Zadanie 15. W sytuacji jak w zadaniu 14 pokaż, że każdy element M można przedstawić jako $\mu_i(x_i)$ dla pewnego $i \in I$ oraz $x_i \in M_i$.

Pokaż również, że jeżeli $\mu_i(x_i) = 0$, wtedy istnieje $j \geq i$ takie, że $\mu_{ij}(x_i) = 0$ w M_j.

Po pierwsze, weźmy sobie jakieś $x \in M$. Ono tak naprawdę siedzi w C ale bez D (bo $M = C/D$), czyli $x = \sum \mu_i(x_i)$. Super. To teraz my wiemy, że i jest częściowo uporządkowane i że elementy C mają niezera na skończenie wielu miejscach, czyli musi istnieć jakieś j takie, że

$$x = \sum \mu_i(x_i) = \sum_{i \leq j} \mu_i(x_i).$$

Ale my mamy powiedzialne, że jeśli $i \leq j$, to $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$, czyli

$$\sum_{i \leq j} \mu_i(x_i) = \sum_{i \leq j} \mu_j(\mu_{ij}(x_i)) = \mu_j \left[\sum \mu_{ij}(x_i) \right],$$

a przecież $\sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i) \in M_j$

Niech x_i takie, że $\mu_i(x_i) = 0$. Wtedy istnieje $j \geq i$ takie, że $0 = \mu_i(x_i) = \mu_j(\mu_{ij}(x_j))$.

Zadanie 16. Pokaż, że prosta granica jest określona (z dokładnością do izomorfizmu) przez następującą własność. Niech N będzie A-modułem i niech dla każdego $i \in I$ $\alpha_i : M_i \to N$ będzie homomorfizmem A-modułów takim, że $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ zawsze gdy $i \leq j$. Wtedy istnieje unikalny homomorfizm $\alpha : M \to N$ taki, że $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ dla wszystkich $i \in I$.

TY DEBILU NIE TO POKAZYWAŁAŚ, ŻE JEST JEDYNE, TO M MAJĄ BYĆ JEDYNE A NIE α

Jedyność: Załóżmy, że dwie granice proste spełniają ten diagram:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, "\alpha_i"] \arrow[dd, "\mu_{ij}"'] & & \\
& M, M' \arrow[r, "\alpha"] & N \\
M_j \arrow[ur, "\mu_j"] \arrow[urr, "\alpha_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mamy $\alpha_i = \mu_i \circ \alpha_i : M_i \to M'$ i $\alpha_i' = \mu_i \circ \alpha_i$.

Chcemy wybrać szczególną rodziną α_ii.

Zadanie 17. Niech $(M_i)_{i \in I}$ będzie rodziną podmodułów A-modułu takich, że dla każdej pary indeksów $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ takie, że $M_i + M_j \in M_k$. Zdefiniujemy $i \leq j$ przez $M_i \subseteq M_j$ i niech $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ będzie włożeniem M_i w M_j. Pokaż, że

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i.$$

W szczególności, dowolny A-moduł jest prosta granicą skończenie generowanych podmodułów.

Najpierw to drugie pytanie. Niech S będzie zbiorem skończenie generowanych podmodułów M. Od razu widać, że jest to zbiór uporządkowany przez zawieranie. Niech $x \in M$. No raczej nie może być nieskończoną sumą generatorów, tylko musi być sumowany przez skończenie wiele ziomeczków, czyli jego generatory są w skończenie wielu M_i, czyli są w $\bigcup M_i$, czyli jest to $\varinjlim M_i$ na mocy pierwszej części ćwiczenia.

To teraz powrót do pierwszej części zadanka. Wydaje mi się, że $\bigcup M_i \subseteq \sum M_i$ jest dość proste. $\sum M_i \subseteq \varinjlim M_i$ brzmi jak coś z definicji. Zostaje mi, że $\varinjlim M_i \subseteq \bigcup M_i$. To weźmy sobie dowolnego $x \in M$, wiem że istnieje $x_i \in M_i$ takie, że $\mu_i(x_i) = x$ no i to mi chyba kończy dowód? Bo μ_i to tak naprawdę identyczność obcięta do M_i?

Zadanie 18. Niech $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{ij})$, $\mathbb{N} = (N_i, \nu_{ij})$ będą skierowanymi systemami A-modułów nad tym samym skierowanym zbiorem. Niech M, N będą ich skierowanymi granicami i $\mu_i : M_i \to M$, $\nu_i : N_i \to N$ związanymi z nimi homomorfizmami.

Homomorfizm $\phi : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ jest z definicji rodziną homomorfizmów A-modułów $\phi_i : M_i \to N_i$ takich, że $\phi_i \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \phi_i$ zawsze gdy $i \leq j$. Pokaż, że ϕ definiuje unikalny homomorfizm $\phi = \varinjlim \phi_i : M \to N$ taki, że $\phi \circ \mu_i = \nu_i \circ \phi_i$ dla wszystkich $i \in I$.