# KRACH CHCE NAM COS POWIEDZIEC

## HIERARCHIA $R_\alpha$

czemu to sie nazywa hierarchia $R_\alpha$? Krach nie wie, ale w anglo jest $V_\alpha$.

Jest to hierarchia zbiorow i definiujemy ja przez

$$\begin{cases} R_0 = \emptyset \\ r_{\alpha+1} = \mathcal{P}R_\alpha \\ R_\gamma = \bigcup\limits_{\zeta<\gamma} R_\zeta \; gdyLim(\gamma) \end{cases}$$

Jakies wlasnosci:
1. $\forall\, \alpha \quad$ Tran$(R_\alpha)$
2. $\alpha \leq \beta \implies R_\alpha \subseteq R_\beta$
3. $R_\alpha \cap ON = \alpha \; \alpha = \{x \in R_\alpha \;:\; On(x)\}$

2. i 3. sa na liscie 3, wiec pokazemy tylko 1:

DOWOD:

1. Indukcja po $\alpha$. Dla $\alpha = 0$ nam smiga, bo $\emptyset$ jest tranzytywny.

krok indukcyjny
$\alpha \implies \alpha + 1$ zalozmy, ze $Tran(R_\alpha)$, ale wtedy $Tran(\mathcal{P}R_\alpha)$, czyli $Tran(R_{\alpha+1})$

krok graniczny. Zalozmy, ze $Tran(R_\zeta)$ dla $\zeta < \alpha$. Ustalmy dowolne $x \in R_\alpha$ i $y \in x$. Skoro $x \in R_\alpha = \bigcup\limits_{\zeta<\alpha} R_\zeta$, to $x \in R_{\zeta_0}$ dla pewnego $\zeta_0 < \alpha$. Ale $Tran(R_{\zeta_0})$ wiec skoro $y \in x$, to $y \in R_{\zeta_0}$, czyli $y \in \bigcup\limits_{\zeta<\alpha} R_\zeta = R_\alpha$

*i smiga*

Hierarchia $R_\alpha$ jest wazna ze wzgledu na twierdzenie:

$$\bigcup_{\alpha \in ON} R_\alpha = V$$

czyli kazdy zbior jest w ktorejs hierarchii.
Wersja skrotowa: $\forall\, x \,\exists\, \alpha \quad x \in R_\alpha$.

Tranzytywne domkniecie zbioru X nazywamy najmniejszy zbior tranzytywny zawierajacy zbior X.
Bedziemy to oznaczeli $tcl(X)$
pewien szczegolny przyklad pewnej ogolnej sytuajci (to jest dygresja btw). W matmie czesto domykamy zbior ze wzgledu na pewna sytuacje i to sie robi na dwa sposoby: od gory i od dolu.
Tak samo jak w topologii

elementy elementow $x$ sa w $\bigcup x$, czyli mozemy dodac sobie do $x$ dodac $x \cup \bigcup x$. Ale moze cos nie smigac bo pojawimy sie nowe elementy, wiec znowu musimy dodac $x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x$ i tak dalej <3

Na liscie bedziemy to pisac porzadnie rekurencyjnie i sprawdzac

DOWOD:

tego z $V$

Przypuscmy nie wprost, ze istnieje $x$ taki, ze

$$\forall\, \alpha \quad x \notin R_\alpha$$

Rozwazmy zbior

$$Y = \{y \in tcl(x) \cup \{x\} \;:\; y \notin \bigcup_{\alpha \in ON} R_\alpha\} \neq \emptyset$$

Z aksjomatu regularnosci w $Y$ istnieje element $\in$-minimalny, czyli istnieje $y_0 \in Y$ takie, ze

$$\forall\, t \in Y \quad t \notin y_0$$

To znaczy, ze dla kazdego $z \in y_0$ mamy $z \notin Y$, czyli $z \in \bigcup R_\alpha$. Zatem

$$\forall\, z \in y_0 \,\exists\, \alpha \in ON \quad z \in R_\alpha$$

Mamy zatem "funkcje" $f : y_0 \to ON \; f(z) = \min\{\alpha \;:\; z \in R_\alpha\}$.
Na mocy aksjomatu zastepowania istnieje $rng(f)$.
Czyli udalo mi sie zlapac wszystkie liczby porzadkowe, ktore mielismy dane. $rng(f)$ to zbior liczb porzadkowych, a suma liczb porzadkowych jest liczba porzadkowa, wiec niech

$$\beta = \bigcup rng(f) \in ON$$

Mamy $\forall\, z \in y_0 \quad z \in R_\beta$, czyli $y_0 \subseteq R_\beta$. W takim razie $y_0 \in R_{\beta+1} = \mathcal{P}(R_\beta)$. $y_0$ mial byckontrprzykladem, a mamy sprzecznosc z $y_0 \in Y$

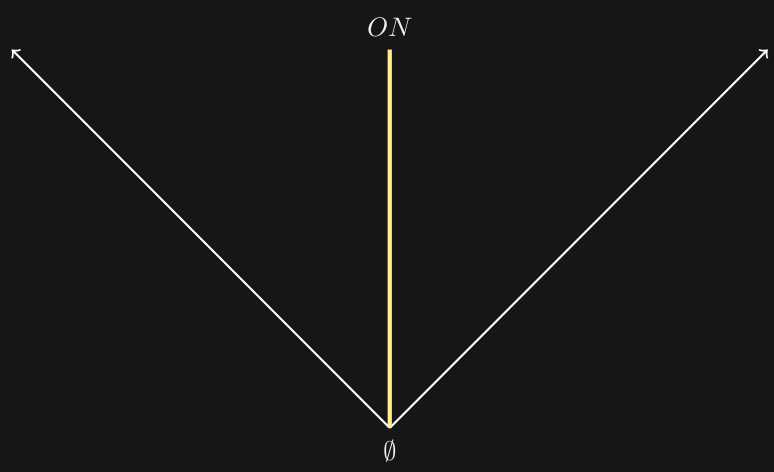
*i smiga*

WNIOSKI

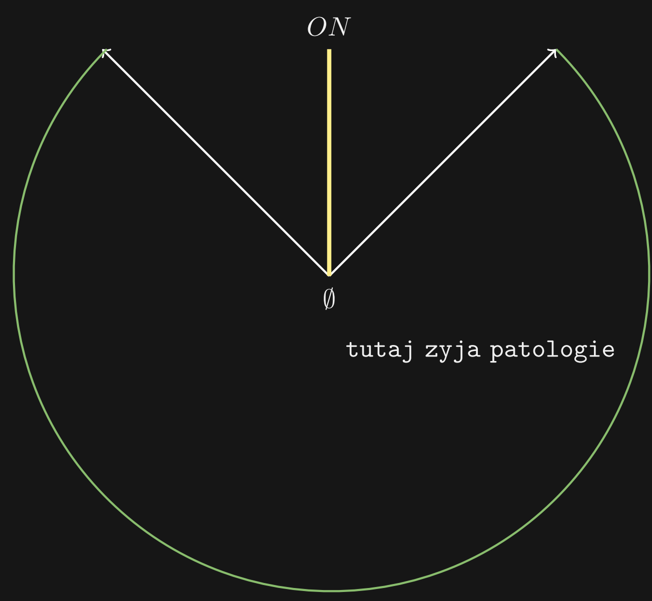
1. RANGA ZBIORU $rank(x) = \min\{\alpha \;:\; x \in R_{\alpha+1}\}$ lub, rownowaznie $= \min\{\alpha \;:\; x \subseteq R_\alpha\}$ i chcemy zeby kazda $\alpha$ mogla byc ranga, a bez +1 by nam graniczne nie smigaly

# PRZYJEMNOSCI

JAK WYGLADA SWIAT?
zasadniczo, to to jest takie cos




gdyby niebylo aksjomatu regularnosci




$ZF_0 \models (A_x Reg \iff V = \bigcup\limits_{\alpha} R_\alpha)$

$R_\omega$ $\omega \in R_\omega$ Zeby dodawac liczby naturalne potrzebujemy funkcji, czyli $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \in R_{\omega+3}$

Cos bylo o naturalnych, ale ja rysowalam patologie

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2 \setminus R$ - czyli to $\mathbb{N}$ na pewnej relacji.
Co to jest klasa abstrakcji? to jest podzbior $\mathbb{N}^2$. Gole calkowite saw $R_{\omega+5}$, a calkowite z dzialaniami algebraicznymi to gdzies w $R_{\omega+14}$
Jestesmy bardzo na pcozateczku, a $R_{\omega+\omega}$ to dopiero druga liczba graniczna i to mozna zrobic $R_{\omega+\omega} \models ZF \setminus aksjomazastepowania$