RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 10

1. Pokaż, że jeśli $0 < p < q$, to
$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \ \le \ (\mathbb{E}|X|^q)^{1/q} \ .$$
2. (*Reguła n sigm*) Pokaż, że jeśli $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, to
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > n\sigma) \ \le \ \frac{1}{n^2} \ .$$
3. Sprawdzić, że zdarzenie $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}$ należy do $\mathcal{F}_\infty$.

4. Sprawdzić, że zdarzenie $\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \le a\right\}$ należy do $\mathcal{F}_\infty$.

5. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty X_n$, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:
a) $\mathbb{P}(X_n = 2^{-n}) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$;
b) $\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/(n \log n)$;

6. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład jednostajny $U[-n, n]$. Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny p.w.?

7. Niech $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$. Pokaż, że $\sum_{n=1}^\infty X_n$ jest zbieżny p.n., chociaż $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

8. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $X_n \sim \mathrm{U}[1/n, 1]$. Pokazać, że ciąg $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ jest zbieżny p.n. i wyznacz jego granicę.

9. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:
$$\mathbb{P}(X_n = n) \ = \ \mathbb{P}(X_n = -n) \ = \ 1/n \ , \quad \mathbb{P}(X_n = 0) \ = \ 1 - 1/n \ .$$
Czy ciąg $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ spełnia SPWL, czy spełnia MPWL?

10*. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty X_n$, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie
$$\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = 1/2$$
dla pewnego ciągu $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

11. Obliczyć granice:
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,2]^n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^4} dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \ldots dx_n$;

12. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć granice:
a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}\right) dx_1 \ldots dx_n$.

13. Definiujemy ciąg zmiennych losowych w następujący sposób: niech X_0 ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$, dla $n \ge 1$, X_{n+1} na rozkład jednostajny na $[0, X_n]$, tzn $X_{n+1} = U_{n+1}X_n$, gdzie $\{U_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U(0, 1)$. Pokaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log X_n$$
istnieje p.n. i znajdź jej wartość.