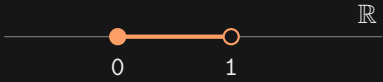


STRZALKA (Sorgenfrey line), przykład w \mathbb{R}

$$B = \{[a, b) : a < b\}$$

sa zbiorami otwartymi (otwarto-domknietymi, tak jak \mathbb{R} czy \emptyset w \mathbb{R}).



BAZA dla topologii to taka *rodzina zbiorow otwartych*, ze kazdy niepusty i otwarty podzbior tej przestrzeni mozna wysumowac przy pomocy pewnych elementow bazy.

Topologia strzalki jest bogatsza (silniejsza, wieksza) niz topologia euklidesowa - kazdy otwarty zbior w sensie euklidesowym jest tez otwarty w sensie strzalki

Strzalka jest przestrzenia **Handsdorffa**

Jak wygladaja ciagi zbiezne w strzalce?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$


$\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest zbiezny, bo wszystkie wyrazy sa poza przedzialem

nie jest to przestrzen metryzowalna

UZWARCENIE ALEKSANDROWA (aka przestrzen z gruszka) na \mathbb{R} , ale moze byc to dowolna przestrzen

- przestrzen zwarta** - przestrzen topologiczna, ze z dowolnego jej pokrycia zbiorami mozna wybrac podpokrycie skonczone
- uzwarcenie** - rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by byla ona przestrzenia zwarta
- otoczenie** - dowolny zbior, ktory zawiera zbior otwarty zawierajacy dany punkt



Mamy \mathbb{R} i mamy jakiegos . Otoczenia wszystkich liczb \mathbb{R} to

$$r : \{r\},$$

czyli signletony liczb rzeczywitych sa otwarte. Otoczeniem  sa


$$\text{ : \{\text{\} \cup A,$$


takie, ze $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus A$ jest skonczony.


Topologie mozemy w uzwarceniu Aleeksandrowa zdefiniowac w dowolny sposob, musi tylko jasno wynikac, co jest zbiorem otwartym, a co zamknietym.


Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenia **Hansdorffa**

Jak wygladaja ciagi zbiezne?

$$\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \text{},$$

bo tylko skonczenie wiele punktow moze byc zignorowanych przez otoczenie . W takim razie mozemy powiedziec, ze jesli mamy dowolny (x_n) roznowartosciowy, to

$$\lim x_n = \text{$$

bo $\text{} \in U$ i istnieje skonczenie wiele n takich, ze $x_n \notin U$.

PRZESTRZEN OSRODKOWA

Ciag zbiezny - byl definiowany jako ciag, ktorego wszystkie elementy leza w kuli o coraz to mniejszym promieniu

IntA = {x \in A : \exists x \in U \ U \subseteq A}

natomiast zbiorem domknietym byly dopelnienia otwartych:

\overline{A} = {x \in X : \forall x \in U \ U \cap A \neq \emptyset}.

.....

X - przestrzen topologiczna

Zbior A \subseteq X jest GESTY (dense), jezeli

\forall U \neq \emptyset \ U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X

jest to zbior otwarty, ktory
kroi sie niepusto z kazdym zbiorem otwartym
(lub dopelnia sie do calej przestrzeni)

Przestrzen X jest OSRODKOWA,
jesli istnieje w niej przeliczalny zbior gesty

.....

PRZYKLADY - OSRODKOWA

\mathbb{R} z metryka euklidesowa - osrodkowy (separable) bo \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}

\mathbb{R}^2 z metryka euklidesowa: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} jest gesty

\mathbb{R}^2 z metryka miasto: \mathbb{Q}^2 bo zbiorzy otwarte w miescie sa takie same jak w euklidesie

kostka Cantora (\{0,1\}^{\mathbb{N}}) - bierzemy wszystkie skonczone ciagi stale od pewnego miesjca (czyli skonczone, ale sztucznie przedluzone do nieskonczonosci) - jest ich przeliczalnie wiele, a ich zbior jest gesty. Wezmy kule B_r(x) o promieniu r > \frac{1}{2^n}

y(i) = x(i) \ i \leq n + 1
y(i) = 0 \ i > n + 1

ANTYPRZYKLADY:

(\mathbb{R}, d_{dyskretna}). Zbior gesty A \subseteq \mathbb{R} musi kroic sie niepusto z kazdym singletonem, wiec

\forall x \ A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}

czyli zbior gesty nie jest przeliczalny.

(\mathbb{R}^2, d_{centrum}). Intuicja podpowiada, ze \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} byloby geste i wtedy to bylby przeliczalny. Jednak, jesli kula lezy na prostej o wyrazach niewymiernych, na przyklad

y = \pi x,

to tnie sie pusto ze zbiorem \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}

.....

FAKT: W przestrzeni metrycznej \langle X, d \rangle zbior A \subseteq X jest gesty,
wtedy i tylko wtedy, gdy dla kazdej kuli B_r(x) istnieje a \in A blizej x niz kula:
A zb. gesty \iff \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ d(x, a) < \varepsilon

DOWOD:

\implies

Zalozmy, ze twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gestego A i przestrzeni metrycznej \langle X, d \rangle istnieje kula o promieniu \varepsilon i srodku x \in X taka, ze nie zawiera elementow z A:

\exists x \ B_{\varepsilon}(x) \cap A = \emptyset

W takim razie A tnie sie pusto ze zbiorem otwartym B_{\varepsilon}(x), czyli nie jest zbiorem gestym.

\impliedby

Wezmy jakis zbior otwarty

U \subseteq X,

czyli mozemy zalozyc, ze istnieje kula:

\exists B_r(x) \subseteq U.

Czyli kula B_r(x) zawiera sie otwartym zbiorze U, wiec istnieje w U punkt ktory lezy w tej kuli:

\exists u \in U \ d(x, u) < r,

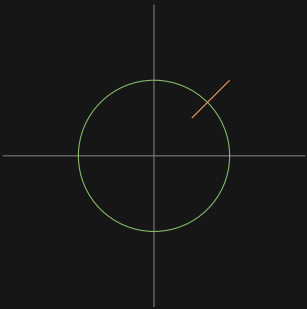
a wiec kula tnie sie niepusto ze zbiorem U:

U \cap B_r(x) \neq \emptyset



POWROT DO METRYKI CENTRUM
Rozważmy okrąg i robimy kule promieniscie i jest ich c wiele

$$S^1 = \{x : d(x, \langle 0, 0 \rangle) = 1\}$$



Przestrzen supremum jest osrodkowa, bo wielomiany tworza ciag gesty.

TWIERDZONKA

TW: $f : X \rightarrow Y$, ktora jest ciagla i na, to jezeli X osrodkowa, to jest Y tez (osrodkowosc prznosi sie przez ciage subwiekcje).

DOWODZIK:
Chcemy zdefiniowac przeliczalny zbior gesty w Y .
Niech $A \subseteq$ bedzie przeliczalnym zbiorem gestym w X . No to w takim przypadku zbiorem gestym w Y bedzie $f[A]$.
Jest to zbior przeliczalny, bo jest obrazem zbioru przeliczalnego, a czy jest gesty?
Bierzemy dowolny zbior otwarty w $U \subseteq Y$, to wtenczas $f^{-1}[U] \subseteq X$

$$\exists a \in A \quad a \in f^{-1}[U] \quad f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

ZBIOR CANTORA <3

$$C \subseteq [0, 1]$$

C jest przekrojem zbiorow domknietych, wiec sam tez jest zbioreom dokmnietym.

ZBIOR CANTORA jest homeomorficzny z kostka Cantora

$$Cant \underset{home}{\simeq} 0,1$$

DOWODZIK:



$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow Cant$$

s - skonczony ciag 0,1. Wowczas C_s to jest ciag, ktory w zbiorze Cantora pokolei przyjmuje lewy lub prawy podbior poprzedniego zbioru (skaczemy lew-prawa)

$$f(x) = y \quad \bigcap_{s-odc \text{ pocz } x} D_s = \{y\}$$

Co nas czeka:
zobaczenie ze to D_s jest niepuste
ze to jest 1-1 i na
1-1 bo mamy dwa rozne ciagi, to one sie nam rozjeda i nie ma opcji zeby sie znowu pozniej spotkaly
bo zawsze dojdziemy d odowolnego x
dowod ciaglosci i ciaglosci f^{-1}

