

PRZYKLAD

Strzałka (Sorgenfrey line), przykład w \mathbb{R}

Baza: $\{[a,b) : a < b\}$ stają się zbiorami otwartymi



Baza dla topologii to taka rodzina, że każda ??? jest sumą zbiorów otwartych?

topologia strzałki jest bogatsza niż topologia euklidesowa - każdy otwarty zbiór w sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie strzałki

strzałka jest Hausdorffa

Jak wyglądają ciągi zbieżne w strzałce?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

$$\left(\frac{a}{n}\right) \text{ nie jest zbieżny, bo wszystkie wyrażenia są poza przedziałem}$$

nie jest to przestrzeń metryzowalna

UZWARCENIE ALEKSANDROWA (aka przestrzeń z gruszką)

znowu przestrzeń to \mathbb{R} , ale może być dowolne



Mamy \mathbb{R} i mamy jakiegoś kota. Otoczenia $r : \{r\}$ - singletony liczb rzeczywistych są otwarte (no to wszystko jest otwarte). Otoczeniem S są $\text{A} : \{\text{S}\} \cup A$, takie, że $A \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus A$ jest skończony

Topologie definiujemy jak nam się podoba, tylko musi jasno wynikać, co jest otwarte, a co jest zamknięte.

Jest to przestrzeń Hausdorffa

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \text{S}$$

po tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie S
czyli ogółem, jeśli mamy dowolny (x_n) różnowartościowy, to

$$\lim x_n = \text{S}$$

bo $\text{S} \in U$ bo istnieje skończenie wiele n takich, że $x_n \notin U$

COS

Ciąg zbieżny - był definiowany

$$\text{Int}A = \{x \in A : \exists x \in U \mid U \subseteq A\}$$

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall x \in U \mid U \cap A \neq \emptyset\}$$

zbiory domknięte = dopełnienia otwartych

X - przestrzeń topologiczna

$A \subseteq X$ jest GĘSTY (dense), jeżeli

$$\forall U \neq \emptyset \mid U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

czyli zb. otwarty, który kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń X jest OSRODKOWA, jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

PRZYKŁADY - OSRODKOWA

\mathbb{R} z metryką euklidesową - osrodkowy (separable) bo $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

\mathbb{R}^2 z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest gęsty

\mathbb{R}^2 z metryką miasto: \mathbb{Q}^2 bo zbiory otwarte w mieście są takie same jak w euklidesie

kostka Cantora $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ - bierzemy wszystkie skończone ciągi stałe od pewnego miejsca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) - jest ich przeliczalnie wiele i to jest gęste

Weźmy kule $B_r(x)$ o promieniu $r > \frac{1}{2^n}$

$$y(i) = x(i) \quad i \leq n + 1$$

$$y(i) = 0 \quad i > n + 1$$

ANTYPRZYKŁAD: $(\mathbb{R}, d_{\text{dysk}})$. Zbiór gęsty $A \subseteq \mathbb{R}$ musi kroić się niepusto z każdym singletonem, więc

$$\forall x \mid A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

BARDZIEJ SUBTELLNY ANTYPRZYKŁAD: $(\mathbb{R}^2, d_{\text{centrum}})$. Intuicja podpowiada, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ byłoby gęste i wtedy to byłby przeliczalny, ale kula która leży na prostej $y = \pi x$ wymyka się temu zbiorowi.

FAKT: Jesli mamy przestrzen metryczna, to gestosc mozemy opisac $A \subseteq X$ jest gest, jesli dla kazdej kuli itnieje cos z tego zbioru blizej x niz kula

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad d(x,a) < \varepsilon$$

dowodzi <3
 \implies : zalozmy, ze $\exists x \quad \exists \varepsilon$ ze jest zle, czyli

$$\exists x \quad B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

czyli nie mozemy byc gesci
 \Leftarrow : wezmy jakis zbior otwraty $U \underset{otw}{\subseteq} X$, czyli mozemy zalozyc, ze jets taka kula:

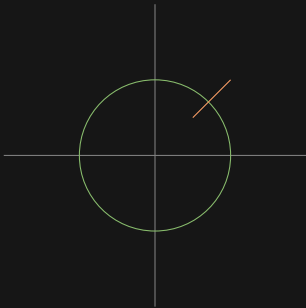
$$\exists B_r(x) \subseteq U$$

i wowczasj z wlasnosci z faktu

$$\begin{aligned} \exists a \in A \quad d(x,a) < r \\ A \cap B_r(x,a) = \emptyset \end{aligned}$$

POWROT DO METRYKI CENTRUM
Rozwazmy okrag i robimy kule promieniscie i jest ich c wiele

$$S^1 = \{x : d(x, \langle 0,0 \rangle) = 1\}$$



Przestrzen supremum jest osrodkowa, bo wielomiany tworza ciag gesty.

TWIERDZONKA

Tw: $f : X \rightarrow Y$, ktora jest ciagla i na, to jezeli X osrodkowa, to jest Y tez (osrodkowosc prznosi sie przez ciage subwiekcje).

DOWODZIK:
Chcemy zdefiniowac przeliczalny zbior gesty w Y .
Niech $A \subseteq$ bedzie przeliczalnym zbiorem gestym w X . No to w takim przypadku zbiorem gestym w Y bedzie $f[A]$. Jest to zbior przeliczalny, bo jest obrazem zbioru przeliczalnego, a czy jest gesty?
Bierzemy dowolny zbior otwarty w $U \subseteq Y$, to wtenczas $f^{-1}[U] \subseteq X$

$$\exists a \in A \quad a \in f^{-1}[U] \quad f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

ZBIOR CANTORA <3

$$C \subseteq [0,1]$$

C jest przekrojem zbiorow domknietych, wiec sam tez jest zbioreom dokmnietym.

ZBIOR CANTORA jest homeomorficzny z kostka Cantora

$$Cant \underset{home}{\simeq} 0,1$$

DOWODZIK:



$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow Cant$$

s - skonczony ciag 0,1. Wowczas C_s to jest ciag, ktory w zbiorze Cantora pokolei przyjmuje lewy lub prawy podbior poprzedniego zbioru (skaczemy lew-prawa)

$$f(x) = y \quad \bigcap_{s-oda\ pocz\ x} D_s = \{y\}$$

Co nas czeka:
zobaczenie ze to D_s jest niepuste
ze to jest 1-1 i na
1-1 bo mamy dwa rozne ciagi, to one sie nam rozjeda i nie ma opcji zeby sie znowu pozniej spotkaly
bo zawsze dojdziemy d odowolnego x
dowod ciaglosci i ciaglosci f^{-1}

