Rozmaite cierpienia

Na podstawie wykładów

Prof. Świątkowskiego

w semestrze letnim 2022/2023

oraz *Introduction to Smooth Manifolds* J.M. Lee

Spis treści

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

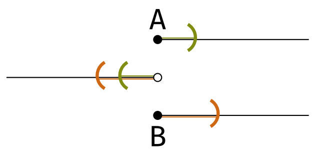
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową rozmaitością (n-rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

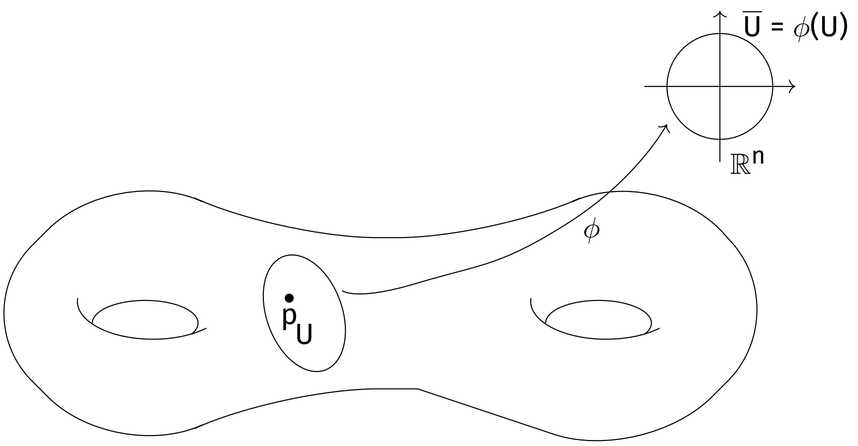
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z $\mathbb{R}^n$ przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego *zwartego* $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jego odpowiednik na M, czyli $K = \phi^{-1}(\overline{K}) \subseteq U$, jest *domknięty i zwarty* [ćwiczenia]. Jeśli zaś $\overline{K}$ jest zbiorem domknięty w $\overline{U}$, ale niezwartym, to nie zawsze K jest domknięty w M. Weźmy np. $\phi : U \to \overline{U} = \mathbb{R}^n$ i zbiór domknięty $\overline{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\overline{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że $\overline{K}$ jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii $\mathbb{R}^n$ nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots,$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n. Czyli na przykład S^2, sfera, ma naturalne włożenie w $\mathbb{R}^3$ pomimo lokalnej euklidesowości z $\mathbb{R}^2$.

Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona*, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z $\mathscr{X}$. Jeżeli M ma dwa pokrycia: $\mathscr{U}$ i $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{V}$ jest *pokryciem włożonym/rozdrobnieniem* $\mathscr{U}$. Dzięki przeliczalności bazy M, każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. ***Twierdzenie Brouwer'a*** *Dla $m \neq n$ otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$.*

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n, to nazywamy ją czasem *n-rozmaitością*.

Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna $\iff$ jest łukowo spójna. Składowe spójności M są równe składowym łukowej spójności M.
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

1.2. Mapy, współrzędne lokalne

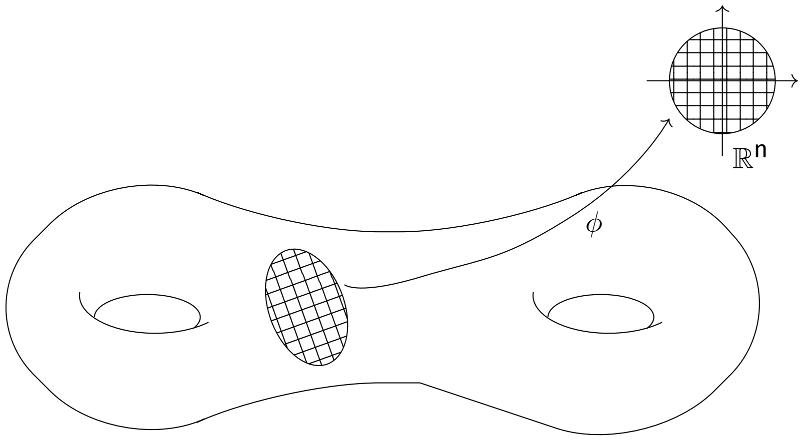
Definicja 1.3. **Mapą** na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, zaś $\phi : U \to \overline{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**

Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to M jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy (U, ϕ) takiej, że $p \in U$ i $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ mówimy, że jest *mapą wokół p*. Za pomocą translacji możemy każdą mapę zawsze przesunąć tak, aby $\phi(p) = 0$. Czyli możemy odgórnie zakładać, że mapa (U, ϕ) jest mapą o początku w p.

Często będziemy przechodzić do coraz to mniejszych zbiorów mapowych poprzez branie odwzorowań obciętych co nie burzy gładkości ani zgodności z atlasem. Pozwoli to np. zakładać, że dla $p \notin F$ domkniętego bierzemy mapę (U, ϕ) taką, że $U \cap F = \emptyset$.

Mapy nazywa się też czasem *lokalnymi współrzędnymi* na M lub *lokalną parametryzacją* M. Ponieważ o mapie można myśleć jako o przeniesieniu siatki współrzędnych $(x_1, ..., x_n)$ z $\overline{U} = \phi(U)$ przez ϕ^{-1} na U, to będziemy często utożsamiać $U \subseteq M$ z $\overline{U}$. O punkcie $p \in M$ takim, że $\phi(p) = (x_1, ..., x_n)$ będziemy myśleć jako o $p = (x_1, ..., x_n)$.

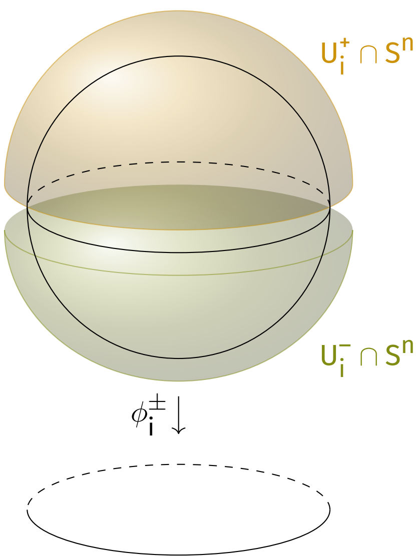


Przykłady:

1. Każdy otwarty podzbiór n-rozmaitości topologicznej jest n-rozmaitością [ćwiczenia].

2. **Wykresy ciągłych funkcji**: Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą. Wykresem f nazywamy zbiór
$$\Gamma(f) = \{(x, y) \ : \ x \in U, \ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$
Oznaczmy przez $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ projekcję na $\mathbb{R}^n$, tzn. $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy funkcja $\phi : \Gamma(f) \to U$ będąca obcięciem π_1 do $\Gamma(f)$. Ponieważ ϕ jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \Gamma(f)$ dana przez $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$, jest ciągłą funkcją odwrotną do ϕ. W takim razie, ϕ jest homeomorfizmem między U a $\Gamma(f)$ i wykres funkcji ciągłych jest lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaitością topologiczną.

3. Sfery S^n są n-rozmaitościami, które wkładają się w $\mathbb{R}^{n+1}$ ($S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\}$).



Rozważmy rodzinę par $\{(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm}) \ : \ i = 1, ..., n+1\}$ na S^n zdefiniowanych jako:

$$U_i^{+} = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^{-} = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$

Oznaczenie $\widehat{x_i}$ oznacza "wyrzucenie" danej współrzędnej.

$$\phi_i^{\pm}(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Zbiory $U_i^{\pm}$ pokrywają całe S^n, gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje $\phi_i^{\pm}$ są ciągłe jako obcięcia rzutów $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\mathbb{R}^n$. Obrazem zbioru $U_i^{\pm}$ przez $\phi_i^{\pm}$ jest zbiór

$$\overline{U_i^{\pm}} = \phi_i^{\pm}(U_i^{\pm}) = \{(x_1, ..., x_n) \ : \ \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w $\mathbb{R}^n$.

Odwzorowania $\phi_i^{\pm}$ są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^{\pm})^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, ..., x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie $\phi_i^{\pm}$ są homeomorfizmami między otwartymi podzbiorami S^n a otwartymi podzbiorami R^n.

Pokazaliśmy lokalną euklidesowość S^n, natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie S^n dziedziczy z $\mathbb{R}^{n+1}$.

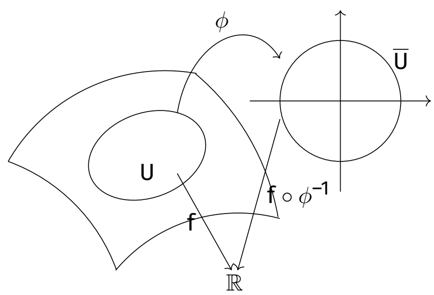
4. Produkt kartezjański dwóch (lub k) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].

5. n-torus jest przestrzenią produktową $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$ i n-rozmaitością topologiczną. $\mathbb{T}^2$ nazywamy po prostu torusem.

1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

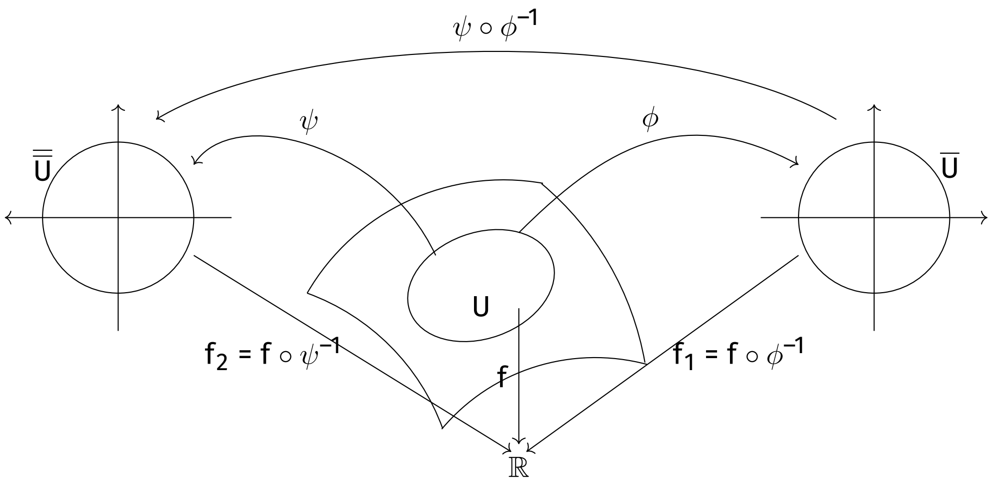
Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać je różniczkowalność za pomocą map (U, ϕ) na M.

Funkcja $f \ : \ M \ \to \ \mathbb{R}$ **wyrażona w mapie** (U, ϕ) to złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$.



Definicja 1.4. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy (U, ϕ) f może gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy (U, ψ) to może się okazać, że $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ nie jest gładka:

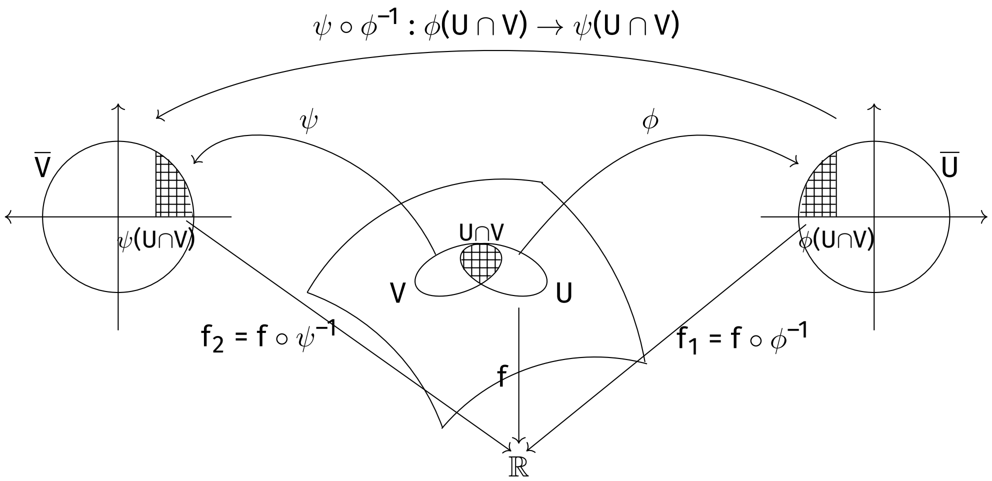


Dlatego chcemy móc założyć, że $\phi \circ \psi^{-1}$ jest przekształceniem gładkim.

Definicja 1.5. Mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania $\phi\psi^{-1}$ nazywamy *odwzorowaniami przejścia* z jednej mapy do drugiej. Jeśli $\phi\psi^{-1}$ i $\psi\phi^{-1}$ są gładkie, to są one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** (def. 1.14) pomiędzy otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy $U \cap V \neq \emptyset$, rysunek wygląda:



Mapy (U, ϕ) i (V, ψ) nazywamy zgodnymi, jeśli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejścia

  $$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

  oraz

  $$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

  są gładkie ($\iff$ są dyfeomorfizmami podzbiorów $\phi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$).

Definicja 1.6. **Gładkim atlasem** $\mathscr{A}$ na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ takich, że:

- $\{U_\alpha\}$ pokrywają całe M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykłady:

1. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ na sferze S^n jest atlasem gładkim na S^n. Dla przykładu zbadamy zgodność map (U_i^+, ϕ_i^+) i (U_j^+, ϕ_j^+) dla $i < j$.

   Popatrzmy jak wyglądają interesujące nas zbiory:

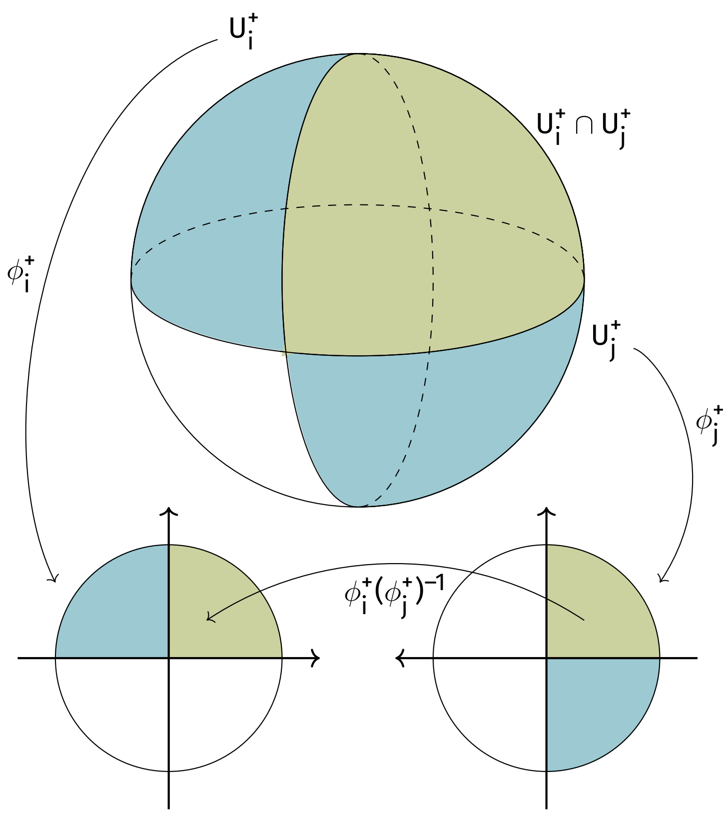
$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0, x_j > 0\}$$

$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

   bo usuwamy i-tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i > 0\}$$

   bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od i, więc jej położenie nie zmienia się.



$$\begin{tikzcd}
(x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "(\phi_j^+)^{-1}"] & (x_1, \dots., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n) \arrow[d, "\phi_i^+"] \\
\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i > 0\} \arrow[u, phantom, "\Cap"] & (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 & \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\} \arrow[u, phantom, "\Cap"]
\end{tikzcd}$$

Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

2. Jeśli V jest przestrzenią liniową wymiaru $n < \infty$ nad $\mathbb{R}$, to dowolna norma określona na V zadaje metrykę, która pozwala określić na V topologię (identyczną dla równoważnych norm). Z taką topologią V jest n-rozmaitością z naturalnie zdefiniowaną strukturą.

   Niech $(e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą V. Rozważmy izomorfizm $E : \mathbb{R}^n \to V$ zadany przez

   $$E(x) = \sum_{i \le n} x^i e_i.$$

   Funkcja ta w kontekście topologicznym jest homeomorfizmem, więc (V, E^{-1}) jest mapą na V.

   Jeśli $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ jest inną bazą na V, to mamy homeomorfizm

   $$\bar{E}(x) = \sum x^j \bar{e}_j$$

   Istnieje wtedy pewna odwracalna macierz (A^j_i) taka, że

   $$e_i = \sum A^j_i \bar{j}$$

   dla każdego i.

   Stąd modwzorowanie przejścia między tymi dwoma mapami jest zadana przez $\bar{E}^{-1} \circ E(x) = \bar{x}$, gdzie $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ jest zadane przez

   $$\sum_{j \le n} \bar{x}^j \bar{e}_j = \sum_{i \le n} x^i e_i = \sum_{i,j \le n} x^i A^j_i \bar{e}_j \implies \bar{x}^j = \sum_{i \le n} A^j_i x^i$$

   W takim razie jakakolwiek mapa wysyłająca x na $\bar{x}$ jest odwracalna i liniowa $\implies$ jest dyfeomorfizmem. Stąd dowolne dwie mapy (V, E) są gładko zgodne i ich rodzina definiuje na V standardową gładką strukturę.

Definicja 1.7. **Rozmaitością gładką** nazywamy parę $(M, \mathscr{A})$, gdzie M jest rozmaitością topologiczną, zaś $\mathscr{A}$ jest pewnym atlasem gładkim na M.

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaitości topologicznej M mogą zadawać tę samą rozmaitość gładką. Na przykład dla $M = \mathbb{R}^n$ istnieje atlas zawierający jedną mapę $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ oraz atlas $\{(B_x(r), \mathrm{id}_{B_x(r)}) \ : \ x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, który jest tak naprawdę "rozdrobnieniem" pierwszego atlasu.

Definicja 1.8. Niech $\mathscr{A}$ będzie gładkim atlasem na M.

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z $\mathscr{A}$, jeśli jest zgodna z każdą mapą $(V, \psi) \in \mathscr{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ na M są zgodne, jeśli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z $\mathscr{A}_2$.

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotnią i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaitości gładkiej na topologicznej rozmaitości M. Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

Definicja 1.9. $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości M, jeśli każda mapa zgodna z $\mathscr{A}$ należy do $\mathscr{A}$.

Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z $\mathscr{A}$ [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę $(M, \mathscr{A})$, gdzie M jest rozmaitością topologiczną, a $\mathscr{A}$ jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

Mówimy, że mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ są *C^k-zgodne* jeśli $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (posiadają pochodne cząstkowe rzędów $\leq k$). C^k-atlas to z kolei rodzina C^k-zgodnych map, która określa strukturę C^k-rozmaitości na M. Struktura C^k-rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy C^m dla $m > k$.

C^0 rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a C^∞-rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

Dychotomia C^0 i C^k dla $k > 0$ aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu C^1-rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. Zatem, każda C^1-rozmaitość posiada C^1-zgodną strukturę C^∞-rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak C^0-rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne [C^ω]. Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w $\mathbb{C}^n$ zamiast $\mathbb{R}^n$.
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

1.5. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu $\mathscr{A}$ na M, jeśli dla każdej mapy $(U, \phi) \in \mathscr{A}$ $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

Fakt 1.10.

- *Jeśli $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathscr{A}$, zaś (U, ϕ) jest mapą zgodną z $\mathscr{A}$, to $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.*

- *Jeśli* $\mathscr{A}_1$ *i* $\mathscr{A}_2$ *są zgodnymi atlasami, to* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest gładka względem* $\mathscr{A} \iff$ f *jest gładka względem* $\mathscr{A}_2 \iff f$ *jest gładka względem atlasu maksymalnego* $\mathscr{A}_{\max}$ *zawierającego* $\mathscr{A}_1$ *i* $\mathscr{A}$.

Dowód. Ćwiczenia ☕

Fakt 1.11. *Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie.*

Dowód. Niech $f : M \to N$ i $g : N \to P$ będą gładkimi funkcjami. Weźmy $p \in M$ oraz oznaczmy $q = f(p) \in N$, $s = g(q) = g(f(p)) \in P$. Niech $(U, \phi), (V, \psi), (W, \xi)$ będą mapami odpowiednio wokół p, q, s.

Wiemy, że $\psi f \phi^{-1}$ oraz $\xi g \psi^{-1}$ są funkcjami gładkimi. Chcemy sprawdzić, czy $\xi(g \circ f)\phi^{-1}$ jest funkcją gładką.

$$\xi(g \circ f)\phi^{-1} = (\xi g \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})$$

jest złożeniem dwóch funkcji gładkich między $\mathbb{R}^n$-ami, więc $g \circ f$ jest gładką funkcją między rozmaitościami. ☕

Definicja 1.12. **Rzędem funkcji** $f : M \to N$ C^1-różniczkowalnego (def. 1.15) w punkcie p nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania $\psi f \phi^{-1}$ w $\phi(p)$.

Fakt 1.13. *Powyższa liczba [rząd funkcji w* p*] nie zależy od wyboru mapy wokół* p *ani wokół* $f(p)$.

Dowód. Szkicowy.

Dla map $(U, \phi), (V, \psi)$ oraz $(U', \phi'), (V', \psi')$ chcemy porównać rząd macierzy jakobianu $\widehat{f} = \psi f \phi^{-1}$ oraz $\widehat{\widehat{f}} = \psi' f (\phi')^{-1}$. Wiemy, że

$$\widehat{\widehat{f}} = \alpha \widehat{f} \beta,$$

gdzie $\alpha = \psi' \psi^{-1}$ i $\beta = \phi(\phi')^{-1}$.

Macierz jakobianu złożenia to iloczyn macierzy jakobianu funkcji składowych. Macierz jakobianu odwzorowań przejścia jest nieosobliwa [są one bijekcjami]. W takim razie domnożenie przez jakobian α i β nie zmieni rzędu jakobianu $\widehat{f}$. ☕

1.6. Dyfeomorfizmy

Definicja 1.14. Gładkie odwzorowanie $f : M \to N$ nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli jest wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) oraz odwzorowanie do niego odwrotne f^{-1} jest gładkie.

Dwie rozmaitości M, N są **dyfeomorficzne**, jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm. Są one wtedy nierozróżnialne jako gładkie rozmaitości.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda C^1-rozmaitość posiada C^1-zgodną strukturę C^∞ rozmaitości. Teraz możemy dopowiedzieć, że jeśli dwie C^∞-rozmaitości są C^1-dyfeomorficzne, to są one też C^∞-dyfeomorficzne. Stąd klasyfikacja C^1 rozmaitości różniczkowalnych z dokładnością do C^1-dyfeomorfizmu jest taka sama jak klasyfikacja C^∞ rozmaitości z dokładnością do C^∞ dyfeomorfizmu.

Wiemy już, że istnieją C^0-rozmaitości bez struktury C^∞-rozmaitości. Możemy teraz dodać do tego fakt, że istnieją C^0-rozmaitości które nie są dyfeomorficznie zgodne jako C^∞ rozmaitości. W 1956 pokazano, że dla sfer S^n $n \geq 7$ istnieje skończenie wiele takich niedyfeomorficznych struktur.

W latach 1980 pokazano, że na $\mathbb{R}^4$ istnieje nieprzeliczalnie wiele struktur o których mowa wyżej. Z kolei przypadku ≤ 3 związek pomiędzy C^0 a C^∞ jest taki jak pomiędzy C^1 a C^∞.

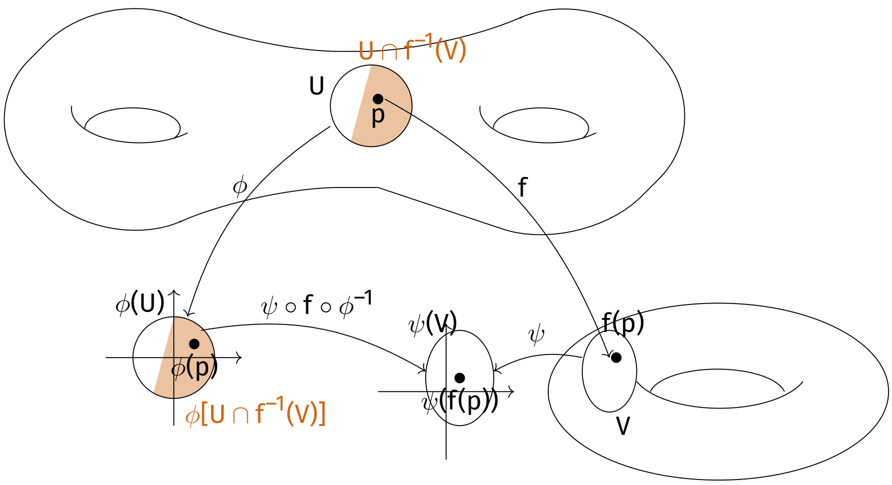
1.7. C^k-różniczkowalność odwzorowań rozmaitości

Definicja 1.15. Dla M, N gładkich rozmaitości i $f : M \to N$ ciągłej mówimy, że f jest **C^k-różniczkowalna** w punkcie p, jeśli dla dowolnych map $(U, \phi) \ni p$ oraz $(V, \psi) \ni f(p)$ złożenie

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U \cap f^{-1}(V)] \to \psi(V)$$

jest C^k-różniczkowalne w punkcie $\phi(p)$.

f jest C^k na otoczeniu p, jeśli $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest C^k różniczkowalne na pewnym otwartym otoczeniu $\phi(p)$.



Funkcję $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest nazywana **wyrażeniem f w mapach** (U, ϕ) i (V, ψ) lub też wyrażeniem f w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy.

Fakt 1.16. *Jeśli f wyrażona w mapach (U, ϕ) i (V, ψ) jest C^k-różniczkowalna w punkcie $\phi(p)$ [na jego otoczniu] to wyrażona w innych mapach $(U', \phi'), (V', \psi')$ też jest C^k różniczkowalna wokół p [na jego otoczeniu].*

Dowód. Niech $\widehat{f} = \psi f \phi^{-1}$ a $\widehat{\widehat{f}} = \psi' f (\phi')^{-1}$. Oznaczmy odwzorowania przejścia $\alpha = \phi(\phi')^{-1}$ oraz $\beta = \psi' \psi^{-1}$. Zachodzi

$$\widehat{\widehat{f}} = \beta \circ \widehat{f} \circ \alpha = (\psi' \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})(\phi(\phi')^{-1}) = \psi' f (\phi')^{-1}.$$

Zarówno $\widehat{\widehat{f}}$ jak i $\beta \widehat{f} \alpha$ są funkcjami określonymi na pewnych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ oraz $\alpha(\phi'(p)) = \phi(p)$. W takim razie jeśli $\widehat{f}$ jest funkcją C^k-różniczkowalną, to $\widehat{\widehat{f}}$ jako złożenie funkcji gładkich z funkcją C^k-różniczkowalna też takie jest. ☕

Dzięki tej obserwacji możemy definiować C^k-różniczkowalność funkcji jako bycie C^k-różniczkowalną w dowolnej mapie. Możemy więc dobrać sobie mapę w której sprawdzamy C^k-różniczkowalność tak, aby dowód był wygodny.

Uwaga 1.17. *Funkcja* $f : M \to N$ *jest* C^k*-różniczkowalna* $\iff$ *dla dowolnych map* (U, ϕ) *oraz* (V, ψ) *wyrażenie* $\psi f \phi^{-1}$ *funkcji* f *jest* C^k*-różniczkowalne na całym zbiorze, na którym jest ono określone.*

Pojęcia:

- odwzorowań gładkich
- różniczkowalności w punkcie (otoczeniu)
- dyfeomorfizmu
- rzędu odwzorowania w punkcie

oraz ich własności bez zmian przenoszą się na rozmaitości gładkie z brzegiem (def. 1.19).

1.8. Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 1.18. *Niech* X *będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i* $\{U_\alpha\}$ *będzie kolekcją podzbiorów w* X *taką, że dla każdego* α *istnieje* $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ *różniczkowalne takie, że*

1. *dla każdego* α $\phi_\alpha(u_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest otwarty*
2. *dla dowolnych* α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *oraz* $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *są otwarte w* $\mathbb{R}^n$.
3. *jeśli* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *to* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne* $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-a}$ *też jest gładkie)*
4. *przeliczalnie wiele spośród* U_α *pokrywa* X
5. *dla każdego* $p, q \in X$, *jeśli* $p \neq q$, *to istnieją* α, β *oraz otwarte* $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$ *i* $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$ *takie, że* $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p), q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ *oraz* $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ *(oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).*

Wówczas na X *istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory* U_α *są otwarte. Ponadto rodzina* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ *tworzy wtedy gładki atlas na* X.

Dowód. A dokładniej szkic dowodu.

Dokładny dowód w Lee, lemat 1.35.

Określimy topologię na X przy pomocy przeciwobrazów przez ϕ_α otwartych podzbiorów $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5. ☕

Przykłady:

1. $\mathscr{L}$ jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą możnaby od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

oraz funkcje ϕ_h, ϕ_v:

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \overset{\phi_h}{\mapsto} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \overset{\phi_v}{\mapsto} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to $\mathbb{R}^2$, czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całęgo X, to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$U_h \cap U_v$ = {proste niepionowe i niepoziome} = $\{y = ax + b \ : \ a \neq 0\} = \{x = cy + d \ : \ c \neq 0\}$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \ : \ c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

Weźmy prostą $L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v$.

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

Zatem $\phi_h\phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$ jest gładkie (podobnie $\phi_v\phi_h^{-1}$).

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią $\mathscr{L}$ jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania $\mathscr{L}$ nie wystarcza jedna mapa.

O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subseteq M$ z obrazem przez mapę, czyli $\overline{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych $(x_1, ..., x_n)$ z $\overline{U}$ przez ϕ^{-1} na $U \subseteq M$.
- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że $p = (0, ..., 0)$ w mapie, czyli możemy założyć, że (U, ϕ) jest mapą o początku w p.
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół p ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subseteq M$ niezawierającym p.

1.9. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$$

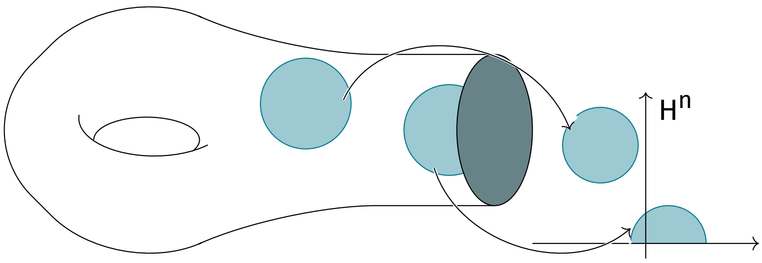
a wnętrzem:

$$\mathrm{int}(H^n) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\}.$$

Dla $U \subseteq H^n$ oznaczymy $\partial U = U \cap \partial H$ oraz $\mathrm{int}(U) = U \cap \mathrm{int}(H^n)$, czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy H^n oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla $U \subseteq H^n$ otwartego i $f : U \to \mathbb{R}^m$ mówimy, że f jest **gładka**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\widehat{f} : \widehat{U} \to \mathbb{R}^m$, $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego, $U \subseteq \widehat{U}$. *Pochodne cząstkowe funkcji* f *są dobrze określone na* $\mathrm{int}(U)$, *a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na* ∂U (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia $\widehat{f}$). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia $\widehat{f}$ istnieje $\iff$ wszystkie pochodne cząstkowe f w $\mathrm{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U.

Definicja 1.19. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $U_\alpha \subseteq M$ i $\phi_\alpha : U_\alpha \to H^n$ i $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w H^n, gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn. $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w H^n).



Fakt 1.20. *Jeśli w pewnej mapie* (U_α, ϕ_α), $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, *to w każdej innej mapie* (U_β, ϕ_β) *zawierającej* p $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$.

Dowód. Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jakobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczności obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji. ☕

Definicja 1.21. **Brzegiem** n-rozmaitości M z brzegiem nazywamy zbiór

$$\partial M = \{p \in M \ : \ \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial H^n$$

wnętrze M nazywa się

$$\mathrm{int}(M) = \{p \in M \ : \ (\exists\, (U_\alpha, \phi_\alpha)\ \phi_\alpha(p) \in \mathrm{int}(H^n)\}$$

Fakt 1.22. *Wnętrze* $\mathrm{int}(M)$ n-*rozmaitości gładkiej* M *jest* n-*rozmaitością bez brzegu.*

Dowód. Jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\mathrm{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \mathrm{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \restriction U'_\alpha$$

Odwzorowania przejścia $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$, więc są gładkie. ☕

Przykłady:

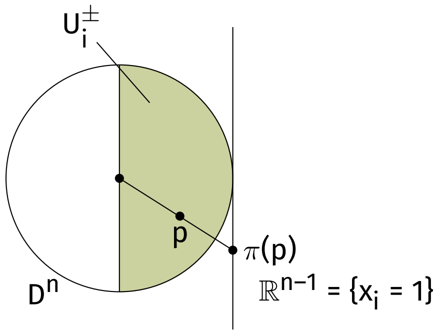
1. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leq 1\}$ jest n-rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$.

   Dowód. Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa (U_0, ϕ_0):

$$U_0 = \{x \;:\; |x| < 1\},\;\; \phi_0 : U_0 \to H^n,\;\; \phi_0(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n + 2)$$

Mapy $(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm})$



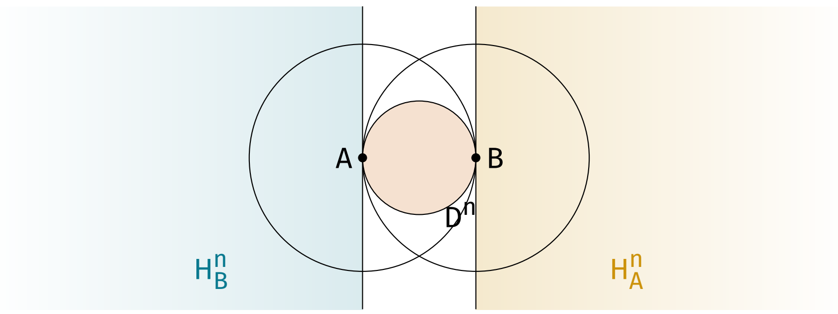
$$U_i^+ = \{x \in D^n \;:\; x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in D^n \;:\; x_i < 0\}$$

$$\phi_i^{\pm}(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum x_i^2}_{1-r^2}\right)$$

$$\phi_i^{\pm}(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$

2. Inny atlas na D^n, składający się tylko z dwóch map:



Niech A i B będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku D^n. Rozważmy zbiory

$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

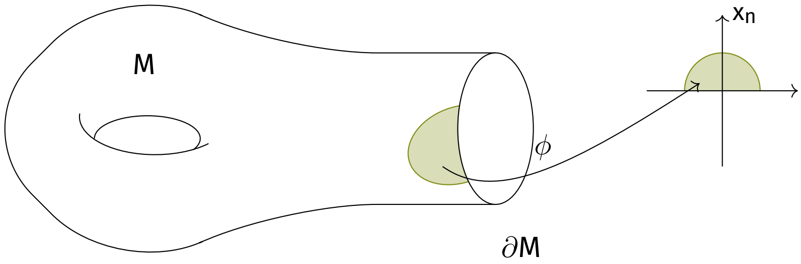
oraz odwzorowania $\phi_A \;:\; U_A \;\to\; H^n_A$ i $\phi_B \;:\; U_B \;\to\; H^n_B$ będące inwersjami dysku względem sfer S^n o środkach w A i B oraz promieniu 2.

3. Tutaj warto zaznaczyć, że jeśli n = 0, to wtedy $\partial M = \emptyset$ i M jest 0-rozmaitością. W dodatku, zbiór rozmaitości gładkich z brzegiem można rozumieć jakoby zawierał zbiór rozmaitości topologicznych, gdyż $\partial M = \emptyset \iff$ M jest rozmaitością topologiczną.

2. Rozkład jedności

Rozważmy rozmaitość z brzegiem M. Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje $f : M \to \mathbb{R}$ takie, że $f(p) = 0$ gdy $p \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla dowolnego $p \in \mathrm{Int}(M)$.

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq M$ znaleźć funkcję, która dla $p \in D$ jest równa zero, a na $M \setminus D$ ma wartości ściśle dodatnie.



Lokalnie, na zbiorze mapowym (U_α, ϕ) możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, ..., x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z ∂M jest zawsze zerowa (gdyż są one w ∂H^n). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przełożyć lokalne f_α na funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

Definicja 2.1. Pokrycie $\{A_\alpha\}$ podzbiorami przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α.

Definicja 2.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia** $\{U_\alpha\}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α.

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$.

$\{W_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\} \implies \{W_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$

Definicja 2.3. Przestrzeń topologiczna X jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego punktu otoczeń prezwartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

Dowód: patrz Lee strona 36-37

Uwaga 2.4. *Rozdrobnienie wynikające z parazwartości rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z prezwartych zbiorów mapowych.*

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie pokryciem M. Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych. Wystarczy obraz każdego U_α w $\mathbb{R}^n$ pokryć zbiorami prezwartymi i wrócić z nimi na M. Z faktu, że rozmaitości są parazwarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które z przechodności $\prec$ jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Dodatkowo, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ, które były mapowe i prezwarte, więc i V_β taki jest. ☕

Uwaga 2.5. *Niech $\{A_\alpha\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną parazwartych podzbiorów rozmaitości M. Wtedy dla każdego A_{α_0} podrodzina*

$$\{A_\alpha \ : \ A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha \ : \ A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg A_{α_i} oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w pewnym $p \in \mathrm{cl}(A_{\alpha_0})$.

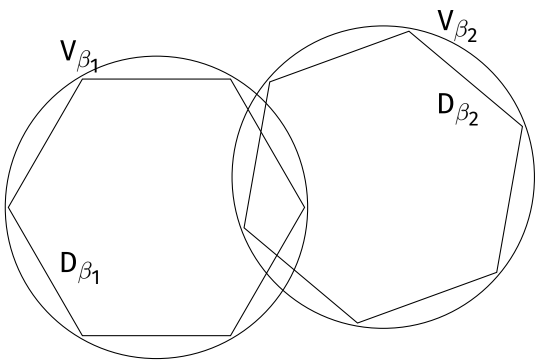
Ponieważ p jest punktem skupienia x_i, to dowolne otwarte otoczenie U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele elementów x_i. W takim razie U_p przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami A_α. Jest to sprzeczne z lokalną skończonoścía $\{A_\alpha\}$. ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i prezwartość zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$ wynikającego z parazwartości rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

Uwaga 2.6. *Niech $\{V_\beta\}$ będzie lokalnie skończonym rozdrobnieniem pokrycia M składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego β istnieje zwarty zbiór $D_\beta \subseteq V_\beta$ taki, że*

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobnienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa M.



Dowód. Ponieważ V_β są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podzbiorze w $\mathbb{R}^n$ poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem $\overline{V_\beta} = \phi_\beta(V_\beta)$ dla mapy (V_β, ϕ_β).

Każdy V_{β_0} jest wstępującą suma mniejszych zbiorów $V_{\beta_0,k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, które są otwarte i ich zwarte domknięcia zawierają się w V_{β_0}: $\mathrm{cl}(V_{\beta_0,k}) \subseteq V_{\beta_0}$. Możemy np. wybierać $V_{\beta_0,k} = B(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} \ : \ d(x, V_{\beta_0^c} > \frac{1}{k}\}$, tzn. przekroje kul otwartych w $\mathbb{R}^n$ o środku w $x_0 \in V_{\beta_0}$ i promieniu k ze zbiorami tych $x \in V_{\beta_0}$, które są odległe od dopełnienia V_{β_0} o co najmniej $\frac{1}{k}$.

Niech teraz $V_{\beta_1}, ..., V_{\beta_m}$ będą zbiorami z $\{V_\beta\}$ niepusto krojącymi V_{β_0}. Jest ich skończenie na mocy 2.5. Wówczas $V_{\beta_1}, ..., V_{\beta_m}$ wraz z wcześniej stworzonymi $V_{\beta_0,k}$ jest pokryciem zwartego zbioru $cl(V_{\beta_0})$. Możemy więc z niego wybrać skończone podpokrycie postaci: $V_{\beta_1}, ..., V_{\beta_m}, ...V_{\beta_0,k_0}$. Oznacza to, że zastępując w $\{V_\beta\}$ zbiór V_{β_0} przez zbiór V_{β_0,k_0} dostajemy nowe pokrycie M z $cl(V_{\beta_0,k_0} \subseteq V_{\beta_0}$. Powtarzamy to induktywnie dla wszystkich V_β i wybieramy pokrycie

$$D_\beta = cl(V_{\beta,k}),$$

które spełnia wymagania z uwagi. ☕

> Z uwag udowodnionych wyżej wynika więc, że dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_\beta\}$ rozmaitości topologicznej M istnieje
>
> - lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$ składające się ze zbiorów mapowych i parazwartych oraz
> - rodzina $\{D_\beta\}$ zwartych podzbiorów $D_\beta \subseteq V_\beta$, która dalej pokrywa M.
>
> To samo dotyczy też rozmaitości z brzegiem.

2.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

Definicja 2.7. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ określamy jej **nośnik** jako:

$$\mathrm{supp}(f) := cl(\{x \in X \;:\; f(x) \neq 0\})$$

Fakt 2.8. *[z $\mathbb{R}^n$] Dla dowolnego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_+$ oraz dowolnego zwartego $D \subseteq \Omega$ istnieje gładka funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że:*

1. $f \geq 0$
2. $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$
3. $f(x) > 0$ *dla* $x \in D$

Twierdzenie 2.9. [O rozkładzie jedności] *Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_i\}$ gładkich funkcji $f_i : M \to \mathbb{R}$ takich, że*

1. $f_i \geq 0$
2. *dla każdego i nośnik $\mathrm{supp}(f_i)$ zawiera się w pewnym U_α*
3. *nośniki $\{\mathrm{supp}(f_i)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M*
4. *dla każdego $x \in M$ $\sum f_i(x) = 1$ [suma ta jest skończona wokół każdego x dzięki 3.]*

Dowód. Niech $\{V_j\} \prec \{U_\alpha\}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym prezwartymi zbiorami mapowymi. Niech $D_j \subseteq V_j$ będą zbiorami zwartymi, które dalej pokrywają M (na mocy 2.6).

Niech (V_j, ϕ_j) będzie mapą na M i niech

$$\overline{D}_j = \phi(D_j) \subseteq \phi_j(V_j) = \overline{V}_j$$

będzie zbiorem zwartym. Dzięki faktowi z $\mathbb{R}^n$ 2.8 wiemy, że dla każdego j istnieje gładka funkcja $\overline{h}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że:

1. $\overline{h}_j \geq 0$
2. $\operatorname{supp}(\overline{h}_j) \subseteq \overline{V}_j$
3. $\overline{h}_j(x) > 0$ dla $x \in D_j$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $h_j : M \to \mathbb{R}$ taką, że:

$$h_j(x) = \begin{cases} \overline{h}_j \circ \phi_j(x) & x \in V_j \\ 0 & x \notin V_j \end{cases}$$

Żeby pokazać gładkość h_j, wystarczy pokazać jej gładkość na pewnym otoczeniu każdego punktu.

Na otoczeniu punktów z V_j funkcja jest oczywiście gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich. Dla $p \notin V_j$ istnieje otwarte otocznie U_p które jest rozłączne z $\operatorname{supp}(h_j)$, a więc jest otwartym otoczenie na którym h_j jest stale równe zero. Taka funkcja jest oczywiście gładka.

Niech teraz $h(x) = \sum_j h_j(x)$. Jest to dobrze określona definicja, gdyż $\operatorname{supp}(h_j)$ tworzą rodzinę lokalnie skończoną (bo $\{V_j\}$ taka jest). Z lokalnej skończoności nośników wynika, że h jest gładka na M.

Dostajemy też $h(x) > 0$, bo D_j pokrywają całe M, a więc dla każdego $x \in M$ istnieje i takie, że $x \in D_i$, a więc $h_i(x) > 0$.

Określmy $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)}$. Wiemy, że $f_j : M \to \mathbb{R}$ jest gładka na M, $\operatorname{supp}(f_j) = \operatorname{supp}(h_j) \subseteq V_j$, więc rodzina $\{\operatorname{supp}(f_j)\}$ jest lokalnie skończona i każdy $\operatorname{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α. Wreszcie mamy

$$\sum f_j(x) = \sum \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{\sum h_j(x)} = 1$$

dla każdego $x \in M$. ☕

Definicja 2.10. Rodzina funkcji $\{f_j\}$ jak w dowodzie twierdzenia wyżej jest nazywana **rozkładem jedności** wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

2.3. Zastosowania rozkładów jedności

Zazwyczaj rozkłady jedności służą do konstruowania gładkich funkcji, które są określone na całym M i spełniają pewne wymagania. Z pomocą rozkładów jedności będziemy też "globalizować" inne obiekty na rozmaitościach, np. pola wektorowe, metryki Riemanna czy formy różniczkowalne.

Przykłady:

1. Niech F_1, F_2 będą domkniętymi rozłącznymi podzbiorami gładkiej rozmaitości M. Wówczas istnieje gładka funkcja $f : M \to [0, 1]$ taka, że

$$f \restriction F_1 \equiv 1$$

   oraz $f \restriction F_2 \equiv 0$.

Dowód. Niech $U_i = M \setminus F_i$, wtedy $\{U_1, U_2\}$ jest pokryciem M. Niech $\{f_i\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_1, U_2\}$. Określmy

$$f(x) = \sum_{supp(f_j) \subseteq U_2} f_j(x).$$

Weźmy $x \in F_1$, wtedy wszystkie nośniki $supp(f_i)$ zawierające x zawierają się w U_2, zatem dla takich x jest

$$f(x) = \sum f_i(x) = 1$$

Jeśli $x \in F_2$, to nośniki $supp(f_i)$ zawierające x nie mogą zawierać się w U_2. W takim razie $f(x) = 0$. ☕

2. Rozważmy istnienie gładkiej funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(p) = \begin{cases} = 0 & p \in \partial M \\ > 0 & p \in Int(M) \end{cases}$$

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem zbiorami mapowymi, a $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ będą lokalnie gładkimi funkcjami takimi, że

$$f_\alpha = \begin{cases} \overline{f}_\alpha \circ \phi_\alpha & U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \\ 1 & U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \end{cases}$$

gdzie $\overline{f}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowane jako

$$\overline{f}_\alpha(x_1, ..., x_n) = x_n.$$

Niech $\{h_\beta\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego β wybieramy $\alpha(\beta)$ takie, że $supp(h_\beta) \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. Definiujemy $h'_\beta : M \to \mathbb{R}$ przez

$$h'_\beta = h_\beta \circ f_{\alpha(\beta)}.$$

Wtedy h'_β jest gładkie oraz $supp(h'_\beta) \subseteq supp(h_\beta)$, więc rodzina nośników $\{supp(h'_\beta)\}$ jest lokalnie skończona.

Zdefiniujmy teraz

$$f(x) = \sum h'_\beta,$$

które z lokalnej skończoności nośników $\{supp(h'_\beta\}$ jest dobrze określone.

- $p \in \partial M$, to dla każdego β $h'_\beta(p) = 0$, więc $f(p) = 0$.
- $p \in Int(M)$, to wtedy istnieje β takie, że $h_\beta(p) > 0$, a ponieważ dla $\gamma \neq \beta$ $h'_\gamma(p) \geq 0$, to $f(p) > 0$.

3. Dla dowolnego $A \subseteq M$ domkniętego oraz $A \subseteq U \subseteq M$ otwartego istnieje funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ taka, że dla $x \in A$ $f(x) = 1$ oraz $supp(f) \subseteq U$.

Po angielsku taka funkcja nazywa się *bump function*

Dowód. Niech $U_1 = U$ oraz $U_2 = M \setminus A$, zbiory te pokrywają całe M. Niech h_1, h_2 będzie rozkładem jedności wpisanym w to pokrycie. Wtedy funkcja h_1 ma poszukiwane własności, bo dla $x \in A$ mamy $h_2(x) = 0$, więc $1 = h_1(x) + h_2(x) = h_1(x)$. ☕

4. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest nazywana *exhaust function*, jeśli dla każdego $c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c])$ jest zwartym podzbiorem M. Kiedy idąc po liczbach naturalnych n rozpatrujemy $f^{-1}((-infty, n])$, to po drodze zahaczamy o wszystkie zwarte zbiory w M, stąd też nazwa. Dowód istnienia exhaust function korzysta z rozkładów jedności $\{h_i\}$ wpisanych w dowolne pokrycie prezwartymi zbiorami oraz funkcji $f(x) = \sum_{j\geq 1} j \cdot \phi_j(x)$.

Dowód istnienia to wniosek 2.28 z Lee.

2.4. Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnego otwartego pokrycia* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *rozmaitości gładkiej* M *istnieje rodzina* $\{f_\alpha\}$ *gładkich funkcji* $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ *takich, że*

1. $f_\alpha \geq 0$
2. $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$
3. *nośniki* $\{\mathrm{supp}(f_\alpha)\}$ *tworzą lokalnie skończone pokrycie* M *[czyli wiele spośród* f_α *jest zerowych]*
4. *dla każdego* $x \in M$ $\sum f_\alpha(x) = 1$

Dowód. Znowu szkic dowodu za pomocą wyjściowej wersji twierdzenia.

Rozważmy rodzinę $\{f_j\}_{j\in J}$ jak w wyjściowej wersji twierdzenia. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j) \in A$ takie, że $\mathrm{supp}(f_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Zdefiniujmy

$$f_\alpha = \sum_{j:\alpha(j)=\alpha} f_j.$$

Z lokalnej skończoności nośników $\mathrm{supp}(f_j)$ wiemy, że f_α również jest funkcją gładką. Warunek 4 zachodzi w sposób oczywisty, tak samo warunek 1.

Warunki 2 i 3 w łatwy sposób wynikają z obserwacji, że dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny podzbiorów P_t w przestrzeni X, $\mathrm{cl}(\bigcup P_t) = \bigcup \mathrm{cl}(P_t)$. ☕

3. Dyskretne ilorazy rozmaitości

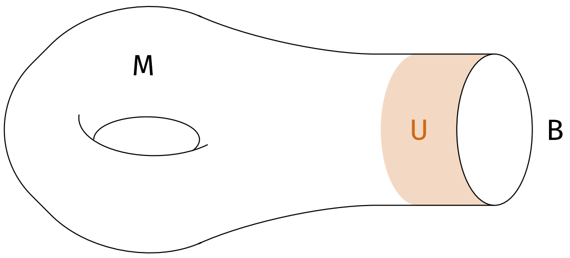
3.1. Klejenie rozmaitości wzdłuż brzegu

Twierdzenie 3.1. *Niech* M *będzie gładką* n*-rozmaitościa, a* B *niech będzie komponentą brzegu* ∂M*. Wtedy istnieje dyfeomorficzne (dyfeomorfizm na obraz) włożenie*

$$K : B \times [0,1) \to M$$

na otwarte otoczenie U *komponenty* B *w* M *takie, że* $K(x,0) = x$ *dla* $x \in B$*.*

Dowód. Dowód za kilka wykładów przy pomocy potoków wektorowych.



☕

Jeśli M_1, B_1 oraz M_2, B_2 są jak wyżej oraz istnieje dyfeomorfizm

$$f : B_1 \to B_2$$

to możemy zdefiniować relację równoważności

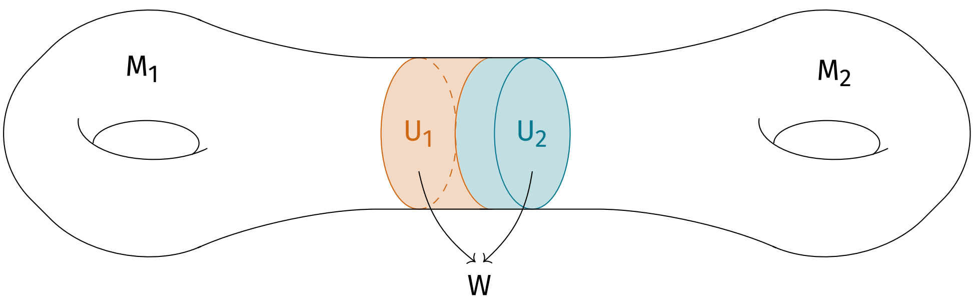
$$B_1 \ni x \sim f(x) \in B_2$$

oraz stworzyć rozmaitość:

$$M_1 \cup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \sim .$$

Struktura na $M_1 \cup_f M_2$ jest częściowo odziedziczona po M_1 i M_2. Dodatkowo sklejamy zbiory U_i utożsamiając je z produktami $B_i \times [0,1)$ za pomocą B_i:

$$K_i : B_i \otimes [0,1) \to M_i$$



Na $M_1 \cup_f M_2$ istnieją trzy rodzaje map:

1. dla dowolnej mapy (U, ϕ) na M_1 rozważamy jej obcięcie do $U \setminus B_1$
2. dla dowolnej mapy (V, ψ) na M_2 rozważamy jej obcięcie do $V \setminus B_2$

3. dla dowolnej mapy (W, ξ) na B_1 i $\xi : W \to \overline{W} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ rozważamy zbiór

$$[W \times [0,1)] \cup_{f\restriction W} [f(W) \times [0,1)] = \widehat{W} \subseteq M_1 \cup_f M_2$$

z mapą

$$\widehat{\xi} : \widehat{W} \to \overline{\widehat{W}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\widehat{\xi}(x,t) = \begin{cases} (\xi(x), -t) & (x,t) \in U_1 \\ (\xi(f^{-1}(x)), t) & (x,t) \in U_2 \end{cases}$$

Mamy $\widehat{\xi}(x,0) = \widehat{\xi}(f(x),0)$, więc $\widehat{x}$ jest dobrze zdefiniowane w punktach sklejenia.

$$\overline{\widehat{W}} = \overline{W} \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^n \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

zaś $\widehat{\xi} : \widehat{W} \to \overline{\widehat{W}}$ jest homeomorfizmem.

Sprawdzenie gładkiej zgodności map z podpunktów 1, 2 i 3 zostanie pominięte.

Rozmaitość $M_1 \cup_f M_2$ wydaje się zależeć jednocześnie od wyboru f oraz otoczeń kołnierzowych K_i komponent brzegów B_i. W rzeczywistości jednak, $M_1 \cup_f M_2$ jest takie same z dokładnością do dyfeomorfizmu dla dowolnych wyborów K_i:

Fakt 3.2.

1. *Jeśli K_1, K_1' są podobnie położone w M_1, tzn. istnieje $h : M_1 \to M_1$ dyfeomorfizm taki, że*

$$K_1' \restriction B_1 \times [0, 1\tfrac{1}{2}) = h \circ K_1 \restriction B_1 \times [0, \tfrac{1}{2}),$$

   to wtedy

$$M_1 \cup_{f,K_1,K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f,K_1',K_2} M_2.$$

   Analogicznie gdy weźmiemy K_2, K_2'. [dowód: ćwicznia]

2. *Każde dwa otoczenia kołnierzowe komponenty B_1 brzegu ∂M są podobnie położone. [dowód trudny]*

3. *Ustalmy otoczenia kołnierzowe K_1, K_2. Jeśli $f_0, f_1 : B_1 \to B_2$ są izotopijnymi dyfeomorfizmami, tzn. istnieje gładkie $F : [0,1] \times B_1 \to B_2$ takie, że $F(0) = f_0$ a $F(1) = f_1$, wtedy*

$$M_1 \cup_{f_0,K_1,K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f_1,K_1,K_2} M_2.$$

   [dowód łatwy]

3.2. Suma spójna rozmaitości

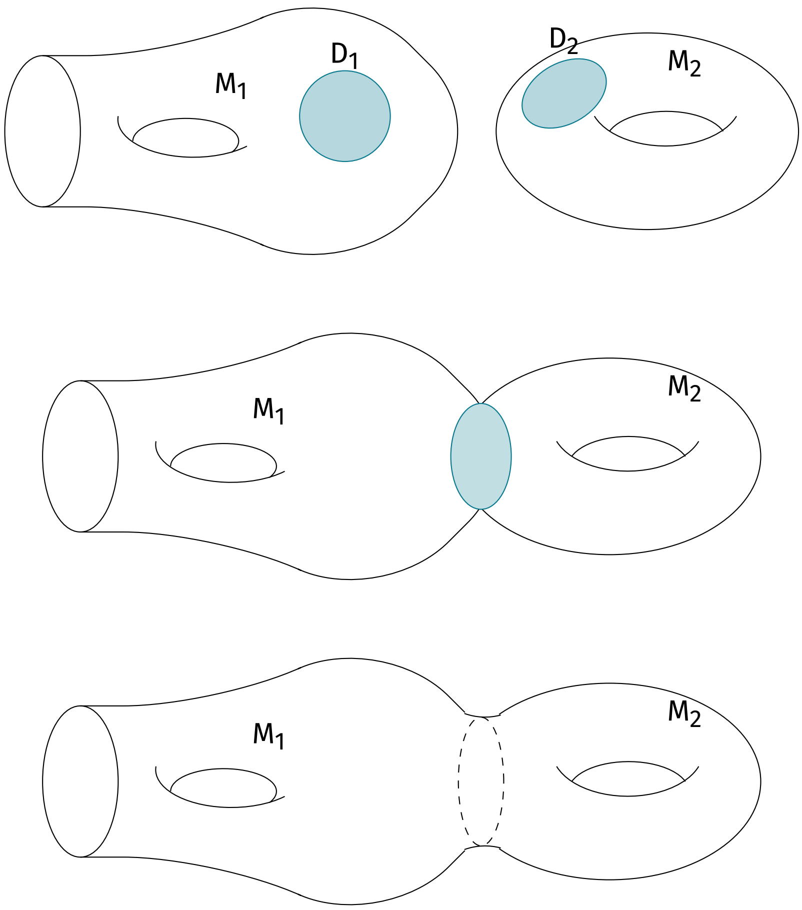
Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami wymiaru n. Weźmy $D_i \subseteq M_i$, czyli kule n-wymiarowe zawarte w otoczeniach mapowych. Oznaczmy $B_i = \partial D_i \cong S^{n-1}$ jako komponenty brzegu rozmaitości $M_i \setminus \mathrm{Int}(D_i)$. Niech

$$f : B_1 \to B_2$$

będzie dyfeomorfizmem. Oznaczamy wówczas

$$[M_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)] \cup_f [M_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)] = M_1 \# M_2$$

jako **sumę spójną** rozmaitości M_1 i M_2.



Uwaga 3.3.

1. *Jeśli* M_i *jest rozmaitością spójną, to* $M_i \setminus \mathrm{Int}(D_i)$*, z dokładnością do dyfeomorfizmu, nie zależy od wyboru dysku* D_i.

2. *Istnieją dokładnie* 2 *klasy izotopii dyfeomorfizmów* $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$*: te zachowujące orientację oraz te, które orientacji nie zachowują.*

3. *Są co najwyżej dwie rozmaitości będące sumą spójną* $M_1 \# M_2$*. W przypadku rozmaitości zorientowanych, jedna z nich jest preferowana.*

Klasyfikacja zamkniętych powierzchni spójnych (czyli zwarte 2-wymiarowe rozmaitości bez brzegu):

1. Powierzchnie orientowalne: $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2, \ldots$

2. Powierzchnie nieorientowalne $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2, \ldots$

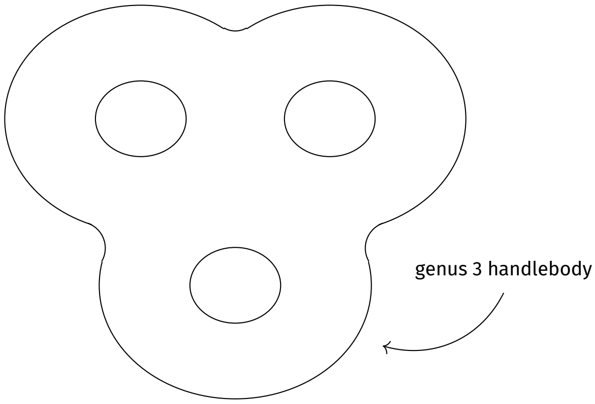
Powierzchnie z powyższej listy są parami niedyfeomorficzne. Każda zamknięta powierzchnia jest dyfeomorficzna z jedną z tej listy.

3**-rozmaitości:**

Poniżej bardzo luźne opisy z wikipedii. Dokładniejsze opisy lepiej jest doczytać w literaturze.

Dehn surgery: niech M będzie 3-wymiarową rozmaitością M z kolekcją węzłów (podrozmaitości S^n dyfeomorficznych do skończonej rozłącznej sumy S^j) $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$. Rozmaitość M wywiercona wzdłuż tubowego otoczeniem L posiada k-wiele komponentów brzegu $T_1 \cup \ldots \cup T_k$. Chirurgia Dehna polega na wywierceniu z M tubowego otoczenia L wraz ze sklejeniem każdej z komponent brzegu $T_1 \cup \ldots \cup T_k$ w jeden torus [to jest Dehn filling i jest wiele sposobów na wytworzenie go].

Rozkłady Heegaarda [Heegaard's splittings] na zorientowanej 3-rozmaitości z brzegiem M polega na na podzieleniu jej na dwa handlebody [fidget spinnery; 3-rozmaitości oriengowalne z brzegiem zawierające parami rozłączne włożone 2-dyski takie, że rozmaitość wzdłuż nich przecięta jest S^3].



3.3. Działanie grupy dyfeomorfizmów

Definicja 3.4. Grupa G dyfeomorfizmów M to zbiór dyfeomorfizmów $g : M \to M$ zamknięty na składanie i branie odwrotności. Mówimy wtedy, że G działa na M przez dyfeomorfizmy.

Definicja 3.5. **Orbitą** punktu $x \in M$ względem działania G na M nazywamy zbiór

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

Uwaga 3.6. *Orbity* $G(x)$ *i* $G(y)$ *są albo rozłączne, albo pokrywają się.*

Rodzina wszystkich orbit stanowi **rozbicie** rozmaitości M na podzbiory.

Definicja 3.7. **Przestrzeń ilorazowa** działania G na M to przestrzeń, której punktami są orbity $G(x)$:

$$M/G = \{G(x) : x \in M\}$$

zaś topologia jest ilorazowa, tzn. *zbiór orbit jest otwarty* w M/G $\iff$ suma tych orbit stanowi otwarty podzbiór w M.

Jeśli $U \subseteq M$ jest otwartym podzbiorem, to

$$G(U)/G = \{G(x) : x \in U\}$$

jest otwarty w M/G i każdy zbiór otwarty w M/G jest takiej postaci. Kiedy $\mathscr{B}$ jest bazą topologii w M, to rodzina

$$\{G(U)/G : U \in \mathscr{B}\}$$

jest **bazą topologii** w M/G. Z tego powodu M/G **zawsze posiada przeliczalną bazę.**

Definicja 3.8. Lokalną euklidesowość M/G zapewnia warunek na **działanie nakrywające**:

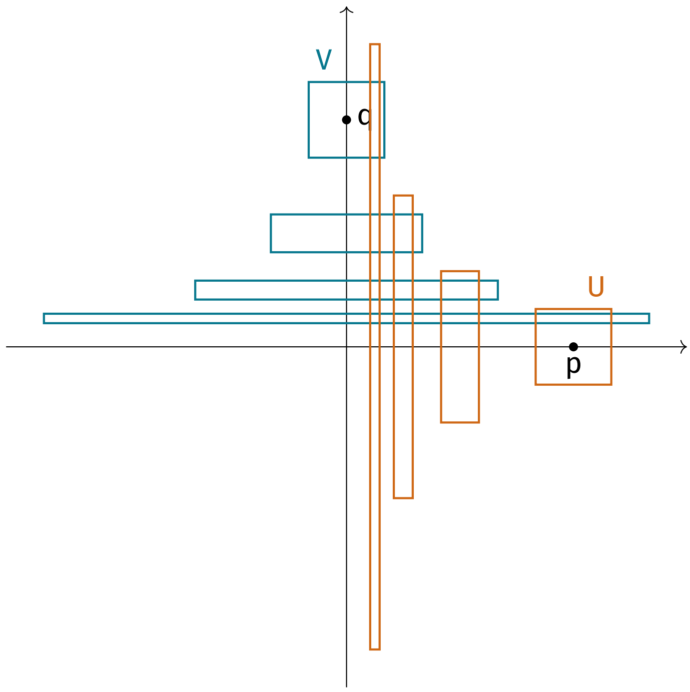
$$(\forall\ p \in M)(\exists\ p \in U \overset{\text{otw.}}{\subseteq} M)(\forall\ g_1, g_2 \in G)\ g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Przy takim działaniu G na M podzbiór $G(U)/G$ jest otoczeniem $G(p)$ homeomorficzny z U. Oznacza to lokalną euklidesowość M/G.

Fakt 3.9. *Jeśli działanie grupy* G *przez homeomorfizmy na rozmaitości* M *jest nakrywające, to iloraz* M/G *jest lokalnie euklidesowy dla wymiaru* $n = \dim(M)$.

Przykłady:

1. Działanie grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
jest nakrywające. W takim razie iloraz $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})/\langle A \rangle$ jest lokalnie euklidesowy wymiaru 2. Jednak iloraz ten nie jest przestrzenią Hausdorffa, bo dla punktów na osobnych osiach p i q zbiory otwarte:



nigdy nie mogą być rozłączne. Stąd rozmaitość ilorazowa M/G nie może być nigdy rozmaitością różniczkowalną.

Definicja 3.10. Działanie G na M przez dyfeomorfizm jest:

1. **wolne**, gdy dla każdego $g \in G \setminus \{id\}$ i dla każdego $x \in M$ $g(x) \neq x$
2. **właściwie nieciągłe** [properly discontinuous], gdy dla każdego zwartego $K \subseteq M$ zbiór $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony.

Definicja 3.11. Dla $x \in M$ **stabilizator** (nadgrupa stabilizująca) punktu x względem G to
$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G : g(x) = x\}$$
jest automatycznie podgrupą G.

Fakt 3.12. *Działanie* G *jest wolne* $\iff$ *wszystkie stabilizatory* $\mathrm{stab}(x)$ *są trywialne* $(= \{id\})$.

Przykłady:

1. Działanie grupy $\mathbb{Z}_n$ na $\mathbb{R}^2$ zadane przez potęgi obrotu o kąt $\frac{2\pi}{n}$ nie jest wolne.

2. Działanie G jest wolne $\iff$ dla każdego $x \in M$ odwzorowanie $G \to G(x)$ zadane przez $g \mapsto g(x)$ jest bijekcją.

Fakt 3.13.

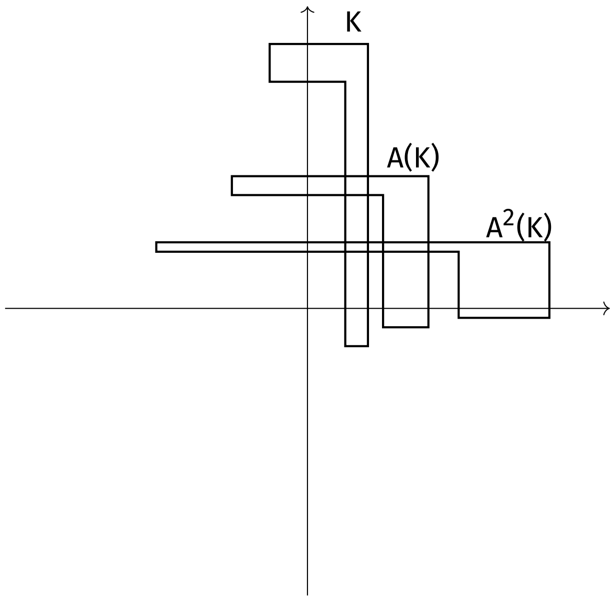
1. *Gdy działanie G przez homeomorfizmy na przestrzeni topologicznej lokalnie zwartej X jest właściwie nieciągłe, to każda orbita $G(x)$ jest dyskretnym podzbiorem w X (tzn. każdy $x \in G(x)$ ma otwarte otocznie U takie, że $U \cap G(x) = \{x\}$).*
2. *Jeśli działanie G na X jest właściwie nieciągłe i wolne, to jest też nakrywające.*
3. *Jeśli G działa przez homeomorfizmy na przestrzeni lokalnie zwartej X w sposób właściwie nieciągły, to iloraz X/G jest przestrzenią Hausdorffa.*

Przykłady:

1. Działanie grupy $\mathbb{Z}$ na S^1 przez potęgi obrotu o kąt α niewspółmierny z 2π jest wolne, ale ma orbity gęste w S^1, a więc nie są one dyskretne. Zatem działanie nie jest ani właściwie nieciągłe, ani wolne. Iloraz $s^1/\mathbb{Z}$ jest wtedy przestrzenią z topologią trywialną, więc nie jest rozmaitością.
2. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   nie może być właściwie nieciągłe. Można to zobaczyć bezpośrednio:



   dla każdego $n \geq 1$ mamy $A^n(K) \cap K \neq \emptyset$.

   Jednakże tak zadane działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jest wolne i ma dyskretne orbity. W takim razie warunek, by działanie było wolne i miało dyskretne orbity nie jest wystarczający do tego, by iloraz był rozmaitością. Nie musi być nawet przestrzenią Hausdorffa, jak pokazaliśmy wcześniej.

Fakt 3.14. *Jeśli G jest działaniem na M^n przez dyfeomorfizmy w sposób wolny i właściwie nieciągły, to iloraz M/G jest*

- *lokalnie euklidesowy n-wymiarowy*
- *Hausdorffa*

- *ma przeliczalną bazę*

Zatem M/G *jest* n*-wymiarową rozmaitością topologiczną.*

4. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, ..., f_n)$ i dla $t \in (a,b)$ pochodną nazywamy wektor
$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ ... \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$
- dla gładkiego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, ..., f_m)$ i $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to
$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$
Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

4.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a,b) \to M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest *zbazowana w p* . Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy C_pM.

Definicja 4.1. Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p. Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 4.2. *Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ są styczne w mapie (U, ϕ) wokół p, to są też styczne w dowolnej innej mapie (W, ψ) wokół p (zgodnej z (U, ϕ)).*

Dowód.

$$\begin{aligned}(\psi \circ c_1)'(t_1) = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' \\ = (\psi \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

☕

Definicja 4.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p.

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na C_pM, bo jest zwrotnia, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 4.4. **Przestrzenią styczną** do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_pM := C_pM/\text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_pM$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni T_pM nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p.

4.2. Struktura wektorowa przestrzeni T_pM

Dla mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji T_pM (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

$$\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_{\phi,p} : \mathbb{R}^n \to T_pM \qquad \lambda_{\phi,p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Lemat 4.5. *$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^* = \mathrm{id}_{T_pM}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi,p}$ są one wzajemnie jednoznacze i do siebie odwrotne.*

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) =$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi(p) + tv) = v \qquad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_pM$

$$\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi,p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi\circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi\circ c)(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$ i w takim razie $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$ $\checkmark$.

Fakt 4.6. *Na przestrzeni stycznej T_pM istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi,p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.*

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_pM$: $X + Y := \lambda_{\phi,p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w $\mathbb{R}^n$)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi,p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w $\mathbb{R}^n$).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z $\mathbb{R}^n$ przez $\lambda_{\phi,p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z $\mathbb{R}^n$ na T_pM struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{\psi_p^*=\lambda_{\psi,p^{-1}}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) =$$
$$= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[\frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi(p) + tv)] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v)$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.

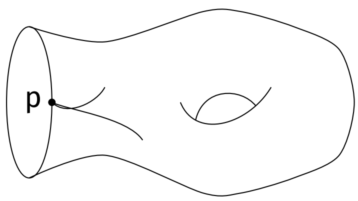
☕

O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla T_pM stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p. W tej mapie działania na wektorach z T_pM sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w $\mathbb{R}^n$.

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi = id_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (id_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \to \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \to M$ oraz $c : (a, t_0[\to M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy C_pM. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na T_pM określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU), zaś dowolny wektor z $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

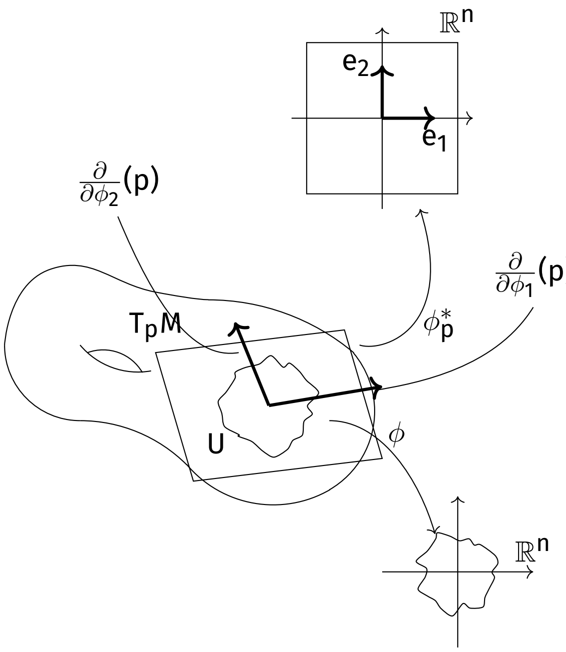
Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ wersorów $e_1, ..., e_n$ oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę T_pM i dowolny wektor z T_pM ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.

4.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \to N$ i $p \in M, f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_pM$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_qN$.



Lemat 4.7. *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne, to* $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_qN$ *też są styczne*

Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 4.8. **Różniczką** f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 4.7.

Lemat 4.9. $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *jest odwzorowaniem liniowym.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\psi^*_{f(p)}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 4.6).

$$\begin{aligned}\psi_{f(p)} \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi^*_{f(p)} \circ df_p([c_v, 0]) = \psi^*_{f(p)}([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v]\end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \to N$ odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół $f(p)$ jako

$$\psi^*_{f(p)} df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w T_pM i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)}N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial (\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j} (\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial (\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j} (\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : \underbrace{T_pU}_{=T_pM} \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ jest wówna odwzorowaniu "mapowemu" $\phi^*_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$.

  Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_pM$, wtedy

  $$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$$

  Mapę $(id_{\mathbb{R}^n})^*_{\phi(p)} : T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $id_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

  $$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

  a z kolei

  $$\phi^*_p([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

  z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \to M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \to T_{c(t_0)}M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$.

- Rozważmy gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym na T_pM.

Definicja 4.10. Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_pM$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X:

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$

☕

- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_pM$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

  Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$

☕

Przykłady:

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_pM$ i $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial (f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

Stąd oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Spis twierdzeń