

Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis treści

1	Definicja rozmaitości	3
1.1	Rozmaitości topologiczne	3
1.2	Mapy, lokalne współrzędne	4
1.3	Własności rozmaitości topologicznych	5
2	Rozmaitości gładkie	6
2.1	Atlas rozmaitości	6
2.2	Zgodność map	7
2.3	Atlas [maksymalny]	7
2.4	Funkcje gładkie	7
3	Rozkłady jedności	9
3.1	Nośnik funkcji	9
4	Pomocnik idiotów:	10

1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzymy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzeń opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory \mathbb{R}^n lub \mathbb{C}^n zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w \mathbb{C}^3).

1.1. Rozmaitości topologiczne

Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n -rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest **lokalnie euklidesowa** wymiaru n , czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n .

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\bar{K} \subseteq \bar{U}$ jest zwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , to $K = \phi^{-1}[\bar{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które są po domknięciu zawarte w M .

- **Parazwartość**, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
 - Rodzina \mathcal{X} podzbiorów M jest **lokalnie skończona** [locally finite], jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną wieloma elementami \mathcal{X} .
 - Jeśli mamy pokrycie M zbiorami \mathcal{U} i bierzemy drugie pokrycie \mathcal{V} takie, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ znajdziemy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to \mathcal{U} jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem**
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n .

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- **Twierdzenie Brouwer'a:** niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.

- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n . Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.2. Każdy otwarty podzbiór n -rozmaitości topologicznej jest n -rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Definicja 1.3. Parę (U, ϕ) , gdzie U jest otwartym podzbiorem M , a ϕ to homeomorfizm

$$\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M . Zbiór U taki jak wyżej nazywamy **zbiorem mapowym** [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli (U, ϕ) jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest **wyśrodkowana na p** [centered at p].

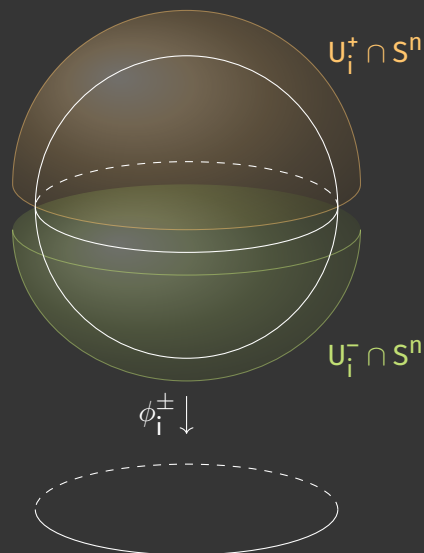
Fakt 1.4. Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n -rozmaitością \iff posiada rodzinę map n -wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają całą X .

Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczną topologią. Z racji, że \mathbb{R}^{n+1} jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całą S^n . Dla $i = 1, \dots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\bar{U}_i^\pm = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_j^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \bar{U}_i^\pm$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami \mathbb{R}^n .

PRZYKŁADY Z LEE

1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- **spójna**, gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- **drogowo spójna**, gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- **lokalnie drogowo spójna**, gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

Uwaga 1.5. Jeśli przestrzeń M jest rozmaitością topologiczną, to

1. M jest lokalnie spójna drogowo,
2. M jest spójna \iff jest drogowo spójna,
3. spójne składowe M są takie same jak drogowe spójne składowe,
4. M ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem M (a więc i spójną rozmaitością)

Dowód. Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w \mathbb{R}^n [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza M jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna X jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

Uwaga 1.6. Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.

Dowód. Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w $q \in X$ jest nazywana **fundamentalną grupą** X w q . Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała $c_q(s) = q$. Dla rozmaitości topologicznych **fundamentalne grupy** są przeliczalne.

2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, co to znaczy, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna?

2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy określać za pomocą map:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$. W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ to funkcje $\phi_1 \phi_2^{-1}$ i $\phi_2 \phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 2.1. Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1 \phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ i $\psi \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Definicja 2.2. Mając dane dwie rozmaitości, M i N , mówimy, że funkcja $f : M \rightarrow N$ jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna f^{-1} też jest różniczkowalna

Definicja 2.3. Gładkim atlasem \mathcal{A} na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

- zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{\phi_j^{+1}} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\ & & \downarrow \phi_i^+ \\ & & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \end{array}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

2.2. Zgodność map

Definicja 2.4. Rozmaitość gładka to para (M, \mathcal{A}) złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu \mathcal{A} opisanego na M .

Definicja 2.5. Niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ będą gładkimi atlasami na M . Mówimy, że mapa (U, ϕ) jest zgodna z atlasem \mathcal{A} , jeżeli jest zgodna z każdą mapą z \mathcal{A}_1 . Dalej, mówimy, że atlas \mathcal{A}_2 jest zgodny z atlasem \mathcal{A}_1 , jeżeli każda mapa z \mathcal{A}_1 jest zgodna z każdą mapą z atlasu \mathcal{A}_2 .

Twierdzenie 2.6. Relacja zgodność atlasów jest relacją równoważności.

Dowód. Ćwiczenia



2.3. Atlas [maksymalny]

Zgodne atlasy określają tę samą strukturę gładką na M . W takim razie, wygodnym będzie móc zawrzeć wszystkie zgodne atlasy w czymś większym. Z pomocą przychodzi nam pojęcie atlasu maksymalnego.

Definicja 2.7. Atlas \mathcal{A} jest **atlasem maksymalnym**, jeżeli każda mapa (U, ϕ) z nim zgodna jest w nim zawarta.

Fakt 2.8. Każdy atlas \mathcal{A} na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M , który jest zbiorem wszystkich map na M zgodnych z \mathcal{A} .

Dowód. Ćwiczenia. Korzystamy z lematu Zorna.



W takim razie, równoważnie do pary (M, \mathcal{A}) , gdzie \mathcal{A} jest dowolnym zgodnym atlasem na M , możemy wymóc w definicji, aby \mathcal{A} **był atlasem maksymalnym**.

2.4. Funkcje gładkie

Definicja 2.9. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ określona na rozmaitości gładkiej (M, \mathcal{A}) jest gładka, jeżeli po wyrażeniu w każdej mapie z tego atlasu jest gładka:

$$(\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}) \quad f \circ \phi^{-1} \text{ jest gładka}$$

Fakt 2.10. Niech (M, \mathcal{A}) będzie rozmaitością gładką, a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na M .

1. Jeżeli (U, ϕ) jest mapą zgodną z \mathcal{A} , to f wyrażone w (U, ϕ) , czyli $f \circ \phi^{-1}$ też jest funkcją gładką.
2. Niech \mathcal{A}' będzie atlasem zgodnym z \mathcal{A} . Wówczas funkcja f jest zgodna względem $\mathcal{A}' \iff$ jest gładka względem $\mathcal{A}' \iff$ jest zgodna względem atlasu maksymalnego zawierającego oba te atlasy.

Co więcej, możemy powiedzieć, że $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka \iff jest gładka względem każdego atlasu \mathcal{A} wyznaczającego na M gładką strukturę. [Ćwiczenia]

Definicja 2.11.

- Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k -zgodne**, jeżeli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k .
- **C^k -atlas** to atlas składający się z map, które są C^k -zgodne
 - Taki atlas określa strukturę C^k -rozmaitości na M
 - Jest to struktura słabsza niż struktura rozmaitości gładkiej

C^0 zwykle oznacza rozmaićność topologiczną, a C^∞ to rozmaićność gładka.

Fakt 2.12. Na C^k rozmaićności nie można sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.

Rozmaićność można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych, na przykład:

- **Rozmaićność analityczna** [C^ω] to rozmaićność, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- **Rozmaićność zespolona** ma mapy jako funkcje w \mathbb{C}^n zamiast w \mathbb{R}^n
- Rozmaićność konforemna - zachowuje kąty
- Rozmaićność kawałkami liniowa

Istnieją rozmaićności topologiczne, które nie dopuszczają żadnej struktury gładkiej (pierwszym takim przykładem była zwarta 10-rozmaićność odkryta przez M. Kervaire). Z drugiej strony, z każdego maksymalnego atlasu C^k rozmaićności można wybrać atlas złożony z map C^∞ -zgodnych, czyli na każdej C^k istnieje struktura C^∞ rozmaićności.

Lemat 2.13. Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X takich, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ które jest różnowartościowe. Załóżmy, że takie $M, \{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}$ spełniają:

1. Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n
2. Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w \mathbb{R}^n
3. Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

jest gładkim **dyfeomorfizmem** (gładkie i odwracalne)

4. Przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X
5. Dla dowolnych $p, q \in X, p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p), q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$, czyli możemy rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n .

Wówczas na X istnieje **struktura rozmaićności topologicznej na X** , dla której U_α są zbiorami otwartymi. Ponadto, (U_α, ϕ_α) tworzy **gładki atlas na X** .

Dowód. Prezentujemy szkic dowodu:

- Topologia jest produkowana jako przeciwobrazy przez poszczególne ϕ_α
- Lokalna euklidesowość jest oczywista
- Mniejsza baza przeliczalna też śmignie [ćwiczenia]
- Hausdorffowość wynika z warunku 5.



PRZYKŁAD - linie na prostej, ale nie chce już dzisiaj

3. Rozkłady jedności

Motywacja: jak sklejać funkcje? W szczególności, jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem M istnieje gładka funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że:

$$\begin{aligned} f(p) &= 0 & p \in \partial M \\ f(p) &> 0 & p \in \text{Int}(M)? \end{aligned}$$

3.1. Nośnik funkcji

Definicja 3.1. Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona**, jeżeli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w X takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α .

Definicja 3.2. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jej **nośnik** to

$$\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

Twierdzenie 3.3. [Twierdzenie o rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_j\}_{j \in J}$ gładkich funkcji $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

- $f_j \geq 0$
- każdy nośnik $\text{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α z pokrycia
- nośniki $\{\text{supp}(f_j)\}_{j \in J}$ tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w M .
- dla każdego $x \in M$ $\sum_{j \in J} f_j(x) = 1$

Jest to **rozkład jedności wpisany w pokrycie** $\{U_\alpha\}$

4. Pomocnik idiotów:

Skorowidz definicji

1.1	Definicja: <i>rozmaitość topologiczna</i>	3
1.3	Definicja: <i>mapa</i>	4
2.1	Definicja: <i>zgodność map</i>	6
2.2	Definicja: <i>dyfeomorfizm</i>	6
2.3	Definicja: <i>atlas gładki</i>	6
2.4	Definicja: <i>rozmaitość gładka</i>	7
2.5	Definicja: <i>zgodność map, atlasów</i>	7
2.7	Definicja: <i>atlas maksymalny</i>	7
2.9	Definicja: <i>gładkość względem atlasu</i>	7
2.11	Definicja: <i>mapa C^k-zgodna, C^k-atlas</i>	7
3.1	Definicja: <i>rodzina lokalnie skończona</i>	9
3.2	Definicja: <i>nośnik funkcji</i>	9

Twierdzonekowa zabawa

1.2	Uwaga: <i>podzbiory to też rozmaitości</i>	4
1.4	Fakt: <i>n-rozmaitość \iff rodzina map pokrywających</i>	4
1.5	Uwaga: <i>spójność rozmaitości topologicznych</i>	5
1.6	Uwaga: <i>rozmaitości są lokalnie zwarte</i>	5
2.6	Twierdzenie: <i>zgodność to relacja równoważności</i>	7
2.8	Fakt: <i>każdy atlas jest zawarty w unikalnym atlasie maksymalnym</i>	7
2.10	Fakt	7
2.12	Fakt: <i>nie można skakać $C^m \rightarrow C^k$</i>	8
2.13	Lemat: <i>rozmaitość gładka bez topologii</i>	8
3.3	Twierdzenie: <i>o rozkładzie jedności</i>	9