

Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

mysio pysio kurwa zbysio

—

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1 Miara i całka v.2.0

3

1. Miara i całka v.2.0

Krzywa Gaussa to krzywa zadana wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Zdarzenie elementarne $[\omega]$ to sposób kodowania jednego wyniku w naszym eksperymencie. **Przestrzeń zdarzeń elementarnych** $[\Omega]$ to zbiór wszystkich wyników losowych. Rodzinę \mathcal{F} podzbiorów Ω nazywamy σ -ciałem, jeśli:

$$\hookrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$\hookrightarrow A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$$

$$\hookrightarrow A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

$A \in \mathcal{F}$ nazywamy **zdarzeniem**, a parę (Ω, \mathcal{F}) nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykłady:

1. Dla rzutu symetryczną monetą możliwe wyniki to orzeł (O) i reszka (R). Wtedy $\Omega = \{O, R\}$, natomiast $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

2. Jeżeli będziemy rzucać kostką, to $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, natomiast $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Zdarzenia możemy próbować opisywać matematycznie, a możemy opisać je po ludzku, czyli $\mathcal{F} \ni A = \text{wypadła parzysta liczba oczek} = \{2, 4, 6\}$. Cały trick, żeby zacząć o tym wszystkim myśleć w ramach teorii miary to zacząć myśleć, że my przyporządkowujemy prawdopodobieństwo zdarzeniom postaci bardziej matematycznej.

3. Jeśli będziemy wykonywać n rzutów kostką, to $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_k \in [6]\} = \{1, 2, \dots, 6\}^n$, czyli to po prostu n -ta potęga rzutu pojedynczego. Zdarzenie to na przykład $B = \text{suma oczek jest parzysta} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_1 + \dots + \omega_n \text{ parzysta}\}$

Niech (Ω, \mathcal{F}) będzie przestrzenią mierzalną. Wtedy funkcja

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

jest nazywana **prawdopodobieństwem na Ω** , jeżeli:

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1, \text{ czyli prawdopodobieństwo wszystkiego wynosi } 1,$$

\hookrightarrow Jeżeli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathbb{P}(A_k)$, czyli prawdopodobieństwo, że zachodzi którekolwiek ze zdarzeń (suma mnogościowa) jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych wydarzeń.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykłady:

1. [**Prawdopodobieństwo klasyczne**] Niech Ω będzie zbiorem skończonym, $\text{set } \mathcal{F} = 2^\Omega$ i każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest jednakowo prawdopodobne. To oznacza, że $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|}$, bo inaczej drugi warunek nie zostanie spełniony. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

2. Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy? Spróbujmy zapisać to bardzo formalnie.

$$\Omega = \{O, R\}^3,$$

$$\mathcal{F} = 2^\Omega,$$

$$A = \text{orzeł wypadł dokładnie dwa razy} = \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}.$$

Jeżeli każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, czyli moneta jest symetryczna, to

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

Tutaj zauważmy, że gdyby moneta nie była symetryczna, to ten opis sytuacji nie jest już prawdziwy i potrzebna byłaby inna konstrukcja \mathbb{P} .

3. Niech Ω będzie przeliczalna. Rozważmy ciąg p_1, p_2, \dots z przedziału $[0, 1]$ taki, że $\sum p_k = 1$. Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, to możemy ustalić, że $\mathbb{P}[\{\omega_k\}] = p_k$. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Możemy o tym wszystkim myśleć nie jako o prawdopodobieństwie, a jako o masie.

Twierdzenie: Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ zachodzą:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i A_1, A_2, \dots, A_n są parami rozłączne, to $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathbb{P}(A_k)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Jeżeli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ (w szczególności $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$)
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. $\mathbb{P}(\bigcup A_k) \leq \sum \mathbb{P}(A_k)$

Dowód: ćwiczenia



Zasada włączeń i wyłączeń: Dla $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_k\right) = \sum \mathbb{P}(A_k) - \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Dowód: ćwiczenia



Twierdzenie o ciągłości: Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, \dots \in \mathcal{F}$.

1. Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ (są wstępujące), to dla $A = \bigcup A_k$

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ (są zstępujące), to wtedy dla $B = \bigcap A_k$

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Dowód:

1. Rozważmy zdarzenia B_n dane przez

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

wtedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

i tak samo dla sumy skończonej, czyli

$$\bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_n.$$

Wtedy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup B_k\right) = \sum \mathbb{P}(B_k) = \lim \sum \mathbb{P}(B_k) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup B_N\right) = \lim \mathbb{P}(A_N)$$

2. Rozważmy teraz ciąg $C_k = A_k^c$ spełniające

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$$

Dodatkowo,

$$\bigcup C_k = \bigcup A_k^c = \left(\bigcap A_k\right)^c = B^c$$

Mamy

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup C_k\right) = 1 - \lim \mathbb{P}(C_n) = 1 - \lim(1 - \mathbb{P}(A_n)) = \lim \mathbb{P}(A_n)$$



Przykład:

1. Rozważmy kule o numerach 1, 2, 3, Wrzucamy te kule stopniowo do urny. O godzinie 12:59 wrzucamy kule o numerach 1, 2, ..., 10. Pół minuty później chcemy wyciągnąć zgodnie z jednym z trzech wariantów:

- a) kulę o numerze 1,
- b) kulę o numerze 10,
- c) losujemy kulę,

po czym dorzucamy kule o numerach 11, 12, ..., 20. Po kolejnej $\frac{1}{4}$ minuty wyciągamy

- a) kulę o numerze 2,
- b) kulę o numerze 20,
- c) losowo wybraną kulę i znowu dorzucamy kule 21, 22, 30.

Tak robimy przez minutę. Pytanie jest o to, *ile jest kul w urnie o godzinie 13 : 00?*

- a) 0
- b) ∞

c) Rozważmy kulę o numerze 1. A_n = kula 1 jest w urnie po n losowaniach. Zauważmy, że jeżeli kula była po $(n + 1)$ losowaniu, to musiała w niej też być po n losowaniach. Czyli $A_{n+1} \subseteq A_n$. W takim razie mamy zdarzenia zstępujące i możemy napisać

$$A = \bigcap A_n = \text{kula 1 jest w urnie o godzinie 13:00}$$

$$\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \dots \cdot \frac{9n}{9n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{9k}{9k+1} = \prod \left(1 - \frac{1}{9k+1}\right) \leq \prod e^{-\frac{1}{9k+1}} = e^{-\sum \frac{1}{9k+1}},$$

bo $1 - x \leq e^{-x}$. Teraz zauważmy, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+1} = \infty$$

jest rozbieżny, czyli

$$e^{-\sum \frac{1}{9k+1}} \rightarrow 0$$

a skoro prawdopodobieństwo A_n było ograniczone przez to od góry, to

$$\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_k) = 0.$$

2. Romeo i Julia umówili się na spotkanie w nocy o północy. Każde z nich może się spóźnić co najwyżej godzinę. Pierwsza osoba, która przyjdzie czeka co najwyżej 15 minut na tę drugą. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do spotkania wogóle dojdzie?* Będziemy liczyć czas w sposób ciągły.

Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, gdzie x będzie odpowiadać czasowi przyjścia Romeo, a y - kiedy przyszła Julia. Wtedy $\mathcal{F} = \text{Bor}([0, 1]^2)$, a \mathbb{P} to 2-wymiarowa miara Lebesgue'a. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \text{dojdzie do spotkania} = \{(x, y) : |x - y| \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \lambda_2(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

3. Wybieramy jednostajnie liczbę z przedziału $[0, 1]$. Wtedy \mathbb{P} to miara Lesbsegue'a, inaczej ten wybór nie będzie jednostajny.

4. [*Paradoks Bertranda*] Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa AB w okręgu jest dłuższa niż bok równobocznego trójkąta wpisanego?

