

Zad 1. Funkcja calkowalna w sensie Riemanna f rozni sie od funkcji g w jednym punkcie z przedzialu $[a, b]$. Pokazac, ze g jest calkowalna w sensie Riemanna i $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Niech $\rho \in [a, b]$ bedzie jedynym punktem takim, ze $f(\rho) \neq g(\rho)$. Rozwazmy dwa przypadki:

1. $\rho \in \{a, b\}$.

Wówczas, możemy zapisac przedzial $[a, b]$ jako sume przedzialow

$$[a, b] = [a, a+r] \cup [a+r, b-r] \cup [b-r, b]$$

dla pewnego $r > 0$. Poniewaz ρ jest pojedynczym punktem, możemy wybrac dowolnie male r , tak, ze otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &= \int_a^{a+r} g(x)dx + \int_{a+r}^{b-r} g(x)dx + \int_{b-r}^b g(x)dx = \\ &= \int_a^{a+r} g(x)dx + \int_{a+r}^{b-r} f(x)dx + \int_{b-r}^b g(x)dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 + \int_a^b f(x)dx + 0 = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

2. $\rho \in (a, b)$:

Ustalmy $r > 0$ takie, ze:

$$[a, b] = \left[a, \rho - \frac{r}{2} \right] \cup \left[\rho - \frac{r}{2}, \rho + \frac{r}{2} \right] \cup \left[\rho + \frac{r}{2}, b \right]$$

W takim razie możemy rozpisac calke

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{\rho - \frac{r}{2}} g(x)dx + \int_{\rho - \frac{r}{2}}^{\rho + \frac{r}{2}} g(x)dx + \int_{\rho + \frac{r}{2}}^b g(x)dx$$

Poniewaz funkcja g rozni sie od funkcji f tylko w punkcie ρ , to

$$\int_a^{\rho - \frac{r}{2}} g(x)dx = \int_a^{\rho - \frac{r}{2}} f(x)dx \quad \wedge \quad \int_{\rho + \frac{r}{2}}^b g(x)dx = \int_{\rho + \frac{r}{2}}^b f(x)dx.$$

W takim razie

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{\rho - \frac{r}{2}} f(x)dx + \int_{\rho - \frac{r}{2}}^{\rho + \frac{r}{2}} g(x)dx + \int_{\rho + \frac{r}{2}}^b f(x)dx.$$

W trakcie dzielenia $[a, b]$ na mniejsze przedzialy, punkt ρ znalazl sie w przedziale a poniewaz tylko jeden punkt ρ jest punktem gdzie te dwie funkcje sie rozni, możemy ograniczac przedzial na którym te funkcje sie rozni, czyli dla $\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &= \int_a^{\rho-0} g(x)dx + \int_{\rho-0}^{\rho+0} g(x)dx + \int_{\rho+0}^b g(x)dx = \\ &= \int_a^{\rho} g(x)dx + \int_{\rho}^{\rho} g(x)dx + \int_{\rho}^b g(x)dx = \\ &= \int_a^{\rho} f(x)dx + 0 + \int_{\rho}^b f(x)dx = \\ \int_a^b g(x)dx &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Zad 2. Funkcja calkowalna w sensie Riemanna f rozni siie od funkcji g w skonczenie wielu punktach przedzialu $[a, b]$. Pokazac, ze g jest calkowalna w sensie Riemanna i $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Można skorzystac z poprzedniego zadania.

Niech ρ_1, \dots, ρ_n beda wszystkimi punktami przedzialu $[a, b]$ na których funkcja g przyjmuje wartosci rozne od f . Możemy wiec podzielic $[a, b]$ na mniejsze przedzialy takie, ze:

$$[a, b] = [a, \rho_1] \cup [\rho_1, \rho_2] \cup \dots \cup [\rho_n, b]$$

Z pierwszego punktu poprzedniego zadania można latwo zauwazyc, ze suma calek $g(x)$ na kazdym z tych przedzialow jest rowna $\int_a^b f(x)dx$



Zad 3. Dla pewnego podziału P przedziału $[a, b]$ spełniony jest warunek $L(P, f) = U(P, f)$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że f jest całkowalna w sensie Riemanna.

TAK.

Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli

$$\sup_P L(P, f) = \inf_P U(P, f) = \int_a^b f(x) dx$$

Jeśli funkcja, która spełnia warunek $L(P, f) = U(P, f)$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna, to wówczas

1. Istnieje taki podział P_2 , że $L(P_2, f) > U(P_2, f)$, co szybko prowadzi do absurdu. Pole pod wykresem nie może być ograniczone od dołu przez liczbę większą niż od góry.

2. Istnieje taki podział P_2 , że $L(P_2, f) < U(P_2, f)$, ale wtedy $L(P, f) > L(P_2, f) \neq \sup_P L(P, f)$ oraz $U(P, f) > U(P_2, f) \neq \inf_P U(P, f)$. W takim razie albo

$$\sup_P L(P, f) = L(P, f) = U(P, f) = \inf_P U(P, f),$$

albo

$$\sup_P L(P, f) > L(P, f) = U(P, f) < \inf_P U(P, f),$$

co jest wypadkiem równoznacznym z 1.

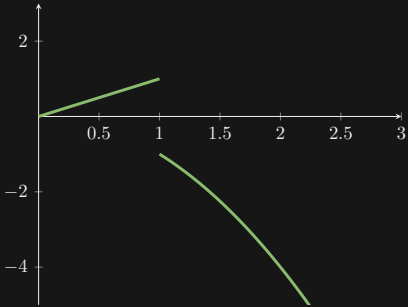


Zad 4. Funkcja f jest całkowala osobno na przedzialach $[a, c]$ i $[c, b]$. Pokazać, że f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$.

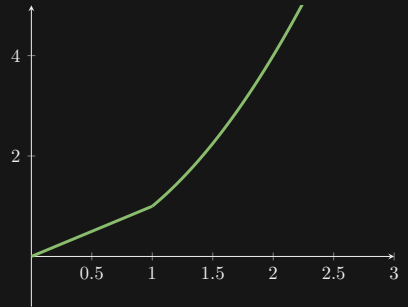
hyyyh ja z tego do tej pory korzystalam XD

Zad 5. Rozstrzygnij, czy dana funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna. Jeśli jest, to oblicz jej całkę po zadanym przedziale.

a. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



Ponieważ interesuje nas pole między wykresem funkcji a osią OX, to możemy odbić drugą część funkcji względem osi OX nie zmieniając wartości całki na rozważanym przedziale.



Zad 6. Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$. Używając definicji całki Riemanna uzasadnić, że dla ustalonego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $f_c(x) = f(x - c)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a + c, b + c]$ oraz $\int_a^b f(x)dx = \int_{c+a}^{c+b} f_c(x)dx$

Z definicji Riemanna wiemy, że na f zachodzi:

$$m(b-a) \leq \sup_P L(P, f) = \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(P, f) \leq M(b-a)$$

dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $m \leq f(x) \leq M$.
Przypusmy, że dla funkcji f_c oraz $x \in [a + c, b + c]$ i $m_c \leq f_c(x) \leq M_c$

$$m_c(b+c-a-c) \leq \sup_P L(P, f_c) \leq \inf_P U(P, f_c) \leq M_c(b+c-a-c),$$

czyli

$$m_c(b-a) \leq \sup_P L(P, f_c) \leq \inf_P U(P, f_c) \leq M_c(b-a). \quad (\text{☕})$$

Ponieważ $f_c(x) = f(x - c)$, to dla $x \in [c + a, c + b]$ f_c przyjmuje te same wartości co f , czyli możemy stwierdzić nierówność:

$$m = m_c \leq f_c(x) \leq M_c = M.$$

W takim razie nierówność (☕) możemy zapisać:

$$m(b-a) \leq \sup_P L(P, f_c) \leq \inf_P U(P, f_c) \leq M(b-a),$$

a ponieważ f_c na przedziale $[a + c, b + c]$ przyjmuje nie tylko największą i najmniejszą wartość taką samą jak f na $[a, b]$, ale też wszystkie inne wartości są takie same, to

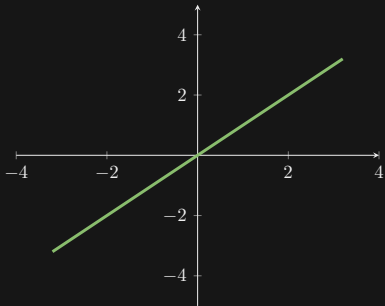
$$m(b-a) \leq \sup_P L(P, f_c) = \sup_P (P, f) = \inf_P U(P, f) = \inf_P U(P, f_c) \leq M(b-a),$$

tak więc

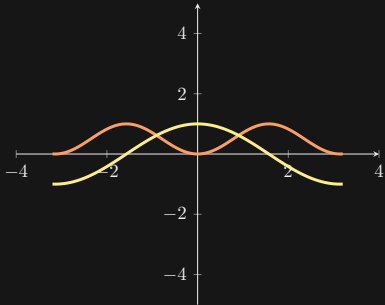
$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P (P, f) = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f_c) = \inf_P U(P, f_c) = \int_{a+c}^{b+c} f_c(x)dx$$

Zad 10. Oblicz całkę $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(x^3) \cos(x^3)dx$

Zastanówmy się jak wyglądają poszczególne czynniki całkowanej funkcji. Funkcja $f(x) = x$ jest nieparzysta:



Natomiast $\sin^2(x)$ oraz $\cos(x)$ są funkcjami parzystymi



W takim razie, funkcja $g(x) = x \sin^2(x^3) \cos(x^3)$ jest funkcją nieparzystą - jej całka na przedziale symetrycznym względem osi OY jest równa 0.

Zad 13. Obliczyc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \int_0^t (\arcsin(y))^2 dy =$$

Zad 14. Obliczyc calki stosujac calkowanie przez podstawianie.
Dla ulatwienia, podstawianie jest podane

a. $\int_0^1 2x(x^2 + 2)^{2022} dx, \quad u = x^2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x(x^2 + 2)^{2022} dx &= \int_0^1 u^{2022} du = \\ &= \left[\frac{1}{2023} u^{2023} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{(x^2 + 2)^{2023}}{2023} \right]_0^1 = \\ &= \frac{3^{2023}}{2023} \end{aligned}$$