9. Pokazac, ze jesli A jest zbiorem liczb porzadkowych, to $\bigcup A$ jest najmniejsza liczba porzadkowa, ktora jest wieksza lub rowna od wszystkich elementow zbioru A.

Niech A bedzie zbiorem liczb porzadkowych. Po pierwsze, musimy pokazac, ze $\mathrm{ON}(\bigcup A)$.

1. $\mathrm{Tran}(\bigcup A)$
Ustalamy dowolne $x \in \bigcup A$, to wtedy istnieje $\alpha \in A$ takie, ze $x \in \alpha$. Z $\mathrm{Tran}(\alpha)$ mamy, ze $x \subseteq \alpha \subseteq \bigcup A$, czyli $\mathrm{Tran}(\bigcup A)$.

2. $\mathrm{Lin}(\bigcup A)$
Bierzemy dwa elementy $x, y \in \bigcup A$ i z definicji istnieja $\alpha, \beta \in A$ takie, ze $x \in \alpha$ oraz $y \in \beta$ z twierdzenia z wykldu zachodzi $\mathrm{On}(x)$ i $\mathrm{On}(y)$ (czyli el liczb porz sa licz porz). Z twierdznia 3 mamy $x \in y$ lub $x = y$ lub $y \in x$ i to jest dokladnie to, co chcelismy, czyli $\mathrm{Lin}(\bigcup A)$.

Stad $\mathrm{On}(\bigcup A)$.

Teraz pokazujemy, ez $\bigcup A$ jest ograniczeniem gornym.
Ustalmy $\alpha \in A$, wtedy $\alpha = \bigcup A$ lub $\alpha \neq \bigcup A$. Z twierdzenia 2 z wykladu mamy $\alpha \in \bigcup A$ i smiga.
Teraz pokazujemy, ze jest to najmniejsze ograniczenie gorne.
Ustalamy dowolna liczbe prozadkowa σ taka, ze

$$\forall\, \alpha \in A \quad \alpha \in \sigma \vee \alpha = \sigma$$

Z tw 2 mamy $\bigcup A \in \sigma$ i smiga, luub $\bigcup A = \sigma$, co tez smiga, a trzeca opcja to $\sigma \in \bigcup A$, czyli stad $\alpha \in A$ takiee, ze $\sigma \in \alpha$, stad $\sigma \neq \alpha$. Z tego, ze σ to ograniczenie gorne mamy to, ze $\alpha \in \sigma$, czyli $\sigma \in \alpha \in \sigma$ i mamy w trzeciej opcji sprzecznosc.

i smiga

12. Pokazac, ze $\mathrm{On}(\omega)$

Z poprzedniego mamy, ze $\mathrm{Tran}(\omega)$.
Niech $A = \{\alpha \in \omega \ : \ \mathrm{On}(\alpha)\}$.

1. $\emptyset \in A$, bo $\mathrm{On}(\alpha)$ i $\emptyset \in \omega$

2. $x \in A \implies x \cup \{x\} \in A$. Ustalmy dowolne $\alpha \in A$ Z induktywnosci ω mamy, ze $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$ i z zadanka 8 mamy $\mathrm{On}(\alpha \cup \{\alpha\})$, a to jest $\alpha \cup \{\alpha\} \in A$. Stad A jest induktywny, zatem z minimalnosci ω zachodzi $\omega \subseteq \alpha$, wiec $\omega = A$. Z zadanka 11 mamy $\mathrm{On}(\omega)$.

i smiga

Witold Wilkosz – zbior liczb naturalnych jest to niepusty zbior dobrze uporzadkowany spelniajacy warunki:

1. W kazdym niepustym ograniczonym podzbiorze $\mathbb{N}$ istnieje element najwiekszy
2. W $\mathbb{N}$ nie istnieje element najwiekszy
