Zad 1. Sprawdz, ze $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \implies a=c \wedge b=d$

Z definicji pary uporzadkowanej wg. Kuratowskiego:

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne $abcd$ takie, ze $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$. Wowczas

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

Rozpatrzmy pypadki:

1. $a=b$

Wtedy mamy

$$\{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

i wtedy z aksjomatu ekstencjonalnosci

$$\{a\} = \{c\} = \{c,d\}$$

wiec $a=c=d$, czyli $a=c \wedge b=d$.

2. $a\neq b$

Wtedy $\{a\}\neq\{a,b\}$, stad wnioskujemy

$$\{c\} = \{a\},$$

wiec $c=a$.

Dalej zauwazamy, ze $\{a,b\}\neq\{c\}$, bo $c=a\neq b$, wiec

$$\{a,b\} = \{c,d\} = \{a,d\}$$

i poniewaz $a\neq b$, to $b=d$.

Zad 2. Udowodnij, ze $\bigcup\mathcal{P}(A) = A$.

DOWOD:

1. $\bigcup\mathcal{P}(A)\supseteq A$

Ustalmy dowolne $x\in A$. *Chcemy pokazac, ze* $x\in\bigcup\mathcal{P}(A)$. Zauwazmy, ze

$$A\in\mathcal{P}(A),$$

wiec z definicji sumy otrzymujemy

$$x\in\bigcup\mathcal{P}(A).$$

2. $\bigcup\mathcal{P}(A)\subseteq A$

Ustalmy dowolne $x\in\bigcup\mathcal{P}(A)$. Wowczas istnieje $B\in\mathcal{P}(A)$ takie, ze

$$x\in B.$$

Z definicji zbioru potegowego

$$B\subseteq A,$$

zatem z definicji zawierania $x\in A$.

Zad 3. Niech A bedzie zbiorem niepustym. Ktore z ponizszych twierdzen sa prawdziwe?

Jesli $A=\bigcup A$, to $\emptyset\in A$.

Teza $A=\bigcup A \implies \emptyset\in A$.

Z aksjomatu regularnosci wiemy, ze istnieje $x\in A$ taki, ze

$$(\heartsuit)\forall\, a\in A \quad \neg\,(y\in x).$$

Gdyby $\emptyset\neq x$, to istnialoby $z\in x$. Poniewaz $z\in x$ i $x\in A$, to

$$z\in\bigcup A,$$

czyli z zalozenia mamy $z\in A$, co jest sprzeczne z $(\heartsuit)$. Wobec tego $x=\emptyset\in A$.

Jesli $\emptyset\in A$, to $A=\bigcup A$.

NIE: Niech $A=\{\emptyset\}$. Wowczas $\emptyset\in\{\emptyset\}$ i $\bigcup A=\emptyset\neq\{\emptyset\}=A$

Jesli $\bigcup A=\bigcap A$, to $A=\{x\}$ dla pewnego x

Teza: $\bigcup A=\bigcap A \implies \exists\, x \quad A=\{x\}$

Niech $x\in A$. Zalozmy nie wprost, ze istnieje $y\in A$ takie, ze $y\neq x$. Bez straty ogoolnosci mozemy zalozyc, ze istnieje $t\in x$ i $t\notin y$.

Z definicji sumy $t\in\bigcup A$, a z drugiej strony, z definicji przekroju, $t\notin\bigcap A$. Czyli $\bigcap A\neq\bigcup A$ i otrzymujemy sprzecznosc z zalozeniem.

Zad 4. Ktora z ponizszych rownosci zachodzi dla dowolnego zbioru A?

$\bigcap\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

Po lewej szukamy wspolnego elementu wszystkich podzbiorow zbioru A - jest to $\emptyset$. Z prawej strony mam rodzine wszystkich przekrojow. Czyli zeby byc podzbiorem wszystkich podzbiorow zbioru A trzeba byc $\emptyset$

$\bigcap\{\mathcal{P}(B) : B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathcal{P}(B) : B \subseteq A\}$

$\mathcal{P}(A)$

Zad 5. Udowodnij, ze aksjomat pary wynika z pozostalych aksjomatow teorii ZF_0.