Lista 5, Analiza Matematyczna II

1. Wykorzystując wzór Stirlinga, oszacować prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie n orłów w $2n$ rzutach monetą w terminach $n \in \mathbb{N}$. Ile w przybliżeniu wynosi to prawdopodobieństwo dla $n = 100$ i $n = 10000$?
2. Wykorzystując wzór Stirlinga oszacować liczbę cyfr liczby 100!
3. Wykorzystując oszacowania wykorzystane w dowodzie wzoru Stirlina na wykładzie wyznaczyć liczbę cyfr liczb 100! i 1000!
4. Wiadomo, że dla parzystego n objętość n-wymiarowej kuli wynosi $V_n = \pi^{n/2}/(n/2)!$. Sprawdzić ten wzór dla $n = 2$ i udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$.
5. Udowodnić, że
$$\lim_{n\to\infty} 1 \cdot \cdot 3 \cdot 7 \ldots (2n-1) \left(\frac{e}{2n}\right)^n = \sqrt{2}.$$
6. Znaleźć promienie zbieżności szeregów potęgowych
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{n} \pi^{2n} x^{5n+1}$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} n^n x^{n^2}$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} e^{n^2} x^{n!+n}$.
7. Oszacować całki w oparciu o twierdzenie o wartości średniej:
   8. $42e^4 \leq \int_2^5 (x^2+1)e^{x^2}\, dx \leq 42e^{25}$,
   9. $\left|\int_{2\pi}^{1000\pi} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx\right| \frac{2}{4\pi^2+1}$,
   10. $\left|\int_{1}^{2000} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\, dx\right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi^2+\pi^4}}$.
11. Funkcja f jest całkowalna, ϕ jest wypukła na przedziale $[a, b]$. Udowodnić następującą nierówność Jensena.
$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))\, dx.$$
12. Używając poprzedniego zadania udowodnić następujące oszacowania (w szczególności, trzeba sprawdzić założenia).
   a) $e^{1/3} \leq \int_0^1 e^{x^2}\, dx$,
   b) $\exp(\int_0^1 \log(f(x)))\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx$,
   c) $\frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{2}} \geq \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(x^3)\, dx$,
13. Udowodnić, że $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, dx > 0$.
14. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, \pi]$ wykazać równość
$$\int_0^{\pi} x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin(x))\, dx.$$