# ZADANIE 18

*Z psychologicznych powodów, czasem wygodniej jest oznaczać ideał pierwszy pierścienia $A$ literami $x, y$ jeśli myślimy o nich jako o punkcie $X = \mathrm{Spec}(A)$. Kiedy myślimy o $x$ jako o ideale pierwszym $A$, oznaczamy go przez $\mathfrak{p}_x$ (oczywiście jest to ta sama rzecz). Pokaż, że*

*(i) zbiór $\{x\}$ jest domknięty w $\mathrm{Spec}(A) \iff \mathfrak{p}_x$ jest maksymalny*

$\Longleftarrow$

Jeśli $\mathfrak{p}_x$ jest ideałem maksymalnym, to $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$, gdyż żaden inny ideał pierwszy nie zawiera $\mathfrak{p}_x$. My definiowaliśmy $V(E)$ jako zbiory domknięte, więc $\{x\}$ też taki jest.

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Czyli jest przekrojem pewnej rodziny domkniętych zbiorów bazowych

$$\{x\} = \bigcap_{i\in I} V(E_i) = V\Big(\bigcup_{i\in I}(E_i)\Big)$$

ale jeśli taka suma zawiera się w jednym, jedynym ideale pierwszym, to jest on maksymalny.

*(ii)* $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$

$\subseteq$

Jest raczej prostym zawieraniem: $\overline{\{x\}}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $\{x\}$, a $V(\mathfrak{p}_x)$ z pewnością to spełnia.

$\supseteq$

Po pierwsze zauważmy, że

$$V(\mathfrak{p}_x) = \bigcap_{E\subseteq \mathfrak{p}_x} V(E) = V\Big(\bigcup_{E\subseteq \mathfrak{p}_x} V(E)\Big),$$

bo to są wszystkie te ideały pierwsze, które zawierają jakiś podzbiór $\mathfrak{p}_x$, czyli obcinamy te mniejsze podzbiory $\mathfrak{p}_x$ w trakcie brania przekroju.

Wiemy, że $\bigcap_{E\subseteq \mathfrak{p}_x} V(E)$ jest zbiorem domkniętym. Wiemy, że $x \in \bigcap V(E)$, czyli dostajemy, że $V(\mathfrak{p}_x)$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających $x$, czyli jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $x$, czyli domknięciem $x$.

*(iii)* $y \in \overline{\{x\}} \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$

$\Longleftarrow$

Niech $x, y \in X$ takie, że $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$. Wówczas, $x \in V(E) \implies y \in V(E)$. Ponieważ $\overline{\{x\}}$ jest przekrojem zbiorów $V(E_i)$, który zawiera $x$, to w szczególności każdy z tych zbiorów zawiera również $y$, stąd $y \in \overline{\{x\}}$.

$\Longrightarrow$

Trywialne z *(ii)*.

*(iv) $X$ jest $T_0$-przestrzenią (jeśli $x, y$ są rozróżnialnymi punktami $X$, to albo istnieje otoczenie $x$ które nie zawiera $y$, albo istnieje otocznie $y$, które nie zawiera $x$).*

Weźmy dowolne punkty $x, y \in X$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ (lub $\mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$, ale WLOG pierwsza wersja)

Wtedy $x \in X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$, które jest zbiorem otwartym takim, że $y \notin X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$.

2. $\mathfrak{p}_x \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ i $\mathfrak{p}_y \not\subseteq \mathfrak{p}_x$

Wtedy $y \notin \overline{\{x\}}$ i $x \notin \overline{\{y\}}$. Czyli $y \in X \setminus \{x\}$ jest otwartym zbiorem zawierającym y ale niezawierającym x.

## ZADANIE 19.

*Przestrzeń topologiczna X jest nieredukowalna, jeśli $X \neq \emptyset$ i jeśli każda para niepustych otwartych podzbiorów X się przecina (równoważnie, każdy niepusty podzbiór otwarty jest gęsty w X). Pokaż, że* Spec(A) *jest nieredukowalny $\iff$ nilradykał A jest ideałem pierwszym.*

Weźmy $f, g$ takie, że $fg \in \mathfrak{R}$. W tedy $X_{fg} = \emptyset$, ale to jest to samo co $X_f \cap X_g$, ale ponieważ spektrum jest nierozkładalne, to któryś jest pusty. BSO $X_f = \emptyset$, czyli $f \in \mathfrak{R}$. Te wszystkie kroki to równoważności:

$$fg \in \iff \emptyset = X_{fg} = X_f \cap X_g \iff X_f = \emptyset \iff f \in \mathfrak{R}$$

Ewentualnie tak jak myślałam, czyli $\mathfrak{R}$ jest elementem minimalnym w X.

## ZADANIE 20

*Niech X będzie przestrzenią topologiczną*

*(i) Jeśli Y jest nieredukowalną podprzestrzenią X, wtedy domknięcie $\overline{Y}$ w X jest nieredukowalne.*

Załóżmy nie wprost, że $\overline{Y}$ nie jest nieredukowalna. Wtedy istnieją $U, V \subseteq \overline{Y}$ takie, że $U \cap V = \emptyset$. Ale zbiór $U \cap Y$ jest albo pusty albo jest zbiorem otwartym w Y. Tak samo dla $V \cap Y$. To znaczy, że $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ co jest sprzeczne z nieredukowalnością Y.

*(ii) Każda nieredukowalna podprzestrzeń X jest zawarta w pewnej nieredukowalnej podprzestrzeni X.*

Niech S będzie zbiorem nieredukowalnych podprzestrzeni X. Rozważmy łańcuch

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \ldots$$

podprzestrzeni z S. Niech $Y = \bigcup Y_i$. Musimy pokazać, że $Y \in S$, czyli Y jest nieredukowalny.

Niech $U, V \subseteq Y$. Wtedy istnieje i takie, że $U, V \subseteq Y_i$. Ponieważ $Y_i$ jest nieredukowalna, to $U \cap V \neq \emptyset$. W takim razie każde dwa zbiory otwarte z Y tną się niepusto, a więc Y jest nieredukowalne.

Wystarczy użyć lematu Zorna dla zbioru $S_A = \{Y \subseteq X \ : \ Y \text{ nieredukowalna i } A \subseteq Y\}$.

*(iii) Maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie X są domknięte i pokrywają X. Nazywamy je składowe nieredukowalne X. Jakie są składowe nieredukowalne przestrzeni Hausdorffa?*

Niech $M \subseteq X$ będzie maksymalną podprzestrzenią nieredukowalną X. Domkniętość M wynika wprost z (ii). Gdyby M nie było domknięte, to $M \subsetneq \overline{M}$, a $\overline{M}$ też jest nieredukowalne i mamy sprzeczność z maksymalnością M.

Dlaczego pokrywają? Bo dla każdego $\{x\}$, $x \in X$ możemy rozpatrzeć zbiór wszystkich nieredukowalnych zbiorów takich, że $\{x\} \subseteq A$ i w ten sposób znajdziemy maksymalne zbiory nieredukowalne zawierające każdy element X, czyli pokrywające X.

W Hausdorffie możemy każde dwa punkty oddzielić dwoma rozłącznymi otwartymi otoczeniami, więc maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie to singletony. I to właśnie przypadek, który mnie natchnął do wytłumaczenia jak pokryć X.

*(iv) Jeśli A jest pierścieniem i X =* Spec(A)*, wtedy składowe nieredukowalne X to zbiory domknięte* $V(\mathfrak{p})$*, gdzie $\mathfrak{p}$ to najmniejsze zbiory pierwsze A.*

$$V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \ : \ \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$$

Bierzemy dwa otwarte, które się przecinają z $V(\mathfrak{p})$

## ZADANIE 21

*Niech $\phi : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $X = \mathrm{Spec}(A)$ i $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Jeśli $\mathfrak{q} \in Y$, to $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ jest ideałem pierwszym w $A$, w szczególności punktem $X$. Z tego powodu $\phi$ indukuje przekształcenie $\phi^* : Y \to X$. Pokaż, że*

*(i) Jeśli $f \in A$, wtedy $\phi^{*-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$ i dlatego $\phi^*$ jest ciągłe.*

$$\phi^{*-1}(X_f) = \{y \in Y \ : \ (f) \subsetneq \phi^*(y)\} = \{y \in Y \ : \ (f) \subsetneq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y \ : \ \phi(f) \subseteq y\} = Y_{\phi(f)}$$

*(ii) Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem $A$, wtedy $\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^{\mathfrak{e}})$*

$\mathfrak{a}^e$ to rozszerzenie obrazy $\phi(\mathfrak{a})$ do ideału w $B$.

$$\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = \{y \in Y \ : \ \mathfrak{a} \subseteq \phi^*(y)\} = \{y \in Y \ : \ \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y \ : \ \phi(\mathfrak{a}) \subseteq y\} = V(\phi(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$$

Ta ostatnia równość z jakiegoś poprzedniego zadanka, bo wtedy mam, że $V(E) = V((E))$ i to jest to samo.

*(iii) Jeśli $\mathfrak{b}$ jest ideałem $B$, wtedy $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$*

$$\begin{aligned}\phi^*(V(\mathfrak{b})) &= \{\phi^{-1}(y) \ : \ \mathfrak{b} \subseteq y \in Y\} = \{x \in X \ : \ \phi(x) = y \supseteq \mathfrak{b}\} = \\ &= \{x \in X \ : \ \mathfrak{b} \subseteq \phi(x)\} \overset{\star}{=} \{x \in X \ : \ \phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq x\} = V(\phi^{-1}(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c)\end{aligned}$$

*(iv) Jeżeli $\phi$ jest suriekcją, wtedy $\phi^*$ jest homeomorfizmem z $Y$ w zamknięty zbiór $V(\ker(\phi))$ $X$. (W szczególności $\mathrm{Spec}(A)$ i $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{R})$, gdzie $\mathfrak{R}$ to nilradykał $A$, są naturalnie homeomorficzne.)*

*(v) Jeśli $\phi$ jest 1-1, to $\phi^*(Y)$ jest gęste w $X$. Dokładniej, $\phi^*(Y)$ jest gęste w $X \iff \ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R}$*

$\Longrightarrow$

$$Y = V(0) = V(\phi(\ker(\phi)))$$

Z gęstości $Y$ mam:

$$V(0) = V(\mathfrak{R}) = X = \overline{\phi^*(Y)} = \overline{\phi^*(V(\phi(\ker(\phi))))} = V(\phi^{-1}(\phi(\ker(\phi)))) = V(\ker(\phi))$$

A ponieważ $\mathfrak{R}$ jest ideałem pierwszym, to $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R}$

$\Longleftarrow$

Wiem, że $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R}$. No to wtedy

$$V((\ker\phi)) = X$$

No to wtedy

$$V(\phi(\ker(\phi))) = V((0)) = Y$$

$$\begin{aligned}\phi^*(Y) = \phi^*(V(\phi(\ker(\phi)))) &= \{\phi^{-1}(y) \ : \ \phi(\ker(\phi)) \subseteq y \in Y\} = \\ &= \{x \in X \ : \ \phi(\ker(\phi)) \subseteq \phi(x)\} = V(\ker(\phi)) = X\end{aligned}$$

*(vi)Niech $\psi : B \to C$ będzie kolejnym homomorfizmem pierścieni. Wtedy $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \phi^*$.*

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$$

$$\mathrm{Spec}(a) \xleftarrow[\phi^*]{} \mathrm{Spec}(B) \xleftarrow[\psi^*]{} \mathrm{Spec}(C)$$

$$\begin{aligned}\phi^* \circ \psi^*(c) &= \phi^*(\psi^{-1}(c)) = \\ &= \phi^{-1}(\psi^{-1}(c)) = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}(c) = \\ &= (\psi \circ \phi)^{-1}(c) = (\phi \circ \phi)^*(c)\end{aligned}$$

## ZADANIE 22.

*Niech* $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ *będzie produktem prostym pierścieni* $A_i$. *Pokaż, że* $\mathrm{Spec}(A)$ *jest rozłączną sumą otwartych (i zamkniętych) podzbiorów* $X_i$, *gdzie* $X_i$ *jest kanonicznie homeomorficzna z* $\mathrm{Spec}(A_i)$

To widać. Kanoniczny homeomorfizm to będzie identyczność na jednej współrzędnej i resztę wyrzucamy.

*Teraz niech A będzie dowolnym pierścieniem. Pokaż, że następujące są równoważne:*

*(i)* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *jest niespójna*

*(ii)* $A \cong A_1 \times A_2$ *gdzie żaden z* $A_1, A_2$ *nie jest pierścieniem zerowym.*

*(iii)* A *zawiera idempotent* $\neq 0, 1$

(i) $\implies$ (ii)

Skoro X jest niespójna, to jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b})$. Mam też, że te zbiory są rozłączne, czyli

$$\emptyset = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})$$

ale $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, które w tym wypadku wyszłoby (1), bo

$$V(1) = \emptyset = V(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

Czyli mam tutaj $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ wzajemnie pierwsze, czyli $\phi : A \to A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b}$ jest izomorfizmem pierścieni.

(ii) $\implies$ (iii)

$$x = (1, 0)$$
$$x^2 = (1^2, 0^2)$$

(iii) $\implies$ (i)

Jeśli przestrzeń jest niespójna, to $A \cup B = X$, ale jeśli weźmiemy dopełnienie, to mamy

$$\emptyset = X^c = (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$X = \emptyset^c = (A \cap B)^c = A^c \cap B^c,$$

czyli mogę równoważnie szukać dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych sumujących się do całości.

Mamy idempotent, chcemy pokazać, że wtedy da się rozdzielić A na sumę dwóch rozłącznych. Niech e będzie idempotentem i niech $e' = 1 - e$. Wtedy

$$e' + e = 1$$

$$e'e = (1 - e)e = e - e^2 = 0$$

$$X = V(0) = V(e'e) = V(e') \cup V(e)$$

$$\emptyset = V(1) = V(e' + e)$$

## ZADANIE 23.

*Niech A będzie pierścieniem booleowskim i niech $X = \mathrm{Spec}(A)$*

*(i) Dla każdego $f \in A$ zbiór $X_f$ jest otwarty i zamknięty w X.*

To wynika z poprzedniego zadania punkt (i) i (iii)? Bo wtedy mamy nietrywialny idempotent, a więc X jest niespójne, więc wszystkie zbiory są otwarte i domknięte na raz? Ale spróbuję bez takiego odwołania się do poprzednich zadań?

To, że $X_f$ jest otwarty to mamy z definicji. Sprawdźmy, dlaczego jest domknięty.

1. Każdy skończenie generowany ideał w A jest pierwszy, bo jeśli $x, y$ generowały, to $x+y+xy$ generuje ten ideał, a każdy pierwszy jest maksymalny (bo quotient jest ciałem o dwóch elementach.)

Co mi to daje? To mi daje tyle, że $V(f)$ jest jednym punktem, a ja chce żeby był otwarty i domknięty na raz. Czyli muszę go wyzerować jakoś i wymaksować. Ale to w sumie jest tak jak wyżej, że zbiory otwarte to

$$V(x) \cap V(1 - x) \subseteq V(x + 1 - x) = V(1) = \emptyset$$

czyli są otwarte i domknięte i tak samo zbiory otwarte, czyli sumy tych otwartych, to

$$V(x) \cup V(1 - x) = V((x)(1 - x)) = V(x - x^2) = V(0) = A$$

czyli tak samo.

*(ii) Niech $f_1, \ldots, f_n \in A$. Pokaż, że $X_{f_1} \cup \ldots \cup X_{f_n} = X_f$ dla pewnego $f \in A$.*

$$X_{f_1} \cup \ldots \cup X_{f_n} = (V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_n))^c = V((f_1, \ldots, f_n))^c = V(f)^c = X_f$$

*(iii)???*

*(iv) X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa*

Zwarty wychodzi z poprzedniego, a Hausdorffa, czyli chce dwa punkty oddzielić dwoma rozłącznymi zbiorami.

Zwartą, bo całego tak jak w (ii)?

Hausdorffa, czyli trzeba wziąć dwa punkty, $x, y \in X$. No to wiem, że aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa

## ZADANIE 26.

*Niech A będzie pierścieniem. Podprzestrzeń $\mathrm{Spec}(A)$ zawierająca ideały maksymalne z A, razem z indukowaną topologią, jest nazywana*maksymalnym spektrum A*i oznaczamy ją $\mathrm{Max}(A)$. Dla dowolnego pierścienia przemiennego nie ma to ładnych funktorowych własności (zad. 21) $\mathrm{Spec}(A)$, bo odwrotny obraz ideału maksymalnego przez homomorfizm pierścieni nie musi być maksymalny.*

*Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa i niech $C(X)$ oznacza pierścień wszystkich ciągłych liniowych funkcji rzeczywistych z X. Dla każdego $x \in X$ niech $\mathfrak{m}_x$ będzie zbiorem wszystkich $f \in C(X)$ takich,* *że* $f(x) = 0$. *Ideał* $\mathfrak{m}_x$ *jest maksymalny, ponieważ jest jądrem pewnego suriektywnego homomorfizmu* $C(X) \to \mathbb{R}$, *który mapuje* $f \to f(x)$. *Jeśli* $\overline{X}$ *będzie oznaczało* $\mathrm{Max}(C(X))$, *mamy wtedy mapę* $\mu : X \to \overline{X}$ $x \mapsto \mathfrak{m}_x$.

*Pokażemy, że* $\mu$ *jest homeomorfizmem między* $X$ *w* $\overline{X}$.

*(i) Niech* $\mathfrak{m}$ *będzie ideałem maksymalnym* $C(X)$ *i niech* $V = V(\mathfrak{m})$ *będzie zbiorem zawierającym wszystkie wspólne zera funkcji z* $\mathfrak{m}$

$$V = \{x \in X \ : \ (\forall \ f \in \mathfrak{m}) \ f(x) = 0\}$$

*Załóż, że* $V$ *jest pusty. Wtedy dla każdego* $x \in X$ *istnieje* $f_x \in \mathfrak{m}$ *takie, że* $f_x(x) \neq 0$. *Ponieważ* $f_x$ *jest ciągłe, istnieje otwarte otoczenie* $x \in U_x \subseteq X$ *na którym* $f_x$ *nie znika. Ze zwartości mamy skończoną liczbę takich sąsiedztw, nazwijmy je* $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ *pokrywających* $X$. *Niech*

$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$$

*ponieważ* $f$ *nie znika w żadnym punkcie* $X$, $f$ *jest odwracalne. Ale to jest sprzeczne z* $f \in \mathfrak{m}$, *stąd* $V$ *nie jest pusty.*

*Niech* $x$ *będzie punktem* $V$. *Wtedy* $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x \implies \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, *bo* $\mathfrak{m}$ *jest maksymalny. Stąd* $\mu$ *jest surjiekcją.*

Czy ja mam potwierdzić, że $\mu$ jest suriekcją? To znaczy no to widać?

Znaczy tak, jeśli coś jest nieodwracalne, to jest zawarte w pewnym ideale maksymalnym a więc przejdzie na coś z $\overline{X}$. Jeśli coś jest odwracalne, to nie jest zawarte w żadnym ideale maksymalnym

No to ze jest na to widac no

ideały max przejda na siebie i pokryja $\overline{X}$

*(ii) Z lematu Urysowa (to jest jedyny nietrywialny fakt potrzebny w tym argumencie) ciągła funkcja rozdziela punkty* $X$. *Stąd* $x \neq y \implies \mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ *i* $\mu$ *jest injiekcją.*

Niech $x, y \in X$ i niech $f \in C(X)$ będzie funkcją je rozdzielającą.

*(iii) Niech* $f \in C(X)$, *niech*

$$U_f = \{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$$

*i niech*

$$\overline{U_f} = \{\mathfrak{m} \in \overline{X} \ : \ f \notin \mathfrak{m}\}$$

*Pokaż, że* $\mu(U_f) = \overline{U_f}$. *Zbiory otwarte* $U + f$ *(odpowiednio* $\overline{U_f}$*) tworzą bazę topologii* $X$ *(odpowiednio* $\overline{X}$*) i z tego powodu* $\mu$ *jest homeomorfizmem. Więc* $X$ *można odtworzyć z pierścienia funkcji* $C(X)$