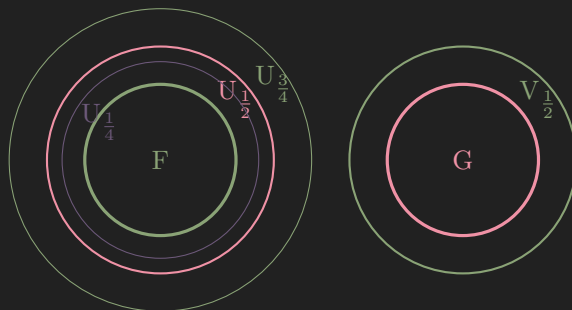
Warunek ten jest silniejszy od normalności.

DOWOD:

Niech F, G będą zbiorami domkniętymi spełniającymi założenia lematu. Z normalności tych zbiorów możemy wziąć zbiory otwarte $U_{\frac{1}{2}}$ i $V_{\frac{1}{2}}$ takie, że $U_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G . Ponieważ $U_{\frac{1}{2}}$ jest zbiorem otwartym, to $U_{\frac{1}{2}}^c$ jest domknięte, więc możemy oddzielić F od $U_{\frac{1}{2}}^c$ za pomocą $U_{\frac{1}{4}}$.

Ponieważ $V_{\frac{1}{2}}$ oddziela F od G , to $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \cap G = \emptyset$ oraz możemy utworzyć zbiór $U_{\frac{3}{4}}$ oddzielający $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ od G i tak dalej.

Powstaje nam konstrukcja:



Niech \mathcal{D} będzie zbiorem liczb diadycznie wymiernych (tzn postaci $\frac{k}{2^n}$) z przedziału $[0, 1]$. Wówczas zbiór

$$\{U_d : d \in \mathcal{D}\}$$

opisuje nam powyższą konstrukcję:

$$\begin{aligned} (\forall d) F &\subseteq U_d \\ (\forall d < d') \overline{U_d} &\subseteq U_{d'} \\ (\forall d) U_d \cap G &= \emptyset \end{aligned}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} & (\exists q \in \mathcal{D}) x \in U_q \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Zbiory otwarte na przedziale $[0, 1]$ mają postać $(a, b) = [0, b) \setminus [0, a]$. Sprawdzamy ciągłość:

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0, b)) &= \{x : \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} < b\} = \\ &= \{x : (\exists q < b) x \in U_q\} = \\ &= \bigcup_{q < b} U_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0, a]] &= \{x : \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} \leq a\} = \\ &= \{x : (\exists q \leq a) x \in U_q\} = \\ &= \bigcap_{q \leq a} U_q^c \end{aligned}$$

$$f^{-1}[(a, b)] = f^{-1}[[0, b)) \setminus f^{-1}[[0, a]] = \bigcup_{q < b} U_q \setminus \bigcap_{q \leq a} U_q^c$$

DOCZYTAC W KLAUS JANICH "TOPOLOGIA"BO NADZIEJA POMIESZAŁ

2.3 TWIERDZENIE TIETZEGO

Niech X będzie przestrzenią normalną, a $D \subseteq X$ zbiorem domkniętym. Wtedy istnieje

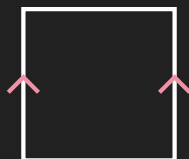
$$f : D \xrightarrow{\text{ciągła}} [0, 1]$$

3 ROZMAITOŚCI

3.1 RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

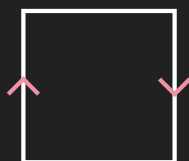
$$X = [0, 1]^2$$

$$\langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



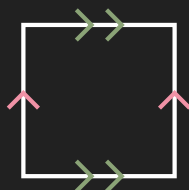
Tutaj zlepiamy dwa przeciwne boki prostokąta i otrzymujemy tubę.

$$\langle 0, y \rangle \sim \langle 1, 1-y \rangle$$



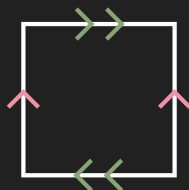
Powstaje nam wstęga Mobiusa.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



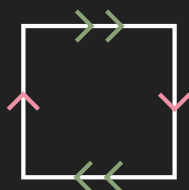
Zlepiamy górną i dolną oraz prawą i lewą - dostajemy torus.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle 1-x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



Jak to się zrobi na przemian strzałki na górze i dole to dostajemy torus z obrotem, czyli **butelkę Kleina**.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle 1-x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, 1-y \rangle$$



Na przemian wszystkie strzałki i dostajemy **płaszczyznę rzutową**.

3.2 ROZMAITOŚĆ

N - ROZMAITOŚĆ to przestrzeń topologiczna,
łukowo spójna, lokalnie homeomorficzna z \mathbb{R}^n (to znaczy,
że $(\forall x \in X)(\exists \underset{\text{otw}}{U} \ni x) U \cong \mathbb{R}^n$)

kula - przykład, rura (z końcem) - antyprzykład

Czym się różni sfera od torusa?

Wyobraźmy sobie pętelkę na sferze, jeśli będziemy ją ściskać, to zrobimy supełek. Natomiast jeśli na torusie weźmiemy pętelkę ale taką oplatającą go, to tego nie możemy ścisnąć do supełka.

PĘTLA to funkcja

$$p: [0, 1] \rightarrow X$$

która jest ciągła i $p(0) = p(1)$

Funkcje stałe też są pętlami.

Przestrzeń topologiczna jest JEDNOSPÓJNA,
gdy jest łukowo spójna i dla każdej pętli istnieje
punkt, z którym jest ona homotopijnie równoważna (jest ściągalna do punktu).

jakaś dygresja

$$X \cong Y,$$

jeśli X jest jednospójna, to Y jest też jednospójna.

Weźmy koło bez brzegu i pół okręgu z otwartymi końcami. Obie te przestrzenie są jednospójne, ale jeśli z koła wyjmemy jeden punkt, to przestaje ono być jednospójne, a jeśli z pół okręgu wyjmemy, to on nadal jest jednospójny.

3.3 PRZESTRZEŃ ŚCIAĞALNA

Przestrzeń topologiczna jest ŚCIAĞALNA,
jeżeli identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stałą

$$\text{id}: X \rightarrow X \quad \text{id}(x) = x$$

$$f: X \rightarrow X \quad f(x) = a$$

Na przykład dysk jest ściągalny:

$$H(x, t) = t \cdot a + (1-t)x,$$

identyczność jest homotopijnie spójna z funkcją $f(x) = a$. Sfera nie jest homotopijnie spójna.

.....

TWIERDZENIE BROUWERA

jeśli istnieje ciągła $f: D^n \rightarrow D^n$, gdzie D^n to dysk n -wymiarowy, to
 $(\exists x) f(x) = x$,
czyli istnieje punkt stały.

DOWOD:

Dla $n = 2$.

Wyobraźmy sobie, że mamy ciągłą funkcję

$$f: D^2 \rightarrow D^2,$$

która nie ma punktu stałego

$$(\forall x) f(x) \neq x.$$

Korzystając z niej konstruujemy drugą funkcję

$$r: D^2 \rightarrow S^1,$$

gdzie S^1 to brzeg D^2 . Prowadzimy prostą przez x i jego obraz $f(x)$, po czym przypisujemy $r(x)$ jako

punkt przecięcia tej prostej i S^1 . Co możemy o r powiedzieć?

- r jest ciągła
- $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$

Rozważmy funkcję:

$$H: D^2 \times [0, 1] \rightarrow S^1$$

$$H(x, t) = r(tx)$$

H jest ciągłe, $H(x, 0) = r(0)$, gdzie $r(0)$ będzie środkiem dysku $H(x, 1) = r(x) = x$. Czyli dostaliśmy, że okrag jest ściągalny, ale on nie jest więc mamy sprzeczność

i smiga



