NAUKA DODAWANIA

DODAWANIE I MNOZENIE LICZB POZADKOWYCH

Mozna do tego problemu podejsc na dwa sposoby. Na chwile obecna zajmiemy sie tylko jednym z nich, a potem dodamy drugi.

Niech α, β beda liczbami porzadkowymi

$$\alpha + \beta = ot\langle \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\},\ \leq\rangle \quad \langle \varphi, i\rangle \leq \langle \zeta, i\rangle \iff i < j \vee (i = j \wedge \varphi < \zeta)$$

czyli rozdzielamy α i β i dopiero dodajemy

$$\alpha \cdot \beta = ot\langle \beta \times \alpha, \leq_{lex}\rangle$$

czyli chcemy miec β kopii α. Niie wygodnie jest na tym patrzec jak na iloczyn liczb naturalnych, a lepiej jak na iloczyn kartezjanski

PRZYKLAD

$$ot\langle\{1 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}, \leq\rangle = \omega + \omega$$

$$ot\langle\{1 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \cup \{3\}\ :\ n \in \mathbb{N}\}, \leq\rangle = \omega + \omega + 1$$

$$ot\langle\{m - \frac{1}{n}\ :\ n, m \in \mathbb{N}\}, \leq\rangle = \omega \cdot \omega$$

Wlasnosci:

- jest laczne - fakt nietrywialny (dowod na cwiczonkach)
- nie jest przemienne - kolejnosc jest wazna
  - $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$
- mnozenie jest rozdzielne wzgledem dodawania

NASTEPNIKIEM liczby porzadkowej α nazywamy liczbe porzadkowa $\alpha \cup \{\alpha\}$ i oznaczamy $\alpha + 1$

liczbe porzadkowa β nazywamy nastepnikiem (lub nastepnikowa, $Succ(\beta)$) jesli $\beta = \alpha + 1$ dla pewnego α - l. porzadkowa - Z KONCEM

liczbe porzadkowa β nazywamy graniczna ($Lim(\beta)$), jesli nie jest nastepnikiem - BEZ KONCA

Najmniejsza liczba graniczna jest 0, wszystkie naturalne sa nastepnikami, najmniejsza niezerowa l. graniczna jest ω

TWIERDZENIE o indukcji PZOASKONCZONEJ. Niech $\phi(n)$ bedzie formula jezyka teorii mnogosci taka, ze

$$\forall\ \beta\ \forall\ \alpha < \beta \quad \phi(\alpha) \implies \phi(\beta)$$

Wtedy $\forall\ \alpha \quad \phi(\alpha)$.

DOWOD:

Jest prosty XD

Przypuscmy nie wprost, ze

$$\exists\ \alpha \quad \neg\ \phi(\alpha)$$

Wtedy zbior

$$C = \{\zeta \in \alpha \cup \{\alpha\}\ :\ \neg\ \phi(\zeta)\}$$

jest niepustym zbiorem liiczb porzadkowych. Wtedy w C jest element najmniejszy γ. Ale jego minimalnosc oznacza, ze wszystki ktore sa od niego mniejsze maja wlasnoci ϕ:

$$\forall\ \epsilon < \gamma \quad \phi(\epsilon)$$

Ale z zalozenia oznacza, ze $\phi(\gamma)$ i mamy sprzecznosc.

i smiga

Duzo czesciej mysli sie nie o zbiorze liczb porzadkowych, a o klasie liczb porzadkowej. W naszym swiecie klas nie ma, ale bedziemy ich uzywac, bo sa wygodne.
Jelsi $\psi(x)$ to formula jezyka teorii mnogosci, to klasa jest zbior elementow spelniajacych te wlasnosc

$$K = \{x\ :\ \psi(x)\}$$

Na przyklad $ON = \{x\ :\ On(x)\}$. Stwierdzenie, ze x jest elementem klasy to napisanie, ze $\phi(x)$.

1. krok bazowy
2. krok indukcyjny
   -krok nastepnikowy
   -krok graniczny

TWIERDZENIE O REKURSJI POZASKONCZONEJ

roznie sie od twierdzenia o indkucji istota - indukcja jest dla dowodow, a rekursja dla konstrukcji

Niech $\psi(x, y)$ bedzie formuula jezyka teorii mnogosci taka, ze

$$\forall\, x\ \exists! y \quad \psi(x, y)$$

Wowczasdla kazdej liczby porzadkoweej $\alpha \in ON$ istnieje funckja taka, ze

$$\mathtt{dom}(f) = \alpha$$

i spelniony jest warunek

$$\forall\, \beta < \alpha \quad \psi(f \upharpoonright \beta, f(\beta)) \quad ☕$$

Chcemy teraz utworzyc pozaskonczony ciag indeksowany liczbami porzadkowymi. Tn warunek w nawiasie mowi, ze majac cos wyznaczone do tej pory, to nastepny krok wynika z tego co juz jest.

DOWOD:

JEDYNOSC

Przypuscmy, ze dla pewnego α istnieja dwiie rozne funckje f_1, f_2 o dziedzinie α spelniajace (☕). Wtedy dla zbioru

$$\{\beta \in \alpha\ :\ f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\} \neq \emptyset$$

i niech β_0 jest najmniejszym elementem punktow, gdzie f_1, f_2 sie roznia. Ale wtedy dla $\varepsilon < \beta_0$ mamy

$$f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon),$$

czyli $f_1 \upharpoonright \beta_0 = f_2 \upharpoonright \beta_0$, czyli z (☕) i funkcyjnosci ψ $f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0)$ co daje nam sprzecznosc.

ISTNIENIE

Czyli polecimy indukcja po α.

1. $\alpha = 0$ OK <3
2. Krok indukcyjny

Ustalmy α takie, ze dla $\gamma < \alpha$ itnieje funkcja taka, ze $\mathtt{dom}(f)_\gamma = \gamma$ i spelnia (☕). Mamy dwie mozliwosci:

1. $\alpha = \beta + 1$. Wtedy istnieje f_β jak powyzej. Wiemy, ze istnieje dokladnie jedno y takie, ze zachodzi $\psi(f_\beta, y)$. Niech $f_\alpha = f_\beta \cup \{\langle\beta, y\rangle\}$. Wtedy $\mathtt{fnc}(f)_\alpha$ oraz $\mathtt{dom}(f)_\alpha = \mathtt{dom}(f)_\beta \cup \{\beta\} = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1 = \alpha$. Wystarczy pokazac, ze f_α spelnia (☕). Trzeba ustalic jakies $\eta < \alpha = \beta + 1$. Wiec jesli $\eta < \beta$, to $f_\alpha \upharpoonright \eta = f_\beta \upharpoonright \eta$ oraz $f_\alpha(\eta) = f_\beta(\eta)$. Czyli OK z zalozenia indukcyjnego dla β. A jesli $\eta = \beta$, to mamy $\psi(f_\alpha \upharpoonright \beta, f_\alpha(\beta))$, bo $f_\alpha(\beta) = y$. czyli znowu OK
2. $Lim(\alpha)$.

FAKT: $Lim(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha$. udowodniony na ciwczonkach JA NIE WIEEEEEM, CHCE SPAAAAC MUSZE SKONCZYC TEN DOWOD BO ODPLYNELAM

JAKAS KONSTRUKCJA NA KONIEC

Inne dodawanie i mnozenie - zdefiniowane rekurencyjnie a nie przez typy porzadkowa

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$

$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\zeta < \gamma} (\alpha + \zeta),\ gdy\ Lim(\gamma)$$

mnozenie

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \beta$$

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\zeta < \gamma} (\alpha \cdot \zeta),\ gdy\ Lim(\gamma)$$

teraz trzeba udowodnicz, ze to jest to samo dodawanie i mnozenie - dowod jest indkcyjny ZASTANOWIC SIE, JAK DZIALA TA DEFINICJA REKURENCYJNA