Lista 1 - Topologia 2022

Zad. 1 Opisz, jak wyglądają ciągi zbieżne w kostce Cantora.

Zad. 2 Pokaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}$).

Zad. 3 Udowodnij, że ciąg (x_n) punktów płaszczyzny jest zbieżny do x w normie euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w normie maksimum.

Zad. 4 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ są otwarte, a $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ są domknięte.

Zad. 5 Uzasadnij, że nie istnieje ciąg (x_n) elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny w metryce euklidesowej (na $\mathbb{R}^2$), ale nie jest w metryce centrum.

Zad. 6 Sprawdź, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) sfera, a więc zbiór postaci $\{y \in X\colon d(x, y) = r\}$ (dla ustalonego $x \in X$ i $r > 0$) jest zbiorem domkniętym. Pokaż, we $\overline{B_r(x)} \subseteq \{y\colon d(x, y) \leq r\}$, ale niekoniecznie musi zachodzić przeciwna inkluzja.

Zad. 7 Wykaż, że zbieżność jednostajna ciągu funkcji ciągłych na $[0, 1]$ jest równoważna zbieżności w metryce supremum w $C[0, 1]$. (Ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in [0, 1] \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.)$$

Zad. 8 Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla każdego $A, B \subseteq X$ zachodzą równości i inkluzje (w przypadku inkluzji pokaż, że nie muszą zachodzić inkluzje odwrotne):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= (\operatorname{Int}(A^c))^c & \qquad \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} &\subseteq \overline{A} \cap \overline{B}, & \overline{\overline{A}} &= \overline{A}, \\ \operatorname{Bd}(A \cup B) &= \operatorname{Bd}(A) \cup \operatorname{Bd}(B) & \operatorname{Bd}(A) &= \operatorname{Bd}(X \setminus A). \end{aligned}$$

Zad. 9 Znajdź wnętrze, domknięcie (i brzeg) następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ z normą euklidesową.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad \{\langle x, y\rangle\colon x^2 + y^2 = 1\}, \quad \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad \{\langle x, y\rangle\colon y = 2x\}, \quad \{\langle x, y\rangle \in (0, \infty)^2\colon y = \sin 1/x\}$$

Powtórz polecanie dla normy maksimum i metryki centrum.

Zad. 10 Pokaż, że w kostce Cantora wszystkie trójkąty są równoramienne.

Zad. 11 Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$ taka, że $[0, 1] \times [0, 1]$ jest kulą (w tej metryce)?

Zad. 12 Niech X będzie przestrzenią liniową. *Normą* na X nazywamy funkcję, która uogólnia pojęcie długości wektora w analogiczny sposób, w jaki metryka uogólnia pojęcie odległości punktów. Spróbuj sformalizować tę definicję. Pokaż, że każda norma generuje w naturalny sposób metrykę, ale nie każda metryka (określona na przestrzeni liniowej) może zostać wygenerowana przez normę.

Zadania rekreacyjne i problemy

Zad. 13 Metrykę można definiować na każdym zbiorze, w ostateczności dyskretną... Spróbuj wymyślić jakieś *niedyskretne* metryki (lub pseudometryki, patrz niżej) na X, jeżeli X jest ...

- pewnym grafem spójnym skończonym,
- pewnym grafem spójnym nieskończonym,
- pewnym grafem niespójnym,
- zbiorem słów w języku polskim,
- rodziną wszystkich wielokątów na płaszczyźnie,
- pewną rodziną przestrzeni metrycznych (czemu nie?).

Pseudometryka jest funkcją, która spełnia wszystkie warunki metryki poza tym, że mogą się zdarzyć różne punkty x, y takie, że $d(x, y) = 0$.

Zad. 14 W przestrzeniach metrycznych można zdefiniować prostą (jako zbiór tych punktów, które są równoodległe od dwóch ustalonych punktów). Proste nie muszą wyglądać jak „proste“ (patrz np. metryka dyskretna). Jak wyglądają proste w normie miejskiej? Maksimum? Jak wygląda prosta w przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką supremum? Jakie inne geometryczne obiekty znane z przestrzeni euklidesowych potrafisz uogólnić na inne przestrzenie metryczne? A jakich się nie da?