COS

Twierdzenie $C[0,1]$ z metryka supremum jest spojna.
DOWOD:

Latwiej jest udowodnic, ze cos jest lukowo spojne (wlasnosc silniejsza). Wezmy dowolna funkcje $f \in C[0,1]$ i polaczmy ja lukiem z najprostsza funkcja g, czyli ta stale rowna 0. Wystarczy laczyc funkcje lukami z nia bo jak mam dwa luki, to ich suma tez jest lukiem.

$F : [0,1] \to C[0,1]$
$F(0) = g$
$F(1) = f$
to sie sprowadza do znalezienia

$$G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$G(x,t) = F(x)$$

Startujemy of funkcji zerowej i mamy dojsc do funkcji f w sposob ciagly. Wygodnie o tym myslec jako o czasiie, czyli g plynnie zmienia sie w f

$$\forall\ x \quad G(x,0) = 0$$

$$\forall\ x \quad G(x,1) = f(x)$$

$$\forall\ t \quad G(x,t) \in C[0,1]$$

$$F(t) = G(x,t)$$

G jest homotopia.

$$G(x,t) = tf(x)$$

wlozenie na cwiczeniach

PRODUKTY

$(X_i)_{i \in I}$ - rodzina indeksowana przestrzeni topologicznych.

$$\prod_{i \in I} X_i \ni f$$

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$$

$$f(i) \in X_i$$

Jak zdefiniowac topologie?
Topologia produktowa (trzy kreseczki) najslabsza topologia taka, ze wszystkie rzuty sa ciagle

$$i \in I \quad p_i \prod_{i \in I} X_i \to X_i$$

$$p_i(f) = f(i)$$

niech warunek wstepny zeby te rzuty byly ciagle jest

$$p_i^{-1}[V] \; sa\ otwarte\ w\ prod$$

gdzie V jest otwartym podzbiorem X_i

$$p_i^{-1}[V] = \{f \in X \ : \ f(i) \in V\}$$

to jak bramki z wczesniej

Baza topologii produktowej sa zbiory psotaci

$$p_{i_1}^{-1}[V_{i_1}] \cap ... \cap p_{i_n}^{-1}[V_{i_n}]$$

$$X_0 \times X_1 \times U_2 \times X_3 \times ...$$

baza jest produkt tego prawie wszystkiego, gdzie tylko na skonczenie wielu miejscach nie ma pelnego X.
PRZYKLADY $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ powyzsza definicja daje nam $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}\times$strzalka - $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\{U \times V \ : \ U otwarteeuklidesowo, V otwartestrzalkowo\}$
$\{0,1\} \times \{0,1\} \times ...$ przeliczalnie wiele razy, czyli $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ustalamy skonczenie wiele osi i dostajemy baze na kostke cantora
$[0,1] \times [0,1] \times ...$ przeliczalnie wiele razy, wtedy mamy $[0,1]^{\mathbb{N}}$ i dostajemy kostke hilberta
$\prod_{i \in I} X_i, \ X_i = \mathbb{R}$ i to jest $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i topologia jest $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f(x_0) \in U_0, ..., f(x_k) \in U_k\}$, ale mozemy wziac sobie
$R^{[0,1]} \supseteq C[0,1]$ top prod to top zb punkt

Twierdzenie Tichonowa - jesli mamy rodzine przestrzeni topologicznych $(X_i)_{i \in I}$ zwartych to produkt jest zwarty
DOWOD:

$I = \mathbb{N}$ najprostszy nieskonczony przypadek
Zalozmy, ze istnieje takie zle pokrycie U bez podpokrycia skonczonego. Skonstruujemy pewien $x \in X$

Indukcja <3
Zaczynamy od x_1 takiego, ze

$$\forall\, V \subseteq X_1 \quad V \times X_2 \times X_3 \times ...niejestpokrywanyskonczeniewielomaelementami$$

gdyby nie, to

$$\forall\, x \in X_1 \; \exists\, V_x \ni x \quad v \times X_2 \times X_3 \times ...pokrywasieskonczeniewielomaelementamiU$$

$$\{V_x \;:\; x \in X_1\}$$

jest pokryciem X_1

$$V_{x_1} \cup ...V_{x_n} = X_1$$

do V_{x_1} dobieram sobie skonczone podpokrycie $U_1 \supseteq U$ ktore jest skonczone takie, ze

$$V_{x_1} \times X_2 \times ... \subseteq \bigcup U_1 ...(☕)$$

teraz trzeba sie przyjrzec $U_1 \cup U_2 \cup ...$ - to jest ba pewno skonczona podrodzina U i jest pokryciem, bo sumujac tego potworka nalezacrgo do Vx1 x X2 x V3 x... nalezy mi do sumy popokrycia

$$\{V_{x_k} \times X_2 \times ... \;:\; k \leq n\}jestpokryciemX$$

wiec z warunku (☕) mamy, ze $U_1 \cup U_2 \cup ..$ rowniez (tylko tu sa dwa rozne rodzaje U XD)
x_2 takie, ze $\forall\, U \subseteq X_1, V \subseteq X_2 \quad U \times V \times X_3 ..niejestskonczonympokryciemelementwU$