Rozmaite cierpienia

Spis treści

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

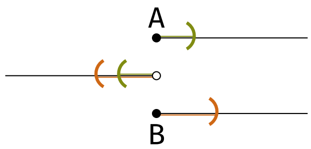
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową rozmaitością (n-rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

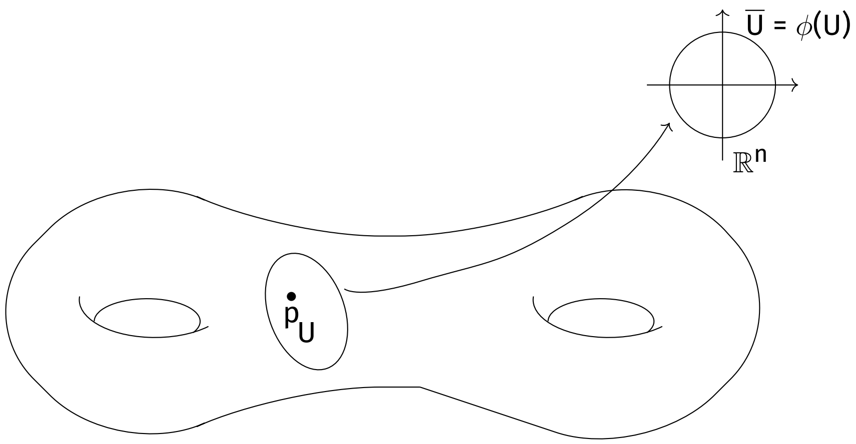
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z $\mathbb{R}^n$ przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego *zwartego* $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jego odpowiednik na M, czyli $K = \phi^{-1}(\overline{K}) \subseteq U$, jest *domknięty i zwarty* [ćwiczenia]. Jeśli zaś $\overline{K}$ jest zbiorem domknięty w $\overline{U}$, ale niezwartym, to nie zawsze K jest domknięty w M. Weźmy np. $\phi : U \to \overline{U} = \mathbb{R}^n$ i zbiór domknięty $\overline{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\overline{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że $\overline{K}$ jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii $\mathbb{R}^n$ nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots,$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n. Czyli na przykład S^2, sfera, ma naturalne włożenie w $\mathbb{R}^3$ pomimo lokalnej euklidesowości z $\mathbb{R}^2$.

Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona*, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z $\mathscr{X}$. Jeżeli M ma dwa pokrycia: $\mathscr{U}$ i $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{V}$ jest *pokryciem włożonym/rozdrobnieniem* $\mathscr{U}$. Dzięki przeliczalności bazy M, każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. ***Twierdzenie Brouwer'a*** *Dla $m \neq n$ otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$.*

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n, to nazywamy ją czasem *n-rozmaitością*.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.3. *Każdy otwarty podzbiór n-rozmaitości topologicznej jest n-rozmaitością topologiczną.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

2. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, ..., f_n)$ i dla $t \in (a,b)$ pochodną nazywamy wektor
$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ ... \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$
- dla gładkiego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, ..., f_m)$ i $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to
$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$
Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

2.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

J.M. Lee definiuje przestrzeń styczną przy pomocy derywacji oraz przedstawia możliwość użycia m.in. kiełków funkcji gładkich

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a,b) \to M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest *zbazowana w p*. Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy $C_p M$.

Definicja 2.1. Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p. Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 2.2. *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ *są styczne w mapie* (U, ϕ) *wokół* p*, to są też styczne w dowolnej innej mapie* (W, ψ) *wokół* p *(zgodnej z* (U, ϕ)*).*

Dowód.

$$\begin{aligned}(\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

☕

Definicja 2.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p.

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na $C_p M$, bo jest zwrotnia, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 2.4. **Przestrzenią styczną** do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_p M := C_p M / stycznosc$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_p M$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p.

2.2. Struktura wektorowa przestrzeni T_pM

Dla mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_{\phi,p} : \mathbb{R}^n \to T_pM \qquad \lambda_{\phi,p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji T_pM (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

Lemat 2.5. *$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^* = \mathrm{id}_{T_pM}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi,p}$ są one wzajemnie jednoznacze i do siebie odwrotne.*

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) =$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi(p) + tv) = v \qquad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_pM$

$$\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi,p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi\circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi\circ c)(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$ i w takim razie $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0] \quad \checkmark$. ☕

Fakt 2.6. *Na przestrzeni stycznej T_pM istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi,p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.*

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_pM$: $X + Y := \lambda_{\phi,p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w $\mathbb{R}^n$)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi,p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w $\mathbb{R}^n$).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z $\mathbb{R}^n$ przez $\lambda_{\phi,p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z $\mathbb{R}^n$ na T_pM struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi,p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) =$$
$$= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[\frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi(p) + tv)] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v)$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.

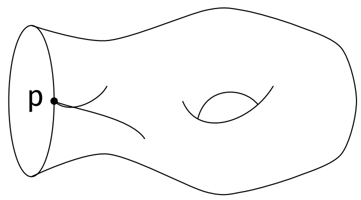
☕

O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla T_pM stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p. W tej mapie działania na wektorach z T_pM sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w $\mathbb{R}^n$.

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi = id_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (id_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \to \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \to M$ oraz $c : (a, t_0[\to M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy C_pM. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na T_pM określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



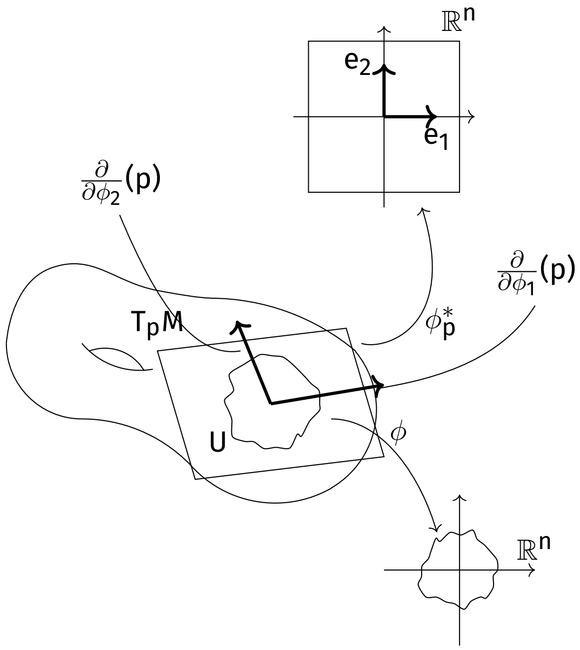
Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU), zaś dowolny wektor z $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ wersorów $e_1, ..., e_n$ oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę T_pM i dowolny wektor z T_pM ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.



2.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \to N$ i $p \in M, f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_pM$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_qN$.

Lemat 2.7. *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne, to* $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_qN$ *też są styczne*

Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 2.8. **Różniczką** f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 2.7.

Lemat 2.9. $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *jest odwzorowaniem liniowym.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\psi^*_{f(p)}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 2.6).

$$\begin{aligned}\psi_{f(p)} \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi^*_{f(p)} \circ df_p([c_v, 0]) = \psi^*_{f(p)}([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v]\end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \to N$ odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół f(p) jako

$$\psi^*_{f(p)} df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w T_pM i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)}N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial (\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial (\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : \underbrace{T_pU}_{=T_pM} \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ jest wówna odwzorowaniu "mapowemu" $\phi^*_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$.

Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_pM$, wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$$

Mapę $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})^*_{\phi(p)} : T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi^*_p([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \to M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \to T_{c(t_0)}M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$.
- Rozważmy gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym na T_pM.

Definicja 2.10. Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_pM$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X:

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

  Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$

☕

- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_pM$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

  Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$

☕

Przykłady:

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_pM$ i $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial (f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Stąd oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

Spis twierdzeń