Własności $\otimes$

Uwaga 12.3. M_1, M_2 : R-moduły

Niech $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \otimes M_2 \; : f(m_1, m_2) = m_1 \otimes m_2$.

Wtedy f : 2-liniowe (często oznaczane przez $\otimes$)

oraz $(\forall N : R\text{-moduł})(\forall\, g : M_1 \times M_2 \xrightarrow[\text{2-liniowe}]{} N)$

$\exists!\, h : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow N$ R-liniowy t.że

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times M_2 \arrow[r, "\otimes = f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\#"] & M_1 \otimes M_2 \arrow[d, dashed, "h"] \\
& N
\end{tikzcd}$$

$(*)$

(warunek uniwersalności)

(tzn: $f = \otimes$: najmniej „zdegenerowane" odwzorowanie (najogólniejsze) 2-liniowe z $M_1 \times M_2$ w jakikolwiek R-moduł).

D-d

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \otimes M_2 = X/L \arrow[dd, dashed, "h"] \arrow[d, phantom, "\#"] & \\
M_1 \times M_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, hook, "f_0 = id"] \arrow[dr, "g"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & X \arrow[ul, "j : \text{ilorazowe}"'] \arrow[dl, dashed, "l"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

X ← R-moduł wolny o bazie $M_1 \times M_2$

l : R-homomorfizm t. że

$l(\langle m_1, m_2 \rangle) = g(m_1, m_2)$.

ten warunek wyznacza l, bo X : wolny.

$g = l \circ f_\otimes$ dwuliniowe $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\operatorname{Ker} l \supseteq L}}$, bo:

(*)

$$g(m_1+m_1', m_2) = g(m_1,m_2) + g(m_1',m_2) \quad (*)$$
$$\Downarrow$$
$$l(\langle m_1+m_1', m_2\rangle) = l(\langle m_1,m_2\rangle) + l(\langle m_1',m_2\rangle)$$
$$\Downarrow$$
$$l\Big(\underbrace{\langle m_1+m_1', m_2\rangle - [\langle m_1,m_2\rangle + \langle m_1',m_2\rangle]}_{\in \operatorname{Ker} l}\Big) = 0$$

~~więc~~ więc: $\in \operatorname{Ker} l$

typowy generator L jako R-podmodułu X

podobnie dla innych generatorów L,

więc: $\{\text{generatory } L\} \subseteq \operatorname{Ker} l \Rightarrow L \subseteq \operatorname{Ker} l$.

$$L = \operatorname{Ker} j$$

z tw. o faktoryzacji R-homomorfizmów: $\exists!\, h : M_1 \otimes M_2 \to N$ t. że
R-liniowe diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \otimes M_2 \arrow[d, dashed, "h"] & \\
M_1 \times M_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & N & X \arrow[ul, "j"'] \arrow[l, "l"]
\end{tikzcd}$$

komutuje.

jedyność h: ćwiczenie.

Uwaga 12.4. Warunek (*) w Uwadze 12.3 wyznacza $M_1 \otimes M_2$ z dokładnością do $\cong$.

D-d (kategoryjny, skrótowy)

Załóżmy, że $M_1 \times M_2 \xrightarrow{f'} M_1 \otimes' M_2$ R-2-liniowe spełniające warunek $(*)$.
(w wersji dla f': $(*')$)

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \otimes M_2 \arrow[dd, bend right, "(*) \Rightarrow \exists! h"'] \\
M_1 \times M_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
 & M_1 \otimes' M_2 \arrow[uu, bend right, "\exists! h' \Leftarrow (*')"']
\end{tikzcd}$$

$h \circ h' = id_{M_1 \otimes' M_2}$ i $\underbrace{h' \circ h = id_{M_1 \otimes M_2}}_{\text{np. to} \uparrow :}$ $\Rightarrow$ h: izomorfizm R-modułów + komutowanie diagramu

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \otimes M_2 \arrow[dd, bend right, "h' \circ h"'] \arrow[dd, bend left, "id"] \\
M_1 \times M_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & M_1 \otimes M_2
\end{tikzcd}$$

~~z warunku~~
z jedyności h w $(*)$:
$h' \circ h = id_{M_1 \otimes M_2}$.

Dlatego: $M_1 \otimes M_2$ (i $M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_k$)
można definiować "abstrakcyjnie" przez kategoryjny warunek uniwersalności $(*)$.