

## ZADANIE 1.

Pokaż, że  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$  jeśli  $m, n$  są względnie pierwsze.

Założmy, że  $m, n$  są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkcy:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

## ZADANIE 2.

Niech  $A$  będzie pierścieniem,  $\alpha$  ideałem, a  $M$   $A$ -modułem. Pokaż, że  $(A/\alpha) \otimes_A M$  jest izomorficzne do  $M/\alpha M$ .  
[Stensuruj ciąg dokładny  $0 \rightarrow \alpha \rightarrow A \rightarrow A/\alpha \rightarrow 0$  z  $M$

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\alpha \rightarrow A \rightarrow A/\alpha \rightarrow 0$$

i jakiś losowy  $A$ -moduł  $M$ , to

$$\alpha \otimes M \rightarrow A \otimes M \rightarrow A/\alpha \otimes M \rightarrow 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebicie, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm  $\text{Coker}(f) = M/f(M')$  na  $M''$  ( $f$  to pierwsza funkcja, a myśki lecą  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ .)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja  $\alpha \rightarrow A$ ? To jest identyczność na  $\alpha$  lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\alpha \otimes M \cong (A \otimes M)/(\alpha \otimes M) \cong AM/\alpha M = M/\alpha M$$

## ZADANIE 3.

Niech  $A$  będzie pierścieniem lokalnym,  $M, N$  skończenie generowanymi  $A$ -modułami. Udowodnij, że  $M \otimes N = 0$  wtedy  $M = 0$  lub  $N = 0$ .

[Niech  $\mathfrak{m}$  będzie ideałem maksymalnym,  $k = A/\mathfrak{m}$  będzie residue field (to jest ciało zrobione przez wytenegowanie z tym tym). Niech  $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$  na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że  $M_k = 0 \implies M = 0$ . Ale  $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$  or  $N_k = 0$ , since  $M_k, N_k$  są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \xrightarrow{(*)} M_k \otimes_k N_k = 0 \xrightarrow{(\heartsuit)} M_k = 0 \vee N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$$(*) k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_A (k \otimes_A N) = 0$$

A to to jest raczej proste, bo jeśli  $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$ , to tym bardziej  $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$  a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję  $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$ .

( $\heartsuit$ )  $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \vee N_k = 0$ ? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na  $N$ .

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAAAAA

## ZADANIE 4.

Niech  $M_i$  ( $i \in I$ ) będzie dowolną rodziną  $A$ -modułów i niech  $M$  będzie ich sumą prostą. Pokaż, że  $M$  jest płaski  $\iff$  każdy  $M_i$  jest płaski

Mamy funktor  $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$  i on jest na kategorii  $A$ -modułów i homomorfizmów. Jeśli  $T_N$  jest dokładny, czyli tensorowanie z  $N$  przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy  $N$  jest flat  $A$ -modułem.

$$\Leftarrow \text{ pójdzie chyba z faktu, że } (M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

$\implies$  czyli wiem, że tensorowanie przez sumę  $\bigoplus M_i$  daje nam dalej ciąg dokładny i z tego chce dostać, że tensorowanie przez każdy z kolei też daje nam ciąg dokładny. A to nie jest jakoś z tego, że mogę sobie obcinać te funkcje do współrzędnych i na tych współrzędnych one muszą mieć te same własności, czyli w szczególności będą na każdej współrzędnej dokładne?

## ZADANIE 5.

Niech  $A[X]$  będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem  $A$ . Pokaż, że  $A[X]$  jest płaską  $A$ -algebrą.

No jak dla mnie to taki  $A[X]$  mogę przedstawić jako sumą prostą przeliczalnie wielu  $A$ . No i teraz wystarczyłoby, żeby  $A$  było płaskie, ale co to jest  $A$ -algebra? No to jest pierścień wyposażony w strukturę  $A$ -modułu. Dlaczego ja nic nie formalizuję