Rachunek Prawdopodobieństwa 1R
Klasówka 2
Dzień Dziecka 2021

Exercise 1. *Na 20 krzesłach, przy okrągłym stole, usiadło 10 dziewczyn i 10 chłopaków w sposób losowy (tzn. taki, że każde możliwe ich usadzenie jest jednakowo prawdopodobne). Niech X oznacza liczbę dziewczyn, które siedzą pomiędzy chłopakami (tzn. trójek CDC). Oblicz $\mathbb{E}X$.*

Wybieram 10 krzeseł dla dziewczynek i ustawiam na $\binom{20}{10}$ sposobów. Ale teraz układ okrągły krzeseł mogłam rozciąć w 20 różnych miejscach by stworzyć taki ciąg, więc jedna unikalna opcja siedzenia to u mnie 20 rozróżnialnych ciągów, stąd:

$$|\text{Kombinacje}| = \frac{1}{20}\binom{20}{10}$$

Ponumerujmy teraz krzesła od 1 do 20 i wprowadźmy nową zmienną losową:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{w i-tym krzesle siedzi dziewczynka otoczona chłopcami} \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Teraz zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że $Y_i \neq 0$?

$$\mathbb{P}\left[Y_i = 1\right] = \frac{1}{8}$$

bo $\frac{1}{2}$ to szansa, że siedzi dziewczynka, a $\frac{1}{4}$ to szansa, że $i-1$ i $i+1$ są okupowane przez chłopców, gdyż płeć siedzącego daje zmienne niezależne.

Czyli

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[\sum Y_i] = \sum^{20} \frac{1}{8} = \frac{20}{8}$$

Exercise 2. *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i maja rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wykaż, że ciąg*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2 + \sqrt{n}}$$

jest zbieżny prawie na pewno. Oblicz jego granicę.

Tutaj korzystam z MPWL? Bo X_n są niezależne i mają ten sam rozkład o $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 = 1 < \infty$, tak samo $\mathbb{E}|X_1^2| = \mathbb{E}X_1^2 = \int x^2 e^{-x} dx = 2 < \infty$. Czyli

$$\frac{\sum X_i + n}{\sum X_i^2 + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}[\sum X_i + n]}{\frac{1}{n}[\sum X_i^2 + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum X_i + 1}{\frac{1}{n}\sum X_i^2 + \frac{\sqrt{n}}{n}} \to \frac{1+1}{2+0}$$

Exercise 3. *Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie $N(m, \Sigma)$, gdzie $m = (0, 0)$,*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dla jakich wartości a zmienne losowe $Y_1 = aX_1 + X_2$ oraz $Y_2 = X_1 + aX_2$ są niezależne?

Zadanie 6 na liście 8: Jeśli $X_1, ..., X_n$ są nieskorelowane i ich łączny rozkład jest normalny, to są one niezależne. Już wiem, że Σ jest macierzą kowariacji, czyli

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(aX_1+X_2, X_1+aX_2) = a\mathrm{Cov}(X_1, X_1)+(a^2+1)\mathrm{Cov}(X_1, X_2)+a\mathrm{Cov}(X_2, X_2) = a+(a^2+1)+2a = a^2+3a+1 = 0$$

Ja nie podołam takiemu zadaniu.

Exercise 4. *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ. Zdefiniujemy $Z = \min\{X, Y\}$. Oblicz $\mathbb{E}Z$ oraz $\mathrm{var}(Z)$.*

Jutro rano.