

Wprowadzenie do teorii zbiorów

Lista zadań nr 3.

1. Pokaż, że dobry porządek $\langle X, <_X \rangle$ zanurza się (tzn. jest izomorficzny z pewnym podzbiorem) w $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przeliczalny.
- 1,5 Udowodnij, że obie definicje dodawania (mnożenia) są równoważne.
2. Udowodnij, że $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.
3. Udowodnij, że
 - a) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
 - b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
4. Udowodnij, że
 - a) $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$;
 - b) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
 - c) $\alpha \leq \beta \Rightarrow (\exists! \delta) \alpha + \delta = \beta$.
5. Udowodnij, że $(\forall \alpha)(\exists \beta)(\exists n \in \omega) \text{Lim}(\beta) \wedge \alpha = \beta + n$.
6. Udowodnij, że $\alpha \cdot \beta = \{\alpha \cdot \xi + \eta : \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\}$.
7. Zdefiniuj (rekurencyjnie) potęgowanie liczb porządkowych.
8. Udowodnij, że liczba ω^ω (potęgowanie porządkowe!) jest przeliczalna.
9. Wykaż, że jeśli $\text{Lim}(\alpha)$, to następujące warunki są równoważne:
 - a) $(\forall \beta, \gamma < \alpha) \beta + \gamma < \alpha$;
 - b) $(\forall \beta < \alpha) \beta + \alpha = \alpha$;
 - c) $(\forall X \subseteq \alpha) \text{ot}(X) = \alpha \vee \text{ot}(\alpha \setminus X) = \alpha$;
 - d) $(\exists \delta) \alpha = \omega^\delta$.
10. Wykaż, że jeśli $\alpha < \beta$, to $R_\alpha \subseteq R_\beta$.
11. Wykaż, że $R_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha$.
12. Napisz porządną (rekurencyjną) konstrukcję $\text{tcl}(x)$.
13. Pokaż, że konstrukcja z zad. 12 jest poprawna (tzn. że zdefiniowany obiekt to istotnie $\text{tcl}(x)$).
14. Pokaż, że $x \in y \Rightarrow \text{tcl}(x) \subseteq \text{tcl}(y)$.
15. Pokaż, że $x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$.

Zadania dodatkowe

16. Napisz formuły ψ_1, ψ_2 , użyte w twierdzeniu o rekursji pozaskończzonej do zdefiniowania dodawania i mnożenia liczb porządkowych.