Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

mysio pysio kurwa zbysio

–

Konsultacje: środy 9-10, 13-14, pokój 907.

Klasówki: 13.04, 1.06 w skali od 0 do 100, potrzeba zdobyć minimum 101 punktów.

Egzamin: piątek 23.06 godz. 10:00-14:00

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Miara i całka v.2.0

1.1. Podstawowe definicje

Krzywa Gaussa to krzywa zadana wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Zdarzenie elementarne [ω] to sposób kodowania jednego wyniku w naszym eksperymencie. **Przestrzeń zdarzeń elementarnych** [Ω] to zbiór wszystkich wyników losowych. Rodzinę $\mathscr{F}$ podzbiorów Ω nazywamy σ-ciałem, jeśli:

$\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$

$A \in \mathscr{F}$ nazywamy **zdarzeniem**, a parę $(\Omega, \mathscr{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykłady:

1. Dla rzutu symetryczną monetą możliwe wyniki to orzeł (O) i reszka (R). Wtedy $\Omega = \{O, R\}$, natomiast $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$

2. Jeżeli będziemy rzucać kostką, to $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, natomiast $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$. Zdarzenia możemy próbować opisywać matematycznie, a możemy opisać je po ludzku, czyli $\mathscr{F} \ni A =$ *wypadła parzysta liczba oczek* $= \{2, 4, 6\}$. Cały trick, żeby zacząć o tym wszystkim myśleć w ramach teorii miary to zacząć myśleć, że my przyporządkowujemy prawdopodobieństwo zdarzeniom postaci bardziej matematycznej.

3. Jeśli będziemy wykonywać n rzutów kostką, to $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \; : \; \omega_k \in [6]\} = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$, czyli to po prostu n-ta potęga rzutu pojedynczego. Zdarzenie to na przykład $B =$ *suma oczek jest parzysta* $= \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \; : \; \omega_1 +,,+ \omega_n \text{ parzysta}\}$

1.2. Przestrzeń probabilistyczna

Niech $(\Omega, \mathscr{F})$ będzie przestrzenią mierzalną.Wtedy funkcja

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$$

jest nazywana **prawdopodobieństwem na** Ω, jeżeli:

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, czyli prawdopodobieństwo wszystkiego wynosi 1,

$\hookrightarrow$ Jeżeli $A_1, .A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathbb{P}(A_k)$, czyli prawdopodobieństwo, że zachodzi którekolwiek ze zdarzeń (suma mnogościowa) jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych wydarzeń.

Trójkę $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykłady:

1. [*Prawdopodobieństwo klasyczne*] Niech Ω będzie zbiorem skończonym, setF $= 2^{\Omega}$ i każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest jednakowo prawdopodobne. To oznacza, że $[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|}$, bo inaczej drugi warunek nie zostanie spełniony. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

2. Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy? Spróbujmy zapisać to bardzo formalnie.

$\Omega = \{O, R\}^3$,

$\mathscr{F} = 2^\Omega$,

A = *orzeł wypadł dokładnie dwa razy* = $\{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$.

Jeżeli każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, czyli moneta jest symetryczna, to

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

Tutaj zauważmy, że gdyby moneta nie była symetryczna, to ten opis sytuacji nie jest już prawdziwy i potrzebna byłaby inna konstrukcja $\mathbb{P}$.

3. Niech Ω będzie przeliczalna. Rozważmy ciąg $p_1, p_2, \ldots$ z przedziału $[0, 1]$ taki, że $\sum p_k = 1$. Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, to możemy ustalić, że $\mathbb{P}[\{\omega_k\}] = p_k$. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Możemy o tym wszystkim myśleć nie jako o prawdopodobieństwie, a jako o masie.

Twierdzenie: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ zachodzą:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}[\bigcup A_k] = \sum \mathbb{P}(A_k)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Jeżeli $A \subseteq B$, to $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ (w szczególności $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$)
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. $\mathbb{P}(\bigcup A_k) \leq \sum \mathbb{P}(A_k)$

Dowód: ćwiczenia

Zasada włączeń i wyłączeń: Dla $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}\left[\bigcup A_k\right] = \sum \mathbb{P}[A_k] - \sum \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \sum \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j \cap A_k\right] - \ldots (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]$$

Dowód: ćwiczniea

Twierdzenie o ciągłości: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, \ldots \in \mathscr{F}$.

1. Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (są wstępujące), to dla $A = \bigcup A_k$

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

2. Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (są zstępujące), to wtedy dla $B = \bigcap A_k$

$$\mathbb{P}[B] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Dowód:

1. Rozważmy zdarzenia B_n dane przez

$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

wtedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

i tak samo dla sumy skończonej, czyli

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n.$$

Wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcup B_k\right] = \sum \mathbb{P}[B_k] = \lim \sum^{N} \mathbb{P}[B_k] = \lim \mathbb{P}\left[\bigcup B_N\right] = \lim \mathbb{P}[A_N]$$

2. Rozważmy teraz ciąg $C_k = A_k^c$ spełniające

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$$

Dodatkowo,

$$\bigcup C_k = \bigcup A_k^c = \left(\bigcap A_k\right)^c = B^c$$

Mamy

$$\mathbb{P}[B] = 1 - \mathbb{P}\left[B^c\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup C_k\right] = 1 - \lim \mathbb{P}[C_n] = 1 - \lim(1 - \mathbb{P}[A_n]) = \lim \mathbb{P}[A_n]$$

Przykład:

1. Rozważmy kule o numerach 1, 2, 3, ... Wrzucamy te kule stopniowo do urny. O godzinie 12:59 wrzucamy kule o numerach 1, 2, ..., 10. Pół minuty później chcemy wyciągnąć zgodnie z jednym z trzech wariantów:

a) kulę o numerze 1,

b) kulę o numerze 10,

c) losujemy kulę,

po czym dorzucamy kule o numerach 11, 12, ..., 20. Po kolejnej $\frac{1}{4}$ minuty wyciągamy

a) kulę o numerze 2,

b) kulę o numerze 20,

c) losowo wybraną kulę i znowu dorzucamy kule 21, 22, 30.

Tak robimy przez minutę. Pytanie jest o to, *ile jest kul w urnie o godzinie* $13:00$?

a) 0

b) ∞

c) Rozważmy kulę o numerze 1. A_n = *kula 1 jest w urnie po* n *losowaniach*. Zauważmy, że jeżeli kula była po $(n+1)$ losowaniu, to musiała w niej też byc po n losowaniach. Czyli $A_{n+1} \subseteq A_n$. W takim razie mamy zdarzenia zstępujące i możemy napisać

$$A = \bigcap A_n = \textit{ kula 1 jest w urnie o godzinie 13:00}$$

$$\mathbb{P}[A] = \lim \mathbb{P}[A_n].$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}[A_n] = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \ldots \frac{9n}{9n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1} = \prod \left(1 - \frac{1}{9k+1}\right) \leq \prod e^{-\frac{1}{9k+1}} = e^{-\sum \frac{1}{9k+1}},$$

bo $1 - x \leq e^{-x}$. Teraz zauważmy, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+1} = \infty$$

jest rozbieżny, czyli

$$e^{-\sum \frac{1}{9k+1}} \to 0$$

a skoro prawdopodobieństwo A_n było ograniczone przez to od góry, to

$$\mathbb{P}[A] = \lim \mathbb{P}[A_k] = 0.$$

2. Romeo i Julia umówili się na spotkanie w nocy o północy. Każde z nich może się spóźnić co najwyżej godzinę. Pierwsza osoba, która przyjdzie czeka co najwyżej 15 minut na tę drugą. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do spotkania wogóle dojdzie?* Będziemy liczyć czas w sposób ciągły.

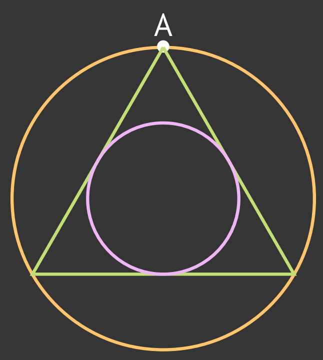
Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, gdzie x będzie odpowiadać czasowi przyjścia Romeo, a y - kiedy przyszła Julia. Wtedy $\mathscr{F} = \mathrm{Bor}([0,1]^2)$, a $\mathbb{P}$ to 2-wymiarowa miara Lesbegue'a. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \textit{ dojdzie do spotkania } = \{(x,y) \ : \ |x-y| \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\mathbb{P}[A] = \lambda_2(A) = 1 - \mathbb{P}\left[A^c\right] = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

3. Wybieramy jednostajnie liczbę z przedziału $[0,1]$. Wtedy $\mathbb{P}$ to miara Lesbegue'a, inaczej ten wybór nie będzie jednostajny.

4. [*Paradoks Bertranda*] Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa AB w okręgu jest dłuższa niż bok równobocznego trójkąta wpisanego?


A

2. Prawdopodobieństwo warunkowe

Dalsza część wykładu będzie raczej oderwana od tego co się dzieje tutaj.

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech A, B będą zdarzeniami takimi, że $\mathbb{P}[B] > 0$. Wówczas **prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A względem B nazywamy wartość

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Jeśli ustalimy zbiór B, to miara $\mathbb{P}[\bullet|B]$ jest miarą probabilistyczną.

Przykład:

1. Wybieramy losową rodzinę z dwójką dzieci. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to dwóch chłopców, jeżeli

a). starsze dziecko jest chłopcem.

Mamy $\Omega = \{(d, d), (d, c), (c, c), (c, d)\}$ przypadki, kiedy starsze dziecko to chłopiec:

$$B = \{(d, c), (c, c)\}$$

i podzbiór tego, gdy oboje są chłopcami to $A = \{(c, c)\}$. Czyli

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{2}$$

b). jedno z tych dzieci to chłopak.

Omega jest taka sama jak wcześniej, zmienia nam się definicja zbioru B:

$$B = \{(c, d), (d, c), (c, c)\}$$

A jest nadal singletonem. Ogółem mamy

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}$$

Mówimy, że rodzina zbiorów $\{B_k\}_{k=1}^n$ (dopuszczamy $n = \infty$) jest **rozbiciem zbioru Ω**, jeśli $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$ (suma rozłączna).

2.1. Prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie: [wzór na *prawdopodobieństwo całkowite*] Niech $\{B_k\}_{k=1}^n$ będzie rozbiciem Ω takim, że $\mathbb{P}[B_k] > 0$ dla każdego k. Wówczas dla każdego $A \in \mathscr{F}$ zachodzi:

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_k]\, \mathbb{P}[B_k]$$

Dowód:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[A \cap \left[\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right]\right] = \mathbb{P}\left[\bigsqcup_{k\leq n} [A \cap B_k]\right] = \sum_{k\leq n} \mathbb{P}[A \cap B_k] = \sum_{k\leq n} \mathbb{P}[A|B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]$$

i śmiga

Przykład: W loterii fantowej mamy 3 rodzaje losów:

$\hookrightarrow$ W - wygrana, wyciągany z prawdopodobieństwem p

$\hookrightarrow$ P - przegrana - z prawdopodobieństwem q

$\hookrightarrow$ D - graj dalej - z prawdopodobieństwem r

gdzie $p + q + r = 1$. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

Niech Z będzie zdarzeniem, które mówi, że wygraliśmy. Chcemy obliczyć $\mathbb{P}[Z]$. W, P, D to rozbicie przestrzeni Ω. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[Z|W] \cdot \mathbb{P}[W] + \mathbb{P}[Z|P] \cdot \mathbb{P}[P] + \mathbb{P}[Z|D] \cdot \mathbb{P}[D] = \\ &= 1 \cdot p + 0 \cdot q + \mathbb{P}[Z] \cdot r \\ \mathbb{P}[Z] &= \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\end{aligned}$$

2.2. Wzór Bayesa

Twierdzenie: [*wzór Bayesa*] załóżmy, że mamy rozbicie Ω $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ to znaczy, $\mathbb{P}[B_k] > 0$. Weźmy dowolne zdarzenie A takie, że $\mathbb{P}[A] > 0$. Wówczas dla każdego j zachodzi

$$\mathbb{P}\left[B_j|A\right] = \frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\sum_{k\le n}\mathbb{P}[A|B_k]\,\mathbb{P}[B_k]}$$

Dowód: Użycie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$\frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\sum_{k\le n}\mathbb{P}[A|B_k]\,\mathbb{P}[B_k]} = \frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\cdot\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}\left[A\cap B_j\right]}{\mathbb{P}\left[B_j\right]}\cdot\frac{\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}\left[B_j|A\right]$$

i śmiga

Przykład:

1. Mamy 100 monet i 99 z nich jest uczciwych, a jedna jest fałszywa (orły po dwóch stronach). Losujemy monetę i wypadło 10 orłów. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy fałszywą monetę.

Niech B_1 oznacza, że wylosowaliśmy monetę uczciwą, a B_2 - że fałszywą. Wtedy zdarzeniem A będzie wyrzucenie 10 orłów. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B_2|A] &= \frac{\mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A|B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} = \frac{1\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{99}{100}+\frac{1}{100}} = \\ &= \frac{1024}{1123} \approx 91\%\end{aligned}$$

2. U pacjenta przeprowadzono test na rzadką chorobę. Wiadomo, że na tę chorobę choruje 1 osoba na 1000. Test jest "mocny", to znaczy jeżeli osoba jest chora, to test wskazuje na chorobę z prawdopodobieństwem $\frac{99}{100}$. Jeżeli natomiast osoba jest zdrowa, to test nie wskazuje na chorobę z prawdopodobieństwem $\frac{95}{100}$. Test wskazał na chorobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory.

Mamy trzy zdarzenia:

Z - pacjent jest zdrowy,

C - pacjent jest chory,

T - test wyszedł pozytywny.

Używamy wzoru Bayesa, żeby obliczyć

$$\mathbb{P}[C|T] = \frac{\mathbb{P}[T|C]\,\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[T|Z]\,\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[T|C]\,\mathbb{P}[C]} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.95 \cdot 0.999 + 0.99 \cdot 0.001} = \frac{99}{5094} \approx 2\%$$

3. Niezależność

Niech $A, B \in \mathscr{F}$ będą dwoma zdarzeniami. Co miałoby oznaczać, że A jest niezależne od B? Wiedza o zdarzeniu A nic nie wnosi do wiedzy na temat zdarzenia B, czyli:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cap B]$$

Będziemy chcieli budować przestrzeń, w której możemy wykonywać nieskończone eksperymenty, np. przestrzeń, która opisuje nam nieskończone ciągi rzutami monetą. Oczywiście, będziemy zaczynać od przypadków skończonych i przechodzić granicą dalej.

3.1. Niezależność zdarzeń

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mówimy, że zdarzenia A i B są **niezależne**, jeżeli

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\, \mathbb{P}[B].$$

Przykład: Rzucamy dwukrotnie kostką. A to zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła liczba nieparzysta, a B - że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6. Wtedy Ω to wszystkie pary liczb $1, \dots, 6$, $\mathscr{F}$ to wszystkie podzbiory Ω. Wiemy, że $\mathbb{P}[(i, j)] = \frac{1}{36}$ bez względu na i, j.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (3, 1), (3, 2), \dots, (5, 6)\}$$

$$B = \{(1, 5), (1, 6), \dots, (6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 5), (1, 6), (3, 5), \dots, (5, 5), (5, 6)\}$$

mamy $\mathbb{P}[A] = \frac{18}{36}$, $\mathbb{P}[B] = \frac{12}{36}$ i $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{36}$, czyli zdarzenia są niezależne.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n < \infty$ są **niezależne**, jeżeli dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right] = \mathbb{P}\left[A_{i_1}\right] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\left[A_{i_k}\right].$$

Tych warunków do sprawdzenia jest $2^n - n - 1$.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są **parami niezależne**, jeżeli dla każdych $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] = \mathbb{P}[A_i]\, \mathbb{P}\left[A_j\right].$$

Tych warunków jest $\binom{n}{2}$. Warunek niezależności ciągu A_i jest mocniejszy niż warunek w ciągu parami niezależnym. [PRZYKŁAD ZE SKRYPTU]

Niech $\{A_i\}_{i \in I}$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksującym, będzie rodziną zdarzeń z $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Mówimy, że te zdarzenia są **niezależne**, jeżeli dla każdego skończonego podzbioru indeksów $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ zdarzenia $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ są niezależne. Czyli *niezależność nieskończonej liczby zdarzeń sprowadza się do niezależności na skończonym przypadku*.

3.2. Niezależność σ-ciał

Niech $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ będą σ-ciałami zawartymi w $\mathscr{F}$, gdzie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że te σ-ciała są **niezależne**, jeśli dla dowolnych $A_1 \in \mathscr{F}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}_n$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2] \ldots \mathbb{P}[A_n]\,,$$

czyli σ-ciała są niezależne, jeżeli ich elementy są niezależne. [ĆWICZENIE na przemyślenie].

Przykład: Rzucamy dwa razy kostką. $\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}$ są nam już znane. Chcemy pokazać dwa σ-ciała, które są od siebie niezależne. Wprowadzamy:

$$\mathscr{F}_1 = \{A \times \{1, \ldots, 6\} \ : \ A \subseteq \{1, \ldots, 6\}\}$$

czyli tutaj mamy tylko pierwszy rzut kostką,

$$\mathscr{F}_2 = \{\{1, \ldots, 6\} \times B \ : \ B \subseteq \{1, \ldots, 6\}\}$$

czyli mamy informację tylko o drugim rzucie kostką. Takie σ-ciała są niezależne.

Chcemy sprawdzić, że

$$\mathbb{P}[A \times \{1, \ldots, 6\} \cap \{1, \ldots, 6\} \times B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,.$$

Prawą stronę liczymy z jednostajności miary:

$$\mathbb{P}[A] = 6 \cdot \frac{|A|}{36} = \frac{|A|}{6}$$

$$\mathbb{P}[B] = 6 \cdot \frac{|B|}{36} = \frac{|B|}{6}$$

Lewą stroną też nie jest ciężko policzyć:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \times B] = \frac{|A||B|}{36}.$$

Czyli

$$\text{LHS} = \mathbb{P}[A \cap B] = \frac{|A||B|}{36} = \frac{|A|}{6} \cdot \frac{|B|}{6} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] = \text{RHS}$$

Dowolna **rodzina σ-ciał** $\{F\}_{i \in I}$ z przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ jest **niezależna**, jeżeli dowolny jej skończony podzbiór jest niezależny.

Lemat: Jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to σ-ciała $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$ przez nie generowane też są niezależne. [Branie dopełnień zachowuje niezależności].

Dowód: Ćwiczenie.

Wniosek: Jeżeli zdarzenia są niezależne, to wtedy

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - \mathbb{P}\left[A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c\right] = 1 - \prod_{i \leq n} \mathbb{P}\left[A_i^c\right] = 1 - \prod_{i \leq n}(1 - \mathbb{P}[A_i])$$

Problem: Mamy zadany ciąg n doświadczeń. Wynik i-tego doświadczenia opisany jest przestrzenią probabilistyczną $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mathbb{P}_i)$. Jak skonstruować jedną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, która modeluje przeprowadzenie tych doświadczeń w sposób niezależny?

Definiujemy

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n,$$

bo chcemy na i-tym miejscu wyniki i-tego doświadcznia:

$$\mathscr{F}_i' = \{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n \; : \; A \in \mathscr{F}_i\},$$

czyli na i-tym miejscu bierzemy zbiór, a na całej reszcie współrzędnych bierzemy całość. Czyli $\mathscr{F}_i'$ jest swego rodzaju kopią $\mathscr{F}$ rzuconą na więcej współrzędnych. Zdefiniujmy

$$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{F}_1', \ldots, \mathscr{F}_n')$$

czyli najmniejsze σ-ciało które zawiera wszystkie te rzuty $\mathscr{F}_i'$.$\mathscr{F}$ zawiera w szczególności zbiory postaci $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Problem pojawia się, kiedy próbujemy konstruować miarę $\mathbb{P}$ która działa na całości. To znaczy, spełnia

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n] = \mathbb{P}[A_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \cap \ldots \cap \Omega_1 \times \ldots \times A_n] = \prod \mathbb{P}[A_i].$$

Z teorii miary, wiemy, że takie $\mathbb{P}$ istnieje i jest jedyne. Takie $\mathbb{P}[P]$ jest miarą produktową i oznaczamy je

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$$