Ściągawka algebra przemienna

kaczka dziwaczka

1. Modules

1.1. Modules and module homomorphisms

If M, N are A-modules, then $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ is also an A-module that contains all homorphisms $M \to N$.

Homomorphisms $u : M' \to M$ and $v : N \to N'$ induce mappings $\bar{u} : \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$ and $\bar{v} : \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N')$ defined: $\bar{u}(f) = f \circ u$ and $\bar{v}(f) = v \circ f$.

Dla dowolnego A-modułu M mamy $\mathrm{Hom}(A, M) \cong M$ (duh)

Podmoduł M' modułu M daje nam zajebistą grupę abelową M/M' które dziedziczy strukturę A-modułu zdefiniowaną $a(x + M') = ax + M'$.

Kokernel homomorfizmu $f : M \to N$ to

$$\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f)$$

$$M/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

1.2. Operations on submodules

- **suma podmodułów** modułu M, $(M_i)_{i\in I}$, to wszystkie skończone sumy $\sum x_i$, gdzie $x_i \in M_i$ (i tylko skończenie wiele jest niezerowych)
- **przekrój modułów** $\bigcap M_i$ to podmoduł M, czyli wszystkie podmoduły tworzą pełną kratę pod względem inkluzji (*czyli każda para elementów ma sup (suma) i inf (przekrój)* :3)
- monstrum: $(L/N)/(M/N) \cong L/M$ (czyli działa jak dzielenie ułamków $\star$
- śmieszne: $(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$
- **produkt podmodułów** zwykle jest niedefiniowalny, ale już mnożenie przez ideał $\mathfrak{a} \triangleleft A$ jest do zrobienia: jest to zbiór wszystkich skończonych sum $\sum a_i x_i$, gdzie $a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M$ i jest to podmoduł M
- **(N:P)** dla N, P podmodułów M to zbiór wszystkich takich $a \in A$, że $aP \subseteq N$ i jest to ideał A, w szczególności **anihilator** M $(0 : M)$ jest oznaczany $\mathrm{Ann}(M)$

  Moduł jest wierny (faithful), jeżeli $\mathrm{Ann}(M) = 0$. Jeżeli $\mathrm{Ann}(M) = \mathfrak{a}$, to M jest wierny jako $A/\mathfrak{a}$.

Jeżeli $M = \sum Ax_i$, gdzie Ax_i to zbiór ax_i dla wszystkich $a \in A$, to mówimy, że M jest generowany przez x_i. Jeżeli jest skończenie wiele generatorów, to jest skończenie generowany.

1.3. Direct sum and product

Suma prosta $M \otimes N$ dwóch A-modułów to zbiór wszystkich par (x, y), gdzie $x \in M, y \in N$ i nadal jest to A-moduł. Dla rodziny $(M_i)_{i\in I}$ A-modułów to $\bigotimes_{i\in I} M_i$ zbiór wszystkich rodzinek $(x_i)_{i\in I}$, gdzie tylko skończenie wiele jest niezerowych. Jeżeli dopuścimy nieskończenie zerowych, to dostajemy **produkt prosty** $\prod_{i\in I} M_i$.

Jeśli A jest produktem prostym $A = \prod_{i=1}^n A_i$, to wtedy zbiór wszystkich elementów $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0)$ jest ideałem A.

Mając rozkład $A = \mathfrak{a}_1 \otimes ... \otimes \mathfrak{a}_n$, możemy zrobić

$$A \cong \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{b}_i)$$

gdzie $\mathfrak{b}_i = \otimes_{j\neq i} \mathfrak{a}_j$ co ma sens nawet.

1.4. Finitely generated modules

Wolny A-moduł jest izomorficzny do $\bigotimes M_i$, gdzie $M_i \cong A$. To znaczy, jest sumą prostą A. Skończenie generowany A-moduł to po prostu skończenie wiele kopii A, oznaczane często A^n

M jest skończenie generowanym A-modułem $\iff$ M jest izomorficzne do ilorazu A^n dla $n \in \mathbb{N}$.

M to skończenie genrowany A-moduł, $\mathfrak{a}$ jest ideałem w A, a ϕ jest endomorfizmem M takim, że $\phi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Wtedy ϕ wyśmiguje:

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

gdzie a_i są w $\mathfrak{a}$.

Niech M będzie skończenie generowanym A-modułem i niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem w A takim, że $\mathfrak{a}M = M$. Wtedy istnieje $x \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$ taki, że $xM = 0$.

Lemat Nakayamy: niech M będzie skończenie generowanym A-modułem i $\mathfrak{a}$ będzie ideałem zawartym w radykale Jacobsona, wtedy $\mathfrak{a}M = M \implies M = 0$.

Niech M będzie skończenie generowanym A-modułem, N podmodułem M a $\mathfrak{a}$ będzie w Jacobsonie. Wtedy $M = \mathfrak{a}M + N \implies M = N$.

Niech A będzie pierścieniem lokalnym, $\mathfrak{m}$ jest ideałem maksymalnym a M skończenie generowanym A-modułem (anihilowanym przez $\mathfrak{m}$). Niech x_i będą elementami M których obrazy w $M/\mathfrak{m}M$ tworzą bazę tej przestrzeni wektorowe. Wtedy x_i generują M.

1.5. Exact sequences

Ciąg A-modułów i homomorfizmów

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \dots$$

jest **dokładny w M_i** gdy $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. Poniższe to szczególne przypadki:

- $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ jest dokładny $\iff$ f jest iniekcją
- $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ jest dokładny $\iff$ g jest surjekcją
- $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ jest dokładny $\iff$ f jest iniekcją, g jest surjekcją i g indukuje izomorfizm $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M') \cong M''$

Jeśli mamy diagram komutujący

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wtedy

$$0 \to \mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f') \xrightarrow{\overline{u'}} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{v'}} \mathrm{Coker}(f'') \to 0$$

i to ma coś wspólnego z dokładną homologia $\star$