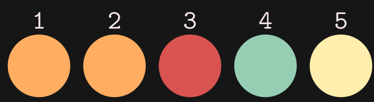
ZBIORY Z POWTORZENIAMI

Wezmy piec kulek:

Chcemy policzyc ile jest permutacji piecioelementowego zbioru, w ktorym jeden element powtarza sie dwa razy, ale powtorzenia sie miedzy soba nierozroznialne? Podpiszmy kolejne kule cyframi:



Wowczas, rozmiescic je mozemy na $5!$ sposobow. Wiemy jednak, ze dwie czerwone kule sa dla nas nierozroznialne, wiec mozemy je miedzy soba przestawiac dowoli - mamy $\frac{5!}{2!}$ sposobow ustawienia tych kul.

ZBIOR Z POWTORZENIAMI bedziemy zapisywac jako:

$$A = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, ..., n_k \cdot a_k\},$$

gdzie $n_1, n_2, ..., n_k$ to powtorzenia elementow odpowiednio $a_1, a_2, ..., a_k$.

Zastanowmy sie, na ile jest permutacji zbioru

$$A = \{2 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot c\}?$$

Jesli takie same elementy byly rozroznialne, byloby $9!$ permutacji takiego zbioru. Jednak jednakowe elementy sa nierozroznialne, wiec liczba permutacji to:

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$$

DUZA CUKIERNIA

Przychodzimy do cukierni, ktora sprzedaje paczki, eklerki, serniki i makowce. Cukiernia jest duza, wiec nie ma ograniczen co do ilosci kazdego produktu. My chcemy kupic 6 ciastek i zastanawiamy sie, na ile sposobow mozemy to zrobic?

Rownowaznie mozemy to zapisac jako pytanie ile rozwiazan calkowitych nieujemnych ma rownanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6?$$

Wyobrazmy sobie, ze w naszym tobolku na ciastka mamy 6 przegrodek:

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad = 6$$

Zakodujemy nasz sposob zakupu wstawiajac w ten ciag 0, czyli 3 paczki, dwie eklerki i jeden sernik to:

$$1 \quad 1 \quad 1^0 \quad 1 \quad 1^0 \quad 1^0$$

W takim razie liczba sposob na jaki mozemy kupic 6 ciastek to liczba sposobow na jakie mozemy ustawic 3 zera i 6 jedynek:

$$p = \frac{9!}{3! \cdot 6!}$$

Ze zbioru A zawierajacego m roznych elementow mozemy wybrac k elementow z powtorzeniami na

$$\binom{m-1+k}{k} = \frac{(m-1+k)!}{k! \cdot (m-1)!}$$

sposobow i jest to liczba rozwiazan rownania

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

w nieujemnych liczbach calkowitych $x_1, x_2, ..., x_m$

ZASADA WLACZEN I WYLACZEN

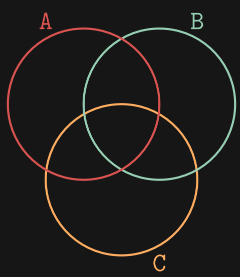
Dla dwoch zbiorow skonczonych zachodzi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A| + |B| = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| + |B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

Ile jest liczb $1 \leq n \leq 100$ podzielnych przez 2 lub podzielnych przez 3?
Liczb podzielnych przez 2 mamy $\lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50$, liczb podzielnych przez dwa mamy $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$. Ale w obu tych zbiorach znajduja sie liczby podzielne i przez 2 i przez 3, czyli podzielne przez 6. Musimy wiec odjac jedno ich powtorzenie, czyli $\lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$.
Jest $50 + 33 - 16 = 67$ liczb podzielnych przez 2 lub przez 3.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$



dowod na cwiczeniach

Dla dowolnych zbiorow skonczonych $A_1, ..., A_n$ zachodzi wzor

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Dowod:
Wezmy dowolny element nalezacy do dowolnego ze zbiorow:

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

Niech teraz k bedzie iloscia tych zbiorow, w ktorych x sie pojawia. Zastanawiamy sie teraz, ile razy x bedzie liczony po prawej stronie?

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}$$

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1$$

$$0 = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = (1 + (-1))^k = 0^k$$

bardziej formalnym dowodem jest dowod przez indukcje

MALA CUKIERNIA

Ile jest 11-kombinacji ze zbioru $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$?

Nie pytajmy sie ile wezmiemy do naszego zbioru, a ile zostanie? Tutaj mamy 12 elemntow i zostaje nam zawsze 1 - mozemy wyrzucic $a, b,$ lub c. W takim razie odpowiedz to 3.

Ile jest 10-kombinacji ze zbioru $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$?

Tyle samo, ile jest 2-kombinacji z tego zbioru, czyli $\binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$.

PRZYKLAD TYPOWY Ile jest 10-kombinacji ze zbioru $X = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c, 6 \cdot d\}$?

Najpierw zastanawiamy sie, co by bylo gdyby to byla duza cukiernia? Wedlug poprzedniego schematu mamy $\binom{13}{10}$. Teraz musimy pozbyc sie tych kombinacji, ktore sa niemozliwe ze wzgledu na ilosc poszczegolnych elementow. Kombinacjami zlymi sa:
$Z(a)$ - zle kombinacje, w ktorych a pojawia sie ≥ 4

$Z(b)$ - zle kombinacje, w ktorych b pojawia sie ≥ 5
$Z(c)$ - zle kombinacje, w ktorych c pojawia sie ≥ 6
$Z(d)$ - zle kombinacje, w ktorych d pojawia sie ≥ 7

$$\binom{13}{10} - |Z(a) \cup Z(b) \cup Z(c) \cup Z(d)|$$

Teraz musimy policzyc moc sumy zbiorow zawierajacych zle kombinacje. Do tego potrzebne sa nam moce poszczegolnych zbiorow:
$|Z(a)| = \binom{9}{6}$ czyli liczba 6-kombinacji ze zbioru $D = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$, bo moge max 4 razy wybrac a, wiec zeby to byla zla kombinacja, na pozostalych miejscach tez musi sie pojawic co najmniej jedno a
$|Z(b)| = \binom{8}{5}$, natomiast $|Z(a) \cap Z(b)| = 4$.