Lista 5

Rachunek Prawdopodobieństwa

Weronika Jakimowicz

23.03.2023

Eksperymentowałam z LaTeXem i plik trzeba pobrać, żeby zobaczyć ukryte rozwiązania. Po kliknięciu na "Odkrycie rozwiązania" powinno się pojawić spisane rozumowanie.

Zadanie 1. *Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?*

Definicja λ-układu to rodzina $\mathfrak{L}$ podzbiorów Ω taka, że

- $\Omega \in \mathfrak{L}$
- $A, B \in \mathfrak{L}$ i $A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathfrak{L}$
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \in \mathfrak{L} \implies \bigcup A_i \in \mathfrak{L}$

Ustalmy sobie dowolne $F \in \Omega$. Niech

$$\mathfrak{L} = \{A \in \Omega \ : \ \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[A \cap F]\}.$$

Jest to λ-układ, bo

- $\Omega \in \mathfrak{L}$, bo $\mathbb{P}[\Omega \cap F] = \mathbb{P}[F]1$, a $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $A, B \in \mathfrak{L}$, to wtedy

  $$\mathbb{P}\left[(B \setminus A) \cap F\right] = \mathbb{P}\left[(B \cap A^c) \cap F\right] \overset{(\heartsuit)}{=} \mathbb{P}\left[A \cap B^c\right]\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}\left[B \setminus A\right]\mathbb{P}[F]$$

  gdzie $(\heartsuit)$ wynika z faktu, że sigma ciało generowane przez zdarzenia niezależne jest niezależne. Czyli $A \setminus B \in \mathfrak{L}/$
- Jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \in \mathfrak{L}$. Teraz chcę pokazać, że $\bigcup A_i \in \mathfrak{L}$. Ale równoważnie mogę pokazać, że

  $$\Omega \setminus \bigcup A_i = \left[\bigcup A_i\right]^c = \bigcap A_i^c \in \mathfrak{L}$$

  korzystając z tego, że $\Omega \in \mathfrak{L}$ i $\bigcup A_i \subseteq \Omega$. No dobrze, ale to, że $\mathbb{P}\left[F \cap \bigcap A_i^c\right]$, gdzie $\mathbb{P}\left[F \cap A_i^c\right] = \mathbb{P}[F]\mathbb{P}\left[A_i^c\right]$ już było pokazywane na poprzedniej liście i nie ma sensu powtarzać ten dowód.

Czyli zbiór zdarzeń niezależnych jest λ-układem, teraz chcę pokazać konkretny przykład, kiedy nie jest to σ-ciało.

Rzucamy dwa razy monetą. Niech A będzie zbiorem, że pierwszy wypadnie orzeł, wtedy $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{2}$. Niech $\mathfrak{L}$ zawiera zdarzenia niezależne od A, to na przykład $\{(O, O), (R, R)\}$ i $\{(O, O), (R, O)\}$. Oba te zdarzenia są niezależna od A, czyli należą do $\mathfrak{L}$. Ale już ich suma, czyli $\{(O, O), (R, R), (R, O)\}$ nie należy do $\mathfrak{L}$.

Zadanie 2. *Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina*

$$\mathfrak{L} = \{A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \ : \ \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$$

jest λ-układem.

Zadanie 3. *Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$ oraz ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t*

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

Z wykładu Miara i Całka wiemy, że $\mathrm{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, czyli każdy zbiór z $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ zapisuje się jako $A \times B$ dla $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

Co więcej wiem, że $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, s] \ : \ s \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[t, \infty) \ : \ t \in \mathbb{R}\})$, czyli

$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty, s] \times [t, \infty)\})$$

Nasza miara ν zachowuje się jak miara produktowa na zbiorze generujących σ-ciało $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$, czyli zachowuje się tak na całym $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ i to kończy dowód?

Zadanie 4. *Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnego $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.*

ALE TO WIDAAAAĆ

Rozważmy zbiór $A \cap [-n, n]$, bo $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n, n])$ i $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap [-n, n])$, tak samo dla ν.

Zauważmy, że $A \cap [-n, n]$ można zapisać jako przeliczalne operacje na zbiorach postaci

$$[-p, -q) \cup (q, p],$$

więc wystarczy, że ograniczę się do zbiorów takiej postaci. Mamy

$$\begin{aligned}\mu([-p, -q) \cup (q, p]) &= \mu([-p, p] \setminus [-q, q]) = \mu([-p, p]) - \mu([-q, q]) = \\ &= \nu([-p, p]) - \nu([-q, q]) = \nu([-p, p] \setminus [-q, q]) = \nu([-p, -q) \cup (q, p])\end{aligned}$$

Zadanie 5. *Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p. Niech X będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Czyli mam zdarzenie ω, które jest ciągiem $(P, P, P, \dots, P, S, P, S, \dots)$ kodującym czy na i-tym miejscu był sukces czy porażka. Wtedy $X(\omega) = i$ takie, że $\omega_i = S$ i dla każdego $k < i$ $\omega_k = P$.

Czyli to jest rozkład dyskretny i $\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$?

Zadanie 6. *Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi $p_n = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$. W ciągu jednej sekundy wykonujemy n doświadczeń. Niech X_n będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X_n. Zbadaj zachowanie tego rozkładu, gdy $n \to \infty$.*

Tutaj jest rozkład Poisson'a, ale dlaczego?

Przy nieskończoności można de l'Hopitalem to zrobić, ale uuuu

Zadanie 7. *Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to*

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \mathbb{P}[X > s]$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ dla rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym bezatomowym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$.

Rozkład geometryczny to
$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p$$
Mi jest potrzebne prawdopodobieństwo, ze pierwsze zwycięstwo będzie powyżej $t + s$, jeżeli pierwsze zwycięstwo jest powyżej t?

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t + s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{(1-p)^{t+s-1}}{(1-p)^{t-1}} = (1-p)^s = \mathbb{P}[X > s]$$

Analogicznie dla rozkładu wykładniczego $\mathbb{P}[X > k] = \int_k^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda k}$:

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t + s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Przed udowodnieniem, że są to jedyne rozkłady z amnezją, przyjżyjmy się co konkretnie mówi mi warunek z zadania:
$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X \geq t\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s]}{\mathbb{P}[X \geq t]} = \mathbb{P}[X > s]$$
czyli
$$\mathbb{P}[X > t + s] = \mathbb{P}[X > s]\,\mathbb{P}[X > t].$$
Zacznijmy od rozkładu geometrycznego, tzn. $t, s \in \mathbb{N}$. Będę chciała potęgować, co się stanie, gdy $t = s$. Popatrzmy, co się wtedy dzieje:

$$\mathbb{P}[X > t + t] = \mathbb{P}[X > t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 2t + t] = \mathbb{P}[X > 2t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^3$$
i indukcyjnie,
$$\mathbb{P}\left[X > (n+1)t\right] = \mathbb{P}[X > nt + n] = \mathbb{P}[X > nt]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^{n+1}.$$
W takim razie:
$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t \cdot 1] = \mathbb{P}[X > 1]^t.$$

Dalej, wiemy, że albo $\mathbb{P}[X > t]$ albo $\mathbb{P}[X \leq t]$, czyli

$$\mathbb{P}[X > t] + \mathbb{P}[X \leq t] = 1$$

a z kolei $\mathbb{P}[X \leq t]$ to $\mathbb{P}[X = t]$ lub $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$. Czyli

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - \mathbb{P}[X \leq t - 1].$$

Z kolei $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$ mogę rozpisać korzystając z

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}\left[X > (t-1) + 1\right] = \mathbb{P}\left[X > (t-1)\right]\mathbb{P}[X > 1]$$

$$\mathbb{P}\left[X > (t-1)\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t - 1] = 1 - \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

Czyli dostaję, że
$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - 1 + \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$
nazwijmy $p = \mathbb{P}[X = 1]$, wtedy

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] = 1 - p.$$

Ostatecznie:

$$\mathbb{P}[X = t] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{1-p} - \mathbb{P}[X > t] = \frac{(1-p)^t}{1-p} - (1-p)^t = (1-p)^{t-1}(1-(1-p)) = p(1-p)^{t-1}$$

a to jest już nasz znajomy rozkład geometryczny.

Rozważam teraz rozkład eksponencjalny, który tym na przykład różni od geometrycznego, że przyjmuje argumenty nienaturalne. Zwykle jeśli mamy dane argumenty naturalne to chcemy przejść do wymiernych i dalej do rzeczywistych, to korzystamy najpierw z ułamków, a potem z granic ciągów tychże ułamków. Spróbujmy więc jakoś uzyskać $\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]$, wtedy zmieniając p, q będę miała wszystkie liczby wymierne

$$\mathbb{P}[X > p] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{2}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]$$

i podobnie jak wcześniej

$$\mathbb{P}[X > 1]^p = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-1)}{q} + \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-2)}{q}\right]\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]^q$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{q}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right].$$

W tym przypadku bardzo ciężko będzie mi przechodzić do równości, ale mogę za to powiedzieć, że dla każdej liczby niewymiernej x znajdę ciąg liczb wymiernych taki, że $x = \lim q_n$. Jeśli będziemy teraz brać ten ciąg podchodzący od dołu, to dostaniemy ciąg wstępujących prawdopodobonieństw, bo $X > q_n \implies X > q_{n+1}$ gdy $q_{n+1} > q_n$. Czyli będziemy mogli przejść z prawą stroną do granicy i dostać

$$\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X > 1]^x$$

nazwijmy teraz $\mathbb{P}[X > 1] = e^{-\lambda}$, żeby otrzymać

$$\mathbb{P}[X > x] = \left(e^{-\lambda}\right)^x = e^{\ln(e^{-\lambda})^x} = e^{x \ln e^{-\lambda}} = e^{-x\lambda}$$

co jest dokładnie postacią rozkładu geometrycznego.

Zadanie 8. (Twierdzenie Poissona) *Niech* $p_{k,n}$ *będzie prawdopodobieństwem zajścia dokładnie* k *sukcesów w* n *próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie pojedynczego sukcesu* p_n*. Dla każdego ustalonego* $k \in \mathbb{N}$ *wyznacz*

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n}, \textit{ jeśli } \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

Odkrycie rozwiązania

Druga część

Zadanie 9. *Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Niech $Y = e^X$, $Z = X^2$. Wyznacz dystrybuanty i gęstości zmiennych losowych X i Y.*

Internet górą

Wiemy, że zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

i funkcję gęstości $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Teraz chcę to samo dla Y i Z.

Internet podpowiada, żeby użyć całki Stieltjesa, co ma sens, bo liczymy Y względem X. Czyli jesteśmy sobie nieświadomi, co się dzieje pod spodem i myślimy, że funkcja gęstości Y to e^s. Ale to s nie jest byle jakie, bo my tam pod spodem ukryjemy dystrybuantę X? Ma to sens, bo całkujemy względem miary.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y \leq t] = \int_{-\infty}^{t} e^s dF(s) = \int_{-\infty}^{t} e^s f(s) ds = A \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{1}{2}[2s - s^2]} ds = \\ = Ae^{\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}[s^2 - 2s + 1]} ds\end{aligned}$$

i to już jest zwinięcie do wzoru skróconego mnożenia i podstawienie/

Drugi podpunkt analogicznie.

Ale to można by było chyba zrobić podobnie co ja niżej, rozbijając na przypadki.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[Y = e^X \leq t\right] &= \mathbb{P}\left[\ln(Y) = X \leq \ln(t)\right] = \int_{-\infty}^{\ln(t)} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \\ &= \begin{bmatrix} u = e^s \\ \ln(u) = s \\ du = e^s ds = u ds \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\ln(u)^2}{2}} \frac{1}{u} du = \\ &= \int_{-\infty}^{t}\end{aligned}$$

Zadanie 10. *Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

Udowodnij, że $\frac{1}{X}$ ma ten sam rozkład co X.