Rozmaite cierpienia

Spis treści

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

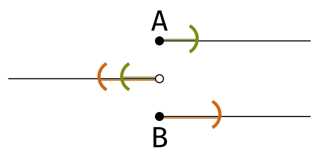
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową rozmaitością (n-rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

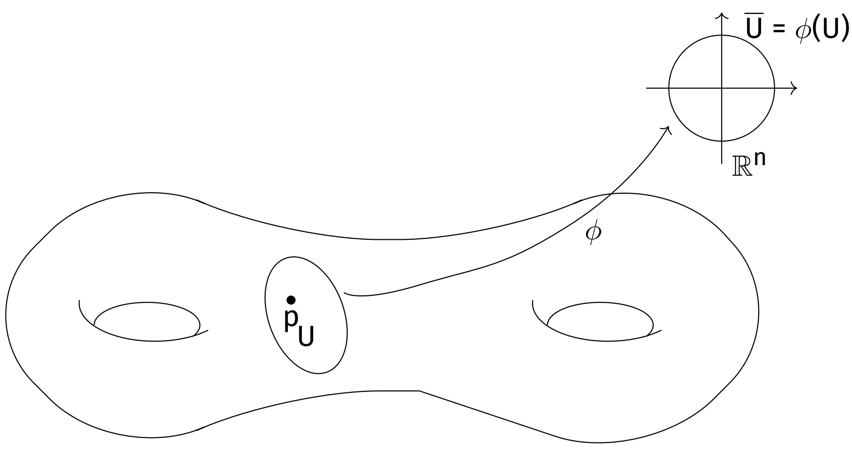
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z $\mathbb{R}^n$ przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego *zwartego* $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jego odpowiednik na M, czyli $K = \phi^{-1}(\overline{K}) \subseteq U$, jest *domknięty i zwarty* [ćwiczenia]. Jeśli zaś $\overline{K}$ jest zbiorem domknięty w $\overline{U}$, ale niezwartym, to nie zawsze K jest domknięty w M. Weźmy np. $\phi : U \to \overline{U} = \mathbb{R}^n$ i zbiór domknięty $\overline{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\overline{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że $\overline{K}$ jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii $\mathbb{R}^n$ nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots,$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n. Czyli na przykład S^2, sfera, ma naturalne włożenie w $\mathbb{R}^3$ pomimo lokalnej euklidesowości z $\mathbb{R}^2$.

Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona*, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z $\mathscr{X}$. Jeżeli M ma dwa pokrycia: $\mathscr{U}$ i $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{V}$ jest *pokryciem włożonym/rozdrobnieniem* $\mathscr{U}$. Dzięki przeliczalności bazy M, każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. ***Twierdzenie Brouwer'a*** *Dla* $m \neq n$ *otwarty podzbiór* $\mathbb{R}^n$ *nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem* $\mathbb{R}^m$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n, to nazywamy ją czasem *n-rozmaitością*.

Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna $\iff$ jest łukowo spójna. Składowe spójności M są równe składowym łukowej spójności M.
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

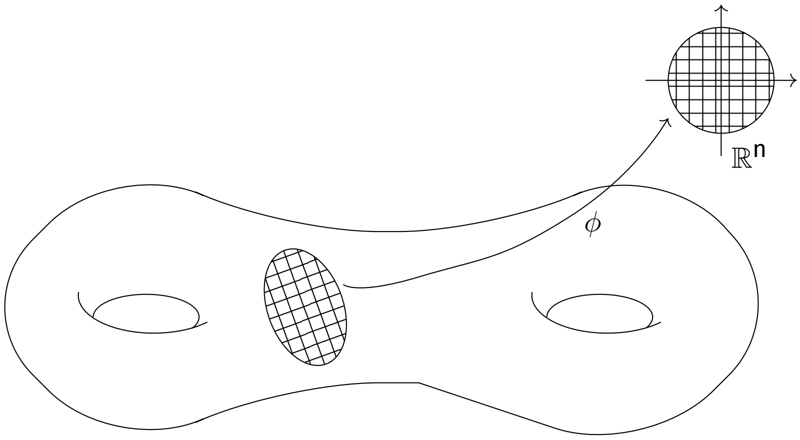
1.2. Mapy, współrzędne lokalne

Definicja 1.3. **Mapą** na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, zaś $\phi : U \to \overline{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**

Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to M jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy (U, ϕ) takiej, że $p \in U$ i $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ mówimy, że jest *mapą wokół p*.

Mapy nazywa się też czasem *lokalnymi współrzędnymi* na M lub *lokalną parametryzacją* M.



Przykłady:

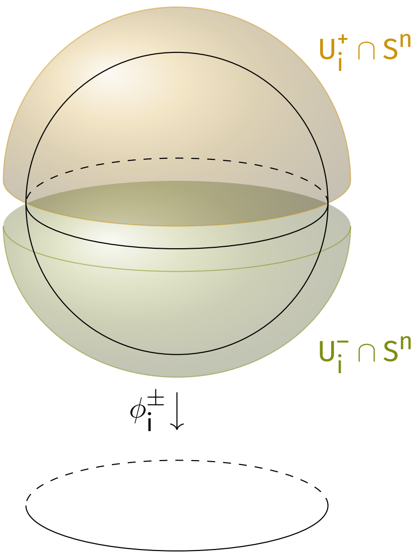
1. Każdy otwarty podzbiór n-rozmaitości topologicznej jest n-rozmaitością [ćwiczenia].

2. **Wykresy ciągłych funkcji**: Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą. Wykresem f nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \ : \ x \in U, \ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

   Oznaczmy przez $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ projekcję na $\mathbb{R}^n$, tzn. $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy funkcja $\phi : \Gamma(f) \to U$ będąca obcięciem π_1 do $\Gamma(f)$. Ponieważ ϕ jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \Gamma(f)$ dana przez $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$, jest ciągłą funkcją odwrotną do ϕ. W takim razie, ϕ jest homeomorfizmem między U a $\Gamma(f)$ i wykres funkcji ciągłych jest lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaitością topologiczną.

3. Sfery S^n są n-rozmaitościami, które wkładają się w $\mathbb{R}^{n+1}$ ($S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\}$).



   Rozważmy rodzinę par $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) \ : \ i = 1, ..., n+1\}$ na S^n zdefiniowanych jako:

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$

Oznaczenie $\widehat{x_i}$ oznacza "wyrzucenie" danej współrzędnej.

$$\phi_i^{\pm}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Zbiory $U_i^{\pm}$ pokrywają całe S^n, gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje $\phi_i^{\pm}$ są ciągłe jako obcięcia rzutów $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\mathbb{R}^n$. Obrazem zbioru $U_i^{\pm}$ przez $\phi_i^{\pm}$ jest zbiór

$$\overline{U_i^{\pm}} = \phi_i^{\pm}(U_i^{\pm}) = \{(x_1, \dots, x_n) \ : \ \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w $\mathbb{R}^n$.

Odwzorowania $\phi_i^{\pm}$ są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^{\pm})^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie $\phi_i^{\pm}$ są homeomorfizmami między otwartymi podzbiorami S^n a otwartymi podzbiorami R^n.

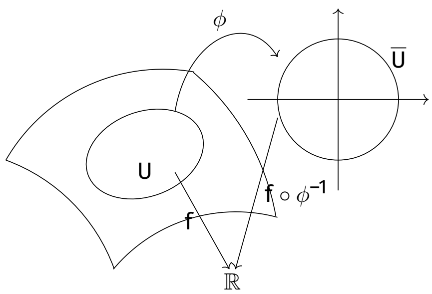
Pokazaliśmy lokalną euklidesowość S^n, natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie S^n dziedziczy z $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Produkt kartezjański dwóch (lub k) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].
5. n-torus jest przestrzenią produktową $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ i n-rozmaitością topologiczną. $\mathbb{T}^2$ nazywamy po prostu torusem.

1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

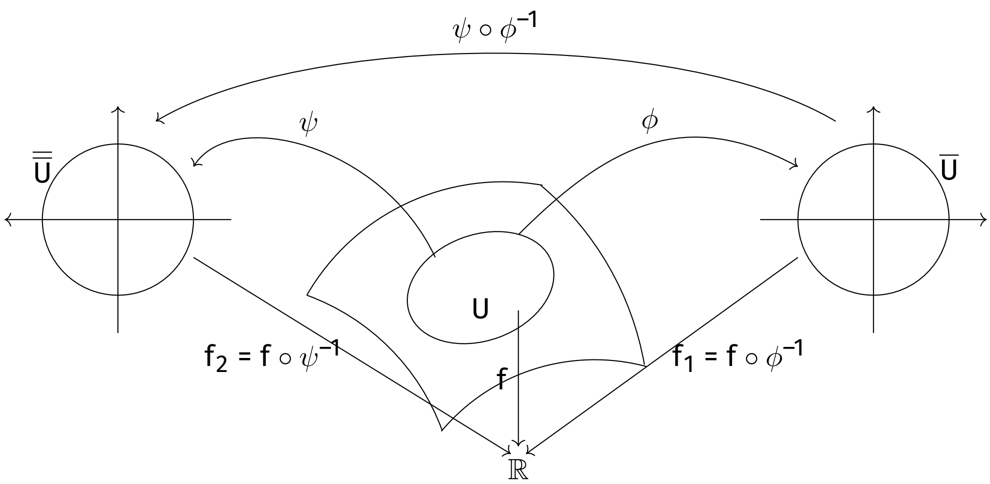
Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać je różniczkowalność za pomocą map (U, ϕ) na M.

Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ **wyrażona w mapie** (U, ϕ) to złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$.



Definicja 1.4. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy (U, ϕ) f może gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy (U, ψ) to może się okazać, że $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ nie jest gładka:

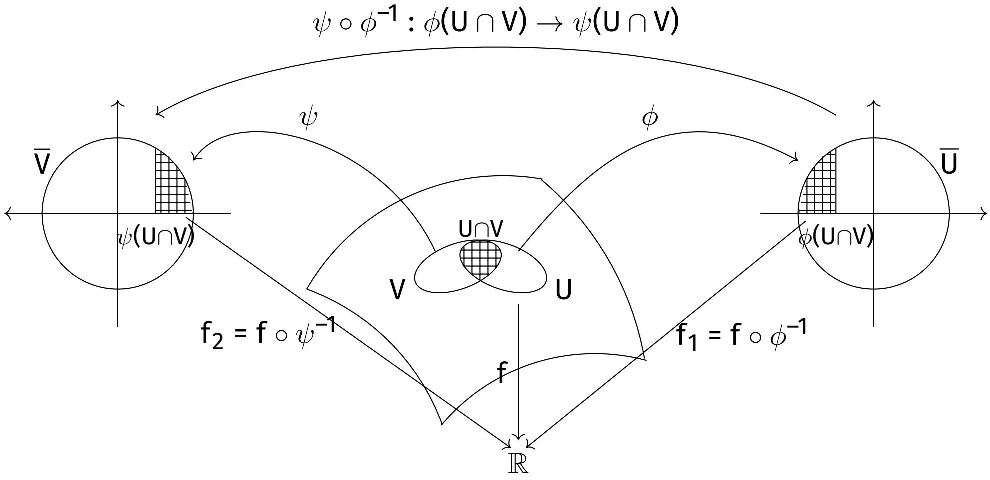


Dlatego chcemy móc założyć, że $\phi \circ \psi^{-1}$ jest przekształceniem gładkim.

Definicja 1.5. Mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania $\phi\psi^{-1}$ nazywamy *odwzorowaniami przejścia* z jednej mapy do drugiej. Jeśli $\phi\psi^{-1}$ i $\psi\phi^{-1}$ są gładkie, to są one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** pomiędzy otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy $U \cap V \neq \emptyset$, rysunek wygląda:



Mapy (U, ϕ) i (V, ψ) nazywamy zgodnymi, jeśli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejścia

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

  oraz

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

  są gładkie ($\iff$ są dyfeomorfizmami podzbiorów $\phi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$).

Definicja 1.6. **Gładkim atlasem** $\mathscr{A}$ na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ takich, że:

- $\{U_\alpha\}$ pokrywają całe M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykłady:

1. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ na sferze S^n jest atlasem gładkim na S^n. Dla przykładu zbadamy zgodność map (U_i^+, ϕ_i^+) i (U_j^+, ϕ_j^+) dla $i < j$.

   Popatrzmy jak wyglądają interesujące nas zbiory:

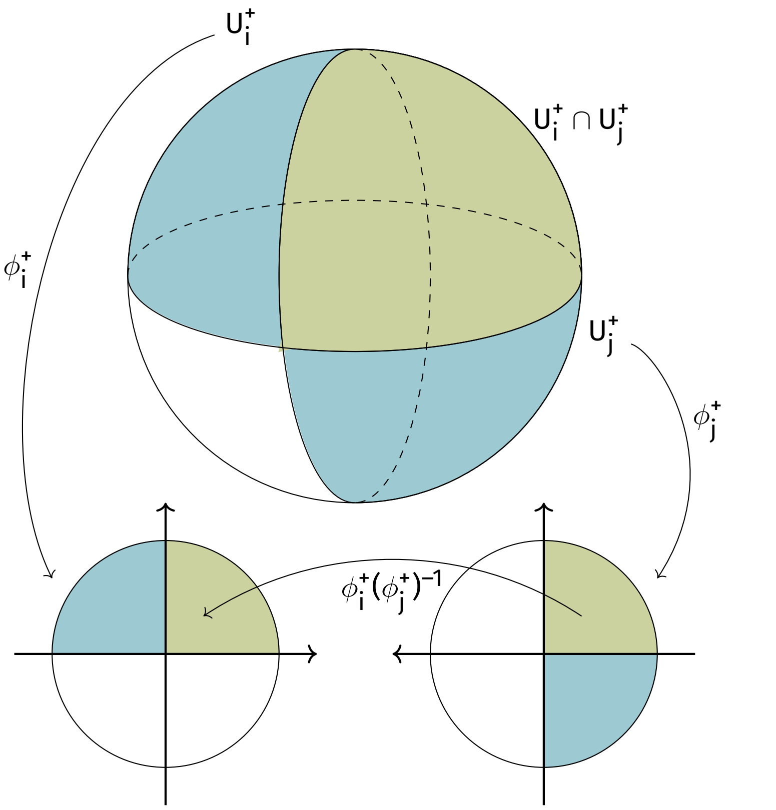
$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0, x_j > 0\}$$

$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

   bo usuwamy i-tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i > 0\}$$

   bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od i, więc jej położenie nie zmienia się.



$$
\begin{array}{ccc}
(x_1, ..., x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ..., x_n) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \big\downarrow \phi_i^+ \\
\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i > 0\} & & (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ..., x_n) \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}
\end{array}
$$

Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ..., x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

Definicja 1.7. **Rozmaitością gładką** nazywamy parę $(M, \mathscr{A})$, gdzie M jest rozmaitością topologiczną, zaś $\mathscr{A}$ jest pewnym atlasem gładkim na M.

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaitości topologicznej M mogą zadawać tę samą rozmaitość gładką. Na przykład dla $M = \mathbb{R}^n$ istnieje atlas zawierający jedną mapę $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ oraz atlas $\{(B_x(r), id_{B_x(r)}) \ : \ x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, który jest tak naprawdę "rozdrobnieniem" pierwszego atlasu.

Definicja 1.8. Niech $\mathscr{A}$ będzie gładkim atlasem na M.

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z $\mathscr{A}$, jeśli jest zgodna z każdą mapą $(V, \psi) \in \mathscr{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ na M są zgodne, jeśli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z $\mathscr{A}_2$.

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotnią i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaitości gładkiej na topologicznej rozmaitości M. Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

Definicja 1.9. $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości M, jeśli każda mapa zgodna z $\mathscr{A}$ należy do $\mathscr{A}$.

Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z $\mathscr{A}$ [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę $(M, \mathscr{A})$, gdzie M jest rozmaitością topologiczną, a $\mathscr{A}$ jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu $\mathscr{A}$ na M, jeśli dla każdej mapy $(U, \phi) \in \mathscr{A}$ $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

Fakt 1.10.

- *Jeśli* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest gładka względem* $\mathscr{A}$*, zaś* (U, ϕ) *jest mapą zgodną z* $\mathscr{A}$*, to* $f \circ \phi^{-1}$ *jest gładka.*
- *Jeśli* $\mathscr{A}_1$ *i* $\mathscr{A}_2$ *są zgodnymi atlasami, to* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest gładka względem* $\mathscr{A} \iff$ f *jest gładka względem* $\mathscr{A}_2 \iff$ f *jest gładka względem atlasu maksymalnego* $\mathscr{A}_{max}$ *zawierającego* $\mathscr{A}_1$ *i* $\mathscr{A}$*.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

Mówimy, że mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ są C^k*-zgodne* jeśli $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (posiadają pochodne cząstkowe rzędów $\leq k$). C^k-atlas to z kolei rodzina C^k-zgodnych map, która określa strukturę C^k-rozmaitości na M. Struktura C^k-rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy C^m dla $m > k$.

C^0 rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a C^∞-rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

Dychotomia C^0 i C^k dla $k > 0$ aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu C^1-rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. Zatem, każda C^1-rozmaitość posiada C^1-zgodną strukturę C^∞-rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak C^0-rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne [C^ω]. Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w $\mathbb{C}^n$ zamiast $\mathbb{R}^n$.
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

1.5. Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 1.11. *Niech* X *będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i* $\{U_\alpha\}$ *będzie kolekcją podzbiorów w* X *taką, że dla każdego* α *istnieje* $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ *różniczkowalne takie, że*

1. *dla każdego* α $\phi_\alpha(u_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest otwarty*
2. *dla dowolnych* α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *oraz* $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *są otwarte w* $\mathbb{R}^n$*.*

3. *jeśli* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *to* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne* $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-a}$ *też jest gładkie)*
4. *przeliczalnie wiele spośród* U_α *pokrywa* X
5. *dla każdego* $p, q \in X$, *jeśli* $p \neq q$, *to istnieją* α, β *oraz otwarte* $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$ *i* $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$ *takie, że* $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p)$, $q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ *oraz* $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ *(oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).*

Wówczas na X *istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory* U_α *są otwarte. Ponadto rodzina* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ *tworzy wtedy gładki atlas na* X.

Dowód. A dokładniej szkic dowodu.

Określimy topologię na X przy pomocy przeciwobrazów przez ϕ_α otwartych podzbiorów $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5. ☕

Przykłady:

1. $\mathscr{L}$ jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą możnaby od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

oraz funkcje ϕ_h, ϕ_v:

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \overset{\phi_h}{\mapsto} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \overset{\phi_v}{\mapsto} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to $\mathbb{R}^2$, czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całego X, to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepionowe i niepoziome}\} = \{y = ax+b \ : \ a \neq 0\} = \{x = cy+d \ : \ c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \neq 0\}$$
$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \ : \ c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

Weźmy prostą $L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v$.

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

Zatem $\phi_h \phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$ jest gładkie (podobnie $\phi_v \phi_h^{-1}$).

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią $\mathscr{L}$ jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania $\mathscr{L}$ nie wystarcza jedna mapa.

O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subseteq M$ z obrazem przez mapę, czyli $\overline{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych $(x_1, \ldots, x_n)$ z $\overline{U}$ przez ϕ^{-1} na $U \subseteq M$.

- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że $p = (0, ..., 0)$ w mapie, czyli możemy założyć, że (U, ϕ) jest mapą o początku w p.
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół p ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subseteq M$ niezawierającym p.

1.6. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$$

a wnętrzem:

$$\mathrm{int}(H^n) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\}.$$

Dla $U \subseteq H^n$ oznaczymy $\partial U = U \cap \partial H$ oraz $\mathrm{int}(U) = U \cap \mathrm{int}(H^n)$, czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy H^n oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla $U \subseteq H^n$ otwartego i $f : U \to \mathbb{R}^m$ mówimy, że f jest **gładka**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\widehat{f} : \widehat{U} \to \mathbb{R}^m$, $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego, $U \subseteq \widehat{U}$. *Pochodne cząstkowe funkcji* f *są dobrze określone na* $\mathrm{int}(U)$, *a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na* ∂U (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia $\widehat{f}$). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia $\widehat{f}$ istnieje $\iff$ wszystkie pochodne cząstkowe f w $\mathrm{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U.

Definicja 1.12. M jest gładką rozmaitością z brzegiem, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $U_\alpha \subseteq M$ i $\phi_\alpha : U_\alpha \to H^n$ i $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w H^n, gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn. $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w H^n).

Fakt 1.13. *Jeśli w pewnej mapie* (U_α, ϕ_α), $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, *to w każdej innej mapie* (U_β, ϕ_β) *zawierającej* p $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$.

Dowód. Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jakobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczności obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji. ☕

Definicja 1.14. **Brzegiem** n-rozmaitości M z brzegiem nazywamy zbiór

$$\partial M = \{p \in M \ : \ \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial H^n$$

wnętrze M nazywa się

$$\mathrm{int}(M) = \{p \in M \ : \ (\exists\ (U_\alpha, \phi_\alpha)\ \phi_\alpha(p) \in \mathrm{int}(H^n))\}$$

Fakt 1.15. *Wnętrze* $\mathrm{int}(M)$ n-*rozmaitości gładkiej* M *jest* n-*rozmaitością bez brzegu.*

Dowód. Jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\mathrm{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \mathrm{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \restriction U'_\alpha$$

Odwzorowania przejścia $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$, więc są gładkie. ☕

Przykłady:

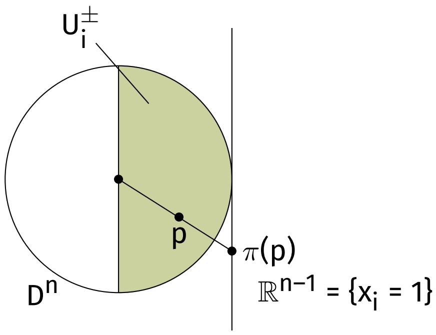
1. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ jest n-rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

   Dowód. Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

   Mapa (U_0, ϕ_0):

   $$U_0 = \{x : |x| < 1\}, \ \phi_0 : U_0 \to H^n, \ \phi_0(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n + 2)$$

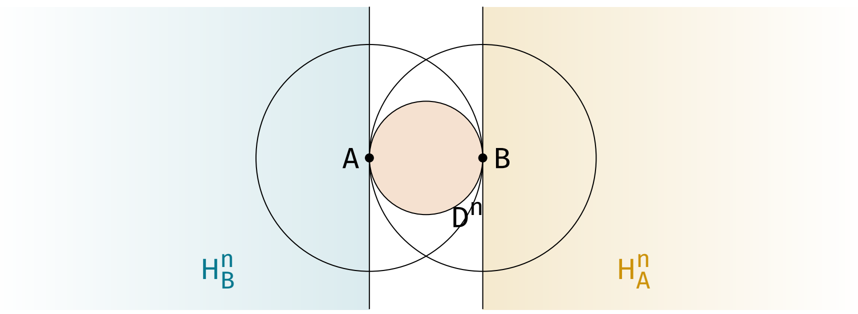
   Mapy $(U_i^\pm, \phi_i^\pm)$



   $$U_i^+ = \{x \in D^n : x_i > 0\}$$
   $$U_i^- = \{x \in D^n : x_i < 0\}$$
   $$\phi_i^\pm(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum x_i^2}_{1-r^2}\right)$$
   $$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$

   ☕

2. Inny atlas na D^n, składający się tylko z dwóch map:

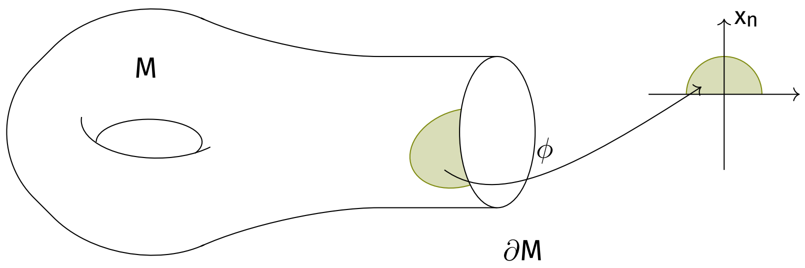


   Niech A i B będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku D^n. Rozważmy zbiory
   $$U_A = D^n \setminus \{A\}$$
   $$U_B = D^n \setminus \{B\}$$
   oraz odwzorowania $\phi_A : U_A \to H_A^n$ i $\phi_B : U_B \to H_B^n$ będące inwersjami dysku względem sfer S^n o środkach w A i B oraz promieniu 2.

2. Rozkład jedności

Rozważmy rozmaitość z brzegiem M. Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje $f : M \to \mathbb{R}$ takie, że $f(p) = 0$ gdy $p \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla dowolnego $p \in \mathrm{Int}(M)$.

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq M$ znaleźć funkcję, która dla $p \in D$ jest równa zero, a na $M \setminus D$ ma wartości ściśle dodatnie.



Lokalnie, na zbiorze mapowym (U_α, ϕ) możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, ..., x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z ∂M jest zawsze zerowa (gdyż są one w ∂H^n). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przełożyć lokalne f_α na funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

Definicja 2.1. Pokrycie $\{A_\alpha\}$ podzbiorami przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α.

Definicja 2.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia** $\{U_\alpha\}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α.

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$.

$\{W_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\} \implies$
$\implies \{W_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$

Definicja 2.3. Przestrzeń topologiczna X jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego punktu otoczeń prezwartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

Dowód: patrz Lee strona 36-37

Uwaga 2.4. *Rozdrobnienie wynikające z parazwartości rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z prezwartych zbiorów mapowych.*

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie pokryciem M. Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych. Wystarczy obraz każdego U_α w $\mathbb{R}^n$ pokryć zbiorami prezwartymi i wrócić z nimi na M. Z faktu, że rozmaitości są parazwarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które z przechodności $\prec$ jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Dodatkowo, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ, które były mapowe i prezwarte, więc i V_β taki jest. ☕

Uwaga 2.5. *Niech* $\{A_\alpha\}$ *będzie lokalnie skończoną rodziną parazwartych podzbiorów rozmaitości* M*. Wtedy dla każdego* A_{α_0} *podrodzina*

$$\{A_\alpha \;:\; A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha \;:\; A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg A_{α_i} oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w pewnym $p \in cl(A_{\alpha_0})$.

Ponieważ p jest punktem skupienia x_i, to dowolne otwarte otoczenie U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele elementów x_i. W takim razie U_p przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami A_α. Jest to sprzeczne z lokalną skończonościa $\{A_\alpha\}$. ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i prezwartość zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$ wynikającego z parazwartości rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

Uwaga 2.6. *Niech* $\{V_\beta\}$ *będzie lokalnie skończonym rozdrobnieniem pokrycia* M *składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego* β *istnieje zwarty zbiór* $D_\beta \subseteq V_\beta$ *taki, że*

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobnienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa M*.*

Dowód. Ponieważ V_β są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podzbiorze w $\mathbb{R}^n$ poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem $\overline{V_\beta} = \phi_\beta(V_\beta)$ dla mapy (V_β, ϕ_β). ☕

3. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, ..., f_n)$ i dla $t \in (a, b)$ pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ ... \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, ..., f_m)$ i $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

  Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

3.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

J.M. Lee definiuje przestrzeń styczną przy pomocy derywacji oraz przedstawia możliwość użycia m.in. kiełków funkcji gładkich

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a, b) \to M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest *zbazowana w p* . Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy C_pM.

Definicja 3.1. Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p. Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 3.2. *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne w mapie* (U, ϕ) *wokół* p*, to są też styczne w dowolnej innej mapie* (W, ψ) *wokół* p *(zgodnej z* (U, ϕ)*).*

Dowód.

$$\begin{aligned}(\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

☕

Definicja 3.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p.

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na C_pM, bo jest zwrotnia, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 3.4. **Przestrzenią styczną** do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_pM := C_pM/\text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_pM$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni T_pM nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p.

3.2. Struktura wektorowa przestrzeni T_pM

Dla mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_{\phi,p} : \mathbb{R}^n \to T_pM \qquad \lambda_{\phi,p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji T_pM (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

Lemat 3.5. *$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^* = \mathrm{id}_{T_pM}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi,p}$ są one wzajemnie jednoznacze i do siebie odwrotne.*

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) =$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi(p) + tv) = v \qquad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_pM$

$$\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi,p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi\circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi\circ c)(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$ i w takim razie $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$ $\checkmark$. ☕

Fakt 3.6. *Na przestrzeni stycznej T_pM istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi,p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.*

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_pM$: $X + Y := \lambda_{\phi,p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w $\mathbb{R}^n$)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi,p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w $\mathbb{R}^n$).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z $\mathbb{R}^n$ przez $\lambda_{\phi,p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z $\mathbb{R}^n$ na T_pM struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi,p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) =$$
$$= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[\frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi(p) + tv)] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v)$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.

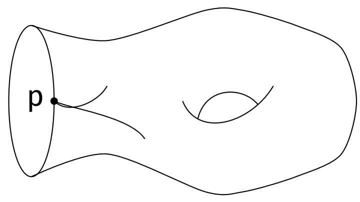
☕

O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla T_pM stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p. W tej mapie działania na wektorach z T_pM sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w $\mathbb{R}^n$.

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \to \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \to M$ oraz $c : (a, t_0[\to M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy C_pM. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na T_pM określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



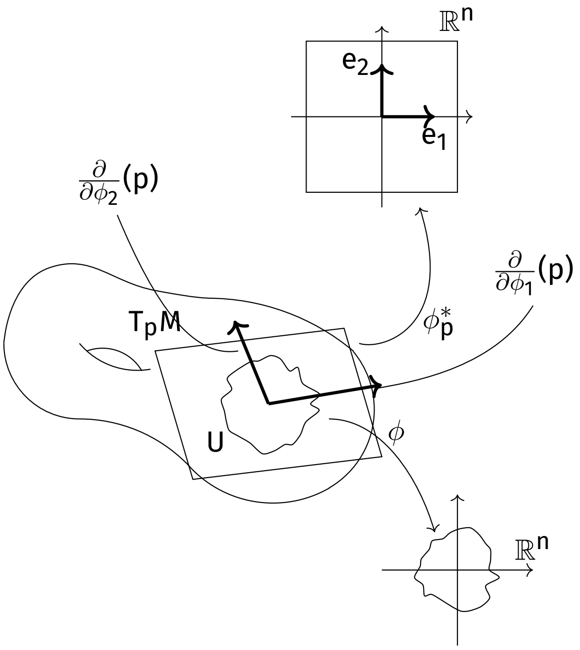
Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU), zaś dowolny wektor z $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ wersorów $e_1, ..., e_n$ oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę T_pM i dowolny wektor z T_pM ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.



3.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \to N$ i $p \in M, f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_pM$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_qN$.

Lemat 3.7. *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne, to* $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_qN$ *też są styczne*

Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 3.8. Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 3.7.

Lemat 3.9. $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *jest odwzorowaniem liniowym.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\psi^*_{f(p)}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 3.6).

$$\begin{aligned}\psi_{f(p)} \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi^*_{f(p)} \circ df_p([c_v, 0]) = \psi^*_{f(p)}([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v]\end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \to N$ odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół f(p) jako

$$\psi^*_{f(p)} df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w T_pM i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)}N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial (\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial (\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : \underset{=T_pM}{T_pU} \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ jest wówna odwzorowaniu "mapowemu" $\phi^*_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$.

Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_pM$, wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$$

Mapę $(id_{\mathbb{R}^n})^*_{\phi(p)} : T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $id_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi^*_p([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania.

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \to M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \to T_{c(t_0)}M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$.
- Rozważmy gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym na T_pM.

Definicja 3.10. Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_pM$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X:

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

  Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$

- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_pM$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

  Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$

Przykłady:

Stąd oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_pM$ i $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Spis twierdzeń