Równania różniczkowe 1R

Pszczółka Maja

Lato 2023

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Wstęp

Przykład: *Procent składany*: mamy $x_0 = 1000$ zł złożone w banku i oprocentowanie to jest $r = 8\%$ w skali roku. Pytamy, ile będziemy mieli po roku na naszym rachunku? $x_1 = 1008$. To się nazywa *kapitalizacja odsetek* i ogólny wzór to

$$x_n = x_{n-1} + r \cdot x_{n-1}$$

i możemy to napisać jawnym wzorem

$$x_n = x_0 \cdot (1 + r)^n$$

i to jest już jakiś model.

Teraz rozważmy przypadek ciągły tego. Zmieniamy znaczenie oznaczenia x_n na stan rachunku w n-tym miesiącu. Model będzie ten sam, tylko $x_n = x_0 \cdot (1 + \frac{r}{12})^n$.

To teraz rozdrabniamy jeszcze bardziej i stan w chwili t to:

$$x(t + h) = x(t) + r \cdot hx(t)$$

i równoważna postać to

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} = rx(t)$$

a ponieważ lewa strona przy $h \to 0$ dąży do pochodnej x, to mamy

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)$$

To się nazywa *prawem Malthusa*.

Przykład: przyrost naturalny. Jeśli przez r oznaczymy przyrost naturalny w Polsce, to mamy $r < 0$. Wzór jest taki sam jak dla procentu składanego.

Dzisiejszy wykład ma nam powiedzieć, jak znajdować rozwiązanie.

1.1. Rozwiązywanie równań różniczkowych

Równanie liniowe jednorodne to równanie postaci

$$y' = a(t)y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$. Szukanie rozwiązania tego równania (czyli tak zwanego *zagadnienia Cauchy'ego*) to:

$$y' - a(t) - y = 0$$

i teraz jeśli przemnożę całe t równanie przez

$$e^{-\int_0^t a(s)ds},$$

co nazywamy czynnikiem całkującym, i teraz jak napiszemy:

$$y'e^{-\int_0^t a(s)ds} - a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}y = 0$$

i to co dostaliśmy to jest pochodna funkcji

$$\left[e^{-\int_0^t a(s)ds}y\right]' = 0$$

czyli mamy

$$ye^{-\int_0^t a(s)ds} = c$$

$$y = ce^{\int_0^t a(s)ds}$$

Twierdzenie: dla każdej $a \in C(\mathbb{R})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Dowód: Istnienie jest jasne, bo y(t) jest dane jawny wzorem

$$y(t) = y_0e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Przy dowodzie jednoznaczności chcemy pokazać, że jest to dokładnie jedno rozwiązanie. Mamy dwie opcje dowodu:

I. Wszystkie krotki wyprowadzania jak wyżej są równoważne, to znaczy y spełnia $y' - a(t) - y = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy y spełnia $y'e^{-\int_0^t a(s)ds} - a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}y = 0$ i tak dalej.

II. Dowód nie wprost, czyli załóżmy, że mamy dwa rozwiązania $y(t)$ oraz $\overline{y}(t)$. Wtedy

$$w(t) = y(t) - \overline{y}(t)$$

spełnia:

$$w' = a(t)y - a(t)\overline{y} = a(t)(y - \overline{y}) = a(t)w$$
$$w(0) = y(0) - \overline{y}(0)$$

Funkcja $w \in C^1(\mathbb{R})$ spełnia:

$$w' = aw$$
$$w(0) = 0$$

Pokazać, że $w(t) \equiv 0$

Mnożymy równanie $w' = aw$ przez $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ i dostajemy:

$$w'e^{-\int_0^t a(s)ds} - awe^{-\int_0^t a(s)ds} = 0$$
$$\left[we^{-\int_0^t a(s)ds}\right]' = 0$$
$$we^{-\int_0^t a(s)ds} = c$$
$$w = ce^{-\int_0^t a(s)ds}$$

ale ponieważ $w(0) = 0$, to $w(0) = 0 = c$ i mamy, że $w \equiv 0$.

Twierdzenie: dla dowolnej funkcji ciągłej $a, f \in C(\mathbb{R})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $y \in C^1(\mathbb{R})$ zagadnienia

$$\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

czyli **równania liniowego niejednorodne**.

Dowód:

Istnienie pokażemy przez konstrukcję rozwiązania. Mnożymy przez czynnik całkujący, czyli $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ i dostajemy

$$\left[ye^{-\int_0^t a(s)ds}\right]' = f(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

i całkujemy obie strony od 0 do t. Jeszcze przed tym zmienimy sobie oznaczenie w równaniu powyżej: $t \to \tau$. Koniec końców, dostaniemy:

$$\int_0^t \left[ye^{-\int_0^\tau a(s)ds}\right]' dz = \int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds}d\tau$$
$$ye^{-\int_0^t a(s)ds} - y_0e^{-\int_0^t a(s)ds} = \int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds}d\tau$$
$$y = y_0 + e^{\int_0^t a(s)ds}\int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds}$$

Jednoznaczność możemy pokazać podobnie jak w poprzednim przykładzie.

Równanie o zmiennych rozdzielonych to równanie postaci

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}.$$

Równanie liniowe jednorodne to szczególny przypadek równania o zmiennych rozdzielonych dla $g(t) = a(t)$ i $f(y) = \frac{1}{y}$. Takie równania są przyjemne, bo łatwo jest je zwinąć do postaci pochodna = 0:

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}$$

$$y'f(y) = g(t)$$

i niech $f = F'$ oraz $g = G'$. Wtedy

$$[F(y(t))]' = G'(t)$$

czyli

$$[F(y(t))]' - G'(t) = 0$$

$$F(y(t)) - G(t) = c$$

Możemy też podejść do tego problemu *metodą inżynieryjną*, czyli $y' = \frac{dy}{dx}$ jest traktowane jako ułamek i mamy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

$$f(y)dy = g(t)dt$$

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt$$

Twierdzenie: Zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = \frac{g(t)}{f(y)} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

gdzie $g(t)$ jest ciągłe w otoczeniu t_0. Natomiast $f(y)$ i $\frac{1}{f(y)}$ są ciągłe w otoczeniu y_0. To równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $y \in C^1$ w otoczeniu (t_0, y_0).

Dowód: To jest tak naprawdę to co już napisaliśmy, ale nieco bardziej precyzyjnie.

Ponieważ $\frac{1}{f(y)}$ jest ciągłe w otoczeniu y_0, więc $f(y) \not\equiv 0$ w tym otoczeniu. Załóżmy, że $f(y) > 0$ na otoczeniu y_0. Zatem mamy równoważnie

$$f(y)\frac{dy}{dy} = g(t).$$

Niech $F' = f$ z dokładnością do stałej. Czyli wtedy

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = g(t)$$

i całkujemy obie strony od t_0 do t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}F(y(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

$$F(y(t)) - F(y_0) = G(t) - G(t_0)$$

Ponieważ $F' = f > 0$ w otoczeniu y_0, to F jest ściśle rosnąca, więc jest odwracalna. Zatem w otoczeniu (t_0, y_0) mamy

$$y(t) = F^{-1}(F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds)$$

Przykłady, dlaczego ważne jest to, że jesteśmy w małym otoczeniu (t_0, y_0) a nie globalnie:

1. $y = y^{\frac{1}{3}}$ i $y(0) = 0$. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązania to $y \equiv 0$, ale jeśli zaczniemy dłużej nad tym siedzieć, to mamy, że $y(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$. Inne rozwiązanie to $y(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$. Problemem jest fakt, że w otoczeniu punktu $(0, 0)$ funkcja ma być ciągła - nie jest spełnione założenie. Przez to, możemy pokazać, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

2. $y = y^2$ i $y(0) = 1$. Nadal działamy na równaniu o zmiennych rozdzielonych. Założenie o ciągłości jest prawdziwe. Twierdzenie mówi, że w otoczeniu punktu $(0, 1)$ mamy dokładnie jedno rozwiązanie, które wynosi

$$y(t) = \frac{1}{1 - t}$$

Równania zupełne to równania postaci

$$M(t,y(t)) + N(t,y(t))\frac{dy}{dt} = 0,$$

gdzie M, N są klasy C^1, dla których istnieje funkcja $\psi(t,y)$ klasy C^1 taka, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y) = N(t,y)$$

Dla równań zupełnych mamy:

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y(t)) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y(t))\frac{dy(t)}{dt} = $$
$$= \frac{d}{dt}\left(\psi(t,y(t))\right) = 0$$

Przykład: Rozważmy funkcję

$$3y + e^t + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$$

Chcę znaleźć funkcję $\psi(t,y(t))$ taką, że

$$\frac{\partial\psi(t,y(t))}{\partial t} = 3y + e^t$$
$$\frac{\partial\psi(t,y(t))}{\partial y} = 3t + \cos y$$

czyli obie strony możemy sobie przecałkować

$$\psi(t,y(t)) = \int [3y + e^t]dt = 3ty + e^t + c(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[3ty + e^t + c(y)] = 3t + c'(y) = \frac{\partial\psi(t,y(y)}{\partial y)} = 3t + \cos y$$

$$3t + e^t + c'(y) = 3t + \cos y$$

$$c'(y) = \cos y$$

$$c(y) = \sin y + c$$

Zatem

$$3y(t) + e^t + (3t + \cos y(t))y'(t) = (3ty(t) + e^t + \sin y(t) + c)' = 0$$

Twierdzenie: rozważamy równanie

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

gdzie M, N są klasy C^1 w otoczeniu (t_0, y_0). Równanie to jest zupełne w pewnym otoczeniu (t_0, y_0) $\iff$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ w otoczeniu (t_0, y_0).

Dowód:

$\implies$ Zupełność oznacza, że dla pewnej $\psi(t,y)$ mamy, że

$$\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial t} = M(t,y)$$

oraz

$$\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y} = N(t,y).$$

Różniczkując pierwsze wyrażenie po y oraz drugie po t dostajemy:

$$\frac{\partial^2\psi(t,y)}{\partial t\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}M(t,y)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(t,y)}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} N(t,y) dy$$

i z symetryczności drugiej pochodnej mamy równość z twierdzenia.

$\Longleftarrow$ Podajemy funkcję ϕ:

$$\phi(t,y) = \int_{t_0}^{t} M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^{y} N(t,z) dz$$

w otoczeniu (t_0, y_0).

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial t} M(t,z) dz = M(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial y} M(t,z) dz =$$
$$= M(t,y_0) + M(t,y) - M(t,y_0) = M(t,y)$$

Pokazanie, że $\frac{\partial}{\partial y} = N(t,y)$ jest pokazywane analogicznie.

Przykład: Równanie liniowe jednorodne $y' = a(t)y$ nie jest zupełne. Możemy spróbować zapisać je w postaci z M i N:

$$-a(t)y + 1 \cdot y'(t) = 0$$

Wtedy $M(t,y) = -a(t)y$ i $N(t,y) = 1$. Mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial y} M(t,y) = -a(t) \neq 0 = \frac{\partial}{\partial y} N(t,y).$$

Ale już równanie

$$-a(t)ye^{-\int_0^t a(s)ds} + e^{-\int_0^t a(s)ds} y' = 0$$

jest zupełne, mimo że równania są równoważne. Zmieniliśmy tylko postać równania, ale jest sens jest taki sam.