

# Rozmaite cierpienia

Na podstawie wykładów  
**Prof. Świątkowskiego**  
w semestrze letnim 2022/2023



oraz *Introduction to Smooth Manifolds* J.M. Lee

# Spis treści

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Definiowanie rozmaiłości</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Rozmaiłość topologiczna . . . . .                                       | 3         |
| 1.2      | Mapy, współrzędne lokalne . . . . .                                     | 5         |
| 1.3      | Rozmaiłości gładkie (różniczkowalne) . . . . .                          | 7         |
| 1.4      | Warianty pojęcia rozmaiłości różniczkowalnej . . . . .                  | 11        |
| 1.5      | Dopowiedzenie o funkcjach gładkich . . . . .                            | 11        |
| 1.6      | Dyfeomorfizmy . . . . .   | 12        |
| 1.7      | $C^k$ -różniczkowalność odwzorowań rozmaiłości . . . . .                | 13        |
| 1.8      | Definiowanie rozmaiłości gładkiej $X$ za pomocą samego atlasu . . . . . | 14        |
| 1.9      | Rozmaiłość gładka z brzegiem . . . . .                                  | 16        |
| <b>2</b> | <b>Rozkład jedności</b>   | <b>20</b> |
| 2.1      | Lokalnie skończone rozdrobnienie . . . . .                              | 20        |
| 2.2      | Twierdzenie o rozkładzie jedności . . . . .                             | 23        |
| 2.3      | Zastosowania rozkładów jedności . . . . .                               | 24        |
| 2.4      | Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności . . . . .         | 26        |
| <b>3</b> | <b>Dyskretnie ilorazy rozmaiłości</b>                                   | <b>27</b> |
| 3.1      | Klejenie rozmaiłości wzdłuż brzegu . . . . .                            | 27        |
| 3.2      | Suma spójna rozmaiłości . . . . .                                       | 29        |
| 3.3      | Działanie grupy dyfeomorfizmów . . . . .                                | 31        |
| 3.4      | Gładki atlas na $M/G$ . . . . .   | 34        |
| <b>4</b> | <b>Wektory styczne</b>  | <b>40</b> |
| 4.1      | Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna . . . . .                   | 40        |
| 4.2      | Struktura wektorowa przestrzeni $T_pM$ . . . . .                        | 41        |
| 4.3      | Różniczka . . . . .   | 43        |
| 4.4      | Wiązka styczna . . . . .  | 46        |
| <b>5</b> | <b>Pola wektorowe</b>   | <b>50</b> |
| 5.1      | Definiowanie pola wektorowego za pomocą rozkładów jedności . . . . .    | 51        |
| 5.2      | Przenoszenie gładkich pól wektorowych przez dyfeomorfizmy . . . . .     | 53        |
| 5.3      | Krzywe całkowe . . . . .  | 54        |
| 5.4      | Zastosowania potoków pól wektorowych . . . . .                          | 61        |
| 5.5      | Interpretacja pól wektorowych jako derywacji . . . . .                  | 65        |
| <b>6</b> | <b>Komutator i pochodna Liego</b>                                       | <b>68</b> |
| 6.1      | Komutator pól wektorowych . . . . .                                     | 68        |
| 6.2      | Komutator w lokalnych współrzędnych . . . . .                           | 69        |
| 6.3      | Definicja pochodnej Liego . . . . .                                     | 69        |
| 6.4      | Własności . . . . .   | 72        |
| 6.5      | Komutowanie potoków . . . . .   | 74        |
| 6.6      | Wyprostowanie komutujących pól wektorowych . . . . .                    | 76        |
| <b>7</b> | <b>Rozmaiłości orientowalne</b>   | <b>78</b> |
| 7.1      | Orientacja w przestrzeni wektorowej $V$ wymiaru $n$ . . . . .           | 78        |
| <b>8</b> | <b>Podrozmaiłości</b>   | <b>82</b> |

# 1. Definiowanie rozmaitości

## 1.1. Rozmaitość topologiczna

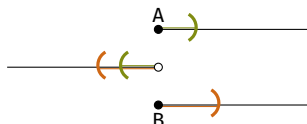
**Definicja 1.1.** Przestrzeń topologiczna  $M$  jest  $n$ -wymiarową rozmaitością ( $n$ -rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru  $n$ , tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^n$

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt  $p \in M$  otoczenia  $U$  takiego, że istnieje homeomorfizm  $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ . [ćwiczenia]

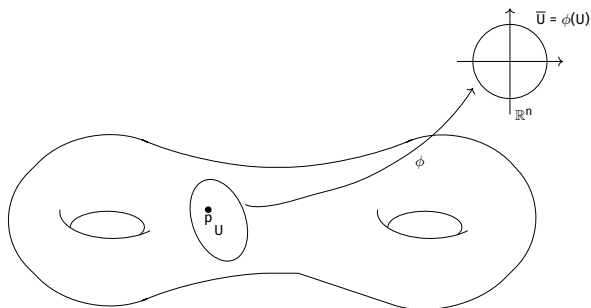
### Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów  $A$  i  $B$  nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z  $\mathbb{R}^n$  przenoszą się na  $M$  przez homeomorfizmy, np dla podzbioru  $U \subseteq M$  i homeomorfizmu  $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ :



Dodatkowo, dla dowolnego **zwanego**  $\bar{K} \subseteq \bar{U}$  jego odpowiednik na  $M$ , czyli  $K = \phi^{-1}(\bar{K}) \subseteq U$ , jest **domknięty i zwarty** [ćwiczenia]. Jeśli zaś  $\bar{K}$  jest zbiorem domknięty w  $\bar{U}$ , ale niezwanym, to nie zawsze  $K$  jest domknięty w  $M$ . Weźmy np.  $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \mathbb{R}^n$

i zbiór domknięty  $\bar{K} = \mathbb{R}^n$  (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy  $K = \phi^{-1}(\bar{K}) = U$  jest otwartym podzbiorem  $M$  mimo, że  $\bar{K}$  jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

### Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii  $\mathbb{R}^n$  nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie  $M$  do  $\mathbb{R}^n$  dla odpowiednio dużego  $n$ . Czyli na przykład  $S^2$ , sfera, ma naturalne włożenie w  $\mathbb{R}^3$  pomimo lokalnej euklidesowości z  $\mathbb{R}^2$ .

Rodzina  $\mathcal{U}$  podzbiorów  $M$  jest **lokalnie skończona**, jeżeli każdy punkt  $p \in M$  ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z  $\mathcal{U}$ . Jeżeli  $M$  ma dwa pokrycia:  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{V}$  takie, że dla każdego  $V \in \mathcal{V}$  znajdziemy  $U \in \mathcal{U}$  takie, że  $V \subseteq U$ , to  $\mathcal{V}$  jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem**  $\mathcal{U}$ . Dzięki przeliczalności bazy  $M$ , każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

### Lokalna euklidesowość

**Twierdzenie 1.2. Twierdzenie Brouwer'a** Dla  $m \neq n$  otwarty podzbiór  $\mathbb{R}^n$  nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^m$ .

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba  $n$  jest przypisana do  $M$  jednoznacznie i nazywa się **wymiarem**  $M$  ( $\dim(M) = n$ ). Jeśli wymiar rozmaitości  $M$  wynosi  $n$ , to nazywamy ją czasem  **$n$ -rozmaitością**.

### Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w  $\mathbb{R}^n$ , których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna  $\iff$  jest łukowo spójna. Składowe spójności  $M$  są równe składowym łukowej spójności  $M$ .
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego  $n$ . Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość  $M$  nie jest przez nas wymagana.

## 1.2. Mapy, współrzędne lokalne

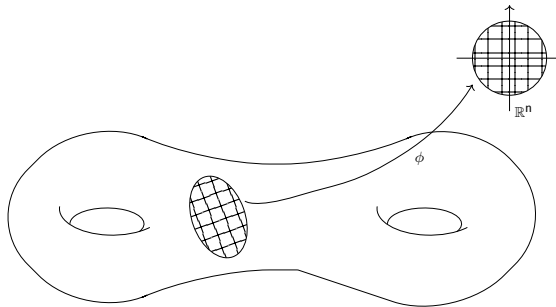
**Definicja 1.3.** Mapą na rozmaitości topologicznej  $M$  nazywamy parę  $(U, \phi)$ , gdzie  $U$  jest otwartym podzbiorem  $M$ , zaś  $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w  $\mathbb{R}^n$ . Zbiór  $U$  nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**

Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to  $M$  jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy  $(U, \phi)$  takiej, że  $p \in U$  i  $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$  mówimy, że jest **mapą wokół  $p$** . Za pomocą translacji możemy każdą mapę zawsze przesunąć tak, aby  $\phi(p) = 0$ . Czyli możemy odgórnie zakładać, że mapa  $(U, \phi)$  jest mapą o początku w  $p$ .

Często będziemy przechodzić do coraz to mniejszych zbiorów mapowych poprzez branie odwzorowań obciętych co nie burzy gładkości ani zgodności z atlasem. Pozwoli to np. zakładać, że dla  $p \notin F$  domkniętego bierzemy mapę  $(U, \phi)$  taką, że  $U \cap F = \emptyset$ .

Mapy nazywa się też czasem **lokalnymi współrzędnymi** na  $M$  lub **lokalną parametryzacją**  $M$ . Ponieważ o mapie można myśleć jako o przeniesieniu siatki współrzędnych  $(x_1, \dots, x_n)$  z  $\bar{U} = \phi(U)$  przez  $\phi^{-1}$  na  $U$ , to będziemy często utożsamiać  $U \subseteq M$  z  $\bar{U}$ . O punkcie  $p \in M$  takim, że  $\phi(p) = (x_1, \dots, x_n)$  będziemy myśleć jako o  $p = (x_1, \dots, x_n)$ .



### Przykłady:

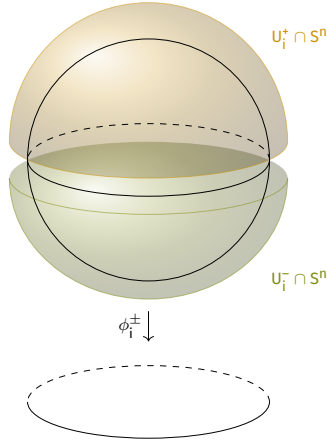
1. Każdy otwarty podzbiór  $n$ -rozmaitości topologicznej jest  $n$ -rozmaitością [ćwiczenia].
2. **Wykresy ciągłych funkcji:** Niech  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest funkcją ciągłą. Wykresem  $f$  nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

Oznaczmy przez  $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  projekcję na  $\mathbb{R}^n$ , tzn.  $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$ . Wtedy funkcja  $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$  będąca obcięciem  $\pi_1$  do  $\Gamma(f)$ . Ponieważ  $\phi$  jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(f)$  dana przez  $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$ , jest ciągłą funkcją odwrotną do  $\phi$ . W takim razie,  $\phi$  jest homeomorfizmem między  $U$  a  $\Gamma(f)$  i wykres funkcji ciągłych jest

lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaiłością topologiczną.

3. Sfery  $S^n$  są  $n$ -rozmaiściami, które wkładają się w  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$ ).



Rozważmy rodzinę par  $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, \dots, n+1\}$  na  $S^n$  zdefiniowanych jako:

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Zbiory  $U_i^\pm$  pokrywają całą  $S^n$ , gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje  $\phi_i^\pm$  są ciągłe jako obcięcia rzutów  $\mathbb{R}^{n+1}$  na  $\mathbb{R}^n$ . Obrazem zbioru  $U_i^\pm$  przez  $\phi_i^\pm$  jest zbiór

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w  $\mathbb{R}^n$ .

Odwzorowania  $\phi_i^\pm$  są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie  $\phi_i^\pm$  są homeomorfizmami między otwartymi podzbiórmi  $S^n$  a otwartymi podzbiórmi  $\mathbb{R}^n$ .

Oznaczenie  $\widehat{x_i}$  oznacza "wyrzucenie" danej współrzędnej.

Pokazaliśmy lokalną euklidesowość  $S^n$ , natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie  $S^n$  dziedziczy z  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

4. Produkt kartezjański dwóch (lub  $k$ ) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].
5.  $n$ -torus jest przestrzenią produktową  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  i  $n$ -rozmaitością topologiczną.  $T^2$  nazywamy po prostu torusem.

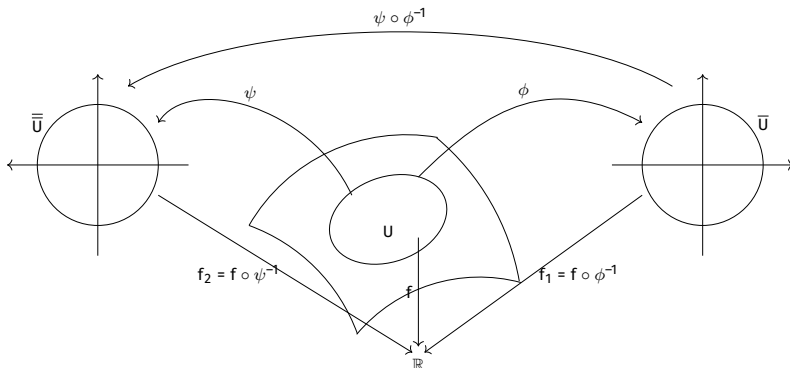
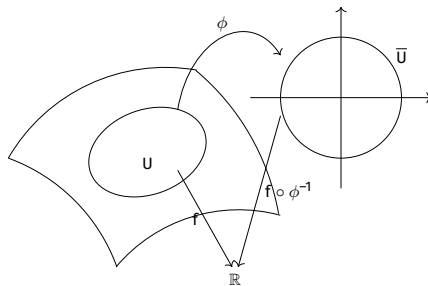
### 1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

Dla funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  chcemy rozpoznawać je różniczkowalność za pomocą map  $(U, \phi)$  na  $M$ .

Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  **wyrażona w mapie**  $(U, \phi)$  to złożenie  $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicja 1.4.** Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy  $(U, \phi)$  na  $M$   $f \circ \phi^{-1}$  jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy  $(U, \phi)$   $f$  może być gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy  $(U, \psi)$  to może się okazać, że  $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$  nie jest gładka:

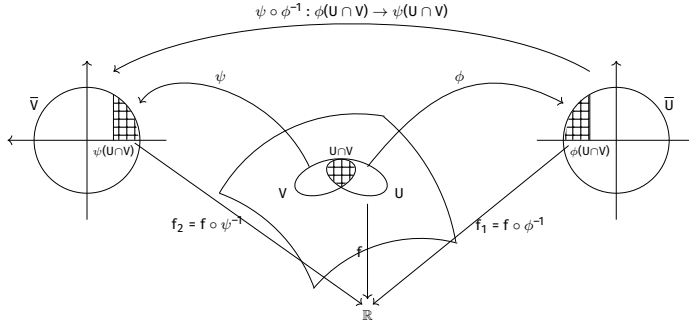


Dlatego chcemy móc założyć, że  $\phi \circ \psi^{-1}$  jest przekształceniem gładkim.

**Definicja 1.5.** Mapy  $(U, \phi), (V, \psi)$  nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy  $\phi \circ \psi^{-1}$  i  $\psi \circ \phi^{-1}$  są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania  $\phi\psi^{-1}$  nazywamy **odwzorowaniami przejćia** z jednej mapy do drugiej. Jeřli  $\phi\psi^{-1}$  i  $\psi\phi^{-1}$  sę gędkie, to sę one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** (def. 1.14) pomiędy otwartymi podzbiorami  $\mathbb{R}^n$ . Zauwaźmy, że w kaźdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych częstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy  $U \cap V \neq \emptyset$ , rysunek wyględa:



Mapy  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  nazywamy zgodnymi, jeřli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejćia

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

oraz

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

sę gędkie ( $\iff$  sę dyfeomorfizmami podzbiorów  $\phi(U \cap V)$  i  $\psi(U \cap V)$ ).

**Definicja 1.6. Gędkim atlasem**  $\mathcal{A}$  na rozmaićności  $M$  nazywamy zbiór map  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  takich, że:

- $\{U_\alpha\}$  pokrywaję całe  $M$
- kaźde dwie mapy z tego zbioru sę zgodne.

### Przykłady:

1. Rodzina map  $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$  na sferze  $S^n$  jest atlasem gędkim na  $S^n$ . Dla przykędu zbadamy zgodność map  $(U_i^+, \phi_i^+)$  i  $(U_j^+, \phi_j^+)$  dla  $i < j$ .

Popatrzmy jak wyględaję interesujęce nas zbiory:

$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

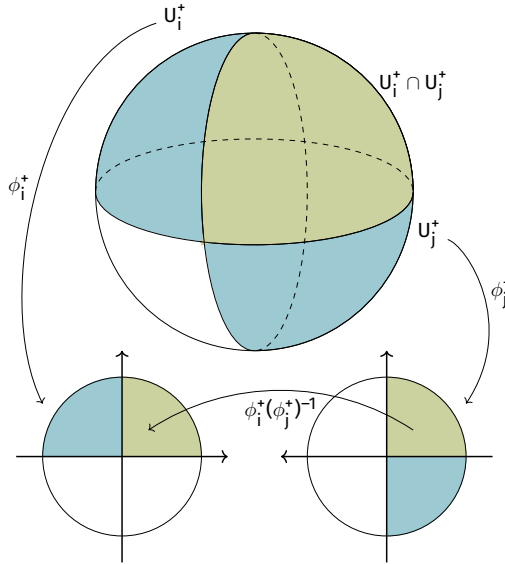


$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

bo usuwamy  $i$ -tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\}$$

bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od  $i$ , więc jej położenie nie zmienia się.



$$\begin{array}{ccc}
 (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 \cap & & \downarrow \phi_i^+ \\
 \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\} & & (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 & & \cap \\
 & & \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}
 \end{array}$$

Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

2. Jeřli  $V$  jest przestrzenią liniową wymiaru  $n < \infty$  nad  $\mathbb{R}$ , to dowolna norma określona na  $V$  zadaje metrykę, która pozwala okrećlić na  $V$  topologię (identyczną dla równoważnych norm). Z taką topologią  $V$  jest  $n$ -rozmaićnością z naturalnie zdefiniowaną strukturą.

Niech  $(e_1, \dots, e_n)$  będzie bazą  $V$ . Rozważmy izomorfizm  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  zadany przez

$$E(x) = \sum_{i \leq n} x^i e_i.$$

Funkcja ta w kontekście topologicznym jest homeomorfizmem, więc  $(V, E^{-1})$  jest mapą na  $V$ .

Jeřli  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  jest inną bazą na  $V$ , to mamy homeomorfizm

$$\bar{E}(x) = \sum x^i \bar{e}_i$$

Istnieje wtedy pewna odwracalna macierz  $(A_i^j)$  taka, że

$$e_i = \sum A_i^j \bar{e}_j$$

dla kaźdego  $i$ .

Stąd modworowanie przejřcia między tymi dwoma mapami jest zadana przez  $\bar{E}^{-1} \circ E(x) = \bar{x}$ , gdzie  $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  jest zadane przez

$$\sum_{j \leq n} \bar{x}^j \bar{e}_j = \sum_{i \leq n} x^i e_i = \sum_{i,j \leq n} x^i A_i^j \bar{e}_j \implies \bar{x}^j = \sum_{i \leq n} A_i^j x^i$$

W takim razie jakakolwiek mapa wysyłająca  $x$  na  $\bar{x}$  jest odwracalna i liniowa  $\implies$  jest dyfeomorfizmem. Stąd dowolne dwie mapy  $(V, E)$  są gładko zgodne i ich rodzina definiuje na  $V$  standardową gładką strukturę.

**Definicja 1.7. Rozmaićnością gładką** nazywamy parę  $(M, \mathcal{A})$ , gdzie  $M$  jest rozmaićnością topologiczną, zaś  $\mathcal{A}$  jest pewnym atlasem gładkim na  $M$ .

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaićności topologicznej  $M$  mogą zadawać tę samą rozmaićność gładką. Na przykład dla  $M = \mathbb{R}^n$  istnieje atlas zawierający jedną mapę  $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$  oraz atlas  $\{(B_x(r), \text{id}_{B_x(r)}) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ , który jest tak naprawdę "rozdrobnieniem" pierwszego atlasu.

**Definicja 1.8.** Niech  $\mathcal{A}$  będzie gładkim atlasem na  $M$ .

1. Mapa  $(U, \phi)$  jest zgodna z  $\mathcal{A}$ , jeřli jest zgodna z kaźdą mapą  $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ .
2. Dwa atlasy  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  na  $M$  są zgodne, jeřli kaźda mapa z  $\mathcal{A}_1$  jest zgodna z  $\mathcal{A}_2$ .

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotnią i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaićności gładkiej na topologicznej rozmaićności  $M$ . Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było

przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

**Definicja 1.9.**  $\mathcal{A}$  jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości  $M$ , jeśli każda mapa zgodna z  $\mathcal{A}$  należy do  $\mathcal{A}$ .

Każdy atlas  $\mathcal{A}$  na  $M$  zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z  $\mathcal{A}$  [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę  $(M, \mathcal{A})$ , gdzie  $M$  jest rozmaitością topologiczną, a  $\mathcal{A}$  jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

## 1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

Mówimy, że mapy  $(U, \phi), (V, \psi)$  są  $C^k$ -zgodne jeśli  $\phi \circ \psi^{-1}$  i  $\psi \circ \phi^{-1}$  są funkcjami klasy  $C^k$  (posiadają pochodne cząstkowe rzędów  $\leq k$ ).  $C^k$ -atlas to z kolei rodzina  $C^k$ -zgodnych map, która określa strukturę  $C^k$ -rozmaitości na  $M$ . Struktura  $C^k$ -rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy  $C^m$  dla  $m > k$ .

$C^0$  rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a  $C^\infty$ -rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

**Dychotomia  $C^0$  i  $C^k$  dla  $k > 0$**  aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu  $C^1$ -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map  $C^\infty$ -zgodnych. Zatem, każda  $C^1$ -rozmaitość posiada  $C^1$ -zgodną strukturę  $C^\infty$ -rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak  $C^0$ -rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne  $[C^\omega]$ . Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w  $C^n$  zamiast  $\mathbb{R}^n$ .
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

## 1.5. Odpowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka względem atlasu  $\mathcal{A}$  na  $M$ , jeśli dla każdej mapy  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$   $f \circ \phi^{-1}$  jest gładka.

**Fakt 1.10.**

- Jeśli  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka względem  $\mathcal{A}$ , zaś  $(U, \phi)$  jest mapą zgodną z  $\mathcal{A}$ , to  $f \circ \phi^{-1}$  jest gładka.

- Jeśli  $\mathcal{A}_1$  i  $\mathcal{A}_2$  są zgodnymi atlasami, to  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładką względem  $\mathcal{A} \iff f$  jest gładką względem  $\mathcal{A}_2 \iff f$  jest gładką względem atlasu maksymalnego  $\mathcal{A}_{\max}$  zawierającego  $\mathcal{A}_1$  i  $\mathcal{A}$ .

**Dowód.** Ćwiczenia



**Fakt 1.11.** Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie.

**Dowód.** Niech  $f : M \rightarrow N$  i  $g : N \rightarrow P$  będą gładkimi funkcjami. Weźmy  $p \in M$  oraz oznaczmy  $q = f(p) \in N$ ,  $s = g(q) = g(f(p)) \in P$ . Niech  $(U, \phi), (V, \psi), (W, \xi)$  będą mapami odpowiednio wokół  $p, q, s$ .

Wiemy, że  $\psi f \phi^{-1}$  oraz  $\xi g \psi^{-1}$  są funkcjami gładkimi. Chcemy sprawdzić, czy  $\xi(g \circ f) \phi^{-1}$  jest funkcją gładką.

$$\xi(g \circ f) \phi^{-1} = (\xi g \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})$$

jest złożeniem dwóch funkcji gładkich między  $\mathbb{R}^n$ -ami, więc  $g \circ f$  jest gładką funkcją między rozmaitościami.



**Definicja 1.12. Rzędem funkcji**  $f : M \rightarrow N$   $C^1$ -różniczkowalnego (def. 1.15) w punkcie  $p$  nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania  $\psi f \phi^{-1}$  w  $\phi(p)$ .

**Fakt 1.13.** Powyższa liczba [rząd funkcji w  $p$ ] nie zależy od wyboru mapy wokół  $p$  ani wokół  $f(p)$ .

**Dowód.** Szkieletowy.

Dla map  $(U, \phi), (V, \psi)$  oraz  $(U', \phi'), (V', \psi')$  chcemy porównać rząd macierzy jacobianu  $\hat{f} = \psi f \phi^{-1}$  oraz  $\hat{f}' = \psi' f (\phi')^{-1}$ . Wiemy, że

$$\hat{f}' = \alpha \hat{f} \beta,$$

gdzie  $\alpha = \psi' \psi^{-1}$  i  $\beta = \phi(\phi')^{-1}$ .

Macierz jacobianu złożenia to iloczyn macierzy jacobianu funkcji składowych. Macierz jacobianu odwzorowań przejścia jest nieosobliwa [są one bijekcjami]. W takim razie domnożenie przez jacobian  $\alpha$  i  $\beta$  nie zmienia rzędu jacobianu  $\hat{f}$ .



## 1.6. Dyfeomorfizmy

**Definicja 1.14.** Gładkie odwzorowanie  $f : M \rightarrow N$  nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli jest wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) oraz odwzorowanie do niego odwrotne  $f^{-1}$  jest gładkie.

Dwie rozmaitości  $M, N$  są **dyfeomorficzne**, jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm. Są one wtedy nierozróżnialne jako gładkie rozmaitości.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda  $C^1$ -rozmaićność posiada  $C^1$ -zgodną strukturę  $C^\infty$  rozmaićności. Teraz możemy dopowiedzieć, że jeśli dwie  $C^\infty$ -rozmaićności są  $C^1$ -dyfeomorficzne, to są one też  $C^\infty$ -dyfeomorficzne. Stąd klasyfikacja  $C^1$  rozmaićności różniczkowalnych z dokładnością do  $C^1$ -dyfeomorfizmu jest taka sama jak klasyfikacja  $C^\infty$  rozmaićności z dokładnością do  $C^\infty$  dyfeomorfizmu.

Wiemy już, że istnieją  $C^0$ -rozmaićności bez struktury  $C^\infty$ -rozmaićności. Możemy teraz dodać do tego fakt, że istnieją  $C^0$ -rozmaićności które nie są dyfeomorficznie zgodne jako  $C^\infty$  rozmaićności. W 1956 pokazano, że dla sfer  $S^n$   $n \geq 7$  istnieje skończenie wiele takich niedyfeomorficznych struktur.

W latach 1980 pokazano, że na  $\mathbb{R}^4$  istnieje nieprzeliczalnie wiele struktur o których mowa wyżej. Z kolei przypadku  $\leq 3$  związek pomiędzy  $C^0$  a  $C^\infty$  jest taki jak pomiędzy  $C^1$  a  $C^\infty$ .

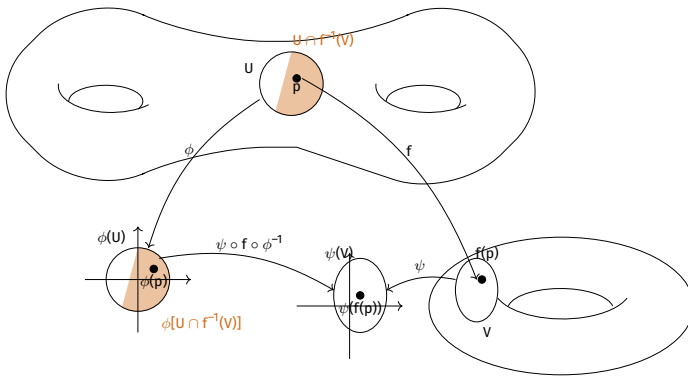
## 1.7. $C^k$ -różniczkowalność odwzorowań rozmaićności

**Definicja 1.15.** Dla  $M, N$  gładkich rozmaićności i  $f : M \rightarrow N$  ciągłej mówimy, że  $f$  jest  $C^k$ -różniczkowalna w punkcie  $p$ , jeśli dla dowolnych map  $(U, \phi) \ni p$  oraz  $(V, \psi) \ni f(p)$  złożenie

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U \cap f^{-1}(V)] \rightarrow \psi(V)$$

jest  $C^k$ -różniczkowalne w punkcie  $\phi(p)$ .

$f$  jest  $C^k$  na otoczeniu  $p$ , jeśli  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  jest  $C^k$  różniczkowalne na pewnym otwartym otoczeniu  $\phi(p)$ .



Funkcję  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  jest nazywana **wyrażeniem  $f$  w mapach  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$**  lub też wyrażeniem  $f$  w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy.

**Fakt 1.16.** Jeśli  $f$  wyrażona w mapach  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  jest  $C^k$ -różniczkowalna w punkcie  $\phi(p)$  [na jego otoczeniu] to wyrażona w innych mapach  $(U', \phi')$ ,  $(V', \psi')$  też jest  $C^k$  różniczkowalna wokół  $p$  [na jego otoczeniu].

**Dowód.** Niech  $\widehat{f} = \psi f \phi^{-1}$  a  $\widehat{f} = \psi' f(\phi')^{-1}$ . Oznaczmy odwzorowania przejścia  $\alpha = \phi(\phi')^{-1}$  oraz  $\beta = \psi' \psi^{-1}$ . Zachodzi

$$\widehat{f} = \beta \circ \widehat{f} \circ \alpha = (\psi' \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})(\phi(\phi')^{-1}) = \psi' f(\phi')^{-1}.$$

Zarówno  $\widehat{f}$  jak i  $\beta \widehat{f} \alpha$  są funkcjami określonymi na pewnych podzbiorach  $\mathbb{R}^n$  oraz  $\alpha(\phi'(p)) = \phi(p)$ . W takim razie jeśli  $\widehat{f}$  jest funkcją  $C^k$ -różniczkowalną, to  $\widehat{f}$  jako złożenie funkcji gładkich z funkcją  $C^k$ -różniczkowalną też takie jest. ☞

Dzięki tej obserwacji możemy definiować  $C^k$ -różniczkowalność funkcji jako bycie  $C^k$ -różniczkowalną w dowolnej mapie. Możemy więc dobrać sobie mapę w której sprawdzamy  $C^k$ -różniczkowalność tak, aby dowód był wygodny.

**Uwaga 1.17.** Funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest  $C^k$ -różniczkowalna  $\iff$  dla dowolnych map  $(U, \phi)$  oraz  $(V, \psi)$  wyrażenie  $\psi f \phi^{-1}$  funkcji  $f$  jest  $C^k$ -różniczkowalne na całym zbiorze, na którym jest ono określone.

Pojęcia:

- odwzorowań gładkich
- różniczkowalności w punkcie (otoczeniu)
- dyfeomorfizmu
- rzędu odwzorowania w punkcie

oraz ich własności bez zmian przenoszą się na rozmaitości gładkie z brzegiem (def. 1.19).

## 1.8. Definiowanie rozmaitości gładkiej $X$ za pomocą samego atlasu

**Lemat 1.18.** Niech  $X$  będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i  $\{U_\alpha\}$  będzie kolekcją podzbiorów w  $X$  taką, że dla każdego  $\alpha$  istnieje  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  różniczkowalne takie, że

1. dla każdego  $\alpha$   $\phi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$  jest otwarty
2. dla dowolnych  $\alpha, \beta$   $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  oraz  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  są otwarte w  $\mathbb{R}^n$ .
3. jeśli  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , to  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  też jest gładkie)
4. przeliczalnie wiele spośród  $U_\alpha$  pokrywa  $X$
5. dla każdego  $p, q \in X$ , jeśli  $p \neq q$ , to istnieją  $\alpha, \beta$  oraz otwarte  $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$  i  $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$  takie, że  $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p)$ ,  $q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$  oraz  $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$  (oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).

Wówczas na  $X$  istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory  $U_\alpha$  są otwarte. Ponadto rodzina  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tworzy wtedy gładki atlas na  $X$ .

**Dowód.** A dokładnie szkielet dowodu.

Dokładny dowód w Lee, lemat 1.35.

Określimy topologię na  $X$  przy pomocy przeciwbrazów przez  $\phi_\alpha$  otwartych podzbiorów  $U_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5.



## Przykłady:

- $\mathcal{L}$  jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą można by od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

oraz funkcje  $\phi_h, \phi_v$ :

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \xrightarrow{\phi_h} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \xrightarrow{\phi_v} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to  $\mathbb{R}^2$ , czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całego  $X$ , to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepionowe i niepoziome}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cy + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) : c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

$$\text{Weźmy prostą } L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v.$$

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

$$\text{Zatem } \phi_h \phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \text{ jest gładkie (podobnie } \phi_v \phi_h^{-1}).$$

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią  $\mathcal{L}$  jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania  $\mathcal{L}$  nie wystarczy jedna mapa.

### O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie  $U \subseteq M$  z obrazem przez mapę, czyli  $\bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych  $(x_1, \dots, x_n)$  z  $\bar{U}$  przez  $\phi^{-1}$  na  $U \subseteq M$ .
- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że  $p = (0, \dots, 0)$  w mapie, czyli możemy założyć, że  $(U, \phi)$  jest mapą o początku w  $p$ .
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół  $p$  ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym  $F \subseteq M$  niezawierającym  $p$ .

## 1.9. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

a wnętrzem:

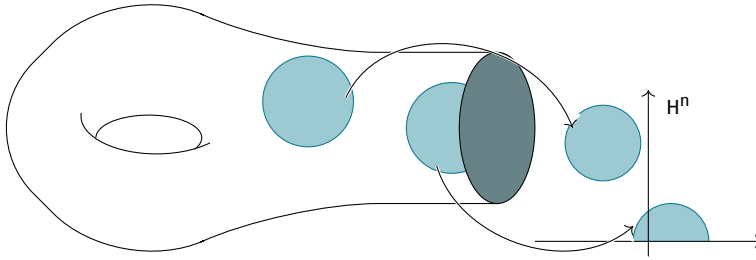
$$\text{int}(H^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Dla  $U \subseteq H^n$  oznaczmy  $\partial U = U \cap \partial H$  oraz  $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$ , czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy  $H^n$  oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla  $U \subseteq H^n$  otwartego i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mówimy, że  $f$  jest **gładką**, gdy jest obcięciem do  $U$  gładkiej funkcji  $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  otwartego,  $U \subseteq \hat{U}$ . *Pochodne cząstkowe funkcji  $f$  są dobrze określone na  $\text{int}(U)$ , a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na  $\partial U$*  (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia  $\hat{f}$ ). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia  $\hat{f}$  istnieje  $\iff$  wszystkie pochodne cząstkowe  $f$  w  $\text{int}(U)$  w sposób ciągły rozszerzają się do  $\partial U$ .

**Definicja 1.19.**  $M$  jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ ,  $U_\alpha \subseteq M$  i  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^n$  i  $\bar{U}_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$  jest otwarty w  $H^n$ , gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn.  $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$  są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w  $H^n$ ).





**Fakt 1.20.** Jeśli w pewnej mapie  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ ,  $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$ , to w każdej innej mapie  $(U_\beta, \phi_\beta)$  zawierającej  $p$   $\phi_\beta(p) \in \partial H^n$ .

**Dowód.** Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jakobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji.



**Definicja 1.21.** Brzegiem  $n$ -rozmaitości  $M$  z brzegiem nazywamy zbiór

$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial H^n\}$   
wnętrze  $M$  nazywa się

$$\text{int}(M) = \{p \in M : (\exists (U_\alpha, \phi_\alpha)) \phi_\alpha(p) \in \text{int}(H^n)\}$$

**Fakt 1.22.** Wnętrze  $\text{int}(M)$   $n$ -rozmaitości gładkiej  $M$  jest  $n$ -rozmaitością bez brzegu.

**Dowód.** Jako atlas bierzemy  $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ , gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\text{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \upharpoonright U'_\alpha$$

Odwzorowania przejścia  $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$  są obcięciami  $\phi_\alpha\phi_\beta^{-1}$ , więc są gładkie.



**Przykłady:**

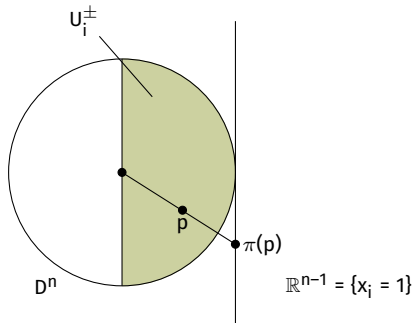
1. Dysk  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  jest  $n$ -rozmaitością z brzegiem  $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ .

**Dowód.** Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa  $(U_0, \phi_0)$ :

$$U_0 = \{x : |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \rightarrow H^n, \quad \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$

Mapy  $(U_i^\pm, \phi_i^\pm)$



$$U_i^+ = \{x \in D^n : x_i > 0\}$$

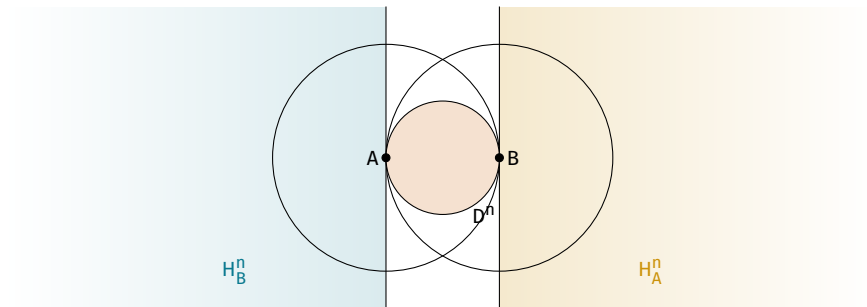
$$U_i^- = \{x \in D^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum x_j^2}_{1-r^2} \right)$$

$$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$



2. Inny atlas na  $D^n$ , składający się tylko z dwóch map:



Niech  $A$  i  $B$  będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku  $D^n$ .  
Rozważmy zbiory

$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

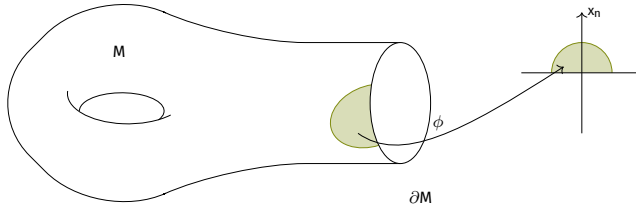
oraz odwzorowania  $\phi_A : U_A \rightarrow H_A^n$  i  $\phi_B : U_B \rightarrow H_B^n$  będące inwersjami dysku względem sfer  $S^n$  o środkach w A i B oraz promieniu 2.

3. Tutaj warto zaznaczyć, że jeśli  $n = 0$ , to wtedy  $\partial M = \emptyset$  i M jest 0-rozmaitością. W dodatku, zbiór rozmaitości gładkich z brzegiem można rozumieć jakoby zawierał zbiór rozmaitości topologicznych, gdyż  $\partial M = \emptyset \iff M$  jest rozmaitością topologiczną.

## 2. Rozkład jedności

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego  $D \subseteq M$  znaleźć funkcję, która dla  $p \in D$  jest równa zero, a na  $M \setminus D$  ma wartości ściśle dodatnie.

Rozważmy rozmaitość z brzegiem  $M$ . Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że  $f(p) = 0$  gdy  $p \in \partial M$  oraz  $f(p) > 0$  dla dowolnego  $p \in \text{Int}(M)$ .



Lokalnie, na zbiorze mapowym  $(U_\alpha, \phi)$  możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z  $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z  $\partial M$  jest zawsze zerowa (gdyż są one w  $\partial H^n$ ). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przenieść lokalne  $f_\alpha$  na funkcję  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

**Definicja 2.1.** Pokrycie  $\{A_\alpha\}$  podzbiorami przestrzeni topologicznej  $X$  jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego  $p \in X$  istnieje otoczenie  $U_p$  takie, że  $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$  tylko dla skończenie wielu  $\alpha$ .

**Definicja 2.2.** Pokrycie  $\{V_\beta\}$  przestrzeni  $X$  zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia**  $\{U_\alpha\}$ , jeśli każdy  $V_\beta$  zawiera się w pewnym  $U_\alpha$ .

$$\begin{aligned} \{W_\gamma\} < \{V_\beta\} < \\ \{U_\alpha\} &\implies \\ \{W_\gamma\} < \{U_\alpha\} \end{aligned} \implies$$

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez  $\{V_\beta\} < \{U_\alpha\}$ .

**Definicja 2.3.** Przestrzeń topologiczna  $X$  jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie  $\{U_\alpha\}$  zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie  $\{V_\beta\}$ .

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego

punktu otoczeń przewartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

**Uwaga 2.4.** Rozdrobnienie wynikające z parawartości rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z przewartych zbiorów mapowych.

**Dowód.** Niech  $\{U_\alpha\}$  będzie pokryciem  $M$ . Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie  $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$  złożone ze zbiorów przewartych mapowych. Wystarczy obraz każdego  $U_\alpha$  w  $\mathbb{R}^n$  pokryć zbiorami przewartymi i wrócić z nimi na  $M$ . Z faktu, że rozmaitości są parawarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie  $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$ , które z przechodności  $\prec$  jest też rozdrobnieniem  $\{U_\alpha\}$ . Dodatkowo, każdy  $V_\beta$  zawiera się w pewnym  $U'_\gamma$ , które były mapowe i przewarte, więc i  $V_\beta$  taki jest. ☕

**Uwaga 2.5.** Niech  $\{A_\alpha\}$  będzie lokalnie skończoną rodziną parawartych podzbiorów rozmaitości  $M$ . Wtedy dla każdego  $A_{\alpha_0}$  podrodzina

$$\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

**Dowód.** Założmy nie wprost, że dla pewnego  $A_{\alpha_0}$  podrodzina  $\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$  jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg  $A_{\alpha_i}$  oraz ciąg punktów  $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$ . Ciąg  $x_i$  ma punkt skupienia w pewnym  $p \in \text{cl}(A_{\alpha_0})$ .

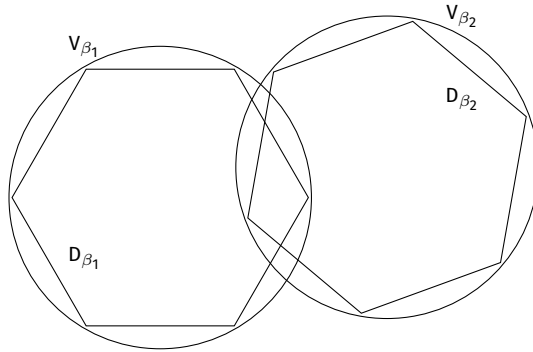
Ponieważ  $p$  jest punktem skupienia  $x_i$ , to dowolne otwarte otoczenie  $U_p$  punktu  $p$  zawiera nieskończenie wiele elementów  $x_i$ . W takim razie  $U_p$  przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami  $A_\alpha$ . Jest to sprzeczne z lokalną skończonością  $\{A_\alpha\}$ . ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i przewartość zbiorów z rozdrobnienia  $\{V_\beta\}$  wynikającego z parawartości rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

**Uwaga 2.6.** Niech  $\{V_\beta\}$  będzie lokalnie skończonym rozdrobnieniem pokrycia  $M$  składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego  $\beta$  istnieje zwarty zbiór  $D_\beta \subseteq V_\beta$  taki, że

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobnienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa  $M$ .



**Dowód.** Ponieważ  $V_\beta$  są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podziorze w  $\mathbb{R}^n$  poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem  $\overline{V_\beta} = \phi_\beta(V_\beta)$  dla mapy  $(V_\beta, \phi_\beta)$ .

Każdy  $V_{\beta_0}$  jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów  $V_{\beta_0,k}$  dla  $k \in \mathbb{N}$ , które są otwarte i ich zwarte domknięcia zawierają się w  $V_{\beta_0}$ :  $\text{cl}(V_{\beta_0,k}) \subseteq V_{\beta_0}$ . Możemy np. wybierać  $V_{\beta_0,k} = B(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} : d(x, V_{\beta_0}^c) > \frac{1}{k}\}$ , tzn. przekroje kul otwartych w  $\mathbb{R}^n$  o środku w  $x_0 \in V_{\beta_0}$  i promieniu  $k$  ze zbiorami tych  $x \in V_{\beta_0}$ , które są odległe od dopełnienia  $V_{\beta_0}$  o co najmniej  $\frac{1}{k}$ .

Niech teraz  $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$  będą zbiorami z  $\{V_\beta\}$  niepusto krojącymi  $V_{\beta_0}$ . Jest ich skończenie na mocy 2.5. Wówczas  $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$  wraz z wcześniej stworzonymi  $V_{\beta_0,k}$  jest pokryciem zwarte go zbioru  $\text{cl}(V_{\beta_0})$ . Możemy więc z niego wybrać skończone podpokrycie postaci:  $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}, \dots, V_{\beta_0,k_0}$ . Oznacza to, że zastępując w  $\{V_\beta\}$  zbiór  $V_{\beta_0}$  przez zbiór  $V_{\beta_0,k_0}$  dostajemy nowe pokrycie  $M$  z  $\text{cl}(V_{\beta_0,k_0}) \subseteq V_{\beta_0}$ . Powtarzamy to induktywnie dla wszystkich  $V_\beta$  i wybieramy pokrycie

$$D_\beta = \text{cl}(V_{\beta,k}),$$

które spełnia wymagania z uwagi.



Z uwag udowodnionych wyżej wynika więc, że dla dowolnego pokrycia otwartego  $\{U_\beta\}$  rozmaitości topologicznej  $M$  istnieje

- lokalnie skończone rozdrobienie  $\{V_\beta\}$  składające się ze zbiorów mapowych i parazwartych oraz
- rodzina  $\{D_\beta\}$  zwartych podzbiorów  $D_\beta \subseteq V_\beta$ , która dalej pokrywa  $M$ .

To samo dotyczy też rozmaitości z brzegiem.

## 2.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

**Definicja 2.7.** Dla funkcji rzeczywistej  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  określamy jej **nośnik** jako:

$$\text{supp}(f) := \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

**Fakt 2.8.** [z  $\mathbb{R}^n$ ] Dla dowolnego otwartego  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oraz dowolnego zwartego  $D \subseteq \Omega$  istnieje gładka funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że:

1.  $f \geq 0$
2.  $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$
3.  $f(x) > 0$  dla  $x \in D$

**Twierdzenie 2.9.** [O rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia  $\{U_\alpha\}$  rozmaitości gładkiej  $M$  istnieje rodzina  $\{f_i\}$  gładkich funkcji  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że

1.  $f_i \geq 0$
2. dla każdego  $i$  nośnik  $\text{supp}(f_i)$  zawiera się w pewnym  $U_\alpha$
3. nośniki  $\{\text{supp}(f_i)\}$  tworzą lokalnie skończone pokrycie  $M$
4. dla każdego  $x \in M$   $\sum f_i(x) = 1$  [suma ta jest skończona wokół każdego  $x$  dzięki 3.]

**Dowód.** Niech  $\{V_j\} \prec \{U_\alpha\}$  będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym przewartymi zbiorami mapowymi. Niech  $D_j \subseteq V_j$  będą zbiorami zwartymi, które dalej pokrywają  $M$  (na mocy 2.6).

Niech  $(V_j, \phi_j)$  będzie mapą na  $M$  i niech

$$\bar{D}_j = \phi(D_j) \subseteq \phi_j(V_j) = \bar{V}_j$$

będzie zbiorem zwartym. Dzięki faktowi z  $\mathbb{R}^n$  2.8 wiemy, że dla każdego  $j$  istnieje gładka funkcja  $\bar{h}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że:

1.  $\bar{h}_j \geq 0$
2.  $\text{supp}(\bar{h}_j) \subseteq \bar{V}_j$
3.  $\bar{h}_j(x) > 0$  dla  $x \in D_j$ .

Zdefiniujmy teraz funkcję  $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że:

$$h_j(x) = \begin{cases} \bar{h}_j \circ \phi_j(x) & x \in V_j \\ 0 & x \notin V_j \end{cases}$$

Żeby pokazać gładkość  $h_j$ , wystarczy pokazać jej gładkość na pewnym otoczeniu każdego punktu.

Na otoczeniu punktów z  $V_j$  funkcja jest oczywiście gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich. Dla  $p \notin V_j$  istnieje otwarte otoczenie  $U_p$  które jest rozłączne z  $\text{supp}(h_j)$ , a więc jest otwartym otoczeniem na którym  $h_j$  jest stale równe zero. Taka funkcja jest oczywiście gładka.

Niech teraz  $h(x) = \sum_j h_j(x)$ . Jest to dobrze określona definicja, gdyż  $\text{supp}(h_j)$  tworzą rodzinę lokalnie skończoną (bo  $\{V_j\}$  taka jest). Z lokalnej skończoności nośników wynika, że  $h$  jest gładka na  $M$ .

Dostajemy też  $h(x) > 0$ , bo  $D_j$  pokrywają całe  $M$ , a więc dla każdego  $x \in M$  istnieje i takie, że  $x \in D_j$ , a więc  $h_j(x) > 0$ .

Określmy  $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)}$ . Wiemy, że  $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka na  $M$ ,  $\text{supp}(f_j) = \text{supp}(h_j) \subseteq V_j$ , więc rodzina  $\{\text{supp}(f_j)\}$  jest lokalnie skończona i każdy  $\text{supp}(f_j)$  zawiera się w pewnym  $U_\alpha$ . Wreszcie mamy

$$\sum f_j(x) = \sum \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{\sum h_j(x)} = 1$$

dla każdego  $x \in M$ .



**Definicja 2.10.** Rodzina funkcji  $\{f_j\}$  jak w dowodzie twierdzenia wyżej jest nazywana **rozkładem jedności** wpisanym w pokrycie  $\{U_\alpha\}$ .

### 2.3. Zastosowania rozkładów jedności

Zazwyczaj rozkłady jedności służą do konstruowania gładkich funkcji, które są określone na całym  $M$  i spełniają pewne wymagania. Z pomocą rozkładów jedności będziemy też "globalizować" inne obiekty na rozmaitościach, np. pola wektorowe, metryki Riemanna czy formy różniczkowalne.

#### Przykłady:

1. Niech  $F_1, F_2$  będą domkniętymi rozłącznymi podzbiorami gładkiej rozmaitości  $M$ . Wówczas istnieje gładka funkcja  $f : M \rightarrow [0, 1]$  taka, że

$$f \upharpoonright F_1 \equiv 1$$

oraz  $f \upharpoonright F_2 \equiv 0$ .

**Dowód.** Niech  $U_i = M \setminus F_i$ , wtedy  $\{U_1, U_2\}$  jest pokryciem  $M$ . Niech  $\{f_i\}$  będzie rozkładem jedności wpisanym w  $\{U_1, U_2\}$ . Określmy

$$f(x) = \sum_{\text{supp}(f_j) \subseteq U_2} f_j(x).$$



Weźmy  $x \in F_1$ , wtedy wszystkie nośniki  $\text{supp}(f_i)$  zawierające  $x$  zawierają się w  $U_2$ , zatem dla takich  $x$  jest

$$f(x) = \sum f_i(x) = 1$$

Jeśli  $x \in F_2$ , to nośniki  $\text{supp}(f_i)$  zawierające  $x$  nie mogą zawierać się w  $U_2$ . W takim razie  $f(x) = 0$ . ☕

2. Rozważmy istnienie gładkiej funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że

$$f(p) = \begin{cases} = 0 & p \in \partial M \\ > 0 & p \in \text{Int}(M) \end{cases}$$

Niech  $\{U_\alpha\}$  będzie dowolnym pokryciem zbiorami mapowymi, a  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  będą lokalnie gładkimi funkcjami takimi, że

$$f_\alpha = \begin{cases} \bar{f}_\alpha \circ \phi_\alpha & U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \\ 1 & U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \end{cases}$$

gdzie  $\bar{f}_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  jest zdefiniowane jako

$$\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Niech  $\{h_\beta\}$  będzie rozkładem jedności wpisanym w  $\{U_\alpha\}$ . Dla każdego  $\beta$  wybieramy  $\alpha(\beta)$  takie, że  $\text{supp}(h_\beta) \subseteq U_{\alpha(\beta)}$ . Definiujemy  $h'_\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$  przez

$$h'_\beta = h_\beta \circ f_{\alpha(\beta)}.$$

Wtedy  $h'_\beta$  jest gładkie oraz  $\text{supp}(h'_\beta) \subseteq \text{supp}(h_\beta)$ , więc rodzina nośników  $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$  jest lokalnie skończona.

Zdefiniujmy teraz

$$f(x) = \sum h'_\beta,$$

które z lokalnej skończoności nośników  $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$  jest dobrze określone.

- $p \in \partial M$ , to dla każdego  $\beta$   $h'_\beta(p) = 0$ , więc  $f(p) = 0$ .
- $p \in \text{Int}(M)$ , to wtedy istnieje  $\beta$  takie, że  $h_\beta(p) > 0$ , a ponieważ dla  $\gamma \neq \beta$   $h'_\gamma(p) \geq 0$ , to  $f(p) > 0$ .

3. Dla dowolnego  $A \subseteq M$  domkniętego oraz  $A \subseteq U \subseteq M$  otwartego istnieje funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że dla  $x \in A$   $f(x) = 1$  oraz  $\text{supp}(f) \subseteq U$ .

Po angielsku taka funkcja nazywa się *bump function*

**Dowód.** Niech  $U_1 = U$  oraz  $U_2 = M \setminus A$ , zbiory te pokrywają całą  $M$ . Niech  $h_1, h_2$  będzie rozkładem jedności wpisanym w to pokrycie. Wtedy funkcja  $h_1$  ma poszukiwane własności, bo dla  $x \in A$  mamy  $h_2(x) = 0$ , więc  $1 = h_1(x) + h_2(x) = h_1(x)$ . ☕

4. Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest nazywana *exhaust function*, jeśli dla każdego  $c \in \mathbb{R}$   $f^{-1}((-\infty, c])$  jest zwartym podzbiorem  $M$ . Kiedy idąc po liczbach naturalnych  $n$  rozpatrujemy  $f^{-1}((-\infty, n])$ , to po drodze zahaczamy o wszystkie zwarte zbiory

Dowód istnienia to wniosek 2.28 z Lee.

w  $M$ , stąd też nazwa. Dowód istnienia exhaust function korzysta z rozkładów jedności  $\{h_i\}$  wpisanych w dowolne pokrycie przwartymi zbiorami oraz funkcji  $f(x) = \sum_{j \geq 1} j \cdot \phi_j(x)$ .

## 2.4. Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności

**Twierdzenie 2.11.** *Dla dowolnego otwartego pokrycia  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  rozmaitości gładkiej  $M$  istnieje rodzina  $\{f_\alpha\}$  gładkich funkcji  $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że*

1.  $f_\alpha \geq 0$
2.  $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$
3. *nośniki  $\{\text{supp}(f_\alpha)\}$  tworzą lokalnie skończone pokrycie  $M$  [czyli wiele spośród  $f_\alpha$  jest zerowych]*
4. dla każdego  $x \in M$   $\sum f_\alpha(x) = 1$

**Dowód.** Znowu szkic dowodu za pomocą wyjściowej wersji twierdzenia.

Rozważmy rodzinę  $\{f_j\}_{j \in J}$  jak w wyjściowej wersji twierdzenia. Dla każdego  $j \in J$  wybieramy  $\alpha(j) \in A$  takie, że  $\text{supp}(f_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$ . Zdefiniujmy

$$f_\alpha = \sum_{j: \alpha(j)=\alpha} f_j.$$

Z lokalnej skończoności nośników  $\text{supp}(f_j)$  wiemy, że  $f_\alpha$  również jest funkcją gładką. Warunek 4 zachodzi w sposób oczywisty, tak samo warunek 1.

Warunki 2 i 3 w łatwy sposób wynikają z obserwacji, że dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny podzbiorów  $P_t$  w przestrzeni  $X$ ,  $\text{cl}(\bigcup P_t) = \bigcup \text{cl}(P_t)$ . ☕

### 3. Dyskretnie ilorazy rozmaitości

#### 3.1. Klejenie rozmaitości wzdłuż brzegu

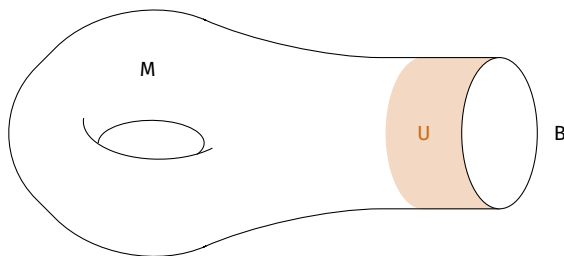
**Twierdzenie 3.1.** Niech  $M$  będzie gładką  $n$ -rozmaitością, a  $B$  niech będzie komponentą brzegu  $\partial M$ . Wtedy istnieje dyfeomorficzne (dyfeomorfizm na obraz) włożenie

$$K : B \times [0, 1) \rightarrow M$$

na otwarte otoczenie  $U$  komponenty  $B$  w  $M$  takie, że  $K(x, 0) = x$  dla  $x \in B$ .

**Otoczenie kołnierzone** to otwarte otoczenie  $U$  brzegu  $\partial M$  na  $M$ , wraz z dyfeomorfizmem  $F : [0, 1) \times \partial M \rightarrow U$  takie, że  $F(0, x) = x$ .

**Dowód.** Dowód za kilka wykładów przy pomocy potoków wektorowych (Rozdział 5.4).



Jeśli  $M_1, B_1$  oraz  $M_2, B_2$  są jak wyżej oraz istnieje dyfeomorfizm

$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

to możemy zdefiniować relację równoważności

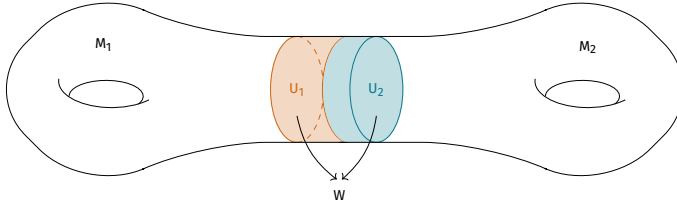
$$B_1 \ni x \sim f(x) \in B_2$$

oraz stworzyć rozmaitość:

$$M_1 \cup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \sim.$$

**Struktura** na  $M_1 \cup_f M_2$  jest częściowo odziedziczona po  $M_1$  i  $M_2$ . Dodatkowo sklejamy zbiory  $U_i$  utożsamiając je z produktami  $B_i \times [0, 1)$  za pomocą  $B_i$ :

$$K_i : B_i \otimes [0, 1) \rightarrow M_i$$



Na  $M_1 \cup_f M_2$  istnieją trzy rodzaje map:

1. dla dowolnej mapy  $(U, \phi)$  na  $M_1$  rozważamy jej obcięcie do  $U \setminus B_1$
2. dla dowolnej mapy  $(V, \psi)$  na  $M_2$  rozważamy jej obcięcie do  $V \setminus B_2$
3. dla dowolnej mapy  $(W, \xi)$  na  $B_1$  i  $\xi : W \rightarrow \bar{W} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  rozważamy zbiór

$$[W \times [0, 1]] \cup_{f|_W} [f(W) \times [0, 1]] = \widehat{W} \subseteq M_1 \cup_f M_2$$

z mapą

$$\widehat{\xi} : \widehat{W} \rightarrow \bar{\widehat{W}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\widehat{\xi}(x, t) = \begin{cases} (\xi(x), -t) & (x, t) \in U_1 \\ (\xi(f^{-1}(x)), t) & (x, t) \in U_2 \end{cases}$$

Mamy  $\widehat{\xi}(x, 0) = \widehat{\xi}(f(x), 0)$ , więc  $\widehat{\xi}$  jest dobrze zdefiniowane w punktach sklejenia.

$$\bar{\widehat{W}} = \bar{W} \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^n \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

zaś  $\widehat{\xi} : \widehat{W} \rightarrow \bar{\widehat{W}}$  jest homeomorfizmem.

Sprawdzenie gładkiej zgodności map z podpunktów 1, 2 i 3 zostanie pominięte.

Rozmaitość  $M_1 \cup_f M_2$  wydaje się zależeć jednocześnie od wyboru  $f$  oraz otoczeń kołnierзовych  $K_i$  komponent brzegów  $B_i$ . W rzeczywistości jednak,  $M_1 \cup_f M_2$  jest takie same z dokładnością do dyfeomorfizmu dla dowolnych wyborów  $K_i$ :

### Fakt 3.2.

1. Jeśli  $K_1, K'_1$  są podobnie położone w  $M_1$ , tzn. istnieje  $h : M_1 \rightarrow M_1$  dyfeomorfizm taki, że

$$K'_1 \upharpoonright B_1 \times [0, 1] = h \circ K_1 \upharpoonright B_1 \times [0, 1],$$

to wtedy

$$M_1 \cup_{f, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f, K'_1, K_2} M_2.$$

Analogicznie gdy weźmiemy  $K_2, K'_2$ . [dowód: ćwiczenia]

2. Każde dwa otoczenia kołnierзовe komponenty  $B_1$  brzegu  $\partial M$  są podobnie położone. [dowód: trudny]

3. Ustalmy otoczenia kołnierzone  $K_1, K_2$ . Jeśli  $f_0, f_1 : B_1 \rightarrow B_2$  są izotopijnymi dyfeomorfizmami, tzn. istnieje gładkie  $F : [0, 1] \times B_1 \rightarrow B_2$  takie, że  $F(0) = f_0$  a  $F(1) = f_1$ , wtedy

$$M_1 \cup_{f_0, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f_1, K_1, K_2} M_2.$$

[dowód łatwy]

### 3.2. Suma spójna rozmaitości

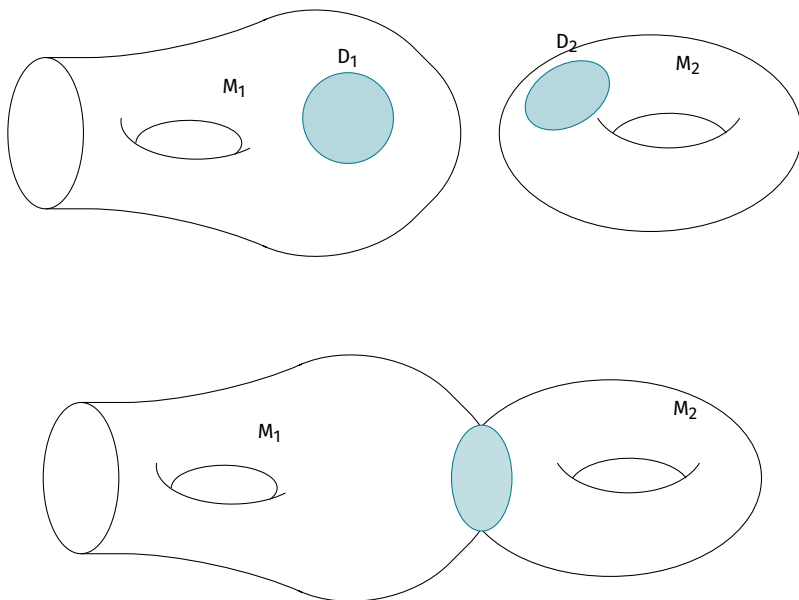
Niech  $M_1, M_2$  będą rozmaitościami wymiaru  $n$ . Weźmy  $D_i \subseteq M_i$ , czyli kule  $n$ -wymiarowe zawarte w otoczeniach mapowych. Oznaczmy  $B_i = \partial D_i \cong S^{n-1}$  jako komponenty brzegu rozmaitości  $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$ . Niech

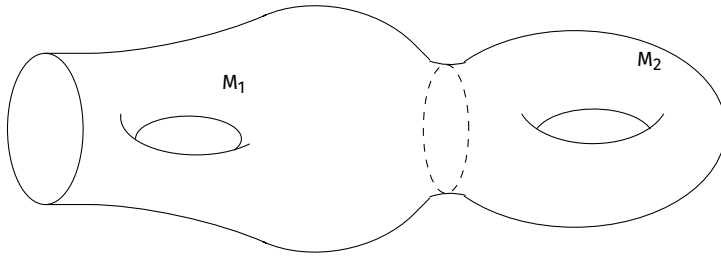
$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

będzie dyfeomorfizmem. Oznaczamy wówczas

$$[M_1 \setminus \text{Int}(D_1)] \cup_f [M_2 \setminus \text{Int}(D_2)] = M_1 \# M_2$$

jako **sumę spójną** rozmaitości  $M_1$  i  $M_2$ .





### Uwaga 3.3.

1. Jeśli  $M_i$  jest rozmaitością spójną, to  $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$ , z dokładnością do dyfeomorfizmu, nie zależy od wyboru dysku  $D_i$ .
2. Istnieją dokładnie 2 klasy izotopii dyfeomorfizmów  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ : te zachowujące orientację oraz te, które orientacji nie zachowują.
3. Są co najwyżej dwie rozmaitości będące sumą spójną  $M_1 \# M_2$ . W przypadku rozmaitości zorientowanych, jedna z nich jest preferowana.

**Klasyfikacja zamkniętych powierzchni spójnych** (czyli zwarte 2-wymiarowe rozmaitości bez brzegu):

1. Powierzchnie orientowalne:  $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2, \dots$
2. Powierzchnie nieorientowalne  $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2, \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots$

Powierzchnie z powyższej listy są parami niedyfeomorficzne. Każda zamknięta powierzchnia jest dyfeomorficzna z jedną z tej listy.

### 3-rozmaitości:

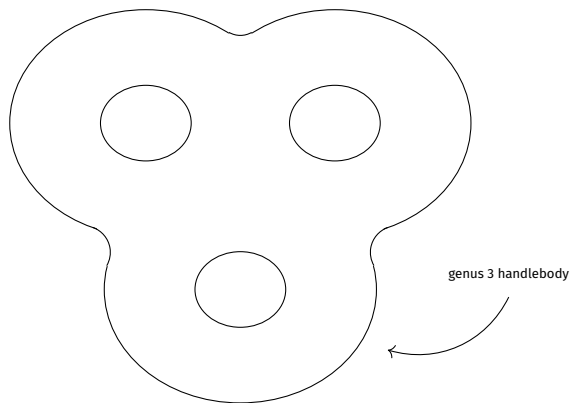
Poniżej bardzo luźne opisy z wikipedii. Dokładniejsze opisy lepiej jest doczytać w literaturze.



**Dehn surgery:** niech  $M$  będzie 3-wymiarową rozmaitością  $M$  z kolekcją węzłów (podrozmaitości  $S^1$  dyfeomorficznych do skończonej rozłącznej sumy  $S^1$ )  $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$ . Rozmaitość  $M$  wywiercona wzdłuż tubowego otoczenia  $L$  posiada  $k$ -wiele komponentów brzegu  $T_1 \cup \dots \cup T_k$ . Chirurgia Dehna polega na wywierceniu z  $M$  tubowego otoczenia  $L$  wraz ze sklejeniem każdej z komponent brzegu  $T_1 \cup \dots \cup T_k$  w jeden torus [to jest Dehn filling i jest wiele sposobów na wytworzenie go].



**Rozkłady Heegaarda** [Heegaard's splittings] na zorientowanej 3-rozmaitości z brzegiem  $M$  polega na na podzieleniu jej na dwa handlebody [fidget spinnery; 3-rozmaitości orientowalne z brzegiem zawierające parami rozłączne włożone 2-dyski takie, że rozmaitość wzdłuż nich przecięta jest  $S^3$ ].



### 3.3. Działanie grupy dyfeomorfizmów

**Definicja 3.4.** Grupa  $G$  dyfeomorfizmów  $M$  to zbiór dyfeomorfizmów  $g : M \rightarrow M$  zamknięty na składanie i branie odwrotności. Mówimy wtedy, że  $G$  działa na  $M$  przez dyfeomorfizmy.

**Definicja 3.5.** **Orbitą** punktu  $x \in M$  względem działania  $G$  na  $M$  nazywamy zbiór

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

**Uwaga 3.6.** Orbity  $G(x)$  i  $G(y)$  są albo rozłączne, albo pokrywają się.

Rodzina wszystkich orbit stanowi **rozbicie** rozmaitości  $M$  na podzbiory.

**Definicja 3.7.** **Przestrzeń ilorazowa** działania  $G$  na  $M$  to przestrzeń, której punktami są orbity  $G(x)$ :

$$M/G = \{G(x) : x \in M\}$$

zaś topologia jest ilorazowa, tzn. **zbiór orbit jest otwarty** w  $M/G \iff$  suma tych orbit stanowi otwarty podzbiór w  $M$ .

Jeśli  $U \subseteq M$  jest otwartym podzbiorem, to

$$G(U)/G = \{G(x) : x \in U\}$$

jest otwarty w  $M/G$  i każdy zbiór otwarty w  $M/G$  jest takiej postaci. Kiedy  $\mathcal{B}$  jest bazą topologii w  $M$ , to rodzina

$$\{G(U)/G : U \in \mathcal{B}\}$$

jest **bazą topologii** w  $M/G$ . Z tego powodu  $M/G$  **zawsze posiada przeliczalną bazę**.

**Definicja 3.8.** Lokalną euklidesowość  $M/G$  zapewnia warunek na **działanie nakrywające**:

$$(\forall p \in M)(\exists p \in U \subseteq M)^{\text{otw.}} (\forall g_1, g_2 \in G) g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Przy takim działaniu  $G$  na  $M$  podzbiór  $G(U)/G$  jest otoczeniem  $G(p)$  homeomorficzny z  $U$ . Oznacza to lokalną euklidesowość  $M/G$ .

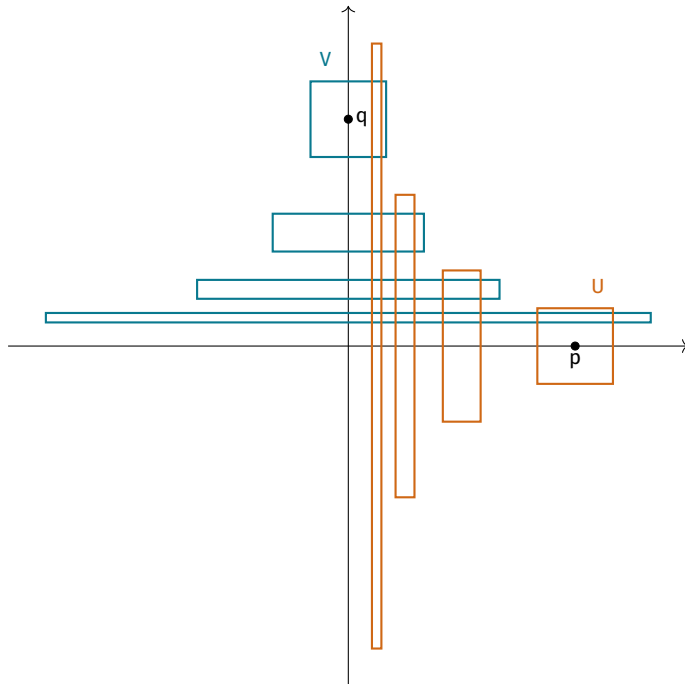
**Fakt 3.9.** Jeśli działanie grupy  $G$  przez homeomorfizmy na rozmaitości  $M$  jest nakrywające, to iloraz  $M/G$  jest lokalnie euklidesowy dla wymiaru  $n = \dim(M)$ .

### Przykłady:

1. Działanie grupy  $\mathbb{Z}$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

jest nakrywające. W takim razie iloraz  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\langle A \rangle$  jest lokalnie euklidesowy wymiaru 2. Jednak iloraz ten nie jest przestrzenią Hausdorffa, bo dla punktów na osobnych osiach  $p$  i  $q$  zbiory otwarte:





nigdy nie mogą być rozłączne. Stąd rozmaitość ilorazowa  $M/G$  nie może być nigdy rozmaitością różniczkowalną.

**Definicja 3.10.** Działanie  $G$  na  $M$  przez dyfeomorfizm jest:

1. **wolne**, gdy dla każdego  $g \in G \setminus \{id\}$  i dla każdego  $x \in M$   $g(x) \neq x$
2. **właściwie nieciągłe** [properly discontinuous], gdy dla każdego zwartego  $K \subseteq M$  zbiór  $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony.

**Definicja 3.11.** Dla  $x \in M$  **stabilizator** (nadgrupa stabilizująca) punktu  $x$  względem  $G$  to

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G : g(x) = x\}$$

jest automatycznie podgrupą  $G$ .

**Fakt 3.12.** Działanie  $G$  jest wolne  $\iff$  wszystkie stabilizatory  $\text{stab}(x)$  są trywialne ( $= \{id\}$ ).

**Przykłady:**

1. Działanie grupy  $\mathbb{Z}_n$  na  $\mathbb{R}^2$  zadane przez potęgi obrotu o kąt  $\frac{2\pi}{n}$  nie jest wolne.
2. Działanie  $G$  jest wolne  $\iff$  dla każdego  $x \in M$  odwzorowanie  $G \rightarrow G(x)$  zadane przez  $g \mapsto g(x)$  jest bijekcją.

**Fakt 3.13.**

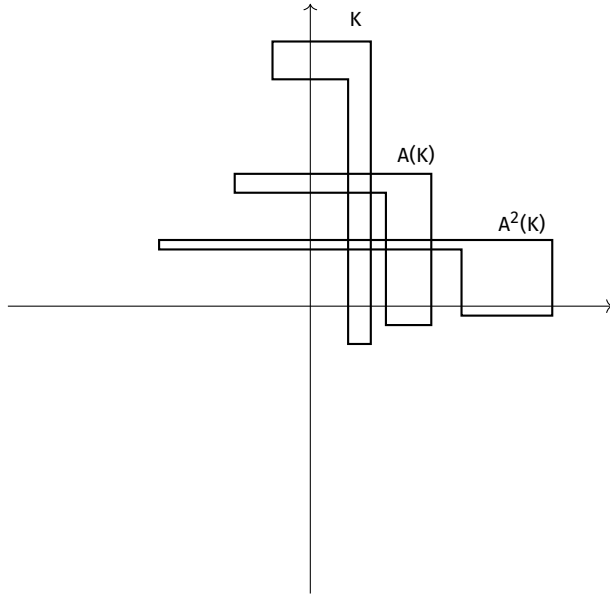
1. Gdy działanie  $G$  przez homeomorfizmy na przestrzeni topologicznej lokalnie zwartej  $X$  jest właściwie nieciągłe, to każda orbita  $G(x)$  jest dyskretnym podzbiorem w  $X$  (tzn. każdy  $x \in G(x)$  ma otwarte otoczenie  $U$  takie, że  $U \cap G(x) = \{x\}$ ).
2. Jeśli działanie  $G$  na  $X$  jest właściwie nieciągłe i wolne, to jest też nakrywające.
3. Jeśli  $G$  działa przez homeomorfizmy na przestrzeni lokalnie zwartej  $X$  w sposób właściwie nieciągły, to iloraz  $X/G$  jest przestrzenią Hausdorffa.

**Przykłady:**

1. Działanie grupy  $\mathbb{Z}$  na  $S^1$  przez potęgi obrotu o kąt  $\alpha$  niewspółmierny z  $2\pi$  jest wolne, ale ma orbity gęste w  $S^1$ , a więc nie są one dyskretne. Zatem działanie nie jest ani właściwie nieciągłe, ani wolne. Iloraz  $S^1/\mathbb{Z}$  jest wtedy przestrzenią z topologią trywialną, więc nie jest rozmaitością.
2. Działanie  $\mathbb{Z}$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  przez potęgi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nie może być właściwie nieciągłe. Można to zobaczyć bezpośrednio:



dla każdego  $n \geq 1$  mamy  $A^n(K) \cap K \neq \emptyset$ .

Jednakże tak zadane działanie  $\mathbb{Z}$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  jest wolne i ma dyskretne orbity. W takim razie warunek, by działanie było wolne i miało dyskretne orbity nie jest wystarczający do tego, by iloraz był rozmaiłością. Nie musi być nawet przestrzenią Hausdorffa, jak pokazaliśmy wcześniej.

**Fakt 3.14.** Jeśli  $G$  jest działaniem na  $M^n$  przez dyfeomorfizmy w sposób wolny i właściwie nieciągły, to iloraz  $M/G$  jest

- lokalnie euklidesowy  $n$ -wymiarowy
- Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę

Zatem  $M/G$  jest  $n$ -wymiarową rozmaiłością topologiczną.

### 3.4. Gładki atlas na $M/G$

Niech  $U \subseteq M$  spełnia warunek:

$$\left( \begin{array}{c} \text{👉} \end{array} \right) U \text{ jest zbiorem mapowym oraz dla każdych } g_1, g_2 \in G, \\ g_1 \neq g_2 \implies g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Zauważmy, że każdy  $p \in M$  ma otoczenie  $U$  spełniające (3.13), a zatem każda orbita  $G(p) \in M/G$  ma otoczenie postaci  $G(U)/G$  ze zbiorem  $U$  spełniającym (3.13). Dla takiego  $U$  odwzorowanie

$$i_U : U \rightarrow G(U)/G$$

$$p \mapsto G(p)$$

jest homeomorfizmem. Niech teraz  $\phi : I \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  będzie mapą z atlasu  $\mathcal{A}$ . Wtedy

$$\phi_G : G(U)/G \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi_G = \phi \circ i_U^{-1}$$

jest obiecującym kandydatem na mapę dla  $M/G$ . Rozważmy rodzinę

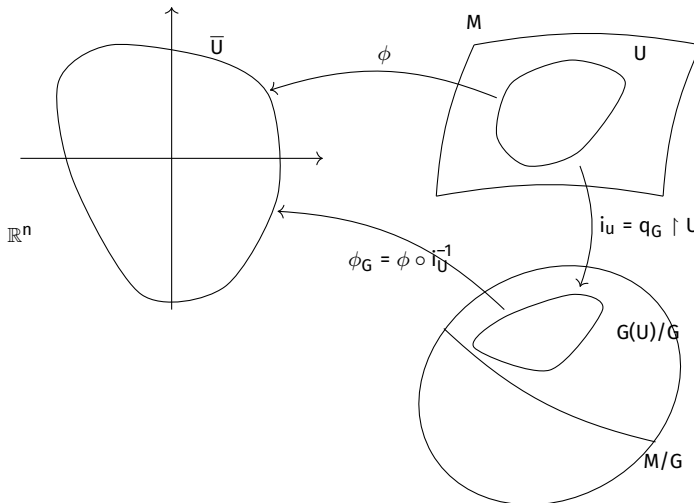
$$\mathcal{A}_G = \{(G(U)/G, \phi_G) : U \text{ spełnia (3.13) oraz } (U, \phi) \in \mathcal{A}\}.$$

**Fakt 3.15.** Odwzorowanie ilorazowe  $q_G : M \rightarrow M/G$  zadane przez


$$q_G(x) = G(x) \in M/G$$

jest gładkie i jest lokalnym dyfeomorfizmem.

**Dowód.**




Zakładamy, że  $\mathcal{A}_G$  tworzy gładki atlas [fakt 3.16]. Wtedy  $q_G$  obcięte do mapowego  $U$

musi spełniać , więc jest bijekcją na otwary podzbiór w  $M/G$ . Ponadto

$$\phi_G \circ q_G \circ \phi^{-1} = \phi \circ i_U^{-1} \circ i_U \phi^{-1} = \text{id}_{\bar{U}}$$

czyli  $q_G$  musi być funkcją gładką, bo inaczej  $\text{id}_{\bar{U}}$  takie nie będzie. Stąd  $q_G$  jest dyfeomorfizmem. ☕

**Fakt 3.16.**  $\mathcal{A}_G$  jest gładko zgodny, więc jest gładkim atlasem na  $M/G$ .

**Dowód.** Niech  $(G(U)/G, \phi_G)$  oraz  $(G(V)/G, \psi_G)$  będą mapami związanymi z  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  na zbiorach  $U, V$  spełniającymi . Rozważmy odwzorowanie przejścia

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} : \phi_G(G(U)/G \cap G(V)/G) \rightarrow \psi_G(G(U)/G \cap G(V)/G)$$

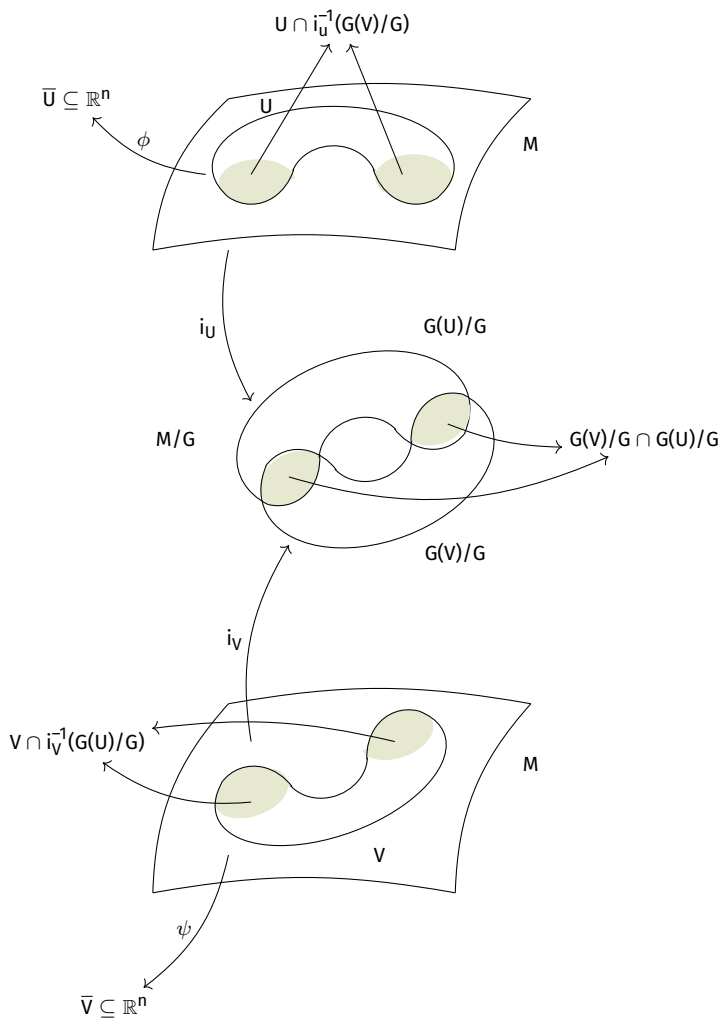
wiemy, że zachodzi

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ [\phi \circ i_U^{-1}]^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ i_U \circ \phi^{-1}$$

czyli wystarczy, żeby

$$i_V^{-1} i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

było gładkie.



Złożenie

$$i_V^{-1} \circ i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

jest homeomorfizmem otwartych podzbiorów w  $M$ . Weźmy  $y = i_V^{-1}i_U(x)$ , wtedy

$$G(x) \ni i_U(x) = i_V(y) \in G(y)$$

czyli  $x$  i  $y$  są w tej samej orbicie działania  $G$ . W takim razie istnieje  $g_x \in G$  takie, że

$y = g_x(x)$ . Z ciągłości  $i_V^{-1}i_U$  możemy wywnioskować, że przyporządkowanie  $x \mapsto g_x$  musi być stałe na komponentach spójności. W przeciwnym przypadku obraz spójnej komponenty przez ciągłe  $i_V^{-1}i_U$  przeciąłby zbiory  $g(U)$  dla kilku różnych  $g$ , a te są rozłączne dla różnych  $g$ . Stąd obraz nie byłby spójny, co daje sprzeczność.

Komponenty spójności  $U \cap i_U^{-1}(G(V)/G)$  są otwarte w  $M$ . Na każdej takiej komponentce  $W$  mamy  $i_V^{-1}i_U(x) = g(x)$  dla ustalonego  $g$ , które jest zależne od doboru komponenty (może być różne dla różnych komponent). Zatem

$$\psi_G \phi_G^{-1} = \psi i_V^{-1} i_U \phi^{-1}$$

jest zadane an  $\phi(W)$  wzorem

$$\psi_G \phi_G^{-1}(x) = \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x).$$

Odwzorowanie  $\psi \circ g \circ \phi^{-1}$  jest wyrażeniem dyfeomorfizmu  $g$  w mapach  $\phi$  i  $\psi$ , więc jest gładkie. Z tego wynika, że  $\psi_G \phi_G^{-1}$  jest gładkie na każdej komponentce spójności dziedziny, czyli jest gładkie. ☕

**Uwaga.** Iloraz  $M/G$  dla wolnego i właściwie nieciągłego działania grupy dyfeomorfizmów  $G$  na rozmaitość  $M$  z brzegiem jest rozmaitością z brzegiem.

### Przykłady:

1. Działanie  $\mathbb{Z}^n$  na  $\mathbb{R}^n$  przez przesunięcia. Wtedy  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$  to  $n$ -wymiarowy torus.
2.  $\mathbb{Z}$  działa na produkcie  $S^1 \times \mathbb{R}$  tak, że dla  $k \in \mathbb{Z}$  mamy

$$k \cdot (\theta, t) = ((-1)^k \theta, t + k)$$

Jest to przesunięcie z odpowiednią potęgą odbicia. Iloraz  $(S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$  jest butelką Kleina.

3.  $\mathbb{Z}$  działa na  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$  przez

$$k \cdot (x, y) = ((-1)^k x, y + k)$$

a iloraz  $([-1, 1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$  jest wstęgą Möbiusa.

4.  $\text{Conf}_n(M)$  jest przestrzenią konfiguracyjną  $n$ -elementowych podzbiorów gładkiej rozmaitości  $M$  (bez brzegu), tzn. jej punkty opisują wszystkie możliwe położenia punktów w układzie.

$\text{Conf}_n(M)$  można wyrazić jako iloraz działania nieciągłej grupy dyfeomorfizmów. Rozważmy produkt  $\underbrace{M \times \dots \times M}_n$  oraz tzw. uogólnioną przekątną  $\Delta^n(M)$  złożoną z

punktów

$$(x_1, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M$$

takich, że  $x_i = x_j$ . Zbiór  $\Delta^n(M)$  jest domknięty w  $M \times \dots \times M$ , więc  $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$  jest otwarty i składa się z  $(x_1, \dots, x_n)$  takich, że  $x_i$  są parami różne. Grupa permutacji  $S_n$  działa na  $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$  przez

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Wtedy  $(M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M))/S_n = \text{Conf}(M)$ . Takie działanie jest wolne i właściwie nieciągłe, bo  $S_n$  jest skończone. Dodatkowo, każda taka funkcja  $\sigma$  jest dyfeomorfizmem.

Naturalna mapa w  $\text{Conf}_n(M)$  wokół punktu  $p = (x_1, \dots, x_n)$  to  $U_1 \times \dots \times U_n$ , gdzie  $U_i$  są parami rozłącznymi otoczeniami punktów  $x_i$  (można je tak dobrać ze względu na Hausdorffowość  $M$ ).

## 4. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  takiej, że  $f = (f_1, \dots, f_n)$  i dla  $t \in (a, b)$  pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \\ \dots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $p \in U$  oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie  $p$  przez  $D_p f$ . Dokładniej, jeśli  $f = (f_1, \dots, f_m)$  i  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zadane tą macierzą (różniczką  $f$  w  $p$ ).

### 4.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

Niech  $M$  będzie rozmaićością. **Krzywą gładką** na  $M$  nazywamy gładkie odwzorowanie  $c : (a, b) \rightarrow M$ . O krzywej gładkiej  $c$  takiej, że  $c(t_0) = p$  mówimy, że jest **zbazowana w  $p$** . Zbiór par  $(c, t_0)$  krzywych zbazowanych w  $p$  oznaczamy  $C_p M$ .

**Definicja 4.1.** Niech  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie mapą wokół  $p$ . Krzywe  $(c_1, t_1)$  i  $(c_2, t_2)$  zbazowane w  $p$  są do siebie styczne w mapie  $(U, \phi)$  jeśli  $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ .

**Lemat 4.2.** Jeżeli  $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$  są styczne w mapie  $(U, \phi)$  wokół  $p$ , to są też styczne w dowolnej innej mapie  $(W, \psi)$  wokół  $p$  (zgodnej z  $(U, \phi)$ ).

**Dowód.**

$$\begin{aligned} (\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' = \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$



**Definicja 4.3.** Krzywe  $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$  są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół  $p$ .



Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na  $C_p M$ , bo jest zwrotna, symetryczna i przechodnia ( $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$  i  $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$ ).

**Definicja 4.4. Przestrzeń styczną** do  $M$  w punkcie  $p$  nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w  $p$

$$T_p M := C_p M / \text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej  $(c, t_0) \in C_p M$  oznaczamy przez  $[c, t_0]$  lub  $c'(t_0)$ . Elementy przestrzeni  $T_p M$  nazywamy **wektorami stycznymi** do  $M$  w punkcie  $p$ .

## 4.2. Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$

Dla mapy  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  wokół  $p \in M$  określamy dwa odwzorowania:

$$\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_{\phi, p} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M \quad \lambda_{\phi, p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie  $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$ .

Odwzorowanie  $\phi_p^*$  jest dobrze określone z definicji  $T_p M$  (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

**Lemat 4.5.**  $\phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  oraz  $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^* = \text{id}_{T_p M}$ , czyli  $\phi_p^*$  i  $\lambda_{\phi, p}$  są one wzajemnie jednoznaczne i do siebie odwrotne.

**Dowód.** Niech  $v \in \mathbb{R}^n$ , wtedy

$$\begin{aligned} \phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) = v \end{aligned} \quad \checkmark$$

Niech  $[c, t_0] \in T_p M$

$$\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi, p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie  $c_{(\phi \circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$ . W mapie  $\phi$  zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi \circ c)'(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie  $(c, t_0)$  i  $(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)$  są krzywymi stycznymi i mamy  $[c, t_0] = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$  i w takim razie  $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0] \quad \checkmark$  ☕

**Fakt 4.6.** Na przestrzeni stycznej  $T_p M$  istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania  $\phi_p^*$  oraz  $\lambda_{\phi, p}$  dla wszystkich map  $\phi$  wokół  $p$  są liniowymi izomorfizmami.

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla  $X, Y \in T_p M$ :  $X + Y := \lambda_{\phi, p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$  (suma w środku jest sumą w  $\mathbb{R}^n$ )
- dla  $a \in \mathbb{R}$ :  $a \cdot X := \lambda_{\phi, p}(a \cdot \phi_p^*(X))$  (mnożenie przez skalar w  $\mathbb{R}^n$ ).

**Dowód.** Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z  $\mathbb{R}^n$  przez  $\lambda_{\phi, p}$ . Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map  $\phi, \psi$  wokół  $p$  przeniesione z  $\mathbb{R}^n$  na  $T_p M$  struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi, p}} T_p M \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi, p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\begin{aligned} \psi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) \right] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v) \end{aligned}$$

Przekształcenie  $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}$  pokrywa się z działaniem macierzy  $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$ , a więc jest liniowe.



O odwzorowaniu  $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  można myśleć jak o "mapie" dla  $T_p M$  stowarzyszonej z mapą  $\phi$  otoczenia punktu  $p$ . W tej mapie działania na wektorach z  $T_p M$  sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w  $\mathbb{R}^n$ .

**Przykład:**

- Dla  $M = \mathbb{R}^n$  mamy wyróżnioną mapę  $\phi : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Dla każdego  $p \in M$  mapa ta, poprzez  $\phi_p^* = (\text{id}_{\mathbb{R}^n})^*$  kanonicznie utożsamia  $T_p \mathbb{R}^n$  z  $\mathbb{R}^n$ .
- Analogiczna sytuacja zachodzi z  $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$  otwartego podzbioru i  $p \in U$ , gdzie inkluzja  $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości  $M$  z brzegiem i  $p \in \partial M$  dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie  $c : [t_0, b) \rightarrow M$  oraz  $c : (a, t_0] \rightarrow M$  takie, że  $c(t_0) = p$  oraz pary  $(c, t_0)$  jako elementy  $C_p M$ . Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałoby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na  $T_p M$  określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



Wektory styczne do  $M = \mathbb{R}^n$  (lub  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ) w punkcie  $p$  odpowiadające wektorom bazowym  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$

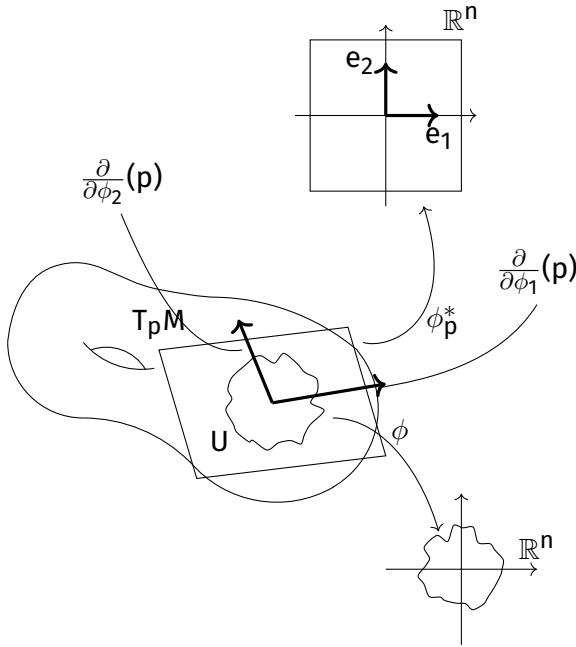
oznaczamy przez  $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ . Tworzą one bazę  $T_p\mathbb{R}^n$  ( $T_pU$ ), zaś dowolny wektor z  $T_p\mathbb{R}^n$  ( $T_pU$ ) ma postać  $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ . [0cm]

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości  $M$  i  $p \in M$  oraz mapy  $\phi$  wokół  $p$  przeciwbraz przez  $\phi_p^* : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$  wersorów  $e_1, \dots, e_n$  oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę  $T_pM$  i dowolny wektor z  $T_pM$  ma postać  $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$ .

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami



Dla gładkiej  $c : (a, b) \rightarrow M$  **wektor styczny** do  $c$  w  $t \in (a, b)$  to

$$c'(t) := [c, t] = [(\phi \circ c)'(t)] = \sum_i (\phi \circ c)'_i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i}(c(t)),$$

gdzie  $(U, \phi)$  jest mapą wokół  $c(t)$ .

### 4.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką  $f : M \rightarrow N$  i  $p \in M, f(p) = q \in N$ . Dla krzywej zbalansowanej  $(c, t_0) \in C_p M$  mamy  $(f \circ c, t_0) \in C_q N$ .

**Lemat 4.7.** Jeżeli  $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$  są styczne, to  $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_q N$  też są styczne

**Dowód.** Niech  $\phi$  będzie mapą wokół  $p$ ,  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , zaś  $\psi$  mapą wokół  $q$ ,

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$

Zatem krzywe  $(f \circ c_1, t_1)$  i  $(f \circ c_2, t_2)$  są styczne. ☕

**Definicja 4.8. Różniczką**  $f$  w punkcie  $p$  nazywamy odwzorowanie  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  określone przez  $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$ .

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 4.7.

**Lemat 4.9.**  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  jest odwzorowaniem liniowym.

**Dowód.** Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_p M \xrightarrow{df_p} T_{f(p)} N \xrightarrow{\psi_{f(p)}^*} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 4.6).

$$\begin{aligned} \psi_{f(p)}^* \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_{f(p)}^* \circ df_p([c_v, 0]) = \psi_{f(p)}^*([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v] \end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji  $f : M \rightarrow N$  odwzorowanie  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  wyznaczyliśmy w mapach  $\phi$  wokół  $p$  i  $\psi$  wokół  $f(p)$  jako

$$\psi_{f(p)}^* \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie  $df_p$  w bazach  $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$  w  $T_p M$  i  $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$  w  $T_{f(p)} N$  zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) = \left( \frac{\partial(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[ \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[ \sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})(\phi(p))}{\partial x_j} \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

### Przykłady:

- Niech  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie mapą wokół  $p \in M$ . Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka  $d\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$  jest wówna odwzorowaniu "mapowemu"  $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Dowód.** Niech  $[c, t_0] \in T_p M$ , wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

Mapę  $(id_{\mathbb{R}^n})_{\phi(p)}^* : T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kanonicznie utożsamiliśmy z  $id_{\mathbb{R}^n}$ , stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej  $c : (a, b) \rightarrow M$  oraz  $t_0 \in (a, b)$ , różniczka  $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \rightarrow T_{c(t_0)} M$  jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z  $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$  przekształca na wersor  $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)} M$ .
- Rozważmy gładką funkcję  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  i  $p \in M$ . Różniczka  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  jest funkcjonatem liniowym na  $T_p M$ .

**Definicja 4.10.** Dla funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  możemy wybrać wektor styczny  $X = [c, t_0] \in T_p M$  i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji  $f$  w kierunku wektora  $X$ :

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$  (*reguła Leibniza*)

**Dowód.**

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$



- dla  $a \in \mathbb{R}$   $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli  $X, Y \in T_p M$ , to  $(X + Y)f = Xf + Yf$

**Dowód.**

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$



Stąd oznaczenie

$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ , które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach  $f_n$

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$  jest to

i-ta pochodna cząstkowa  $f$  w mapie  $\phi$  w punkcie  $p$

**Przykłady:**

- Jeśli  $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p \mathbb{R}^n$  i mamy gładką funkcję  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , to wówczas  $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ .
- Jeśli  $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_p M$  i  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

- Podobnie jak wyżej, jeśli  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$ , to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

## 4.4. Wiązka styczna

**Definicja 4.11.** Wiązka styczna to rozłączna suma przestrzeni stycznych we wszystkich punktach rozmaitości  $M$ :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

Chcemy teraz opisać na  $TM$  strukturę rozmaitości gładkiej. Rozważymy w tym celu rzutowanie

$$\pi : TM \rightarrow M$$

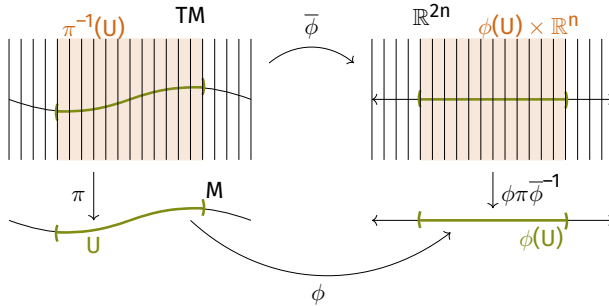
$$\pi(v) = p, \quad v \in T_p M,$$

które wektorowi przyporządkowuje jego punkt zaczepienia.

**Lemat 4.12.** Niech  $M$  będzie rozmaitością  $n$ -wymiarową  $M$  klasy  $C^k$ . Wówczas na wiązce stycznej  $TM$  istnieje naturalna struktura  $2n$ -wymiarowej rozmaitości klasy  $C^{k-1}$ , dla której rzutowanie  $\pi$  jest  $C^{k-1}$ -różniczkowalne.

Jeśli  $M$  jest rozmaitością gładką ( $C^\infty$ ), to  $\pi$  również takie jest.

**Dowód.** Strukturę rozmaitości zadamy za pomocą samych map, nie definiując właściwej topologii na TM.



Niech  $(U, \phi)$  będzie mapą na  $M$ . Rozważmy zbiór

$$TU = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_p M \subseteq TM$$

oraz odwzorowanie

$$\bar{\phi} : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\bar{\phi}(v) = (\phi(\pi(v)), \phi_{\pi(v)}^*(v)) = (\phi(p), \phi_p^*(v)) \quad v \in T_p M.$$

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0)$$

$\bar{\phi}$  jest różniczkowalne jako produkt kartezjański dwóch różniczkowalnych odwzorowań, a jego obraz to  $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ .

Sprawdźmy teraz zgodność tak zadanego atlasu. Niech  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  będą mapami na  $M$ , a  $(TU, \bar{\phi})$ ,  $(TV, \bar{\psi})$  odpowiadającymi im mapami na  $TM$ . Spójrzmy na odwzorowania przejścia:

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \bar{\phi}^{-1}(x, w) &= (\psi \pi [\phi \pi]^{-1}(x), \psi_{\phi^{-1}(x)}^* [\phi_{\phi^{-1}(x)}^*]^{-1}(w)) = \\ &= (\psi \phi^{-1}(x), D_x(\psi \phi^{-1})(w)) \end{aligned}$$

Jest to odwzorowanie różniczkowalne klasy  $C^{k-1}$  jako produkt odwzorowania klasy  $C^k$  i  $C^{k-1}$ .

Pozostaje sprawdzić różniczkowalność odwzorowania  $\pi$ . Wyrazimy je w mapach  $(U, \phi)$  na  $M$  oraz  $(TU, \bar{\phi})$  na  $TM$ . Niech  $p \in U$  oraz  $v \in T_p U$ , wtedy:

$$\phi \pi \bar{\phi}^{-1}(\phi(p), \phi_p^*(v)) = \phi \pi(v) = \phi(p)$$

więc  $\pi$  jest w tych mapach rzutowaniem na pierwszą składową  $\mathbb{R}^n$ , więc jest gładkie



**Definicja 4.13.** Dla  $f : M \rightarrow N$  **odwzorowaniem stycznym**  $df : TM \rightarrow TN$  nazywamy odwzorowanie

$$df(v) = df_{\pi(v)}(v) \in T_{f(\pi(v))}N \subseteq TN$$

**Lemat 4.14.** Dla gładkiego  $f$  również  $df$  jest gładkie.

**Dowód.** Weźmy  $v \in T_pM$  i niech  $(U, \phi)$  będzie mapą wokół  $p$ . Oznaczmy wówczas  $q = f(p)$  i niech  $(V, \psi)$  będzie mapą wokół  $q$ . Wyrazimy  $df$  w mapach  $(TU, \bar{\phi})$  i  $(TV, \bar{\psi})$ .

$$\mathbb{R}^{2m} \xrightarrow{\bar{\phi}^{-1}} TU \xrightarrow{df} TV \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbb{R}^{2n}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} df \bar{\phi}^{-1}(x, w) &= (\psi f \phi^{-1}(x), \psi_{f \phi^{-1}(x)}^* df_{\phi^{-1}(x)} [\phi_{\phi^{-1}(x)}^*]^{-1}(w)) \stackrel{1}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d\psi_{f \phi^{-1}(x)} df_{\phi^{-1}(x)} (d\phi_{\phi^{-1}(x)}^{-1}(x)) \stackrel{2}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d\psi_{f \phi^{-1}(x)} df_{\phi^{-1}(x)} d\phi_x^{-1}(w)) \stackrel{3}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d(\psi f \phi^{-1})_x(w)) = \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), D_x(\psi f \phi^{-1})(x)) \end{aligned}$$

Równość 1 wynika z utożsamienia  $d\phi_p = \phi_p^*$  (uzasadnione tutaj). Równość 2 to ogólny fakt, że jeśli  $f$  jest dyfeomorfizmem, to  $(df_p)^{-1} = df_{f(p)}^{-1}$ , natomiast równość 3 pojawia się na liście ćwiczeń:

$$d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p.$$



**Uwaga 4.15.** Różniczka  $df_p$  jak w lemacie wyżej zapisuje się w bazach  $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$  w  $T_pM$  oraz  $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(q)\}$  w  $T_qN$  przy pomocy macierzy:

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left( \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}.$$

To znaczy ma postać:

$$df_p \left[ \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[ \sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(q)$$

**Przykłady:**



1. Dla otwartego  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , wiązka styczna TU do U utożsamia się z  $U \times \mathbb{R}^n$  poprzez

$$\sum_{i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (p) \mapsto (p, a_1, \dots, a_n)$$

Niech  $f : M \rightarrow N$  i  $g : N \rightarrow P$  będą odwzorowaniami gładkimi, wtedy:

- $d(g \circ f) = dg \circ df$
- $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$
- jeśli  $f$  jest dyfeomorfizmem, to również  $df$  jest dyfeomorfizmem oraz  $(df)^{-1} = df^{-1}$

Dowód tych  
właściwości jest  
ćwiczeniem

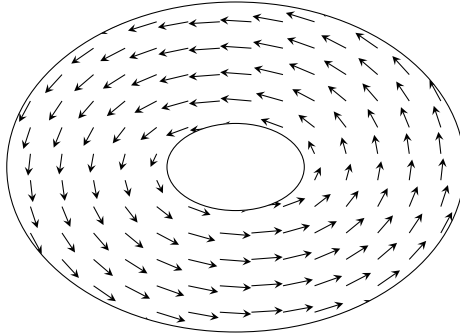
## 5. Pola wektorowe

**Definicja 5.1.** Niech  $M$  będzie gładką rozmaiłością. Gładką funkcję  $X : M \rightarrow TM$  taką, że dla każdego  $p \in M$   $X(p) \in T_p M \subseteq TM$  nazywamy **gładkim polem wektorowym** na  $M$ .

Równoważnie możemy postawić warunek, że  $\pi \circ X = \text{id}_M$ .

Uogólnienie pól wektorowych pojawiających się w kontekście równań różniczkowych.

Często zamiast  $X(p)$  piszemy krócej  $X_p$ , co oznacza wektor pola w punkcie  $p$ . Pozwala to również uniknąć konfliktu notacji z pochodną kierunkową funkcji  $f$  wzdłuż wektora  $X(Xf)$ .



Wyraźmy pole wektorowe  $X : M \rightarrow TM$  w mapach  $(U, \phi)$  na  $M$  oraz  $(TU, \bar{\phi})$  na  $TM$ . Niech  $a_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  będą gładkimi funkcjami rzeczywistymi (nazwiemy je **współzrędnymi**  $X$  w mapach  $\phi$  i  $\bar{\phi}$ ) takimi, że

$$\bar{\phi} X \phi^{-1}(x) = (x, a_1(x), \dots, a_n(x)) = (x, \sum a_i(x) e_i),$$

gdzie  $e_i$  to baza standardowa  $\mathbb{R}^n$ . Zgodnie z oznaczeniem z poprzedniego rozdziału  $\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) = (\phi_p^*)^{-1}(e_i)$  mamy

$$X(p) = \sum a_i(\phi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Jeśli teraz oznaczymy  $b_i = a_i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , to wówczas

$$X(p) = \sum b_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

**Fakt 5.2.** Pole  $X : M \rightarrow TM$  jest gładkim polem wektorowym na  $M \iff$  w mapie  $(U, \phi)$  na  $M$  i odpowiadającej jej mapie  $(TU, \bar{\phi})$  na  $TM$  wyraża się jako

$$X(p) = \sum b_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

dla pewnych gładkich  $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Dowód.** Bezpośrednio z przestawienia  $X$  w mapach  $(U, \phi)$  i  $(TU, \overline{\phi})$  jak wyżej.



Pole wektorowe na otwartym  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ma postać

$$X(x) = \sum_{i \leq n} a_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

dla pewnych gładkich funkcji  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Z tego powodu będziemy pisać

$$X(x) = [a_1(x), \dots, a_n(x)] \in \mathbb{R}^n \cong T_x U.$$

Zjawiska lokalne dla pól na rozmaitościach będziemy wyrażać za pośrednictwem map za pomocą pól na otwartych podzbiorach  $\mathbb{R}^n$ .

### Wniosek 5.3. Suma dwóch gładkich pól wektorowych

$$(X + Y)(p) := X(p) + Y(p)$$

jest gładkim polem wektorowym.

Iloczyn gładkiej funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  oraz gładkiego pola  $X$

$$(f \cdot X)(p) := f(p) \cdot X(p)$$

jest gładkim polem wektorowym

Rodzinę wszystkich gładkich pól wektorowych na  $M$  będziemy oznaczać przez  $C^\infty(TM)$  lub  $\mathfrak{X}(M)$ . W algebraicznym rozumieniu jest to moduł nad pierścieniem  $C^\infty(M)$  gładkich funkcji rzeczywistych na  $M$  (patrz wniosek 5.3).

## 5.1. Definiowanie pola wektorowego za pomocą rozkładów jedności

Niech  $M$  będzie rozmaitością z niepustym brzegiem  $\partial M$ .

**Definicja 5.4.** Mówimy, że wektor  $Y \in T_p M$ , gdzie  $p \in \partial M$ , jest **skierowany do wewnątrz**  $M$ , jeśli w pewnej mapie  $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{H}^n$  wyraża się przez

$$Y = \sum_{i \leq n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p), \quad a_n > 0$$

**Fakt 5.5.** Jeśli wektor o początku  $p$  jest skierowany do wewnątrz w jednej mapie, to jest tak w każdej innej mapie wokół  $p$ . Ponadto, suma wektorów skierowanych do wewnątrz jest wektorem skierowanym do wewnątrz.

**Dowód.** Niech  $Y$  będzie wektorem skierowanym do wewnątrz w mapie  $(U, \phi)$ . Niech  $(V, \psi)$  będzie inną mapą wokół  $p$ . Wiemy, że

$$Y = \sum a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

i  $a_n > 0$ . Chcemy teraz sprawdzić, co się dzieje w indeksie  $n$ , gdy przedstawimy ten wektor jako kombinację liniową  $\frac{\partial}{\partial \psi_i}(p)$ . Popatrzmy na zamianę baz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_n}(p) &= (\phi_p^*)^{-1}(e_n) = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}[\psi_p^*(\phi_p^*)^{-1}(e_n)] = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}d\psi_p d(\phi_p)^{-1}(e_n) = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}[d(\psi\phi^{-1})_{\phi(p)}(e_n)] \end{aligned}$$

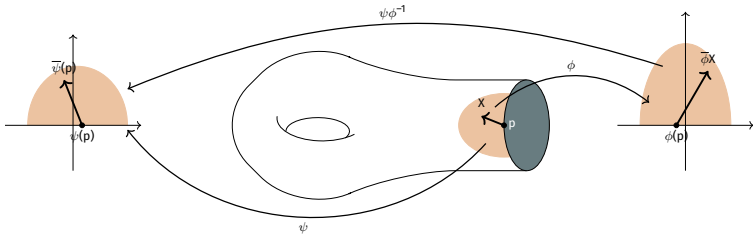
Wiemy, że  $\psi\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest funkcją rzeczywistą, czyli

$$d(\psi\phi^{-1})_{\phi(p)} = D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})$$

jest jej pochodną. Dodatkowo, wiemy, że  $\psi\phi^{-1}$  jest bijekcją, więc na pewno  $D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})(e_n)$  nie może się zerować. Zarówno  $\psi$  jak i  $\phi$  są mapami wokół brzegu  $\partial M$ , czyli tak naprawdę:

$$\psi\phi^{-1} : H^n \rightarrow H^n$$

W takim razie,  $D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})(e_n) \in \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ .



Dla sumy wektorów  $X + Y$  takich, że  $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$  i  $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$ ,  $a_n, b_n > 0$ , mamy

$$X + Y = \sum (a_i + b_i) \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

wieć  $a_i + b_i > 0$ .



**Definicja 5.6.** Pole wektorowe  $X : M \rightarrow TM$  jest **skierowane do wewnątrz**  $M$ , jeśli dla każdego  $p \in \partial M$   $X(p)$  jest skierowany do wewnątrz  $M$ .

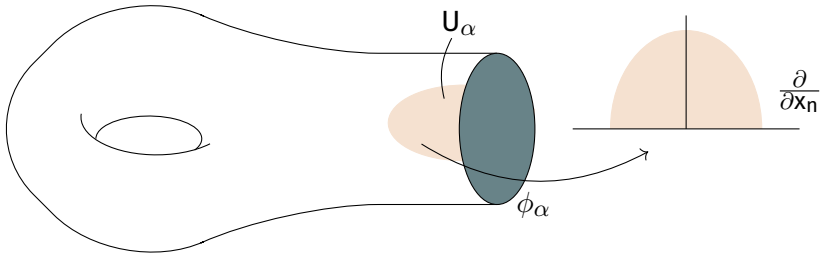
**Fakt 5.7.** Na każdej rozmaitości gładkiej z brzegiem  $M$  istnieje gładkie pole wektorowe  $X$  skierowane do wewnątrz  $M$ .

**Dowód.** Rozważmy rozkład jedności  $\{f_i\}$  wpisany w pokrycie  $M$  zbiorami mapowymi  $U_\alpha$  i niech  $\text{supp}(f_i) \subseteq U_{\alpha_i}$ . Dla tych  $U_\alpha$ , które zahaczają o brzeg  $\partial M$  określmy pola wektorowe

$$X_\alpha : U_\alpha \rightarrow TU_\alpha \subseteq TM$$

$$X_\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha)_n}(p).$$

Dla pozostałych  $U_\alpha$  określamy  $X_\alpha$  dowolnie.



Zdefiniujmy teraz pole wektorowe:

$$X = \sum_j f_j X_{\alpha_j},$$

które jest lokalnie skończoną kombinacją gładkich pól skierowanych do wewnątrz i funkcji dodatnich. Jest to więc pole wektorowe skierowanie do wewnątrz. ☕

## 5.2. Przenoszenie gładkich pól wektorowych przez dyfeomorfizmy

Niech  $f : M \rightarrow N$  będzie dyfeomorfizmem i niech  $X \in \mathfrak{X}(M)$  będzie gładkim polem wektorowym na  $M$ . Poszczególne wektory  $X_p$  pola  $X$  przenoszone przez odwzorowanie styczne  $df$  do  $TN$  tworzą pola wektorowe na  $N$  oznaczane przez  $df(X)$  w ten sposób, że

$$df_p(X_p) = df(X)_{f(p)}.$$

Określamy pole wektorowe  $df(X)$  na  $N$  przez

$$df(X)_q := df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)}) \in T_q N \subseteq TN.$$

Powyższe określenia oznaczają, że pole  $df(X)$ , jako odwzorowanie  $N \rightarrow TN$ , jest złożeniem

$$df(X) = df \circ X \circ f^{-1}.$$

Jako złożenie odwzorowań gładkich, samo też jest odwzorowaniem gładkim.

**Definicja 5.8.** Gładkie pole wektorowe  $df(X)$  określone jak wyżej jest nazywane **przeniesieniem** pola  $X$  na  $N$  przez dyfeomorfizm  $f$ .

Jeśli o dyfeomorfizmie  $f$  myślimy jako o sposobie utożsamienia rozmaiwości  $M$  i  $N$ , to o polu  $df(X)$  na  $N$  możemy myśleć jako o tym samym polu co pole  $X$  na  $M$  względem utożsamienia za pomocą  $f$ .

### Przykłady:

1. Wybierzmy pole  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , takie, że dla mapy  $(U, \phi)$  na  $M$  mamy

$$X(p) = \sum a_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p), \quad p \in U.$$

Wówczas

- przeniesienie pola  $X \upharpoonright U$  na  $\phi(U)$  przez dyfeomorfizm  $\phi$  daje pole  $d\phi(X)(u) = \sum a_i(\phi^{-1}(u)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u)$
- wyrażenie pola  $X$  w mapach  $(U, \phi)$  na  $M$  oraz  $(TU, \bar{\phi})$  na  $TM$  daje

$$\bar{\phi}X\phi^{-1}(x) = (x, a_1(\phi^{-1}(x)), \dots, a_n(\phi^{-1}(x)))$$

Oba te pola, a zwłaszcza pierwsze z nich, będziemy nazywać **wyrażeniem pola  $X$  w mapie  $(U, \phi)$** . Ponadto zachodzi

$$X(p) = [c, t_0] \iff d\phi(X)(\phi(p)) = [\phi \circ c, t_0]$$

### 5.3. Krzywe całkowe

**Definicja 5.9.** Niech  $M$  będzie rozmaiłością bez brzegu. **Krzywą całkową** pola wektorowego  $X \in \mathfrak{X}(M)$  to dowolna krzywa

$$\gamma : (a, b) \rightarrow M$$

taka, że dla każdego  $t \in (a, b)$

$$\gamma'(t) = [ \gamma, t ] = X(\gamma(t))$$

**Lemat 5.10.** Niech  $\gamma$  będzie krzywą całkową pola  $X \in \mathfrak{X}(M) \iff$  dla każdej mapy  $(U, \phi)$  na  $M$  krzywa  $\phi \circ \gamma$  jest krzywą całkową pola  $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(\phi(U))$ .

**Dowód.**

$\implies$

Jeśli  $\gamma'(t) = [ \gamma, t ] = X_{\gamma(t)}$ , to z definicji  $d\phi$  mamy

Dla przypomnienia  
 $df(X)_{f(p)} = df_p(X)$

Dowód w lemacie  
 5.10

$$(\phi \circ \gamma)'(t) = [\phi \circ \gamma, t] = d\phi_{\gamma(t)}([\gamma, t]) = d\phi(X_{\gamma(t)}) = d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}$$

←

Niech  $(\phi \circ \gamma)'(t) = [\phi \circ \gamma, t] = d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= [\phi^{-1}(\phi \circ \gamma)]'(t) = d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}^{-1}[(\phi \circ \gamma)'(t)] = \\ &= d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}[d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}] = \underbrace{d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}^{-1} d\phi_{\gamma(t)}}_{\text{id}_{T_{\gamma(t)}M}}(X_{\gamma(t)}) = X_{\gamma(t)} \end{aligned}$$



Krzywe całkowe mają **następujące własności**:

- dla każdego  $p \in M$  istnieje krzywa całkowa o początku w  $p$  (twierdzenie 5.11)
- jeśli krzywe całkowe przecinają się, to są sobie równe (uwaga 5.12)
- krzywe całkowe pola na otoczeniu pewnego punktu  $p \in M$  są gładko zależne (fakt 5.13)

Które zostaną udowodnione niżej.

**Twierdzenie 5.11.** Dla każdego  $p \in M$  istnieje krzywa całkowa o początku w  $p$ , tzn. krzywa całkowa  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  taka, że  $\gamma(0) = p$

Krzywe całkowe wyrażenia pola  $X$  w mapie  $(U, \phi)$  to wyrażenie krzywych całkowych pola  $X$  w tej samej mapie.

**Dowód.** Niech  $(U, \phi)$  będzie mapą na  $M$  taką, że powiązane z nią pole wektorowe na  $T\mathbb{R}^n$  spełnia

$$[d\phi(X)](u) = \sum_{i \leq n} a_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i}(u),$$

gdzie  $\phi(p) = x_0 \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wystarczy pokazać, że istnieje krzywa całkowa pola  $d\phi(X)$  o początku  $x_0$ .

Poszukiwana krzywa rozwiązuje równanie różniczkowe zwyczajne w  $\mathbb{R}^n$ :

$$c'(t) = [a_1(c(t)), \dots, a_n(c(t))]$$

z warunkiem początkowym  $c(0) = x_0$ .



**Uwaga 5.12.** Niech  $\gamma_1, \gamma_2 : (a, b) \rightarrow M$  będą krzywymi całkowymi pola  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Jeśli istnieje  $t_0 \in (a, b)$  takie, że

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$$

to krzywe te są równe.

**Dowód.** Rozważmy zbiór

$$A = \{t \in (a, b) : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}.$$

Jest on domknięty, gdyż  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są funkcjami ciągłymi. Ze względu na to, że  $\gamma_i$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego tak jak w dowodzie wyżej, to zbiór ten jest otwarty (rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych są lokalnie jednoznaczne). Wiemy, że  $t_0 \in A$ , więc zbiór  $A$  jest niepusty. Odcinek  $(a, b)$  jest spójny, czyli skoro  $A \subseteq (a, b)$  jest zbiorem jednocześnie otwartym i domkniętym, to może być pusty (ale  $t_0$ ) lub być całością. Stąd  $A = (a, b)$ . ☕

**Fakt 5.13.** Dla każdego  $p \in M$  istnieje  $p \in U_p \subseteq M$  oraz gładka funkcja

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \rightarrow M$$

taka, że dla każdego  $q \in U_p$   $\gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  określone przez

$$\gamma_q(t) = \Gamma(t, q)$$

jest krzywą całkową pola  $X$  o początku w  $q$ .

**Dowód.** Wynika z analogicznego faktu dla równań różniczkowych zwyczajnych. ☕

**Definicja 5.14.** Pole wektorowe  $X \in \mathfrak{X}(M)$  jest **zupętne**, jeśli dla każdego  $p \in M$  istnieje krzywa całkowa  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  o początku w  $p$ . To znaczy każda lokalnie określona krzywa całkowa przedłuża się do całego  $\mathbb{R}$ .

### Przykłady:

1. Rozważmy pole wektorowe

$$X(u, v) = -v \frac{\partial}{\partial u}(u, v) + u \frac{\partial}{\partial v}(u, v)$$

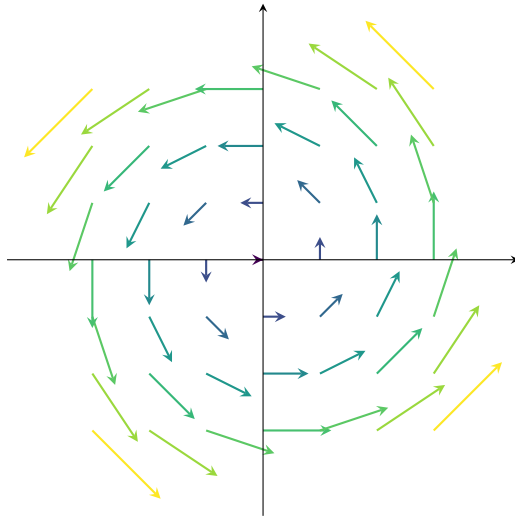
na  $\mathbb{R}^2$ . Jest ono zupętne, gdyż krzywe całkowe mają postać

$$\gamma(t) = (r \cdot \cos(t + t_0), r \cdot \sin(t + t_0))$$

i są określone na całym  $\mathbb{R}$ .

To samo pole ale określone na  $\text{Int}(\mathbb{H}^2) = \{(x, y) : y > 0\}$  nie jest zupętne.





**Fakt 5.15.** Jeśli  $X \in \mathfrak{X}(M)$  jest zupełnym polem wektorowym, a dla każdego  $p \in M$

$$\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$$

jest maksymalnie przedłużoną krzywą całkową pola  $X$  o początku w  $p$ , to

$$\Gamma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

określone przez

$$\Gamma(t, p) = \gamma_p(t)$$

jest odwzorowaniem gładkim.

Ponadto, dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  odwzorowanie  $\phi_t : M \rightarrow M$  zadane przez

$$\phi_t(p) = \gamma_p(t)$$

jest dyfeomorfizmem rozmaitości  $M$ , a przyporządkowanie  $t \mapsto \phi_t$  jest homomorfizmem grupy  $\mathbb{R}$  w grupę dyfeomorfizmów  $M$  ( $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ ).

**Dowód.** Gładkość odwzorowania  $\Gamma$  wynika z gładkiej lokalnej zależności krzywych całkowych od punktu początkowego. Tak samo jak dla równań różniczkowych gładka zależność lokalna pociąga gładką zależność globalną.

W takim razie  $\phi_t = \Gamma(t, \cdot)$  jest gładkim odwzorowaniem  $M \rightarrow M$ , gdzie oczywiście  $\phi_0 = \text{id}_M$ . Weźmy dowolne  $t, s \in \mathbb{R}$ , wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t(\phi_s(p)) &= X(\phi_t(\phi_s(p))) \\ \frac{d}{dt} \phi_{t+s}(p) &= X(\phi_{t+s}(p)) \end{aligned}$$

są krzywymi całkowymi. Rozważmy teraz krzywe całkowe  $\alpha(t) = (\phi_t \circ \phi_s)(p)$  oraz  $\beta(t) = \phi_{t+s}(p)$ . Mamy

$$\alpha(0) = (\phi_0 \circ \phi_s)(p) = (\text{id}_M \circ \phi_s)(p) = \phi_s(p)$$

$$\beta(0) = \phi_{0+s}(p) = \phi_s(p),$$

czyli  $\alpha$  oraz  $\beta$  są obie krzywymi całkowymi o początku w punkcie  $\phi_s(p)$ , więc na mocy 5.12 mamy

$$\phi_t \circ \phi_s = \alpha = \beta = \phi_{t+s}$$

Z równości  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$  wynika, że:

- $\phi_t$  jest dyfeomorfizmem, bo

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_{t+(-t)} = \phi_0 = \text{id}_M$$

- $t \mapsto \phi_t$  jest homomorfizmem  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ .



Rodzina  $\{\phi_t\}$  jak wyżej jest nazywana **potokiem pola**  $X$  lub **jednparametrową grupą dyfeomorfizmów** generowaną przez  $X$ . Pojawia się też określenie *potok fazowy* pola  $X$ .

Krzywe całkowe  $t \mapsto \phi_t(p)$  są nazywane **trajektoriami potoku**  $\{\phi_t\}$ , trajektoriami pola  $X$ , krzywymi fazowymi pola  $X$ , liniami sił etc.

## Przykłady:

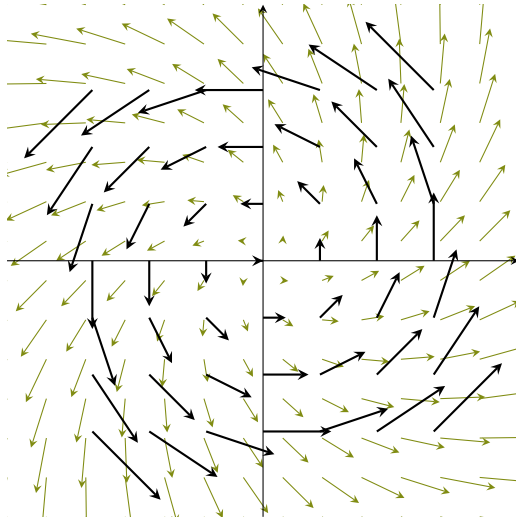
1. W przykładzie pola zupełnego

$$X(u, v) = -v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}$$

na  $\mathbb{R}^2$  jak wyżej mamy potok

$$\phi_t(u, v) = (u \cos t - v \sin t, u \sin t + v \cos t)$$

będący obrotem wokół  $(0, 0)$  o kąt  $t$ . Na zielono niżej przedstawiono  $\phi_{40^\circ}$ .



**Definicja 5.16.** Jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów na rozmaitości  $M$  nazywamy

- każdy homomorfizm  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  gładko zależny od  $t \in \mathbb{R}$  lub, równoważnie,
- każdą rodzinę  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  dyfeomorfizmów gładko zależną od  $t$ , taką, że  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$  dla każdego  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Pole wektorowe  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , które nie jest zupełnie wyznacza jedynie tzw. lokalną jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, tzn. rodzinę

$$\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)\}_\alpha$$

taką, że

1. zbiory  $U_\alpha \subseteq M$  są otwarte i pokrywają  $M$
2.  $\phi^\alpha : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \rightarrow M$  jest gładkie
3.  $\phi^\alpha(0, p) = p$  dla każdego  $p \in U_\alpha$
4. oznaczając

$$\phi_t^\alpha(p) = \phi^\alpha(t, p)$$

jeśli  $s, s+t \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ ,  $t \in (-\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta)$  oraz  $\phi_s^\alpha(p) \in U_\beta$ , to wówczas

$$\phi_t^\beta \circ \phi_s^\alpha(p) = \phi_{t+s}^\alpha(p)$$

Każdy  $(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)$  tworzony jest z lokalnych krzywych całkowych pola  $X$  gładko

zależnych po punktu początkowego:

$$t \mapsto \phi^\alpha(t, p)$$

jest krzywą całkową pola  $X$  o początku w  $p$ . To znaczy

$$\phi^\alpha(0, p) = p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^\alpha(t, p) = X(\phi^\alpha(t, p)).$$

Taką rodzinę nazywamy też **potokiem pola  $X$** , zaś  $X$  to jej *potok generujący*.

**Twierdzenie 5.17.** *Każda abstrakcyjna jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów  $M$  jest potokiem pewnego zupełnego pola wektorowego  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .*

*Ponadto, jeśli patrzymy na prawdziwą jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, to generującą ją pole  $X$  jest zupełne.*

**Dowód.** Niech  $\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)\}$  będzie rodziną dyfeomorfizmów jak wyżej.

Określmy pole  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Jeśli  $p \in U_\alpha$ , to

$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\alpha(t, p) \in T_p M$$

według punktu 3. wyżej.

Takie pole jest dobrze określone, tzn. jeśli  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ , to

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\alpha(t, p) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\beta(t, p).$$

Można to pokazać stosując warunek 4. wyżej dla  $s = 0$ . Weźmy  $\phi_s^\alpha(p) = \phi_0^\alpha = p \in U_\beta$ , więc dla  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon = \min(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$ , zachodzi

$$\phi_t^\beta(p) = \phi_t^\beta(\phi_s^\alpha(p)) = \phi_{t+s}^\alpha(p) = \phi_{t+0}^\alpha = \phi_t^\alpha(p).$$

Stąd wynika równość pochodnych.

Pokażemy, że na pojedynczym  $U_\alpha$  tak określone pole  $X$  jest polem gładkim. Niech  $Z$  będzie pomocniczym polem na produkcie  $(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha$  zadany przez

$$Z(t, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=t} (s, p) = \frac{\partial}{\partial t} (t, p).$$

Oczywiście, jest to gładkie odwzorowanie

$$Z : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \rightarrow T[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha]$$

kóre daje również

$$d\phi^\alpha : T[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha] \rightarrow TM.$$

Ponadto, dla  $p \in U_\alpha$  zachodzi

$$X(p) = d\phi^\alpha \circ Z(0, p)$$

i łatwo jest już sprawdzić gładkość w lokalnych mapach na  $U_\alpha$ .

Pokażemy teraz, że krzywe  $t \mapsto \phi^\alpha(t, p)$  są krzywymi całkowymi pola  $X$ , tzn. sprawdzimy, że

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} \phi^\alpha(t, p) = X(\phi^\alpha(t_0, p))$$

dla każdego  $p \in U_\alpha$  oraz  $t_0 \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ .

Zbiory postaci  $U_\alpha$  pokrywają całe  $M$ , stąd istnieje  $\beta$  takie, że  $\phi^\alpha(t_0, p) \in U_\beta$ , przy czym może się zdarzyć, że  $\beta = \alpha$ . Wtedy

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} \phi^\alpha(t, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} \phi^\alpha(t_0 + s, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} \phi_s^\beta(\phi_{t_0}^\alpha(p)) = X(\phi_{t_0}^\alpha(p))$$

przedostatnia równość wynika z warunku 4, a ostatnia równość to oczywiście sposób w jaki  $X$  jest zdefiniowane. ☕

**Twierdzenie 5.18.** Jeśli  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ma nośnik zwarty, to  $X$  jest zupełne.

Na zwartej rozmaitości  $M$  każde pole  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ma nośnik zwarty, więc każde jest zupełne.

**Dowód.** Nośnik  $\text{supp}(X)$  możemy pokryć skończoną rodziną zbiorów  $U_{\alpha_i}$ , dla których istnieją odpowiednie

$$\phi^{\alpha_i} : (-\varepsilon_{\alpha_i}, \varepsilon_{\alpha_i}) \times U_{\alpha_i} \rightarrow M.$$

Wtedy dla  $\varepsilon = \min_i \{\varepsilon_{\alpha_i}\}$  możemy stworzyć krzywe całkowe o początku w dowolnym  $p \in M$  i określone na przedziale  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Ponieważ tak dobrane  $\varepsilon$  jest jednostajne na całym  $M$ , to możemy w ten sposób dobrane krzywe całkowe przedłużać w nieskończoność w obie strony, a więc pole z którym są one powiązane jest polem zupełnym. ☕

## 5.4. Zastosowania potoków pól wektorowych

### Przykłady:

1. Jeśli  $M$  jest rozmaitością spójną, a  $p, q \in M$ , to istnieje dyfeomorfizm  $f : M \rightarrow M$  taki, że  $f(p) = q$ . Określamy tę własność tranzytywnością dyfeomorfizmów na punktach spójnej rozmaitości.

**Dowód.** Ponieważ  $M$  jest spójna, to  $p$  możemy z  $q$  połączyć kawałkami gładką krzywą  $\gamma$ . Mówiąc dokładniej, istnieje

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M$$

oraz  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  takie, że  $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$  jest gładkim włożeniem. Oznacza to,  $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$  jest różnowartościowa i pochodna nie zeruje się na żadnym punkcie  $t \in [a_i, a_{i+1}]$ . Dodatkowo wymagamy, by  $\gamma(a) = p$  i  $\gamma(b) = q$ .

Dla każdego  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  skonstruujemy dyfeomorfizm  $f_i : M \rightarrow M$  taki, że

$$f_i(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1}).$$

Wówczas dyfeomorfizm  $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$  będzie dyfeomorfizmem którego istnienie chcemy dowieść.

Dla  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  rozważmy pole wektorowe  $X_i$  o nośniku zwartym takie, że

$$X_i(\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}](t)) = \frac{d}{dt} \gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}](t)$$

dla  $t \in [a_i, a_{i+1}]$ . Takie pole może zostać skonstruowane za pomocą rozkładów jedności i jest ono zupełne.

Oznaczmy  $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}] = \gamma^i$ . Rozważmy mapę  $(U, \phi)$  na  $M$ . Wtedy

$$\phi \circ \gamma^i = (\gamma_1^i(t), \dots, \gamma_n^i(t)).$$

Ponieważ  $(\gamma^i)'(t) \neq 0$ , to dla ustalonego  $t_0$  możemy przyjąć, że  $(\gamma_1^i)'(t_0) \neq 0$ . Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, że  $\gamma_1^i$  jest gładko odwracalne wokół  $t_0$ . Nakładając  $\gamma_1^{-1}$  lokalnie wokół  $t_0$  na  $\phi \circ \gamma^i(t)$  dostajemy dyfeomorfizm

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\gamma_1^{-1}(x_1), x_2, \dots, x_n)$$

dający mapę  $\psi$ , w której

$$\psi \gamma^i(t) = (t, \gamma_2^i(t), \dots, \gamma_n^i(t)).$$

Zdefiniujmy lokalnie pole  $Y_\alpha$  przez

$$Y_\alpha(x_1, \dots, x_n) = [1, \gamma_2'(x_1), \dots, \gamma_n'(x_1)]$$

Wtedy

$$(\psi \gamma^i)'(t) = Y_\alpha(\psi \gamma^i(t)).$$

Wystarczy w pokrycie ze zbiorem odpowiadającym mapie  $\psi$  wpisać rozkład jedności i zdefiniować  $X_i = \sum f_\alpha Y_\alpha$ , gdzie  $Y_\alpha$  różne niż to opisane wyżej jest zerowe.

Krzywa  $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$  jest krzywą całkową tego pola. Zatem potok  $\phi_t^{X_i}$  tego pola spełnia warunek

$$\phi_{a_{i+1}-a_i}^{X_i}(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1}).$$

Bierzemy więc  $f_i = \gamma_{a_{i+1}-a_i}^{X_i}$ .



- Niech  $p \in M$  oraz  $X \in C^\infty(TM)$  takie, że  $X(p) \neq 0$ . Wówczas istnieje otoczenie  $p \in U$  oraz mapa  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  taka, że pole  $X$  w tej mapie wyraża się  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . [Wyprostowanie pola wektorowego]

Wyrażenie pola  $X \in C^\infty(TM)$  w mapie  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  to zapisanie pola

$$d\phi(X) = d\phi_{\phi^{-1}(u)}(X(\phi^{-1}(u)))$$

dla  $u \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , w postaci

$$\sum_{i \leq n} x_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u)$$

**Dowód.** Problem jest lokalny wokół  $p$ , więc wystarczy rozumienie go w dowolnej mapie wokół  $p$ . Możemy od razu przyjąć, że  $X$  jest polem wektorowym na  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  postaci

$$X = \sum x_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u).$$

Załóżmy, że punktowi  $p$  odpowiada punkt  $u_0 \in U$  taki, że  $u_0 = (0, \dots, 0)$ .

Przyjmijmy, że  $x_1(u_0) \neq 0$ , bo  $X(u_0) \neq 0$ . Niech  $\phi_t$  oznacza lokalny potok wokół  $u_0$ , tzn.

$$\phi_t(u) = \phi(t, u),$$

gdzie  $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \rightarrow U$  i  $U_0 \subseteq U$  jest mniejszym otoczeniem  $p$ . Ponadto, niech  $\phi(0, u) = u$  oraz

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = X(\phi(t, u)).$$

Oznaczmy zbiór otwarty

$$\Omega = \{(u_2, \dots, u_n) : (0, u_2, \dots, u_n) \in U_0\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

i rozważmy funkcję

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow U$$

$$F(t, (u_2, \dots, u_n)) = \phi_t(0, u_2, \dots, u_n) = \phi(t, (0, u_2, \dots, u_n)).$$

Jej jacobian ma postać

$$DF(0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} x_1(u_0) & 0 & \dots & 0 \\ x_2(u_0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ x_n(u_0) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(DF(0, \dots, 0)) = x_1(u_0) \neq 0,$$

zatem na otoczeniu  $(0, \dots, 0)$   $F$  jest dyfeomorfizmem. Potraktujmy więc  $F^{-1}$  jako

nową mapę wokół  $u_0 = (0, \dots, 0)$ . Pokażemy, że  $dF^{-1}(X) = \frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} (dF \upharpoonright (t, u_2, \dots, u_n))^{-1}(X(F(t, u_2, \dots, u_n))) &= \frac{\partial}{\partial t}(t, u_2, \dots, u_n) \\ (dF \upharpoonright (t, u_2, \dots, u_n))\left(\frac{\partial}{\partial t}(t, u_2, \dots, u_n)\right) &= \frac{d}{dt}F(t, u_2, \dots, u_n) = \\ &= \frac{d}{dt}\phi_t(0, u_2, \dots, u_n) = \\ &= X(\phi_t(0, u_2, \dots, u_n)) = X(F(t, u_2, \dots, u_n)) \end{aligned}$$



Otoczenie  
kołnierzone to  
otwarte otoczenie  
 $U \subset \partial M$  w  $M$  wraz  
z dyfeomorfizmem  
 $F: [0, 1) \times \partial M \rightarrow U$   
takim, że  
 $F(0, x) = x$ .

3. **Otoczenie kołnierzone** [twierdzenie 3.1] brzegu zwartej rozmaitości. Pokażemy istnienie otoczenia kołnierzonego.

**Dowód.** Niech  $M$  będzie zwartą rozmaitością o niepustym brzegu  $\partial M \neq \emptyset$ , a  $X$  niech będzie polem wektorowym na  $M$ , które na brzegu jest skierowane do wewnątrz  $M$  (istnienie takiego pola: 5.7). Oznacza to, że w mapie  $\psi : U_p \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  wokół punktu  $p \in \partial M$ , gdzie  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0\}$  pole  $X$  ma postać

$$X(x) = \sum_{i \leq n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gdzie  $X_1(0, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

Dla każdego  $p \in \partial M$  istnieje lokalna krzywa całkowa  $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$  pola  $X$  o początku w  $p$ , tzn.  $\gamma(0) = p$ . Ponadto, istnieje również gładka funkcja

$$\phi_p : [0, \varepsilon) \times U_p \rightarrow M$$

taka, że odwzorowanie  $t \mapsto \phi_p(t, q)$  jest krzywą całkową pola  $X$  o początku w  $q$  dla każdego  $q \in U_p$ .

Ponieważ  $M$  jest zwarte, to każde lokalne jednostronne rozwiązanie równania różniczkowego można dowolnie przedłużać, otrzymując gładkie

$$\phi : [0, \infty) \times M \rightarrow M$$

takie, że  $t \mapsto \phi(t, x)$  są krzywymi całkowymi pola  $X$ .

Określmy funkcję  $F : [0, \infty) \times \partial M \rightarrow M$  taką, że

$$F(t, p) = \phi(t, p).$$

Wtedy funkcja  $F$  ma maksymalny rząd we wszystkich punktach  $(0, p)$ , bo macierz Jakobianu w mapie  $\psi_p$  ma postać

$$DF_{(0,p)} = \begin{bmatrix} X_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ X_2(p) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(p) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

czyli  $\det DF_{(0,p)} = X_1(p) > 0$ . Zatem istnieje  $\varepsilon > 0$  taki, że obcięcie  $F \upharpoonright [0, \varepsilon \times \partial M$  jest gładkie i w każdym punkcie ma rząd  $n$  (maksymalny). Do pokazania, że  $F \upharpoonright [0, \varepsilon) \times$



$\partial M$  jest otoczeniem kołnierзовym wystarczy różnowartościowość  $F \upharpoonright [0, \varepsilon) \times \partial M$  (dyfeomorfizm na otwarte otoczenie brzegu).

Założmy, że  $F(t_1, p_1) = F(t_2, p_2)$ , gdzie  $t_1 \geq t_3$ . Wówczas z jednoznaczności krzywych całkowych dostajemy

$$F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_2, 0) = p_2.$$

Gdyby  $t_1 > t_2$ , to istniałaby krzywa całkowa  $\gamma[0, t_1 - t_2] \rightarrow M$  zadana przez  $\gamma(t) = F(p_1, t)$ , gdzie  $\gamma(t_1 - t_2) = p_2$ , co jest niemożliwe, bo z punktu  $p_2 \in \partial M$  nie da się poprowadzić krzywej całkowej "wstecz". Stąd też  $t_1 = t_2$  i  $F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_1, 0) = p_1$ , czyli  $p_2 = p_1$ . ☕

## 5.5. Interpretacja pól wektorowych jako derywacji

**Definicja 5.19. Derywacja** (lub **różniczkowanie**) w punkcie  $p \in M$  to operator

$$L_p : \{\text{funkcje gładkie określone na otoczeniach otwartych } p\} \rightarrow \mathbb{R}$$

który jest dodatkowo:

1. liniowy, tzn.  $L_p(f + g) = L_p(f) + L_p(g)$  oraz  $L_p(c \cdot f) = c \cdot L_p(f)$  dla wszystkich  $c \in \mathbb{R}$  oraz funkcji gładkich  $f, g$
2. spełniający regułę Leibniza

$$L_p(f \cdot g) = f(p) \cdot L_p(g) + g(p) \cdot L_p(f)$$

Należy rozumieć, że  $f + g$  i  $f \cdot g$  są określone na przekroju dziedzin  $f$  oraz  $g$ .

Ponieważ derywacje działają w pobliżu punktu  $p$ , to możemy założyć  $M = \mathbb{R}^n$  oraz  $p = (0, \dots, 0)$  przez wyrażenie wszystkich obiektów w odpowiedniej mapie.

### Przykłady:

1. Niech  $X \in T_p M$  będzie wektorem stycznym. Wówczas pochodna w kierunku  $X$  jest przykładem derywacji w punkcie  $p$  ( $L_p(f) = Xf$ ).

Niech  $1_U$  oznacza funkcję stałą równą 1 na otoczeniu  $U$  punktu  $p$ . Wówczas

$$L_p(1_U) = L_p(1_U \cdot 1_U) = 1_U \cdot L_p(1_U) + 1_U \cdot L_p(1_U) = 2L_p(1_U)$$

zatem  $L_p(1_U) = 0$ . Jeśli teraz  $c_U$  oznacza funkcję stałą równą  $c$  na otoczeniu  $p \in U$ , to dzięki liniowości  $L_p$  mamy

$$L_p(c_U) = cL_p(1_U) = c \cdot 0 = 0.$$

Zatem każda derywacja  $L_p$  przyjmuje wartość 0 na funkcjach stałych.

Jeśli  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  i  $p \in U$  oraz  $p \in V \subseteq U$ , to  $L_p(f) = L_p(f \upharpoonright V)$ . W takim razie, jeśli  $f, g$  pokrywają się na otoczeniu  $p$ , to  $L_p(f) = L_p(g)$ .

**Lemat 5.20.** Dowolna gładka funkcja  $f$  [po wyrażeniu w mapie] określona na kuli

wokół  $p = (0, \dots, 0) \subseteq \mathbb{R}^n$  przedstawia się w postaci

$$f(x) = f(0) + \sum_{i \leq n} x_i \cdot h_i(x),$$

gdzie  $h_i$  są gładkimi funkcjami takimi, że  $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

**Dowód.** Ustalmy  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{i \leq n} \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i \leq n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Zatem kładąc  $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$  dostajemy szukaną postać  $f(x)$ . ☕

**Twierdzenie 5.21.** Każda derywacja  $L_p$  w punkcie  $p$  jest pochodną kierunkową w kierunku pewnego wektora  $X \in T_p M$ . Wektor o tej własności jest jedyny.

**Dowód.** Rozważmy wektor  $X$  zadany

$$X = \sum_{i \leq n} L_p(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

gdzie  $x_i$  jest traktowane jako funkcja wokół  $p = (0, \dots, 0)$ .

Pokażemy, że dla dowolnej funkcji gładkiej  $f$  zachodzi  $Xf = L_p f$ .

Niech  $f(x) = f(0) + \sum x_i h_i(x)$ , gdzie  $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ . Wówczas

$$\begin{aligned} L_p(f) &= L_p(f(0) + \sum x_i h_i) = \\ &= L_p(f(0)) + \sum L_p(x_i h_i) = \\ &= 0 + \sum [h_i(p) L_p(x_i) + x_i(0) L_p(h_i)] = \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) L_p(x_i) = Xf \end{aligned}$$

Jedyność  $X$  wynika z łatwej obserwacji, że różne wektory  $X \in T_p M$  są wyznaczone przez różne derywacje. ☕

**Definicja 5.22.** Derywacja na  $M$  to operacja

$$L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

która jest liniowa i spełnia regułę Leibniza:

$$L(f \cdot g) = L(f) \cdot g + L(g) \cdot f$$

**Przykłady:**

1. Gładkie pole wektorowe  $X$  na  $M$  określa derywację na  $M$  poprzez  $L(f) = Xf$  lub dokładniej  $L(f)(p) = X(p)f$ .

**Twierdzenie 5.23.** Każda derywacja na  $M$  jest określona przez gładkie pole wektorowe  $X$  na  $M$ . Takie pole jest wyznaczone w sposób jednoznaczny.

**Dowód.** W każdym punkcie  $p \in M$  derywacja  $L$  na  $M$  wyraża derywację w punkcie  $p$  poprzez

$$L_p(f) = L(\hat{f})(p),$$

gdzie  $\hat{f}$  jest rozszerzeniem  $f$  do całego  $M$ . Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że w każdym  $p \in M$  istnieje wektor  $X(p) \in T_p M$  taki, że  $L_p$  jest przez niego zadana. Pozostaje teraz wykazać, że pole wektorowe  $X$  zadane w ten sposób jest gładkie.

Założmy, że  $X$  nie jest gładkie. To znaczy, że istnieje  $i$  oraz mapa  $\psi$  wokół  $p \in M$  takie, że  $i$ -ta współrzędna  $X$  wyrażonego w mapie  $\psi$  wokół  $p$  nie jest gładką funkcją. Dałoby się więc znaleźć gładką funkcję  $f$  na  $M$  dla której  $X_p f$  nie jest gładkie. Ale tak być nie może, więc sprzeczność. ☕

Twierdzenia powyżej mówią o istnieniu jednoznacznej korespondencji

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{derywacje na} \\ \text{rozmaitości } M \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{gładkie pola} \\ \text{wektorowe } X \\ \text{na rozmaitości } M \end{array} \right\}$$

zadanej przez działanie pola  $X$  na funkcja  $f$  poprzez pochodną kierunkową w poszczególnych punktach:

$$Xf(p) := X_p f$$

Tak jak w przypadku  $1_U$  możemy pokazać, że  $L(0_M) = 0_M$ :

$$L(0_M) = L(0_M + 0_M) = 2L(0_M) \implies L(0_M) = 0_M$$

**Lemat 5.24.** Niech  $f \in C^\infty(M)$ , a  $L$  niech będzie derywacją na  $M$ . Rozważmy zbiór

$$Z_f = \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Wówczas dla każdego  $p \in \text{Int}(Z_f)$  mamy  $L(f)(p) = 0$ .

**Dowód.** Niech  $g \in C^\infty(M)$  i niech  $g(p) \neq 0$ ,  $\text{supp}(g) \subseteq \text{Int}(Z_f)$ . Wówczas  $f \cdot g \equiv 0$ , stąd

$$0 \equiv L(f \cdot g) = L(f)g + L(g) \cdot f$$

i dalej

$$0 = L(f)(p) \cdot g(p) + L(g)(p) \cdot f(p) = L(f)(p) \cdot g(p)$$

ponieważ  $g(p) \neq 0$  dla pewnego  $p \in \text{Int}(Z_f)$ , to musi być  $L(f)(p) = 0$ . ☕

Jeśli  $f, g \in C^\infty(M)$  zgadzają się na pewnym otoczeniu  $p \in M$ , to  $L(f)(p) = L(g)(p)$ , gdyż  $0 = L(f - g)(p) = L(f)(p) - L(g)(p)$ .

## 6. Komutator i pochodna Liego

### 6.1. Komutator pól wektorowych

**Lemat 6.1.** Niech  $X, Y$  będą polami wektorowymi na rozmaitości  $M$ . Wówczas operator

$$XY - YX : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

określony przez  $f \mapsto XYf - YXf$  jest derywacją.

**Dowód.** Liniowość  $XY - YX$  wynika wprost z liniowości  $X$  oraz  $Y$  jako operatorów na  $C^\infty(M)$ . Operator ten spełnia również regułę Leibniza:

$$\begin{aligned} (XY - YX)(f \cdot g) &= XY(f \cdot g) - YX(f \cdot g) = \\ &= X(g \cdot Yf + f \cdot Yg) - Y(g \cdot Xf + f \cdot Xg) = \\ &= X(g \cdot Yf) + X(f \cdot Yg) - Y(g \cdot Xf) - Y(f \cdot Xg) = \\ &= Yf \cdot Xg + g \cdot XYf + Yg \cdot Xf + f \cdot XYg + \\ &\quad - Xf \cdot Yg - g \cdot YXf - Xg \cdot Yf - f \cdot YXg = \\ &= g \cdot (XYf - YXf) + f \cdot (XYg - YXg) = \\ &= g \cdot (XY - YX)f + f \cdot (XY - YX)g \end{aligned}$$



Lemat wyżej jest zaskakujący, gdyż np.  $XY + YX$  nie jest derywacją. Jest to operator drugiego rzędu, tzn. jego wartość na funkcji  $f$  zależy nie tylko od pierwszych pochodnych, ale również od pochodnych drugiego rzędu. W przypadku  $XY - YX$  pochodne rzędu dwa są kasowane jak wyżej i pozostają jedynie składniki rzędu 1.

**Definicja 6.2.** Pole wektorowe na  $M$  odpowiadające derywacji  $XY - YX$  oznaczane jest symbolem  $[X, Y]$  i nazywa się **komutatorem** pól  $X$  i  $Y$ .

Komutator ma następujące własności:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $[X, Y] = -[Y, X]$                            | 4. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$             |
| 2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ | 5. $[X, fY] = Xf \cdot Y + f \cdot [X, Y]$ |
| 3. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$                | 6. $[cX, Y] = c[X, Y] = [X, cY]$           |

## 6.2. Komutator w lokalnych współrzędnych

Niech  $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  oraz  $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  będą polami wektorowymi i  $X_i, Y_i$  niech będą funkcjami współrzędnych. Wówczas:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]f &= XYf - YXf = \\
 &= \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] - \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] = \\
 &= \sum X_i \left[ \sum \left[ \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right] - \sum Y_i \left[ \sum \left[ \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right] = \\
 &= \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \\
 &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} \left[ \sum \left[ X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] \right]
 \end{aligned}$$

W takim razie komutator wyrażony we współrzędnych pól  $X$  i  $Y$  to:

$$[X, Y] = \sum \left[ \sum \left[ X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] \right] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

## 6.3. Definicja pochodnej Liego

W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  możemy bez problemu zdefiniować pochodną kierunkową pola wektorowego  $Y$  wzdłuż wektora  $v \in T_p M$  jako

$$D_v Y(p) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} Y(p + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tv) - Y(p)}{t}$$

gdyż wektory styczne w jednym punkcie utożsamiają się jako wektory swobodne z wektorami stycznymi w każdym innym punkcie. Na innych rozmaitościach, które nie mają struktury przestrzeni wektorowej, niekoniecznie musi być to możliwe i utożsamienia takie mogą się różnić w różnych mapach.

Wzór wyżej możemy uogólniać. Pierwszą możliwością byłoby zastąpienie  $Y(p + tv)$  przez krzywą całkową o początku  $p$  wzdłuż wektora  $Y$ , ale wtedy  $Y_{\gamma(t)}$  oraz  $Y_{\gamma(0)}$  nie leżałyby w tej samej przestrzeni stycznej. Stąd wektor  $v \in T_p M$  zastąpimy przez pole wektorowe  $X$  i wektor  $Y$  przesuniemy o  $t$  za pomocą potoku pola  $X$ , po czym wrócimy je na tę samą przestrzeń w której było  $Y(p)$ . Działając w ten sposób definiujemy pochodną Liego.

**Definicja 6.3. Pochodną Liego,  $L_X Y(p)$ ,** nazywamy wektor z  $T_p M$  otrzymany jako

$$L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_{-t}^X[Y(\phi_t^X(p))] - Y(p)}{t}$$

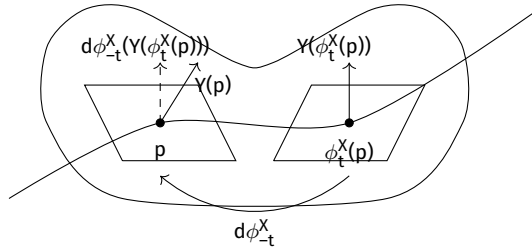
Czasem pochodną Liego w punkcie  $p$  oznaczamy jako  $(L_X Y)_p$ .

lub równoważnie

$$\frac{d}{dt}_{t=0} d\phi_{-t}^X[Y(\phi_t^X(p))]$$

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1}[Y(\phi_t^X(p))]$$

$\phi_t^X$  oznacza  
element potoku  
pola  $X$  - górny  
indeks będzie  
informował o polu  
wektorowym do  
którego się odnosi  
 $\phi_{-t}^X$ .



### Przykłady:

1. Rozważmy  $\mathbb{R}^3$  jako rozmaiłość i niech  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Mamy wtedy

$$\phi_t^X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3)$$

$$d\phi_t^X : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\phi_t^X(p)}\mathbb{R}^3 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$$

$\cong \mathbb{R}^3 \qquad \qquad \qquad \cong \mathbb{R}^3$

Niech teraz

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}$$

będzie wektorem stycznym do  $\mathbb{R}^3$  w punkcie  $p = (x_1, x_2, x_3)$ . Do wyliczenia pochodnej Liego potrzebujemy

$$Y(\phi_t^X(p)) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

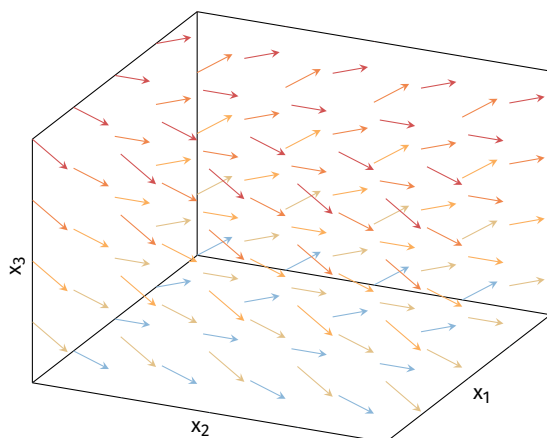
oraz

$$(d\phi_t^X)^{-1}(Y(\phi_t^X(p))) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Skorzystamy teraz z ostatniej wariacji definicji

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1}(Y(\phi_t^X(p))) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{czyli } L_X(Y) = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

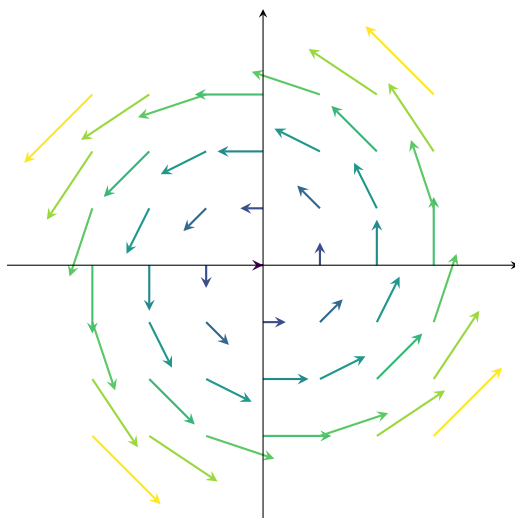


2. Rozważmy teraz  $M = \mathbb{R}^3$  oraz pole wektorowe

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

jak w przykładzie z poprzedniego rozdziału. Wówczas

$$\phi_t^X(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$



$$d(\phi_t^X)_p : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\phi_t^X(p)} \mathbb{R}^2$$

jest zadana macierzą obrotu o  $t$  stopni

$$d(\phi_t^X) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

W takim razie macierz odwzorowania odwrotnego to

$$(d(\phi_t^X)_p)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Rozważmy teraz pole wektorowe  $Y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ . Wtedy pochodna Liego  $Y$  to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{t=0} Y(\phi_t^X(x, y)) &= \frac{d}{dt}_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ -\cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y} = L_X(Y)(x, y) \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że  $X(0, 0) = 0$ , a jednak  $L_X Y(0, 0) \neq 0$ .

## 6.4. Własności

### Twierdzenie 6.4.

$$L_X Y = [X, Y]$$

**Dowód.** Pokażemy, że dla każdego  $p \in M$   $L_X Y(p) = [X, Y](p)$ . Rozbijemy to na przypadki w zależności od tego, czy  $X(p)$  jest zerowe czy nie.

#### 1. $X(p) \neq 0$

Z przykładu o wyprostowywaniu pola wektorowego wiemy, że możemy dobrać mapę, w której

$$X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

oraz  $p = (0, \dots, 0)$ . Niech  $Y(x) = \sum_{i \leq n} Y_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  w tej mapie. Komutator  $X$  i  $Y$  w takim przypadku wynosi  $[X, Y] = \sum \frac{\partial Y_i}{\partial x_1}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ , bo  $X$  ma wszystkie pochodne zerowe i niezerową wartość tylko na pierwszej współrzędnej:

$$[X, Y](0) = \sum \left[ \sum \left[ x_i(0) \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}(0) - Y_i(0) \frac{\partial x_i}{\partial x_i}(0) \right] \right] = \sum_{j \leq n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_1}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Do wyliczenia pochodnej Liego potrzebujemy potoku pola  $X$

$$\phi_t^X(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$$

oraz jego pochodnej, czyli  $d\phi_t^X = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = (d\phi_t^X)^{-1}$ . Podstawiając do definicji

Dla każdego pola wektorowego  $X$  możemy znaleźć mapę taką, że  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$  po wyrażeniu w tej mapie.



otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_X Y(0) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1} Y(\phi_t^X(0)) = \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1} Y(t, 0, \dots, 0) = \\ &= \frac{d}{dt} Y(t, 0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} Y(0) = [X, Y](0) \end{aligned}$$

Czyli po takim wyrażeniu  $X$  i  $Y$  w mapie mamy  $[X, Y](p) = L_X Y(p)$ .

**$X(p) = 0$**

Zacniemy od udowodnienia dwóch faktów pomocniczych.

**Fakt 1.** Jeśli  $X : (a, b) \rightarrow T_p M$  oraz  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  są gładkimi funkcjami, to  $\frac{d}{dt} [X(t)f] = \left[ \frac{d}{dt} X(t) \right] f$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [X(t)f] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\varepsilon)f - X(t)f}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \cdot f \right] = \\ &= \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \right] \cdot f = \left[ \frac{d}{dt} X(t) \right] f \end{aligned}$$

Równość  $\star$  wynika z ciągłości pochodnej kierunkowej względem kierunku.

**Fakt 2.** Dla  $X \in C^\infty(TM)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  oraz dyfeomorfizmu  $h : M \rightarrow N$  rozważmy pole wektorowe  $dh(X) \in C^\infty(TN)$  oraz funkcję  $f \circ h^{-1} \in C^\infty(N)$  przeniesione na  $N$  przez  $h$ . Wówczas

$$Xf(p) = dh(X)(fh^{-1})(h(p)).$$

Da  $q \in N$  mamy

$$dh(X) = dh_{h^{-1}(q)}(X(h^{-1}(q)))$$

ale ponieważ  $h$  jest dyfeomorfizmem, to zawsze istnieje  $p \in M$  takie, że  $q = h(p)$ . Możemy więc zapisać

$$dh(X) = dh_{h^{-1}(h(p))}(X(h^{-1}(h(p)))) = dh_p(X(p)).$$

W takim razie

$$dh(X)(fh^{-1})(h(p)) = d_p(X(p))(fh^{-1})(h(p)) = d_p(X(h^{-1}(h(p)))) = d_p(X(f(p))) = Xf(p)$$

tak jak chcieliśmy.

Niech  $f$  będzie dowolną funkcją gładką na rozmaitości  $M$ . Zadziałamy na nią wek-

Jak w podrozdziale 5.2 o przenoszeniu pól wektorowych przez dyfeomorfizmy.

torami  $[X, Y](p)$  oraz  $L_X Y(p)$

$$[X, Y](p)f = [X, Y]f(p) = XYf(p) - YXf(p) = -YXf(p)$$

bo  $X(p) = 0$ . Ponieważ  $X(p) = 0$ , to na pewnym otoczeniu  $p$  mamy  $\phi_t^X(p) = p$  dla każdego  $p$ . Czyli

$$\begin{aligned} (L_X Y)f(p) &= (L_X Y)_p f = \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\phi_{-t}^X [Y(\phi_t^X(p))] \right] f = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\phi_{-t}^X [Y(p)] \right] f \stackrel{F.1}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [d\phi_{-t}^X(Y)f(p)] \stackrel{F.2}{=} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y(f\phi_{-t}^X)(\phi_t^X(p))] = \frac{d}{dt} [Y(f\phi_{-t}^X)(p)] = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} [f\phi_{-t}^X(\phi_s^Y(p))] = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [f\phi_{-t}^X \phi_s^Y(p)] = \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} -Xf(\phi_s^Y(p)) = Y(-Xf(p)) = -YXf(p) = [X, Y]f(p) \end{aligned}$$



Własności komutatora zostały przedstawione pod Definicją 6.2

Pochodna Liego ma **następujące własności**, które wynikają z własności komutatora:

1.  $L_X Y = -L_Y X$
2.  $L_X [Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$
3.  $L_X (Y + Z) = L_X Y + L_X Z$
4.  $L_{X+Y} Z = L_X Z + L_Y Z$
5.  $L_X (fY) = XfY + fL_X Y$
6.  $L_{fX} Y = fL_X Y - (Yf)X$

## 6.5. Komutowanie potoków

**Definicja 6.5.** Lokalne potoki pól  $X, Y$  na  $M$  **komutują** na otoczeniu punktu  $p \in M$ , jeśli istnieje  $\varepsilon > 0$  taki, że dla każdego  $|t|, |s| < \varepsilon$  zachodzi

$$\phi_s^Y \circ \phi_t^X(q) = \phi_t^X \circ \phi_s^Y(q)$$

dla  $q$  bliskich punktowi  $p$ .

**Twierdzenie 6.6.** Lokalne potoki pól  $X, Y$  komutują na otoczeniu punktu  $p \iff [X, Y] \equiv 0$  na pewnym otoczeniu punktu  $p$ . Oznacza to również, że  $L_X Y = 0$  na otoczeniu punktu  $p$ .

**Dowód.**  $\Leftarrow$

Potrzebujemy faktu pomocniczego:

Jeśli  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  jest dyfeomorfizmem i  $X_1$  jest polem na  $M_1$ , a  $X_2 = d\phi(X_1)$  jest polem na  $M_2$ , to wówczas  $\phi$  przenosi trajektorie pola  $X_1$  na trajektorie pola  $X_2$ . Oznacza to, że

$$\phi(\phi_t^{X_1}(p)) = \phi_t^{X_2}(\phi(p))$$

Lee podaje  $[X, Y] = 0$  jako definicję komutowania potoków pól  $X$  i  $Y$ . My podchodzimy do problemu najpierw we współrzędnych lokalnych, a dopiero potem przechodzimy do perspektywy całego  $M$ .

Zakładamy, że  $L_X Y = [X, Y] = 0$ . Możemy pokazać, że dla każdego  $q \in M$  w pobliżu  $p$  oraz  $t_0$  bliskich 0 mamy

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q))) = \phi_{t_0}^X(q)$$

To z kolei jest równe zero, bo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q))) &= - \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} (d\phi_{-t_0-s}^X)Y(\phi_{t_0+s}^X(q)) = \\ &= - \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} (d\phi_{-t_0}^X)(d\phi_{-s}^X)Y(\phi_s^X(\phi_{t_0}^X(q))) = \\ &= (d\phi_{-t_0}^X) \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} (d\phi_{-s}^X Y(\phi_s^X(\phi_{t_0}^X(q)))) = \\ &= (d\phi_{-t_0}^X)[L_X Y(\phi_{t_0}^X(q))] = \\ &= (d\phi_{-t_0}^X)(0) = 0 \end{aligned}$$

Jeśli scałkujemy  $L_X Y$  od 0 do  $t$ , dla małego  $t$ , to tak naprawdę całkujemy funkcję stałą równą zero i dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} (d\phi_{-s}^X)(Y(\phi_s^X(q))) ds = \\ &= (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q))) - (d\phi_0^X)(Y(\phi_0^X(q))) = \\ &= (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q))) - Y(q) \end{aligned}$$

bo  $\phi_0^X = \text{id}$ . Dla  $q$  bliskich  $p$  oraz małych  $t$  dostajemy więc

$$Y(q) = (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q)))$$

Zatem lokalny dyfeomorfizm  $\phi_t^X$  przenosi pole  $Y$  na siebie, a więc trajektorie pola  $Y$  są przez niego przenoszone na trajektorie  $Y$ . Mamy więc

$$\phi_t^X(\phi_s^Y(q)) = \phi_s^Y(\phi_t^X(q))$$

dla  $q$  bliskich  $p$  oraz małych  $s$ . W takim razie potoki  $X$  i  $Y$  komutują na otoczeniu punktu  $p$ .

$\implies$

Zauważmy najpierw, że jeśli dyfeomorfizm  $\phi$  zachowuje trajektorie pola  $Y$ , tzn.  $\phi(\phi_t^Y(q)) = \phi_t^Y(\phi(q))$  dla wszystkich  $q$ , to pole  $Y$  jest  $\phi$ -niezmiennicze. To znaczy  $d\phi(Y) = Y$ . Dokładniej mamy dla każdego  $q$   $d\phi(Y(q)) = Y(\phi(q))$  lub  $Y(q) = (d\phi)^{-1}(Y(\phi(q)))$ .

Zakładamy, że  $\phi_t^X \phi_s^Y = \phi_s^Y \phi_t^X$ , czyli  $\phi_t^X$  i  $\phi_s^Y$  komutują wokół  $p$ . Wówczas dla małych  $t$   $\phi_t^X$  przenosi małe kawałki trajektorii pola  $Y$  w pobliżu  $p$  na małe kawałki trajektorii pola  $Y$ . Dzięki faktowi wyżej wiemy, że wówczas

$$(d\phi_t^X)Y(q) = Y(\phi_t^X(q)),$$

czyli

$$Y(q) = Y(\phi_{-t}^X(\phi_t^X(q))) = (d\phi_{-t}^X)(Y(\phi_t^X(q)))$$

Dalsze rachunki dają

$$L_X Y(q) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (d\phi_{-t}^X) Y(\phi_t^X(q)) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} Y(q) = 0$$

czyli to co chcieliśmy. ☕

## 6.6. Wyprostowanie komutujących pól wektorowych

**Twierdzenie 6.7.** Niech  $X_1, \dots, X_k$  będą polami wektorowymi na  $M$ , a  $\dim(M) = m \geq k$ . Załóżmy, że dla  $q$  w otoczeniu punktu  $p \in M$  pola  $X_i$

- parami komutują oraz
- są liniowo niezależne, tzn. dla  $q \in M$  blisko  $p$  układ  $X_1(q), \dots, X_k(q)$  wektorów jest liniowo niezależny w  $T_q M$ .

Wówczas istnieje mapa  $\phi$  wokół  $p$ , w której pola  $X_i$  mają postać

$$X_i(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

**Dowód.** Ponieważ działamy lokalnie wokół  $p$ , możemy przyjąć, że  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $p = (0, \dots, 0)$  oraz

$$X_i(x) = \sum_j (X_i)_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ponieważ  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  są liniowo niezależne, to macierz

$$\begin{bmatrix} (X_1)_1 & (X_2)_1 & \dots & \dots & (X_k)_1 \\ (X_1)_2 & (X_2)_2 & \dots & \dots & (X_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (X_1)_m & (X_2)_m & \dots & \dots & (X_k)_m \end{bmatrix}$$

ma rząd  $k$ . Przyjmijmy więc, że wiersze od 1 do  $k$  tworzą macierz nieosobliwą. Możemy to zrobić, bo przenumowanie współrzędnych nic nie psuje. Rozważmy odwzorowanie

$$\lambda(t_1, \dots, t_m) = \phi_{t_1}^{X_1} \circ \phi_{t_2}^{X_2} \circ \dots \circ \phi_{t_k}^{X_k}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m).$$

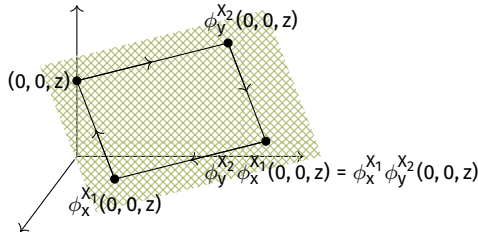
$\lambda$  jest gładko określone na pewnym otoczeniu  $(0, \dots, 0)$  oraz

$$\lambda(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0) = p.$$

Gdy  $k = 2$ , a  $m = 3$ , to  $\lambda(x, y, z) = \phi_x^{X_1} \phi_y^{X_2}(0, 0, z)$ , z drugiej strony mamy równość

$$\phi_x^{X_1} \phi_y^{X_2}(0, 0, z) = \phi_y^{X_2} \phi_x^{X_1}(0, 0, z)$$

która wynika z rysunku



Obliczmy pochodną  $\frac{\partial \lambda(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_i}$  dla  $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_i} &= \frac{d}{ds} \phi_{t_1+s}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{t_i+s}^{X_i} \circ \dots \circ \phi_{t_k}^{X_k}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m) = \\ &= \frac{d}{ds} \phi_{t_i+s}^{X_i} \circ \phi_{t_i+s}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{t_k}^{X_k}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m) = \\ &= \frac{d}{ds} \phi_s^{X_i}(\phi_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{t_i}^{X_i} \circ \dots \circ \phi_{t_k}^{X_k}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m)) = \\ &= \frac{d}{ds} \phi_s^{X_i}(\lambda(t_1, \dots, t_m)) = \\ &= X_i(\lambda(t_1, \dots, t_m)) \end{aligned}$$

Ponieważ  $\lambda(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m) = (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m)$ , to  $D\lambda(0)$  zapisuje się jako macierz

$$D\lambda(0) = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} (X_1)_1 & \dots & (X_k)_1 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ (X_1)_k & \dots & (X_k)_k & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ (X_1)_m & \dots & (X_k)_m & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \end{array}$$

Łatwo zobaczyć, że  $D\lambda(0)$  jest macierzą nieosobliwą, więc  $\lambda$  jest dyfeomorfizmem na otoczeniu 0. Ponieważ

$$d\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)\right) = X_i(\lambda(t_1, \dots, t_m)),$$

to dla mapy  $\phi = \lambda^{-1}$  mamy

$$d\phi(X_i(\lambda(t_1, \dots, t_m))) = \frac{\partial}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)$$

czyli  $X_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$  w tej mapie.



## 7. Rozmaitości orientowalne

### 7.1. Orientacja w przestrzeni wektorowej $V$ wymiaru $n$

Niech  $B(V)$  będzie zbiorem wszystkich baz  $b = (v_1, \dots, v_n)$  przestrzeni  $V$ . Dla baz  $b_1 = (v_1, \dots, v_n)$  oraz  $b_2 = (w_1, \dots, w_n)$  macierz przejścia  $M_{b_1, b_2} = (a_{ij})_{n \times n}$  to taka macierz, że  $w_k = \sum a_{ik} v_i$ . Równoważnie jest to macierz przekształcenia  $V \rightarrow V$  takiego, że  $v_i \mapsto w_i$ , czyli wyrażenia wektorów zapisanych za pomocą  $w_i$  w bazie  $b_1$ . Macierz  $M_{b_1, b_2}$  jest macierzą nieosobliwą. Opiszmy więc relację na  $B(V)$

$$b_1 \sim b_2 \iff \det(M_{b_1, b_2}) > 0$$

**Lemat 7.1.** Relacja  $b_1 \sim b_2 \iff \det(M_{b_1, b_2}) > 0$  jest relacją równoważności która ma dwie klasy abstrakcji.

**Dowód.**

Zacznijmy od udowodnienia, że jest to relacja równoważności:

**zwrotność:**  $M_{b, b} = I_{n \times n}$ , a z kolei  $\det(I) = 1 > 0$

**symetryczność:** zauważmy, że  $M_{b_2, b_1} = M_{b_1, b_2}^{-1}$ , czyli  $\det(M_{b_2, b_1}) = \frac{1}{\det(M_{b_1, b_2})}$ .

**przechodność:** wynika z prostej kalkulacji  $M_{b_1, b_3} = M_{b_1, b_2} \cdot M_{b_2, b_3}$  oraz

$$\det(M_{b_1, b_3}) = \det(M_{b_1, b_2}) \det(M_{b_2, b_3})$$

Relacja ta ma dwie klasy abstrakcji, bo jeśli  $b_1 \not\sim b$  oraz  $b_2 \not\sim b$ , to wówczas tak jak przy przechodności  $M_{b_1, b_2} = M_{b_1, b} \cdot M_{b, b_2}$  i  $\det(M_{b_1, b_2})$  jako iloczyn dwóch wartości ujemnych jest dodatni. Stąd  $b_1 \sim b_2$ . ☕

**Definicja 7.2. Orientacja** na przestrzeni wektorowej  $V$  nazywamy dowolną klasę abstrakcji relacji  $\sim$  jak wyżej na zbiorze  $B(V)$ .

Następujące operacje na bazie  $b = (v_1, \dots, v_n)$  dają bazy z tej samej klasy abstrakcji (tj. macierz przejścia ma dodatni wyznacznik)

- parzysta permutacja wektorów bazy (złożenie parzystej liczby transpozycji)
- mnożenie wektorów z bazy przez dodatnie współczynniki
- zamiana jednego z wektorów  $v_k$  na wektor

$$v'_k = v_k + \sum_{i \neq k} a_i v_i$$

dla parzystych współczynników  $a_i \in \mathbb{R}$

- dowolne kombinacje operacji wymienionych wyżej

- dowolna ciągła modyfikacja bazy (w przestrzeni baz)

W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  klasy abstrakcji rozpoznaje się za pomocą reguły śruby prawoskrętnej. W  $\mathbb{R}^2$  natomiast klasy orientacji są zadane przez kierunek obrotu (o kąt  $< \pi$ ) drugiego wektora bazy względem pierwszego wektora bazy, zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Następujące modyfikacje bazy  $b = (v_1, \dots, v_n)$  wyprowadzają ją poza klasę abstrakcji, czyli zmieniają orientację:

- nieparzysta permutacja wektorów bazy, np. transpozycja dowolnych dwóch wektorów
- pomnożenie jednego z wektorów bazy przez ujemny współczynnik

Na rozmaitości  $M$  każda mapa  $(U, \phi)$  zadaje dla każdego  $p \in U$  orientację w przestrzeni stycznej  $T_p M$  przez klasę abstrakcji bazy  $(\frac{\partial}{\partial \phi_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n}(p))$ . Dwie mapy  $(U, \phi)$  oraz  $(V, \psi)$  **zadają tę samą orientację na przestrzeni  $T_p M$**  dla  $p \in U \cap V$  wtedy, gdy Jakobian odwzorowania przejścia

$$\left[ \frac{\partial(\phi\psi^{-1})_k}{\partial x_j}(\psi(p)) \right]_{j,k}$$

ma dodatni wyznacznik. Jest to macierz przejścia z bazy  $(\frac{\partial}{\partial \psi_i})$  do bazy  $(\frac{\partial}{\partial \phi_i})$ .

### Definicja 7.3.

1. **Orientacją** rozmaitości  $M$  nazywamy wybór atlasu  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  dla  $M$ , takiego że każde dwie mapy  $(U_\alpha, \phi_\alpha), (V_\beta, \psi_\beta)$  mają dodatni wyznacznik jakobianu odwzorowania przejścia  $\phi\psi^{-1}$  w każdym punkcie  $p \in U_\alpha \cap V_\beta$ .
2. Rozmaitość jest **orientowalna**, jeśli posiada atlas jak wyżej. W przeciwnym razie jest **nieorientowalna**.
3. Dwa atlasy  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  jak wyżej zadają tę **samą orientację**, jeśli dla każdej mapy  $(U, \phi) \in \mathcal{A}_1$  i dla każdej mapy  $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$  jakobian odwzorowania przejścia  $\phi\psi^{-1}$  ma dodatni wyznacznik w każdym punkcie  $p \in U \cap V$ .

**Uwaga 7.4.** Jeśli rozmaitość  $M$  jest orientowalna i spójna, to można na niej zdać dokładnie 2 różne orientacje.

Co więcej, można powiedzieć, że jeśli  $M$  jest orientowalna, to  $M$  jest spójna  $\iff M$  posiada 2 orientacje.

**Dowód.** Udowodnimy tylko pierwszą wersję uwagi.

Jeśli  $M$  jest orientowalną rozmaitością, to istnieje na niej atlas  $\mathcal{A}$  zadający na  $M$  orientację. Niech  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$  i rozważmy  $-\phi = -1 \circ \phi$ , gdzie  $-1$  to funkcja zwracająca przeciwieństwo liczby w  $\mathbb{R}^n$ :  $x \mapsto -x$ . Wówczas łatwo zauważyć, że  $(U, -\phi)$  to nadal

Dowód uwagi nie został zaprezentowany na wykładzie - czytasz fantazję autora notatek.

mapa na  $M$  oraz, że atlas  $\mathcal{A}' = \{(U, -\phi) : (U, \phi) \in \mathcal{A}\}$  nie ma orientacji zgodnej z  $\mathcal{A}$  ale nadal zadaje orientację na  $M$ .

Niech  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  będą atlasami które nie mają zgodnych orientacji. Rozważmy zbiór

$$X = \{p \in M : (\exists (U, \phi) \in \mathcal{A}_1)(\exists (V, \psi) \in \mathcal{A}_2)(\exists p \in U \cap V) \det(D_p \phi \psi^{-1}) > 0\}.$$

Chcemy pokazać, że  $X$  jest otwarty i jednocześnie  $M \setminus X$  jest otwarte. Wówczas  $X = M$  (co implikuje, że na  $M$  jest tylko jedna orientacja) lub  $X = \emptyset$ , czyli  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  są dwoma różnymi orientacjami i jakkolwiek inna orientacja musiałaby zgadzać się z  $\mathcal{A}_1$  lub  $\mathcal{A}_2$  na całym  $M$  (bo  $X' = M$ , gdzie  $X'$  to punkty w których nowa orientacja zgadza się z  $\mathcal{A}_1$  lub  $\mathcal{A}_2$ ).

Niech  $p \in X$  oraz wybierzmy  $(U, \phi) \in \mathcal{A}_1$  oraz  $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$  takie, że  $p \in U \cap V$ . Wiemy, że  $\phi \psi^{-1}(p)$  ma dodatni wyznacznik jacobianu przejścia. Załóżmy, że  $U \subseteq V$ , bo mapy możemy wybierać dowolnie małe. Rozważmy odwzorowanie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że

$$f(q) = \det(D_q \phi \psi^{-1}).$$

Jest to odwzorowanie ciągłe jako iloczyn i suma skończenie wielu ciągłych pochodnych  $\phi \psi^{-1}$ . Co więcej,  $f(p) > 0$ , czyli z ciągłości  $f$  wiemy, że cały wykres  $f$  ma wartości ściśle dodatnie. Czyli  $U \subseteq X$ , a ponieważ w  $\mathcal{A}_1$  jest przeliczalnie wiele map, to tylko przeliczalnie wiele zbiorów z  $\mathcal{A}_1$  może zawierać się w  $X$ , które nie jest całym  $M$ . Stąd wiemy, że  $X$  jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów otwartych, a więc sam też jest otwarty. Analogicznie możemy postąpić dla  $M \setminus X$ , dostając, że zarówno  $X$  jak i  $X^c$  jest zbiorem otwartym, czyli  $X = \emptyset$  lub  $X = M$  ze spójności  $M$ . ☕

**Fakt 7.5.** Rozmaitość  $M$  jest *nieorientowalna*  $\iff$  istnieje ciągła droga  $b(t) : [0, 1] \rightarrow B(M)$  taka, że  $b(0), b(1) \in T_p M$  oraz  $b(0) \not\sim b(1)$  w  $T_p M$ .

Endomorfizm liniowy  $F : V \rightarrow V$  zachowuje orientację, gdy  $F(b) \sim b$ .

**Definicja 7.6.** Dyfeomorfizm  $f : M \rightarrow M$  spójnej orientowalnej rozmaitości  $M$  **zachowuje orientację**, gdy dla pewnej (równoważnie dowolnej) orientacji na  $M$ , rozumianej jako zgodny wybór klas równoważności baz w przestrzeniach stycznych  $T_p M$ , różniczka  $df_q$  w pewnym (równoważnie każdym) punkcie  $q \in M$  zachowuje orientację.

**Uwaga 7.7.** Dyfeomorfizm  $f$  zachowuje orientację  $M \iff$  po wyrażeniu w mapach dowolnego atlasu  $\mathcal{A}$  zadającego orientację na  $M$ , zachowuje orientację, tzn. spełnia warunek

$$\det(D(\psi f \phi^{-1})) > 0$$

dla pewnego (równoważnie każdego)  $p \in M$

**Uwaga 7.8.** Ciągła krzywa w zbiorze ??? bazowych na wiązce stycznej  $TM$  orientowalnej rozmaitości  $M$  nie wyprowadza poza klasę orientacji.

**Przykłady:**



1.  $\mathbb{R}^n$  jest rozmaiutością orientowalną z dokładnie dwoma orientacjami (bo jest spójna i jest orientowalna)
2.  $S^n$  również posiada dwie orientacje (jest spójna)
3. Produkt rozmaiutości również zachowuje orientalność, stąd torusy  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  są orientowalne.
4. Iloraz orientowalnej rozmaiutości przez wolną i właściwie nieciągłą grupę dyfeomorfizmów zachowujących orientację jest rozmaiutością orientowalną, na przykład  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  czy  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Z kolei jeśli  $M$  jest spójna, orientowalna, zaś wolna i właściwie nieciągła grupa dyfeomorfizmów  $G$  zawiera dyfeomorfizm zmieniający orientację, to iloraz  $M/G$  jest rozmaiutością nieorientowalną, na przykład  $\mathbb{R}P^{2k} = S^{2k}/\mathbb{Z}_2$  (przy czym  $\mathbb{R}P^{2k+1} = S^{2k+1}/\mathbb{Z}_2$  są orientowalne) czy wstęga Möbiusa  $S^1 \times [-1, 1]/\mathbb{Z}_2$ .

5. Jeśli  $M, N, P$  są orientowalnymi rozmaiutościami oraz  $P \subseteq N$ ,  $f : M \rightarrow N$  jest gładkie, a  $P$  składa się z samych rozmaiutości regularnych (tzn. jest obrazem włożenia w  $N$ ), to  $f^{-1}(P)$  jest orientowalne, np.  $SL(2\mathbb{R}) = (\det)^{-1}(1)$  jest orientowalna. **NIE MAM POJĘCIA CO TU JEST W NOTATCE NAPISANE**

## 8. Podrozumności

**Definicja 8.1.** Podzbiór  $N \subseteq M^n$  dla gładkiej rozmaitości  $M$  jest **podrozumnością wymiaru  $n$** , jeśli każdy punkt  $p \in N$  posiada mapowe otoczenie otwarte  $U_p \subseteq M$  oraz mapę  $\phi : U_p \rightarrow V = \phi(U_p) \subseteq \mathbb{R}^m$  takie, że

$$\phi(U_p \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in V : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$$