PODSTAWOWE POJECIA ALGEBRY LINIOWEJ

CIALO

CIALO to zbior K z dwoma dzialniami,
dodawaniem i mnozeniem, i ich elementami neutralnymi ($0, 1 \in K$)
dodawanie i mnozenie to funkcje $+ : K \times K \to K$

WLASNOSCI CIAL:

1. dodawanie i mnozenie sa laczne, przemienne i rozdzielne
2. istnieja elementy neutralne: $0 + x = 1 \cdot x = x$
3. dla kazdego elementu ciala istnieje element przeciwny: $\forall\, x\, \exists\, (-x) \quad x + (-x) = 0$
4. dla kazdego $x \neq 0$ istnieje element odwrotny: $\forall\, x \neq 0\, \exists\, x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$
5. $0 \neq 1$ - wyklucza zbior jednoelementowys

Jesli istnieja odpowiednie $-x$, x^{-1}, to sa one jedyne - dowod na cwiczeniach

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ sa cialami, natomiast $\mathbb{Z}$ nie jest cialem (nie ma elementu odwrotnego do 2, pierscienie)

Kazdy podzbior $K \subseteq \mathbb{C}$, ktory jest zamkniety na dodawanie, mnozenie oraz dla kazdego elementu K mozna znalezc w K element do niego przeciwny i odwrotny, tez jest cialem.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z dodawaniem i mnozeniem modulo 5 jest cialem: jest element neutralny: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 4 = 1$
$\{0, 1, ..., p-1\}$, gdzie p jest licza pierwsza jest cialem (dowod z algorytmu euklidesa)

Dla kazdej liczby naturalnej n i dla kazdej liczby pierwszej p jest cialo, ktore ma dokladnie p^n elementow i sa to wszystkie ciala skonczone.

Dla dowolnego $d \in K$ mozemy zdefiniowac $\mathbb{Q}[d] = \{a + b \cdot d \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$

Jesli K jest cialem, to mozemy rozpatrzec zbior wszystkich wielomianow o wspolczynnikach w K: $K[X]$ i nie jest cialem (nie istnieje X^{-1}).
Mozemy rozpatrzyc tez zbior wiekszy, *cialo funkcji wymiernych $K(X)$*, czyli formalne ilorazy wspolczynnikow zK, tyle ze w mianowniku nie moze pojawic sie 0:

$$K(X) = \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in K[X], \mathbb{Q} \in 0\}$$

Jak dowodzic twierdzenia:

$$\forall x \in K \quad 0 \cdot a = 0$$

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a | + (-0 \cdot a)$$
$$0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a)$$
$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

PRZESTRZEN LINIOWA

PRZESTRZEN LINIOWA nad K to zbior V z dzialaniem dodawaniem i mnozeniem:

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$
$$0 \in V$$

WLASNOSCI:

$+$ i $\cdot$ spelniaja oczywiste wlasnosci

Lacznosc mieszana dla mnozenia:

$$(\alpha \underset{K}{\cdot} \beta) \underset{V}{\cdot} \gamma = \alpha \underset{V}{\cdot} (\beta \underset{V}{\cdot} \gamma)$$

Rozdzielnosc mnozenia wzgledem dodawania:

$$\alpha \underset{V}{\cdot} (u \underset{K}{+} w) = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \alpha \underset{V}{\cdot} w$$

$$(\alpha \underset{V}{+} \beta) \underset{V}{\cdot} u = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \beta \underset{V}{\cdot} v$$

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ to przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$

Dla kazdego iloczynu kartezjanskiego ciala, iloczyn ten jest cialem. Bardziej ogolnie mozna to ujac, ze jesli A jest dowolnym zbiorem, a K^A jest zbiorem wszystkich funkcji z A w K, to K^A jest przestrzenia liniowa nad K

$K[X]$ to zbior wielomianow o wspolczynnikach z K, to jest on przestrzenia liniowa nad K. Tak samo $K_n[X]$ (wielomiany co najwyzej stopnia n) rowniez sa przestrzenia liniowa.

$C(\mathbb{R})$ to zbior wszystkich funkcji ciaglych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i jest on przestrzenia liniowa nad $\mathbb{R}$

Jesli przemnozymy dowolny wetor przez 0, to dostaniemy wektor zerowy:

$$0 \cdot v = \overrightarrow{0}$$

Dla kazdego wektora z V i kazdego skalara z K istnieje dokladnie jeden wektor w taki, ze:

$$\forall\, v \in V\; \forall\, a \in K\; \exists! w \in V \quad a \cdot v + w = 0$$

s