Zad 1. Znalezc wzor na $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k$ i $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 10^k$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = (1+r)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-10)^k = (1-10)^n = (-9)^n$$

Zad 2. Uzywajac argumentacji kombinatorycznej udowodnic tozsamosc dla $n \geq 3$ (w podanej formie)

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}$$

Lewa strona tozsamosci mowi nas, na ile sposobow mozemy wybrac zbior k-elementowy z n elementow bez zbiorow niezawierajacych 3 wyroznionych elementy.

Prawa strona najpierw zaznacza jeden z tych elementow i sprawdza na ile sposobow mozemy wybrac zbiory zawierajace ten element (dokladany $k-1$ do pierwszego). Pozniej mowi nam, na ile sposobow mozemy wybrac zbiory zawierajace drugi element, a na koncu trzeci i sumuje te ilosc. Ostatecznie, otrzymujemy ilosc zbiorow zawierajacych co najmniej jeden z wyroznionych elementow.

Zad 3. Wyprowadz wzor

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + x\binom{n}{1} + x^2\binom{n}{2} + ... + x^n\binom{n}{n}$$

$$n(1+x)2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + ... + nx^{n-1}\binom{n}{n}$$

Dla $x = 1$:

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n}$$

Zad 4. Przyjmijmy, ze dla $x \in \mathbb{R}$ i liczby naturalnej $k \geq 1$ definiujemy:

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$$

Dodatkowo, $\binom{x}{0} = 1$ i $\binom{x}{-k} = 0$. Udowodnic, ze dla wszystkich liczb rzeczywistych x i wszystkich liczb calkowitych k i m zachodza wzory

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}
L = \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} &= \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!} + \frac{x(x-1)...(x-k)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{x(x-1)...(x-k+1)(k+1) + x(x-1)...(x-k)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{x(x-1)...(x-k)((k+1)(x-k+1)+1)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{(x+1)x(x-1)...(x-k+1)}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$$

$$\binom{x}{m}\binom{m}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{m-k}$$

Zad 5. Uzywajac argumentacji kombinatorycznej pokazac, ze dla wszystkich dodatnich liczb calkowitych m_1, m_2 zachodza wzory

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}$$

Prawa strona rownosci mowi nam, na ile sposobow mozna wybrac n elementow ze zbioru zawierajacego m_1+m_2 elementow.

Prawa strona sumuje sposoby na jakie najpierw ze zbioru m_1 elementow mozna wybrac 0, 1, 2... elementow, a potem dobrac do tego $n, n-1, n-2...$ elementow ze zbioru m_2. Czyli obie strony daja ten sam wynik.

Zad 6. Znalzc wzor na KUWRA NIE

Zad 7. Udowodnic za pomoca wzoru Taylora, ze dla $|x|<1$ i dowolnej liczby α zachodzi wzor

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

$$L=(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{(\alpha-1)\alpha}{2}x^2+\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha}{3!}x^3+...=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k=P$$