Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

mysio pysio kurwa zbysio

–

Contents

1. Miara i całka v.2.0

Krzywa Gaussa to krzywa zadana wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Zdarzenie elementarne [ω] to sposób kodowania jednego wyniku w naszym eksperymencie. **Przestrzeń zdarzeń elementarnych** [Ω] to zbiór wszystkich wyników losowych. Rodzinę $\mathscr{F}$ podzbiorów Ω nazywamy σ-ciałem, jeśli:

$\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$

$A \in \mathscr{F}$ nazywamy **zdarzeniem**, a parę $(\Omega, \mathscr{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykłady:

1. Dla rzutu symetryczną monetą możliwe wyniki to orzeł (O) i reszka (R). Wtedy $\Omega = \{O, R\}$, natomiast $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$

2. Jeżeli będziemy rzucać kostką, to $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, natomiast $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$. Zdarzenia możemy próbować opisywać matematycznie, a możemy opisać je po ludzku, czyli $\mathscr{F} \ni A =$ *wypadła parzysta liczba oczek* $= \{2, 4, 6\}$. Cały trick, żeby zacząć o tym wszystkim myśleć w ramach teorii miary to zacząć myśleć, że my przyporządkowujemy prawdopodobieństwo zdarzeniom postaci bardziej matematycznej.

3. Jeśli będziemy wykonywać n rzutów kostką, to $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \ \omega_k \in [6]\} = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$, czyli to po prostu n-ta potęga rzutu pojedynczego. Zdarzenie to na przykład $B =$ *suma oczek jest parzysta* $= \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \ \omega_1 +,,, +\omega_n$ parzysta$\}$

Niech $(\Omega, \mathscr{F})$ będzie przestrzenią mierzalną.Wtedy funkcja

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$$

jest nazywana **prawdopodobieństwem na** Ω, jeżeli:

$\hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$, czyli prawdopodobieństwo wszystkiego wynosi 1,

$\hookrightarrow$ Jeżeli $A_1, .A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathbb{P}(A_k)$, czyli prawdopodobieństwo, że zachodzi którekolwiek ze zdarzeń (suma mnogościowa) jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych wydarzeń.

Trójkę $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykłady:

1. [*Prawdopodobieństwo klasyczne*] Niech Ω będzie zbiorem skończonym, setF $= 2^{\Omega}$ i każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest jednakowo prawdopodobne. To oznacza, że $[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|}$, bo inaczej drugi warunek nie zostanie spełniony. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

2. Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy? Spróbujmy zapisać to bardzo formalnie.

$\Omega = \{O, R\}^3$,

$\mathscr{F} = 2^{\Omega}$,

$A =$ *orzeł wypadł dokładnie dwa razy* $= \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$.

Jeżeli każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, czyli moneta jest symetryczna, to

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

Tutaj zauważmy, że gdyby moneta nie była symetryczna, to ten opis sytuacji nie jest już prawdziwy i potrzebna byłaby inna konstrukcja $\mathbb{P}$.

3. Niech Ω będzie przeliczalna. Rozważmy ciąg $p_1, p_2, \dots$ z przedziału $[0,1]$ taki, że $\sum p_k = 1$. Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, to możemy ustalić, że $\mathbb{P}[\{\omega_k\}] = p_k$. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Możemy o tym wszystkim myśleć nie jako o prawdopodobieństwie, a jako o masie.

Twierdzenie: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$ zachodzą:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}[\bigcup A_k] = \sum \mathbb{P}(A_k)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Jeżeli $A \subseteq B$, to $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ (w szczególności $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$)
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. $\mathbb{P}(\bigcup A_k) \leq \sum \mathbb{P}(A_k)$

Dowód: ćwiczenia

Zasada włączeń i wyłączeń: Dla $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_k\right) = \sum \mathbb{P}(A_k) - \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Dowód: ćwiczniea

Twierdzenie o ciągłości: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, \dots \in \mathscr{F}$.

1. Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ (są wstępujące), to dla $A = \bigcup A_k$
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$
2. Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ (są zstępujące), to wtedy dla $B = \bigcup A_k$
$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Dowód:

1. Rozważmy zdarzenia B_n dane przez

$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

wtedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

i tak samo dla sumy skończonej, czyli

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n.$$

Wtedy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup B_k\right) = \sum \mathbb{P}(B_k) = \lim \sum^{N} \mathbb{P}(B_k) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup B_N\right) = \lim \mathbb{P}(A_N)$$

2. Rozważmy teraz ciąg $C_k = A_k^c$ spełniające

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$$

Dodatkowo,

$$\bigcup C_k = \bigcup A_k^c = \left(\bigcap A_k\right)^c = B^c$$

Mamy

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}\left(B^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup C_k\right) = 1 - \lim \mathbb{P}(C_n) = 1 - \lim(1 - \mathbb{P}(A_n)) = \lim \mathbb{P}(A_n)$$

Przykład:

1. Rozważmy kule o numerach 1, 2, 3, ... Wrzucamy te kule stopniowo do urny. O godzinie 12:59 wrzucamy kule o numerach 1, 2, ..., 10. Pół minuty później chcemy wyciągnąć zgodnie z jednym z trzech wariantów:

a) kulę o numerze 1,

b) kulę o numerze 10,

c) losujemy kulę,

po czym dorzucamy kule o numerach 11, 12, ..., 20. Po kolejnej $\frac{1}{4}$ minuty wyciągamy

a) kulę o numerze 2,

b) kulę o numerze 20,

c) losowo wybraną kulę i znowu dorzucamy kule 21, 22, 30.

Tak robimy przez minutę. Pytanie jest o to, *ile jest kul w urnie o godzinie* $13:00$?

a) 0

b) ∞

c) Rozważmy kulę o numerze 1. A_n = *kula 1 jest w urnie po* n *losowaniach*. Zauważmy, że jeżeli kula była po $(n+1)$ losowaniu, to musiała w niej też byc po n losowaniach. Czyli $A_{n+1} \subseteq A_n$. W takim razie mamy zdarzenia zstępujące i możemy napisać

$$A = \bigcap A_n = \textit{ kula 1 jest w urnie o godzinie 13:00}$$

$$\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \dots \frac{9n}{9n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1} = \prod \left(1 - \frac{1}{9k+1}\right) \le \prod e^{-\frac{1}{9k+1}} = e^{-\sum \frac{1}{9k+1}},$$

bo $1 - x \le e^{-x}$. Teraz zauważmy, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+1} = \infty$$

jest rozbieżny, czyli

$$e^{-\sum \frac{1}{9k+1}} \to 0$$

a skoro prawdopodobieństwo A_n było ograniczone przez to od góry, to

$$\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_k) = 0.$$

2. Romeo i Julia umówili się na spotkanie w nocy o północy. Każde z nich może się spóźnić co najwyżej godzinę. Pierwsza osoba, która przyjdzie czeka co najwyżej 15 minut na tę drugą. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do spotkania wogóle dojdzie?* Będziemy liczyć czas w sposób ciągły.

Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, gdzie x będzie odpowiadać czasowi przyjścia Romeo, a y - kiedy przyszła Julia. Wtedy $\mathscr{F} = \mathrm{Bor}([0,1]^2)$, a $\mathbb{P}$ to 2-wymiarowa miara Lesbegue'a. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \textit{ dojdzie do spotkania } = \{(x,y) \ : \ |x-y| \le \frac{1}{4}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \lambda_2(A) = 1 - \mathbb{P}\left(A^c\right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

3. Wybieramy jednostajnie liczbę z przedziału $[0, 1]$. Wtedy $\mathbb{P}$ to miara Lesbegue'a, inaczej ten wybór nie będzie jednostajny.

4. [*Paradoks Bertranda*] Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa AB w okręgu jest dłuższa niż bok równobocznego trójkąta wpisanego?