Lista 4, Analiza Matematyczna II

1. Nie wykonując zbędnych obliczeń uzasadnij, że

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)^2\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(x)^2\,dx = \pi.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos(x))\,dx.$$

3. Stosując całkowanie przez części wyznaczyć następujące całki:

a) $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$,
b) $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$,
c) $\int_1^2 x\log(x)\,dx$,
d) $\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx$.

4. Wyznaczyć następującą całkę nieoznaczoną:

$$\int \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,dx.$$

5. Niech $f_1(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$ i niech $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$. Wyznaczyć

$$\int_0^{10} f_5(x)\,dx.$$

6. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\,dx.$$

[1]

7. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $f(t) = \int_{\log(t)}^{e^{-t}} \cos(u^2)\,du$,
b) $f(x) = \int_{-x^2}^{x^4} \sqrt{1+y^2}\,dy$.

8. Funkcja f jest dodatnia i ciągła dla $x \geq 0$. Udowodnić, że funkcja

$$g(x) = \left(\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1} \left(\int_0^x y f(y)\,dy\right)$$

jest rosnąca. [2]

9. Obliczyć następujące granice przy użyciu reguły d'Hopitala:

a) $\lim_{t\to\infty} \left(\int_0^t e^{2x^2}\,dx\right)^{-1} \left(\int_0^t e^{x^2}\,dx\right)^2$,
b) $\lim_{x\to\infty} \left(2xe^{x^2}\right) \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

---

[1] *Wskazówka:* Podzielić przedział całkowania na dwie połówki i w jednej z całek podstawić $x = t - \pi$.
[2] *Wskazówka:* Obliczyć pochodną ilorazu i zapisać licznik pod jedną całką.

10. Dla funkcji f, g całkowalnych na odcinku $[a, b]$ udowodnić następującą nierówność:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

[3]

11. W zależności od $n, m \in \mathbb{Z}$ obliczyć całki:

a) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx$,

b) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$ i $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$.

12. Wyrazić I_n przez I_{n-1} i/lub I_{n-2}:

a) $I_n = \int \frac{1}{(x^2+4)^n}\,dx$,

b) $I_n = \int x^n e^x\,dx$,

c) $I_n = \int x^n \sin(x)\,dx$,

d) $I_n = \int (\log x)^n\,dx$.

[3] *Wskazówka:* Jedna z możliwości to sprytne użycie elementarnych nierówności średnich.