Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Definicja rozmaitości

Zanim podany dokładną definicję, możemy rozważyć kilka przykładów rozmaitości różniczkowalnych:

$\hookrightarrow$ powierzchnia, domknięta lub nie,

$\hookrightarrow$ przestrzeniach opisanych (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,

$\hookrightarrow$ podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywalne równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^1$ w $\mathbb{C}^3$).

Cały wykład będzie wstępnym słownikiem wokół pojęcia rozmaitości różniczkowalnej.

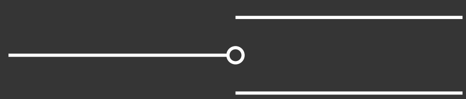
1.1. Rozmaitości topologiczne

Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Konsekwencje Hausdorffowości:

$\hookrightarrow$ Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

$\hookrightarrow$ Pewne własności otoczeń punktów są zachowywane. To znaczy, dla dowolnego zwartego podzbioru otoczenia punktu $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $K \subseteq U$ jego odpowiednik $\overline{K} = \phi^{-1}(K) \subseteq \overline{U} \subseteq M$ jest domknięty i zwarty w M. [ćwiczenia]

Konsekwencje przeliczalności bazy:

$\hookrightarrow$ Spełniany jest warunek Lindelöfa: każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćwiczenia]

$\hookrightarrow$ Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

które są po domknięciu w M zwarte. Czyli możemy ją wyczerpać za pomocą zbiorów, które są małe.

$\hookrightarrow$ Parazwartość, czyli każde zwarte pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.

$\hookrightarrow$ Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

$\hookrightarrow$ Twierdzenie Brouwer'a: dla $n \neq m$ niepusty otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie jest homeomorficzny z jakimkolwiek otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^m$.

$\hookrightarrow$ Czyli liczba n w definicji jest jednoznaczna dla danej rozmaitości. Określamy **wymiar rozmaitości** $\dim M = n$.

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ), gdzie U to otwarty podzbiór w M, a ϕ to homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Mapa to jest jakiś homeomorfizm między rozmaitością a pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy zbiorem mapowym. **Przez lokalną euklidesowość wiemy, że pokrywają one całą rozmaitość.**

Parę (U, ϕ) nazywamy też **lokalnymi współrzędnymi** na M albo *lokalną parametryzacją* M.

Fakt 1.2. Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n-rozmaitością $\iff$ posiada rodzinę map n-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały X.

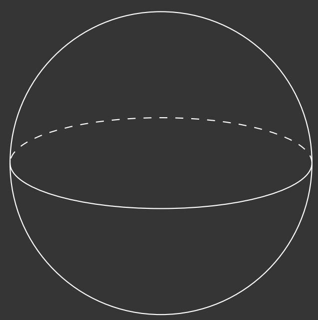
Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, \dots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$

RYSUNEK DLA S^3



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \ : \ U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

1.3. Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle znaczą one to samo.

Dla funkcji $f \ : \ M \to \mathbb{R}$ chcemy określić, co znaczy, że f *jest różniczkowalna*? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. Teraz $f \circ \phi^{-1}$ jest funkcją zależącą od n zmiennych rzeczywistych.
- Chciałoby się powiedzieć, że funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M, ten fragment wyrażony w tej mapie $f \circ \phi^{-1}$ jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.
- **Odwzorowanie przejścia między dwoma mapami** (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) to funkcje $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_2\phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 1.3. **Mapy** (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli (U, ϕ) i (V, ψ) są zgodne, to $f \circ \phi^{-1} \restriction (\phi(U \cap V))$ jest gładkie $\iff$

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie *dyfeomorfizmami*.

Definicja 1.4. **Gładkim atlasem** $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. 1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. 2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+)$, $i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n)$$

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots x_n)$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

Definicja 1.5. **Rozmaitość gładka** to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ opisanego na M.

Uściślenie: Często $(M, \mathscr{A}_1)$ i $(M, \mathscr{A}_2)$ będące rozmaitościami gładkimi określają tę samą rozmaitość.

Definicja 1.6. Niech $\mathscr{A}$ będzie gładkim atlasem na M.

1. Mapa (U, ϕ) jest **zgodna z atlasem $\mathscr{A}$**, jeśli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}$.
2. Dwa **atlasy $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ na M są zgodne**, jeśli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}_2$.

Twierdzenie 1.7. Relacja zgodności atlasów jest relacją równoważności.

Dowód: Ćwiczenia.

Konwencja jest wtedy taka, że zgodne atlasy zadają tą samą strukturę gładką na M. W takim razie, zgodne atlasy można wysumować do jednego większego atlasu.

Definicja 1.8. $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym** na M, jeśli każda mapa na M z nim zgodna jest w nim zawarta.

Fakt 1.9. Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M. Zaś ten atlas maksymalny to zbiór wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$.

Dowód: Ćwiczenia.

Równoważna definicja rozmaitości gładkiej: para $(M, \mathscr{A})$, gdzie M to rozmaitość topologiczna, zaś $\mathscr{A}$ to pewien atlas maksymalny.

2. Funkcje różniczkowalne

2.1. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Definicja 2.1. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest **gładka względem atlasu** $\mathscr{A}$ na M, jeśli

$$(\forall\ (U, \phi) \in \mathscr{A})\ f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R} \text{ jest gładka.}$$

To znaczy po wyrażeniu w dowolnej mapie atlasu jest nadal funkcją gładką.

Fakt 2.2.

1. Jeśli $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathscr{A}$, zaś (U, ϕ) jest zgodna z $\mathscr{A}$, to wówczas funkcja f wyrażona w tej nowej mapie (czyli $f \circ \phi^{-1}$) też jest gładka.
2. Jeśli $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ są zgodnymi atlasami, wówczas taka funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathscr{A}_1$ $\iff$ jest gładka względem $\mathscr{A}_2$ $\iff$ jest gładka względem atlasu maksymalnego $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ zawierającego $\mathscr{A}_1$ (oraz $\mathscr{A}$).

Niech M będzie gładką rozmaitością. Wówczas $f : M \to \mathbb{R}$ **jest gładka** jeśli f jest gładka względem każdego (dowolnego) atlasu $\mathscr{A}$ wyznaczającego na M daną gładką strukturę.

2.2. Atlasy C^k

Definicja 2.3.

- Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k-zgodne**, jeśli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k.
- **C^k-atlas** to atlas składający się z map, które są C^k-zgodne.
  - Taki atlas określa strukturę C^k-rozmaitości na M.
  - Jest ona słabsza niż struktura rozmaitości gładkiej.

C^0 w tej konwencji to rozmaitość topologiczna, a C^∞ to często jest rozmaitość gładka.

Na C^k-rozmaitości nie da się sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych. Przykłady to:

↪ Rozmaitość analityczna [C^ω] to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).

↪ Rozmaitość zespolona ma mapy jako funkcje w $\mathbb{C}^n$ zamiast w $\mathbb{R}^n$.

↪ Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty.

↪ Rozmaitość kawałkami liniowa

2.3. Rozmaitość gładka bez topologii

Dychotomia pomiędzy sytuacją C^0 a sytuacją C^k dla $k > 0$:

- Z każdego maksymalnego atlasu C^k-rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. A zatem, każda C^k-rozmaitość posiada C^k-zgodną strukturę C^∞-rozmaitości.
- Istnieją C^0-rozmaitości niedopuszczające żadnej struktury gładkiej.

Lemat 2.4. Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X i dla każdego α mamy $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ różnowartościowe (n jest ustalone dla całego X). Ta trójka obiektów ma spełniać następujące warunki:

1. Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.
2. Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$.
3. Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest odwzorowaniem gładkim. Są to dyfeomorfizmy (gładkie i odwracalne).
4. Przeliczalnie wiele spośród zbiorów U_α pokrywa całe X.
5. Dla dowolnych punktów $p, q \in X$, $p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha)$, $V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}[V_p]$, $q \in \phi_\beta^{-1}[V_q]$ oraz $\phi_\alpha^{-1}[V_p] \cap \phi_\beta^{-1}[V_q] = \emptyset$. Czyli możemy rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$.

*Wówczas na X istnieje **struktura rozmaitości topologicznej** dla której U_α są otwarte.* Ponadto rodzina (U_α, ϕ_α) tworzy gładki atlas na X.

Szkic dowodu:

- Topologię produkujemy jako bazę topologii na X: bierzemy przeciwobrazy przez poszczególne ϕ_α otwartych podzbiorów w zbiorach $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Lokalna n-euklidesowość X względem takiej topologii jest oczywista.
- Nietrudno jest też wybrać mniejszą bazę przeliczalną [ćwiczenia].
- Hausdorffowość tak określonej topologii wynika z warunku 5.

i śmiga

Przykład: Niech $\mathscr{L}$ będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Nie ma na tym zbiorze wygodnej do opisania topologii, ale możemy skorzystać z lematu wyżej.

Zacznijmy od opisania podzbiorów

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

Jeśli $U_h \ni L$, to wtedy $L = \{y = ax + b\}$ i wtedy ϕ_h będzie przypisywać takiej prostej parę (a, b). Jeśli zaś $U_v \ni L$, to wtedy $L = \{x = yc + d\}$ i wtedy ϕ_v przypisze jej (c, d). To, że $\phi_h(U_h)$ i $\phi_v(U_v)$ są różnowartościowe widać. Przyjrzyjmy się teraz przekrojowi naszych zbiorków:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepoziomie i niepionowe}\} = \{y = ax + b \ : \ a \neq 0\} = \{x = cd + d \ : \ c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \neq 0\}$$

i są to zbiory otwarte, więc warunek 3. jest spełniony. Warunek 4. jest tutaj trywialny.

Niech COŚ TUTAJ SIĘ URWAŁO

To jest homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Mobiusa.

3. Rozmaitość z brzegiem

Lokalnie wygląda jak $\mathbb{R}^n$ albo jak półprzestrzeń n-wymiarowa:

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n \geq 0\}$$

brzegiem takiej półprzestrzeni nazywamy zbiór:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$$

definiuje się też wnętrze takiej półprzestrzeni:

$$\mathrm{int}(H^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\}$$

Definicja 3.1. Dla otwartego zbioru $U \subseteq H^n$ określamy

- $\hookrightarrow$ brzeg zbioru: $\partial U = U \cap \partial H^n$
- $\hookrightarrow$ wnętrze zbioru: $\mathrm{int}(U) = U \cap \mathrm{int}(H^n)$
- $\hookrightarrow$ Jeżeli mamy zadane $f : U \to \mathbb{R}^m$, to jest ono **gładkie**, gdy jest obcięciem do U pewnej gładkiej funkcji $\overline{f} : \overline{U} \to \mathbb{R}^m$, gdzie $\overline{U}$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ taki, że $U \subseteq \overline{U}$.

Jeśli $f \ : \ U \ \to \ \mathbb{R}^m$ jest gładka, to wówczas pochodne cząstkowe f są dobrze określone w punktach $\mathrm{int}(U)$. Ze względu na ciągłość pochodnych cząstkowych dowolnego rozszerzenia $\overline{f}$, pochodne cząstkowe f są również dobrze określone w punktach ∂U.

Fakt 3.2. Z analizy: rozszerzenie $\overline{f}$ istnieje $\iff$ f jest gładka na $\mathrm{int}(U)$ oraz pochodne cząstkowe tego f obciętego do $\mathrm{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się na ∂U.

Definicja 3.3. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że

- $\hookrightarrow$ U_α jest otwartym podzbiorem M
- $\hookrightarrow$ oraz $\phi_\alpha : U_\alpha \to H^n$ jest homeomorfizmem na swój obraz,
- $\hookrightarrow$ $\overline{U}_\alpha = \phi(U_\alpha) \subseteq H^n$ jest otwarty,
- $\hookrightarrow$ odwzorowania przejścia $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ są gładkie $[U_\alpha \cap U_\beta \subseteq H^n$ otwarte$]$.

Fakt 3.4. Jeśli w pewnej mapie (U_α, ϕ_α) $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, to w każdej innej mapie (U_β, ϕ_β) zawierającej punkt p również obraz punktu p należy do brzegu H^n.

Dowód:

Odwzorowania przejścia są gładkie, ale gładkie są też odwzorowania odwrotne, czyli $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są gładkie i gładko odwracalne.

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym z analizy wielu zmiennych

Odwzorowania przejścia mają nieosobliwe macierze pierwszych pochodnych cząstkowych we wszystkich punktach.

Uwaga 3.5. Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem (ta sama definicja, tylko odwzorowania przejścia nie muszą być gładkie, a wystarczy homeomorfizmy) dowód wyżej nie śmignie, ale *analogiczny fakt również zachodzi*, tylko dowód jest trudniejszy i opiera się na twierdzeniu Brouwera o niezmienniczości obszaru (analog twierdzenia o odwzorowaniach otwartych dla ciągłych fLR $\to \mathbb{R}^n$)

Dzięki twierdzeniom powyżej następujące definicje mają sens:

$$\partial M = \{p \in M \ : \ \text{w pewnej mapie (każdej) } \phi_\alpha(p) \in \partial H^n\}$$

$$\text{int}(M) = \{p \in M \ : \ \text{dla pewnej mapy } (U_\alpha, \phi_\alpha),\ \phi_\alpha(p) \in \text{int}(H^n)\}$$

3.1. O brzegu i wnętrzu

Fakt 3.6. Wnętrze int(M) n-rozmaitości gładkiej M jest n-rozmaitością gładką bez brzegu.

Dowód:

Pokażemy atlas, który działa dla int(M). Weźmy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \restriction U_\alpha$$

a (U_α, ϕ_α) było atlasem na M.

i śmiga

Fakt 3.7. Brzeg ∂M n-rozmaitości M z brzegiem jest $(n-1)$ wymiarową rozmaitością gładką bez brzegu.

Dowód:

Jako atlas na ∂M bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

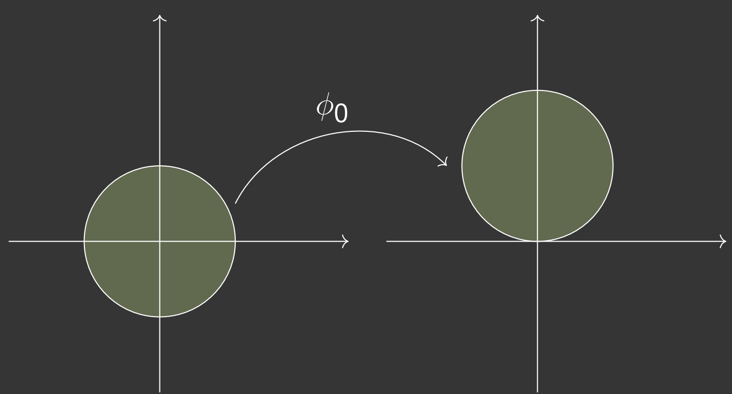
$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial U_\partial M$$

$$\phi'_\alpha : U'_\alpha \to \mathbb{R}^{n-1} = \partial H^n \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \restriction U'_\alpha$$

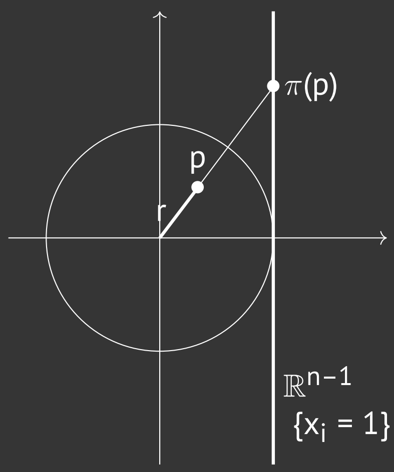
i śmiga

Przykład: Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \le 1\}$ jest rozmaitością gładką z brzegiem $\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$. Pokażemy mapy, ale uzasadnienie ich gładkiej zgodności pominiemy.

$$(U_0, \phi_0) \quad : \quad U_0 = \{x \ : \ |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \to H^n,\ \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$



$$(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm}) \quad : \quad U_i^{\pm} = \{x \in D^n \ : \ \pm x_i > 0\}, \quad \phi_1 : U_1 \to H^n$$



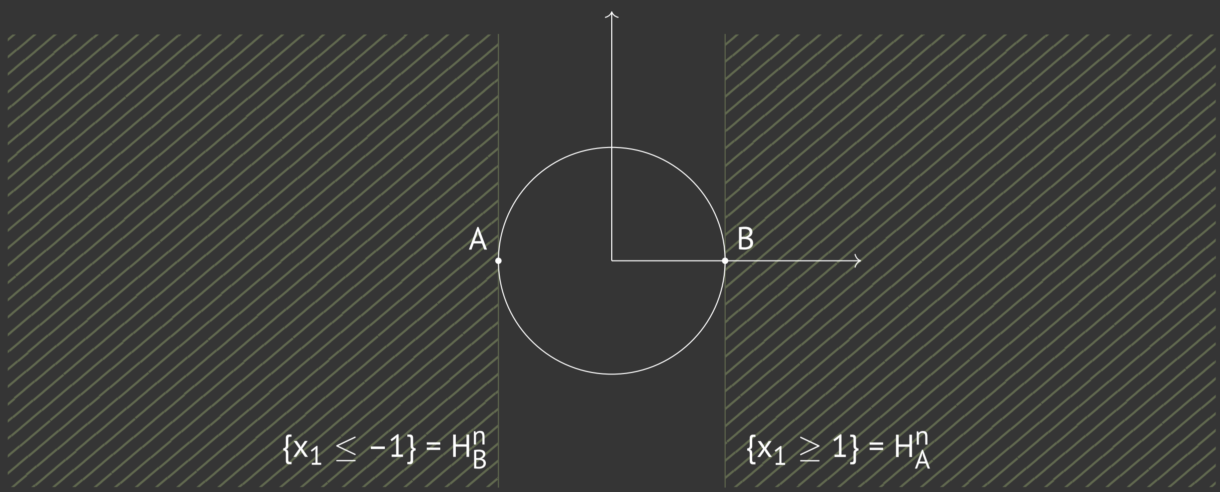
Czyli w punkcie opisujemy $n-1$ wymiarową płaszczyznę styczną i rzucamy punkty $p \in D^n$ przez rzut odśrodkowy π na tę płaszczyznę. Funkcje $\phi_i^{\pm}$ opisują się wtedy wzorem:

$$\phi_i^{\pm}(p) = (\pi(p), 1 - r^2)$$

lub konkurencyjnie

$$\phi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}, 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Inny atlas gładki na dysku D^n (zgodny z poprzednim)



$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$
$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$
$$\phi_A : U_A \to H_A^n \leftarrow \text{inwersja względem sfery o środku A i } r = 2$$

3.2. Rozkłady jedności

Motywacja: jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem M *istnieje gładka funkcja* f *taka, że* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *taka, że*

$$\begin{array}{ll} f(p) = 0 & p \in \partial M \\ f(p) > 0 & p \in \mathrm{Int}(M)? \end{array}$$

Na zbiorze mapowym możemy taką funkcję zadać przez:

$$\bar{f}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \mathbb{R}$$

$$\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n$$

$$f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$$

$$f_\alpha = \bar{f}_\alpha \circ \phi_\alpha$$

Czyli zmuszamy funkcję do bycia gładką.

TU PEWNIE JAKIŚ BULLSHIT PISZĘ, DOCZYTAĆ I POPRAWIĆ.

Definicja 3.8. Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w X takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α.

Definicja 3.9. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ jej **nośnik** $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}(\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\})$

Twierdzenie 3.10. [*Twierdzenie o rozkładzie jedności*] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M (może być z brzegiem) istnieje rodzina $\{f_j\}_{j \in J}$ gładkich funkcji $f_j : M \to \mathbb{R}$ takich, że

- $f_j \geq 0$
- każdy nośnik $\mathrm{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α z pokrycia
- nośniki $\{\mathrm{supp}(f_j)\}_{j \in J}$ tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w M
- dla każdego $x \in M$ $\sum_{j \in J} f_j(x) = 1$

Jest to **rozkład jedności wpisany w pokrycie** $\{U_\alpha\}$

Wracamy do pytania o istnienie $f : M \to \mathbb{R}$ takiego, że $f \upharpoonright \partial M \equiv 0$ i $f \upharpoonright \mathrm{int}(M) > 0$.

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami mapowymi. Wtedy $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli

- $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \implies f_\alpha = \bar{f}_\alpha \phi_\alpha$, gdzie $\bar{f}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \mathbb{R}$, $\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n$
- $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \implies f_\alpha = 1$

Niech $\{h_j\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j)$ takie, że $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Definiujemy wtedy $h_j' = h_j \cdot f_{\alpha(j)} : M \to \mathbb{R}$ takie, że

$$h_j'(p) = \begin{cases} h(p) f_{\alpha(j)}(p) & p \in U_{\alpha(j)} \\ 0 & \end{cases}$$

taka funkcja jest gładka, bo $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$.

Skorowidz definicji

Twierdzonkowa zabawa