Wstęp do Teorii Zbiorów

notatki na podostawie wykładów J. Kraszewskiego

Weronika Jakimowicz

Ze wstępem do matematyki jest jak z uświadamianiem sekualnym dzieci – mówi im się prawdę, ale nie mówi im się wszystkiego.

Spis treści

1 JĘZYK LOGIKI

1.1 FUNKCJE

FUNKCJA – zbiór par uporządkowanych o własności jednoznaczości, czyli nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i dwóch różnych następnikach.

Teraz dziedzinę i przeciwdziedzinę określamy poza definicją funkcji – nie są na tym samym poziomie co sama funkcja:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \,:\, (\exists\, y)\, \langle x, y\rangle \in f\}$$
$$\mathrm{rng}(f) = \{y \,:\, (\exists\, x)\, \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Warto pamiętać, że definicja funkcji jako *podzbioru* $f \in X \times Y$ *takiego, że dla każdego* $x \in X$ *istnieje dokładnie jeden* $y \in Y$ *takie, że* $\langle x, y\rangle \in f$ jest tak samo poprawną definicją, tylko kładzie nacisk na inny aspekt funkcji.

1.2 OPERACJE UOGÓLNIONE

Dla rodziny indeksowanej $\{A_i \,:\, i \in I\}$ definiujemy:

- jej sumę: $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \,:\, (\exists\, i \in I)\, x \in A_i\}$
- jej przekrój: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \,:\, (\forall\, i \in I)\, x \in A_i\}$

Dla nieindeksowanej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ definiujemy:

- suma: $\bigcup \mathcal{A} = \{x \,:\, (\exists\, A \in \mathcal{A})\, x \in A\}$
- przekrój: $\bigcap \mathcal{A} = \{x \,:\, (\forall\, A \in \mathcal{A})\, x \in A\}$

Formalnie, indeksowana rdzina zbiorów jest funkcją ze zbioru indeksów w rodzinę zbiorów, więc powinna być zapisywana w nawiasach trójkątnych (para uporządkowana). Stosowany przez nas zapis w nawiasach klamrowych oznacza zbiór wartości takiej funkcji i nie ma znaczenia czy dany podzbiór pojawi się w nim wielokrotnie. Nie przeszkadza to więc w definiowaniu sumy czy przekroju.

UOGÓLNIONY ILOCZYN KARTEZJAŃSKI (uogólniony produkt) zbiorów:

Dla dwóch i trzech zbiorów mamy odpowiednio:

$$A_1 \times A_2 = \{\langle x, y\rangle \,:\, x \in A_1 \wedge y \in A_2\}$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle x, y, z\rangle \,:\, x \in A_1 \wedge y \in A_2 \wedge z \in A_3\}.$$

Pierwszym pomysłem na definiowanie iloczynu kartezjańskiego trzech i wiecej zbiorów będzie definicja rekurencyjna:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Pojawia się problem formalny – iloczyn kartezjański nie jest łączny:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$\langle\langle a_1, a_2\rangle a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle.$$

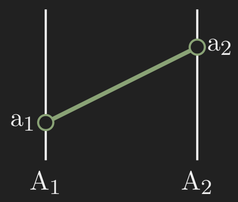
Mimo, że iloczyn kartezjański nie jest łączny, matematycy nie mają problemu uznawać, że jest łączny, gdyż istnieje naturalna, kanoniczna bijekcja, która lewej stronie przypisuje prawą stronę.

Niech $\langle A_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów, czyli

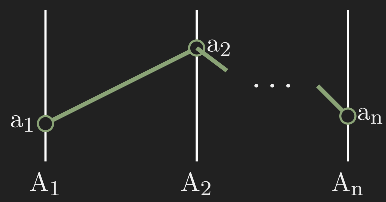
$$A : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A(i) = A_i$$

Wyobraźmy sobie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów nie jako punkt na płaszczyźnie, ale jako dwuelementowy ciąg:



To przedstawienie łatwo jest przełożyć na nieskończenie długi iloczyn kartezjański, wystarczy dorysować kolejne osie z elementami kolejnego podzbioru rodziny:



W ten sposób powstaje funkcja, która kolejnym indeksom przypisuje element z tego indeksu:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$f(i) \in A_i.$$

Według tego, uogólniony iloczyn kartezjański to zbiór funkcji ze zbioru indeksowego w rodzinę indeksowaną:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^I \ : \ (\forall\, i \in I)\ f(i) \in A_i\}$$

Jednak dla $I = \{1, 2\}$ nie zachodzi równość:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq A_1 \times A_2$$

Po lewej mamy zbiór funkcji, a po prawej iloczyn kartezjański. Możemy pokazać naturalną bijekcję między lewą a prawą stroną, ale byty są róże. Wystarczy pamiętać, że mamy co innego i możemy się tym nie przejmować <3

1.3 JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU

JĘZYK RZĘDU ZERO, czyli rachunek zdań: $p, q, r, ..., \vee, \wedge, \neg, \implies, \iff$

JĘZYK PIERWSZEGO RZĘDU jest nadzbiorem języka rzędu zero

część logiczna:

1. symbole zmiennych: $V = \{x_0, x_1, ...\}$
2. symbole spójników logicznych: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff\}$
3. symbole kwantyfikatorów: $\{\forall, \exists\}$
4. symbol równości: $=$

część pozalogiczna:

1. symbole funkcyjne: $F = \{f_i : i \in I\}$
2. symbole relacyjne (predykaty): $R = \{r_j : j \in J\}$
3. symbole stałe: $C = \{c_k : k \in K\}$

ARNOŚĆ – odpowiada liczbie argumentów funkcji lub relacji. Każdy symbol ma swoją arność.

SYGNATURA – zawiera informację o tym, ile jest symboli funkcyjnych, relacyjnych lub stałych i jakiej są arności w danym języku. Sygnatura charakteryzuje język.

1.4 SYNTAKTYKA vs SEMANTYKA

Znała suma cała rzeka,
Więc raz przybył lin z daleka
I powiada: "Drogi panie,
Ja dla pana mam zadanie,
Jeśli pan tak liczyć umie,
Niech pan powie, panie sumie,
Czy pan zdoła w swym pojęciu,
Odjąć zero od dziesięciu?"
(...)
"To dopiero mam z tym biedę -
Może dziesięc? Może jeden?"

Jak odjąc 0 od 10:
 semantycznie: 10 - 0 = 10
 syntaktycznie: od ciągu 1 i 0 odjęcie 0 to zostawienie tylko 1

SEMANTYKA - patrzy na znaczenie zapisów, nie sam napis.
SYNTAKTYKA - interesuje ją tylko zapis, język, a znaczenia nie ma.

1.5 KONSTRUOWANIE JĘZYKA

TERMY - bazowy zbiór termów to
zbiór zmiennych i zbiór stałych:

$$T_0 = V \cup C$$

Do ich budowy wykorzystujemy symbole funkcyjne (F)

Założmy, że mamy skonstruowane termy aż do rzędu n i chcemy skonstruować termy rzędu $n+1$. Jeśli mamy symbol funkcyjny arności k, to termem jest zastosowanie tego symbolu do wczesniej skonstruowanych termów, których mamy k:

$$f \in F \quad f \text{ -arności } k$$

$$F(t_1, ..., t_k) \quad t_1, ..., t_k \in \bigcup_{i=0}^{n} T_i$$

Czylil jeśli mamy zbiór termów, to *biorąc wszystkie dostępne symbole funkcyjne i stosując je na wszystkie możliwe sposoby do dotychczas skonstruowanych termów* tworzone są nowe termy.

Termy to potencjalne wartości funkcji

FORMUŁY - budowane są rekurencyjnie, zaczynając
od formuł atomowych:

$$t = s, \quad t, s \in TM$$

stosując wszystkie relacje równoważności termów

$$r \in R \quad r(t_1, ..., t_k)$$

zastosowanie symbolu relacyjnego na odpowiedniej ilości termów tworzy formułę

Bazowym poziomem frmuł jest formuła atomowa:

$$F_{m_0} = \{\varphi : \varphi \text{ - formuła atomowa}\}$$

Jeśli mamy F_{m_k} dla pewnego $k < n$, czyli wszystkie formuły poniżej n zostały skonstruowane, to

$$F_{m_n} : \neg(\varphi),\ \varphi \vee \phi,\ \varphi \wedge \phi, ... \quad \text{dla } \varphi, \phi \in \bigcup_{k<n} F_{m_k},$$

czyli używamy wszystkich spójników logicznych dla poprzednich formuł

$$F_{m_n} : (\forall\, \varphi)\ (\exists\, x_i) \quad \text{dla } \varphi \in \bigcup_{k<n} F_{m_k},\ x_i \in V$$

kwantyfikujemy też po wszystkich możliwych zmiennych wszystkiemożliwe formuły

$$FM = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{m_n}$$

1.6 JĘZYK TEORII MNOGOŚCI

$$L = \{\in\}$$

składa się z jednego binarnego predykatu,
który nie jest jeszcze należeniem

W racuhnku zdań przejście z syntaktyki do semantyki to nadanie symbolom wartości prawda lub fałsz.

SYSTEM ALGEBRAICZNY:

$$\mathcal{A} = \langle A, \{F_i\ :\ i \in I\}, \{R_j\ :\ j \in J\}, \{C_k\ :\ k \in K\}\rangle$$

odpowiednio: zbiór (uniwersum), funkcje na A, relacje na A, stałe w A

przykłady: $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \leq\rangle$

Język L możemy interpretować w systemie $\mathcal{A}$ o ile mają one tę samą sygnaturę.

INTERPRETACJA to funkcja ze zbioru wartości w uniwersum:

$$i\ :\ V \to \mathcal{A},$$

którą można rozszerzyć do funkcji ze zbioru termów w uniwersum:

$$\bar{i}\ :\ TM \to \mathcal{A}$$
$$i \subseteq \bar{i}$$

Ponieważ sygnatury są takie same, to każdemu symbolowi funkcyjnemu możemy przypisać funkcję o dokładnie tej samej arności. *Czyli jeśli dany symbol funkcyjny jest nakładany na termy, to odpowiadająca mu funkcja jest nakładana na wartości tych termów.*

W systemie $\mathcal{A}$ formuła φ jest spełniona przy interpretacji i:

$$\mathcal{A} \models \varphi[i]$$

Zaczynamy od formuł atomowych, czyli:

$\mathcal{A} \models (t = s)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą interpretację (czyli $\bar{i}(t) = \bar{i}(s)$)
$\mathcal{A} \models r_j(t_1, ..., t_k)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedająca temu predykatowi relacja zachodzi na wartościach termów (czyli $R_j(\bar{i}(t_1), ..., \bar{i}(t_k))$)
$\mathcal{A} \models (\neg\, \varphi)[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $\mathcal{A} \models \varphi[i]$, i tak ze wszystkimi spójnikami logicznymi
$\mathcal{A} \models (\forall\, x_m)\ \varphi[i]$	wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\mathcal{A} \models \varphi[i(\frac{x_m}{a})]$ (sprawdzamy dla konkretnego a czy spełniaφ, a potem dla x_m przypisujemy to a, natomiast inne wartości dostają podstawienie $(\frac{x_m}{a})$?)

2 AKSJOMATY

Zbiór oraz należenie uznajemy za pojęcia pierwotne, więc nie definiujemy ich tylko opisujemy ich własności.

2.1 AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI

zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy

$$(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (x = y \iff (\forall\, z)\ (z \in x \iff z \in y))$$

Od tego momentu zakładamy, że *istnieją wyłącznie zbiory*. Nie ma nie-zbiorów. Naszym celem jest budowanie uniwersum zbiorów i okazuje się, że w tym świecie można zinterpretować całą matematykę.

2.2 AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO

istnieje zbiór pusty ∅

$$(\exists\, x)(\forall\, y)\neg\, y \in x$$

Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności oraz aksjomaty zbioru pustego można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

1. istnienie: aksjomat zbioru pustego

2. jedyność: niech P_1, P_2 będą zbiorami pustymi. Wtedy dla dowolnego z zachodzi $\neg\, z \in P_1 \wedge \neg\, z \in P_2$, czyli $z \in P_1 \iff z \in P_2$. Wobec tego, na mocy aksjomatu ekstensjonalności mamy $P_1 = P_2$.

Przyjrzyjmy się następującemu systemowi algebraicznemu:

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N} \cap [10, +\infty), < \rangle$$

W systemie spełnione są oba te aksjomaty:

$$\mathcal{A}_1 \models A_1 + A_2$$

Ponieważ nie mamy podanej interpretacji, a nasze aksjomaty są spełnione, to spełnione są dla dowolnej interpretacji.

2.3 AKSJOMAT PARY

dla dowolnych zbiorów x, y istnieje para $\{x, y\}$

$$(\forall\, x, y)\ (\exists\, z)\ (\forall\, t)\ (t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Para nieuporządkowana jest jednoznacznie wyznaczona. Aksjomat mówi tylko o istnieniu z, a można łatwo udowodnić, korzystając z aksjomatu ekstencjonalności, że takie z istnieje tylko jedno.

Niech P_1, P_2 będa parami nieuporządkowanymi x, y. W takim razie jesli $t \in P_1$, to $t = x \vee t = y$. Tak samo $t \in P_2 \iff t = x \vee t = y$. Czyli $P_1 = P_2$ bo posiadają te same elementy.

SINGLETONEM elementu x nazywamy zbiór $\{x\} := \{x, x\}$

PARĄ UPORZĄDKOWANĄ (wg. Kuratowskiego)
elementów x i y nazyway zbiór:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dla dowolnych elementów a, b, c, d zachodzi:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff a = c \land b = d$$

DOWOD:

Rozważmy dwa przypadki:

1. $a = b$

$$\langle a, a\rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

Czyli jeśli $x \in \{\{a\}\}$, to $x = \{a\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d\rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

A więc jeśli $x \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie mamy $\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$, a więc z aksjomatu ekstensjonalności, $a = c = d$.

2. $a \neq b$

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Jeśli więc $x \in \langle a, b\rangle$, to $x = \{a\}$ lub $x = \{a, b\}$. Z drugiej strony mamy

$$\langle c, d\rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Jeśli $x \in \langle c, d\rangle$, to $x = \{c\}$ lub $x = \{c, d\}$. W takim razie otrzymujemy $\{c\} = \{a\}$ i $\{c, d\} = \{a, b\}$. Z aksjomatu ekstensjonalności mamy $a = c$ oraz $d = b$.

i smiga

2.4 AKSJOMAT SUMY

Dla dowolnego zbioru istnieje jego suma

$$(\forall\ x)\ (\exists\ y)\ (\forall\ z)\ (z \in y \iff (\exists\ t)\ (t \in x \land z \in t))$$

Ponieważ wszystko w naszym świecie jest zbiorem, to *każdy zbiór możemy postrzegać jako rodzinę zbiorów* - jego elementy też są zbiorami. W takim razie suma tego zbioru to suma rodziny tego zbioru.

Suma jest określona jednoznacznie i oznaczamy ją $\bigcup x$.

DOWOD:

Załóżmy nie wprost, ze istnieją dwie sumy zbioru x: S_1 i S_2. Wtedy

$$(\forall\ z)(z \in S_1 \iff (\exists\ t \in x)(z \in t))$$

$$(\forall\ z)(z \in S_2 \iff (\exists\ t \in x)(z \in t))$$

Zauważamy, że

$$z \in S_1 \iff (\exists\ t \in x) z \in t \iff z \in S_2$$

a więc S_1 i S_2 mają dokładnie te same elementy, więc z aksjomatu ekstencjonalności są tym samym zbiorem.

i smiga

Suma dwóch zbiorów:

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\}$$

DOWOD:

Ustalmy dowolne z. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} z \in \bigcup\{z, y\} &\overset{4}{\iff} (\exists\ t)\ (t \in \{x, y\} \land z \in t) \overset{3}{\iff} (\exists\ t)((t = x \lor t = y) \land z \in t) \iff \\ &\iff (\exists\ t)\ ((t = x \land z \in t) \lor (t = y \land z \in t)) \iff \\ &\iff (\text{exists}\ t)(t = x \land z \in t) \lor (\exists\ t)(t = y \land z \in t) \implies \\ &\implies (\exists\ t)(z \in x) \lor (\exists\ t)(z \in y \iff z \in x \lor z \in y) \end{aligned}$$

i smiga

2.5 AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

dla każdego zbioru istnieje jego zbiór potęgowy

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z) z \in y \iff (\forall\ t \in z) t \in x$$

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z)\ z \in y \iff z \subseteq x$$

Zbiór potęgowy jest wyznaczony jednoznacznie i oznaczamy go $\mathcal{P}(x)$

DOWOD:

Załóżmy, nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory potęgowe P_1 i P_2 dla pewnego zbioru x. Wówczas

$$(\forall\ z)\ z \in P_1 \iff z \subseteq x$$

$$(\forall\ z)\ z \in P_2 \iff z \subseteq x$$

Zauważamy, że

$$z \in P_1 \iff z \subseteq x \iff z \in P_2,$$

czyli zbiory P_1 i P_2 mają dokładnie te same elementy, więc na mocy aksjomatu ekstencjonalności $P_1 = P_2$

i smiga

2.6 AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

To tak naprawdę schemat aksjomatu, czyli nieskończona rodzina aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(t)$ będzie formułą języka teorii mnogości. Wtedy dla tej formuły mamy $A_{6\varphi}$ dla każdego zbioru x istnieje zbiór, którego elementy spełniają własność φ

$$(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t))$$

FULL VERSION: niech $\varphi(t, z_0, ..., z_n)$ będzie formułą jezyka teorii mnogości. Wtedy pozostałe zmienne wolne będa parametrami (zapis skrócony $z_0, ..., z_n := \overline{z}$)

Dla każdego układu parametrów i dla każdego x istnieje y taki, że dla każdego $t \in y$ t należy do x i t spełnia formułę φ

$$(\forall\ z_0)...(\forall\ z_n)(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ t)(t \in y \iff t \in x \wedge \varphi(t, z_0, ..., z_n))$$

Weźmy półprostą otwartą:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 0\},$$

druga półprosta to

$$(1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 1\}$$

i tak dalej. Czyli ogólna definicja półprostej to:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > a\}.$$

Dla każdej z tych półprostych trzeba wziąc inną formułę, które wszystkie są zdefiniowane za pomocą formuły

$$\varphi(x, a) = (x > a),$$

gdzie a funkcjonuje jako parametr.

2.7 AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA

Ostatni aksjomat konstrukcyjny, jest to schemat rodziny aksjomatów

SIMPLIFIED VERSION: niech $\varphi(x,y)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że:

$$(\forall\, x)(\exists\, !\, y)\varphi(x,y).$$

Wówczas dla każdego zbioru x istnieje zbiór $\{z : (\exists\, t \in x)\ \varphi(t,z)\}$

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\ (z \in y \iff (\exists\, t \in x)\ \varphi(t,z))$$

Czyli każdy zbiór można *opisać za pomocą operacji*.

FULL VERSION: niech $\varphi(x,y,p_0,\ldots,p_n)$ będzie formułą języka teorii mnogości.

$$(\forall\, p_0),\ldots,(\forall\, p_n)\ ((\forall\, x)\ (\exists\, !y)\ \varphi(x,y,\overline{p}) \implies (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\ (z \in y \iff (\exists\, t \in x)\ \varphi(t,z,\overline{p})))$$

2.8 KONSTRUKCJE NA ZBIORACH SKOŃCZONYCH

Niech x,y będą dowolnymi zbiorami. Wtedy definiujemy:

$x \cap y = \{t \in x : t \in y\}$
$x \setminus y = \{t \in x : t \notin y\}$
$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : (\exists\, s \in x)(\exists\, t \in y)\ z = \langle s,t\rangle\}$

Formalnie stara definicja iloczynu kartezjańskiego nie działa w nowych warunkach, bo nie wiemy z czego wyróżnić tę parę uporządkowaną. Ponieważ $s,t \in x \cup y$, mamy

$$\{s\},\{s,t\} \subseteq x \cup y,$$

a więc

$$\{\{s\},\{s,t\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y).$$

Czyli nasza para uporządkowana jest elementem zbioru potęgowego zbioru potęgowego sumy zbiorów.

$\bigcap x = \{z \in \bigcup x : (\forall\, y \in x)\ z \in y\}$ i wówczas $\bigcap \emptyset = \emptyset$

RELACJA - definiujemy $\mathrm{rel}(r)$ jako dowolny zbiór par uporządkowanych:

$$\mathrm{rel}(r) := (\exists\, x)(\exists\, y)\ r \subseteq x \times y$$

FUNKCJA - relcja, która nie ma dwóch par o tym samym poprzedniku i różnych następnikach:

$$\mathrm{fnc}(f) := \mathrm{rel}(f) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)\ (\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f) \implies y = x$$

Dziedzinę i zbiór wartości możemy wówczas zdefiniować jako:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \bigcup\bigcup f : (\exists\, y)\langle x,y\rangle \in f\}$$

$$\mathrm{rng}(f) = \{y \in \bigcup\bigcup f : (\exists\, x)\langle x,y\rangle \in f\},$$

ponieważ

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in f \implies \{x\},\{x,y\} \in \bigcup f \implies x,y \in \bigcup\bigcup f$$

Dopóki działamy na zbiorach skończonych, wynikiem operacji zawsze będzie kolejny zbiór skończony - niemożliwe jest otrzymanie zbioru nieskończonego.

2.9 AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Istnieje zbiór induktywny:

$$(\exists\, x)\ (\emptyset \in x \wedge (\forall\, y \in x)\ (y \cup \{y\} \in x))$$

Na początku do naszego zbioru x dodajemy $\emptyset$. Potem, skoro $\emptyset$ należy do x, to należy też $\{\emptyset\}$. Ale skoro do x należy $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, to również $\{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$ jest jego elementem i tak dalej.

TW. Istnieje zbiór induktywny najmniejszy względem zawierania, czyli taki, który zawiera się w każdym innym zbiorze induktywnym.

DOWOD:

Niech x będzie zbiorem induktywnym, który istnieje z aksjomatu nieskończoności. Niech

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : y \text{ jest zbiorem induktywnym}\}$$

Chcę pokazać, że ω jest zbiorem induktywnym, czyli $\emptyset \in \omega$.

$$\emptyset \in \omega \iff \emptyset \in y \text{ dla każdego zbioru induktywnego } y \subseteq x$$

Ponieważ każdy zbiór induktywny zawiera $\emptyset$, także ω zawiera $\emptyset$.

Pozostaje pokazać, że dla dowolnego $t \in \omega$ mamy

$$t \cup \{t\} \in \omega$$

Dla każdego zbioru induktywnego $y \subseteq x$ mamy $t \in y$. ale ponieważ y jest zbiorem induktywnym, mamy

$$t \cup \{t\} \in y.$$

Z definicji przekroju zbioru x mamy

$$t \cup \{t\} \in \bigcap \{y \in \mathcal{P}(x) : \ y \text{ jest zbiorem induktywnym}\} = \omega$$

Czyli istnieje zbiór induktywny ω będący przekrojem wszystkich innych zbiorów induktywnych. Pokażemy teraz, że jest to zbiór najmniejszy.

Niech z będzie dowolnym zbiorem induktywnym. Wtedy $z \cap x$ jest zbiorem induktywnym i $z \cap x \subseteq x$. Czyli z jest jednym z elementów rodziny, której przekrój daje ω:

$$z \cap x \supseteq \{y \in \mathcal{P}(x) : Y \text{ zb. ind.}\} = \omega$$

i smiga

Każdy element $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$... możemy utoższamić z kolejnymi liczbami naturalnymi. W takim razie ten najmniejszy zbiór induktywny będzie utożsamiany ze zbiorem liczb naturalnych. Konsekwencją tego jest *zasada indukcji matematycznej*.

Niech $\varphi(x)$ będzie formułą ozakresiie zmiennej $x \in \mathbb{N}$ takiej, że zachodzi $\varphi(0)$ oraz

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \varphi(n) \implies \varphi(n+1).$$

Wówczas

$$(\forall\, z \in \mathbb{N})\ \varphi(n)$$

DOWOD:

Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}.$$

Wtedy $A \in \mathbb{N}$ oraz A jest induktywny. Kolejne zbiory należące do zbioru induktywnego utożsamialiśmy z $n \in \mathbb{N}$, więc skoro $\varphi(n)$ należy do tego zbioru induktywnego, to również $\varphi(n+1)$ należy do A. Skoro A jest zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq A$, więc $A = \mathbb{N}$.

i smiga

2.10 AKSJOMAT REGULARNOŚCI

Do tej pory poznaliśmy aksjomaty o instnieniu i serie aksjomatów konstrukcyjnych. Aksjomat regularności nie jest żadnym z nich.

W każdym niepustym zbiorze istnieje element $\in$-minimalny:
$$(\forall\, x)\, x \neq \emptyset \implies ((\exists\, y \in x)\, (\forall\, z \in x)\, \neg\, z \in y),$$
a więc eliminowane są patologie jak np: $x \in x$, $y \in y \in x$.

Antynomia Russlla,
$$\{x : x \notin x\},$$
jest eliminowana przez aksjomat regularności.

2.11 AKSJOMAT WYBORU

Dla każdej rozłącznej rodziny parami rozłącznych zbiorów niepustych istnieje SELEKTOR
$$(\forall\, x)\, ((\forall\, y, z \in x)\, (y \neq \emptyset\, \wedge\, (y \neq z \implies y \cap z = \emptyset)) \implies (\exists\, s)(\forall\, y \in x)(\exists\, !t)\, t \in s \cap y)$$

Problematyczne nie jest znalezienie punktów, które są reprezentantami zbiorów naszej rodziny, a wskazanie zbioru, który je wszystkie zawiera. Dlatego w tym może nam pomóc akjomat wyboru. Wystarczy pokazać, że rozważamy rodzinę rozłącznych zbiorów i już z tego wiemy, że możemy wybrać selektor. Handy.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO:

Kulę możemy rozłożyć na 5 kawałków i przesuwać je izometrycznie w taki sposób, żeby złożyć z nich dwie identyczne kule jak ta, którą mieliśmy na początku. Kawałki na które dzielimy są niemieżalne, nie mają objętości, są maksymalnie patologiczne, ale nadal możemy powiedzieć że istnieją korzystając z aksjomatu wyboru. Daje on nam tylko informację, że istnieje selektor, a nie o tym jak on wygląda, więc może być absurdalny i patologiczny jak tylko ma ochotę.

FUNKCJA WYBORU - niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów niepustych. Funkcją wyboru dla rodziny $\mathcal{A}$ nazywamy wtedy dowolną funkcję f:
$$f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$$
$$(\forall\, A \in \mathcal{A})\; f(A) \in A$$
Aksjomat wyboru jest równoważny temu, że dla każdej rozłącznej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru (selektor).

Dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzi
$$|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$$

DOWOD:

Musimy skonstruować zbiór częściowo uporządkowany X, do którego będziemy mogli zastosować LKZ. Elementami tego zbioru niech będą przybliżenia tego, co chcemy otrzymać:
$$X = \{f\, :\, \mathrm{fnc}(f)\, \wedge\, \mathrm{dom}(f) \subseteq A\, \wedge\, \mathrm{rng}(f) \subseteq B\, \wedge\, f \text{ jest } 1-1\}$$

3 LICZBY PORZĄDKOWE

3.1 LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA:

Jeśli $\langle X, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch jest ograniczony z góry, to w X istnieje element maksymalny.

Suma przeliczalnie wielu przeliczalnych zbiorów jest przeliczalna:

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})\ |A_n| \leq \aleph 0 \implies \aleph_0 \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

DOWOD:

Ponieważ $|A_n| \leq \aleph_0$, to istnieje bijekcja

$$f_n : \mathbb{N} \to A_n.$$

Chcemy pokazać, że istnieje też bijekcja:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$f(n, k) = f_n(k) \quad (☕)$$

Musimy znać wszystkie elementy (f_n) jednocześnie, więc skorzystamy z aksjomatu wyboru. Rozpatrzmy zbiór funkcji:

$$F_n = \{\varphi \in S_n^{\mathbb{N}}\ :\ \varphi \text{ jest bijekcją}\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n^{\mathbb{N}}$ oznacza wszstkie funkcje

$$g : \mathbb{N} \to A_n$$

Niech F będzie funkcją wyboru dla rodziny

$$\{F_n\ :\ n \in \mathbb{N}\},$$

czyli każdej rodzinie przypisujemy element tej rodziny:

$$F(F_n) \in F_n.$$

Opiszmy (☕) korzystając z funkcji wyboru:

$$f(n, k) = F(F_n)(k).$$

Ponieważ $F(F_n)$ jest bijekcją, to również funkcja f jest bijekcją.

i smiga

Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi

$$|A| \leq |B|\ \vee\ |B| \leq |A|$$

DOWOD:

Musimy skonstruować zbiór częściowo uporządkowany X, do którego będziemy mogli zastosować LKZ. Chcemy pokazać, że istnieje iniekcja lub suriekcja między tymi dwoma zbiorami, więc potrzebujemy zbioru zawierającego funkcje z jednego do drugiego:

$$X = \{f : \mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq A \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq B \wedge f \text{ jest } 1-1\}.$$

Rozpatrzmy porządek $\langle X, \subseteq$. Aby zastosować do niego LKZ musimy sprawdzić założenia. Weźmy łańcuch X:

$$\mathcal{L} \subseteq X.$$

Musimy pokazać, że ma on ograniczenie górne. Niech

$$L = \bigcup \mathcal{L}.$$

Ponieważ każdy element $\mathcal{L} \in L$, to L jest ograniczeniem górnym $\mathcal{L}$.

Należy teraz pokazać, że L jest elementem zbioru X, czyli spełnia warunki:

1. L jest zbiorem par uporządkowanych - bezpośrednio z tego, że L jest sumą łańcucha $\mathcal{L} \subseteq X$.
2. L jest funckją, czyli

$$(\forall\, x, y, z)\, (\langle x, z\rangle \in L \wedge \langle x, z\rangle \in L) \implies y = z.$$

Ustalmy dowolne x, y, z takie, że $\langle x, y\rangle \in L$ oraz $\langle x, z\rangle \in L$. Zatem istnieją $F, G \in \mathcal{L}$ takie, że

$$\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in G.$$

Ponieważ $\mathcal{L}$ ma ograniczenie górne i jest łańcuchem, to wszystkie jego elementy mogą być między sobą porównywane. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że $F \subseteq G$ i z tego wynika, że

$$(\langle x, y\rangle \in G \text{ i } \langle x, z\rangle \in G) \implies y = z,$$

bo $\mathrm{fnc}(G)$.

3. $\mathrm{dom}(L) \subseteq A$ z tego, że $\mathcal{L} \subseteq X$.
4. $\mathrm{rng}(L) \subseteq A$ z tego, że $\mathcal{L} \subseteq X$.
5. L jest funkcją różnowartościową, czyli $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle \implies x = z$.

Ustalmy dowolne x, y, z takie, że

$$\langle x, y\rangle \in L \text{ i } \langle z, y\rangle \in L.$$

Zatem istnieją $F, G \in \mathcal{L}$ takie, że

$$\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle z, y\rangle \in G.$$

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem, to możemy założyć, że $F \subseteq G$, a ponieważ $\mathcal{L} \subseteq X$ i X zawiera jedynie iniekcje, to

$$\langle x, y\rangle \in G \wedge \langle z, y\rangle \in G \implies x = z.$$

Ponieważ pokazaliśmy, że dowolny łańcuch X jerst ograniczony z góry, to na mocy LKZ w X istnieje element maksymalny

$$\varphi \in X.$$

Rozpatrzmy trzy możliwości: 1. $\mathrm{dom}(\varphi) = A$: wówczas z definicji zbioru X otrzymujemy

$$\varphi : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$$

a więc $|A| \leq |B|$.

2. $\mathrm{rng}(\varphi) = B$: wtedy $|B| \leq |A|$, bo

$$\varphi : \mathrm{dom}(\varphi) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$$

$$\varphi^{-1} : B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathrm{dom}(\varphi) \subseteq A.$$

3. $\mathrm{dom}(\varphi) \neq A \wedge \mathrm{rng}(\varphi) \neq B$: czyli $\mathrm{dom}(\varphi) \subsetneq A$ i $\mathrm{rng}(\varphi) \subsetneq B$, zatem istnieją $s \in A \setminus \mathrm{dom}(\varphi)$ oraz $t \in B \setminus \mathrm{rng}(\varphi)$. W takim razie φ może być rozszerzona do:

$$\varphi' = \varphi \cup \{\langle s, t\rangle\}.$$

$$\varphi' \in X$$

nie jest iniekcją, bo $t \notin \mathrm{rng}(\varphi)$. Dodatkowo,

$$\varphi \subsetneq \varphi',$$

czyli φ nie jest elementem maksymalnym w X, stąd zachodzi tylko 1 lub 2, czyli $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$.

i smiga

3.2 DOBRE PORZĄDKI

Dobry porządek - w każdym niepustym podzbiorze $\langle X, \leq \rangle$ istnieje element najmniejszy.

CZĘŚCIOWY LINIOWY DOBRY PORZĄDEK $\langle X, \leq \rangle$, $\mathrm{Lin}(X)$???

$$(\forall\ A \subseteq X)\ A \neq \emptyset \implies ((\exists\ a \in A)(\forall\ x \in A)\ x \leq A)$$

$$(\forall\ a, b \in A)\ a \leq b\ \vee\ b \leq a$$

oraz $\leq$ jest zwrotny, przechodni i słabo antysymetryczny.

Do tej pory ostry porządek < definiowaliśmy jako skrót

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y.$$

Teraz chcemy, żeby stał się on bytem. Seria twierdzeń z tym związanych:

- relacja < jest przechodznia i silnie antysymetryczne
- jeśli < jest relacją przechodnią i silnie antysymetryczną, to relacja zadana warunkiem $x \leq y \iff x < y \vee x = y$ jest częściowym porządkiem
- każdemu częściowemu porządkowi odpowiada tylko jeden osry porządek i każdemu ostremu porządkowi odpowiada tylko jeden częściowy porządek.

SPÓJNOŚĆ to warunek mówiący, że

$$(\forall\ x, y)\ x \neq y \implies (xRy\ \vee\ yRx)$$

PRZYKŁADY - dobry porządek

1. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 0 zasada minimum mówi, że w każdym niepustym podzbiorze $\mathbb{N}$ istnieje element najmnijszy, co jest róownoważne zasadzie indukcji matematycznej
2. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}, \leq \rangle$ - izomorficzne ze zbiorem $\mathbb{N}$
3. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{1\}, \leq \rangle$
4. $\langle \{1 - \frac{1}{n+1}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1}\}, \leq \rangle$
5. $\langle n - \frac{1}{m}\ :\ n, m \in \mathbb{N}, \leq \rangle$

ODCINEK POCZĄTKOWY - niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem z dobrym porządkiem $\leq$ i $a \in X$. Wówczas odcinkiem początkowym tego zbioru wyznaczonym przez a jest zbiór

$$\mathrm{pred}(X, a, \leq) = \{x \in X\ :\ x < a\}$$

W przykładach wyżej każdy zbiór jest odcinkiem początkowym dla zbioru następnego. 'Krótsze porządki' są odcinkami początkowymi dla dłuższych porządków.

TWIERDZENIE: dla dowolnego $a \in X$

$$\mathrm{pred}(X, a, \leq) \not\simeq X$$

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że dla pewnego $a \in X$ mamy

$$\mathrm{pred}(X, a, \leq) \simeq X,$$

czyli isitnieje izomorfizm

$$f : X \to \mathrm{pred}(X, a, \leq).$$

Wtedy $f(a) < a$, bo izomorfizm zachowuje porządek, i zbiór

$$A = \{x \in X \; : \; f(x) < x\}$$

jest niepusty. Niech $b = \min A$, ale wtedy

$$f(b) < b \implies f(f(b)) < f(b),$$

czyli $b > f(b) \in A$, co jest sprzeczne z $b = \min A$.

i smiga

Niech $\langle X, \leq_X \rangle$, $\langle Y, \leq_Y \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi. Wtedy zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. te dwa zbiory są izomorficzne $(X \simeq Y)$, czyli są tej samej długości

pierwszy jest dłuższy od drugiego:

$$(\exists\, a \in X)\ \langle \mathrm{pred}(X, a, \leq_X), \leq \rangle \simeq \langle Y, \leq_Y \rangle$$

3. drugi jest dłuższy od pierwszego:

$$(\exists\, a \in Y)\ \langle \mathrm{pred}(Y, a, \leq_Y), \leq \rangle \simeq \langle X, \leq_X \rangle$$

Wypadałoby to wszystko udowodnić, ale to jest przyjemny wykład i uznamy, że wszystko śmiga, żeby przejść do bardziej podniecających rzeczy, gdzie będziemy korzystać z poprawności tego nieistniejącego dowodu :3

3.3 ZBIÓR TRANZYTYWNY

Elementy moich elemntów są moimi elementami!

Zbiór A nazywamy zbiorem TRANZYTYWNYM, gdy każdy jego element jest zarazem jego podzbiorem:

$$(\forall\, x \in A)\ x \subseteq A$$

$\emptyset$ jest zbiorem tranzytywym, bo nie ma elementów - ponieważ nie istnieją, to mogą mieć dowolne własności, w szczególnośći mogą być podzbiorami $\emptyset$. Tak jak wwierszy *Na wyspach Bergamota*.

$\{\emptyset\}$ - jego jedyny element to zbiór pusty, który jest jednocześnie jego podzbiorem.

$\mathrm{Tran}(\omega)$ - każda liczba naturalna jest zbiorem liczb od siebie mniejszych - dowód na liście zadanek :v

Jeżeli zbiór jest tranzytywny, to tranzytywna jest też jego suma, zbiór potęgowy i jego następnik:

$$\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{Tran}(\bigcup A) \implies \mathrm{Tran}(\mathcal{P}(A)) \implies \mathrm{Tran}(A \cup \{A\})$$

DOWOD:

Udowodnimy, że $\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{Tran}(A \cup \{A\})$

Ustalmy dowolne $x \in A \cup \{A\}$. Wtedy zachodzi jeden z dwóch przypadków:

1. $x \in A$, a ponieważ $\mathrm{Tran}(A)$, to
$$(\forall\, y \in x)\; y \in A$$
2. $x \in \{A\}$, czyli $x = A$, a więc z $\mathrm{Tran}(A)$ otrzymujemy, że $y \in x \implies y \in A \implies y \in \{A\}$.

i smiga

3.4 LICZBY PORZĄDKOWE

Zbiór tranzytywny A nazywamy LICZBĄ PORZĄDKOWĄ,
jeśli spełnia warunek
$$(\forall\, x, y \in A)\; x \in y \;\vee\; x = y \;\vee\; y \in x$$
i używamy oznaczenia $\mathrm{On}(A)$.

Jeśli $\mathrm{On}(\alpha)$, to α jest dobrze uporządkowane przez $\in$, czyli każdy niepusty zbiór $A \subseteq \alpha$ ma element $\in$-minimalny:
$$(\forall\, A \subseteq \alpha)\; A \neq \emptyset \implies (\exists\, x \in A)(\forall\, y \in A)\; x = y \;\vee\; x \in y,$$
co wynika z aksjomatu regularności.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI LICZB PORZĄDKOWYCH:

α, β - liczby porządkowe, C- zbiór liczb porządkowych

1. $(\forall\, x \in \alpha)\; \mathrm{On}(\alpha)$ - elementy liczby porządkowej są liczbami porzadkowymi.

Ustalmy dowolne $x \in \alpha$. Ponieważ $\mathrm{Tran}(\alpha)$, to
$$x \in \alpha.$$
Zatem $\mathrm{Lin}(x)$, bo $\mathrm{Lin}(\alpha)$. Ustalmy dowolne $y \in x$ i $x \in y$. Skoro $x \subseteq \alpha$, to $y \in \alpha$, czyli $y \subseteq \alpha$, zatem $z \in \alpha$. W takim razie x, z są porównywalne jako elementy α. Mamy trzy możliwości: $z \in x$, $x \in z$ (sprzeczne z aksj. regularności), $z = x$ (sprzeczne z aksj. regularności).

2. $\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$
3. $\alpha \in \beta \;\vee\; \alpha = \beta \;\vee\; \beta \in \alpha$ - dowolne dwie liczby porządkowe są porównywalne.

Niech $A = \alpha \cap \beta$. Wtedy $\mathrm{On}(A)$. Przypuśćmy, że
$$A \neq \alpha \;\wedge\; A \neq \beta.$$
Wówczas A jest prawdziwym podzbiorem zarówno α jak i β. Ale z 2 mamy
$$A \in \alpha \;\wedge\; A \in \beta,$$
czyli
$$A \in \alpha \cap \beta = A.$$
Jest to sprzeczne z aksjomatem regularności, więc $A = \alpha$ lub $A = \beta$, czyli $\alpha \subseteq \beta$ lub $\beta \subseteq \alpha$, co z 2 daje nam $\alpha \in \beta$ lub $\beta \in \alpha$.

4. $\mathrm{Tran}(C) \implies \mathrm{On}(C)$
5. $C \neq \emptyset \implies (\exists\, \alpha \in C)(\forall\, \beta \in C)\; \alpha = \beta \;\vee\; \alpha \in \beta.$

Liczbę porządkową α utożsamiamy ze zbiorem dobrze uporządkowanym $\langle\alpha,\in\rangle$. Możemy w takim razie mówić o $\mathrm{pred}(\alpha,\in,\beta)$, ale skrócimy to do zapisu:

$$\mathrm{pred}(\alpha,\in,\beta)=\mathrm{pred}(\alpha,\beta)=\{x\in\alpha\ :\ x\in\beta\}=\beta,$$

czyli każda liczba porządkowa jest zbiorem liczb porządkowych od niej mniejszych.

Jeśli $\mathrm{On}(\alpha)$, to wtedy $\alpha\cup\{\alpha\}$ jest najmniejszą liczbą porządkową większą od α i nazywamy ją NASTĘPNIKIEM porządkowym liczby α

$$\alpha\cup\{\alpha\}:=\alpha+1$$

Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych

paradoks Burali-Forti

DOWOD:

Przypuścmy nie wprost, że ON jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych. Wtedy

$$\mathrm{Tran}(\mathrm{ON}),$$

bo jeśli $\alpha\in\mathrm{ON}$ i $\beta\in\alpha$, to $\beta\in\mathrm{ON}$. Ponadto, $\mathrm{Lin}(\mathrm{ON})$ z własności 3. Zatem

$$\mathrm{On}(\mathrm{ON}),$$

czyli $\mathrm{ON}\in\mathrm{ON}$, co jest sprzeczne z aksjomatem regularności.

i smiga

Nich $\langle X,<\rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba porządkowa α taka, że

$$\langle X,<\rangle\simeq\langle\alpha,\in\rangle$$

Czyli każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z jakąś liczbą porządkową.

DOWOD:

1. JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, nie wprost, że istnieją dwie różne liczby porządkowe α,β spełniające zależność z twierdzenia. Wtedy

$$\alpha\simeq\beta,$$

co jest sprzeczne z ich różnością - któraś musi być mniejsza i wyznaczać odcinek początkowy w drugiej. Zbiór nie może być izomorficzny ze swoim odcinkiem poczatkowym.

2. ISTNIENIE

Zdefiniujmy zbiór

$$Y=\{a\in X\ :\ (\exists\,!\gamma_a)\ \mathrm{On}(\gamma_a)\ \land\ \langle\mathrm{pred}(X,a,<),<\rangle\simeq\gamma_a\},$$

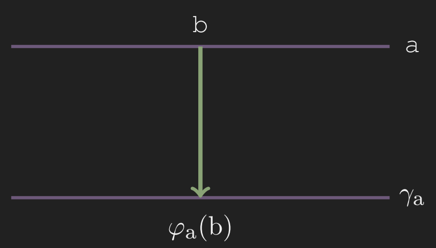
czyli wybieram podzbiory X, dla których twierdzenie zachodzi. Zauważmy, że $Y\neq\emptyset$, bo w X istnieje element minimalny (z dobrego porządku).

Dla $a\in Y$ rozważmy izomorfizm

$$\varphi_a:\mathrm{pred}(X,a,<)\to\gamma_a.$$

Niech $b\in Y$ o $b<a$. Wtedy

$$\varphi_a(b)\in\gamma_a$$



W takim razie, $\varphi_{a\restriction \mathrm{pred}(X,b,<)}$ jest izomorfizmem pomiędzy $\mathrm{pred}(X,b,<)$ i $\varphi_a(b)$. W takim razie $b \in Y$, czyli Y jest zamknięty w dół.

Stąd możemy wnioskować, że $X = Y$ lub $Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$. Załóżmy, że $Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$:

$$X \neq Y \implies X \setminus Y \neq \emptyset.$$

Niech $c = \min(X \setminus Y)$, wówczas

$$Y = \mathrm{pred}(X,c,<).$$

Mam węc zbiór Y, z którego każdym elementem jest związana jakaś liczba porządkowa.
Z aksjomatu zastępowania mogę stworzyć zbiór wszystkich tych liczb porządkowych.

$$f : Y \to ON$$

$$f(a) = \gamma_a$$

$$A = \mathrm{rng}(f) = \{\gamma_a \ : \ a \in Y\}.$$

Wystarczy pokazać:

1. $\mathrm{Tran}(A) \implies \mathrm{On}(A)$ (z 4.):

Ustalmy $\xi \in A$ oraz $\zeta \in \xi$. Skoro $\xi \in A$, to $\xi = \gamma_a$ dla pewnego $a \in Y$. Wtedy istnieje $b < a$ takie, że $\varphi_a(b) = \zeta$. Stąd wynika, że $\zeta = \gamma_b$, czyli $\zeta \in A$.

2. f jest izomorfizmem porządkowym.

Jest funkcją 1-11 z definicji zbioru Y, a funkcją ńaź definicji zbioru A. Zachowuje porządek, bo rozważamy odcinki początkowe.

3. $X = Y$

$Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$, a pokazaliśmy, że $c \in Y$, bo $Y \simeq \mathrm{On}(\alpha)$, więc jest dobrym porządkiem (ma elememnt najmniejszy). W takim razie tu byłaby sprzeczność.
Wyżej zakładaliśmy, że $X \neq Y \implies Y = \mathrm{pred}(X,c,<)$. Ponieważ !?!?!?!?!?

i smiga

TWIERDZENIE NA BOCZKU

TWIERDZENIE HARTOGSA - Dla każdego zioru X istnieje liczba porządkowa α, dla której nie istnieje funkcja różnowartościowa w zbiór X

TYPEM PORZDKOWYM zbioru dobrze uporządkowanego nazywamy liczbę porządkową, z którą jest on homeomorficzny.

$$\mathrm{ot}(\mathbb{N}, \leq) = \mathrm{ot}(\langle\{1 - \tfrac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}\rangle, \leq) = \omega$$

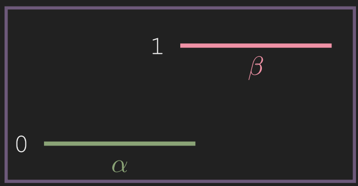
$$\mathrm{ot}(\langle\{1 - \tfrac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}, \leq\rangle) = \omega + 1$$

4 DZIAŁANIA NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

4.1 DEFINICJA DODAWANIA I MNOŻENIA

Niech α, β będą liczbami porządkowymi. Wówczas dodawanie definiujemy:

$$\alpha + \beta = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, \leq)$$



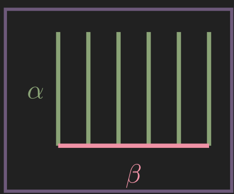
$\alpha + \beta$

czyli najpierw rozdzielamy je, a potem sumujemy. Relację porządku na sumie liczb porządkowych definiujemy (porządek leksykograficzny):

$$\langle \gamma, i \rangle \leq_{\text{lex}} \langle \xi, j \rangle \iff i < j \vee (i = j \wedge \gamma < \xi).$$

Mnożenie liczb porządkowych to z kolei typ porządkowy ich iloczynu z porządkiem leksykograficznym:

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ot}(\beta \times \alpha, \leq_{\text{lex}})$$



$\alpha \cdot \beta$

czyli bierzemy β kopii α – wygodniej na to patrzeć jak na takiego jerzyka z iloczynu kartezjańskiego.

Kilka przykładów:

$\omega + \omega = \mathrm{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, \leq)$

$\omega + \omega + 1 = \mathrm{ot}(\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}, \leq)$

$\omega \cdot \omega = \mathrm{ot}(\{m - \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}, \leq)$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ NA LICZBACH PORZĄDKOWYCH

- dodawanie i mnożenie są *łączne*
- nie są przemienne – *kolejność jest ważna*

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$$

- mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania

NASTĘPNIKIEM liczby porządkowej α nazywamy liczbę porządkową $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 = \beta$:

$$\mathrm{Succ}(\beta) \iff (\exists\, \alpha)\ \mathrm{On}(\alpha) \wedge \beta = \alpha + 1$$

LICZBĄ GRANICZNĄ nazywamy liczbę porządkową $\mathrm{Lim}(\beta)$, jeśli nie jest ona następnikiem innej liczby.

Najmniejszą liczbą graniczną jest 0, kolejną jest ω, a wszytkie liczby naturalne są następnikami.

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha$$

DOWOD:

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\mathrm{Lim}(\alpha)$, czyli

$$\neg\, (\exists\ \beta)\ \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Jeśli założymy, że

$\Longleftarrow$

Ponieważ $\mathrm{Tran}(\alpha)$, to również $\mathrm{Tran}(\bigcup \alpha)$. Załóżmy, nie wprost, że $\mathrm{Succ}(\alpha)$, czyli

$$(\exists\ \beta)\ \alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

Wtedy

$$\bigcup \alpha = \bigcup (\beta \cup \{\beta\}) = \beta,$$

ale wówczas

$$\beta \cup \{\beta\} = \beta,$$

czyli wówczas $\beta \in \beta \cup \{\beta\} = \beta$, co daje nam sprzeczność.

4.2 INDUKCJA POZASKOŃCZONA

Niech $\varphi(\mathrm{n})$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że

$$(\forall\ \beta)(\forall\ \alpha < \beta)\ \varphi(\alpha) \implies \varphi(\beta)$$

Wtedy $(\forall\ \alpha)\varphi(\alpha)$.

Jest to TWIERDZENIE O INDUKCJI POZASKOŃCZONEJ

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że

$$(\exists\ \alpha)\neg\ \varphi(\alpha).$$

Wtedy zbiór

$$\mathrm{C} = \{\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}\ :\ \varphi(\gamma)\}$$

jest niepustym zbiorem liczb porządkowych. Wtedy w C istnieje element najmniejszy ξ. Jego minimalność oznacza, że

$$(\forall\ \varepsilon < \xi)\ \varphi(\varepsilon).$$

Z założenia, że

$$(\forall\ \alpha)(\forall\ \beta < \alpha)\ \varphi(\beta) \implies \varphi(\alpha)$$

wynika, że $\varphi(\xi)$, czyli mamy sprzeczność z $\xi \in \mathrm{C}$.

i smiga

Struktura indukcji:

1. krok bazowy - sprawdzamy dla najmniejszej możliwej liczby
2. krok indukcyjny:
   - krok następnikowy
   - krok graniczny

4.3 REKURSJA POZASKOŃCZONA

Od twierdzenia o indukcji różni się swoją istotą – indukcja służy dowodzeniu, a rekursja – tworzeniu konstrukcji.

Niech $\varphi(x,y)$ będzie formułą języka teorii mnogości taką, że
$(\forall\, x)(\exists\, !y)\ \varphi(x,y)$.
Wówczas dla każdej liczby porządkowej α istnieje funkcja f taka, że
$\mathrm{dom}(f) = \alpha$
i spełniony jest warunek
$(\forall\, \beta < \alpha)\ \varphi(f \restriction \beta, f(\beta))$ (☕)

Tworzymy pozaskończony ciąg indeksowany liczbami porządkowymi, gdzie kolejny krok wynika z tego co juz mamy.

DOWOD:

JEDYNOŚĆ

Przypuśćmy, że dla pewnego α istnieją dwie różne funkcje f_1, f_2 o dziedzinie α spełniające (☕). Wtedy zbiór jest niepusty

$$\{\beta \in \alpha\ :\ f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\} \neq \emptyset.$$

Niech β_0 będzie najmniejszym elementem tego zbioru. Wtedy dla $\varepsilon < \beta_0$ mamy

$$f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon),$$

czyli $f_1 \restriction \beta_0 = f_2 \restriction \beta_0$, czyli z (☕) i $\mathrm{fnc}(\varphi)$

$$f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0),$$

co daje sprzeczność.

ISTNIENIE

Indukcja po α

1. $\alpha = 0$ OK

2. Krok indukcyjny

Ustalmy α takie, że dla $\gamma < \alpha$ istnieje funkcja taka, że $\mathrm{dom}(f)_\gamma = \gamma$ i spełnia (☕).

krok następnikowy $\alpha = \beta + 1$

Wtedy istnieje f_β jak powyżej. Wiemy, że istnieje dokładnie jedno y takie, że zachodzi

$$\varphi(f_\beta, y).$$

Niech

$$f_\alpha = f_\beta \cup \{\langle \beta, y\rangle\}.$$

Wtedy $\mathrm{fnc}(f_\alpha)$ oraz

$$\mathrm{dom}(f_\alpha) = \mathrm{dom}(f_\beta) \cup \{\beta\} = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1 = \alpha.$$

Wystarczy pokazać, że f_α spełnia (☕). Trzeba ustalić jakieś

$$\eta < \alpha = \beta + 1.$$

Więc jeśli $\eta < \beta$, to $f_\alpha \restriction \eta = f_\beta \restriction \eta$ oraz $f_\alpha(\eta) = f_\beta(\eta)$. Czyli spełnia z założenia indukcyjnego..
Jeśli $\eta = \beta$, to mamy $\varphi(f_\alpha \restriction \beta, f_\alpha(\beta))$, bo $f_\alpha(\beta) = y$, co również jest prawdziwe.

krok graniczny $\mathrm{Lim}(\alpha)$

Wiemy, że

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \iff \alpha = \bigcup \alpha.$$

Czyli

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \iff \neg\, (\exists\, \beta)\ \alpha = \beta + 1 \iff (\forall\, \beta < \alpha)\ \beta + 1 < \alpha$$

COOO?

Zauważmy, że jeśli $\gamma_!, \gamma_1 < \alpha$ i $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$, to $f \restriction \gamma_1 \subseteq f \restriction \gamma_2$ – *krótsze funkcje są wydłużane przez funkcje dłuższe.*

Niech $f = \bigcup f_\gamma$. Wtedy f jest funkcją oraz

$$\mathrm{dom}\, f = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathrm{dom}\, f_\gamma = \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma = \alpha.$$

Spełnia (☕): ustalmy dowolne $\beta < \alpha$. Skoro $\beta < \alpha$, to $f \restriction \beta = f_{\beta+1} \restriction \beta$. Ponadto $f(\beta) = f_{\beta+1}(\beta)$. Ale $\beta+1$ też jest jedną z liczb występujących w $\bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma$, a dla nich zachodzi (☕). CO JA TUTAJ NAPISAŁAM?

4.4 REKURENCYJNA DEFINICJA DODAWANIA I MNOŻENIA

DODAWANIE:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \gamma &= \bigcup_{\xi<\gamma} (\alpha + \xi) \quad \mathrm{Lim}(\gamma) \end{aligned}$$

DOWOD:

Udowodnimy, że jest to definicja równoważna z definicją iteracyjną korzystając z indukcji po β. 1. $\beta = 0$

rekursyjnie: $\alpha + 0 = \alpha$

iteracyjnie: $\alpha + 0 = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \emptyset \times \{1\}) = \alpha$

2. Krok indukcyjny

krok następnikowy $\beta = \gamma + 1$

Rekurencyjnie wiemy, że

$$\alpha + \beta = \alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1 = (\alpha + \gamma) \cup \{\alpha + \gamma\}.$$

Iteracyjna definicja daje nam z kolei

$$\alpha + \beta = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}) = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup (\gamma + 1) \times \{1\}).$$

Z założenia indukcyjnego wiem, że

$$\varphi + \gamma = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}),$$

czyli istnieje izomorfizm

$$\varphi_\gamma : \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) \to \alpha + \gamma.$$

Napiszmy izomorfizm między tymi dwoma zbiorami.

$$\varphi_{\gamma+1} : \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\} \cup \{\gamma\} \times \{1\}) \to (\alpha + \gamma) + 1 = (\alpha + \gamma) \cup \{\alpha + \gamma\}$$

$$\varphi_{\gamma+1}(\xi, n) = \begin{cases} \{\alpha + \gamma\} & (\xi, n) = (\gamma, 1) \\ \varphi_\gamma(\xi, n) \end{cases}$$

krok graniczny

Rekurencyjna definicja dodawania liczb porządkowych daje mi:

$$\alpha + \beta = \bigcup_{\xi<\beta} (\alpha + \xi)$$

Z normalnej definicji mamy

$$\alpha + \beta = \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta\{1\}).$$

Z zalozenia indukcyjnego wiem, ze

$$(\forall\, \gamma < \beta)\ (\exists\, \varphi_\gamma : \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) \to \alpha + \gamma)\ \varphi_\gamma \text{ – izomorfizm}$$

Funkcja

$$\varphi : \mathrm{ot}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}) \to \alpha + \beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma$$

$$\varphi(\xi, \mathrm{n}) = \varphi_{\xi+1}(\xi, \mathrm{n})$$

jest izomorfizmem.

MNOŻENIE:

$$\alpha \cdot 0 = 0$$
$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} (\alpha \cdot \xi) \quad \mathrm{Lim}(\gamma)$$

4.5 HIERARCHIA R_α

HIERARCHIĘ na liczbach porządkowych definiujemy rekurencyjnie:

$$\mathrm{R}_0 = \emptyset$$
$$\mathrm{R}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{R}_\alpha)$$
$$\mathrm{R}_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} \mathrm{R}_\gamma \quad \mathrm{Lim}(\gamma)$$

WŁASNOŚCI HIERARCHII

1. $(\forall\ \alpha)\ \mathrm{Tran}(\mathrm{r}_\alpha)$

Indukcja po α

Krok bazowy

$\alpha = 0\ \ \mathrm{Tran}(\emptyset)$

Krok indukcyjny

krok następnikowy

Zakładamy, że $\mathrm{Tran}(\mathrm{R}_\alpha)$, pokażemy, że wówczas $\mathrm{Tran}(\mathrm{R}_{\alpha+1})$. Z definicji $\mathrm{R}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{R})_\alpha$ mamy, że $\mathrm{Tran}\mathcal{P}(\mathrm{R}_\alpha)$, więc $\mathrm{Tran}(\mathrm{R}_{\alpha+1})$.

krok graniczny

Zakładamy, że

$$(\forall\ \gamma < \alpha)\ \mathrm{Tran}(\mathrm{R}_\gamma).$$

Ale skoro $\mathrm{Lim}(\alpha)$, to

$$\mathrm{R}_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathrm{R}_\gamma,$$

a więc mamy sumę zbiorów tranzytywnych, więc $\mathrm{Tran}(\bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma)$ i $\mathrm{Tran}(\mathrm{R}_\alpha)$

2. $\alpha \leq \beta \implies \mathrm{R}_\alpha \subseteq \mathrm{R}_\beta$

3. $\mathrm{R}_\alpha \cup \mathrm{ON} = \alpha$

4.6 DOMKNIĘCIE TRANZYTYWNE

TRANZYTYWNE DOMKNIĘCIE ZBIORU x to najmniejszy zbiór tranzytywny zawierający zbiór x.

$$\mathrm{tcl}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \cup \bigcup \mathrm{x} \cup \bigcup\bigcup \mathrm{x} \cup \bigcup\bigcup\bigcup \mathrm{x} \cup \ldots$$

KONSTRUKCJA REKURSYWNA

$$a_0^x = x$$
$$a_{n+1}^x = \bigcup a_n^x$$
$$tcl(x) = \bigcup_{i\in\omega} a_i^x$$

Każdy zbiór jest w jakiejś hierarchii:
$$(\forall\ x)(\exists\ \alpha)\ x \in R_\alpha$$
lub równoważnie
$$\bigcup_{\alpha\in ON} R_\alpha = V$$

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że istnieje zbiór x taki, że
$$(\forall\ \alpha)\ x \notin R_\alpha.$$

Rozważmy zbiór
$$Y = \{y \in tcl(x) \cup \{x\}\ :\ y \notin \bigcup_{\alpha\in ON} R_\alpha\} \neq \emptyset.$$

Z aksjomatu regularności wiemy, że w Y istnieje element $\in$-minimalny, czyli istnieje $y_0 \in Y$ taki, że
$$(\forall\ t \in Y)\ t \notin y_0.$$

To znaczy, że dla każdego $z \in y_0$ mamy $z \notin Y$ (z minimalności y_0), czyli
$$z \notin tcl(x) \cup \{x\}.$$

W takim razie $z \in \bigcup_{\alpha\in ON} R_\alpha$, a więc
$$(\forall\ z \in y_0)(\exists\ \alpha \in ON)\ z \in R_\alpha.$$

Mamy zatem funkcję
$$f : y_0 \to ON$$
$$f(z) = \min\{\alpha\ :\ z \in R_\alpha\}.$$

Na mocy aksjomatu zastępowania istnieje wtedy $rng(f)$. Niech
$$\beta = \bigcup rng(f) \in ON$$

Mamy
$$(\forall\ z \in y_0)\ z \in R_\alpha$$

Wiemy, że suma liczb porządkowych jest majmniejszą liczbą porządkową większą od wszystkich elementów tej liczby.
$$f(z) \leq R_\beta,$$

co prowadzi nas do $y_0 \in R_\beta$, co jest sprzeczne z $y_0 \in Y$.

5 LICZBY KARDYNALNE

Mamy kolekcję zbiorów, które wszystkie mają tę samą moc. Ale my byśmy chcieli wiedzieć co to jest ta moc - liczby kardynalne pozwalają nam wybierać zbiory według ich mocy.

LICZBA KARDYNALNA to liczba porządkowa,
która nie jest równoliczna z żadnym swoim elementem.

$$\mathrm{Card}(\alpha) := \mathrm{On}(\alpha) \ \wedge \ (\forall\, \beta < \alpha)\ |\beta| < |\alpha|$$

Zazwyczaj oznaczamy je κ, λ, chociaż kiedyś używało się gotyku.

Każda liczba kardynalna jest liczbą porządkową graniczną.

$\mathrm{Card}(0)$

$\mathrm{Card}(\omega)$, ale już $\neg\,\mathrm{Card}(\omega+\omega)$, $\neg\,\mathrm{Card}(\omega\cdot\omega)$ i $\neg\,\mathrm{Card}(\omega^{\omega})$.

$(\forall\ \mathrm{n} \in \omega)\ \mathrm{Card}(\mathrm{n})$ - dowód później

5.1 WŁASNOŚĆI

Każdy zbiór jest równoliczny z pewną liczbą kardynalną.

DOWOD:

Ustalmy dowolny zbiór X. Wiemy, że X można dobrze uporządkować przez <. Wtedy istnieje liczba porządkowa α z nim izomorficzna:

$$\varphi : \mathrm{X} \xrightarrow[1-1]{\text{izo}} \alpha$$

W takim razie φ jest bijekcją między X a α, więc

$$|\mathrm{X}| = |\alpha|.$$

Niech

$$\kappa = \min\{\alpha \ : \ |\alpha| \geq |\mathrm{X}|\}$$

Wtedy $\kappa \sim \mathrm{X}$, a z minimalności κ mamy $\mathrm{Card}(\kappa)$.

Jeśli $|\mathrm{X}| = |\kappa_1|$ i $|\mathrm{X}| = |\kappa_2|$, to $|\kappa_1| = |\kappa_2|$.
NOWY WYKŁAD

5.2 DZIAŁANIA NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech κ, λ będą liczbami kardynalnymi, wtedy:

$$\kappa + \lambda = |(\mathrm{K} \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$$

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

Jeśli $\kappa \geq \omega$, to $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

DOWOD:

Indukcja po liczbach kardynalnych lub po liczbach porządkowych - obie wersje będą poprawne.

1. $\kappa = \omega$ $|\omega \times \omega| = |\omega|$
2. Przypśćmy, że dla nieskończonych liczb kardynalnych $< \kappa$ teza zachodzi.

Na $\kappa \times \kappa$ definiujemy dobry porządek:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle \prec \langle \zeta, \xi, \rangle \iff & \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\zeta, \xi\} \vee \\ & \vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha < \zeta) \vee \\ & \vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\zeta, \xi\} \wedge \alpha = \zeta \wedge \beta < \xi) \end{aligned}$$

Sprawdzanie, że to jest częściowy porządek zostaje na liście

Niech $\gamma = \mathrm{ot}(\kappa \times \kappa, \prec)$. Niech $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$ i niech $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$. Wtedy

$$\langle \alpha, \beta \rangle \preccurlyeq \langle \delta, \delta \rangle$$

i mamy

$$\mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec, \langle \delta, \delta \rangle) \subseteq (\delta + 1) \times (\delta + 1)$$

Ale $\delta < \kappa$, więc

$$|\mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \prec \langle \alpha, \beta \rangle)| \leq |\delta + 1|^2 < \kappa$$

Jeśli wezmę dowolne $\eta < \gamma$, to η jest odcinkiem początkowym γ, czyli $\eta < \kappa$. Wobec tego $\gamma \leq \kappa$. Ale $|\gamma| = |\kappa \times \kappa|$, zatem

$$\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| \leq \kappa.$$

Zdeciniujmy funckję

$$\mathrm{f} : \kappa \to \kappa \times \kappa$$

$$\mathrm{f}(\alpha) = \langle \alpha, 0 \rangle$$

któa jest inikcją, więc

$$|\kappa| \leq |\kappa \times \kappa|$$

Czyli $\kappa \cdot \kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa$.

i smiga

Wniosek:

$$\kappa, \lambda \leq \omega \implies \kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

DOWOD:

$$\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \max\{\kappa, \lambda\} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Wypadałoby pokazać, że $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$, ale to się narysuje

i smiga

Dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba kardynalna od niej większa.

DOWOD:

Ustalmy dowolne κ. Wtedy $|\mathcal{P}(\kappa)| > \kappa$ z twierdzenia Cantora.

DOWOD:

Wersja bez aksjomatu wyboru:

Z twierdzenia Harcoštam: Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa, z którą nie istnieje iniekcja z α w X.

$$\mathrm{X} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{X}) = \min\{\alpha \ : \ \neg\,(\exists\, \varphi : \alpha \to \mathrm{X})\ \varphi \text{ to iniekcja}\}$$

Utalmy κ. Wtedy $\mathrm{Card}(\mathrm{H}(\kappa))$ i $\mathrm{H}(\kappa) > \kappa$.

i smiga

NASTĘPNIKIEM liczby κ nazywamy najmniejszą liczbę kardynalną od niej większą i oznaczamy ją

$$\kappa^+$$

Czyli κ ma dwa następniki: kardynalny i porządkowy.

Liczbę kardynalną κ nazywamy NASTĘPNIKIEM, jeśli $\kappa = \lambda^+$ dla pewnego $\mathrm{Card}(\lambda)$.

Liczbę kardynalną nazywamy GRANICZNĄ, jeśli nie jest następnikiem.

5.3 HIERARCHIA ALEFÓW

Konstrukcja rekurencyjna:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\xi<\gamma} \aleph_\xi \ \mathrm{Lim}(\gamma)$$

Alternatywny zapis to $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$, ale używamy $\aleph$ żeby podkreślić kardynalny charakter badanego obiektu.

$$\mathrm{CARD} = \omega \cup \{\aleph_\gamma \ : \ \gamma \in \mathrm{On}\}$$

Każda nieskończoa liczba kardynalna jest jakimś $\aleph$.

DOWOD:

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $\kappa \geq \omega$

$$(\forall\ \alpha \in \mathrm{ON})\ \kappa \neq \aleph_\alpha$$

Bez zmniejszenia ogólności κ jest minimalna.

Rozważmy zbiór

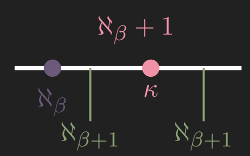
$$\mathrm{A} = \{\xi \ : \ \aleph_\xi < \kappa\} \neq \emptyset.$$

Jest to zbiór niepusty, ponieważ $\kappa \neq \omega$, bo $\omega = \aleph_0$. W takim razie

$$\beta = \bigcup \mathrm{A} \ \wedge \ \mathrm{On}(\beta).$$

Są dwie możliwości:

1. $\beta \in \mathrm{A}$, czyli β jest największym elementem A. Ale wówczas istnieje największa liczba kardnalna mniejsza od κ: $\aleph_\beta$. Ale wtedy $\kappa = \aleph_{\beta+1}$.



ale wtedy $\beta + 1 = \min \mathrm{A}$

ale wtedy $\kappa < \aleph_{\beta+1}$, czyli $\kappa = \aleph_\alpha$ takie, że $\alpha \in \mathrm{A}$

2. $\beta \notin \mathrm{A}$, czyli $\mathrm{Lim}(\beta)$. Wtedy $\kappa = \aleph_\beta$.

i smiga

5.4 POTĘGOWANIE

Hipoteza continuum Czym jest $\mathfrak{c}$?

$$\mathfrak{c} > \aleph_0 \implies \mathfrak{c} \geq \aleph_1$$

$$?\mathfrak{c} = \aleph_1?$$

POTĘGOWANIE liczb kardynalnych:

$$\kappa^\lambda := |\kappa^\lambda|$$

Bierzemy zbiór funkcji z λ w κ i to jest moc tego zbioru.

$$2^\kappa > \kappa$$

$$\kappa \leq \lambda \implies \kappa^\mu \leq \lambda^\mu$$

$$\kappa^{\mu+\lambda} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\lambda$$

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\mu \cdot \lambda}$$

Niech $2 \leq \kappa \leq \lambda$ oraz $\lambda \geq \omega$. Wtedy
$\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

DOWOD:

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$$

i smiga

5.5 UOGÓLNIONE OPERACJE NA LICZBACH KARDYNALNYCH

Niech $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną liczb kardynalnych. Wówczas dla tej rodziny definiujemy:

sumę: $\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}|$

iloczyn: $\prod_{i \in I} \kappa_i := |\prod_{i \in I} \kappa_i|$,

przy czym po prawej mamy uogólniony iloczyn kartezjański zbiorów

Niech $(\forall\, i \in I)\ \kappa_i = \kappa$. Wtedy

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \bigcup_{i \in I} \kappa \times \{i\} = \kappa \times \bigcup_i \{i\} = \kappa \cdot |I|$$

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$$

Za tydzień:

$$\langle \kappa_i : i \in I \rangle, \langle \lambda_i : i \in I \rangle \quad (\forall\, i \in I)\ \kappa_i < \lambda_i$$

wtedy

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

UZUPEŁNIĆ

PRZYKŁAD

1. $\aleph_0$ jest regularna, bo gdyby $\mathrm{cf}(\aleph_0) < \aleph_0$, to $\mathrm{cf}(\aleph_0)$ byłby skończony i wwtedy ω byłaby skończoną sumą skończonych zbiorów, a tak nie jest

2. $\aleph_1$ jest regularne

Przypuśćmy, że $\mathrm{cf}(\aleph_1) < \aleph_1 \implies \mathrm{cf}(\aleph_1) \leq \aleph_0$. W takim razie istnieje rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\aleph)_1$ taka, że $(\forall\ A \in \mathcal{A})\ |A| \leq \aleph_0$ i $|\bigcup| = \aleph_1$, co daje sprzeczność, bo przeliczalna rodzina zbiorów przeliczalnych nie może dać nieprzeliczalnego zbioru.

3. κ^+ $(\aleph_{\alpha+1})$ jest regularna (dowód na ćwiczeniach)
4. $\aleph_\omega$ jest singularny

$$\aleph_\omega = \bigcup n < \omega \aleph_n,$$

czyli $\aleph_\omega$ jest sumą przeliczalnie wiely zbiorówo o mocy mniejszej niż $\aleph_\omega$, czyli $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) \leq \aleph_0 < \aleph_\omega$. Łatwo pokazać, że $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$.

5. $\mathrm{cf}(\kappa)$ jest regularna, czyli $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa)) = \mathrm{cf}(\kappa)$, co zostanie pokazane na ćwiczeniach.

5.6 WNIOSKI Z TWIERDZENIA KONIGA

Jeśli $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ oraz $\langle \lambda_i : i \in I \rangle$ to są rodziny liczb kardynalnych takie, że

$$(\forall\, i \in I)\kappa_i < \lambda_i,$$

to wówczas

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

---

1. Niech $\lambda \geq \omega$. Wtedy

$$\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} > \lambda.$$

DOWOD:

Z definicji kofinalności istnieje taka rodzina $\langle A_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\lambda) \rangle$ podzbiorów λ taka, że $|A_\alpha| < \lambda$ dla $\alpha \in \mathrm{cf}(\lambda)$ i $|\bigcup A_\alpha| = \lambda$. Wtedy

$$\lambda = |\bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\lambda)} A_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in \mathrm{cf}(\lambda)} |A_\alpha| < \prod_{\alpha < \mathrm{cf}(\lambda)} \lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$

i smiga

2. Niech $\kappa \geq \omega$. Wtedy

$$\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa.$$

DOWOD:

Przypuśćmy, nie wprost, że $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq \kappa$. Zastosujmy wniosek pierwszy do $\lambda = 2^\kappa$.

$$2^\kappa < (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(2^\kappa)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$$

i mamy sprzeczność, bo $2^\kappa < 2^\kappa$.

i smiga

Wnioskiem z tego jest

$$\mathfrak{c} = \mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0,$$

w szczególności

$$\mathfrak{c} = \mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \neq \aleph_\omega.$$

CZYM MOŻE BYĆ CONTINUUM?

1. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ – hipoteza continuum
2. $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ – Cohen
3. $2^{\aleph_0} = \aleph_n \quad 0 < n < \omega$
4. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

5.7 TWIERDZENIE EASTONA (1970)

Niech $F : \mathrm{REG} \to \mathrm{CARD}$, czyli przyporządkowanie funkcyjne z liczb regularnych w kardynalne, takie, że

1. $\lambda \leq \lambda \implies F(\kappa) \leq F(\lambda)$
2. $\mathrm{cf}(F(\kappa)) > \kappa$.

Wtedy $\mathrm{CONS(ZFC)} \implies \mathrm{CONS}(\mathrm{ZFC} + (\forall\, \kappa \leq \omega)\ 2^\kappa = F(\kappa))$, gdzie CONS oznacza brak sprzeczności (czyli istnieje model).

Przyporządkowanie $\kappa \mapsto 2^\kappa$ nzywamy FUNKCJĄ CONTINUUM.

5.8 TWIERDZENIE HAUSDORFFA

Jeżeli $\kappa \geq \omega$ i $1 \leq \lambda \leq \kappa$, to
$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$$

DOWOD:

$(\leq)$

$$(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^+$$
$$(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda$$

czyli
$$(\kappa^+)^\lambda \leq \max\{\kappa^+, \mathrm{kappa}^\lambda\} = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$$

$(\leq)$

$$(\kappa^+)^\lambda = |(\kappa^+)^\lambda|,$$

ale $(\kappa^+)^\lambda$ to jest zbiórfunkcji z λ w κ^+ i to się równa $(\kappa^+)^\lambda = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \alpha^\lambda$ $(\subseteq)$

$$f \in (\kappa^+)^\lambda,$$

ale
$$\lambda < \kappa^+ = \mathrm{cf}(\kappa^+),$$

czyli każda fukcja z λ w κ^+ jest ograniczona, czyli f jest ograniczona w κ^+, a więc istnieje $\alpha < \kappa^+$
$$(\forall\, \beta < \lambda)\ f(\beta) < \alpha.$$

W takim razie $f \in \alpha^\kappa$, czyli $f \in \bigcup_{???} \alpha^\lambda$ NIE WIEEEEEEEEM CO SIEĘ ZADZIAKOLSFAOHSKDJ FHALKSJD FHALKS

PRZYKŁAD
$$\aleph_3^{\aleph_2} = \aleph_2^{\aleph_2} \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_2} \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_2}$$

5.9 TWIERDZENIE TARSKIEGO

$$\kappa^\lambda$$
$\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, gdzie $\mathrm{Lim}(\kappa)$.

5.10 BIG CARDINALS

Czy istnieje nieprzeliczalna liczba regularna graniczna? To jest dobre pytanie. Taka liczba nazywa się liczbą SŁABO NIEOSIĄGALNĄ. Jeśli zmienilibyśmy warunek na liczbę silnie graniczną, czyli

$$(\forall\ \mu < \kappa)\ 2^{\mu} < \kappa$$

to taka liczba nazywałaby się LICZBĄ SILNIE NIEOSIĄGALNĄ, ale jej istnienie nie zostało ani udowodnione ani obalone.

Problem nie polega na ich istnieniu, tylko na tym, że nie potrafimy udowodnić że one istnieją. Istnienie liczby silnie nieosiągalnej κ oznacza, że R_{κ} jest modelem teorii mnogości. A drugie twierdzenie Gödela mówi, że rzadna dostatecznie bogata teoria nie może dowodzić swojej niesprzeczności.

Matematykom, jak zwykle, to nie przeszkadza i badają sobie konsekwencje istnienia dużych liczb kardynalnych zamiast próbować dowodzić ich istnienia.