ZADANIE 1.

Udowodnić wzór włączeń i wyłączeń

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Indukcja po n. Jeżeli mamy tylko A_1, A_2, to

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Teraz załóżmy, że wzorek działa dla dowolnego ciągu długości n i weźmy ciąg długości $(n+1)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup (A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n))) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus ((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1})) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((A_{n+1} \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_{n+1} \cap A_n)) = \\
&= \sum_{i\leq n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + \\
&\quad - \left(\sum_{i\leq n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}((A_{n+1} \cap A_i) \cap (A_{n+1} \cap A_j)) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\leq n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)\right) \\
&= \sum_{i\leq n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n+1} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots + (-1)^{n+2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\leq n+1} A_i\right)
\end{aligned}$$

ZADANIE 2.

(Nierówności Boole'a) *Udowodnij nierówności* [te na niebiesko]

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\leq n} A_i\right) \leq \sum_{i\leq n} \mathbb{P}(A_i)$$

Może tutaj też indukcją? Dla A_1, A_2 jest to dość oczywiste, bo

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

gdyż $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 0$.

To teraz załóżmy, że śmiga dla dowolnego ciągu n zbiorów i weźmy ciąg $(n+1)$-elementowy.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\le n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\le n} A_i \cup A_{n+1}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\le n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i\le n} A_i\right) \le$$

$$\le \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\le n} A_i\right) \le$$

$$\le \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{i\le n} \mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \sum_{i\le n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

Pierwsza nierówność tak samo jak wcześniej, a druga nierówność z założenia indukcyjnego.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\le n} A_i\right) \ge 1 - \sum_{i\le n} \mathbb{P}(A_i^c)$$

To śmiga na podstawie poprzedniej nierówności:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) \ge 1 - \sum \mathbb{P}(A_i)$$

ZADANIE 3.

Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A_i) = 1$ *dla* $i \ge 1$, *to* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

Rozważmy ciąg B_n taki, że $B_n = \bigcap_{i\le n} A_i$. Jak wygląda prawdopodobieństwo takiego osła?

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\le n} A_i\right) \ge 1 - \sum_{i\le n} \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \sum_{i\le n}[1 - \mathbb{P}(A_i)] = 1 - \sum_{i\le n} 0 = 1$$

Skoro $\mathbb{P}(B_n) \ge 1$, to musi być równe 1.

Skorzystamy teraz z twierdzenia o ciągłości, które mówi, że dla zstępującego ciągu B_n (jakim on jest, bo to widać) mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap B_n\right) = \lim \mathbb{P}(B_n) = 1$$

a ponieważ

$$\bigcap B_n = \bigcap \bigcap_{i\le n} A_i = \bigcap A_n$$

to śmiga.

ZADANIE 4.

Rzucamy symetryczną kostką do gry do chwili otrzymania szóstki. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie podzielna przez 6?

Dziwne to zadanko. Ω to ciągi liczb $1, 2, \ldots, 5$ które na końcu mają 6. Nas interesuje ich długość. Może zróbmy tak, że rzucamy $6n$ razy kostką i zapisujemy kolejne wyniki. Zdarzenia sprzyjające to rzuty, w których 6 pojawia się po raz pierwszy na pozycji podzielnej przez 6?

To będzie ciąg rzeczy wstępujących. Dla $n = 1$ prawdopodobieństwo to po prostu

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^5}{6^6}.$$

Dka $n = 2$ jest już troszkę ciężej, ale prawdopodobieństwo to

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \frac{1}{6},$$

czyli wyrzuci 6 w 6 ruchu lub wyrzuci 6 w 12 ruchu. Uogólnić to można do

$$p_n = \sum_{i \leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} \sum_{i \leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^6}{6^6} \cdot \frac{(5/6)^{6n} - 1}{(5/6)^6 - 1} = \frac{5^5 \cdot ((5/6)^{6n} - 1)}{5^6 - 1}$$

Nie chce mi się liczyć, ale na oko to jest jakieś

$$\frac{5^5}{5^6 - 1}$$

ZADANIE 5.

Na odcinku $[0, 1]$ *umieszczono losowo punkty* L *i* M. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że:*

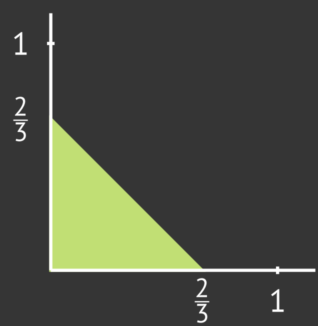
a) środek odcinka LM *należy do* $[0, \frac{1}{3}]$

Żeby ich środek był w $[0, \frac{1}{3}]$, to ich średnia arytmetyczna musi być mniejsza niż $\frac{1}{3}$, czyli

$$\frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{3}$$

$$x + y \leq \frac{2}{3}$$

No i coś takiego na płaszczyźnie to jest trójkącik

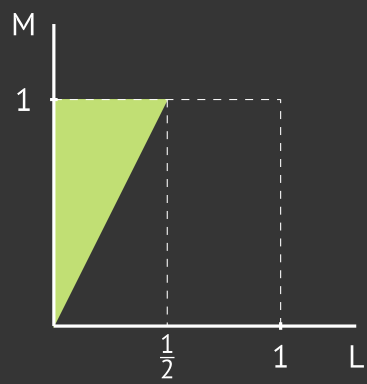


Czyli szukane prawdopodobieństwo to pole tego trójkącika, a więc $\frac{2}{9}$.

b) z L jest bliżej do M niż do zera.

Czyli $|L - M| > L$, znowu ładnie to się zaprezentuje w dwóch wymiarach. Po co oni dali zadanie o prostej, które się robi płaszczyzną?

Dla $L \geq M$ mam $|L - M| = L - M > L$, czyli $0 > M$ co tak średnio śmiga. Dla $L < M$ mam z kolei $|L - M| = M - L > L$, czyli $M > 2L$



Czyli tutaj prawdopodobieństwo to $\frac{1}{4}$.

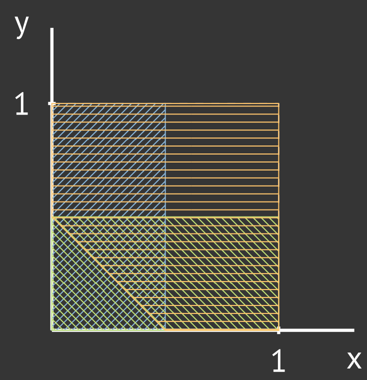
ZADANIE 6.

Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków można skonstruować trójkąt.

Osz kurwa, to będzie duuużo liczenia. Moje odcinki mają długość $x, y, 1 - y - x$. Potrzebuję spełnić następujące warunki na raz:

1. $x + y > 1 - y - x$, czyli $2x + 2y > 1$, $y > \frac{1}{2} - x$
2. $x + 1 - x - y > y$, czyli $1 > 2y$, $\frac{1}{2} > y$
3. $y + 1 - x - y > x$, czyli $1 > 2x$, $\frac{1}{2} > x$

ROZRYSUJMY TO!



Czyli to gdzie wszystkie są spełnione to ten trójkącik w środku o polu $\frac{1}{8}$.

ZADANIE 7.

Wybrano losowy punkt (x, y) z kwadratu $[0, 1]^2$. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) x jest liczbą wymierną.

To po prostu miara $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

b) obie liczby x i y są niewymierne.

A^c to co najmniej jedna liczba jest wymierna. Czyli mam A^c = x wymierny + y wymierny + oba wymierne. Oba wymierne mają prawdopodobieństwo 0, tak samo to, że x jest wymierny i że y jest wymierny też ma prawdopodobieństwo 0, czyli A^c wydaje się mieć prawdopodobieństwo 0, a więc $\mathbb{P}(A) = 1$?

c) spełniona jest nierówność $x^2 + y^2 < 1$

Czyli punkt ma wylądować w środku ćwiartki koła o promieniu 1, a więc $\mathbb{P}(A) = \frac{\pi}{4}$.

d) spełniona jest równość $x^2 + y^2 = 1$.

No to też jest miary zero? Bo ograniczam od góry przez koło o promieniu $1 + \varepsilon$ i od dołu przez $1 - \varepsilon$. Miara to ich różnica i jest dowolnie mała.

ZADANIE 8.

W kwadracie $[0, 1]^2$ wybrano losowo dwa punkty A i B. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) odcinek AB przecina przekątną łączącą wierzchołki $(0, 0)$ i $(1, 1)$

To ten, wybieram A w dolnym trójkącie, to będzie $\frac{1}{2}$ i każę B być w górnym, to też jest $\frac{1}{2}$. Jest symetryczne, więc całość to dwa razy $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) odległość punktu A od $(1, 1)$ jest mniejsza niż 1, a odległość punktu B od $(1, 1)$ jest większa niż 1

Czy to będzie wybieram A, jakie jest prawdopodobieństwo, że A będzie w środku ćwiartki koła jednostkowego. Potem wybieram B, jakie jest prawdopodobieństwo, że B nie będzie w środku tej ćwiartki. Mnożę i ta da? Czyli

$$\frac{\pi}{4} \cdot (1 - \frac{\pi}{4})$$

c) oba punkty leżą pod parabolą $y = -x(x - 1)$

To akurat to jest chyba pole pod parabolą do kwadratu?

$$\int_0^1 x(1 - x)dx = \int_0^1 x - \int_0^1 x^2 dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

czyli całość to $\frac{1}{4}$.

ZADANIE 9.

Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geq l$. Znajdź prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski.

Zgaduję, że tutaj będą zdarzenia wstępujące i rozważam n desek, ale mi się bardzo nie chce.

ZADANIE 10.

Niech $(\Omega, \mathscr{F})$ będzie przestrzenią mierzalna. Uzasadnij, że σ-ciało $\mathscr{F}$ nie może być nieskończoną przeliczalną rodziną zbiorów.

A to akurat robiłam jako pracę domową na MiC XD.

Mogę wziąć sobie dowolny $A_1 \in \mathscr{F}$. Zdefiniujmy teraz $\mathscr{F}_1$ jako tylko te zbiory z σ-algebry, które są zawarte w A_1^c. Wyciągnijmy nowy zbiór $A_2 \in \mathscr{F}_1$. Od razu widzimy, że zawsze $A_2 \cap A_1 = \emptyset$. Możemy tak lecieć dalej, zwężając za każdym razem sigma algebrę do dopełnienia A_n i brać A_{n+1} z tego zwężenia, zawsze zbiory będą parami rozłączne, bo schodzimy coraz to niżej. Ładnie to można narysować.

MÓJ NA SZYBKO DOWODZIK:

Weźmy Ω o mocy ω.

Cały dowód to skonstruowanie sobie ciągu rozłącznych zbiorów, ich różne sumy zawsze będą różne, a tych sum możemy wybrać na 2^ω, czyli $\mathscr{F}$ jest nieprzeliczalne.

To lecimy. Weźmy sobie dowolny ciąg $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \ldots \in \Omega$ oraz $\mathbb{P}(A_1) < 1$. Możemy tak zrobić, choćby dlatego, że biorą kolejno sumę coraz to większej liczby singletonów dostaję nowego pyśka. Zdefiniujmy teraz ciąg $B_1 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq A_2 \setminus A_1$ i ogólniej

$$B_n \subseteq A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

No i teraz B_n są rozłączne.

ZADANIE 11.

Oznaczmy przez $\mathscr{B}_0$ ciało składające sie ze skończonych sum rozłącznych przedziałów $(a, b]$ zawartych w odcinku $(0, 1]$. Określmy na $\mathscr{B}_0$ funkcję P taką, że $P(A) = 1$ lub 0, w zależności od tego, czy zbiór A zawiera przedział postaci $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, czy też nie. Pokaż, że P jest miarą addytywną, ale nie przeliczalnie addytywną.

Skończoną addytywność śmignie się za chwilę, najpierw uwalmy przeliczalną addytywność.

Rozważmy ciąg zbiorów zdefiniowany:

$$A_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}]$$

Oczywiście $A = \bigcup A_n = (\frac{1}{2}, 1)$, czyli $P(A) = 1$. Czy one są już rozłączne? Ej no są XD

$$A_i \cap A_{i+1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i}] \cap (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}}] = \emptyset$$

Dla dowolnego n $P(A_n) = 0$, bo nie zawiera odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$, ale już suma go zabiera, więc nie jest to funkcja przeliczalnie addytywna.

W sumie skończona addytywność jest widoczna od razu. Weźmy dowolny skończony ciąg rozłącznych pyśków.