

Spis treści

1	METRYKI	3
1.1	METRYKA	3
1.2	KULA	3
1.3	ZBIEŻNOŚĆ	4
1.4	ZBIORY OTWARTE	4
1.5	ZBIORY DOMKNIĘTE	5
2	PODPRZESTRZENIE METRYCZNE	6
2.1	PODPRZESTRZEŃ	6
2.2	HOMEOMORFIZMY	7
2.3	TOPOLOGIA	7
2.4	BAZA	8
2.5	TOPOLOGIA STRZAŁKI	8
2.6	UZWARCENIE ALEKSANDROWA na \mathbb{R}	8
2.7	PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA	9

1 METRYKI

1.1 METRYKA

METRYKA na zbiorze X nazywamy funkcję
$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$
przedstawia sposób mierzenia odległości

Żeby dana funkcja była metryką, musi spełniać następujące warunki:

1. $d(x, x) = 0 \wedge d(x, y) > 0$, jeśli $x \neq y$
2. $(\forall x, y) d(x, y) = d(y, x)$ - symetria
3. $(\forall x, y, z) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ - warunek Δ

METRYKI EUKLIDESOWE:

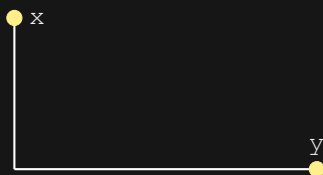
\mathbb{R} : $d(x, y) = |x - y|$

\mathbb{R}^2 : $d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + (x(1) - y(1))^2}$

\mathbb{R}^n : $d(x, y) = \sqrt{(x(0) - y(0))^2 + \dots + (x(n-1) - y(n-1))^2}$

METRYKA MIASTO, taksówkowa, nowojorska

\mathbb{R}^2 : $d(x, y) = |x(0) - y(0)| + |x(1) - y(1)|$



METRYKA MAKSIMUM

\mathbb{R}^2 : $d(x, y) = \max(|x(0) - y(0)|, |x(1) - y(1)|)$

tutaj muszę dokończyć metryki

1.2 KULA

Kulą o środku $x \in X$ i promieniu r nazywamy:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

\mathbb{R} , m. euklidesowa:	\mathbb{R}^2 , m. euklidesowa	\mathbb{R}^2 , m. miasto	\mathbb{R}^2 , m. maksimum
\mathbb{R}^2 , m. centrum		$C[0, 1]$, m. supremum	$C[0, 1]$, m. całkowa
narysuję potem		narysuje	potem

1.3 ZBIEŻNOŚĆ

CIĄG (x_n) ZBIEGA do $x \in X$, jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) d(x_n, x) < \varepsilon$$

W każdej kuli o środku w x leżą prawie wszystkie wyrazy (x_n)

Dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (\forall i < \infty) x_n(i) \rightarrow x(i),$$

czyli ciąg zbiega w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych.

W metryce dyskretniej jedynie ciągi stałe mogą być zbieżne - kule dla $r \geq 1$ to cała przestrzeń, a dla $r < 1$ kula to tylko punkt.

Zbieżność jednostajna jest tym samym, co zbieżność w metryce supremum:

$$(f_n) \xrightarrow{d_{\text{sup}}} f \iff (f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f.$$

1.4 ZBIORY OTWARTE

$U \subseteq X$ jest **zbiorem otwartym**, jeśli na każdym punkcie ze zbioru można opisać kulę, która zawiera się w zbiorze U

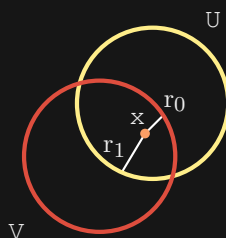
$$(\forall z \in U)(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U$$

Rodzina zbiorów otwartych jest zamknięta na wszelkie możliwe sumy

Jeśli dane są dwa zbiory, U i V , których przekrój $U \cap V$ jest otwarty i rodzina zbiorów otwartych \mathcal{U} która je zawiera, to suma tej rodziny też jest otwarta.

DOWOD:

Przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.



Dla dowolnego $x \in U \cap V$ możemy znaleźć dwie takie kule:

$$(\exists r_0 > 0) B_{r_0}(x) \subseteq V$$

$$(\exists r_1 > 0) B_{r_1}(x) \subseteq U$$

Nie mamy gwarancji, że obie kule będą zawierać się w $U \cap V$, ale jedna na pewno będzie się zawierać.

i smiga



DOWOD:

Suma rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Niech x należy do sumy rodziny zbiorów otwartych:

$$x \in \bigcup \mathcal{U},$$

czyli

$$(\exists U \in \mathcal{U}) x \in U.$$

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to zawiera się w nim kula opisana na x . Skoro U należy do rodziny zbiorów otwartych, to

$$x \in U \wedge x \in \bigcup \mathcal{U}.$$

W takim razie na każdym punkcie należącym do rodziny zbiorów otwartych możemy opisać kulę, więc jest ona otwarta.

i smiga



.....

U jest zbiorem otwartym $\iff U$ jest sumą kul.

DOWOD:

\Leftarrow wynika m.in. z twierdzenia wyżej.

\Rightarrow

Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to z definicji

$$(\forall x \in U)(\exists r_x > 0) B_{r_x} \subseteq U$$

Rozważmy sumę

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x)$$

Ponieważ sumujemy wyłącznie po kulach zawierających się w U , suma ta nie może być większa niż U . Zawierają się w niej wszystkie punkty z U , więc możemy napisać

$$\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) = U$$

i smiga



1.5 ZBIORY DOMKNIĘTE

$F \subseteq X$ jest **zbiorem domkniętym**, jeśli każdy ciąg zbieżny z F ma granicę w F

Jeżeli U jest zbiorem otwartym, to U^c jest zbiorem domkniętym

DOWOD:

Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z U^c . Jeśli U^c nie jest domknięte, to (x_n) musi zbiegać do pewnego punktu $x \in U$, czyli

$$(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U.$$

Ale wówczas nieskończenie wiele punktów ciągu (x_n) należy do U , co jest sprzeczne z założeniem, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym z U^c .

i smiga



2 PODPRZESTRZENIE METRYCZNE

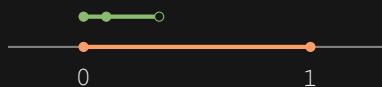
2.1 PODPRZESTRZEŃ

PODPRZESTRZEŃ (X, d) to (A, d) , $A \subseteq X$

formalnie (A, d) nie jest przestrzenią metryczną – musimy obciążyć $d|_{A \times A}$

PRZYKŁAD:

Dana jest prosta \mathbb{R} z metryką euklidesową. Rozważmy na niej zbiór $[0, 1]$. Jednym ze zbiorów w tej podprzestrzeni jest:



Ponieważ dla podprzestrzeni $[0, 1]$ nie istnieją punkty mniejsze niż 0, to ten zbiór jest otwartą kulą.

Na \mathbb{R}^2 z metryką centrum wybieramy okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, 0)$. Taka podprzestrzeń jest bardzo podobna do przestrzeni dyskretnej – każde dwa różne punkty są oddalone od siebie o dokładnie 1.

Funkcja z jednej przestrzeni metrycznej (X, d) w inną przestrzeń metryczną (Y, ρ) :

$$f: X \rightarrow Y$$

jest ciągła, jeśli

$$(\forall x \in X)(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y) d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dodatkowo, wówczas równoważne są warunki:

1. f jest funkcją ciągłą
2. (x_n) – ciąg z X taki, że $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$ (zbieżność wg. Heinego – ciąg wartości zbiega do wartości granicy)
3. $f^{-1}[U]$ jest otwarty dla każdego otwartego $U \subseteq Y$

DOWOD:

Pokażemy implikację $3 \implies 1$

Dana jest funkcja

$$f: X \rightarrow Y$$

Weźmy kulę $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq Y$. Ponieważ jest zbiorem otwartym, to z założenia 3

$$(\exists U \subseteq X) \underset{\text{otw}}{f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))] = U}.$$

Z definicji zbioru otwartego wiemy, że na dowolnym punkcie U możemy opisać kulę

$$(\exists \delta > 0) B_\delta(x) \subseteq U$$

Dla $y \in B_\delta(x)$

$$d(x, y) < \delta.$$

Natomiast

$$f(y) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)),$$

czyli $d(x, y) < \delta$ oraz $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

i smiga



2.2 HOMEOMORFIZMY

HOMEOMORFIZM ($X \cong Y$) nazywamy taką funkcję $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$, która:

1. f jest ciągłą bijekcją
2. f^{-1} jest ciągła

PRZYKŁADY:

$[0, 1] \cong [0, 2]$ dla funkcji np. $f(x) = 2x$

$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}}) \cong (\mathbb{R}^2, d_{\text{miast}})$ dla funkcji $f(x, y) = \langle x, y \rangle$

(X, d) - dowolna przestrzeń metryczna. Rozważmy poniższą metrykę:

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Wtedy $(X, d) \cong (X, d')$. Możemy zmieniać zakres punktów, które wyrzucamy i to nie wpływa na istnienie homeomorfizmu.

2.3 TOPOLOGIA

TOPOLOGIA na zbiorze X nazywamy

rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że

$$\emptyset \in \mathcal{U}, X \in \mathcal{U}$$

jest zamknięta na skończone przekroje

jest zamknięta na dowolne sumy

Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to topologią jest rodzina zbiorów otwartych, która spełnia warunki topologii.

(X, \mathcal{U}) to przestrzeń topologiczna

Dla pewnego zbieżnego ciągu elementów X $\lim x_n = x$. Korzystając z pojęcia *przestrzeni topologicznych*, zbieżność można zdefiniować:

$$(\forall U \in \mathcal{U}) x \in U \implies (\exists N)(\forall n > N) x_n \in U$$

Przestrzeń topologiczna jest PRZESTRZENIĄ HANSDORFA, jeżeli

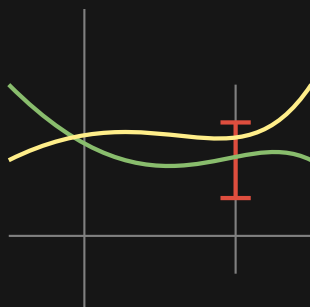
$$(\forall x \neq y \in X)(\exists U, V) (x \in U \wedge y \in V) \wedge U \cap V = \emptyset$$

Czyli dla dowolnych dwóch punktów mogę znaleźć dwa rozłączne zbiory otwarte

$C[0, 1]$ - funkcje ciągłe na odcinku $[0, 1]$. Weźmy I , przedział otwarty na \mathbb{R} . Niech $x \in [0, 1]$ oraz

$$A_x^I = \{f \in C[0, 1] : f(x) \in I\}.$$

Czyli wybieramy x i stawiamy nad nim bramkę równą I . Do zbioru A_x^I będą należeć wszystkie funkcje, które przez tę bramkę przejdą.



Rozważmy zbiory postaci $A_{x_0}^{I_0} \cap \dots \cap A_{x_n}^{I_n}$. Z sum takich zbiorów tworzę rodzinę \mathcal{U} , która jest topologią na $[0,1]$.

Przyjrzymy się ciągom zbieżnym w tej topologii.

$$f_n \rightarrow f \implies (\forall x \in [0,1]) f_n(x) \xrightarrow{\text{euk}} f(x)$$

Wiemy, że f_n jest zbieżne, ale czemu $f_n(x)$ miałyby być zbieżne?

DOWOD:

Dla pewnego $\varepsilon > 0$ i przedziału

$$I = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

mamy:

$$(\exists N)(\forall n > N) f_n \in A_x^I.$$

Ponieważ $f(x)$ jest środkiem naszego przedziału i $f_n \rightarrow f$, to $f \in A_x^I$. Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall n > N) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Taka topologia nazywa się topologią zbieżności punktowej.

i smiga



2.4 BAZA

BAZA dla topologii to taka rodzina zbiorów otwartych, że każdy niepusty i otwarty podzbiór tej przestrzeni można wysumować przy pomocy pewnych elementów bazy

2.5 TOPOLOGIA STRZAŁKI

Rozważamy zbiory w \mathbb{R}

$$B = \{[a, b) : a < b\},$$

które są otwarte (owarto-domknięte)



Topologia strzałki jest bogarsza niż topologia euklidesowa - każdy otwarty zbiór w sensie euklidesowym jest też otwarty w sensie topologii strzałki. W dodatku jest to przestrzeń [Handsdorffa](#).

Ciągi zbieżne w strzałce to

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0,$$

ale już $\left(\frac{a}{n}\right)$ nie jest ciągiem zbieżnym w strzałce, bo wszystkie jego wyrazy są poza badanym przedziałem.

Strzałka nie jest metryzowalna.

2.6 UZWARCENIE ALEKSANDROWA na \mathbb{R}

aka przestrzeń z gruszką

PRZESTRZEŃ ZWARTA - przestrzeń topologiczna, że z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone

UZWARCENIE - rozszerzenie danej przestrzeni topologicznej tak, by była ona przestrzenią zwartą.

OTOCZENIE - dowolny zbiór, który zawiera zbiór otwarty zawierający dany punkt.

PRZESTRZEŃ Z GRUSZKĄ



Mamy \mathbb{R} i jakieś \mathcal{O} . Otoczenia wszystkich liczb \mathbb{R} to

$$r: \{r\},$$

czyli singletony liczb rzeczywistych są tutaj otwarte. Otoczeniem \mathcal{O} są z kolei

$$\mathcal{O}: \{\mathcal{O}\} \cup A,$$

takie, że $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \setminus A$ jest skończony.

Topologię w uzwarceniu Aleksandrowa można zdefiniować w dowolny sposób, musi tylko jasno wynikać, co jest zbiorem otwartym, a co zamkniętym.

Uzwarcenie Aleksandrowa jest przestrzenią **Hansdorffa**

Jak wyglądają ciągi zbieżne?

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{O}$$

ponieważ tylko skończenie wiele punktów może być zignorowanych przez otoczenie \mathcal{O} . W takim razie możemy powiedzieć, że jeśli mamy dowolny (x_n) różnowartościowy, to

$$\lim x_n = \mathcal{O},$$

bo $\mathcal{O} \in U$, gdzie U jest zbiorem otwartym i istnieje skończenie wiele n takich, że $x_n \notin U$.

2.7 PRZESTRZEŃ OŚRODKOWA

Zbiór $A \subseteq X$ jest **ZBIOREM GĘSTYM**, jeżeli

$$(\forall U \neq \emptyset)_{\text{otw}} U \cap A \neq \emptyset \iff \overline{A} = X$$

jest to zbiór otwarty, który kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym (lub dopełnia się do całej przestrzeni)

Przestrzeń X jest **OŚRODKOWA**,
jeśli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty

PRZYKŁADY:

\mathbb{R} z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

\mathbb{R}^2 z metryką euklidesową: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

\mathbb{R}^2 z metryką miasto: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ bo zbiory otwarte w metryce miasto są takie same jak w euklidesowej

kostka Cantora $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$: ciągi stałe od pewnego miejsca (czyli skończone, ale sztucznie przedłużone do nieskończoności) - jest ich przeliczalnie wiele i jest to zbiór gęsty.

ANTYPRZYKŁAD:

\mathbb{R}^2 z metryką dyskretną: zbiór gęsty A musi się kroić niepusto z każdym singletonem, więc

$$(\forall x) A \cap \{x\} \neq \emptyset \iff A = \mathbb{R}$$

\mathbb{R}^2 z metryką centrum: intuicja podpowiada, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, ale jeśli kula leży na prostej o wyrazach niewymiernych, np $y = \pi x$, to kroi się pusto z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

W przestrzeni metrycznej (X, d) zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty \iff dla każdej kuli $B_r(x)$ istnieje $a \in A$ bliżej x niż kula

$$A - \text{zb. gęsty} \iff (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) d(x, a) < \varepsilon$$

DOWOD:

\implies

Założmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, czyli dla zbioru gęstego A i przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje kula o promieniu ε i środku $x \in X$ taka, że nie zawiera elementów z A :

$$(\exists x) B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

W takim razie A tnie się pusto ze zbiorem otwartym $B_\varepsilon(x)$, więc nie jest zbiorem gęstym.

\longleftarrow

Niech U będzie zbiorem otwartym

$$U \in X,$$

czyli możemy założyć, że istnieje kula:

$$(\exists B_r(x)) B_r(x) \subseteq U.$$

Czyli kula $B_r(x)$ zawiera się w otwartym zbiorze U , więc istnieje w U punkt, który leży w tej kuli:

$$(\exists u \in U) d(x, u) < r,$$

a więc kula tnie się niepusto ze zbiorem U :

$$U \cap B_r(x) \neq \emptyset.$$

i smiga



.....

Jeśli istnieje $f: X \rightarrow Y$, która jest ciągła i na,
to jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową,
to Y też jest przestrzenią ośrodkową

Ośrodkowość przenosi się przez ciągłe suriekcje

DOWOD:

Chcemy zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w Y mając tylko $f: X \rightarrow Y$.

Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem gęstym. Rozważmy obraz A przez funkcję f :

$$B = f[A].$$

Ponieważ B jest obrazem zbioru przeliczalnego przez ciągłą suriekcję, to on też jest zbiorem przeliczalnym. Pozostaje udowodnić, że jest to zbiór gęsty.

Weźmy dowolny zbiór otwarty w Y :

$$U \underset{\text{otw}}{\subseteq} Y.$$

Wtedy $f^{-1}[U] \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, ponieważ f jest ciągłe i na. W takim razie, zbiorem gęstym w Y jest $f[A]$:

$$(\exists a \in A) a \in f^{-1}[U] \wedge f(a) \in U \cap f[A] \neq \emptyset$$

i smiga

