Algebra 2R, lista 3.

Zadanie domowe : dowolne 3 zadania z listy, bez minusów. Podpunkt liczy się jako oddzielne zadanie. Z każdego zadania $\leqslant 1$ podpunkt. Zadań oznaczonych minusem nie deklarujemy.

1. Niech K będzie ciałem, zaś $L = K(X)$ to ciało funkcji wymiernych zmiennej X nad K.
   a)– Udowodnić, że rozszerzenie $L \supset K$ jest przestępne.
   b) Niech $M = L[\sqrt{X}]$ będzie algebraicznym rozszerzeniem ciała L o element $Y = \sqrt{X}$ taki, że w ciele M, $Y^2 - X = 0$. Udowodnić, że M i L są izomorficzne nad K.

2. Niech K będzie ciałem.
   a) Niech $g \in K(X) \setminus K$. Udowodnić, że X jest algebraiczne nad ciałem $K(g)$. W szczególności $[K(X) : K(g)] < \infty$. Jaki jest stopień tego rozszerzenia ?
   b) Dla g jak w (a) udowodnić, że $K(g)$ jest izomorficzne z $K(X)$, nad K.

3. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x^2 + y^2 = 1$. Jaki jest wymiar nad $\mathbb{Q}$ układu wektorów $v_1, \ldots, v_n$?

4. Załóżmy, że $K \supset F(p)$ jest skończonym rozszerzeniem ciała $F(p)$, charakterystyki p. Załóżmy, że $a \in K$ jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia m z jedynki. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną > 0 taką, że $m \mid p^n - 1$.
   (a) Udowodnić, że n to stopień a nad $F(p)$.
   (b) Udowodnić, że $n \mid \varphi(m)$. Podać przykład, gdzie $n < \varphi(m)$.

5. (a) Udowodnić, że wielomian $j(F_m(X))$ nie musi być nierozkładalny nad ciałem $F(p)$. ($j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ ilorazowe, wsk: skorzystać z poprzedniego zadania)
   (b) Udowodnić, że jeśli $k, l \in \mathbb{N}^+$ są względnie pierwsze, to $k \mid l^{\varphi(k)} - 1$. (wsk: rozważyć pierścień $\mathbb{Z}_k$)

6. Znaleźć wielomiany minimalne nad $\mathbb{Q}$ dla następujących liczb:
   (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, (b) $1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$, (c) $1 + \sqrt[3]{17}$.

7. Udowodnić (korzystając z lematu Liouville'a), że liczba
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$
   jest przestępna. (liczby rzeczywiste, których przestępność wynika z lematu Liouville'a, nazywamy liczbami Liouville'a)

8. Załóżmy, że $M \supset K$ jest rozszerzeniem algebraicznym ciał oraz L_1, L_2 są ciałami pośrednimi (tzn: $K \subset L_1, L_2 \subset M$). $L_1[L_2] = L_2[L_1]$ oznacza jak zwykle podpierścień ciała M generowany przez $L_1 \cup L_2$. Udowodnić, że

(a) $L_1[L_2]$ jest podciałem ciała M (oznaczamy je przez L_1L_2),
(b) $[L_1L_2 : K] \leqslant [L_1 : K] \cdot [L_2 : K]$
(c)* Czy jeśli $L_1 \cap L_2 = K$, to w (b) zachodzi równość ?