PODSTAWOWE POJECIA ALGEBRY LINIOWEJ

CIALO

CIALO to zbior K z dwoma dzialniami,
dodawaniem i mnozeniem, i ich elementami neutralnymi $(0, 1 \in K)$
dodawanie i mnozenie to funkcje $+ : K \times K \to K$

WLASNOSCI CIAL:

1. dodawanie i mnozenie sa laczne, przemienne i rozdzielne
2. istnieja elementy neutralne: $0 + x = 1 \cdot x = x$
3. dla kazdego elementu ciala istnieje element przeciwny: $\forall\, x\, \exists\, (-x) \quad x + (-x) = 0$
4. dla kazdego $x \neq 0$ istnieje element odwrotny: $\forall\, x \neq 0\, \exists\, x^{-1} \quad x \cdot x^{-1} = 1$
5. $0 \neq 1$ - wyklucza zbior jednoelementowys

Jesli istnieja odpowiednie $-x,\ x^{-1}$, to sa one jedyne - dowod na cwiczeniach

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ sa cialami, natomiast $\mathbb{Z}$ nie jest cialem (nie ma elementu odwrotnego do 2, pierscienie)

Kazdy podzbior $K \subseteq \mathbb{C}$, ktory jest zamkniety na dodawanie, mnozenie oraz dla kazdego elementu K mozna znalezc w K element do niego przeciwny i odwrotny, tez jest cialem.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ z dodawaniem i mnozeniem modulo 5 jest cialem: jest element neutralny: $2 \cdot 3 = 4 \cdot 4 = 1$
$\{0, 1, ..., p - 1\}$, gdzie p jest licza pierwsza jest cialem (dowod z algorytmu euklidesa)

Dla kazdej liczby naturalnej n i dla kazdej liczby pierwszej p jest cialo, ktore ma dokladnie p^n elementow i sa to wszystkie ciala skonczone.

Dla dowolnego $d \in K$ mozemy zdefiniowac $\mathbb{Q}[d] = \{a + b \cdot d \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$

Jesli K jest cialem, to mozemy rozpatrzec zbior wszystkich wielomianow o wspolczynnikach w K: $K[X]$ i nie jest cialem (nie istnieje X^{-1}).
Mozemy rozpatrzyc tez zbior wiekszy, *cialo funkcji wymiernych $K(X)$*, czyli formalne ilorazy wspolczynnikow zK, tyle ze w mianowniku nie moze pojawic sie 0:

$$K(X) = \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in K[X], \mathbb{Q} \in 0\}$$

Jak dowodzic twierdzenia:

$$\forall x \in K \quad 0 \cdot a = 0$$

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a | + (-0 \cdot a)$$
$$0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a)$$
$$0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

PRZESTRZEN LINIOWA

PRZESTRZEN LINIOWA nad K to zbior V z dzialaniem dodawaniem i mnozeniem:
$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$
$$0 \in V$$

WLASNOSCI:

+ i $\cdot$ spelniaja oczywiste wlasnosci
Lacznosc mieszana dla mnozenia:

$$(\alpha \underset{K}{\cdot} \beta) \underset{V}{\cdot} \gamma = \alpha \underset{V}{\cdot} (\beta \underset{V}{\cdot} \gamma)$$

Rozdzielnosc mnozenia wzgledem dodawania:

$$\alpha \underset{V}{\cdot} (u \underset{K}{+} w) = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \alpha \underset{V}{\cdot} w$$

$$(\alpha \underset{V}{+} \beta) \underset{V}{\cdot} u = \alpha \underset{V}{\cdot} u \underset{V}{+} \beta \underset{V}{\cdot} v$$

PRZYKLADY:

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ to przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$

Dla kazdego iloczynu kartezjanskiego ciala, iloczyn ten jest cialem. Bardziej ogolnie mozna to ujac, ze jesli A jest dowolnym zbiorem, a K^A jest zbiorem wszystkich funkcji z A w K, to K^A jest przestrzenia liniowa nad K

$K[X]$ to zbior wielomianow o wspolczynnikach z K, to jest on przestrzenia liniowa nad K. Tak samo $K_n[X]$ (wielomiany co najwyzej stopnia n) rowniez sa przestrzenia liniowa.

$C(\mathbb{R})$ to zbior wszystkich funkcji ciaglych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i jest on przestrzenia liniowa nad $\mathbb{R}$

Jesli przemnozymy dowolny wetor przez 0, to dostaniemy wektor zerowy:

$$0 \cdot v = \vec{0}$$

Dla kazdego wektora z V i kazdego skalara z K istnieje dokladnie jeden wektor w taki, ze:

$$\forall\, v \in V\ \forall\, a \in K\ \exists! w \in V \quad a \cdot v + w = 0$$

Wezmy $v = -a^{-1} \cdot w$. Chcemy udowodnic rownanie

$$a \cdot v + w = 0$$

$$a \cdot (-a^{-1} \cdot w) + w = 0$$
$$(-1 \cdot 1) \cdot w + w = 0$$
$$(-1 + 1) \cdot w = 0$$
$$0 \cdot w = 0$$

Z tego wynika, ze $(-1) \cdot w = -w$ oraz $-(v + w) = (-v) + (-w)$.

LEMAT jesli V jest przestrzenia liniowa, a $W \subseteq V$, takim, ze $W \neq \emptyset$ oraz

$$\forall\, a \in K\ \forall\, w \in W \quad a \cdot w \in W$$

$$\forall\, w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W,$$

to W jest przestrzenia liniowa. Jest to odpowiednik twierdzenia dla cial.

DOWOD:

Wlasciwosci dodawania i odejmowania przenosza sie automatycznie. Zostaje sprawdzic, ze

1. $0 \in W$

2. $\forall\, w \in W\ \exists\ -w \in W$

1. Poniewaz $W \neq \emptyset$, stad istnieje jakies $w \in W$. Wowczas,

$$0 \cdot w = \vec{0}$$

z tego, ze W jest zamkniete na mnozenie przez skalary. Wiec pokazalismy, ze $0 \in W$.

2. Tak samo, skoro mozemy przemnozyc $w \in W$ przez kazdy skalar i otrzymac element W, Wowczas

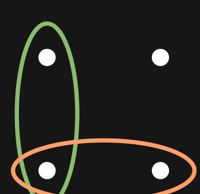
$$(-1) \cdot w = -w \in W$$

Podzbior $W \subseteq V$, ktorego istnienie udowodnilismy wyzej, nazywamy PODPRZESTRZENIA V i oznaczamy

$$W \leq V$$

PRZYKLADY:

Proste przechodzace przez 0 w K^2 sa podprzestrzenia. Niech $K = F_2 = \{0, 1\}$ (K to cialo dwuelementowe)



Tak samo proste przechodzace przez 0 w K^3 sa przestrzeniami. Na przyklad dla $K = F_3 = \{0, 1, 2\}$

PROSTA - podprzestrzen rozpieta przez jeden wektor, czyli bierzemy jeden wektor i patrzymy na wszystkie jego skalarne nierownosci.

W ogolnosci, $n > m \implies K^n \geq K^m$.

$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R})$ zbior funkcji rozniczkowalnych jest podprzestrzenia zbioru funkcji ciaglych. Ten z kolei jest podprzestrzenia zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ ($C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$):

$$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Zbior funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ zbiegajacych do dowolnego x_0 to tez jest podprzestrzenia:

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \lim_{x \to x_0} f(x) = 0\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Mozemy tez przekroic dwie podprzestrzenie. Na przyklad wszystkie funkcje rozniczkowane, ktore daza do 0.

Zbior ciagow spelniajacych rekurencje:

$$\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \ : \ \forall\, n \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

jest podprzestrzenia zbioru wszystkich ciagow o indeksach w $\mathbb{N}$ i wyrazach $\mathbb{R}$

....

LEMAT: dla dwoch podprzestrzeni $W_1, W_2 \leq V$ zachodzi:

1. $W_1 \cap W_2 \leq V$

2. $W = W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \ : \ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

czyli suma kompleksowa podprzestrzeni jest podprzestrzenia

1. lematu zostanie udowodniona NA CWICZENIACH.

2. Niepustosc jest oczywista. Chcemy sprawdzic, czy ten zbior jest zmakniety na dzialania.

Zmakniecie na mnozenie przez skalary:

$$a \in K, \quad w_1 + w_2 \in W$$
$$a \cdot (w_1 + w_2) = \underbrace{a \cdot w_1}_{\in W_1} + \underbrace{a \cdot w_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2 = W.$$

Zamkniecie na dodawanie:

$$(w_1 + w_2), (w_1', w_2') \in W, \quad w_1, w_1' \in W_1, \ w_2, w_2' \in W_2$$
$$(w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = w_1 + w_2 + w_1' + w_2' = \underbrace{(w_1 + w_1')}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w_2')}_{\in W_2} \in W$$

1. $W_1 \leq V \ \wedge \ W_1 \leq W_2 \implies W_2 \leq V$
2. $W_1, W_2 \leq V \ \wedge \ W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 \leq W_2$

CWICZENIA

....

KOMBINACJA LINIOWA

Dla pewnej przestrzeni liniowej V i zbioru $A \subseteq V$ OTOCZKA LINIOWA A to najmniejsza podprzestrzen V, ktora zaiwera A

$$\mathtt{Lin}(A) = \{v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \ : \ \alpha_k \in K \ \wedge \ v_k \in A\}$$

DOWOD:

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \in \mathtt{Lin}(A)$ mozna pokazac korzystajac z prostej indukcji.

Wystarczy pokazac, ze zbior takich wektorow jest podprzestrzenia.

$$\mathtt{Lin}(A) \neq \emptyset$$

Bo pusta suma jest rowna zero (czyli wektor zerowy)

$$\mathtt{Lin}(\emptyset) = \sum_{k=1}^{0} \alpha_k v_k = 0.$$

Wezmiemy dwa wektory bedace sumami wektorow w A:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k + \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l.$$

Rozpiszmy to:

$$\begin{array}{ll}
\gamma_1, \dots, \gamma_n & \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m} \\
\alpha_1, \dots, \alpha_n & \beta_1, \ \dots, \ \beta_m \\
v_1, \dots, v_n & w_1, \ \dots, \ w_m \\
u_1, \dots, u_n & u_{n+1}, \dots, u_{n+m}
\end{array}$$

Z tego widac, ze

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k + \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l = \sum_{j=1}^{n+m} \gamma_j u_j.$$

Czyli $\mathtt{Lin}(A)$ jest zamkniety na dodawanie.

Zamkniecie na mnozenie, przy pomocy sumy kompleksowej:

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha \cdot \alpha_k) v_k$$

Z powyzszego rozumowania wynika, ze

$$\texttt{Lin}(A) = \bigcap \{W \leq V \ : \ A \subseteq W\}$$

DOWOD:

Z definicji $\texttt{Lin}(A) \subseteq W$, czyli

$$\texttt{Lin}(A) \subseteq \bigcap \{W \leq V \ : \ A \subseteq W\},$$

a otoczka liniowa nalezy do tej rodziny podprzestrzeni:

$$\texttt{Lin}(A) \in \{W \leq V \ : \ A \subseteq W\}$$

wiec zawiera jego przekroj

$$\texttt{Lin}(A) = \bigcap \{W \leq V \ : \ A \subseteq W\}$$

KOMBINACJA LINIOWA wektorow $v_1, ..., v_n$ to element $\texttt{Lin}(v_1, ..., v_n)$, czyli wektor postaci

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

PRZYKLADY:

prosta rozpieta przez niezerowy wektor v:

$$\texttt{Lin}(v) = \{\alpha \cdot v \ : \ \alpha \in K\}$$

kombinacja punktow nalezacych do hiperboli na $\mathbb{R}^2$:

$$\texttt{Lin}(\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}) = \mathbb{R}^2$$

kombinacja liniowa wszystkich punktow na plaszczyznie:

$$\texttt{Lin}(\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1\}) = \mathbb{R}^3$$

$$A \subseteq B \implies \texttt{Lin}(A) \subseteq \texttt{Lin}(B)$$

DOWOD: $A \subseteq B \subseteq \texttt{Lin}(B)$ i $\texttt{Lin}(B) \leq V$, wiec $\texttt{Lin}(A) \leq \texttt{Lin}(B)$

$$\texttt{Lin}(\texttt{Lin}(A)) = \texttt{Lin}(A)$$

DOWOD: $\texttt{Lin}(A) \leq V$, wiec jest najmniejsza podprzestrzena zawierajaca $\texttt{Lin}(A)$

$$b \in \texttt{Lin}(A) \iff \texttt{Lin}(A) = \texttt{Lin}(A \cup \{b\})$$

DOWOD: $b \in \texttt{Lin}(A)$, wiec $A \subseteq A \cup \{b\} \subseteq \texttt{Lin}(A \cup \{b\})$ i $A \subseteq \texttt{Lin}(A) \subseteq \texttt{Lin}(A \cup \{b\})$.
Z drugiej strony, wiemy, ze $A \cup \{b\} \subseteq \texttt{Lin}(A)$, czyli $\texttt{Lin}(A \cup \{b\}) \subseteq \texttt{Lin}(\texttt{Lin}(A)) = \texttt{Lin}(A)$.
Dostajemy $\texttt{Lin}(A \cup \{b\}) \subseteq \texttt{Lin}(A)$ oraz $\texttt{Lin}(A) \subseteq \texttt{Lin}(A \cup \{b\})$. Mamy inkluzje w obie strony, takze $\texttt{Lin}(A \cup \{b\}) = \texttt{Lin}(A)$.

LINIOWO NIEZALEZNE

Mowimy, ze wektory $v_1, ..., v_n$ sa LINIOWO NIEZALEZNE (lnz), gdy

$$\sum \alpha_k v_k = 0 \implies \forall\, k \quad \alpha_k = 0$$

Zbior $A \subseteq V$ jest lnz, gdy kazdy (skonczony) zbior roznych wektorow z A jest lnz.