TOPOLOGIA

notatki

Spis treści

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazyway funkcję

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x,x) = 0 \wedge d(x,y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall\, x, y)\ d(x,y) = d(y,x)$ - symetria
3. $(\forall\, x, y, z)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ - warunek $\triangle$

METRYKI EUKLIDESOWE:

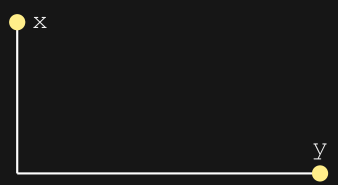
$\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x - y|$

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \ldots + (x(n-1) + y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

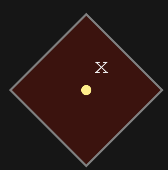
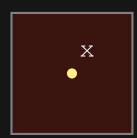
$\mathbb{R}^2$: $d(x,y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

$\mathbb{R}$, m. euklidesowa:	$\mathbb{R}^2$, m. euklidesowa	$\mathbb{R}^2$, m. miasto	$\mathbb{R}^2$, m. maksimum
			
$\mathbb{R}^2$, m. centrum		$C[0,1]$, m. supremum	$C[0,1]$, m. całkowa
narysję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N)\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie szystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall\, i < m)\ x_n(i) \to x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretnej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{sup}} f \iff (f_n) \rightrightarrows f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, jeśli na każdym punkcie
ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

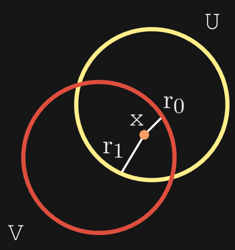
$$(\forall\, z \in U)(\exists\, r > 0)\ B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V, których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowlnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists\, r_0 > 0)\ B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists\, r_1 > 0)\ B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będa zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga

DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists\, U \in \mathcal{U})\; x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x. Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisac kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga

U jest zbiorem otwartym $\iff$ U jest sumą kul.

DOWOD:

$\Longleftarrow$ wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Longrightarrow$
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall\, x \in U)(\exists\, r_x > 0)\; B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U, suma ta nie może być większa niż U. Zawierają się w niej wszystkie punkty z U, więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga

1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c. Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegac do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists\, r > 0)\; B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U, co jest sprzeczen z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c.

i smiga

2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

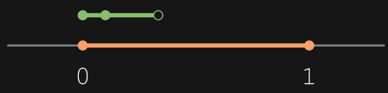
2.1 PODPRZESTRZEŃ

POPDRZESTRZEŃ (X, d) to (A, d), $A \subseteq X$

formalnie (A, d) *nie jest przestrzenią metryczna - musimy obciąć* $d_{\restriction A \times A}$

PRZYKŁAD:

Dana jest prosta $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. Rozważmy na niej zbiór $[0, 1]$. Jednym ze zbiorów w tej podprzestrzeni jest:



Ponieważ dla podprzestrzeni $[0, 1]$ nie istnieją punkty mniejsze niż 0, to ten zbiór jest otwartą kulą.

Na $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum wybieramy okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, 0)$. Taka podprzestrzeń jest bardzo podobna do przestrzeni dyskretnej - każde dwa różne punkty są oddalone od siebie o dokładnie 1.

Funkcja z jednej przestrzeni metrycznej (X, d) w inną przestrzeń metryczna (Y, ρ):

$$f : X \to Y$$

jest ciągła, jeśli

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, y)\ d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dodatkowo, wówczas równoważne są warunki:

1. f jest funkcją ciągłą
2. (x_n) - ciąg z X taki, że $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$ (zbieżność wg. Heinego - ciąg wartści zbiega do wartości granicy)
3. $f^{-1}[U]$ jest otwarty dla każdego otwartego $U \subseteq Y$

DOWOD:

Pokażemy implikację $3 \implies 1$

Dana jest funkcja

$$f : X \to Y$$

Weźmy kulę $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$. Ponieważ jest zbiorem otwartym, to z założenia 3

$$(\exists\, U \underset{\text{otw}}{\subseteq} X)\ f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))] = U.$$

Z definicji zbioru otwartego wiemy, że na dowolnym punkcie U możemy opisać kulę

$$(\exists\, \delta > 0)\ B_\delta(x) \subseteq U$$

Dla $y \in B_\delta(x)$

$$d(x, y) < \delta.$$

Natomiast

$$f(y) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$

czyli $d(x, y) < \delta$ oraz $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

i smiga

2.2 HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM $(X \cong Y)$ nazywamy taką funkcję $f : (X, d) \to (Y, \rho)$, która:

1. f jest ciągłą bijekcją
2. f^{-1} jest ciągła

PRZYKŁADY:

$[0,1] \cong [0,2]$ dla funkcji np. $f(x) = 2x$
$(\mathbb{R}^2, d_{euk}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{miast})$ dla funkcji $f(x,y) = \langle x, y\rangle$

(X, d) - dowolna przestrzeń metryczna. Rozważmy poniższą metrykę:

$$d'(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Wtedy $(X, d) \cong (X, d')$. Możemy zmieniać zakres punktów, które wyrzucamy i to nie wpływa na istnienie homeomorfizmu.

2.3 TOPOLOGIA

TOPOLOGIĄ na zbiorze X nazywamy
rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że
$\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$
jest zamknięta na skończone przekeroje
jest zamknięta na dowolne sumy

Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to topologią jest rodzina zbiorów otwartych, która spełnia warunki topologii.

$(X, \mathcal{U})$ to przestrzeń topologiczna

Dla pewnego zbieżnego ciągu elementów X $\lim x_n = x$. Korzystając z pojęcia *przestrzeni topologiicznych*, zbieżność można zdefiniować:

$$(\forall\, U \in \mathcal{U})\; x \in U \implies (\exists\, N)(\forall\, n > N)\; x_n \in U$$

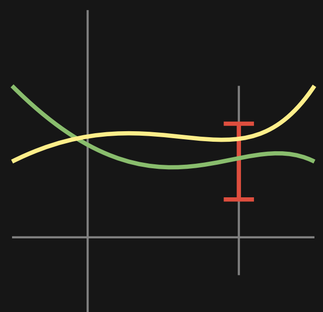
Przestrzeń topologiczna jest PRZESTRZENIĄ HANSDORFA, jeżeli
$(\forall\, x \neq y \in X)(\exists\, U, V)\; (x \in U \wedge y \in V) \;\wedge\; U \cap V = \emptyset$

Czyli dla dowolnych dwóch punktów mogę znaleźć dwa rozłączne zbiory otwarte

$C[0,1]$ - funkcje ciągłe na odcinku $[0,1]$. Weźmy I, przedział otwarty na $\mathbb{R}$. Niech $x \in [0,1]$ oraz

$$A_x^I = \{f \in C[0,1] \;:\; f(x) \in I\}.$$

Czyli wybieramy x i stawiamy n nim bramkę równą I. Do zbioru A_x^I będą należeć wszystkie fnkcje, które przez tę bramkę przejdą.



Rozważmy zbiory postaci $A_{x_0}^{I_0} \cap \ldots \cap A_{x_n}^{I_n}$. Z sum takich zbiorów tworzę rodzinę $\mathcal{U}$, która jest topologią na $[0,1]$.

Przyjrzymy się ciągom zbieżnym w tej topologii.

$$f_n \to f \implies (\forall\, x \in [0,1])\; f_n(x) \stackrel{\text{euk}}{\to} f(x)$$

Wiemy, że f_n jest zbieżne, ale czemu $f_n(x)$ miałoby być zbieżne?

DOWOD:

Dla pewnego $\varepsilon > 0$ i przedziału
$$I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$
mamy:
$$(\exists\, N)(\forall\, n > N)\; f_n \in A_x^I.$$
Ponieważ $f(x)$ jest środkiem naszego przedziału i $f_n \to f$, to $f \in A_x^I$. Pokazaliśmy więc, że
$$(\forall\, n > N)\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa się topologią zbieiżności punktowej.

i smiga

2.4 BAZA

BAZA dla topologii to taka
rodzina zbiorów otwartych,
że każdy niepsty i otwarty podzbiór tej
przestrzeni można wysumować przy
pomocy pewnych elementów bazy

2.5 TOPOLOGIA STRZAŁKI

Rozważamy zbiory w $\mathbb{R}$
$$B = \{[a,b) \;:\; a < b\},$$
które są otwarte (owarto-domknięte)

Topologia strzałki jest bogarsza niż topoologia euklidesowa - każdy otwarty zbiórw sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie topologii strałki. W dodatku jest to przestrzeń Handsdorffa.

Ciągi zbieżne w strzałce to
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0,$$
ale już $\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest ciągiem zbieżnym w strzałce, bo wszystkie jego wyrazy są poza badanym przedziałem.

Strzałka nie jest metryzowalna.

2.6 UZWARCENIE ALEKSANDROWA na $\mathbb{R}$

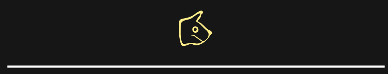
aka przestrzeń z gruszką

PRZESTRZEŃ ZWARTA - przestrzeń topologiczna,
że z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi
można wybrać pokrycie skończone

UZWARCENIE - rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by była ona przestrzenia zwartą.

OTOCZENIE - dowolny zbiór, który zawiera zbiór otwarty zawierający dany punkt.

PRZESTRZEŃ Z GRUSZKĄ



Mamy $\mathbb{R}$ i jakieś . Otoczenia wszystkich liczb $\mathbb{R}$ to

$$r : \{r\},$$

czyli singletony liczb rzeczywistych są tutaj otwarte. Otoczeniem są z kolei

$$: \{\} \cup A,$$

takie, że $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \setminus A$ jest skończony.

Topologię w uzwarceniu Aleksandrowa można zdefiniować w dowolny sposób, musi tylko jasno wynikać, co jest zbiorem otwartym, a co zamkniętym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenią Hansdorffa

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to$$

ponieważ tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie . W takim razie możemy powiedzieć, że jeśli mamy dowolny (x_n) różnowartościowy, to

$$\lim x_n = ,$$

bo $\in U$, gdzie U jest zbiorem otwartym i istnieje skończenie wiele n takich, że $x_n \notin U$.

2.7 PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA

Zbiór $A \subseteq X$ jest ZBIOREM GĘSTYM, jeżeli

$$(\forall \underset{\text{otw}}{U \neq \emptyset})\ U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

jest to zbiór otwarty, kóry kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń X jest OŚRODKOWA, jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

PRZYKŁADY:

$\mathbb{R}$ z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^2$ z metryką miasto: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ bo zbiory otwarte w metryce miasto są takie same jak w euklidesowej

kostka Cantora ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$): ciągi stałe od pewnego miejsca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) - jest ich przeliczalnie wiele i jest to zbiór gęsty.

ANTYPRZYKŁAD:

$\mathbb{R}^2$ z metryką dyskretną: zbiór gęsty A musi się kroić niepusto z każdym singletonem, więc

$$(\forall\, x) A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$ z metryką centrum: intuicja podpowiada, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ale jeśli kula leży na prostej o wyrazach niewymiernych, np $y = \pi x$, to kroi się pusto z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

W przestrzeni metrycznej (X, d) zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty $\iff$ dla każdej kuli $B_r(x)$ istnieje $a \in A$ bliżej x niż kula

A - zb. gęsty $\iff (\forall\, x \in X)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, a \in A)\; d(x, a) < \varepsilon$

DOWOD:

$\implies$

Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gęstego A i przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje kula o promieniu ε i środku $x \in X$ taka, że nie zawiera elementów z A:

$$(\exists\, x)\; B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie A tnie się pusto ze zbiorem otwartym $B_\varepsilon(x)$, więc nie jest zbiorem gęstym.

$\impliedby$

Niech U będzie zbiorem otwartym

$$U \in X,$$

czyli możemy założyć, że istnieje kula:

$$(\exists\, B_r(x))\; B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula $B_r(x)$ zawiera się w otwartym zbiorze U, więcistnieje w U punkt, który leży w tej kuli:

$$(\exists\, u \in U)\; d(x, u) < r,$$

a więc kula tnie się niepusto ze zbiorem U:

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

i smiga

Jeśli istnieje $f : X \to Y$, która jest ciągła i na, to jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową, to Y też jest przestrzenią ośrodkową

Ośrodkowość przenosi się przez ciągłe suriekcje

DOWOD:

Chcemy zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w Y mając tylko $f : X \to Y$.

Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem gęstym. Rozważmy obraz A przez funkcję f:

$$B = f[A].$$

Ponieważ B jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciągłą suriekcję, to on też jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowodnić, że jest to zbiór gęsty.

Weźmy dowolny zbiór otwarty w Y:

$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} Y.$$

Wtedy $f^{-1}[U] \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, ponieważ f jest ciągłe i na. W takim razie, zbiorem gęstym w Y jest $f[A]$:

$$(\exists\, a \in A)\; a \in f^{-1}[U] \wedge f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

i smiga

3 ZBIÓR CANTORA

$$C \subseteq [0,1]$$

Zbiór Cantora, C, jest przekrojem zbiorów domkniętych, więc sam też jest zbiorem domkniętym. Zbiór Cantora jest homeomorficzny z kostką Cantora

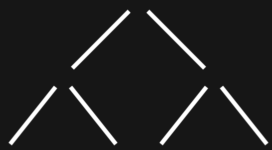
$$C \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Zdefiniujmu odpowiednią funkcję:

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$$

Niech s będzie skończonym ciągiem 0, 1. Wóczas C to ciąg, który w zbiorze Cantora przyjmuje lewy lub prawy podzbiór poprzedniego zbioru w zależności od tego, czy pojawia się 0 czy 1:

$$f(x) = y \quad \bigcap D_s = \{y\}$$



4 KOSTKA HILBERTA $[0,1]^{\mathbb{N}}$

METRYKA NA KOSTCE HILBERTA:

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$C^{(a,b)} = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \, : \, x(n) \in (a,b)\}$ - wszystkie ciągi z kostki Hilberta, które na n współrzędnej spełniają pewne wymagania. Można to wyobrazić sobie jako bramki ustawione na odpowiedniej n i tylko ciągi, które przechodzą przez nią należą do $C_n^{(a,b)}$.

Skończone przekroje zbiorów postaci $C_n^{(a,b)}$ stanowią bazę $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

DOWOD:

Pokażemy, że baza $\mathcal{B}$ topologii to suma pewnych jej elementów:

$$(\forall\, x)(\forall\, U \underset{otw}{\ni} x)(\exists\, B \in \mathcal{B})\; x \in B \subseteq U$$

W przypadku przestrzeni metrycznej nie musimy brać każdego zbioru otwartego z osobna, bo wiemy, że wszystkie zbioru otwarte są sumą kul, a zbiór kul jest bazą przestrzeni metrycznych.

$$(\forall\, x \in [0,1]^{\mathbb{N}})(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Weźmy dowolny punkt $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ oraz dowolny $\varepsilon > 0$. Chcemy ustawić na x bramkę tak, żeby nasz ciąg przez niego przeszedł oraz żeby ta bramka na pewno była w kuli.

W kostce Hilberta musimy ociąć ogony (nieskończone rozwinięcia zamienić na rozwinięcia od pewnego momentu zawierające tylko 0):

$$(\exists\, N \in \mathbb{N}) \sum_{k > N} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech dla każdego $n \leq N$

$$I_n = (x(n) - \frac{\varepsilon}{4},\ x(n) + \frac{\varepsilon}{4}),$$

czyli na kolejnych miejscach ustawiamy bramki o średnicy $\frac{\varepsilon}{2}$. Ich przekrój to

$$x \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}.$$

Weźmy dowolny $y \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$. Jego odległość od x to

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} = \sum_{n \leq N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n > N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} < \varepsilon$$

Czyli każdy punkt w przekroju należy do kuli $B_\varepsilon(x)$.

i smiga

WNIOSKI:

1. $\{0, 1^{\mathbb{N}}\}$ jest podrzestrzenią $[0,1]^{\mathbb{N}}$, bo kulami są przekroje $\bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$ - ustawiamy bramki na prefiiksach
2. Topologia na $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jest topologią zbieżnośći punktowej: ciąg zbiega w kostce Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi jego współrzędnych zbiegają w $\mathbb{R}$.

Niech X będzie przestrzenią metryczną i ośrodkową. Wtedy
$(\exists\ Y \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}})\ X \cong Y$

DOWOD:

Ponieważ X jest przestrzenią ośrodkową, to istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty, który kroi się niepusto ze wszystkimi zbiorami otwartymi:

$$(\exists\ D = \{d_1, ..., d_n\})\ D \subseteq Y$$

Zdefiniujmy funkcję

$$h : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$$

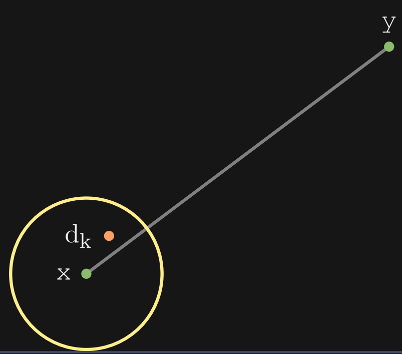
$$h(x) = \langle d(x,d_1), d(x,d_2), ..., d(x,d_n) \rangle,$$

która liczy kolejno odległości x od elementów zbioru gęstego w X.

Ponieważ działamy w przestrzeni metrycznej, to korzystając z twierdzenia wcześniej, możemy określić metrykę taką, że

$$(\forall\ x,y \in X)\ d(x,y) \leq 1$$

Funkcja h jest różnowartościowa, ponieważ dla każdych dwóch punktów możemy znaleźć kulę w której odległości od elementu zbioru bazowego do x i do y będą różne:



$$d(x, d_k) < d(y, d_k)$$

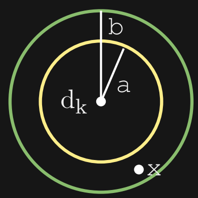
Funkcja h nie musi być na – jeśli tak by było, to każda przestrzeń metryczna byłaby homeomorficzna z kostką Hilberta. Wystarczy, że pokażeby $Y = h[X]$.

Pokażemy, że h i h^{-1} są ciągłe. Przyjrzyjmy się przeciwobrazom zbiorów bazowych

$$h^{-1}[C_n^{(a,b)}].$$

Jeżeli są one otwarte, to również skończone przekroje takich zbiorów są otwarte.

$$C_n^{(a,b)} = \{x \in X \ : \ d(x, d_k) \in (a, b)\}$$



DOKONCZYC DOWOD

5 ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ

5.1 PRZESTRZEŃ ZWARTA

POKRYCIE – rodzina zbiorów otwartych
sumująca się do X

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

Przestrzeń topologiczna X jest ZWARTA,
gdy z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone.

$(0, 1)$ w metryce euklidesowej nie jest zbiorem zwartym. Kontrprzykładem są coraz to mniejsze w średnicy przedziały otwarte:

Ich prawe granice zbiegają do 1, więc wyrzucenie nawet jednego zbioru nie da nam pokrycia.

$[0, 1]$ w metryce euklidesowej jest zbiorem zwartym. Jeśli znowu podzielimy na coraz to mniejsze przedziały, to zawsze zostaje ten malutki, który musi sie sumować do 1. Wystarczy że go wybierzemy, a resztę tych maleństw wyrzucimy i w ten sposób otrzymamy podpokrycie skończone.

Przestrzeń metryczna jest ZWARTA wtedy
i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny.

TO WYPADAŁOBY DOWIEŚĆ, ALE MUSZĘ ZROZUMIEĆ SPÓJNOŚĆ

Twierdzenie Boltzana-Weiestrassa – każdy podciąg ograniczony na prostej
ma podciąg zbieżny

(X, d) jest przestrzenią metryczną, $X \subseteq Y$

Jeżeli X jest zwarta, to

1. X jest ograniczona
2. X jest domknięty w Y.

Jeśli mamy metrykę euklidesową i $\mathbb{R}^n$, to implikacja zamienia się w równoważność, tzn $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty $\iff$ jest domknięty i ograniczony.

Zbieżność jest przechodnia przez funckje ciągłe i na, tzn $f : X \to Y$ jest ciągła i na oraz X jest zwarta, to Y jest zwarta.

KOSTKA HILBERTA, SPOJNOSC