

Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1	Definicja rozmaitości	3
1.1	Rozmaitości topologiczne	3
1.2	Mapy, lokalne współrzędne	4
1.3	Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne]	4
2	Funkcje różniczkowalne	7
2.1	Dopowiedzenie o funkcjach gładkich	7
2.2	Atlasy C^k	7
2.3	Rozmaitość gładka bez topologii	7
3	Rozmaitość z brzegiem	9
3.1	O brzegu i wewnątrz	10

1. Definicja rozmaitości

Zanim podany dokładną definicję, możemy rozważyć kilka przykładów rozmaitości różniczkowalnych:

- ↪ powierzchnia, domknięta lub nie,
- ↪ przestrzeniach opisanych (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- ↪ podzbiory \mathbb{R}^n lub \mathbb{C}^n zapisywalne równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^1$ w \mathbb{C}^3).

Cały wykład będzie wstępnym słownikiem wokół pojęcia rozmaitości różniczkowalnej.

1.1. Rozmaitości topologiczne

Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n -rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest **lokalnie euklidesowa** wymiaru n , czyli każdy punkt x z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n .

Konsekwencje Hausdorffowości:

- ↪ Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

- ↪ Pewne własności otoczeń punktów są zachowywane. To znaczy, dla dowolnego zwartego podzbioru otoczenia punktu $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $K \subseteq U$ jego odpowiednik $\bar{K} = \phi^{-1}(K) \subseteq \bar{U} \subseteq M$ jest domknięty i zwarty w M . [ćwiczenia]

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- ↪ Spełniany jest warunek Lindelöfa: każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćwiczenia]

- ↪ Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które są po domknięciu w M zwarte. Czyli możemy ją wyczerpać za pomocą zbiorów, które są małe.

- ↪ **Parazwartość**, czyli każde zwarte pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
- ↪ Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n .

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- ↪ **Twierdzenie Brouwer'a**: dla $n \neq m$ niepusty otwarty podzbiór \mathbb{R}^n nie jest homeomorficzny z jakimkolwiek otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^m .

- ↪ Czyli liczba n w definicji jest jednoznaczna dla danej rozmaitości. Określamy **wymiar rozmaitości** $\dim M = n$.

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ) , gdzie U to otwarty podzbiór w M , a ϕ to homeomorfizm $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Mapa to jest jakiś homeomorfizm między rozmaitością a pewnym podzbiorem \mathbb{R}^n . Zbiór U nazywamy **zbiorem mapowym**. **Przez lokalną euklidesowość wiemy, że pokrywają one całą rozmaitość.**

Parę (U, ϕ) nazywamy też **lokalnymi współrzędnymi** na M albo *lokalną parametryzacją* M .

Fakt 1.2. Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n -rozmaitością \iff posiada rodzinę map n -wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają całą X .

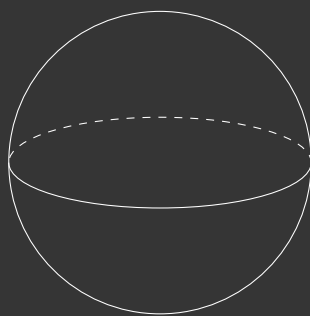
Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczną topologią. Z racji, że \mathbb{R}^{n+1} jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całą S^n . Dla $i = 1, \dots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

RYSUNEK DLA S^3



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\bar{U}_i^\pm = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_j^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \bar{U}_i^\pm$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami \mathbb{R}^n .

1.3. Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle znaczą one to samo.

Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ chcemy określić, co znaczy, że f *jest różniczkowalna*? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

- Funkcja f **wyrażona** w mapie (U, ϕ) to nic innego jak złożenie $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Teraz $f \circ \phi^{-1}$ jest funkcją zależącą od n zmiennych rzeczywistych.
- Chciałoby się powiedzieć, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M , ten fragment wyrażony w tej mapie $f \circ \phi^{-1}$ jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.
- **Odwzorowanie przejścia między dwoma mapami** (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) to funkcje $\phi_1 \phi_2^{-1}$ i $\phi_2 \phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 1.3. Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1 \phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ i $\psi \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli (U, ϕ) i (V, ψ) są zgodne, to $f \circ \phi^{-1} \upharpoonright (\phi(U \cap V))$ jest gładkie \iff

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie **dyfeomorfizmami**.

Definicja 1.4. Gładkim atlasem \mathcal{A} na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n)$$

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

Definicja 1.5. Rozmaitość gładka to para (M, \mathcal{A}) złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu \mathcal{A} opisanego na M .

Uściślenie: Często (M, \mathcal{A}_1) i (M, \mathcal{A}_2) będące rozmaitościami gładkimi określają tę samą rozmaitość.

Definicja 1.6. Niech \mathcal{A} będzie gładkim atlasem na M .

1. Mapa (U, ϕ) jest **zgodna z atlasem** \mathcal{A} , jeśli jest zgodna z każdą mapą z \mathcal{A} .
2. Dwa **atlasy** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na M są **zgodne**, jeśli każda mapa z \mathcal{A}_1 jest zgodna z atlasem \mathcal{A}_2 .

Twierdzenie 1.7. Relacja zgodności atlasów jest relacją równoważności.

Dowód: Ćwiczenia.

Konwencja jest wtedy taka, że zgodne atlasy zadają tę samą strukturę gładką na M . W takim razie, zgodne atlasy można wysumować do jednego większego atlasu.

Definicja 1.8. \mathcal{A} jest **atlasem maksymalnym** na M , jeśli każda mapa na M z nim zgodna jest w nim zawarta.

Fakt 1.9. Każdy atlas \mathcal{A} na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M . Zaś ten atlas maksymalny to zbiór wszystkich map na M zgodnych z \mathcal{A} .

Dowód: Ćwiczenia.

Równoważna definicja rozmaitości gładkiej: para (M, \mathcal{A}) , gdzie M to rozmaitość topologiczna, zaś \mathcal{A} to pewien atlas maksymalny.

2. Funkcje różniczkowalne

2.1. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Definicja 2.1. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest **gładka względem atlasu** \mathcal{A} na M , jeśli

$$(\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}) f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest gładka.}$$

To znaczy po wyrażeniu w dowolnej mapie atlasu jest nadal funkcją gładką.

Fakt 2.2.

1. Jeśli $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem \mathcal{A} , zaś (U, ϕ) jest zgodna z \mathcal{A} , to wówczas funkcja f wyrażona w tej nowej mapie (czyli $f \circ \phi^{-1}$) też jest gładka.
2. Jeśli $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są zgodnymi atlasami, wówczas taka funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathcal{A}_1 \iff$ jest gładka względem $\mathcal{A}_2 \iff$ jest gładka względem atlasu maksymalnego $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zawierającego \mathcal{A}_1 (oraz \mathcal{A}_2).

Niech M będzie gładką rozmaitością. Wówczas $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **jest gładka** jeśli f jest gładka względem każdego (dowolnego) atlasu \mathcal{A} wyznaczającego na M daną gładką strukturę.

2.2. Atlasy C^k

Definicja 2.3.

- Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k -zgodne**, jeśli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k .
- **C^k -atlas** to atlas składający się z map, które są C^k -zgodne.
 - Taki atlas określa strukturę C^k -rozmaitości na M .
 - Jest ona słabsza niż struktura rozmaitości gładkiej.

C^0 w tej konwencji to rozmaitość topologiczna, a C^∞ to często jest rozmaitość gładka.

Na C^k -rozmaitości nie da się sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych. Przykłady to:

- \hookrightarrow **Rozmaitość analityczna** $[C^\omega]$ to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- \hookrightarrow **Rozmaitość zespolona** ma mapy jako funkcje w \mathbb{C}^n zamiast w \mathbb{R}^n .
- \hookrightarrow Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty.
- \hookrightarrow Rozmaitość kawałkami liniowa

2.3. Rozmaitość gładka bez topologii

Dychotomia pomiędzy sytuacją C^0 a sytuacją C^k dla $k > 0$:

- Z każdego maksymalnego atlasu C^k -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞ -zgodnych. A zatem, każda C^k -rozmaitość posiada C^k -zgodną strukturę C^∞ -rozmaitości.
- Istnieją C^0 -rozmaitości niedopuszczające żadnej struktury gładkiej.

Lemat 2.4. Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X i dla każdego α mamy $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ różnowartościowe (n jest ustalone dla całego X). Ta trójka obiektów ma spełniać następujące warunki:

1. Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w \mathbb{R}^n .
2. Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w \mathbb{R}^n .
3. Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest odwzorowaniem gładkim. Są to dyfeomorfizmy (gładkie i odwracalne).
4. Przeliczalnie wiele spośród zbiorów U_α pokrywa całe X .
5. Dla dowolnych punktów $p, q \in X, p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}[V_p], q \in \phi_\beta^{-1}[V_q]$ oraz $\phi_\alpha^{-1}[V_p] \cap \phi_\beta^{-1}[V_q] = \emptyset$. Czyli możemy rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n .

Wówczas na X istnieje **struktura rozmaitości topologicznej** dla której U_α są otwarte. Ponadto rodzina (U_α, ϕ_α) tworzy **gładki atlas** na X .

Szkic dowodu:

- Topologię produkujemy jako bazę topologii na X : bierzemy przeciwobrazy przez poszczególne ϕ_α otwartych podzbiorów w zbiorach $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Lokalna n -euklidesowość X względem takiej topologii jest oczywista.
- Nietrudno jest też wybrać mniejszą bazę przeliczalną [ćwiczenia].
- Hausdorffowość tak określonej topologii wynika z warunku 5.



Przykład: Niech \mathcal{L} będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Nie ma na tym zbiorze wygodnej do opisu topologii, ale możemy skorzystać z lematu wyżej.

Zacznijmy od opisu podzbiorów

$$U_h = \{\text{proste nie pionowe}\}$$

$$U_v = \{\text{proste nie poziome}\}$$

Jeśli $U_h \ni L$, to wtedy $L = \{y = ax + b\}$ i wtedy ϕ_h będzie przypisywać takiej prostej parę (a, b) . Jeśli zaś $U_v \ni L$, to wtedy $L = \{x = yc + d\}$ i wtedy ϕ_v przypisze jej (c, d) . To, że $\phi_h(U_h)$ i $\phi_v(U_v)$ są różnowartościowe widać. Przyjrzyjmy się teraz przekrojowi naszych zbiorów:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepoziome i nie pionowe}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cd + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 : c \neq 0\}$$

i są to zbiory otwarte, więc warunek 3. jest spełniony. Warunek 4. jest tutaj trywialny.

Niech **COŚ TUTAJ SIĘ URWAŁO**

To jest homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Mobiusa.

3. Rozmaitość z brzegiem

Lokalnie wygląda jak \mathbb{R}^n albo jak półprzestrzeń n-wymiarowa:

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

brzegiem takiej półprzestrzeni nazywamy zbiór:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

definiuje się też wnętrze takiej półprzestrzeni:

$$\text{int}(H^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

Definicja 3.1. Dla otwartego zbioru $U \subseteq H^n$ określamy

\hookrightarrow brzeg zbioru: $\partial U = U \cap \partial H^n$

\hookrightarrow wnętrze zbioru: $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$

\hookrightarrow Jeżeli mamy zadane $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, to jest ono **gładkie**, gdy jest obcięciem do U pewnej gładkiej funkcji $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie \bar{U} jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n taki, że $U \subseteq \bar{U}$.

Jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest gładka, to wówczas pochodne cząstkowe f są dobrze określone w punktach $\text{int}(U)$. Ze względu na ciągłość pochodnych cząstkowych dowolnego rozszerzenia \bar{f} , **pochodne cząstkowe f są również dobrze określone w punktach ∂U .**

Fakt 3.2. Z analizy: rozszerzenie \bar{f} istnieje \iff f jest gładka na $\text{int}(U)$ oraz pochodne cząstkowe tego f obciętego do $\text{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się na ∂U .

Definicja 3.3. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że

$\hookrightarrow U_\alpha$ jest otwartym podzbiorem M

\hookrightarrow oraz $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^n$ jest homeomorfizmem na swój obraz,

$\hookrightarrow \bar{U}_\alpha = \phi(U_\alpha) \subseteq H^n$ jest otwarty,

\hookrightarrow odwzorowania przejścia $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ są gładkie [$U_\alpha \cap U_\beta \subseteq H^n$ otwarte].

Fakt 3.4. Jeśli w pewnej mapie (U_α, ϕ_α) $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, to w każdej innej mapie (U_β, ϕ_β) zawierającej punkt p również obraz punktu p należy do brzegu H^n .

Dowód:

Odwzorowania przejścia są gładkie, ale gładkie są też odwzorowania odwrotne, czyli $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są gładkie i gładko odwracalne.

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym z analizy wielu zmiennych

Odwzorowania przejścia mają nieosobliwe macierze pierwszych pochodnych cząstkowych we wszystkich punktach.



Uwaga 3.5. Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem (ta sama definicja, tylko odwzorowania przejścia nie muszą być gładkie, a wystarczy homeomorfizmy) dowód wyżej nie śmignie, ale *analogiczny fakt również zachodzi*, tylko dowód jest trudniejszy i opiera się na twierdzeniu Brouwera o niezmienniczości obszaru (analog twierdzenia o odwzorowaniach otwartych dla ciągłych $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$)

Dzięki twierdzeniom powyżej następujące definicje mają sens:

$$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej mapie (każdej)} \phi_\alpha(p) \in \partial \mathbb{H}^n\}$$

$$\text{int}(M) = \{p \in M : \text{dla pewnej mapy } (U_\alpha, \phi_\alpha), \phi_\alpha(p) \in \text{int}(\mathbb{H}^n)\}$$

3.1. O brzegu i wnętrzu

Fakt 3.6. Wnętrze $\text{int}(M)$ n -rozmaitości gładkiej M jest n -rozmaitością gładką bez brzegu.

Dowód:

Pokażemy atlas, który działa dla $\text{int}(M)$. Weźmy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{U'_\alpha}$$

a (U_α, ϕ_α) było atlasem na M .

i śmiga



Fakt 3.7. Brzeg ∂M n -rozmaitości M z brzegiem jest $(n - 1)$ wymiarową rozmaitością gładką bez brzegu.

Dowód:

Jako atlas na ∂M bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$$

$$\phi'_\alpha : U'_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{H}^n \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{U'_\alpha}$$

i śmiga



Przykład: Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ jest rozmaitością gładką z brzegiem $\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Pokażemy mapy, ale uzasadnienie ich gładkiej zgodności pominiemy.

$$(U_0, \phi_0) : U_0 = \{x : |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{H}^n, \quad \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$

$$(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : U_i^\pm = \{x \in D^n : x_i > 0\}, \quad \phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{H}^n$$

UWAGA, SĄ WZORKI, PODPIERDOL

Inny atlas gładki:

Definicja 3.8. Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w X takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α .

Definicja 3.9. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jej **nośnik** $\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$

Twierdzenie 3.10. [*Twierdzenie o rozkładzie jedności*] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M (może być z brzegiem) istnieje rodzina $\{f_j\}_{j \in J}$ gładkich funkcji $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

- $f_j \geq 0$
- każdy nośnik $\text{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α z pokrycia
- nośniki $\{\text{supp}(f_j)\}_{j \in J}$ tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w M
- dla każdego $x \in M$ $\sum_{j \in J} f_j(x) = 1$

Jest to **rozkład jedności wpisany w pokrycie $\{U_\alpha\}$**

Wracamy do pytania o istnienie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takiego, że $f \upharpoonright \partial M \equiv 0$ i $f \upharpoonright \text{int}(M) > 0$.

Skorowidz definicji

1.1	Definicja: <i>rozmaitość topologiczna</i>	3
1.3	Definicja: <i>zgodność map</i>	5
1.4	Definicja: <i>atlas gładki</i>	5
1.5	Definicja: <i>rozmaitość gładka</i>	5
1.6	Definicja: <i>zgodność map, atlasów</i>	5
1.8	Definicja: <i>atlas maksymalny</i>	6
2.1	Definicja: <i>gładkość względem atlasu</i>	7
2.3	Definicja: <i>mapa C^k-zgodna, C^k-atlas</i>	7
3.1	Definicja: <i>brzeg, wnętrze zbioru otwartego, gładka funkcja ze zbioru</i>	9
3.3	Definicja: <i>gładka rozmaitość z brzegiem</i>	9
3.8	Definicja: <i>lokalna skończoność</i>	10
3.9	Definicja: <i>nośnik funkcji</i>	11

Twierdzonekowa zabawa

1.2	Fakt: n -rozmaitość \iff rodzina map pokrywających	4
1.7	Twierdzenie: zgodność to relacja równoważności	6
1.9	Fakt: dla każdego atlasu istnieje jedyny atlas maksymalny	6
2.2	Fakt: funkcja gładka względem atlasu	7
2.4	Lemat: rozmaitość gładka bez topologii	8
3.2	Fakt: o istnieniu rozszerzenia funkcji	9
3.4	Fakt: jeśli obraz punktu jest w rzęgu w jednej mapie, to jest w brzegu w każdej	9
3.5	Uwaga: fakt wyżej jest prawdziwy dla rozmaitości topologicznych z brzegiem	10
3.6	Fakt: wnętrze rozmaitości jest rozmaitością	10
3.7	Fakt: brzeg rozmaitości jest rozmaitością	10
3.10	Twierdzenie: o rozkładzie jedności	11