ZADANIE 2.

Ola poszła do kasyna mając 100 złotych. Postanowiła grać tak długo aż albo zbankrutuje, albo osiągnie 500 złotych. W każdej pojedynczej grze może wygrać 10 zł z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, przegrać 10 złotych z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ lub utrzymać swój stan posiadania z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 Ola skończy grę w skończonym czasie

Zadanie zrobimy jakbyśmy rozważali pijaka próbującego usilnie wrócić do domu na prostej drodze: każdy krok to początek nowej, wspaniałej przygody.

Jako, że przyrównamy fortunę Oli do pijaka, a jej odległość od 50 do odległości pijaka od ukochanej szklanki soku po ogórkach kiszonych, to oznaczymy przez A_i prawdopodobieństwo, że startując w punkcie i pijak dopadnie źródła domowych elektrolitów. Tutaj dokonam jeszcze podmianki, żeby było mi wygodniej: ponieważ fortuna Oli będzie skakać po wartościach z 0 na końcu (tzn. podzielnych przez 10), to każdy krok pijaka będzie krokiem długości 10. To znaczy Ola zdobywa banknoty 10zł i liczy ich ilość żeby zdecydować czy gra dalej czy nie, a nie dokładną wartość swojego portfela.

Problem z zadania startuje w i = 10 i wygrana będzie przybliżać nas do 50 - bar był 10 metrów od posterunku policji, a dom aż 50 metrów.

Liczy się, aby pijak dotarł gdzieś, gdzie ma wodę, więc $A_{50} = 1$ i $A_0 = 1$, bo czy to w domu, czy w więzieniu, jakieś elektrolity się znajdą.

Zastanówmy się jak opisać, że pijak startując w i-tym kroku dojdzie do domu? Możemy to zrobić korzystając z rekurencji. Jeżeli z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ ruszy się w stronę domu, to zrzucamy całą robotę na A_{i+1}, jeśli się oddali od domu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, to będziemy liczyć A_{i-1}, a pozostanie w miejscu z prawdopodobieńśtwem $\frac{1}{6}$, czyli dostajemy:

$$A_i = \frac{1}{3}A_{i+1} + \frac{1}{2}A_{i-1} + \frac{1}{6}A_i$$

$$3A_i = A_{i+1} + \frac{3}{2}A_{i-1} + \frac{1}{2}A_i$$

$$\frac{5}{2}A_i - \frac{3}{2}A_{i-1} = A_{i+1}$$

i to jest już rekurencja, którą w teorii potrafię rozwiązać, a w praktyce zrobi to za mnie wolframalpha:

$$A_i = c_1\left(\frac{3}{2}\right)^i + c_2$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ A_{50} = 1 = c_1\frac{3^{50}}{2^{50}} + c_2 \end{cases}$$

To również rozwiązuje za mnie wolframalpha i mówi, że $c_1 = 0$ i $c_2 = 1$, czyli prawdopodobieństwo dojścia do elektrolitów (tudzież zakończenia gry) wynosi $A_{10} = 1$.

ZADANIE 3.

Losujemy niezależnie nieskończenie wiele punktów z koła o promieniu 1 i środku (0, 0). Dla jakich wartości ε z prawdopodobieństwem 1 w kole o promieniu ε i środku (0, 0) znajdzie się nieskończenie wiele punktów?

Zgaduję że dla $\varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, bo wtedy te koła to będzie przynajmniej połowa całości.

No boże no, to widać że dla tych na pewno śmignie.

A_n - w n-tym ruchu punkt wpada w moje koło. Prawdopodobieństwo wpadnięcia w kółko o promieniu ε wynosi ε^2. Coś pojebałam, albo to jest trywialne.

ZADANIE 4.

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i $\mathbb{P}[A_n] = p_n \in (0,1)$. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń $A_n \iff$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1} A_n\right] = 1 \iff \mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1}\bigcup_{n=m} A_n\right] = 1$$

$\Longleftarrow$ dość trywialne, bo

$$\bigcap\bigcup A_n \subseteq \bigcup A_n \implies 1 = \mathbb{P}\left[\bigcap\bigcup A_n\right] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup A_n\right] \leq 1$$

$\Longrightarrow$

$$1 = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{N} \mathbb{P}[A_n]\right] = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \prod_{n=1}^{N}(1 - \mathbb{P}[A_n])\right) \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty} 1 - \prod_{n=1}^{N} e^{-\mathbb{P}[A_n]} = \lim_{N\to\infty} 1 - e^{-\sum\mathbb{P}[A_n]}$$

$$1 = 1 - \lim e^{-\sum\mathbb{P}[A_n]} \implies 0 = \lim e^{-\sum\mathbb{P}[A_n]} \implies \lim\sum\mathbb{P}[A_n] = \infty$$

i tu już z twerdzenia B-C.

ZADANIE 5.

Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \geq \frac{1}{2}$. Niech A_n oznacza zdarzenie, że pomiędzy rzutem 2^n a 2^{n+1} otrzymano ciąg n kolejnych orłów. Pokaż, że zdarzenia A_n z prawdopodobieństwem 1 zachodzą nieskończenie wiele razy.

Najpierw powinnam znaleźć sobie wzorek na prawdopodobieństwo wyrzucienie orła, pokazać, że to w nieskończoności nie zbiega do 0, czyli suma jest nieskończona. Wypadałoby powiedzieć o niezależności i reszta to śmiga.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że na 2^n-tym miejscu wypadnie n kolejnych orłów? p^n. Jaka jest suma czegoś takiego?

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \geq \sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bardzo nieeleganckie szacowanie, ale co jeśli policzę prawdopodobieństwo, że orzeł wogóle n razy nie wypadnie między $[2^n, 2^{n+1})$?

$$A_n^c = \sum_{i=0}^{n-1} p^i(1-p)^{2^n-i} = (1-p)^{2^n+1}\left(\frac{1 - \frac{p}{1-p}^n}{1-2p}\right)$$

W takim razie suma prawdopodobieństw, że wogóle będzie miało szansę wypaść n razy pod rząd, to znaczy orzeł wypadnie co najmniej n razy, wynosi

$$\sum A_n = \sum \left[1 - (1-p)^{2^n+1} \left(\frac{1 - \frac{p^n}{(1-p)^n}}{1-2p} \right) \right] = \sum 1 - \sum (1-p)^{2^n - i} = 1 - c$$

gdzie c to jakaś stała wynikająca z tego, że ciąg w tej drugiej sumie zbiega do 0, więc szereg jest zbieżny?