



# Spis treści

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>METRYKI</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | METRYKA . . . . .                                     | 3         |
| 1.2      | KULA . . . . .  | 3         |
| 1.3      | ZBIEŻNOŚĆ . . . . .                                   | 4         |
| 1.4      | ZBIORY OTWARTE . . . . .                              | 4         |
| 1.5      | ZBIORY DOMKNIĘTE . . . . .                            | 5         |
| <b>2</b> | <b>PODPRZESTRZENIE METRYCZNE</b>                      | <b>6</b>  |
| 2.1      | PODPRZESTRZEŃ METRYCZNA . . . . .                     | 6         |
| 2.2      | FUNKCJA CIĄGŁA . . . . .                              | 6         |
| 2.3      | HOMEOMORFIZMY . . . . .                               | 7         |
| 2.4      | TOPOLOGIA . . . . .                                   | 7         |
| 2.5      | TOPOLOGIA STRZAŁKI . . . . .                          | 8         |
| 2.6      | PRZESTRZEŃ ZWARTA . . . . .                           | 9         |
| 2.7      | PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA . . . . .                        | 9         |
| 2.8      | ZBIÓR CANTORA . . . . .                               | 12        |
| 2.9      | KOSTKA HILBERTA $[0, 1]^N$ . . . . .                  | 12        |
| <b>3</b> | <b>ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ</b>                             | <b>14</b> |
| 3.1      | PRZESTRZEŃ ZWARTA . . . . .                           | 14        |
| <b>4</b> | <b>LEMAT URYSOHNA</b>                                 | <b>18</b> |
| 4.1      | PRZESTRZEŃ NORMALNA . . . . .                         | 18        |
| 4.2      | LEMAT URYSOHNA . . . . .                              | 18        |
| 4.3      | TWIERDZENIE TIETZEGO . . . . .                        | 19        |
| <b>5</b> | <b>PRZESTRZEŃ ILORAZOWA</b>                           | <b>20</b> |
| 5.1      | KOPRODUKTY ( <i>sumy proste rozłączne</i> ) . . . . . | 20        |
| <b>6</b> | <b>ROZMAITOŚCI</b>                                    | <b>21</b> |
| 6.1      | RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI . . . . .                       | 21        |
| 6.2      | ROZMAITOŚĆ . . . . .                                  | 22        |
| 6.3      | PRZESTRZEŃ ŚCIAĞALNA . . . . .                        | 22        |
| <b>7</b> | <b>PRZESTRZENIE ZUPEŁNE</b>                           | <b>24</b> |
| 7.1      | CIĄG CAUCHY’EGO . . . . .                             | 24        |
| 7.2      | TWIERDZENIE BANACHA . . . . .                         | 24        |
| 7.3      | TWIERDZENIE CANTORA . . . . .                         | 25        |
| 7.4      | TWIERDZENIE BARE’A . . . . .                          | 26        |
| <b>8</b> | <b>ZBIÓR DEFINICJI</b>                                | <b>27</b> |

# 1 METRYKI

## 1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze  $X$  nazywamy funkcję  
$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$
*przedstawia sposób mierzenia odległości*

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1.  $d(x, x) = 0 \wedge d(x, y) > 0$ , jeśli  $x \neq y$
2.  $(\forall x, y) d(x, y) = d(y, x)$  - symetria
3.  $(\forall x, y, z) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  - warunek  $\Delta$

METRYKI EUKLIDESOWE:

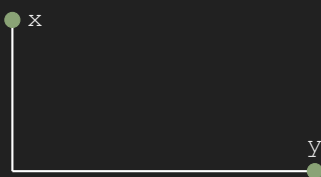
$$\mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$$

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$$

$$\mathbb{R}^n : d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \dots + (x(n-1) - y(n-1))^2}$$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$$



METRYKA MAKSIMUM

$$\mathbb{R}^2 : d(x, y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$$

tutaj muszę dokończyć metryki

## 1.2 KULA

Kulą o środku  $x \in X$  i promieniu  $r$  nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

| $\mathbb{R}$ , m. euklidesowa: | $\mathbb{R}^2$ , m. euklidesowa | $\mathbb{R}^2$ , m. miasto | $\mathbb{R}^2$ , m. maksimum |
|--------------------------------|---------------------------------|----------------------------|------------------------------|
|                                |                                 |                            |                              |
| $\mathbb{R}^2$ , m. centrum    |                                 | $C[0, 1]$ , m. supremum    | $C[0, 1]$ , m. całkowa       |
| narysję potem                  |                                 | narysuje                   | potem                        |

## 1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG  $(x_n)$  ZBIEGA do  $x \in X$ , jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) d(x_n, x) < \varepsilon$$

*W każdej kuli o środku w  $x$  leżą prawie wszystkie wyrazy  $(x_n)$*

Dla przestrzeni metrycznej  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall i < \infty) x_n(i) \rightarrow x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretniej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla  $r \geq 1$  to cała przestrzeń, a dla  $r < 1$  kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{\text{sup}}} f \iff (f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f.$$

## 1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$  jest **zbiorem otwartym**, jeśli na każdym punkcie ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze  $U$

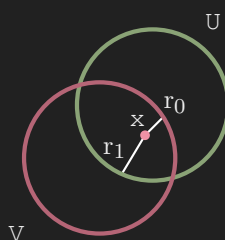
$$(\forall z \in U)(\exists r > 0) B_r(z) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory,  $U$  i  $V$ , których przekrój  $U \cap V$  jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych  $\mathcal{U}$  która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowolnego  $x \in U \cap V$  możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists r_0 > 0) B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists r_1 > 0) B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będą zawierać się w  $U \cap V$ , ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga



DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech  $x$  należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists U \in \mathcal{U}) x \in U.$$

Ponieważ  $U$  jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na  $x$ . Skoro  $U$  należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisać kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga



$U$  jest zbiorem otwartym  $\iff U$  jest sumą kul.

DOWOD:

$\Leftarrow$  wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

$\Rightarrow$

Ponieważ  $U$  jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall x \in U)(\exists r_x > 0) B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w  $U$ , suma ta nie może być większa niż  $U$ . Zawierają się w niej wszystkie punkty z  $U$ , więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga



## 1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$  jest **zbiorem domkniętym**, jeśli każdy ciąg zbieżny z  $F$  ma granicę w  $F$

Jeżeli  $U$  jest zbiorem otwartym, to  $U^c$  jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech  $(x_n)$  będzie ciągiem zbieżnym z  $U^c$ . Jeśli  $U^c$  nie jest domknięte, to  $(x_n)$  musi zbiegać do pewnego punktu  $x \in U$ , czyli

$$(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu  $(x_n)$  należy do  $U$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $(x_n)$  jest ciągiem zbieżnym z  $U^c$ .

i smiga



## 2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

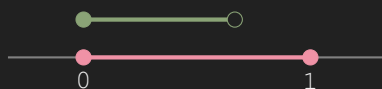
### 2.1 PODPRZESTRZEŃ METRYCZNA

PODPRZESTRZEŃ  $(X, d)$  to  $(A, d)$ ,  $A \subseteq X$

formalnie  $(A, d)$  nie jest metryką - należy obciąć  $d$  :  $d|_{A \times A}$

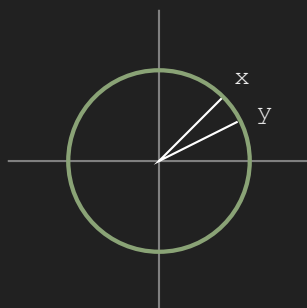
#### PRZYKŁADY

1. Rozważmy  $[0, 1]$  jako podzbiór  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową. W takiej podprzestrzeni możemy otrzymać kulę:



2. Ta kula jest otwarta, bo w tej podprzestrzeni nie istnieją punkty mniejsza od 0.

Na  $\mathbb{R}^2$  z przestrzenią centrum wyróżnijmy okrąg o promieniu  $\frac{1}{2}$  i środku w  $(0, 0)$ . Ta przestrzeń zachowuje się podobnie do przestrzeni dyskretnej - każde dwa różne punkty są odległe od siebie o 1.



### 2.2 FUNKCJA CIAĞŁA

Funkcja między dwoma przestrzeniami metrycznymi  $(X, d)$  i  $(Y, \rho)$ :

$$f: X \rightarrow Y$$

jest **CIAĞŁA**, jeśli:

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y) d(x, y) \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dodatkowo, wówczas równoważne są warunki:

1.  $f$  jest funkcją ciągłą
2.  $(x_n)$  - ciąg z  $X$  taki, że  $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$  (zbieżność wg. Heinego - ciąg wartości zbiega do wartości granicy)
3.  $f^{-1}[U]$  jest otwarty dla każdego otwartego  $U \subseteq Y$

#### DOWOD:

Pokażemy implikację  $3 \implies 1$

Dana jest funkcja

$$f: X \rightarrow Y$$

Weźmy kulę  $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$ . Ponieważ jest zbiorem otwartym, to z założenia 3

$$(\exists U \subseteq X) \underset{\text{otw}}{f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]} = U.$$

Z definicji zbioru otwartego wiemy, że na dowolnym punkcie  $U$  możemy opisać kulę

$$(\exists \delta > 0) B_\delta(x) \subseteq U$$

Dla  $y \in B_\delta(x)$

$$d(x, y) < \delta.$$

Natomiast

$$f(y) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$

czyli  $d(x, y) < \delta$  oraz  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

i smiga



## 2.3 HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM ( $X \cong Y$ ) nazywamy taką funkcję  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ , która:

1.  $f$  jest ciągłą bijekcją
2.  $f^{-1}$  jest ciągła

PRZYKŁADY:

$[0, 1] \cong [0, 2]$  dla funkcji np.  $f(x) = 2x$

$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{\text{miast}})$  dla funkcji  $f(x, y) = \langle x, y \rangle$

$(X, d)$  - dowolna przestrzeń metryczna. Rozważmy poniższą metrykę:

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Wtedy  $(X, d) \cong (X, d')$ . Możemy zmieniać zakres punktów, które wyrzucamy i to nie wpływa na istnienie homeomorfizmu.

## 2.4 TOPOLOGIA

TOPOLOGIĄ na zbiorze  $X$  nazywamy

rodzinę  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  taką, że

$$\emptyset \in \mathcal{U}, X \in \mathcal{U}$$

jest zamknięta na skończone przekeroje

jest zamknięta na dowolne sumy

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, to topologią jest rodzina zbiorów otwartych, która spełnia warunki topologii.

$(X, \mathcal{U})$  to przestrzeń topologiczna

Dla pewnego zbieżnego ciągu elementów  $X$   $\lim x_n = x$ . Korzystając z pojęcia przestrzeni topologicznych, zbieżność można zdefiniować:

$$(\forall U \in \mathcal{U}) x \in U \implies (\exists N)(\forall n > N) x_n \in U$$

Przestrzeń topologiczna jest PRZESTRZENIĄ HAUSDORFA, jeżeli

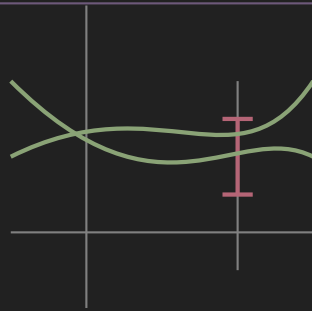
$$(\forall x \neq y \in X)(\exists U, V) (x \in U \wedge y \in V) \wedge U \cap V = \emptyset$$

Czyli dla dowolnych dwóch punktów mogą znaleźć dwa rozłączne zbiory otwarte

$C[0, 1]$  - funkcje ciągłe na odcinku  $[0, 1]$ . Weźmy  $I$ , przedział otwarty na  $\mathbb{R}$ . Niech  $x \in [0, 1]$  oraz

$$A_x^I = \{f \in C[0, 1] : f(x) \in I\}.$$

Czyli wybieramy  $x$  i stawiamy nad nim bramkę równą  $I$ . Do zbioru  $A_x^I$  będą należeć wszystkie funkcje, które przez tę bramkę przejdą.



Rozważmy zbiory postaci  $A_{x_0}^{I_0} \cap \dots \cap A_{x_n}^{I_n}$ . Z sum takich zbiorów tworzę rodzinę  $\mathcal{U}$ , która jest topologią na  $[0,1]$ .

Przyjrzymy się ciągom zbieżnym w tej topologii.

$$f_n \rightarrow f \implies (\forall x \in [0,1]) f_n(x) \xrightarrow{\text{euk}} f(x)$$

Wiemy, że  $f_n$  jest zbieżne, ale czemu  $f_n(x)$  miałyby być zbieżne?

DOWOD:

Dla pewnego  $\varepsilon > 0$  i przedziału

$$I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

mamy:

$$(\exists N)(\forall n > N) f_n \in A_x^I.$$

Ponieważ  $f(x)$  jest środkiem naszego przedziału i  $f_n \rightarrow f$ , to  $f \in A_x^I$ . Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall n > N) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa się **topologią zbieżności punktowej**.

i smiga



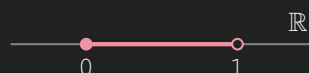
BAZA dla topologii to taka  
rodzina zbiorów otwartych,  
że każdy niepusty i otwarty podzbiór tej  
przestrzeni można wysumować przy  
pomocy pewnych elementów bazy

## 2.5 TOPOLOGIA STRZAŁKI

Rozważamy zbiory w  $\mathbb{R}$

$$B = \{[a, b) : a < b\},$$

które są otwarte (owarto-domknięte)



Topologia strzałki jest bogarsza niż topologia euklidesowa - każdy otwarty zbiór w sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie topologii strzałki. W dodatku jest to przestrzeń **Handsdorffa**.

Ciągi zbieżne w strzałce to

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0,$$

ale już  $\left(\frac{a}{n}\right)$  nie jest ciągiem zbieżnym w strzałce, bo wszystkie jego wyrazy są poza badanym przedziałem.

Strzałka nie jest metryzowalna.



## 2.6 PRZESTRZEŃ ZWARTA

**PRZESTRZEŃ ZWARTA** – przestrzeń topologiczna, że z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone

**UZWARCENIE** – rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by była ona przestrzenią zwartą.

**OTOCZENIE** – dowolny zbiór, który zawiera zbiór otwarty zawierający dany punkt.

**UZWARCENIE ALEKSANDROWA** aka przestrzeń z gruszką



Mamy  $\mathbb{R}$  i jakieś  $x$ . Otoczenia wszystkich liczb  $\mathbb{R}$  to

$$r: \{r\},$$

czyli singletony liczb rzeczywistych są tutaj otwarte. Otoczeniem  $x$  są z kolei

$$x: \{x\} \cup A,$$

takie, że  $A \subseteq \mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \setminus A$  jest skończony.

Topologię w uzwarceniu Aleksandrowa można zdefiniować w dowolny sposób, musi tylko jasno wynikać, co jest zbiorem otwartym, a co zamkniętym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenią Hausdorffa

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$$

ponieważ tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie  $x$ . W takim razie możemy powiedzieć, że jeśli mamy dowolny  $(x_n)$  różnowartościowy, to

$$\lim x_n = x,$$

bo  $x \in U$ , gdzie  $U$  jest zbiorem otwartym i istnieje skończenie wiele  $n$  takich, że  $x_n \notin U$ .

## 2.7 PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA

Zbiór  $A \subseteq X$  jest **ZBIOREM GĘSTYM**, jeżeli

$$(\forall U \neq \emptyset) U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

otw

jest to zbiór otwarty, który kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń  $X$  jest **OŚRODKOWA**,  
jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

### PRZYKŁADY:

$\mathbb{R}$  z metryką euklidesową:  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$  z metryką euklidesową:  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^2$  z metryką miasto:  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  bo zbiory otwarte w metryce miasto są takie same jak w euklidesowej

kostka Cantora ( $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ): ciągi stałe od pewnego miejsca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) – jest ich przeliczalnie wiele i jest to zbiór gęsty.

### ANTYPRZYKŁAD:

$\mathbb{R}^2$  z metryką dyskretną: zbiór gęsty  $A$  musi się kroić niepusto z każdym singletonem, więc

$$(\forall x) A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$  z metryką centrum: intuicja podpowiada, że  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ale jeśli kula leży na prostej o wyrazach niewymiernych, np  $y = \pi x$ , to kroi się pusto z  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  zbiór  $A \subseteq X$  jest gęsty  $\iff$  dla każdej kuli  $B_r(x)$  istnieje  $a \in A$  bliżej  $x$  niż kula

$$A \text{ - zb. gęsty} \iff (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) d(x, a) < \varepsilon$$

### DOWOD:

$\implies$

Założmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gęstego  $A$  i przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  istnieje kula o promieniu  $\varepsilon$  i środku  $x \in X$  taka, że nie zawiera elementów z  $A$ :

$$(\exists x) B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie  $A$  nie się pusto ze zbiorem otwartym  $B_\varepsilon(x)$ , więc nie jest zbiorem gęstym.

$\impliedby$

Niech  $U$  będzie zbiorem otwartym

$$U \in X,$$

czyli możemy założyć, że istnieje kula:

$$(\exists B_r(x)) B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula  $B_r(x)$  zawiera się w otwartym zbiorze  $U$ , więc istnieje w  $U$  punkt, który leży w tej kuli:

$$(\exists u \in U) d(x, u) < r,$$

a więc kula nie się pusto ze zbiorem  $U$ :

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

i smiga



Jeśli istnieje  $f: X \rightarrow Y$ , która jest ciągła i na,  
to jeżeli  $X$  jest przestrzenią ośrodkową,  
to  $Y$  też jest przestrzenią ośrodkową

Ośrodkowość przenosi się przez ciągłe suriekcje

DOWOD:

Chcemy zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w  $Y$  mając tylko  $f: X \rightarrow Y$ .

Niech  $A \subseteq X$  będzie zbiorem gęstym. Rozważmy obraz  $A$  przez funkcję  $f$ :

$$B = f[A].$$

Ponieważ  $B$  jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciągłą suriekcję, to on też jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowodnić, że jest to zbiór gęsty.

Weźmy dowolny zbiór otwarty w  $Y$ :

$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} Y.$$

Wtedy  $f^{-1}[U] \subseteq X$  jest zbiorem otwartym, ponieważ  $f$  jest ciągle i na. W takim razie, zbiorem gęstym w  $Y$  jest  $f[A]$ :

$$(\exists a \in A) a \in f^{-1}[U] \wedge f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

i smiga



Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną i ośrodkową. Wtedy

$$(\exists Y \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}) X \cong Y$$

DOWOD:

Ponieważ  $X$  jest przestrzenią ośrodkową, to istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty, który kroi się niepusto ze wszystkimi zbiorami otwartymi:

$$(\exists D = \{d_1, \dots, d_n\}) D \subseteq Y$$

Zdefiniujmy funkcję

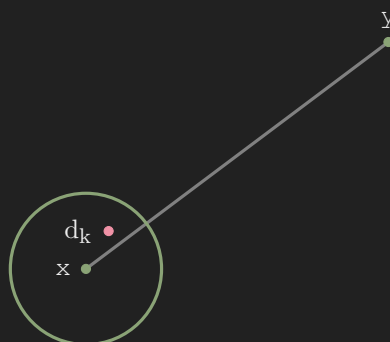
$$h: X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}} \\ h(x) = \langle d(x, d_1), d(x, d_2), \dots, d(x, d_n) \rangle,$$

która liczy kolejno odległości  $x$  od elementów zbioru gęstego w  $X$ .

Ponieważ działamy w przestrzeni metrycznej, to korzystając z twierdzenia wcześniej, możemy określić metrykę taką, że

$$(\forall x, y \in X) d(x, y) \leq 1$$

Funkcja  $h$  jest różnowartościowa, ponieważ dla każdych dwóch punktów możemy znaleźć kulę w której odległości od elementu zbioru bazowego do  $x$  i do  $y$  będą różne:



$$d(x, d_k) < d(y, d_k)$$

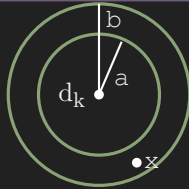
Funkcja  $h$  nie musi być na – jeśli tak by było, to każda przestrzeń metryczna byłaby homeomorficzna z kostką Hilberta. Wystarczy, że pokażemy  $Y = h[X]$ .

Pokażemy, że  $h$  i  $h^{-1}$  są ciągłe. Przyjrzyjmy się przeciwbrazom zbiorów bazowych

$$h^{-1}[C_n^{(a,b)}].$$

Jeżeli są one otwarte, to również skończone przekroje takich zbiorów są otwarte.

$$C_n^{(a,b)} = \{x \in X : d(x, d_k) \in (a, b)\}$$



DOKONCZYĆ DOWÓD

## 2.8 ZBIÓR CANTORA



Zbiór Cantora,  $C$ , jest przekrojem zbiorów domkniętych, więc sam też jest zbiorem domkniętym. Zbiór Cantora jest homeomorficzny z kostką Cantora

$$C \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Zdefiniujmy odpowiednią funkcję:

$$f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$$

Niech  $s$  będzie skończonym ciągiem 0, 1. Wówczas  $C$  to ciąg, który w zbiorze Cantora przyjmuje lewy lub prawy podzbiór poprzedniego zbioru w zależności od tego, czy pojawia się 0 czy 1:

$$f(x) = y \quad \bigcap D_s = \{y\}$$



## 2.9 KOSTKA HILBERTA $[0, 1]^{\mathbb{N}}$

METRYKA NA KOSTCE HILBERTA:

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$C^{(a,b)} = \{x \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : x(n) \in (a, b)\}$  - wszystkie ciągi z kostki Hilberta, które na  $n$  współrzędnej spełniają pewne wymagania. Można to wyobrazić sobie jako bramki ustawione na odpowiedniej  $n$  i tylko ciągi, które przechodzą przez nią należą do  $C_n^{(a,b)}$ .

Skończone przekroje zbiorów postaci  $C_n^{(a,b)}$  stanowią bazę  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ .

DOWÓD:

Pokażemy, że baza  $\mathcal{B}$  topologii to suma pewnych jej elementów:

$$(\forall x)(\forall U \ni x)(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq U$$

W przypadku przestrzeni metrycznej nie musimy brać każdego zbioru otwartego z osobna, bo wiemy, że wszystkie zbioru otwarte są sumą kul, a zbiór kul jest bazą przestrzeni metrycznych.

$$(\forall x \in [0, 1]^{\mathbb{N}})(\forall \epsilon > 0)(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq B_\epsilon(x).$$

Ważmy dowolny punkt  $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$  oraz dowolny  $\varepsilon > 0$ . Chcemy ustawić na  $x$  bramkę tak, żeby nasz ciąg przez niego przeszedł oraz żeby ta bramka na pewno była w kuli.

W kostce Hilberta musimy ociąć ogony (nieskończone rozwinięcia zamienić na rozwinięcia od pewnego momentu zawierające tylko 0):

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech dla każdego  $n \leq N$

$$I_n = (x(n) - \frac{\varepsilon}{4}, x(n) + \frac{\varepsilon}{4}),$$

czyli na kolejnych miejscach ustawiamy bramki o średnicy  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Ich przekrój to

$$x \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}.$$

Ważmy dowolny  $y \in \bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$ . Jego odległość od  $x$  to

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} = \sum_{n \leq N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n > N} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} < \varepsilon$$

Czyli każdy punkt w przekroju należy do kuli  $B_\varepsilon(x)$ .

i smiga



#### WNIOSKI:

1.  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  jest podrzestrzenią  $[0,1]^{\mathbb{N}}$ , bo kulami są przekroje  $\bigcap_{n \leq N} C_n^{I_n}$  - ustawiamy bramki na prefiksach
2. Topologia na  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  jest topologią zbieżności punktowej: ciąg zbiega w kostce Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi jego współrzędnych zbiegają w  $\mathbb{R}$ .

## 3 ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ

### 3.1 PRZESTRZEŃ ZWARTA

POKRYCIE - rodzina zbiorów otwartych  
sumująca się do  $X$

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

Przestrzeń topologiczna  $X$  jest **ZWARTA**,  
gdy z każdego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone.

$(0,1)$  w metryce euklidesowej nie jest zbiorem zwartym. Kontrprzykładem są coraz to mniejsze w średnicy przedziały otwarte:



Ich prawe granice zbiegają do 1, więc wyrzucenie nawet jednego zbioru nie da nam pokrycia.

$[0,1]$  w metryce euklidesowej jest zbiorem zwartym. Jeśli znowu podzielimy na coraz to mniejsze przedziały, to zawsze zostaje ten mały, który musi się sumować do 1. Wystarczy że go wybierzemy, a resztę tych maleństw wyrzucimy i w ten sposób otrzymamy podpokrycie skończone.

Przestrzeń metryczna jest **ZWARTA** wtedy  
i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny.

DOWOD:

Chcemy pokazać  $\Longleftrightarrow$ .

$\Rightarrow$

Niech  $(x_n)$  będzie dowolnym ciągiem w przestrzeni zwartej  $X$ . Wtedy może zajść jedna z dwóch możliwości:

1. Niech  $A = \{a : (\exists k) a = x_k\}$ , wtedy  $(\exists x \in X)(\forall \varepsilon > 0) B_\varepsilon(x) \cap A$  jest nieskończony, czyli nieskończenie wiele wyrazów zawiera się w kuli o dowolnym promieniu  $\varepsilon > 0$  i środku w  $x$  (czyli  $x$  jest PUNKTEM SKUPIENIA CIĄGU).

Wybierzmy rosnący ciąg  $(n_k)$  taki, że

$$x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x).$$

Ale taki ciąg musi spełniać  $(x_{n_k}) \rightarrow x$ , czyli mamy podciąg zbieżny.

2. Załóżmy, że  $(x_n)$  nie ma punktu skupienia.

Weźmy dowolne  $x \in X$ . Wówczas istnieje  $B_r(x)$ , czyli kula o środku  $x$ , która zawiera skończenie wiele wyrazów ciągu  $(x_n)$ . Rozważmy zbiór takich kul

$$\{B_r(x) : x \in X\}$$

że są one pokryciem  $X$ . Ponieważ  $X$  jest zwarte, to istnieje takie  $F$ , że

$$B_r(x) : x \in F$$

jest skończonym pokryciem  $X$ . Ale wtedy ciąg tych  $x$  jest ciągiem skończonym i mamy sprzeczność (?).

$\Leftarrow$

ZROBIĆ DOWOD

$(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $X \subseteq Y$

Jeżeli  $X$  jest zwarta, to

1.  $X$  jest ograniczona
2.  $X$  jest domknięty w  $Y$ .

Jeśli mamy metrykę euklidesową i  $\mathbb{R}^n$ , to implikacja zamienia się w równoważność, tzn  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zwarty  $\iff$  jest domknięty i ograniczony.

DOWOD:

1. Wiemy, że przestrzeń  $X$  jest ograniczona wtw gdy jej średnica jest skończona:

$$X \text{ jest ograniczona} \iff \text{diam}(X) < \infty$$

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Założmy, że  $X$  jest nieograniczona. Wskażemy wówczas ciąg, który nie ma podciągu zbieżnego.

$$\begin{aligned} x_0 &\in X \\ x_1 &\quad d(x_0, x_1) > 1 \\ x_2 &\quad d(x_0, x_2) > 1 \wedge d(x_1, x_2) > 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$(x_n)$  nie ma podciągu zbieżnego, bo wszystkie jego elementy są odległe od siebie o więcej niż 1.

2. Załóżmy, że  $X$  nie jest domknięty, czyli istnieje ciąg, który jest zbieżny w  $Y$ , ale nie jest zbieżny w  $X$ .

$$(x_n) \quad ((\forall n) x_n \in X) \wedge ((\exists y \in Y) (x_n) \rightarrow y)$$

Ale to jest sprzeczne z warunkiem zwartości, bo każdy podciąg  $(x_n)$  jest zbieżny do tego samego  $y \in Y$ , więc żaden nie jest zbieżny w  $X$ .

i smiga



Jeśli istnieje  $f: X \xrightarrow[\text{ciągła}]{\text{na}} Y$ , to zachodzi

$$X \text{ zwarta} \implies Y \text{ zwarta}$$

*Zbieżność jest przechodnia przez funkcje ciągłe i na.*

DOWOD:

Na  $Y$  wyróżniamy pewne pokrycie i chcemy pokazać, że możemy wybrać z niego podpokrycie skończone.

Rozważmy rodzinę  $\mathcal{U}$  otwartych zbiorów w  $Y$  taką, że

$$\bigcup \mathcal{U} = Y$$

oraz przeciwobrazy zbiorów tej rodziny:

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Ponieważ  $f$  jest funkcją ciągłą, to  $f^{-1}[U]$  są zbiorami otwartymi. Łatwo zauważyć, że

$$\bigcup \mathcal{B} = X.$$

Ponieważ  $X$  jest przestrzenią zwartą, możemy wybrać skończone podpokrycie z  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}_1 = \{f^{-1}[U] : U_1\}.$$

Ale funkcja  $f$  jest na, więc

$$\bigcup U_1 = Y,$$

a z ciągłości wiemy, że każdy zbiór w  $\mathcal{U}_1$  jest zbiorem otwartym. W takim razie dowolne pokrycie  $Y$  ma podpokrycie skończone.

i smiga



WNIOSKI:

1.  $X \cong Y$  i  $X$  jest zwarta, to  $Y$  też musi być zwarta
2. funkcja ciągła  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  na przedziale domkniętym jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zwartość przenosi się na podzbiory domknięte

DOWOD:

Weźmy dowolne  $\mathcal{U}$  pokrycie  $X \subseteq Y$ . Żeby dostać pokrycie  $Y$ , wystarczy do niego dodać  $X^c$ , które jest otwarte, bo  $X$  jest zbiorem domkniętym. Czyli otrzymujemy pokrycie zwartego zbioru  $Y$ :

$$\mathcal{U} \cup X^c.$$

Możemy z niego wybrać podpokrycie skończone, bo  $Y$  jest przestrzenią zwartą. Dostajemy

$$\mathcal{U}_1 \cup X^c,$$

ale  $\mathcal{U}_1$  jest skończonym podzbiorem  $\mathcal{U}$  i pokrywa  $X$ , dostajemy więc skończone podpokrycie  $X$ , więc jest on zwarty.

i smiga



Jeśli  $X$  jest przestrzenią zwartą  
oraz  $X \subseteq Y$ ,  $Y$  jest przestrzenią Hausdorffa,  
to wtedy  $X$  jest domknięty w  $Y$ .

DOWOD:

Chcemy pokazać, że  $Y \setminus X$  jest zbiorem otwartym.

Weźmy dowolny  $y \in Y \setminus X$ . Chcemy znaleźć zbiór otwarty, który oddzieli nas od  $X$ . Weźmy dowolne  $x \in X$ .

Z przestrzeni Hausdorffa wiemy, że istnieje  $U_x \ni x$  oraz  $V_x \ni y$ , które są rozłączne

$$U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Dla każdego punktu  $x \in X$  możemy wybrać taki zbiór, więc rodzina

$$\mathcal{A} = \{U_x \cap X : x \in X\}$$

jest pokryciem  $X$ . Ze zwartości  $X$  wiemy, że istnieje skończony podzbiór  $X_1 \subseteq X$  takie, że

$$\mathcal{A}_1 = \{U_x \cap X : x \in X_1\}$$

jest skończonym pokryciem  $X$ . Weźmy przekrój

$$\bigcap_{x \in X_1} V_x.$$



Jest on zbiorem otwartym, bo jest przekrojem skończenie wielu zbiorów otwartych. Z własności przestrzeni Hausdorffa wiemy, że

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap U_x = \emptyset,$$

a ponieważ  $U_x$  należało do pokrycia  $X$ , to również

$$\bigcap_{x \in X_0} V_x \cap X = \emptyset.$$

Wobec dowolności  $y \in Y \setminus X$  mamy  $Y \setminus X$  jest zbiorem otwartym, więc  $X$  jest domknięte w  $Y$ .

i smiga



Jeżeli  $f: X \xrightarrow{\text{ciągła}} Y$  jest bijekcją, to jeśli  $X$  jest przestrzenią zwartą,  $f$  jest homeomorfizmem

DOWOD:

Wystarczy pokazać, że  $f^{-1}$  jest funkcją ciągłą, tzn  $f[D]$  jest domknięty dla każdego  $D \subseteq X$ .  
dom

Ponieważ  $D$  jest domkniętym podzbiorem zwartej przestrzeni, to  $D$  również jest zwarte. W takim razie  $f[D]$  jest zwartym podzbiorem  $Y$ , a więc jest jego domkniętym podzbiorem.

i smiga



Jeśli  $X$  jest zwartą przestrzenią metryczną, to  $X$  jest całkowicie ograniczone.

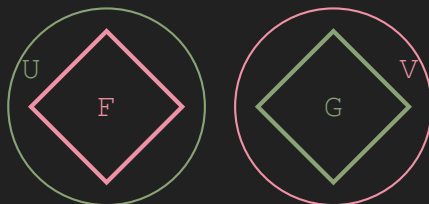
COO?

## 4 LEMAT URYSOHNA

### 4.1 PRZESTRZEŃ NORMALNA

Przestrzeń  $X$  jest przestrzenią **NORMALNĄ** (również  $T_4$ ), jeżeli

$$(\forall F, G \subseteq X) \underset{\text{dom}}{F \cap G = \emptyset} \\ (\exists U, V \subseteq X) \underset{\text{otw}}{U \cap V = \emptyset \wedge F \subseteq U \wedge G \subseteq V}$$



Czyli przestrzeń jest normalna, jeżeli każde dwa zbiory domknięte możemy oddzielić od siebie rozłącznymi zbiorami otwartymi.

Przestrzenie metryczne oraz przestrzenie zwarte są przestrzeniami normalnymi.

### 4.2 LEMAT URYSOHNA

Założmy, że przestrzeń  $X$  jest normalna. Niech  $F, G \subseteq X$  będą  $\underset{\text{dom}}{\text{rozłącznymi zbiorami domkniętymi w } X}$ . Wówczas:

$$(\forall f : X \xrightarrow{\text{ciągła}} [0, 1]) f|_F \equiv 0 \wedge f|_G \equiv 1$$

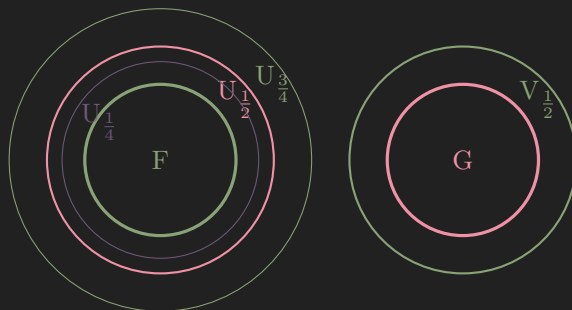
Warunek ten jest silniejszy od normalności.

DOWOD:

Niech  $F, G$  będą zbiorami domkniętymi spełniającymi założenia lematu. Z normalności tych zbiorów możemy wziąć zbiory otwarte  $U_{\frac{1}{2}}$  i  $V_{\frac{1}{2}}$  takie, że  $U_{\frac{1}{2}}$  oddziela  $F$  od  $G$ . Ponieważ  $U_{\frac{1}{2}}$  jest zbiorem otwartym, to  $U_{\frac{1}{2}}^c$  jest domknięte, więc możemy oddzielić  $F$  od  $U_{\frac{1}{2}}^c$  za pomocą  $U_{\frac{1}{4}}$ .

Ponieważ  $V_{\frac{1}{2}}$  oddziela  $F$  od  $G$ , to  $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \cap G = \emptyset$  oraz możemy utworzyć zbiór  $U_{\frac{3}{4}}$  oddzielający  $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$  od  $G$  i tak dalej.

Powstaje nam konstrukcja:



Niech  $\mathcal{D}$  będzie zbiorem liczb diadycznie wymiernych (tzn postaci  $\frac{k}{2^n}$ ) z przedziału  $[0, 1]$ . Wówczas zbiór

$$\{U_d : d \in \mathcal{D}\}$$

opisuje nam powyższą konstrukcję:

$$\begin{aligned} (\forall d) F &\subseteq U_d \\ (\forall d < d') \overline{U_d} &\subseteq U_{d'} \\ (\forall d) U_d \cap G &= \emptyset \end{aligned}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} & (\exists q \in \mathcal{D}) x \in U_q \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Zbiory otwarte na przedziale  $[0, 1]$  mają postać  $(a, b) = [0, b) \setminus [0, a]$ . Sprawdzamy ciągłość:

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0, b)) &= \{x : \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} < b\} = \\ &= \{x : (\exists q < b) x \in U_q\} = \\ &= \bigcup_{q < b} U_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0, a]] &= \{x : \inf\{q \in \mathcal{D} : x \in U_q\} \leq a\} = \\ &= \{x : (\exists q \leq a) x \in U_q\} = \\ &= \bigcap_{q \leq a} U_q^c \end{aligned}$$

$$f^{-1}[(a, b)] = f^{-1}[[0, b)) \setminus f^{-1}[[0, a]] = \bigcup_{q < b} U_q \setminus \bigcap_{q \leq a} U_q^c$$

DOCZYTAC W KLAUS JANICH "TOPOLOGIA"BO NADZIEJA POMIESZAŁ

## 4.3 TWIERDZENIE TIETZEGO

Niech  $X$  będzie przestrzenią normalną, a  $D \subseteq X$  zbiorem domkniętym. Wtedy ciągłą funkcję

$$f : D \xrightarrow{\text{ciągła}} \mathbb{R}$$

możemy rozszerzyć do ciągłej funkcji

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

takiej, że  $(\forall x \in D) F(x) = f(x)$

## 5 PRZESTRZEŃ ILORAZOWA

### 5.1 KOPRODUKTY (*sumy proste rozłączne*)

Jeśli dana jest rodzina zbiorów indeksowana  $(X_i)_{i \in I}$ , to jej koproduktem nazywamy

$\bigsqcup_{i \in I} X_i$  z topologią

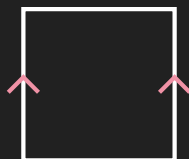
$$\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$$

## 6 ROZMAITOŚCI

### 6.1 RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

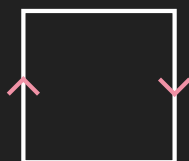
$$X = [0, 1]^2$$

$$\langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



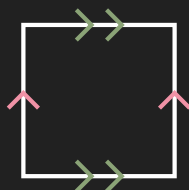
Tutaj zlepiamy dwa przeciwne boki prostokąta i otrzymujemy tubę.

$$\langle 0, y \rangle \sim \langle 1, 1-y \rangle$$



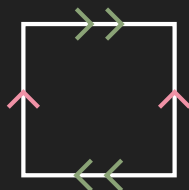
Powstaje nam wstęga Mobiusa.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



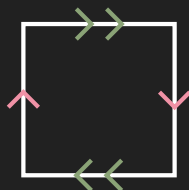
Zlepiamy górną i dolną oraz prawą i lewą - dostajemy torus.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle 1-x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, y \rangle$$



Jak to się zrobi na przemian strzałki na górze i dole to dostajemy torus z obrotem, czyli butelkę Kleina.

$$\langle x, 0 \rangle \sim \langle 1-x, 1 \rangle \cup \langle 0, y \rangle \sim \langle 1, 1-y \rangle$$



Na przemian wszystkie strzałki i dostajemy płaszczyznę rzutową.

## 6.2 ROZMAITOŚĆ

$N$  - ROZMAITOŚĆ to przestrzeń topologiczna,  
łukowo spójna, lokalnie homeomorficzna z  $\mathbb{R}^n$  (to znaczy,  
że  $(\forall x \in X)(\exists \underset{\text{otw}}{U} \ni x) U \cong \mathbb{R}^n$ )

kula - przykład, rura (z końcem) - antyprzykład

Czym się różni sfera od torusa?

Wyobraźmy sobie pętelkę na sferze, jeśli będziemy ją ściskać, to zrobimy supełek. Natomiast jeśli na torusie weźmiemy pętelkę ale taką oplatającą go, to tego nie możemy ścisnąć do supełka.

PĘTLA to funkcja

$$p : [0, 1] \rightarrow X$$

która jest ciągła i  $p(0) = p(1)$

Funkcje stałe też są pętlami.

Przestrzeń topologiczna jest JEDNOSPÓJNA,  
gdy jest łukowo spójna i dla każdej pętli istnieje  
punkt, z którym jest ona homotopijnie równoważna (jest ściągalna do punktu).

jakaś dygresja

$$X \cong Y,$$

jeśli  $X$  jest jednospójna, to  $Y$  jest też jednospójna.

Weźmy koło bez brzegu i pół okręgu z otwartymi końcami. Obie te przestrzenie są jednospójne, ale jeśli z koła wyjmemy jeden punkt, to przestaje ono być jednospójne, a jeśli z pół okręgu wyjmemy, to on nadal jest jednospójny.

## 6.3 PRZESTRZEŃ ŚCIAĞALNA

Przestrzeń topologiczna jest ŚCIAĞALNA,  
jeżeli identyczność jest homotopijna z pewną funkcją stałą

$$\text{id} : X \rightarrow X \quad \text{id}(x) = x$$

$$f : X \rightarrow X \quad f(x) = a$$

Na przykład dysk jest ściągalny:

$$H(x, t) = t \cdot a + (1-t)x,$$

identyczność jest homotopijnie spójna z funkcją  $f(x) = a$ . Sfera nie jest homotopijnie spójna.

### TWIERDZENIE BROUWERA

jeśli istnieje ciągła  $f : D^n \rightarrow D^n$ , gdzie  $D^n$  to dysk  $n$ -wymiarowy, to  
 $(\exists x) f(x) = x$ ,  
czyli istnieje punkt stały.

DOWOD:

Dla  $n=2$ .

Wyobraźmy sobie, że mamy ciągłą funkcję

$$f: D^2 \rightarrow D^2,$$

która nie ma punktu stałego

$$(\forall x) f(x) \neq x.$$

Korzystając z niej konstruujemy drugą funkcję

$$r: D^2 \rightarrow S^1,$$

gdzie  $S^1$  to brzeg  $D^2$ . Prowadzimy prostą przez  $x$  i jego obraz  $f(x)$ , po czym przypisujemy  $r(x)$  jako

punkt przecięcia tej prostej i  $S^1$ . Co możemy o  $r$  powiedzieć?

- $r$  jest ciągła
- $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$

Rozważmy funkcję:

$$H: D^2 \times [0, 1] \rightarrow S^1$$

$$H(x, t) = r(tx)$$

$H$  jest ciągłe,  $H(x, 0) = r(0)$ , gdzie  $r(0)$  będzie środkiem dysku  $H(x, 1) = r(x) = x$ . Czyli dostaliśmy, że okrag jest ściągalny, ale on nie jest więc mamy sprzeczność

i smiga



## 7 PRZESTRZENIE ZUPEŁNE

### 7.1 CIĄG CAUCHY'EGO

Ciąg  $(x_n)$  jest Cauchy'ego, jeśli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n, m \geq N) d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Jeśli ciąg jest zbieżny, to  
jest Cauchy'ego, ale nie musi być odwrotnie.

Przestrzeń metryczna jest **ZUPEŁNA**,  
gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny

Przykłady metryk gdzie ciągi Cauchyego mogą być niezbieżne:

1.  $(0,1)$  z ciągiem  $(\frac{1}{n})$
2.  $\mathbb{Q}$  wiele ciągów Cauchyego, które zbiegają do  $a \in \mathbb{R}$ , czyli nie są zbieżne w  $\mathbb{Q}$ .

PRZYKŁADY

1. przestrzeń dyskretna
2.  $[0,1]$
3.  $\mathbb{R}$ , bo jeśli mamy ciąg Cauchyego, to on musi być ograniczony, czyli

$$(\exists a, b)(\forall n) x_n \in [a, b]$$

i stosujemy zwartość  $[a, b]$  (fakt niżej)

Przestrzenie zwarte są zupełne.

DOWOD:

Jeśli  $(x_n)$  ma podciąg zbieżny i jest Cauchyego, to jest zbieżny. (więcej na liście zadań)

Zupełność nie jest własnością topologiczną -  $(0,1)$  jest homeomorficzne z  $\mathbb{R}$ , ale  $(0,1)$  nie jest zupełna, a  $\mathbb{R}$  jest zupełna - **NIE ZACHOWUJE SIĘ PRZEZ HOMEOMORFIZMY**

Przestrzeń metryczna jest **METRYZOWALNA W SPOSÓB ZUPEŁNY**, gdy  
 $(\exists Y) X \cong Y \quad Y - \text{zupełna}$

### 7.2 TWIERDZENIE BANACHA

TWIERDZENIE BANACHA O PUNKCIE STAŁYM

jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią zupełną i mamy

$$f: X \rightarrow X$$

która jest **kontrakcją** (tzn  $(\exists c < 1)(\forall x, y \in X) d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \cdot c$ )  
to  $(\exists x \in X) f(x) = x$

DOWOD:

Tworzymy ciąg w następujący sposób (iterujemy  $f$ ):

$$x_0 \in X$$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Będziemy się starali pokazać, że jest to ciąg Cauchyego. Pomiędzy  $x_0, x_1$  odległość jest średnio kontrolowana, ale już odległość

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1).$$



Robimy tak  $n$  razy i dostajemy

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1),$$

czyli kolejne wyrazy ciągu są coraz bliżej siebie.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \\ &\leq c^n d(x_0, x_1) + \dots + c^m d(x_0, x_1) = \\ &= d(x_0, x_1)(c^n + \dots + c^m) = \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^m c^k \end{aligned}$$

Ale wtedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) \sum_{n=N}^{\infty} c^n d(x_0, x_1) < \varepsilon,$$

bo  $\sum c^n < \infty$ . Wtedy dla  $n, m > N$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq (c^n + \dots + c^m) d(x_0, x_1) \leq \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} c^k d(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

Z zupełności  $(\exists x) (x_n) \rightarrow x$ , czyli  $x = \lim x_n$ . W takim razie

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

i smiga



## 7.3 TWIERDZENIE CANTORA

**TWIERDZENIE CANTORA:** jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią zupełną, a  $(F_n)$  to ciąg zbiorów domkniętych taki, że

$\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ , gdzie  $\text{diam}(F) = \sup\{d(x, y) : x, y \in F\}$ ,

oraz  $(\forall n) F_{n+1} \subseteq F_n$ .

wtedy  $\bigcap F_n \neq \emptyset$ .

DOWÓD:

Chcemy wskazać przynajmniej jeden element tego, co chcemy pokazać że jest niepuste. Skonstruujmy więc ciąg

$$x_0 \in F_0$$

$$x_1 \in F_1$$

$$x_2 \in F_2$$

$$x_n \in F_n.$$

Sprawdźmy, że jest to ciąg Cauchyego. Niech  $\varepsilon > 0$ , a  $N$  będzie takie, że

$$(\forall n > N) \text{diam}(F_n) < \varepsilon.$$

To wtedy

$$(\forall n, m > N) x_n, x_m \in F_N.$$

Czyli istnieje granica  $x = \lim(x_n)$ . Jeśli należy do przekroju, to należy do wszystkich zbiorów:

$$x \in F_0, \text{ bo } (\forall n) x_n \in F_0$$

$$x_m \in F_n, \text{ bo } (\forall m > n) x_m \in F_n$$

czyli  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

i smiga



## 7.4 TWIERDZENIE BARE'A

TWIERDZENIE BARE'A: jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, to jeśli  $(F_n)$  jest ciągiem zbiorów domkniętych o pustym wnętrzu, to

$$\bigcup F_n \neq X$$

DOWOD:

Założmy, że  $X$  jest zupełna. Będziemy konstruować ciąg Cauchyego, który zbiega do punktu spoza  $\bigcup F_n$ .

$$x_0, r_0 < 1 \quad \overline{B(x_0, r_0)} \cap F_0 = \emptyset,$$

czyli wybieram punkt z dopełnienia  $F_0$  i opisuję na nim kulę, która tnie się pusto z  $F_0$ .

$$x_1 \in B(x_0, r_0), r_1 < \frac{1}{2} \quad \overline{B(x_1, r_1)} \cap F_1 = \emptyset,$$

co jest możliwe, bo  $F_1$  ma puste wnętrze.

$(x_n)$  jest Cauchyego, bo  $r_n \rightarrow 0$ . Z zupełności  $(\exists x) x = \lim(x_n)$ . Chcę pokazać, że  $x \notin \bigcup F_n$ .

$$x \notin F_0, \text{ bo } (x_n) \subseteq \overline{B(x_0, r_0)}$$

czyli  $x \notin \bigcup F_n$ .

i smiga



WNIOSKI

1.  $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
2.  $\mathbb{Q}$  nie jest metryzowalne w sposób zupełny, bo nie spełnia twierdzenia Bare'a, bo  $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ .

Istnieje funkcja ciągła  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   
niemonotoniczna na żadnym przedziale

DOWOD:

Niech  $I$  będzie przedziałem, a  $C^I$  niech będzie zbiorem funkcji ciągłych na  $[0, 1]$ , które są niemalejące. Pokażemy, że jest to zbiór domknięty o pustym wnętrzu.

