Algebra 2R, lista 8.

Wszystkie odzorowania są R-liniowe (R-homomorfizmy), M, N, P, Q to R-moduły. R to pierścień przemienny z jednością. Zadania domowe: jak zwykle.

1. (a)– Załóżmy, że $f : M \to N$ jest epimorfizmem. Udowodnić, że f się rozszczepia $\iff \exists g : N \to M,\ fg = id_N$.
   (b) Załóżmy, że $g : M \to N$ jest monomorfizmem. Udowodnić, że $g(M)$ jest składnikiem prostym modułu $N \iff \exists f : N \to M,\ fg = id_M$.

2. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) dla każdego epimorfizmu $f : M \to N$ dowolnych modułów M, N i każdego $g : P \to N$ istnieje $h : P \to M$ taki, że $fh = g$,
   (b) moduł P jest projektywny,
   (c) istnieje moduł L taki, że $P \oplus L$ jest wolny.
   (wsk: dla dowodu (c)⇒(a) rozważyć rzutowanie $p : P \oplus L \to P$)

3. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) moduł Q jest injektywny.
   (b) Dla każdego monomorfizmu $f : M \to N$ dowolnych modułów M, N i homomorfizmu $g : M \to Q$ istnieje $h : N \to Q$ taki, że $hf = g$.
   (wsk: w dowodzie (a)⇒(b) rozważyć moduł $M = Q \oplus N/L$, gdzie L jest podmodułem $Q \oplus N$ generowanym przez $\{(g(m), -f(m)) : m \in M\}$).

4. (a) Udowodnić, że moduł $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ jest projektywny $\iff$ każdy M_i jest projektywny.
   (b) Udowodnić, że moduł $M = \prod_{i\in I} M_i$ jest injektywny $\iff$ każdy M_i jest injektywny.

5. Załóżmy, że $\{m_1, \dots, m_n\}$ jest bazą R-modułu wolnego M oraz
   $$m'_j = \sum_i r_{ij} m_i,$$
   gdzie $r_{ij} \in R$ dla $i, j = 1, \dots, n$. Udowodnić, że układ $\{m'_1, \dots, m'_n\}$ jest bazą $M \iff \det[r_{ij}]_{n\times n}$ jest elementem odwracalnym pierścienia R.

6. Niech K_1, K_2 będą ciałami, zaś $R = K_1 \times K_2$ (produkt pierścieni).
   (a) Udowodnić, że każdy R-moduł jest postaci $V_1 \times V_2$, gdzie V_i jest przestrzenią liniową nad K_i oraz dla $(k_1, k_2) \in R,\ (k_1, k_2)\cdot(v_1, v_2) = (k_1v_1, k_2v_2)$.
   (b) Udowodnić, że każdy R-moduł jest projektywny. Które R-moduły są wolne ?

7. (a)– Załóżmy, że M jest podmodułem modułu N oraz $n \in N$. Udowodnić, że zbiór $I = \{r \in R : rn \in M\}$ jest ideałem w R.
   (b) Udowodnić, że moduł Q jest injektywny $\iff$ dla każdego ideału $I \subset R$ oraz R-homomorfizmu $f : I \to Q$, f rozszerza sie do R-homomorfizmu $R \to Q$.

(wsk: do dowodu $\Leftarrow$ wykorzystać (a))
(c) Wywnioskować z (b), że gdy R jest dziedziną ideałów głównych, moduł Q jest injektywny

$$\iff \forall r \in R \setminus \{0\} \forall m \in Q \exists m' \in Q,\ rm' = m.$$

(w szczególności grupa abelowa jest injektywnym $\mathbb{Z}$-modułem $\iff$ jest podzielna)

8. *Udowodnić, że każdy moduł M można zanurzyć w R-module injektywnym. (najpierw zrobic to dla R: dziedziny ideałów głównych, wykorzystać poprzednie zadanie)
(wsk: dla ideału $I \subset R$ oraz $f : I \to M$ rozważyć moduł $M \oplus R/L$, gdzie L jest generowany przez $(f(i), -i)$ dla $i \in I$).

   Można udowodnić, że istnieje najmniejszy R-moduł injektywny zawierający M, jest on też jedyny z dokładnością do izomorfizmu. Nazywa się go injektywnym domknięciem M. Można też udowodnić, że moduł M jest injektywny $\iff$ jest egzystencjalnie domknięty w klasie R-modułów.