

Algebra 2R

a voyage into the unknown

koteczek

~

Spis treści

Teoria równań algebraicznych	4
1.1 Rozwiązywanie układów równań	4
1.2 Rozszerzanie ciał	6
Ciała skończone i pierwiastki z jedności	9
2.1 Algebraiczne domknięcie ciała	10
Ciała proste, pierwiastki z jedności	12
3.1 Ciała proste	12
3.2 Pierwiastki z jedności	12
3.3 Ciała skończone	14
Rozszerzenia ciał	15
4.1 Wymiar przestrzeni liniowej	15
Wielomiany koła, domknięcia algebraiczne	20
5.1 Wielomian rozkładu koła [cyclotomic polynomials]	20
5.2 Domknięcia algebraiczne	23
Wstęp do teorii Galois	26
6.1 Grupy Galois	26
6.2 Rozszerzenia algebraiczne normalne	26
6.3 Rozszerzenia rozdzielcze	28
Rozszerzenia radykalne (czysty Bangladesz)	31
7.1 Stopień rozdzielczy, radykalny ciała	33
Przekształcenia liniowe	35
8.1 Norma, ślad	35
8.2 Rozszerzenia Galois	36



Wykład 1: Teoria równań algebraicznych

Przez R, S będziemy oznaczać pierścienie przemienne z $1 \neq 0$, natomiast K, L będziemy rezerwować dla oznaczeń ciał.

1.1 Rozwiązanie układów równań

Rozważmy funkcje $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n]$. Dla wygody będziemy oznaczać krotki przez \bar{X} , czyli $R[X_1, \dots, X_n] = R[\bar{X}]$. Pojawia się problem: czy istnieje rozszerzenie pierścienia z jednością $R \subseteq S$ takie, że układ $U : f_1(\bar{X}) = \dots = f_m(\bar{X}) = 0$ ma rozwiązanie w pierścieniu S ?

Fakt 1.1. $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq S$, gdzie S jest rozszerzeniem pierścienia R , jest rozwiązaniem układu równań $U \iff g(\bar{a}) = 0$ dla każdego wielomianu $g \in (f_1, \dots, f_m) \triangleleft R[\bar{X}]$.

Dowód. \Leftarrow Implikacja jest dość trywialna, jeśli każdy wielomian z (f_1, \dots, f_m) , czyli wytworzony za pomocą sumy i produktu wielomianów f_1, \dots, f_m zeruje się na \bar{a} , to musi zerować się też na każdym z tych wielomianów.

\Rightarrow Rozważamy dwa przypadki:

1. $(f_1, \dots, f_m) \ni b \neq 0$ i $b \in R$.

To znaczy w (f_1, \dots, f_m) mamy pewien niezerowy wyraz wolny. Wtedy mamy wielomian $g \in (f_1, \dots, f_m)$ taki, że $g(\bar{a}) \neq 0$. Ale przecież g jest kombinacją wielomianów f_1, \dots, f_m , która na \bar{a} przyjmuje wartość 0. W takim razie dostajemy układ sprzeczny i przypadek jest do odrzucenia.

2. $(f_1, \dots, f_m) \cap R = \{0\}$. (nie ma wyrazów wolnych różnych od 0)

Teraz wiemy, że układ U jest niesprzeczny, a więc możemy skonstruować pierścień z 1 S będący rozszerzeniem R [$S \supseteq R$] oraz rozwiązanie $\bar{a} \subseteq S$ spełniające nasz układ równań.

Niech $S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m)$ i rozważmy

$$j : R[\bar{X}] \rightarrow S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m)$$

nazywane przekształceniem ilorazowym. Po pierwsze, zauważmy, że $j \upharpoonright R$ jest 1 – 1, bo

$$\ker(j \upharpoonright R) = \ker(j) \cap R = (f_1, \dots, f_m) \cap R = \{0\}$$

i dlatego

$$j \upharpoonright R : R \xrightarrow{\cong} j[R] \subseteq S.$$

Z uwagi na ten izomorfizm, będziemy utożsamiać $R, j[R]$. W takim razie, S jest rozszerzeniem pierścienia R . Czyli mamy rozszerzenie pierścienia R .

Niech

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) = (j(X_1), \dots, j(X_n)) \subseteq S,$$

czyli jako potencjalne rozwiązanie rozważamy zbiór obrazów wielomianów stopnia 1 przez wcześniej zdefiniowaną funkcję $j : R[\bar{X}] \rightarrow S$. Tak zdefiniowane \bar{a} jest rozwiązaniem układu U w pierścieniu S , bo dla funkcji wielomianowej (czyli zapisywalnej jako wielomian) $\hat{f}_i \in (f_1, \dots, f_m)$ mamy

$$\hat{f}_i(\bar{a}) = \hat{f}_i(j(X_1), \dots, j(X_n)) = j(\hat{f}_i(X_1, \dots, X_n)) = j(f_i) = 0.$$

TUTAJ TRZEBA POUZASADNIAĆ KILKA RÓWNOŚCI, ALE MOŻE NIE BĘDĘ TEGO ROBIŁA NA AISD ☕

Uwaga 1.2. Skonstruowane powyżej rozwiązanie \bar{a} układu U ma następującą własność uniwersalności:

(☞) Jeżeli $S' \supseteq R$ jest rozszerzeniem pierścienia z 1 i $\bar{a}' = (a'_1, \dots, a'_n) \subseteq S'$ jest rozwiązaniem U w S' , to istnieje jedyny homomorfizm

$$h : R[\bar{a}] \rightarrow R[\bar{a}']$$

taki, że $h \upharpoonright R$ jest identycznością na R i $h(\bar{a}) = \bar{a}'$. Wszystkie rozwiązania układów są homomorficzne.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\subseteq} & R[\bar{a}] \subseteq S \\
 \downarrow \subseteq & \nearrow h & \\
 R[\bar{a}'] \subseteq S' & &
 \end{array}$$

Tutaj $R[\bar{a}] \subseteq S$ jest **podpierścieniem generowanym przez** $R \cup \{\bar{a}\}$, czyli zbiór:

$$R[\bar{a}] = \{f(\bar{a}) : f(\bar{X}) \in R[\bar{X}]\} \subseteq S$$

Dowód. Niech $I = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}') = 0\} \subseteq S'$. Oczywiście mamy, że $I \triangleleft R[\bar{X}]$, a więc

$$(f_1, \dots, f_m) \subseteq I.$$

Z twierdzenia o faktoryzacji wie

$$\begin{array}{ccc}
 R[\bar{X}] & \xrightarrow{j} & S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m) \\
 \downarrow \phi & \nearrow (\exists ! h) h(\bar{a}) = \bar{a}' & \\
 S' \supseteq R[\bar{a}'] & &
 \end{array}$$

Homomorfizm $\phi : R[\bar{X}] \rightarrow R[\bar{a}']$ określamy wzorem

$$\phi(w) = w(\bar{a}),$$

a homomorfizm j jest jak wyżej odwzorowaniem ilorazowym. Widzimy, że

$$I = \ker(\phi)$$

$$\ker(j) = (f_1, \dots, f_m).$$

Z twierdzenia o homomorfizmie pierścieni dostajemy jedyny homomorfizm

$$h : R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m) \rightarrow R[\bar{a}']$$

taki, że $h(\bar{a}) = \bar{a}'$.



Uwaga 1.3. Jeśli $I = (f_1, \dots, f_m)$, to $h : R[\bar{a}] \xrightarrow{\cong} R[\bar{a}']$.

Wtedy mamy $\ker \phi = \ker j$, czyli $\ker(h \circ j) = \ker \phi = \ker j$, no a z tego wynika, że $\ker h$ jest trywialne, czyli h jest apimorfizmem (1-1). Z drugiej strony, $\text{Im } \phi = \text{Im}(h \circ j)$, a ϕ jest epimorfizmem ("na"), więc również h musi być "na".

Założmy, że $S \supseteq R$ jest rozszerzeniem pierścienia oraz $\bar{a} \in S^n$. Wtedy:

1. ideał \bar{a} nad R definiujemy jako

$$I(\bar{a}/R) = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}) = 0\}$$

2. \bar{a} nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** układu U , jeśli ideał

$$I(\bar{a}/R) = (f_1, \dots, f_m).$$

Uwaga 1.4. W sytuacji jak z definicji wyżej, gdy U jest układem niesprzecznym, wtedy \bar{a} jest rozwiązaniem ogólnym układu $U \iff$ zachodzi warunek (☺) .

Dowód. Ćwiczenia.



1.2 Rozszerzanie ciał

Dla $K \subseteq L$ ciał i $\bar{a} \subseteq L$ definiujemy **ideał \bar{a} nad K** jako:

$$I(\bar{a}/L) := \{f(X_1, \dots, X_n) \in K[\bar{X}] : f(\bar{a}) = 0\},$$

to znaczy generujemy ideał w wielomianach nad K zawierający wszystkie wielomiany (niekoniecznie tylko jednej zmiennej) zerujące się w \bar{a} .

Przykład:

Dla $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2}$ mamy

$$I(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) = \{f(x^2 - 2) : f \in \mathbb{Q}[X]\} = (x^2 - 2) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$$

Dalej, definiujemy

$$K[\bar{a}] := \{f(\bar{a}) : f \in K[X]\}$$

czyli **podpierścień L generowany przez $K \cup \{\bar{a}\}$** oraz $K(\bar{a})$, czyli **podciało L** generowane przez $K \cup \{\bar{a}\}$:

$$K(\bar{a}) := \{f(\bar{a}) : f \in K(X_1, \dots, X_n) \text{ i } f(\bar{a}) \text{ dobrze określone}\}.$$

Tutaj $K(X_1, \dots, X_n)$ to **ciało ułamków pierścienia** $K[\bar{a}]$ w ciele L (czyli najmniejsze ciało, że pierścień może być w nim zanurzony). Czasami oznaczamy to przez $K[\bar{a}]_0$.

Uwaga 1.5. Niech $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$ będą ciałami. Wybieramy $\bar{a}_1 \in L_1$ i $\bar{a}_2 \in L_2$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. istnieje izomorfizm $\phi : K[\bar{a}_1] \rightarrow K[\bar{a}_2]$ taki, że $\phi \upharpoonright K = \text{id}_K$ oraz $\phi(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$.
2. $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$.

Dowód. $1 \implies 2$

Implikacja jest jasna, bo dla $g(\bar{X}) \in K[\bar{X}]$, bo $g(\bar{a}_1) = 0$ w $K[\bar{a}_1] \iff g(f(\bar{a}_1)) = 0$, a $f(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$.

$1 \longleftarrow 2$

Zwróć uwagę na odwzorowanie ewaluacji \bar{a}_1

$$\phi_{\bar{a}_1} : K[\bar{X}] \xrightarrow{\text{"na"}} K[\bar{a}_1]$$

zadane wzorem

$$\phi(w(\bar{X})) = w(\bar{a}_1).$$

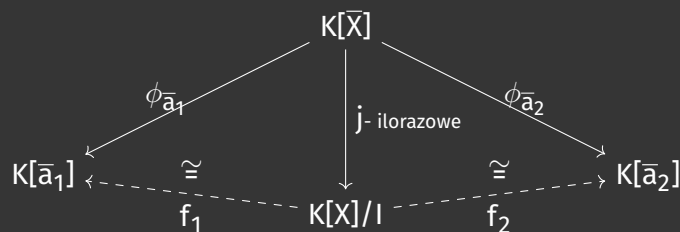
Mamy

$$\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = I(\bar{a}_1/K).$$

Tak samo dla \bar{a}_2 możemy określić analogicznie odwzorowanie ewaluacyjne $\phi_{\bar{a}_2} : K[\bar{X}] \rightarrow K[\bar{a}_2]$. Wtedy

$$I(\bar{a}_2/K) = \ker(\phi_{\bar{a}_2}),$$

ale ponieważ $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$, to $\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = \ker(\phi_{\bar{a}_2})$. Oznaczmy $I = I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$. Widzimy, że $\phi_{\bar{a}_i} \upharpoonright K = \text{id}_K$.



Niech $f = f_2 f_1^{-1} : K[\bar{a}_1] \rightarrow K[\bar{a}_2]$ jest funkcją spełniającą warunki punktu 1. ☕

MOŻE TUTAJ ŁADNIE SPRAWDZIĆ ŻE NAPRAWDĘ JEST TO DOBRZE SPEŁNIAJĄCA WARUNKI FUNKCJA?

Uwaga. Niech $I \triangleleft K[\bar{X}]$ *noetherowskiego* pierścienia $K[\bar{X}]$. Niech $I = (f_1, \dots, f_m)$ dla pewnych $f_i \in K[\bar{X}]$. Wtedy istnieje rozszerzenie pierścienia $S \supseteq K$ oraz $\bar{a} \subseteq S$ - rozwiązanie ogólne układu $f_1(\bar{X}) = \dots = f_m(\bar{X}) = 0$ takie, że $I(\bar{a}/K) = I$.

Dowód. Uwaga 1.4. ☕

Twierdzenie 1.6. Niech $I \triangleleft K[\bar{X}]$. Wtedy istnieje ciało $L \supseteq K$ oraz $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq L$ takie, że $f(\bar{a}) = 0$ dla każdego $f \in I$.

Dowód. Niech $I \subseteq M \triangleleft K[\bar{X}]$ będzie ideałem maksymalnym. Niech $L = K[\bar{X}]/M$ i określmy przekształcenie ilorazowe

$$j : K[\bar{X}]/M \rightarrow L = K[\bar{X}]/M.$$

Ponieważ $M \cap K = \{0\}$ (bo inaczej w ideale byłby wielomian odwracalny), to $j \upharpoonright K : K \rightarrow L$ jest funkcją 1-1, czyli

$$j \upharpoonright K : K \xrightarrow{1-1} j[K] \subseteq L.$$

Możemy utożsamić K z $j[K]$, czyli $K \subseteq L$. Niech $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ takie, że dla każdego $i \in [n]$

$$a_i = j(X_i) \in L.$$

Wtedy $g(\bar{a}) = 0$ dla każdego $g \in M \supseteq I$ (bo inaczej mielibyśmy wyrazy wolne). ☕

Wniosek 1.7. Niech $f \in K[X]$ stopnia > 0 . Wtedy istnieje ciało $L \supseteq K$ rozszerzające ciało K takie, że f ma pierwiastek w ciele L .

Przykłady:

1. Rozpatrzmy ciało $K = \mathbb{Q}$ i $f(X) = X - 2$. Wtedy $I = (f) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$ jest ideałem maksymalnym, bo jest on pierwszy (w tym wypadku nierozkładalny). Równanie $f = 0$ ma rozwiązanie ogólne w pierścieniu ilorazowym

$$\mathbb{Q}[X]/I \cong \mathbb{Q}.$$

Czyli nie zawsze musimy rozszerzać ciało do czegoś nowego.

2. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[z]$ dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, co jest na liście zadań.

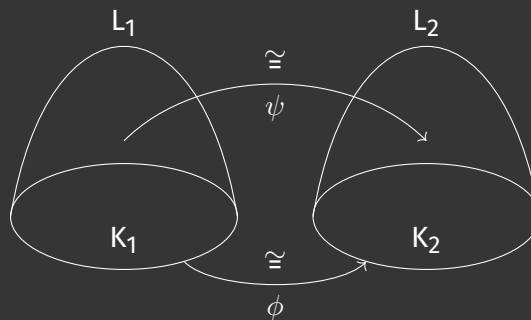
Założmy, że $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$ są rozszerzeniami ciała. Wtedy mówimy, że L_1 **jest izomorficzne z L_2 nad K** [$L_1 \cong_K L_2$] \iff istnieje izomorfizm $f : L_1 \rightarrow L_2$ taki, że $f \upharpoonright K = \text{id}_K$.

Fakt 1.8.

1. Założmy, że $f(X) \in K[X]$ jest nierozkładalny. Niech $L_1 = K(a_1), L_2 = K(a_2)$ i $f(a_i) = 0$ w L_i . Wtedy $L_1 \cong_K L_2$.
2. Ogólniej: założmy, że $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ jest izomorfizmem i $f_1 \in K_1[X], f_2 \in K_2[X], \phi(f_1) = f_2, f_i$ jest nierozkładalny. Dodatkowo założmy, że $L_1 = K_1(a_1)$ i $L_2 = K_2(a_2)$, gdzie $f_i(a_i) = 0$ w L_i . Wtedy istnieje izomorfizm $\psi \in \psi : L_1 \rightarrow L_2$ taki, że $\psi(a_1) = a_2$.

Dowód.

1. $I(a_1/K) = (f) = I(a_2/K)$, stąd na mocy 1.5 mamy $K(a_1) \cong_K K(a_2)$. Po dowodzie przypadku 2. możemy uzasadnić, że jest to szczególny przypadek tego ogólniejszego stwierdzenia właśnie.
2. Zaczniemy od rozrysowania tej sytuacji:



Izomorfizm $\phi : K_1[X] \xrightarrow{\cong} K_2[X]$ indukuje nam przekształcenie

$$K_1[X]/(f_1) \xrightarrow[\phi]{\cong} K_2[X]/(f_2),$$

bo $\phi(f_1) = f_2$. Wiemy, że f_i jest nierozkładalne, czyli

$$I(a_i/K_i) = (f_i) \triangleleft K_i[X]$$

jest ideałem maksymalnym. Mamy

$$L_i = K_i(a_i) = K_i[a_i] \cong K[X]/I(a_i/K_i).$$

$$\begin{array}{ccc}
 K_1[X] & \xrightarrow[\phi]{\cong} & K_2[X] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K_1[X]/(f_1) & \xrightarrow[\phi]{\cong} & K_2[X]/(f_2) \\
 \cong \downarrow h_1 & & \cong \downarrow h_2 \\
 L_1 = K_1(a_1) & \xrightarrow[\psi]{\cong} & L_2 = K_2(a_2) \\
 \cup & & \cup \\
 K_1 & \xrightarrow[\phi]{} & K_2
 \end{array}$$



Wykład 2: Ciała skończone i pierwiastki z jednościami

Ciało $L \supseteq K$ nazywamy **ciałem rozkładu nad K** wielomianu $f \in K[X]$, gdy spełnione są warunki:

1. f rozkłada się w pierścieniu $L[X]$ na czynniki liniowe (stopnia 1)
2. Ciało L jest rozszerzeniem ciała K o elementy a_1, \dots, a_n , gdzie a_1, \dots, a_n to wszystkie pierwiastki f w L .

Przykład: Jeżeli $\deg(f) = 0$, to nie istnieje ciało rozkładu f .

Wniosek 2.1. Załóżmy, że $f \in K[X]$ jest wielomianem stopnia > 0 . Wtedy

1. istnieje L : ciało rozkładu f nad K ,
2. to ciało jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu nad K .

Dowód.

1. Dowód przez indukcję względem stopnia f

Jako przypadek bazowy rozważmy f takie, że $\deg(f) = 1$. Wtedy $L = K$ i wszystko wniosek jest spełniony.

Założmy teraz, że stopień wielomianu f jest > 1 i też zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia $< \deg(f)$ i wszystkich ciał K' . Teraz z 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie ciała $L \supseteq K$ takie, że f ma pierwiastek w L . Nazwijmy ten pierwiastek a_0 i niech

$$K' = K(a_0).$$

Ponieważ $K'[X]$ wielomian f ma pierwiastek a_0 , to możemy zapisać

$$f = (x - a_0)f_1$$

dla pewnego $f_1 \in K'[X]$ i $\deg(f_1) < \deg(f)$. Z założenia indukcyjnego dla f_1 istnieje $L' = K'(a_1, \dots, a_r)$ - ciało rozkładu wielomianu f_1 nad K' . Wtedy

$$L = K(a_0, \dots, a_r)$$

jest ciałem rozkładu f nad K .

2. Udowodnimy wersję ogólniejszą:

(👉) Jeśli $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$ jest izomorfizmem nad ciałem i $f_i \in K_i[X]$ jest wielomianem stopnia > 0 , $\phi(f_1) = f_2$, to wtedy istnieje $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ izomorfizm nad ciałami rozkładu f_i w K_i rozszerzający izomorfizm ϕ (to znaczy $\phi \subseteq \psi$).

Wykorzystamy indukcję po $\deg(f)$. W przypadku bazowym mamy $\deg(f) = 1$, czyli $L_1 = K_1, L_2 = K_2$ i $\phi = \psi$.

Teraz niech $\deg(f) > 1$ i założmy, że dla wszystkich ciał K' oraz wielomianów stopnia $< \deg(f)$ jest to prawdą. Niech

$$f_i = f'_i \cdot g_i,$$

gdzie $f'_i, g_i \in K_i[X]$ i g_i jest wielomianem nierozkładalnym w K . Wiemy już, że istnieje $a_i \in L_i$ będące pierwiastkiem wielomianu g_i .

Z faktu 1.8:(2), wiemy, że istnieje wtedy izomorfizm

$$\psi_0 : K_1(a_1) \xrightarrow{\cong} K_2(a_2)$$

taki, że $\psi_0(a_1) = a_2$ i $\phi \subseteq \psi_0$.

$$\begin{array}{ccc}
 K_1(a_1) & \xrightarrow[\exists \psi_0]{\cong} & K_2(a_2) \\
 \parallel & & \parallel \\
 K'_1 & & K'_2 \\
 \cap \mid & & \cap \mid \\
 L_1 & \xrightarrow[\exists \psi_1]{\cong} & L_2
 \end{array}$$

Z założenia wiemy, że L_1 to ciało rozkładu f'_1 nad K_1 . W takim razie z założenia indukcyjnego istnieje izomorfizm

$$\psi_1 : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$$

taki, że $\psi \subseteq \psi_0$ i to już jest koniec. ☕

Wniosek 2.2. Jeśli $f_1 \in K_1[X]$ i $f_2 \in K_2[X]$ są nierozkładalnymi wielomianami, $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$ izomorfizmem i $\phi(f_1) = f_2$, a L_1, L_2 to ciała rozkładu f_1, f_2 odpowiednio nad K_1 i K_2 , $a_i \in L_i$ to pierwiastek f_i , to wtedy istnieje $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ takie, że $\psi(a_1) = a_2$.

Dowód. Wynika z dowodu stwierdzenia (☛). ☕

2.1 Algebraiczne domknięcie ciała

Ciało L jest **algebraicznie domknięte** \iff dla każdego $f \in L[X]$ o stopniu > 0 istnieje pierwiastek f w L . To znaczy każdy wielomian rozkłada się na czynniki liniowe nad L .

Przykład:

- \mathbb{C} jest algebraicznie domknięte.
- \mathbb{R} nie jest algebraicznie domknięte, gdyż $x^2 + 1$ nie ma pierwiastka rzeczywistego.
- $\mathbb{Q}[i]$ nie jest algebraicznie domknięte, bo $x^2 - 2$ nie ma pierwiastka.

Twierdzenie 2.3. Każde ciało K zawiera się w pewnym ciele algebraicznie domkniętym.

Dowód. Jak mamy wielomian nad ciałem, to istnieje rozszerzenie ciała do tego wielomianu. I dalej leci kombinatoryka.

Lemat: Dla każdego ciała K istnieje $L \supseteq K$ takie, że $(\forall f \in K[X])$ stopnia > 0 , f ma pierwiastek w L .

Rozważmy dobry porządek na zbiorze wielomianów z $K[X]$ stopnia > 0

$$\{f \in K[X] : \deg(f) > 0\} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Tutaj α, κ to liczby porządkowe, niekoniecznie skończone. Skonstruujemy rosnący ciąg rozszerzeń ciał $\{K_\alpha : \alpha < \kappa\}$ taki, że

- $K \subseteq K_\alpha \subseteq K_\beta$ dla $\alpha < \beta < \kappa$
- f_α ma pierwiastek w $K_{\alpha+1}$.

Dowód przez indukcję pozaskończoną. Dla $K_0 = K$.

Założmy, że $\alpha < \kappa$ i mamy $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$ spełniając warunki powyżej. Niech $K' = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$. Musimy pokazać, że K' jest ciałem.

1. α to liczba graniczna. Definiujemy $K' = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$ jako zbiór.

Musimy określić działania w K' . Niech $x, y \in K'$, wtedy istnieje $\beta < \alpha$ takie, że $x, y \in K_\beta$. Czyli $x + y \in K_\beta \subseteq K'$ i $xy \in K_\beta \subseteq K'$. W takim razie K' jest rozszerzeniem ciała K_β .

Teraz definiujemy $K_\alpha = K'$ i otrzymujemy pożądane rozszerzenie ciała.

2. $\alpha = \beta + 1$ to następnik, wtedy $K' = K_\beta$.

Wielomian f_α jest wielomianem nad $K \subseteq K'$. Z wniosku 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie $K_\alpha \supseteq K$ takie, że f_α ma pierwiastek w K_α .

L definiujemy jako sumę po wyżej udowodnionej konstrukcji:

$$L = \bigcup_{\alpha < \kappa} K_\alpha$$

i to ciało spełnia nasz lemat.

Wracamy teraz do dowodu twierdzenia 2.3 i niech $(L_n, n < \omega)$ będzie rosnącym ciągiem ciał takim, że

- $L_0 = K$
- $L_{n+1} \supseteq L_n$, gdzie L_{n+1} dane jest przez lemat, to znaczy $(\forall f \in L_n[X])$ f ma pierwiastek w L_{n+1} .

Niech

$$L_\infty = \bigcup_{n < \omega} L_n \supseteq K.$$

Jest to ciało, ponieważ suma rosnącego ciągu ciał jest ciałem. Dalej mamy, że jest to ciało algebraicznie domknięte, gdy dowolny $f \in L_\infty[X]$ ma stopień skończony > 0 , czyli istnieje n takie, że $f \in L_n[X]$. A więc f ma wszystkie pierwiastki w $L_{n+1} \subseteq L_\infty$. ☕

Wykład 3: Ciała proste, pierwiastki z jedności

3.1 Ciała proste

Uwaga 3.0. Załóżmy, że mamy ciała $K \subseteq L$. Wtedy

- $\text{char}(K) = \text{char}(L)$
- $0_K = 0_L$ oraz $1_K = 1_L$
- $K^* = K \setminus \{0\} \subseteq L^* = L \setminus \{0\}$ oraz dla $x \in K$ $-x$ w K jest równe $-x$ w L .

K jest **ciałem prostym** wtedy i tylko wtedy, gdy K nie zawiera żadnego właściwego podciała.

Przykład:

- \mathbb{Q} , gdzie $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$ to ciało proste nieskończone.
- Ciałem prostym skończonym jest na przykład \mathbb{Z}_p dla liczby pierwszej p , wtedy $\text{char}(\mathbb{Z}_p) = p$.

Uwaga 3.1.

1. Każde ciało zawiera jedyne podciało proste
2. Z dokładnością do $\cong \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$ to wszystkie ciała proste.

Przykład: Załóżmy, że K jest skończone. Wtedy K^* też jest skończone rzędu $|K^*| = n < \infty$. Później dowiemy się, że $|K| = p^k$, a więc $|K^*| = p^k - 1$. Wiemy, że dla każdego $x \in K^*$ zachodzi $x^n = 1$.

3.2 Pierwiastki z jedności

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z $1 \neq 0$. Mamy następujące definicje:

1. $a \in R$ jest **pierwiastkiem z 1** stopnia $n > 0 \iff a^n = 1$
2. $\mu_n(R) = \{a \in R : a^n = 1\}$ jest **grupą pierwiastków z 1** stopnia n
3. $\mu(R) = \{a \in R : (\exists n) a^n = 1\} = \bigcup_{n>0} \mu_n(R)$ jest **grupą pierwiastków z 1**
4. a jest **pierwiastkiem pierwotnym** [primitive root] stopnia n z 1 $\iff a \in \mu_n(R)$ oraz dla każdego $k < n$ $a \notin \mu_k(R)$.

Uwaga 3.2.

1. $\mu_n(R) \triangleleft R^*$ jest grupą jednostek pierścienia
2. $\mu(R) \triangleleft R^*$
3. $\mu(R)$ jest **torsyjną grupą abelową** (każdy element jest pierwiastkiem z 1).

Przykłady

1. $\mu(\mathbb{C}) = \bigcup_{n>0} \mu_n(\mathbb{C}) \leq (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot) \triangleleft \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest nieskończona.
2. $\mu(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Q}, +) / (\mathbb{Z}, +)$, bo $f : \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{homo}]{\text{"na"}} \mu(\mathbb{C})$ taki, że $f(w) = \cos(w2\pi) + i \sin(w2\pi)$ ma jądro $\ker(f) = \mathbb{Z}$.
3. $\mu(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$
4. $\mu_n(K) = \{\text{zera wielomianu } x^n - 1\}$. Ten wielomian będziemy oznaczali $w_n(x) = x^n - 1$.

Uwaga 3.3.

1. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to $w_n(x) = x^n - 1$ ma tylko pierwiastki jednokrotne w K [simple roots]
2. Jeśli $\text{char}(K) = p > 0$ i $n = p^l n_1$ takie, że $p \nmid n_1$, to wszystkie pierwiastki $w_n(x) = x^n - 1$ mają krotność p^l w K .

Dowód:

1. Niech $a \in K$ takie, że $w_n(a) = 0$. Z twierdzenia Bezouta mamy, że

$$w_n(x) = x^n - 1 = x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = (x - a)v_n(x),$$

gdzie $v_n(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$.

Z tego, że $\text{char}(K) = 0$ wynika, że $v_n(a) = na^{n-1} \neq 0$, skąd wynika, że a jest jednokrotnym pierwiastkiem $w_n(x)$.

2. Jesteśmy w ciele K o $\text{char}(K) = p$. Niech $n = p^l n_1$. Rozważmy wielomian

$$w_n(x) = x^n - 1 = (x^{n_1})^{p^l} - 1^{p^l} = (x^{n_1} - 1)^{p^l} = w_{n_1}(x)^{p^l}.$$

Czyli $\mu_n(K) = \mu_{n_1}(K)$. Załóżmy, że $a \in K$ to pierwiastek wielomianu $w_n(x)$. Wtedy a jest też pierwiastkiem wielomianu w_{n_1} w ciele K . Wtedy

$$w_{n_1}(x) = (x - a)v_{n_1}(x),$$

v_{n_1} jak w przypadku wyżej. Wówczas

$$v_{n_1}(a) = n_1 a^{n_1-1} \neq 0,$$

bo $p \nmid n_1$. Jeśli a jest 1-krotnym pierwiastkiem $w_{n_1}(x)$, to jest on p^l -krotnym pierwiastkiem $w_n(x)$.

Twierdzenie 3.4. Niech $G < \mu(K)$ i G jest podgrupą skończoną o $|G| = n$. Wtedy

1. $G = \mu_n(K)$
2. G jest cykliczna
3. Jeśli $\text{char}(K) = p > 0$, to $p \nmid n$.

Dowód.

1. Jeśli $|G| = n$, to dla każdego $x \in G$ mamy $x^n = 1$. Z tego wynika, że $G \subseteq \mu_n(K)$, ale $|\mu_n(K)| \leq n$, czyli $G = \mu_n(K)$.
2. Chcemy pokazać, że dla wielomianu $w_n(x)$ mamy n różnych pierwiastków. Wystarczy pokazać, że istnieje $x \in G$ taki, że $\text{ord}(x) = n$.

Założmy nie wprost, że dla każdego $x \in G$ $\text{ord}(x) < n$. Niech

$$k = \max\{\text{ord}(x) : x \in G\}.$$

Niech $x_0 \in G$ takie, że $\text{ord}(x_0) = k$. Wtedy

$$(\forall y \in G) \text{ord}(y) \mid k.$$

Gdyby tak nie było, to istniałby $y \in G$, $\text{ord}(y) \nmid k$. Czyli istnieje liczba pierwsza p taka, że l jest podzielne przez wyższą potęgę p niż k . To oznacza, że $l = p^\alpha l'$ i $k = p^\beta k'$, gdzie $p \nmid l'$ i $\alpha > \beta$.

Rozważmy $y' = y^{l'}$. Skoro y ma rząd l , to $\text{ord}(y') = p^\alpha$, a dla $x'_0 = x_0^{p^\beta}$ mamy $\text{ord}(x'_0) = k'$. Wobec tego $\text{ord}(x'_0 y') = p^\alpha \cdot k'$, ale to jest większe od k i dostajemy sprzeczność.

3. Wiemy, że wszystkie pierwiastki $w_n = x^n - 1$ są jednokrotne, bo jest ich w tym przypadku dokładnie n (z poprzedniego punktu). Z uwagi 3.3, że jeśli $n = p^l n_1$, to pierwiastki wielomianu $w_n(x)$ mają krotność p^l . Ale w tym przypadku pierwiastki mają krotność jeden, czyli $p^l = 1$ i $n = 1 \cdot n_1$, gdzie $p \nmid n_1$.



Wniosek 3.5. Jeśli $a \in \mu_n(K)$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia $n > 1$, to a generuje $\mu_n(K)$.

Dowód. $\mu_n(K) \supseteq \langle a \rangle = \mu_k(K)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Ale ponieważ a było pierwiastkiem pierwotnym z 1, to musimy mieć $n = k$.



3.3 Ciąta skończone

Twierdzenie 3.6. Niech K będzie ciałem skończonym. Wtedy

1. $\text{char}(K) = p \implies |K| = p^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$
2. Dla każdego $n > 0$ istnieje dokładnie jedno ciało K takie, że $|K| = p^n$ z dokładnością do izomorfizmu. Ciało mocy p^n będziemy oznaczać $F(p^n)$.

Dowód. 1. Skoro $\text{char}(K) = p$, to $\mathbb{Z}_p \subseteq K$ jest najmniejszym podciałem prostym ciała K . W takim razie, K jest skończoną przestrzenią liniową nad \mathbb{Z}_p . Jeśli $n = \dim_{\mathbb{Z}_p}(K)$, to K jest izomorficzne z \mathbb{Z}_p^n , jako przestrzeń liniowa nad \mathbb{Z}_p . W takim razie $|K| = p^n$.

2.

Istnienie:

Niech $n > 0$. Rozważmy

$$w_{p^n-1}(x) = x^{p^n-1} \in \mathbb{Z}_p[X].$$

Niech $L \supseteq \mathbb{Z}_p$ będzie ciałem rozkładu wielomianu w_{p^n-1} , a $K = \{0\} \cup \{\text{pierwiastki } w_{p^n-1}\}$. Wtedy

$$|K| = 1 + p^n - 1 = p^n,$$

czyli mamy potencjalne ciało rzędu p^n . Wystarczy więc pokazać, że K jest ciałem.

Niech $f : L \xrightarrow{1-1} L$ będzie funkcją Frobeniusa $x \mapsto x^p$. Teraz niech $f^n = f \circ \dots \circ f$, $f^n(x) = x^{p^n}$. Jest to monomorfizm, bo składamy ze sobą n takich samych funkcji $1-1$. Dla $a \in L$ mamy

$$(a^{p^n-1} = 1 \vee a = 0) \iff a \in K.$$

Co więcej, $a^{p^n-1} = 1 \iff a^{p^n} = a \iff f^n(a) = a$, czyli $K = \{a \in L : f^n(a) = a\}$ jest zbiorem punktów stałych morfizmu f^n , czyli jest ciałem, czego dowód jest pozostawiony na ćwiczenia.

Jedyność K :

Ciało K stworzone jak wyżej jest ciałem rozkładu $w_{p^n-1}(x)$ nad \mathbb{Z}_p .

Żałujemy nie wprost, że K' to inne ciało mocy p^n . Bez straty ogólności $\mathbb{Z}_p \subseteq K'$. Niech $x \in K'$. wiemy, że $x = 0$ lub $x^{p^n-1} = 1$. W takim razie w_{p^n-1} rozkłada się nad K' na czynniki liniowe. Zatem K' jest również ciałem rozkładu w_{p^n-1} nad \mathbb{Z}_p .

Z wniosku 2.1.(2) mamy, że dwa ciała rozkładu nad jednym wielomianem są izomorficzne i $K \cong K'$ nad \mathbb{Z}_p i mamy sprzeczność. ☕

Wykład 4: Rozszerzenia ciał

Definicja 4.1. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami i $a \in L \setminus K$.

- Jeżeli a jest algebraiczny nad K , to istnieje $f \in K[X]$ stopnia > 0 i $f(a) = 0$
- a jest przestępny nad K [transcendental] $\iff a$ nie jest algebraiczny.
- **Rozszerzenie** $L \supseteq K$ jest **algebraiczne** \iff dla każdego $a \in L$ a jest algebraiczny nad K .
- **Rozszerzenie jest przestępne** \iff nie jest algebraiczne.
- Niech $a \in \mathbb{C}$. Wtedy a jest algebraiczna, gdy a jest algebraiczna nad \mathbb{Q} .

Przykłady:

1. W \mathbb{C} na i jest pierwiastkiem algebraicznym wielomianu $x^2 + 1$, a $\sqrt[n]{d}$ jest pierwiastkiem $x^n - d$.
2. Ciało $F(p^n)$ ma charakterystykę p i $F(p) \subseteq F(p^n)$ jest rozszerzeniem ciał, które jest algebraiczne. Dla dowolnego $a \in F(p^n)$ to jest ono pierwiastkiem wielomianu $X^{p^n} - X$, czyli a jest algebraiczne nad $F(p)$.
3. Pierwiastki przestępne to na przykład e, π, E^π , aczkolwiek nie jesteśmy pewni tego ostatniego [doczytać w S. Lang, Algebra].
4. Rozważamy $K \subseteq L = K(X)$, czyli pierścień ułamków. Weźmy $x \in K(X)$ - przestępny nad K . Załóżmy, że istnieje wielomian $f \in K[X]$ różny od 0. I założmy, że $0 = \widehat{f}(X)$ to funkcja wielomianowa.

$$0 = \widehat{f}(X) = f \neq 0$$

i jest to sprzeczność.

Uwaga 4.2. Niech a jak wyżej. Wtedy a jest algebraiczny nad $K \iff I(a/K) \neq \{0\}$ jako ideał $K[X]$.

4.1 Wymiar przestrzeni liniowej

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciała K . Wtedy L jest **przestrzenią liniową nad K** . Definiujemy stopień rozszerzenia [coś innego jak indeks przy grupach]

$$[L : K] := \dim_K(L)$$

jako **wymiar przestrzeni liniowej** nad K .

Uwaga 4.3. Niech $a \in L \setminus K$. Następujące warunki są równoważne:

1. a jest algebraiczny nad K
2. $K[a] = K(a)$, to znaczy $K[a]$ jest ciałem (usuwanie niewymierności z mianownika)
3. $[K(a) : K] = \dim_K(a) < \infty$

Dowód. $1 \implies 2$

Wystarczy pokazać, że $K[a]$ jest ciałem. Rozważamy $I(a/K) \triangleleft K[X]$. Wiemy, że $K[X]$ jest PID, więc potrzebujemy, aby $I(a/K)$ było ideałem pierwszym.

$$f \cdot g \in I(a/K) \iff 0 = \widehat{f \cdot g}(a)$$

gdzie daszek oznacza homomorfizm ewaluacji, który jest również homomorfizmem w punkcie. Czyli

$$\widehat{f \cdot g}(a) = \widehat{f}(a)\widehat{g}(a) = 0 \iff \widehat{f}(a) = 0 \vee \widehat{g}(a) = 0.$$

Czyli $I(a/K)$ jest ideałem pierwszym w pierścieniu PID, więc jest ideałem maksymalnym. Mamy więc, że

$$K[a]/I(a/K)$$

jest ciałem, więc jest izomorficzne z $K(a)$, bo $K[a]$ to najmniejszy pierścień generowany przez $K \cup \{a\}$ (tutaj pierścień), a $K(a)$ to najmniejsze ciało generowane przez $K \cup \{a\}$.

2 \implies 3

Założmy, że $a \neq 0$. Wtedy $a^{-1} \in K[a]$, czyli istnieje wielomian $f \in K[X]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x^i, \quad b_n \neq 0$$

taki, że $a^{-1} = f(a)$. Wobec tego mamy

$$1 = f(a) \cdot a$$

$$0 = f(a)a - 1 = b_n a^{n+1} + b_{n-1} a^n + \dots + b_0 a - 1,$$

stąd mamy, że

$$a^{n+1} = -\frac{1}{b_n}(b_{n-1}a^n + \dots + b_0 a - 1) \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$$

jest w domknięciu liniowym $(1, a, \dots, a^n)$. Indukcyjnie pokazujemy, że

$$(\forall m \geq 0) a^m \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n).$$

1. $m = 0, \dots, n+1$ bo one są już w $\text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$.

2. Zakładamy teraz, że dla m mamy

$$a^m = \sum_{i=0}^n c_i a^i$$

i pokazujemy dla $m+1$.

$$a^{m+1} = a \cdot a^m = a \sum_{i=0}^n c_i a^i = \sum_{i=0}^n c_i a^{i+1} \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n),$$

bo $a^{n+1} \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$.

Czyli

$$K[a] = K(a) = \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n),$$

co daje, że $[K(a) : K] \leq n < \infty$.

3 \implies 1

$[K(a) : K] < \infty$, z czego wynika, że

$$\{1, a, \dots, a^n, \dots\} = \{a^t : t \in \mathbb{N}\} \subseteq K(a)$$

jest zbiorem liniowo zależnym. Z liniowej zależności wiemy, że

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists b_{n-1}, \dots, b_0) a^n = b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0.$$

Stąd dla $f \in K[X]$ zadanego wzorem

$$f(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 - x^n$$

mamy $f(a) = 0$, zatem a jest algebraiczny nad K . 

Definicja 4.4. Niech $a \in L \supseteq K$ będzie algebraicznym pierwiastkiem nad K , $I(a/K) = \{w \in K[X] : w(a) = 0\} = (f)$, $f \neq 0$, $f \in K[X]$, f unormowany (ang. monic)

- f jest nazywany wielomianem **minimalnym** a nad K (wyznaczony jednoznacznie)
- **stopień** a nad K jest definiowany jako $\deg(f)$.

Uwaga 4.5. Załóżmy, że $L(a/K) = (f)$ i f jest unormowany. Wówczas:

1. f jest unormowanym wielomianem minimalnego stopnia takim, że $f(a) = 0$
2. $\deg(f) = [K(a) : K]$, czyli stopień tego wielomianu jest równy stopniu przestrzeni liniowej $K(a)$ nad K .

Dowód.

1. Oczywiście **DOWODZIK, ZE IRREDUCIBLE JEST MINIMAL**
2. Niech $n = \deg(f)$,

$$f(x) = x^n + \sum_{k < n} b_k x^k$$

Z tego, że $f(a) = 0$ mamy, że

$$a^n = - \sum_{k < n} b_k a^k \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{n-1}) \subseteq L.$$

Czyli $K(a) = \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{n-1})$ i wystarczy zobaczyć, że $\{1, \dots, a^{n-1}\}$ jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku dla pewnego $0 < r < n$ $a^r \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{r-1})$, czyli istnieje wielomian taki, że a jest jego pierwiastkiem, a stopień jest nie większy niż $r < n$ i to daje sprzeczność.

Czyli $\text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$ jest bazą $K(a)$ nad K i koniec.



Przykład:

1. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$, wtedy $f(x) = x^2 - 2$ jest wielomianem minimalnym $\sqrt{2}$ nad \mathbb{Q} i stopień $\sqrt{2}$ nad \mathbb{Q} jest równy 2.
2. $\pi \in \mathbb{R}$ nie ma stopnia, bo π nie jest liczbą algebraiczną nad \mathbb{Q}
3. $\sqrt[7]{7} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{6} \in \mathbb{R}$, czy jest to algebraiczne nad \mathbb{Q} ? Tak i ma stopień 126.

Jeśli $K \subseteq L \ni a$ jest algebraiczny, to $\deg(a/K) = n$, to

$$K(a) = K[a] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i : b_i \in K \right\}$$

Fakt 4.6. Niech $K \subseteq L \subseteq M$ będą rozszerzeniami ciał. Wtedy

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$$

Dowód. Niech $\{e_i : i \in I\}$ będzie bazą L nad K , a $\{f_j : j \in J\}$ będzie bazą M nad L . Stąd $|I| = [L : K]$ i $|J| = [M : L]$.

Chcemy za pomocą tych dwóch zbiorów zrobić bazę M nad K . Rozważmy zbiór

$$X = \{e_i \cdot f_j : i \in I, j \in J\}.$$

Musimy pokazać, że

1. X jest liniowo niezależny
2. X jest bazą M nad K
3. $|X| = |I| \cdot |J|$

Czyli X jest bazą M nad K (1.,2.) i ma odpowiednią moc (3.).

1. Załóżmy nie wprost, że X nie jest l.n.z., czyli istnieją $k_{ij} \in K$ takie, że

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} k_{ij} e_i f_j = 0,$$

ale $\sum_i k_{ij}e_i = l_j$ są elementami L , czyli

$$\sum_{j \in I} l_j f_j = 0$$

więc f_j są liniowo zależne, a przecież były bazowe, w takim razie

$$0 = l_j = \sum_{i \in I} k_{ij}e_i,$$

$e_i \neq 0$, czyli $k_{ij} = 0$ i koniec.

2. X generuje M nad K , bo dla $m \in M$ mam

$$m = \sum l_j f_j = \sum \left(\sum a_{ij} e_i \right) f_j = \sum \sum a_{ij} e_i f_j = \sum \sum k_{ij} e_i f_j$$

3. Załóżmy, nie wprost, że dla $i \neq i'$ i $j \neq j'$ i $e_i f_j = e_{i'} f_{j'}$. Czyli

$$e_i f_j - e_{i'} f_{j'} = 0,$$

czyli $f_j, f_{j'}$ są liniowo zależne nad L , czyli mamy, że $f_j = f_{j'}$ i

$$0 = e_i f_j - e_{i'} f_j = (e_i - e_{i'}) f_j \implies e_i - e_{i'} = 0 \implies i = i'$$

Z tego wynika, że $[M : K] = |X| = |I||J| = [L : K][M : L]$.



Wniosek 4.7. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem skończonego ciała. Niech

$$K_{\text{alg}}(L) = \{a \in L : a \text{ jest algebraiczny nad } K\}.$$

Okazuje się, że K_{alg} jest podciałem.

Dowód. Weźmy $a, b \in K_{\text{alg}}$. Wiemy, że $[K(a) : K]$ i $[K(b) : K]$ są skończone. Mamy, że

$$K \subseteq K(a) \subseteq K(a, b)$$

Z faktu ?? wiemy, że

$$[K(a, b) : K] = [K(a, b) : K(a)] \cdot [K(a) : K]$$

czyli również $K(a, b)$ jest skończone. Zatem dla $x \in K(a, b)$ mamy

$$[K(x) : K] \leq [K(a, b) : K]$$

też jest skończone, zatem x jest algebraiczny nad K .

Dla $x \in K(a, b)$ mamy $[K(x) : K] \leq [K(a) : K]$, czyli również jest skończone. W takim razie, x jest algebraiczny nad K i należy do K_{alg} .



Definicja 4.8.

1. $K_{\text{alg}}(L)$ nazywamy **algebraicznym domknięciem** K w L .
2. K jest **relatywnie algebraicznie domknięte** w $L \iff K_{\text{alg}}(L) = K$.

Przykłady:

1. $\mathbb{Q}_{\text{alg}}(\mathbb{C}) := \hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\text{alg}}$ jest to tak zwane **ciało liczb algebraicznych**. $\hat{\mathbb{Q}}$ jest przeliczalne, bo $\mathbb{Q}[x]$ jest przeliczalne, więc jest mnóstwo liczb **przestępnych** (zespólnych, które nie są algebraiczne, ale nie potrafimy żadnej wskazać).
2. K jest algebraicznie domknięte w $K(X)$

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$, bo $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$ jest ciałem

$$L = \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}]}_{\subseteq \mathbb{C}} = \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]}_{\substack{\text{ciężło} \\ \sqrt[3]{2} \text{ alg. w } \mathbb{Q}}}[\sqrt{3}] \mathbb{Q} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})\}$$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in L \implies \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}} \in L$$

Wykład 5: Wielomiany koła, domknięcia algebraiczne

Uwaga 5.1. Niech $K \subseteq L \subseteq M$ będą rozszerzeniami ciał. $K \subseteq M$ jest algebraiczne $\iff K \subseteq L$ i $L \subseteq M$ są algebraiczne

Dowód.

\implies OK

\impliedby

Weźmy dowolny $m \in M$. $L \subseteq M$ jest algebraiczny, co oznacza $f(m) = 0$, gdzie $f \in L[X]$

$$f = \sum_{i=0}^n a_n x^i, \quad a_n \neq 0$$

W takim razie m jest algebraiczne nad ciałem $K(a_0, \dots, a_n)$. Ale teraz

$$[K(m) : K] \leq [K(a_0, \dots, a_n, m) : K] \stackrel{4.6}{=} [K(a_0, \dots, a_n, m) : K(a_0, \dots, a_n)] [K(a_0, \dots, a_n) : K] < \infty$$

bo m jest algebraiczny $K(\bar{a})$. Czyli

$$[K(m) : K] < \infty$$

więc m jest algebraiczny nad K (uwaga 4.3). ☕

Uwaga 5.2. $K_{\text{alg}}(L)$ jest relatywnie algebraicznie domknięty w L . To znaczy $(K_{\text{alg}}(L))_{\text{alg}}(L) = K_{\text{alg}}(L)$.

Dowód. Ćwiczenia. ☕

5.1 Wielomian rozkładu koła [cyclotomic polynomials]

Rozważamy wielomian

$$w_m(x) = x^m - 1$$

dla $m \in \mathbb{N}$. Wiemy, że

- pierwiastki w_m w \mathbb{C} są jednokrotne
- $\mu_m(\mathbb{C})$ jest grupą cykliczną
- $a \in \mu_m(\mathbb{C})$ jest generatorem $\mu_m(\mathbb{C}) = \{a^i : 0 \leq i \leq m\} \cong (\mathbb{Z}_m, +)$
- a^k generuje $\mu_m(\mathbb{C}) \iff \text{NWD}(k, m) = 1$

Funkcja Eulera:

$$\phi(m) = |\{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k < m, \text{NWD}(k, m) = 1\}|$$

$\mu_m(\mathbb{C})$ ma $\phi(m)$ generatorów.

Niech

$$\{k \in \mathbb{N} : 0 < k < m, \text{NWD}(k, m) = 1\} = \{m_1, \dots, m_{\phi(m)}\}$$

i zdefiniujmy

$$F_m(x) := (x - a^{m_1}) \dots (x - a^{m_{\phi(m)}}) \in \mathbb{C}[X]$$

F_m to m -ty wielomian cyklotoniczny.

Uwaga 5.3.

1. $w_m(x) = x^m - 1 = F_m(x) \cdot v_m(x) = F_m(x) \cdot \prod_{\substack{d|m \\ d < m}} F_d(x)$
2. $F_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$

Dowód:

1. Wiemy, że wielomian w_m ma m pierwiastków na płaszczyźnie Gaussa, więc jest iloczynem dwumianów $x - b$, $b \in \mu_m(\mathbb{C})$, czyli

$$\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \alpha^d - 1 \quad d = \text{ord}(\alpha), d|m$$

Wtedy α jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia d . Wobec tego

$$F_d(x) = \prod_{\substack{\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \\ \text{ord}(\alpha)=d}} (x - \alpha) \implies (\text{teza})$$

2. Dowód przez indukcję względem m . Dla $m = 1$ mamy $F_m(x) = x - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Teraz zakładamy, że dla wszystkich $0 < d < m$ jest $F_d(x) \in \mathbb{Z}[X]$. Z punktu (1) wiemy, że

$$x^m - 1 = w_m(x) = F_m(x)v_m(x)$$

z założenia indukcyjnego $v_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$, bo jest iloczynem $\prod_{\substack{\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \\ \text{ord}(\alpha)=d}} (x - \alpha)$

$w_m(x)$ w $\mathbb{Z}[X]$ jest podzielny przez v_m i dostajemy:

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot L(x)$$

ale w $\mathbb{C}[X] \supseteq \mathbb{Z}[X]$ było

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot F_m(x),$$

czyli $F_m = L \in \mathbb{Z}[X]$.

Uwaga 5.4. [Lemat Gaussa] $F_m(x)$ jest wielomianem nierozkładalnym w $\mathbb{Q}[X]$ (równoważnie w $\mathbb{Z}[X]$).

Dowód:

Po pierwsze zauważmy, że F_m jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X] \iff$ nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$.

Założmy nie wprost, że

$$F_m(x) = G_1(x) \cdot G_2(x)$$

dla $G_1, G_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Możemy założyć, że $G_1(x)$ jest dalej nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$ oraz $0 < \deg(G_1) < \deg(F_m) = \phi(m)$

Lemat: Istnieje ε' -pierwiastek G_1 oraz liczba pierwsza p taka, że $p \nmid m$ i $G_1(b) = G_2(b^p) = 0$.

Dowód lematu:

Niech ε będzie jakimś pierwiastkiem G_1 , a τ będzie jakimś pierwiastkiem G_2 . W takim razie

$$\tau, \varepsilon \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \tau = \varepsilon^l$$

dla pewnego l takiego, że $\text{NWD}(l, m) = 1$.

Niech $l = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$ będzie rozkładem na liczby pierwsze. Wtedy mamy ciąg różnych liczb

$$\text{pierwiastek } G_1 = \varepsilon, \varepsilon^{p_1}, \varepsilon^{p_1 p_2}, \dots, \varepsilon^{p_1 \dots p_s} = \tau \text{ pierwiastek } G_2$$

które są pierwiastkami pierwotnymi stopnia m . Z tego wynika, że każda z tych liczb jest pierwiastkiem G_1 lub G_2 , czyli istnieje taka pozycja i , że

$$G_1(\varepsilon^{p_1 \dots p_i}) = 0,$$

$$G_2(\varepsilon^{p_1 \dots p_{i+1}}) = 0$$

wtedy $\varepsilon' := \varepsilon^{p_1 \dots p_i}$ oraz $p = p_{i+1}$ i lemat jest spełniony.

Wimy już, że $G_1(\varepsilon) = 0$ i $G_1 \in \mathbb{Z}[X]$ jest wielomianem nierozkładalnym. Niech p będzie liczbą pierwszą z lematu. Rozważmy

$$G_3(x) = G_2(x^p).$$

Wtedy $G_2(\varepsilon^p) = G_3(\varepsilon) = 0$, ale stąd wynika, że $G_1(x)$ dzieli $G_3(x)$. Niech więc

$$G_3(x) = G_1(x)H(x) \in \mathbb{Z}[X].$$

Rozważmy homomorfizm

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =$$

i indukowany przez niego epimorfizm pierścieni

$$\bar{f} : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p[X].$$

Z założenia $F_m = G_1G_2$ mamy, że

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

a z rozumowania powyżej ($G_3 = G_1H$)

$$\bar{f}(G_3) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H)$$

ale

$$\bar{f}(G_3(x)) = \bar{f}(G_2(x^p)) = \bar{f}(G_2(x))^p,$$

bo współczynniki $\bar{f}(G_2(x^p))$ są w \mathbb{Z}_p , a $(\sum c_i x^i)^p = \sum c_i^p x^{ip}$, bo $c_i^{kp} = c_i^k$ dla $c_i \in \mathbb{Z}_p$.

Stąd wiemy, że

$$\bar{f}(G_2(x))^p = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H).$$

Pierścień $\mathbb{Z}_p[X]$ jest UFD, więc $\bar{f}(G_1)$ i $\bar{f}(G_2)$ mają wspólny dzielnik w $\mathbb{Z}_p[X]$, stopnia co najmniej 1. Zatem z

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

$$\bar{f}(F_m) | \bar{f}(w_m) = x^m - 1.$$

Zatem w pewnym rozszerzeniu $L \supseteq \mathbb{Z}_p$ w_m ma pierwiastek wielokrotny co daje sprzeczność.

Uwaga 5.5. Jeżeli $\varepsilon \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia m , to $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = \phi(m)$.

Dowód: $F_m(x) \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, a ε jest jego pierwiastkiem. To znaczy, że $F_m(x)$ jest wielomianem minimalnym dla ε nad \mathbb{Q} . Mamy, że $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = \deg F_m = \phi(m)$.

Lemat 5.6. [lemat Liouville'a o aproksymacji diofantycznej]: Jeżeli $a \in \mathbb{R}$ jest liczbą algebraiczną stopnia $N > 1$, to istnieje $c = c(a) \in \mathbb{R}_+$ takie, że dla każdego $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ zachodzi

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^N}$$

Lemat Liouville'a mówi o cesze. Jeżeli liczba nie spełnia tego lematu, to jest **liczbą przestępną**.

Dowód. Niech $N > 1$ i $a \in \mathbb{Q}$. Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$ taki, że $f(a) = 0$ i $\deg(f) = \deg(a/\mathbb{Q})$. Teraz zauważmy, że na f patrzymy jako na funkcję wielomianową. To znaczy, dla każdego $x \in \mathbb{R}$ patrząc na

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x) - \underbrace{\hat{f}(a)}_{=0}$$

ale funkcje wielomianowe są różniczkowalne. Dlatego możemy skorzystać z theoremierdzenia o wartości średniej. To znaczy

$$\widehat{f}(x) - \widehat{f}(a) = \widehat{f}'(x-a)$$

My wiemy, że a jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu $f(x)$. Niech $\varepsilon > 0$ takie, że $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ jest jedynym pierwiastkiem $f(x)$ w tym przedziale. Oczywiście,

$$\deg(\widehat{f}'(x)) < \deg(\widehat{f}(x)) \implies \widehat{f}'(a) \neq 0.$$

Bez straty ogólności $\widehat{f}'(a) > 0$. Niech i i $d = \sup_{x \in I} \widehat{f}'(x)$.

$$c = c(a) = \min(\varepsilon, \frac{1}{d}).$$

Udowodnimy, że c jest dobrze określona. Niech $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0$$

Rozważamy przypadki:

1. $f \notin I$. Wtedy $\left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{q^N} \geq \frac{c}{q^N}$
2. $f \in I$. Wtedy $\left|a - \frac{p}{q}\right|$ i $\frac{p}{q}$ może być naszym x . Czyli

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(\frac{p}{q})|}{|f'(\frac{p}{q})|} \geq \frac{|f(\frac{p}{q})|}{d} \geq \frac{c}{q^N}$$

bo $c \leq \frac{1}{d}$

$$0 \neq |f(\frac{p}{q})| = \left| \sum_{k=0}^N a_k \frac{p^k}{q^k} \right| = \frac{\left| \sum_{k=0}^N a_k p^k q^{N-k} \right|}{q^N} \geq \frac{1}{q^N}$$



5.2 Domknięcia algebraiczne

Definicja 5.7. Ciało $L \supseteq K$ jest **algebraicznym domknięciem** K wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. L jest algebraicznie domknięte
2. $L \supseteq K$ jest rozszerzeniem algebraicznym, to znaczy dla każdego $a \in L$ a jest pierwiastkiem algebraicznym nad K

Takie L oznaczamy przez $\widehat{K}, K^{\text{alg}}$.

Uwaga 5.8. Dla każdego K istnieje algebraiczne domknięcie \widehat{K} .

Dowód. Rozważmy $K_{\infty} \supseteq K$ - ciało algebraicznie domknięte (theoremierdzenie z początku wykładu). Pokażemy, że

$$\widehat{K} = K_{\text{alg}}(K_{\infty}) = \{a \in K_{\infty} : a \text{ algebraiczny nad } K\}$$

1. \widehat{K} jest algebraicznie domknięte:

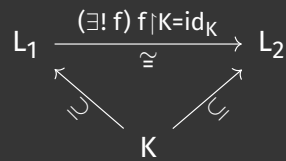
Jeżeli $f \in \widehat{K}[X]$, to f ma pierwiastek w K , ale $\widehat{K} \subseteq K_{\infty}$, to znaczy, że $a \in \widehat{K}$ jest algebraiczne nad K .

2. $K \subseteq \widehat{K}$ jest rozszerzeniem algebraicznym:

$K \subseteq \widehat{K} = K_{\text{alg}}(K_\infty)$ z definicji jest rozszerzeniem algebraicznym.



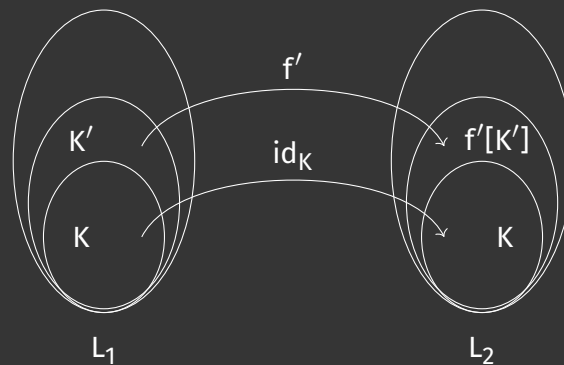
Twierdzenie 5.9. \widehat{K} jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu nad K .



Dowód. Można użyć indukcji pozaskończonej, a można też użyć lematu Zorna. My zrobimy to drugie.

Niech

$$\mathfrak{K} = \{(K', f') : K \subseteq K' \subseteq L_1, f' : K' \xrightarrow{1-1} L_2, f' \upharpoonright K = \text{id}_K\}$$



Oczywiście, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, bo $(K, \text{id}_K) \in \mathfrak{K}$. W \mathfrak{K} definiujemy relację porządku w naturalny sposób, to znaczy

$$(K', f') \leq (K'', f'') \iff K' \subseteq K'' \wedge f'' \upharpoonright K' = f'.$$

Wtedy (\mathfrak{K}, \leq) jest zbiorem częściowo uporządkowanym i niepustym (bo jest $(K, \text{id}_K) \in \mathfrak{K}$). Ponadto każdy wstępujący łańcuch (\mathfrak{K}, \leq) ma ograniczenie górne. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w tej rodzinie istnieje element maksymalny, nazwijmy go (K_1, f_1) . Pokażemy, że $K_1 = L_1$.

Założmy nie wprost, że istnieje $a \in L_1 \setminus K_1$. Niech $w(x) \in K_1[X]$ będzie wielomianem minimalnym elementu a nad K_1 . Niech

$$K_2 = f_1[K_1]$$

$$v(x) = f_1(a_0) + f_1(a_1)x + \dots + f_1(a_n)x^n \in K_2[X].$$

$v(x)$ też jest nierozkładalny nad K_2 , bo $w(x)$ był nierozkładalny nad K_1 . Niech $b \in L_2$ będzie pierwiastkiem wielomianu v .

Zauważmy, że $K_1(a) = K_1[a]$, bo $w(x)$ jest nierozkładalny nad K_1 , ale

$$K_1[a] \simeq K_1[X]/(w) \simeq K_2[X]/(v) \simeq K_2[b] \simeq K_2(b).$$

Czyli $K_1(a) \simeq K_2(b)$ i $f_2 : K_1(a) \xrightarrow{\cong} K_2(b)$ jest izomorfizmem rozszerzającym f_1 . Wtedy mamy $(K_1, f_1) \leq (K_1(a), f_2)$, co daje sprzeczność z maksymalnością (K_1, f_1) . Zatem $L_1 = K_1$.

Zrobimy sprytnie wprost: $K_1 = L_1$, $K \subseteq K_2 \subseteq L_2$ i $K_1 \cong_K K_2$. K_1 jest algebraicznie domknięte, więc K_2 też takie musi być. Czyli $K \subseteq K_2 \subseteq L_2$ jest algebraiczne, więc $K_2 = L_2$, bo założyliśmy, że $b \in L_2 \setminus K_2$ i wtedy wielomina minimalny $f_b(x) \in K_2[X]$ ma pierwiastek $c \in K_2$, czyli $(x - c) | f_b(x)$ a więc $x - c = f_b(x)$ jest nierozkładalny i $b = c$.



Wniosek 5.10. Jeśli $K \cong L$, to $\widehat{K} \cong \widehat{L}$. Dokładniej, jeżeli $f_0 : LK \rightarrow L$ jest izomorfizmem ciał, to istnieje izomorfizm $f : \widehat{K} \rightarrow \widehat{L}$ taki, że $f \upharpoonright K = f_0$.

Dowód. Ćwiczenia



Uwaga 5.11. Jeśli $K \subseteq L$ jest algebraicznym rozszerzeniem ciał, to istnieje monomorfizm $f : L \rightarrow \widehat{K}$ taki, że $f|_K = \text{id}_K$.

Dowód. Ćwiczenie



Wykład 6: Wstęp do teorii Galois

6.1 Grupy Galois

Niech K będzie ciałem, \hat{K} jego algebraicznym domknięciem. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym ciał [BSO: $L \subseteq \hat{K}$]. **Grupą Galois** rozszerzenia $K \subseteq L$ nazywamy

$$G(L/K) = \text{Gal}(L/K) = \{f \in \text{Aut}(L) : f \upharpoonright K = \text{id}_K\} = \text{Aut}(L/K)$$

ze składaniem jako działaniem. Jest to jednocześnie podgrupa wszystkich automorfizmów.

Przykład:

- Niech K będzie ciałem prostym ($\cong \mathbb{Q}$ lub \mathbb{Z}_p). Wtedy $\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}(L)$, bo
 - Niech $\text{char}(K) = \text{char}(L) = p > 0$ i niech $f \in \text{Aut}(L)$. Wtedy $f(1) = 1$, $f(\underbrace{1 + \dots + 1}_k) = \underbrace{1 + \dots + 1}_k$, a ponieważ $K = \{\underbrace{1 + \dots + 1}_k : k \in \{1, \dots, p\}\}$, zatem $f \upharpoonright K = \text{id}_K$, czyli $f \in \text{Gal}(L/K)$.
 - Niech $\text{char}(K) = \text{char}(L) = 0$, wtedy $K \cong \mathbb{Q}$. Niech $f \in \text{Aut}(L)$. Wtedy $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, a dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ $f(\underbrace{1 + \dots + 1}_k) = \underbrace{1 + \dots + 1}_k$, stąd dostajemy, że $f(n) = n$ dla $n \in \mathbb{Z}$, a z własności \mathbb{Q} dostajemy, że $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$, zatem $f \upharpoonright K = \text{id}_K$.
- $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \{f_0, f_1\} \cong \mathbb{Z}_2$, bo $\sqrt{2}$ może przejść na siebie albo na $-\sqrt{2}$. Wtedy $f_0 = \text{id}$, a $f_1(-\sqrt{2})$

Grupę Galois $\text{Gal}(\hat{K}/K)$ nazywamy **absolutną grupą Galois** ciała K .

Czy każda grupa skończona jest izomorficzna z $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ dla pewnego $\mathbb{Q} \subseteq L$? Jest to otwarty problem teorii Galois.

Uwaga 6.1. $a, b \in \hat{K}$, takie, że $I(a/K) = I(b/K)$, to wtedy istnieje $f \in \text{Gal}(\hat{K}/K)$ takie, że $f(a) = b$.

Dowód.

$$\begin{array}{ccc} K[a] & \xrightarrow[\cong]{f} & K[b] \\ \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq \\ K[a]^{\text{alg}} = \hat{K} & \xrightarrow[\cong]{\exists f'} & \hat{K} = K[b]^{\text{alg}} \end{array}$$

Co jest wnioskiem z wniosku 5.10.



6.2 Rozszerzenia algebraiczne normalne

\hat{K} jest największym algebraicznym rozszerzeniem K tzn. $K \subseteq L$ oznacza, że istnieje $f : L \rightarrow \hat{K}$ monomorfizm ciał taki, że $f \upharpoonright K = \text{id}_K$. ☕

Mówmy, że rozszerzenie algebraiczne $K \subseteq L$ jest **normalne**, gdy w ☕ $f[L] \subseteq \hat{K}$ dla wszystkich $f : L \rightarrow K$.

Przykład Rozszerzenie $K \subseteq \hat{K}$ jest normalne.

Uwaga 6.2. Załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Wtedy rozszerzenie $K \subseteq L$ jest normalne \iff dla każdego $f \in \text{Gal}(\hat{K}/K)$ $f[L] = L$.

Dowód. \implies z definicji, bo $\text{id}_K[L] = L$.

\impliedby z definicji.



Czyli $K \subseteq L_1 \subseteq L$ i $K \subseteq L$ jest normalna, to $L_1 \subseteq L(\subseteq \widehat{K})$, więc $\text{Gal}(\widehat{L}_1/L_1) \leq \text{Gal}(\widehat{K}/K)$.

Twierdzenie 6.3. Dla $K \subseteq L$ algebraicznego rozszerzenia jest normalne \iff dla każdego $b \in L$ wielomian minimalny $f \in K[X]$ rozkłada się w $L[X]$ na iloczyn czynników liniowych.

Dowód. Bez straty ogólności rozważamy $L \subseteq \widehat{K}$.

\implies

Dowód nie wprost, to znaczy załóżmy, że istnieje $b \in L$ takie, że $w_b(x)$ ma pierwiastek $a \in \widehat{K} \setminus L$. Ale wtedy z Uwagi 6.1. na jednorodność \widehat{K} istnieje $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f(b) = a$, więc $f[L] = L$ co jest sprzeczne z 6.2.

\impliedby

Załóżmy nie wprost, że na mocy 6.2. istnieje $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f[L] \neq L$. Ale L i $f[L]$ są wzajemnie sprzężone, więc wybierzmy $a \in L \setminus f[L]$. Symetrycznie, $a' \in f[L] \setminus L$, $f' : f[L] \xrightarrow{\cong} L$ spełnia warunek (☝).

Niech $w_a(x)$ jest wielomianem minimalnym a nad K . Wtedy $w_a(X) = f(w_a(x))$, bo $f \upharpoonright K = \text{id}_K$. Czyli w_a jest wielomianem minimalnym dla $b = f(a)/K$. Czyli $L \stackrel{f}{\cong} f[L]$. Z (☝) wiemy, że $w_a(x)$ rozkłada się nad L na czynniki liniowe. Czyli $w_a(x) \dots f[L] \dots$, co daje nam sprzeczność, bo a jest pierwiastkiem $w_a(X)$, ale $a \notin f[L]$. ☕

Rozszerzenie ciał $K \subseteq L$ jest **skończone**, jeśli $[L : K] < \infty$.

Twierdzenie 6.4. Niech $K \subseteq L$ będą rozszerzeniami ciał. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. rozszerzenie $K \subseteq L$ jest skończone i normalne
2. L jest ciałem rozkładu pewnego wielomianu

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$.

(2) \implies (1)

Załóżmy, że L jest ciałem rozkładu pewnego wielomianu. Wtedy $L = K(a_1, \dots, a_n)$, gdzie a_1, \dots, a_n to wszystkie pierwiastki wielomianu $w(x)$ w \widehat{K} .

Niech $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$, wtedy $f(a_1, \dots, f(a_n))$ to też wszystkie pierwiastki wielomianu $w(x)$. Stąd

$$f[L] = K(f(a_1), \dots, f(a_n)) = K(a_1, \dots, a_n) = L,$$

zatem rozszerzenie $K \subseteq L$ jest normalne i skończone.

(1) \implies (2)

Niech $K \subseteq L$ będzie skończone i normalne. Wtedy $L = K(a_1, \dots, a_n)$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in L$ i $\{a_1, \dots, a_n\}$ będzie bazą L nad K . Wtedy istnieje $w \in K[X] \setminus \{0\}$ takie, że $w(a_1) = \dots = w(a_n) = 0$, zatem

$$L \supseteq \{ \text{pierwiastki } w \} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}.$$

COŚ TUTAJ JEST NIE TAK



Przykłady:

1. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami skończonymi, wtedy $K \subseteq L$ jest ciałem normalnym, bo $|L| = p^n$, $w_{p^n-1}(x) = x^{p^n-1} - 1$ i L jest ciałem rozkładu w nad K .
2. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ to rozszerzenie skończone, ale nie normalne. Jest tak, bo
 - $x^3 - 2$ jest nierozkładalny nad \mathbb{Q} (kryterium Eisteina)
 - W ciele \mathbb{C} $x^3 - 2$ ma 3 pierwiastki, z których tylko jeden jest w $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$

Uwaga 6.5. Niech $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ i niech L_1 będzie ciałem generowanym przez $\bigcup \{f[L] : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}$. Wtedy L_1 to **normalne domknięcie ciała L w \widehat{K}** . Wtedy

1. Rozszerzenie $K \subseteq L_1$ jest normalne
2. Jeśli $K \subseteq L_2$ i $L \subseteq L_2$ są normalne, to istnieje monomorfizm $L_1 \rightarrow L_2$ taki, że $f \upharpoonright K = \text{id}$.

Dowód. (1) Z 6.2

(2)

Bez straty ogólności założymy, że $K \subseteq L \subseteq L_2 \subseteq \widehat{K}$ i $K \subseteq L \subseteq L_2 \subseteq \widehat{K}$. Niech $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$, $f[L] \subseteq L_2$. W takim razie $\bigcup \{f[L] : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\} \subseteq L_2$, z czego wynika, że $L_1 \subseteq L_2$. ☕

6.3 Rozszerzenia rozdzielcze

- Niech K będzie ciałem i $a \in \widehat{K}$. Mówimy, że a jest **rozdzielczy nad K** , gdy wielomian minimalny a , $w_a(x) \in K[X]$ ma tylko pierwiastki jednokrotne w \widehat{K} .
- Algebraiczne rozszerzenie $K \subseteq L$ jest **rozszerzeniem rozdzielczym**, gdy dla każdego $a \in L$ a jest rozdzielczy nad K .
- Wielomian $w(x) \in K[X]$ jest **rozdzielczy**, gdy w ma tylko pierwiastki jednokrotne w \widehat{K} .

Uwaga 6.6. Założymy, że $w(x) \in K[X]$ jest wielomianem nierozkładalnym stopnia > 0 . Wtedy

1. $w(x)$ jest rozdzielczy $\iff w(x)$ i $w'(x)$ są względnie pierwsze
2. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to w jest rozdzielczy
3. Jeśli $\text{char}(K) = p > 0$, to w jest nierozdzielczy $\iff w(x) \in K[X^p]$, to znaczy $w(x) = v(x^p)$ dla pewnego $v(x) \in K[X]$.

Dowód. Dowód zadanie z listy 4 ☕

Przykłady:

1. Niech $K \subseteq L$ będzie rozdzielcze i $K \subseteq L_1 \subseteq L$. Wtedy $L_1 \subseteq L$ też jest rozdzielcze [ćwiczenia]
2. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to każde rozszerzenie algebraiczne ciała K jest rozdzielcze.
3. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami skończonymi. Wtedy $K \subseteq L$ jest rozdzielcze.

Ciał L rozkładu wielomianu $x^{p^n} - x$ o pierwiastkach jednokrotnych.

4. Rozszerzeni nierozdzielnicze: niech $K = \mathbb{F}_p(X) \subseteq L = K(\sqrt[p]{X})$. Niech $w_a(T) = T^p - x \in K[T]$ będzie wielomianem minimalnym $a = \sqrt[p]{X}$. Wtedy $w'_a = 0$, czyli w ciele L istnieje p -krotny pierwiastek w_a : $w_a(T) = (t - a)^p \cdot a$

Lemat 6.7.

1. Jeśli $a \in \widehat{K}$, to $|\{f(a) : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| \leq \text{stopień } a \text{ nad } K$
2. a jest rozdzielczy nad $K \iff$ w podpunkcie (1) jest równość.

Dowód.

$$\{f(a) : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\} \stackrel{??}{=} \{\text{pierwiastki wielomianu minimalnego } w_a \in K[X] \text{ nad } K\}$$

czyli $\deg(a/K) = \deg(w_a)$. ☕

Element $a \in L$ nazywamy **elementem pierwotnym** rozszerzenia $K \subseteq L$, gdy $L = K(a)$.

Twierdzenie 6.8. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem skończonym, $L = K(a_1, \dots, a_n)$ i a_1, \dots, a_n rozdzielcze nad K . Wtedy istnieje $a^* \in L$ rozdzielczy nad K taki, że $L = K(a^*)$.

Dowód. Bez starty ogólności założmy, że $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Rozważmy dwa przypadki:

1. K jest skończone. Wtedy L także jest skończone, a L^* jest cykliczna. Niech więc $a^* \in L^*$ będzie generatorem L^* . Wtedy $L = K(a^*)$.
2. K jest nieskończone.

Dowód przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ jest oczywiste. Robimy więc krok indukcyjny $(n - 1) \implies n$:

$$K(a_1, \dots, a_{n-1}) = K(b)$$

$$K(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = K(b, a_n)$$

Niech teraz k będzie stopniem b nad K , a m - stopniem a_n nad $K(b)$. Z lematu 6.7 wiemy, że istnieją $f_1, \dots, f_k \in \text{Gal}(\hat{K}/K)$ takie, że $f_1(b), \dots, f_k(b)$ są parami różne. Niech więc $f_{1,1}, \dots, f_{1,m} \in G(\hat{K}/K(b))$ takie, że $f_{1,1}(a), \dots, f_{1,m}(a)$ są parami różne.

Dla $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ niech $f_{i,j} = f_i \circ f_{1,j} \in \text{Gal}(\hat{K}/K)$.

$$\begin{array}{ccccc} K(b)(a) & \xrightarrow{f_{i,j}} & K(b, f_{1,j}(a)) & \xrightarrow{f_i} & K(f_i(b), f_i(f_{1,j}(a))) \\ \subseteq \uparrow & \searrow \subseteq & & \searrow \subseteq & \\ K(b) & \xrightarrow{\quad} & K(f_i(b)) & & \\ \subseteq \uparrow & & \subseteq \uparrow & & \\ K & & K & & \end{array}$$

Zauważmy, że

$$\langle i, j \rangle \neq \langle i', j' \rangle \implies \langle f_{i,j}(a), f_{i,j}(b) \rangle \neq \langle f_{i',j'}(a), f_{i',j'}(b) \rangle,$$

bo są dwie możliwości:

- $i \neq i'$, wtedy $f_{i,j} = f_i(b) \neq f_{i'}(b) = f_{i',j'}(b)$
- $i = i' \wedge j \neq j'$, wtedy $f_{i,j}(a) = f_i(f_{1,j}(a)) \neq f_i(f_{1,j'}(a)) = f_{i',j'}(a)$, bo $f_{1,j}'(a) \neq f_{1,j'}'(a)$.

Skoro K było nieskończone, to istnieje $c \in K$ takie, że dla $\langle i, j \rangle \neq \langle i', j' \rangle$ mamy

$$f_{i,j}(b) + f_{i,j}(a) \cdot c \neq f_{i',j'}(b) + f_{i',j'}(a) \cdot c,$$

bo

$$F(x) = \prod_{\langle i,j \rangle \neq \langle i',j' \rangle} [f_{i,j}(b) + f_{i,j}(a)x - (f_{i',j'}(b) + f_{i',j'}(a)x)]$$

i c po prostu nie jest pierwiastkiem F .

Postulujemy, że $K(b, a_n) = K(a^*)$, gdzie $a^* = b + a_n c$ jest elementem pierwotnym.

\supseteq jest jasne

$\subseteq f_{i,j}(a^*), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m$ parami różne.

Wiemy, że $\deg(a^*/K) \geq k \cdot m$, z drugiej strony

$$k \cdot m \leq [K(a^*) : K] \leq [K(a_n, b) : K] = [K(b) : K][K(a_n, b) : K(b)] = km$$

czyli wszędzie wyżej są równości i mamy $K(a^*) = K(a_n, b)$.



Wniosek 6.9.

1. Jeśli $L = K(a_1, \dots, a_n)$ i a_i są rozdzielcze nad K , to $L \supseteq K$ też jest rozdzielcze.
2. $K \subseteq L$ jest rozdzielcze i $L \subseteq M$ jest rozdzielcze, to $K \subseteq M$ też jest rozdzielcze.

Dowód. 1. Niech $L = K(a)$ i a jest rozdzielczy nad K . Załóżmy, że $b \in L$ nie jest rozdzielczy nad K . Wtedy $L = K(b, a)$.

$$\begin{array}{ccccc} n \cdot m & & n & & m \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \deg(a/K) & = & \deg(b/K) \cdot \deg(a/K(b)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ [K(a) : K] & = & [K(b) : K] \cdot [K(a, b) : K(b)] \end{array}$$

Wyberzmy teraz $g \in K[X]$ takie, że $g(a) = b$. Wtedy

$$n \cdot m = |\{f(a) : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = (*),$$

bo a jest rozdzielczy nad K . Dalej,

$$(*) = |\{(f(b), f(a)) : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = (**),$$

bo $f(b)$ ma $k < n$ możliwości, gdyż b nie jest rozdzielczy nad K i korzystamy z 6.7. Przy ustalonym $f(b)$ skakać po $f(a)$ możemy na co najwyżej m sposobów, bo $\deg(a/K(b)) = m = \deg(f(a)/K(f(b)))$. Czyli koniec końców

$$(**) \leq k \cdot m < n \cdot m,$$

co daje sprzeczność.

2. Podobny dowód zostawiony studentowi do pokiwania głową, że rozumie a w duszy płacz bo co się dzieje?



Wykład 7: Rozszerzenia radykalne (czysty Bangladesz)

Niech $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ jak zwykle. Wtedy

- $a \in L$ jest **czysto nierozdzielczy** nad K , czyli **radykalny**, gdy wielomian minimalny a nad K , $w_a(x) \in K[X]$, ma tylko jeden pierwiastek w \widehat{K} .
- $K \subseteq L$ jest **rozszerzeniem radykalnym** (czysto nierozdzielczym), gdy dla każdego $a \in L$ a jest radykalne nad K .

Uwaga 7.1.

1. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to a nad K jest czysto nierozdzielczy $\iff a \in K$.
2. a jest radykalne nad $K \iff$ dla każdego $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$ $f(a) = a$
3. Jeśli $\text{char}(K) = p$, to a jest radykalne nad $K \iff$ istnieje $n \geq 0$ $a^{p^n} \in K$.

Dowód.

1. $w_a(x)$ ma tylko pierwiastki jednokrotne, gdy $\text{char}(K) = 0$
2. Oczywiście \star
3. \Leftarrow oczywiście: $w_a(x) \in K[X]$ dzieli $x^{p^n} - a^{p^n} = (x - a)^{p^n} \in K[X]$
 \implies Dowodzimy indukcją po $n = \deg(a/K)$. Niech $w_a(x) = (x - a)^n \in K[X]$ i $w'_a(x) = n(x - a)^{n-1} \in K[X]$ i $w'_a \in I(a/K)$ gdy $n > 1$, czyli $w'_a(x) = 0$, więc $p|n$. Niech więc $n = p \cdot n_1$ i wtedy $w_a(x) = (x^p - a^p)^{n_1}$ i a^p jest radykalny nad K , bo $\deg(a^p/K) \leq n_1 < n$. Z założenia indukcyjnego istnieje $k \geq 0$ takie, że $(a^p)^{p^k} = a^{p^{k+1}} \in K$ i to jest to, czego szukaliśmy.



Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym. Definiujemy

1. **rozdzielcze domknięcie** K w L : $\text{sep}_L(K) = \{a \in L : a \text{ radykalne nad } K\}$
2. **radykalne domknięcie** (czysto nierozdzielcze) K w L : $\text{rad}_L(K) = \{a \in L : a \text{ radykalny nad } K\}$

Wniosek 7.2. $K \subseteq \text{sep}_L(K)$ i $\text{rad}_L(K) \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ to ciała takie, że $\text{sep}_L(K) \cap \text{rad}_L(K) = K$.

Dowód. Fakt, że $\text{sep}_L(K)$ jest ciałem wynika z 6.9. Natomiast to, że $\text{rad}_L(K)$ jest ciałem wynika z tego, że

$$\text{rad}_L(K) = L \cap \bigcap_{f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)} \text{Fix}(f) = \{a \in \widehat{K} : f(a) = a\}$$

Dalej, dla $a \in \text{sep}_L(K) \cap \text{rad}_L(K)$ mamy $w_a(x) = x - a$ jest wielomianem minimalnym a nad K .



✿ $\widehat{K}^s = \text{sep}_{\widehat{K}}(K)$ jest rozdzielczym domknięciem K

✿ $\widehat{K}^r = \text{rad}_{\widehat{K}}(K)$ jest radykalnym domknięciem K .

Uwaga 7.3.

1. Gdy $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$, to $\text{sep}_L(K) = \widehat{K}^s \cap L$, $\text{rad}_L(K) = \widehat{K}^r \cap L$
2. Założmy, że $K \subseteq L \subseteq M \subseteq \widehat{K}$, wtedy $K \subseteq L \subseteq M \iff K \subseteq M$
 $\text{rad} \quad \text{rad} \quad \text{rad}$

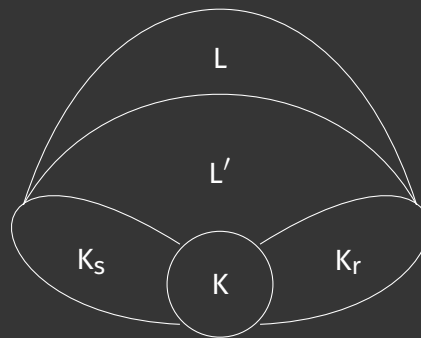
3. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to $\text{sep}_L(K) = K^{\text{alg}}(L)$ i $\text{rad}_L(K) = K$, oraz $\widehat{K}^S = \widehat{K}$, $\widehat{K}^r = K$.

Fakt 7.4. Załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$, $K_S = \text{sep}_L(K)$, $K_r = \text{rad}_L(K)$, $L' = K_S \cdot K_r$ i niech $L' = K_S \cdot K_r$ będzie złożeniem ciał K_S i K_r w L (tzn. ciało generowane w L przez $K_S \cup K_r$: $L' = K_S(K_r) = K_r(K_S)$). Wtedy:

1. $[L' : K] = [K_S : K] \cdot [K_r : K]$
2. Gdy $K \subseteq L$ jest rozszerzeniem normalnym, to $K_S \cdot K_r = L$
3. $K_S \subseteq L$ jest radykalne, a $K_r \subseteq L'$ rozdzielcze

Dowód. Jeśli $\text{char}(K) = 0$, to problem jest trywialny, bo $K_r = K$, $K_S = L$ i $L' = L$.

Założmy więc, że $\text{char}(K) = p > 0$.



1. $L' = K_r(K_S) \supseteq K_r \supseteq K$, więc:

$$[L' : K] = [K_r(K_S) : K_r][K_r : K]$$

Wystarczy pokazać, że $[K_S : K] = [K_r(K_S) : K_r]$.

Zadanie z listy 4: Załóżmy, że $K \subseteq L, M \subseteq \widehat{K}$ są rozszerzeniami ciała takie, że $L \cap M = K$. Jeśli dla wszystkich L_0, M_0 takich, że $K \subseteq L_0 \subseteq L$ i $K \subseteq M_0 \subseteq M$ są skończone i $[L_0(M_0) : L_0] = [M_0 : K]$, to $[L(M) : L] = [M : K]$.

W takim razie wystarczy, że pokażemy

$$[K_r(K_S) : K] = [K_S : K]$$

korzystając z zadania 4 (wyżej). Niech $K \subseteq K_r^0 \subseteq K_r$ i $K \subseteq K_S^0 \subseteq K_S$, pierwsze rozszerzenia są skończone. Na mocy twierdzenia Abela możemy wybrać $a \in K_S^0$ takie, że $K_S^0 = K(a)$. Wtedy również

$$K_r^0(K_S^0) = K_r^0(a)$$

i $[K_S^0 : K] = \text{stopień } a \text{ nad } K$, $[K_r^0(a) : K_r^0] = \text{stopień } a \text{ nad } K_r^0$. Wystarczy pokazać, że oba te stopnie się zgadzają.

Niech $n = [K(a) : K] = \text{stopień } a \text{ nad } K$. Wtedy

$$1, a, \dots, a^{n-1}$$

to baza liniowa $K(a)$ nad K . Przez to, że a jest rozdzielczy nad K i $p = \text{char}(K)$, to $K(a) = K(a^p)$ [zad. 7 lista 4], czyli dla każdego $l > 0$

$$1, a^{p^l}, \dots, a^{(n-1)p^l}$$

też jest bazą $K(a)$ nad K .

Pokażemy, że $1, a, \dots, a^{n-1}$ jest bazą liniową $K_r^0(a)$ nad K_r^0 :

- liniowa niezależność:

$$\sum k_i a^i = 0, \quad k_i \in K_r^0$$

Niech l będzie takie, że $k_i^{p^l} \in K$ dla wszystkich i , wtedy

$$\sum k_i^{p^l} a^{ip^l} = 0 \implies (\forall i) k_i = 0$$

Czyli $[K_r^0(a) : K_r^0] \leq [K(a) : K] = n$ i $1, a, \dots, a^{n-1}$ jest bazą $K_r^0(a)/K_r^0$.

2. Bez straty ogólności założmy, że $[L : K] < \infty$, bo

$$L = \bigcup_{\text{skon, norm}} \{L_0 : K \subseteq L_0 \subseteq L\}$$

(a) Niech $a \in L \supseteq K_r$, postulujemy, że a jest rozdzielnym nad K_r . Niech $a = a_1, a_2, \dots, a_n$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $w_a(X) \in K[X]$ i niech

$$v(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Wtedy dla $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$ mamy $f[L] = L$, więc f permutuje $\{a_1, \dots, a_n\}$. Stąd $f(v(x)) = v(x)$, czyli f zachowuje współczynniki $v(x)$. To oznacza, że $v(x) \in K_r[X]$ i mamy, że a jest rozdzielnym nad K_r .

(b) $L \supseteq K_s$ jest radykalne: z uwagi 6.6(3) wiemy, że jeśli $a \in L$ to dla pewnego l mamy a^{p^l} jest rozdzielnym nad K . Czyli $a^{p^l} \in K_s$, więc a jest radykalny nad K_s .

Z podpunktów wyżej wiemy, że $L \subseteq K_r \cdot K_s$ jest rozszerzeniem rozdzielnym i radykalnym, więc $L = K_r \cdot K_s$.

3. $L \supseteq K_s$ jest radykalne w sposób analogiczny do rozumowania wyżej. $L' \supseteq K_r$ jest rozdzielnym, bo $L' = K_r[K_s]$.



7.1 Stopień rozdzielnego, radykalnego ciała

$$K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$$

Definiujemy $[L : K]_s = [\text{sep}_L(K) : K]$ jako **stopień rozdzielnego** ciała L nad K oraz $[L : K]_r = [L : \text{sep}_L(K)]$ jako **stopień radykalnego** L nad K .

Z wyników wyżej dostajemy

$$[L : K] = [L : K]_s \cdot [L : K]_r,$$

bo $K \subseteq \text{sep}_L(K)$ jest rozdzielnym, a $\text{sep}_L(K) \subseteq L$ jest radykalne.

Uwaga 7.5. $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$

1. Jeśli $K \subseteq L$ jest rozdzielnym, to $[L : K] = |\{f \upharpoonright L : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = |\{f : L \rightarrow \widehat{K} : f \upharpoonright K = \text{id}\}|$
2. Ogólnie, $[L : K]_s = |\{f \upharpoonright L : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}|$ (jak wyżej)

Dowód. Rozważamy $[L : K] < \infty$. Przypadek ogólny $[L : K]$ można zredukować do przypadku skończonego, co jest ćwiczeniem na liście [wskazówka: rozważyć odpowiednią bazę liniową L nad K]

1. Z twierdzenia Abela $L = K(a)$ i dla $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$, $f \upharpoonright L$ jest wyznaczone jednoznacznie przez $f(a)$. Wiemy, że $f(a) \in \{\text{pierwiastki } w_a(x)\}$, których jest $n = [L : K]$.
2. $L \supseteq K_s$ to rozszerzenie radykalne, więc $f \upharpoonright L$ jest wyznaczone przez $f \upharpoonright K_s$. Dlatego:

$$|\{f \upharpoonright L : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = |\{f \upharpoonright K_s : f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = [K_s : K] = [L : K_s]_{\text{sep}_L(K)}$$



Uwaga. Jeśli $\text{char}(K) = p$ i $[L : K]_r < \infty$, to $[L : K]_r$ jest potęgą p .

Dowód. Indukcja względem $[L : K]_r = [L : K_S]$. Bez starty ogólności założmy, że $K = K_S$. Niech $a \in L \setminus K$, wtedy a jest radykalne nad K , czyli istnieje minimalne l takie, że $a^{p^l} \in K$.

Niech $a' = a^{p^{l-1}}$, wtedy $a' \in L \setminus K$ i $(a')^p \in K$, dlatego $w_{a'}(x) = x^p - (a')^p$ i $K \subseteq K(a') \subseteq L$, pierwsze rozszerzenie ma stopień p , a drugie jest radykalne.

Mamy $[L : K(a')] < [L : K]$, więc z założenia indukcyjnego $[L : K(a')] = p^r \implies [L : K] = p^{r+1}$



Wykład 8: Przekształcenia liniowe

Od teraz $K \subseteq L$ to będzie skończone rozszerzenie ciała, L będzie przestrzenią liniową nad K o wymiarze $\dim_K L = [L : K]$. Dla $a \in L$ będziemy opisywać homomorfizm


$$f_a : L \rightarrow L$$

$$f_a(z) = a \cdot z$$

będący K -liniowym przekształceniem.

8.1 Norma, ślad

 $N_{L/K}(a) = \det(f_a)$ jest normą homomorfizmu f_a

 $\text{Tr}_{L/K}(a) = \text{Tr}(f_a)$ jest śladem f_a .

Fakt 8.1. Niech $\{f_1, \dots, f_k\} = \{f : L \rightarrow \widehat{K} : f|_K = \text{id}\}$, $k = [L : K]_s$ i $a \in L$. Wtedy

$$1. N_{L/K}(a) = \left[\prod_{i=1}^k f_i(a) \right]^{[L:K]_r}$$

$$2. \text{Tr}_{L/K}(a) = [L : K]_r \cdot \sum_{i=1}^k f_i(a).$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $L_K(a)$ i a jest rozdzielczy nad K . Niech $w_a(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0 \in K[X]$ będzie wielomianem minimalnym dla a nad K . Niech $b_1 = a, \dots, b_n \in \widehat{K}$ będą pierwiastkami w_a i możemy założyć bez straty ogólności, że $b_i = f_i(a)$. W takim razie, jeśli popatrzymy na w_a w \widehat{K} , to mamy

$$w_a = \prod (x - b_i)$$

$$a_{k-1} = - \sum b_i$$

$$a_0 = (-1)^k \prod b_i$$

Na mocy zadania 4 z listy 5 dostajemy więc

$$N_{L/K}(a) = (-a)^k a_0 = \prod f_i(a)$$

$$\text{Tr}_{L/K}(a) = -a_{k-1} = \sum f_i(a)$$

Dowód. 1. Niech $a \in L$. Wtedy **O JEZU JA NIE MYŚLĘĘĘ**

2. Jeśli $[L : K]_r \neq 1$, to $[L : K]_r = p^l$ dla $l \geq 1$ i $\text{Tr}(a) = 0$

$$(a) \ a \in K_s, \text{ to } \text{tr}_{L/K}(a) = [L : K_s] \cdot \text{Tr}_{K_s/K}(a) \underset{\text{char}(K)=p}{=} 0$$

$$(b) \ a \notin K_s, \text{ wtedy } w_a(x) \in K[X] \text{ nie jest rozdzielczy na mocy 6.6(4). Czyli } K[X^p] \ni w_a(x) = x^{tp} + a_{(t-1)p}x^{(t-1)p} + \dots. \text{ Stąd } a_{(t-1)p} = 0 = \text{Tr}_{L/K}(a) = [L : K(a)] \underbrace{\text{Tr}_{K(a)/K}(a)}_{=0}$$

3. Jeśli $[L : K]_r = 1$, to $L = K$ i $K \subseteq L$ jest rozdzielcze. Patrzymy na ciąg

$$K \subseteq K(a) \subseteq L$$

mamy

$$\text{Tr}_{L/K}(a) = [L : K(a)] \cdot \text{Tr}_{K(a)/K}(a)$$

Możemy wziąć b takie, że $K(a, b) = L$. Teraz liczymy homomorfizmy $L \xrightarrow[\widehat{K}]{} \widehat{K}$



8.2 Rozszerzenia Galois

$$K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$$

🐉 Mówimy, że rozszerzenie algebraiczne jest **Galois**, gdy dla każdego $a \in L \setminus K$ istnieje $f \in \text{Gal}(L/K)$ takie, że $f(a) \neq a$.

🐉 Niech $G \leq \text{Aut}(L)$. Wtedy **ciałem punktów stałych** grupy G nazywamy

$$L^G = \{a \in L : (\forall f \in G) f(a) = a\} = \bigcap_{f \in G} \text{Fix}(f)$$

Uwaga: Jeśli $K \subseteq L$ jest algebraiczne, to $K \subseteq L$ jest Galois $\iff K = L^{G(L/K)}$ [ćwiczenia].

Przykłady:

1. $L = K(a)$ i a jest algebraiczne nad K . w_a jest wielomianem minimalnym dla a i $a = a_1, \dots, a_k$ są wszystkie pierwiastki w_a w L . Wtedy $G(L/K) \ni f$ jest wyznaczone przez $f(a) \in \{a_1, \dots, a_k\}$. Stąd też $|\text{Gal}(L/K)| \leq k \leq [L : K]$.
2. $L = K(a_1, \dots, a_k) \supseteq K$ jest ciałem rozkładu wielomianu $w(x) \in K[X]$ (a_1, \dots, a_k to wszystkie pierwiastki w w L). $\text{Gal}(L/K) \ni f$ jest wyznaczone przez $f \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\} \in \text{Sum}(\{a_1, \dots, a_n\})$ i istnieje monomorfizm $G(L/K) \rightarrow \text{Sum}(\{a_1, \dots, a_n\})$ taki, że $f \mapsto f \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\}$.
3. $\zeta_a \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia m . Wtedy $[\mathbb{Q}[\zeta_1] : \mathbb{Q}] = \phi(m)$ i $\eta_1 \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\phi(m)}\} \subseteq \mathbb{C}$ to wszystkie pierwiastki pierwotne stopnia m z 1 w \mathbb{C} . Dowolny $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_1]/\mathbb{Q}) \ni f$ jest wyznaczony przez $f(\zeta_1)$ (może być dowolny ζ_i , $1 \leq i \leq m$), bo $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_1]/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_i]/\mathbb{Q})$. Czyli $f(\zeta_1) = \zeta_1^{l_f}$ dla pewnego $0 < l_f < \text{takiego, że } \gcd(m, l_f) = 1$. Czyli $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_1]/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_m^*$ takie, że $f \mapsto l_f$.

Twierdzenie 8.2. Niech $K \subseteq L$ będzie algebraiczne. Wtedy $K \subseteq L$ jest Galois $\iff K \subseteq L$ jest rozdzielcze i normalne.

Dowód. Bez starty ogólności niech $L \subseteq \widehat{K}$

\implies Niech $a \in L \setminus K$ i niech $a = a_1, \dots, a_n \in L$, wszystkie parami różne, będą pierwiastkami $w_a(x) \in K[X]$ w L .

Niech $v(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \in L[X]$, wtedy $v(x) | w_a(x)$ i $v(x)$ jest niezmienniczy względem $\text{Gal}(L/K)$ [f permutuje a_1, \dots, a_n]. Czyli $v(x) \in L^{\text{Gal}(L/K)}[X] = K[X]$, bo $K \subseteq L$ jest Galois. Stąd $w_a | v$, więc $v = w$ jest rozdzielczy i rozkłada się nad L na czynniki liniowe. Stąd wynika, że $K \subseteq L$ jest rozdzielcze i normalne.

\longleftarrow

Weźmy $a \in L \setminus K$ i niech $w_a(x)$ będzie wielomianem minimalnym [rozdzielczym]. Istnieje $a' \neq a \in L$ będące innym pierwiastkiem w_a w L (bo L normalne). Istnieje $f \in \text{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f(a) = a'$. Ponieważ $K \subseteq L$ było normalne, to $f[L] = L$ i mamy $f \upharpoonright L \in \text{Gal}(L/K)$, $f \upharpoonright L(a) \neq a$, czyli z uwagi wcześniej $K \subseteq L$ jest Galois. ☕

Wniosek 8.3. Załóżmy, że mamy $K \subseteq L \subseteq M \subseteq \widehat{K}$. $K \subseteq M$ jest rozszerzeniem Galois $\iff L \subseteq M$ jest Galois.

Twierdzenie 8.4. Twierdzenie Artina: niech $G \leq \text{Aut}(L)$, wtedy $L^G \subseteq L$ jest rozszerzeniem Galois i $[L : L^G] = |G|$.

Dowód. Niech $G \leq \text{Gal}(L/L^G)$, wtedy:

- dla każdego $x \in L \setminus L^G$ istnieje $f \in \text{Gal}(L/L^G)$ takie, że $f(x) \neq x$
- $L^G \subseteq L$ jest algebraiczne:

Niech $a \in L \setminus L^G$, $\{a = a_0, \dots, a_l\} = G(a)$ będzie orbitą a w L . Niech $w(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n) \in L[X]$. Wtedy dla każdego $g \in G$ mamy $g(w(x)) = w(x)$ i $w \in L^G[X] \implies a$ jest algebraiczny nad L^G .

Ponieważ $\deg(w) \leq |G|$, to $[L^G(a) : L^G] \leq |G|$. L^G jest rozdzielnym rozszerzeniem L , co razem z twierdzeniem Abela daje nam $[L : L^G] \leq |G|$ i $L = L^G(a)$ dla pewnego a . Czyli $w_a(x) \in L^G[X]$ jest wielomianem minimalnym a nad L^G , więc $\deg(w_a) \leq |G|$.

$L^G \subseteq L$ jest rozdzielnym i normalnym. Czyli $|\text{Gal}(L^G/L)| = \deg(w_a) = [L : L^G] \leq |G|$. Ponieważ $G \leq \text{Gal}(L/L^G)$, to $G = \text{Gal}(L/L^G)$ i $[L : L^G] = |G|$



Wniosek 8.5. Niech $K \subseteq L$ będzie skończonym rozszerzeniem Galois. Wtedy $[L : K] = |\text{Gal}(L/K)|$

Dowód. Niech $G = \text{Gal}(L/K)$, wtedy $K = L^G$ i G jest skończona i z twierdzenia Artina $[L : K] = [L : L^G] = |G|$



$K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Definiujemy

$$\mathcal{L} = \{L' : K \subseteq L' \subseteq L\}$$

$$\mathcal{G} = \{H : H \leq \text{Gal}(L/K)\}$$

Od razu pojawiają nam się naturalne homomorfizmy:

$$\Gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$$

$$L' \mapsto \text{Gal}(L/L') \leq \text{Gal}(L/K)$$

$$\Lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}$$

$$G \mapsto [K \subseteq] L^G \subseteq L$$

Twierdzenie 8.6. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest skończonym rozszerzeniem Galois. Wtedy Γ jest bijekcją i $\Lambda = \Gamma^{-1}$.

Dowód.

$$\mathcal{L} \ni L' \xrightarrow{\Gamma} \text{Gal}(L/L') \xrightarrow{\Lambda} L^{\text{Gal}(L/L')} = L',$$

bo $L' \subseteq L$ jest Galois i używamy 8.3.

Czyli $\Lambda \circ \Gamma = \text{id}_{\mathcal{L}}$. Tak samo w drugą stronę:

$$\mathcal{G} \ni H \xrightarrow{\Lambda} L^H \subseteq K \xrightarrow{\Gamma} \text{Gal}(L/L^H) = H$$



Wniosek 8.9. $K \subseteq L$ jest skończone i Galois. Dla $H \leq \text{Gal}(L/K)$ mamy $H \triangleleft \text{Gal}(L/K) \iff K \subseteq L^H$ jest normalne.

Ponadto wtedy $\text{Gal}(L^H/K) \cong \text{Gal}(L/K)/H$

Przed dowodem ćwiczenie, które pojawi się na liście zadań:

Niech $K \subseteq L' \subseteq L \subseteq \hat{K}$ takie, że $K \subseteq L$ jest normalne (może być też skończone). Wtedy $K \subseteq L'$ jest normalne \iff dla każdej $f \in \text{Gal}(L/K)$ $f[L'] = L'$ [ćwiczenia].

Dowód. Weźmy sobie $f \in \text{Gal}(L/K)$ **RYSUNEK**

Struktura 2-sortowa:

$$(L, \text{Gal}(L/K), \star)$$

gdzie L daje strukturę ciała, $\text{Gal}(L/K)$ daje strukturę grupy, a \star jest działaniem $\text{Gal}(L/K)$ na L . Wtedy $f : L \xrightarrow{\cong} L$ indukuje izomorfizm:

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \text{Aut}(L) &\xrightarrow{\cong} \text{Aut}(L) \\ \widehat{f}(\phi) &= f \circ \phi \circ f^{-1}\end{aligned}$$

To znaczy $\widehat{f} = j_f \in \text{Aut}(\text{Aut}(L))$



Spis twierdzeń

1.1	Fakt	4
1.2	Uwaga	4
1.3	Uwaga	5
1.4	Uwaga	6
1.5	Uwaga	6
1.6	Twierdzenie	7
1.7	Wniosek	7
1.8	Fakt	7
2.1	Wniosek	9
2.2	Wniosek	10
2.3	Twierdzenie	10
3.1	Uwaga	12
3.2	Uwaga	12
3.3	Uwaga	12
3.4	Twierdzenie	13
3.5	Wniosek	13
3.6	Twierdzenie	14
4.1	Definicja	15
4.2	Uwaga	15
4.3	Uwaga	15
4.4	Definicja: <i>wielomian minimalny, stopień pierwiastka</i>	16
4.5	Uwaga: $I(a/K) = (f) \implies \deg(f) = [K(a) : K]$	17
4.6	Fakt: $\dim_K(M) = \dim_L(M) \cdot \dim_K(L)$	17
4.7	Wniosek: K_{alg} - podciałem	18
4.8	Definicja: <i>(relatywne) algebraiczne domknięcie</i>	18
5.1	Uwaga: <i>algebraiczne rozszerzenia ciał</i>	20
5.2	Uwaga: $(K_{\text{alg}}(L))_{\text{alg}}(L) = K_{\text{alg}}(L)$	20
5.3	Uwaga: $F_m \in \mathbb{Z}[X]$	20
5.4	Uwaga: <i>lemat Gaussa: F_m nierozkładalny w \mathbb{Q}</i>	21
5.5	Uwaga: <i>pierwiastek pierwotny a $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(b))$</i>	22
5.6	Lemat: <i>lemat Liouville'a o aproksymacji diofantycznej</i>	22
5.7	Definicja: <i>algebraiczne domknięcie</i>	23
5.8	Uwaga: <i>istnieje algebraiczne domknięcie</i>	23
5.9	Twierdzenie: <i>jedyność domknięcia algebraicznego</i>	24
5.10	Wniosek: $K \cong L \implies \hat{K} \cong \hat{L}$	24
5.11	Uwaga: <i>algebraiczne rozszerzenie $1-1 \rightarrow \hat{K}$</i>	25
6.1	Uwaga: <i>jednorodność \hat{K}</i>	26
6.2	Uwaga	26
6.3	Twierdzenie: <i>rozszerzenie jest normalne</i>	27
6.4	Twierdzenie: <i>skończone i normalne \iff ciało rozkładu wielomianu</i>	27
6.5	Uwaga	28
6.6	Uwaga: <i>nierozkładalny a rozdzielnicy</i>	28
6.7	Lemat	28
6.8	Twierdzenie: <i>Abela o elemencie pierwotnym</i>	29
6.9	Wniosek	30
7.1	Uwaga	31
7.2	Wniosek: <i>przekrój sep_L i rad_L</i>	31
7.3	Uwaga	31
7.4	Fakt	32
7.5	Uwaga	33
8.1	Fakt	35
8.2	Twierdzenie	36
8.3	Wniosek	36
8.4	Twierdzenie: <i>Artin</i>	36
8.5	Wniosek	37

8.6	Twierdzenie: <i>podstawowe twierdzenie teorii Galois</i>	37
8.9	Wniosek	37