Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podostawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem sekualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.

Spis treści

1 JĘZYK LOGIKI

1.1 FUNKCJE

FUNKCJA – zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczości, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji – nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \,:\, (\exists\, y)\, \langle x, y\rangle \in f\}$$
$$\mathrm{rng}(f) = \{y \,:\, (\exists\, x)\, \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako *podzbioru* $f \in X \times Y$ *takiego, że dla każdego* $x \in X$ *istnieje dokładnie jeden* $y \in Y$ *takie, że* $\langle x, y\rangle \in f$ jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej $\{A_i \,:\, i \in I\}$ definiujemy:

- jej sumę: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \,:\, (\exists\, i \in I)\, x \in A_i\}$
- jej przekrój: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \,:\, (\forall\, i \in I)\, x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ definiujemy:

- suma: $\bigcup \mathcal{A} = \{x \,:\, (\exists\, A \in \mathcal{A})\, x \in A\}$
- przekrój: $\bigcap \mathcal{A} = \{x \,:\, (\forall\, A \in \mathcal{A})\, x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rdzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y\rangle \,:\, x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z\rangle \,:\, x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i wiecej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny – iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle\langle a_1, a_2\rangle a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle.$$

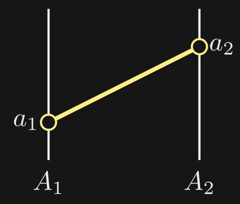
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

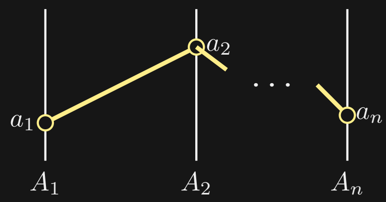
$$A : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym inde-
ksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I \ : \ (\forall\, i \in I)\ f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla $I = \{1, 2\}$ nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są róże. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

JĘZYK RZĘDU ZERO, czyli rachunek zdań: $p, q, r, \ldots, \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych: $V = \{x_0, x_1, \ldots\}$
2. symbole spójników logicznych: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów: $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości: $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne: $F = \{f_i : i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty): $R = \{r_j : j \in J\}$
3. symbole stałe: $C = \{c_k : k \in K\}$

ARNOŚĆ – odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

SYGNATURA – zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA