## ZADANIE 1.

*Uzasadnij, że jeśli w definicji rozmaitości topologicznej warunek lokalnej euklidesowości zastąpimy którymkolwiek z następujących warunków:*

*(a) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą w* $\mathbb{R}^n$,

*(b) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z całą przestrzenią* $\mathbb{R}^n$

*to otrzymamy definicję równoważną.*

To, że (a) $\iff$ (b) wynika z tego, że otwarta kula jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Pokażemy więc, że

*Lokalnie euklidesowa* $\iff$ *każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą.*

$\implies$

Ustalmy dowolne $x \in M$. Niech $x \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem $x$ w $M$ takim, że $U \cong \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ z definicji podanej na wykładzie. Nazwijmy ten homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U}$. Wiemy, że istnieje $r > 0$ takie, że $B_r(\phi(x)) \subseteq \overline{U}$. Co więcej, $\phi^{-1}[B_r(\phi(x))]$ jest otwartym podzbiorem $M$, bo $\phi$ to homeomorfizm i przeciwobraz zbioru otwartego jest przezeń otwarty. Czyli $M \supseteq \phi^{-1}[B_r(\phi(x))] \ni x$ jest otwartym podzbiorem $M$ zawierającym $x$ i homeomorficznym z otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$.

$\impliedby$

Otwarta kula jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, więc mamy homeomorfizm między pewnym otwartym otoczeniem $x \in U \subseteq M$ a otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

## ZADANIE 2.

*Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości topologicznej jest rozmaitością topologiczną.*

Niech $M$ będzie rozmaitością topologiczną, a $M' \subseteq M$ jej otwartym podzbiorem.

1. Hausdorffowość:

$x, y \in M' \implies x, y \in M$, czyli istnieją $U, V \subseteq M$ otwarte podzbiory $M$ takie, że $x \in U, y \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Ponieważ $M'$ jest otwarty, to istnieją otwarte $x \in U'$ i $y \in V'$ zawarte w $M'$. Skończony przekrój zbiorów otwartych, więc $x \in U' \cap U$ i $y \in V' \cap V$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w $M'$.

2. Przeliczalna baza:

Niech $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie przeliczalną bazą $M$. Wtedy $\{U_i \cap M'\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów otwartych w $M'$ (przecięcie dwóch otwartych jest otwarte). Ponieważ otwarty zbiór w $M'$ jest również otwarty w $M$, to mogliśmy go wysumować za pomocą $U_i$, czyli w szczególności możemy go wysumować z $U_i \cap M'$, bo sam jest i tak zawarty z $M'$.

3. Lokalna Hausdorffowość:

Weźmy dowolny $x \in M' \subseteq M$. Ponieważ $M$ było rozmaitością topologiczną, to dla pewnego otwartego otoczenia $x \in U \subseteq M$ mieliśmy homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Znowu, $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym, a więc $\phi \restriction (U \cap M')$ jest homeomorfizmem z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ (bo $U \cap M'$ przechodzi na coś otwartego).

## ZADANIE 3.

*Uzasadnij, że jeśli rozmaitość* $M$ *jest spójna, to jest też drogowo spójna, tzn. każde dwa punkty* $p, q \in M$ *można połączyć ciągłą krzywą* $\gamma : [0, 1] \to M$ *(taką, że* $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$*). Wskazówka: dla ustalonego punktu* $p$ *rozważ zbiór tych punktów* $q$*, które można połączyć z* $p$ *krzywą ciągłą.*

Spójna $\implies$ jedyne zbiory otwarto-domknięte to $\emptyset$ i M.

Ustalmy dowolne $p \in M$. Niech $\Sigma_p$ będzie zbiorem tych punktów $q \in M$, które można połączyć z p krzywą ciągłą.

1. $\Sigma_p$ jest zbiorem otwartym:

Niech $q \in \Sigma_p$ i $\gamma$ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Pokażemy, że możemy na nim opisać zbiór otwarty. Niech $q \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem q, a $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie homeomorfizmem wynikającej z lokalnej euklidesowości M. Weźmy teraz dowolny $y \in U$ i pokażemy, że wówczas istnieje krzywa z p do y.

Wiemy, że $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią łukowo spójną, niech więc $\mu : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą ciągłą taką, że $\mu(0) = \phi(q)$ i $\mu(1) = \phi(y)$. Rozważmy teraz krzywą

$$\gamma' : [0, 1] \to M$$

$$\gamma'(a) = \begin{cases} \gamma(2a) & a \leq \frac{1}{2} \\ \phi^{-1}[\mu(2a - 1)] \end{cases}$$

Mamy $\gamma'(0) = p$ i $\gamma'(1) = \phi^{-1}[\mu(1)] = \phi^{-1}[\phi(y)] = y$, czyli $y \in \Sigma_p$

2. $\Sigma_p$ jest zbiorem domkniętym:

Równoważnie, $M \setminus \Sigma_p$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $M \setminus \Sigma_p$ nie byłoby otwarte, to dla pewnego $x \notin \Sigma_p$ mielibyśmy otoczenie z $y \in \Sigma_p$ i argument podobny jak wyżej: punkty są w jednym otoczeniu homeomorficznym z $\mathbb{R}^n$, więc możemy skonstruować krzywą z p przez y do x, więc $x \in \Sigma_p$ i mamy sprzeczność.

## ZADANIE 4.

*Udowodnij, że jeśli* $(U, \phi)$ *jest mapą na rozmaitości* M*, zaś* K *jest zwartym podzbiorem* $\phi(U)$*, to zbiór* $\phi^{-1}(K)$ *jest domknięty i zwarty w* M*. Pokaż też, że jeśli* K *jest domknięty w* $\phi(U)$*, to* $\phi^{-1}(K)$ *nie musi być domknięty w* M*.*

Jeśli K jest zwartym podzbiorem $\phi(U)$, to z każdego pokrycia K możemy wybrać podpokrycie skończone. Popatrzmy na zbiór $\phi^{-1}(K)$. Możemy go pokryć zbiorami otwartymi $\{V_i\}_{i \in I}$. Czyli $\phi(V_i)$ pokrywają K, a więc możemy wybrać ciąg $i_1, \ldots, i_n \subseteq I$ taki, że $K = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \phi(V_k)$. W takim razie,

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} V_i$$

pokrywają $\phi^{-1}(K)$. Czyli $\phi^{-1}(K)$ jest zwarty.

To drugie to jakiś kontrprzykład, ale mi się nie chce.

## ZADANIE 5.

*Pokaż, że jeśli przestrzeń topologiczna ma przeliczalną bazę, to z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać przeliczalne podpokrycie.*

## ZADANIE 6.

*Korzystając z zadań 4 i 5 uzasadnij, że każda rozmaitość jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia w M są homeomorficzne z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$.*

Niech $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ będzie rodziną map z M. Na mocy zadania 5 możemy wybrać ciąg $i_1, \ldots, i_n, \ldots \subseteq I$ taki, że

$$M = \bigcup_{1 \le k} U_k.$$

Popatrzmy teraz, co się dzieje w środku jednej takiej mapy. To jest ustalmy dowolne i z wcześniej wybranego ciągu $i_1, \ldots, i_n, \ldots$.

Niech $\overline{U_i} = \phi(U_i)$. Jest to zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$, czyli na dowolnym $x \in \overline{U_i}$ możemy opisać kulę $B_r(x)$ o promieniu $r > 0$. Teraz, jeśli weźmiemy $B_{r/2}(x)$, to możemy taką kulę domknąć nie wychodząc z $\overline{U_i}$ (chociażby dlatego, że to domknięcie dalej będzie się zawierało w $B_r(x)$). Teraz zbiór $F = cl(B_{r/2}(x))$ jest zwarty w $\mathbb{R}^n$, czyli na mocy zadania 4. mamy, że $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty w M.

Mamy więc, że w każdej mapie $(U_i, \phi_i)$ możemy pokryć zbiorami otwartymi homeomorficznymi z kulami w $\mathbb{R}^n$ i o domknięciach homeomorficznych z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$. Wystarczy teraz dla każdego $(U_i, \phi_i)$ wybrać przeliczalnie wiele takich zbiorów otwartych, co możemy zrobić z ośrodkowości $\mathbb{R}^n$.

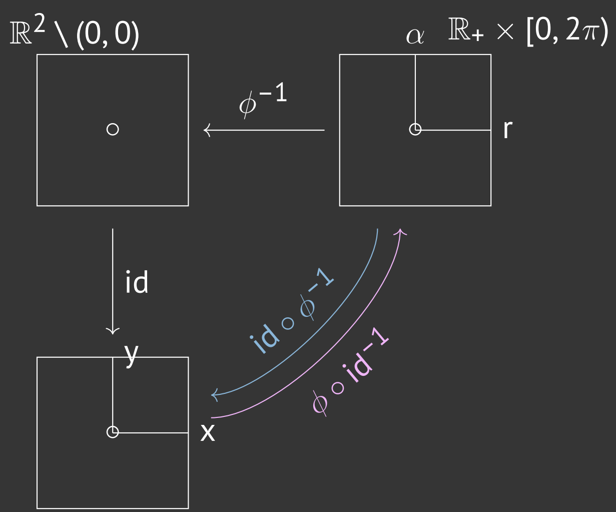
## ZADANIE 7.

*Uzasadnij, że lokalnie wokół każdego punktu $(x, y) \neq (0, 0)$ współrzędne biegunowe na $\mathbb{R}^2$ są zgodne ze współrzędnymi kartezjańskimi.*

Po pierwsze, co rozumiemy przez współrzędne? To są odwzorowania w $\mathbb{R}^2$, parametryzacje naszej rozmaitości. W tym przypadku kartezjańskie współrzędne to będzie dla nas tak naprawdę funkcja id. Popatrzymy też na $\phi$, czyli przejście ze współrzędnych biegunowych do współrzędnych kartezjańskich zadane wzorem:

$$\phi(\alpha, r) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Aby obie te współrzędne były zgodne, potrzebujemy, żeby kolorowe strzałki były funkcjami gładkimi (bo jest to odpowiedni $id \circ \phi^{-1}$ i $\phi \circ id^{-1}$).




Ciągłość funkcji $\phi \circ id^{-1}$ jest jasna ze wzoru na $\phi$. Wystarczy teraz pokazać, że $\phi^{-1}$ jest gładkie. Wiemy, że jeśli Jakobian funkcji nie zeruje się w pewnym punkcie, to na jego otoczeniu funkcja jest odwracalna i ta odwrotność też będzie gładka, bo $\phi_1$ takie było.

$$D_\phi(\alpha, r) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r > 0.$$

Z zadania tego możemy wyciągnąć wniosek, że mapami możemy zadać więcej niż jedną strukturę na rozmaitości.

## ZADANIE 8.

*Pokaż, że współrzędne geograficzne na sferze $S^2$ (określone na dopełnieniu biegunów i jednego z południków) są zgodne ze standardową strukturą na $S^2$. Wskazówka: skorzystaj z parametryzacji równania sfery z użyciem współrzędnych geograficznych.*

Czy współrzędne geograficzne to to samo co współrzędne sferyczne?

To zadanie wygląda syfnie jakoś, idę dalej

## ZADANIE 9.

*Uzasadnić, że zgodność atlasów jest relacją symetryczną i przechodnią.*

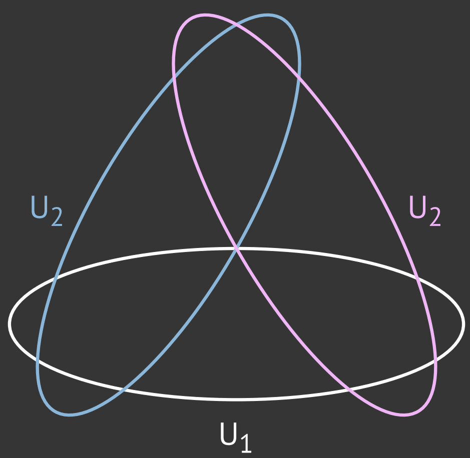
Niech $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ będą atlasami na rozmaitości M.

**Symetryczność:**

Pokazanie symetryczności relacji zgodności atlasów sprowadza się do wzięcia dwóch map: $(U_1, \phi_1) \in \mathscr{A}_1$ i $(U_2, \phi_2) \in \mathscr{A}_2$ i stwierdzeniu, że jeśli $(U_1, \phi_1)$ jest zgodna z $(U_2, \phi_2)$ (czyli po porównaniu wszystkich $\mathscr{A}_1$ zgodny z $\mathscr{A}_2$), to $\phi_1\phi_2^{-1}$ oraz $\phi_2\phi_1^{-1}$ są gładkie. No ale to samo, jeśli przestawimy indeksy, czyli $(U_2, \phi_2)$ jest zgodne z $(U_1, \phi_1)$ ($\mathscr{A}_2$ jest zgodny z $\mathscr{A}_1$).

**Przechodniość:**

Tutaj kusiłoby wziąć dowolne trzy mapy: $(U_1, \phi_1)$, $(U_2, \phi_2)$ i $(U_3, \phi_3)$ odpowiednio z $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ i powiedzieć, że śmiga, ale w taki sposób ignorujemy dziedziny poszczególnych $\phi_i$. To znaczy, może zajść coś takiego:




I wtedy dziedziny np $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_1\phi_3^{-1}$ są rozłączne.

## ZADANIE 10.

*Uzasadnij, że każdy atlas $\mathscr{A}$ na rozmaitości M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym (złożonym ze wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$).*

Z poprzedniego zadania wiemy, że relacja zgodności atlasów $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze wszystkich atlasów danej rozmaitości i klasami równoważności są wszystkie atlasy zgodne z reprezentantem. Chcę pokazać, że dla każdej klasy istnieje atlas, który zawiera wszystkie pozostałe.

Niech $\mathscr{A}$ będzie atlasem na M i popatrzmy na $[\mathscr{A}] = \Sigma$, czyli wszystkie atlasy z nim zgodne. Postuluję, że zbiór

$$A = \bigcup_{b \in \Sigma} b$$

jest atlasem maksymalnym z $\Sigma$ zawierającym $\mathscr{A}$.

To, że $\mathscr{A} \subseteq A$ jest oczywiste: $\mathscr{A}$ pojawia się jako element sumy którą jest A. To, że A jest atlasem też jest jasne: każdy atlas z sumy pokrywa nam całe M, a ponieważ wszystkie atlasy z $\Sigma$ są zgodne, to mamy, że jeśli wszystkie wsadzimy w jeden worek, to też dostaniemy atlas złożony z map zgodnych.

A jest jedynym atlasem maksymalnym, bo wyjęcie z niego jakiejkolwiek mapy (czyli wyjęcie atlasów, które ją zawierają), będzie równoznaczne z niezawieraniem przez A wszystkich zgodnych map.

## ZADANIE 11.

*Uzasadnij, że produkt $M \times N$ rozmaitości topologicznych jest rozmaitością topologiczną. Zakładając, że $M$ i $N$ są rozmaitościami gładkimi, opisz naturalny atlas definiujący strukturę gładką na produkcie (i sprawdź, że mapy są gładko zgodne).*

1. Hausdorffowość

Trywialne, bo jeśli mam dwa punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_i \in M, y_i \in N$, to mam jakieś zbiory otwarte $x_i \in U_i, y_i \in V_i$ takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Mam, że $U_i \times V_i$ jest zbiorem otwartym i

$$(x_i, y_i) \in U_i \times V_i$$

$$U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = \emptyset.$$

2. Ma przeliczalną bazę

Odmawiam. Trywialne.

3. Lokalna euklidesowość

Weźmy punkcik $(x, y) \in M \times N$. Wiem, że $x \in M$ ma otoczenie $x \in U$ takie, że $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem. Tak samo dla $y \in N$ jest $\psi : V \to \overline{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Rozważmy teraz odwzorowanie $\heartsuit : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$ dane wzorem:

$$\heartsuit(a, b) = \begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(b) \end{pmatrix}$$

to znaczy pierwsze n współrzędnych jest zarezerwowanych dla współrzędnych $\phi(a)$, a później do samego dołu mamy $\psi(b)$.

Ciągłość $\heartsuit$ jest trywialna. Wiem, że $\phi, \psi$ mają ciągłe funkcje odwrotne, jak to jest z $\heartsuit$?

$$\heartsuit^{-1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}) = (\phi^{-1}(a_1, \dots, a_n), \psi^{-1}(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}))$$

wygląda jak dobrze zdefiniowana, ciągła funkcja odwrotna. Hence $\heartsuit$ jest homeomorfizmem.

Szukanie atlasu

Niech $\mathscr{M}$ będzie atlasem na M, a $\mathscr{N}$ będzie atlasem na N. Twierdzę, że na $M \times N$ mogę opisać atlas

$$\mathscr{A} = \{(U \times V, \phi \times \psi) \ : \ (U, \phi) \in \mathscr{M}, (V, \psi) \in \mathscr{N}\},$$

gdzie $\phi \times \psi$ to funkcja jak ♡ wyżej.

ONI TUTAJ JAKIEŚ JAKOBIANY SZUKAJA

$$D(\phi_1\phi_2^{-1} \times \psi_1\psi_2^{-1}) = \begin{bmatrix} D(\phi_1\phi_2^{-1} & 0 \\ 0 & D\psi_1\psi_2^{-1}) \end{bmatrix}$$

## ZADANIE 12.

*Znajdź gładki atlas na $\mathbb{R}^1$ niezgodny ze standardowym. Zrób to samo dla $S^1$.*

Mamy $\mathbb{R}^1$ jako potęgę rozmaitość i $\mathbb{R}$ jako jej model. Funkcja z $\phi_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ będzie mapą taką, że dla $x \in \mathbb{R}^1$ $\phi_1(x) = \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$. Nie jest to zgodne, bo dla $\phi_2 = id$ mapy nie są zgodne.

Warto sobie sprawdzić, że $\sqrt[3]{x}$ jest dyfeomorfizmem.

Całkiem ściśle wypadałoby jeszcze pokazać, że ta mapa sama w sobie zadaje atlas, ale nam się nie chce.

Dla $S^1$ chcemy ten kawałek nieróżniczkowalny mapy $\sqrt[3]{x}$ wkleić w $S^1$. Bierzemy wykres funkcji biegunowych dla $S^1$.

## ZADANIE 13.

*Uzasadnij, że dla $k \geq 1$ nie istnieje $c^k$-dyfeomorfizm pomiędzy otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ gdy $n \neq m$. Pozwoli to określić pojęcie wymiaru gładkiej rozmaitości w sposób niezależny od topologicznego (znacznie trudniejszego) twierdzenia o nieistnieniu homeomorfizmu pomiędzy otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.*

Pokażemy, że nie istnieje $C^1$ dyfeomorfizm $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ dla $n \neq m$.

Ponieważ dyfeomorfizm musi mieć odwrotność, to $f^{-1} : \Omega \to O$. Możemy założyć, że $m < n$. Pokażemy, że funkcja $C^1$ i "na" nie jest $1-1$. Weźmy $x \in O$, wtedy wiemy, że $\ker(Df(x)) \geq 1$, bo jeśli mamy operator liniowy $T : V \to W$ i $\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\mathrm{Im} T)$.

Zdefiniujmy $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ i $F(x) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_m)$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, że jeśli F jest bijekcją na otoczeniu x, to dla małego h

$$f(x_1, \ldots, f_m, x_{m+1})$$

Rozwiązanie dużo prostsze: $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$, czyli stosując chain rule

$$Did_{\mathbb{R}^n} = D(f^{-1} \circ f) = Df^{-1} \cdot Df$$

stąd $m \geq n$

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^m}$$

a tutaj $n \geq m$.

## ZADANIE 14.

*Duuupa*

## ZADANIE 15.

*Niech* $M$ *będzie rozmaitością gładką,* $p \in M$ *ustalonym punktem zaś* $f : M \to \mathbb{R}$ *funkcją rzeczywistą na* $M$*. Uzasadnij, że jednokrotna różniczkowalność funkcji* $f \circ \phi^{-1}$ *w punkcie* $\phi(p)$ *nie zależy od wyboru mapy* $(U, \phi)$ *zawierającej* $p$ *(tzn. takiej, że* $p \in U$*). Oznacza to, że jednokrotna różniczkowalność w punkcie jest dobrze określonym pojęciem dla funkcji rzeczywistych na rozmaitości gładkiej.*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\phi_1^{-1}(\phi_1(p) + h) - f\phi_1^{-1}(p)}{h} = c \text{ istnieje}$$

Rysuneczek się przydałby i powiedzieć, że złożenie funkcji gładkich jest różniczkowalne.

## ZADANIE 16.

Nieróżniczkowalność jest dobrze określona

## ZADANIE 17.

*Mówimy, że funkcja wielu zmiennych ma w pewnym punkcie pochodną zerową, gdy odpowiedni funkcjonał liniowy przybliżający funkcję na otoczeniu tego punktu zadany przez pochodne cząstkowe jest zerowy. Pokaż, że zerowość i niezerowość pochodnej funkcji* $f : M \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $p \in M$ *nie zależy od wyboru mapy. Pokaż też, że w każdym punkcie* $p$ *rozmaitości* $M$*, w którym funkcja gładka* $f : M \to \mathbb{R}$ *osiąga ekstremum lokalne, pochodna tej funkcji jest zerowa.*

Weźmy sobie dwie mapy $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ i niech $p \in U_1 \cap U_2$.

$$\begin{aligned}(\phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1})'(\phi_2(p)) &= (\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1})'(\phi_2(p)) = \\ &= (\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1)'(p)(\phi_2^{-1})'(\phi_2(p)) = \\ &= (\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p))(\phi_1)'(\phi_2(p)) = \\ (\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p)) \cdot k\end{aligned}$$

gdzie $k$ to jest $(\phi_1)'(\phi_2(p))$ to jakaś niezerowa stała, bo skakanie między różnymi układami współrzędnych nie popsuje mi niezerowości punktu.

Weźmy sobie $p \in M$ takie, że $f(p)$ osiąga ekstremum i $q$ w tym przybliżeniu liniowym (płaszczyźnie stycznej w $p$). Rozważmy funkcję

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(t) = f(p + tq)$$

wtedy

$$g'(t) = f'(p + tq) \cdot q$$

i teraz zauważmy, że $g(0)$ to ekstremum $g$ bo tak było w $f$ a $g$ kradnie wartości z $f$. W $g$ działamy jak normalnie na $\mathbb{R}$, czyli

$$0 = g'(0) = f'(p) \cdot q \implies f'(p) = 0$$

*Na tabilcy nie robili tego* $\phi_1 \circ f$*... tylko po prostu zaczynali od* $f$ *- to samo w sumie.*

## ZADANIE 18.

*Niech* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją głaską i niech* $W(F) = \{(x, y, z) \ : \ z = F(x, y)\}$ *będzie wykresem tej funkcji. Zadaj na wykrese* $W(F)$ *strukturę gładkiej rozmaitości (za pomocą rzutu na płaszczyznę* $Oxy$*), a następnie udowodnij, że funkcja odległości od dowolnego ustalonego punkt* $A \in \mathbb{R}^3$ *nie należącego do* $W(F)$ *po obcięciu do tego wykresu jest gładka.*

Mamy jedną mapę: $(W(F), \phi)$, $\phi(x, y, z) = (x, y)$. Oczywiście wiemy, że rzut jest homeomorfizmem.

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\phi^{-1}(x, y) = (x, y, F(x, y))$$

Funkcja odległości to

$$g : W(F) \to \mathbb{R}$$

$$g(\overline{x}) = \|\overline{x} - A\|$$

Chcemy pokazać, że funkcja g jest gładka, czyli potrzebujemy gładkości tego cudeńka:

$$g \circ \phi^{-1} = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (F(x, y) - z_A)^2}$$

ale to widać.

## ZADANIE 19.

*Rozważmy* $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| = 1\}$ *i niech...*

Będziemy liczyć na górnej półsferze $(U_3, \phi)$. Mamy $f(x) = |x - N|^2$ i wtedy

$$f \circ \phi^{-1}(x, y) = f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1)^2 = 2(1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

dlaczego to jest gładkie? Bo jesteśmy dodatni, więc napis pod pierwiastkiem zawsze będzie czymś dodatnim.

## ZADANIE 20.

*Pokaż, że brzeg* $\partial M$ *jest domknięty w* $M$.

$$\partial M = \{p \in M \ : \ (\forall\ (U_\alpha, \phi_\alpha))\ \phi_\alpha(p) \in \partial H^n\}$$

Może odwrotnie? Pokażę, że $Int(M) = M \setminus \partial M$ jest otwarte?

Definicja $Int(M)$ to jest, że każdy punkt z $Int(M)$ przechodzi na punkt w $Int(H^n)$, czyli na górną półpłaszczyznę $\mathbb{R}^n$. Ale to jest zbiór otwarty, to znaczy dla $p \in Int(M)$ $\phi(p)$ ma otwarte otoczenie, czyli z faktu, że $\phi$ jest homeomorfizmem, p musi mieć otwarte otoczenie $p \in U_p \subseteq M$. Czyli każdy punkt z $Int(M)$ ma otwarte otoczenie. Dlaczego to tnie się pusto z $\partial M$? Bo dowolny inny punkt z $U_p$ też jest homeomorficzne z czymś z $Int(H^n)$ (obcięcie homeo.), więc należy do $Int(M)$ a nie do brzegu.

*Nie trzeba brać drugiego punktu, ale warto powiedzieć, że* $\partial M \cap U = \psi^{-1}(\partial H^n)$.

## ZADANIE 21.

*Uzasadnij, że dla dowolnej gładkiej funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ obcięcie $f \restriction \partial M : \partial M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką.*

Niech M będzie rozmaitością i weźmy sobie punkt $p \in \partial M$. Niech $(U, \phi)$ będzie mapą zawierającą p. Mam pokazać, że $f \restriction \partial M$ jest gładkie. Czyli dobrze czytam w internecie, że wystarczy, aby każdy punkt z $\partial M$ miał otocznie na którym f jest gładkie? Ale $\partial M$ ma puste wnętrze?

Czy ja f mogę sobie przepuścić jeszcze przez coś zwężającego do $\mathbb{R}^{n-1}$ i powiedzieć, że w okolicy brzegu i na nim samym ta funkcja zachowuje się normalnie, jak gdyby nigdy nic?

*CO SIĘ DZIAŁO NA ĆWICZENIACH?*

Po pierwsze, co to jest funkcja gładka na domkniętym zbiorze? No i kurwa nic nie zrozumiałam XD

Bierzemy sobie punkt należący do $p \in \partial M$ i $(U, \phi)$ takie, że $p \in U$. Jeśli teraz weźmiemy sobie $\phi(p) = (\ldots, 0)$, bo ten pysio leży na brzegu. Teraz oznaczmy sobie

$$\partial\phi : \partial U \to \overline{\partial U} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}.$$

$\partial U = U \cap \partial M$

$$f \restriction \partial M \circ \partial\phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \restriction \partial H^n$$

*Robi Patryk*

Zaczynamy od mapy $(V, \psi)$ na $\partial M$ i wtedy $V = U \cap \partial M$, $\psi = \pi \circ \phi \restriction U \cap \partial M$. Wtedy

$$f \restriction \partial M \circ \psi^{-1} = f \restriction \partial M \circ \phi^{-1} \circ i,$$

gdzie i to było włożenie $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

## ZADANIE 22.

*Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją. Uzasadnij, że obszar pod wykresem funkcji F określony przez $\Omega_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ y \leq F(x)\}$ jest rozmaitością z brzegiem o strukturze gładkiej, która na wnętrzu $\mathrm{Int}(\Omega_F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ y < F(x)\}$ pokrywa się ze zwykłą strukturą otwartego podzbioru w $\mathbb{R}^{n+1}$*

Za trywialne uznam:

- Przeliczalność bazy
- Hausdorffowość

Atlas na tym pysiu to np. kule z $\mathbb{R}^{n+1}$ cięte z nim samym, a homeomorfizm na $H^{n+1}$ to może być przesunięcie do góry tak, żeby wszystko było nieujemne, co można zrobić, bo F jest ograniczony. Wtedy te $\phi_\alpha$ to takie identyczności with a twist, czyli homeomorfizmy. Odwzorowania przejścia też są gładkie, jeżeli podniosę wszystko o tyle samo do góry, bo to jest składanie identyczności.

To o wnętrzu to w sumie widać z tego co napisałam wyżej XD

*CO SIĘ DZIAŁO NA ZAJĘCIACH?*

Mamy funkcję gładką i mamy obszar pod wykresem. Jako jedną mapę z atlasu weźmy $(\mathrm{Int}(\Omega_F), \mathrm{id}_{\mathrm{Int}(\Omega_F)})$ i jak weźmiemy mapę na brzegu, która będzie się zgadzać, to mamy od razu drugi podpunkt załatwiony. Cały brzeg można śmignąć paseczkiem odległym o 1 od funkcji F. Weźmy $U = \{(x, y) \ : \ F(x) - 1 < y \leq F(x)\}$ i to jest otwarte w $\Omega_F$. Jak to zmapować? Bierzemy funkcję $\phi(x, y) = (x, F(x, y)) : U \to \mathbb{R}^n \times [0, 1) \subseteq H^{n+1}$.

$$\phi^{-1}(x, y) = (x, F(x) - y)$$

## ZADANIE 23.

*Uzasadnij, że* $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int}(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \geq 1\}$ *jest rozmaitością z brzegiem*

Chcę napisać dyffeomorfizm $f : \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int}(D^n) \to D^n \setminus \{0\}$.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|x|^2}(x_1, \ldots, x_n)$$

Wiemy jak wygląda atlas na $D^n \setminus \{0\}$, bo to było na wykładzie, czyli niech to będą jakieś $(U_\alpha, \phi_\alpha)$. Teraz na $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int}(D^n)$ indukujemy atlas przez $(f^{-1}(U_\alpha, \phi_\alpha \circ f)$. Jedyne co musimy sprawdzić to gładkość tego atlasu. Trzeba sprawdzić, co się dzieje na

$$f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta).$$

Chcę sprawdzić, czy złożenie $(\phi_\alpha \circ f)(\phi_\beta \circ f)^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ jest gładkie?

## ZADANIE 24.

B *jest domkniętą kulą w pewnym lokalnym układzie współrzędnych na gładkiej rozmaitości* M. *Uzasadnij, że* $M \setminus \mathrm{Int}(B)$ *jest rozmaitością z brzegiem.*

Mamy sobie M i mapę $(U, \phi)$. Dalej $B \subseteq U$ jest kulką taką, że $\phi(B) = \overline{B_r(x)}$. Ta kulka się lokalnie przenosi na kulkę w $\mathbb{R}^n$. Możemy sobie zapisać:

Na $M \setminus \mathrm{Int}(B)$ określamy strukturę:

- Na $M \setminus B$, co jest otwartym podzbiorem M, wybieramy mapy z atlasu maksymalnego, których dziedziny są zawarte w $M \setminus B$ (nie dotykają B).
- Nie mamy jeszcze pełnego pokrycia, bo jest jeszcze brzeg.
- Na $U \setminus \mathrm{Int}(B)$ czyli zbiorze otwartym gdzie mieliśmy kulkę bez kulki, podmieniamy jedną mapę $(U, \phi)$ na zestaw map tak, żeby nam pasowało. Określamy mapy $\psi_\alpha \circ \phi$, gdzie $(V_\alpha, \psi_\alpha)$ jest atlasem na $\phi(U \setminus \mathrm{Int}(B))$NIEPRECYZYJNE, BO NA ZBIORZE NIE MOŻEMY ATLASOWAĆ, ale jakiś atlas odziedziczony chuju muju, co jest podzbiorem otwartym na przestrzeni podobnej do tego co było w zadaniu wyżej.
- Atlas $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ jak z poprzedniego zadania, to znaczy, że struktura $(V_\alpha, \psi_\alpha)$ na $\mathbb{R}^n \setminus D^n$ jest zgodna ze standardową zadaną przez id.

Pozostaje nam złożyć te mapy i pokazać, że cośtam tam zostaje.

Dla $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ z początkowego punktu oraz $(V_\beta, \psi_\beta)$ z ostatniego punktu mamy

$$\phi_\alpha \circ (\psi_\beta \circ \phi)^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \psi_\beta^{-1}$$