ZADANIE 1.

Pokaż, że $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ jeśli m, n są względnie pierwsze.

Załóżmy, że m, n są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkciku:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

ZADANIE 2.

Niech A będzie pierścieniem, $\mathfrak{a}$ ideałem, a M A-modułem. Pokaż, że $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ jest izomorficzne do $M/\mathfrak{a}M$. [Stensoruj ciąg dokładny $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ z M

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

i jakiś losowy A-moduł M, to

$$\mathfrak{a} \otimes M \to A \otimes M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebiście, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ na M'' (f to pierwsza funkcja, a myśki lecą $M' \to M \to M''$.)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja $\mathfrak{a} \to A$? To jest identyczność na $\mathfrak{a}$ lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\mathfrak{a} \otimes M \cong (A \otimes M)/(\mathfrak{a} \otimes M) \cong AM/\mathfrak{a}M = M/\mathfrak{a}M$$

ZADANIE 3.

Niech A będzie pierścieniem lokalnym, M, N skończenie generowanymi A-modułami. Udowodnij, że $M \otimes N = 0$ wtedy $M = 0$ lub $N = 0$.

[Niech $\mathfrak{m}$ będzie ideałem maksymalnym, $k = A/\mathfrak{m}$ będzie residue filed (to jest ciało zrobione przez wytentegowanie z tym tym). Niech $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że $M_k = 0 \implies M = 0$. Ale $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$ or $N_k = 0$, since M_k, N_k są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \overset{(\star)}{\implies} M_k \otimes_k N_k = 0 \overset{(\heartsuit)}{\implies} M_k = 0 \lor N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$(\star)$ $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) = 0$

Jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to $(k \otimes_A M) \otimes_A N) = 0$, czyli $k \otimes_A M$

A to to jest raczej proste, bo jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to tym bardziej $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$ a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$.

$(\heartsuit)$ $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \lor N_k = 0$? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na N.

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAAA – zapytać jak się zmienia to nad czym tensorujemy

Chwila, bo $0 = k \otimes_A (M \otimes_A N) = (k \otimes_A M) \otimes_A N$

ZADANIE 4.

Niech M_i ($i \in I$) będzie dowolną rodziną A-modułów i niech M będzie ich sumą prostą. Pokaż, że M jest płaski $\iff$ każdy M_i jest płaski

Mamy funktor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ i on jest na kategorii A-modułów i homomorfizmów. Jeśli T_N jest dokładny, czyli tensorowanie z N przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy N jest flat A-modułem.

$\Longleftarrow$ pójdzie chyba z faktu, że $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

$\Longrightarrow$

Wiem, że jeśli mam ciąg dokładny

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$

dla dowolnych N_i, to wtedy tensorowanie przez M zachowuje dokładność, tzn ciąg

$$0 \to N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M \to N_3 \otimes M \to 0$$

jest nadal dokładny.

Co by się stało, jeśli któraś współrzędna M nie jest flat? Wtedy mogłam N wybrać tak, żeby

$$0 \to N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i \to N_3 \otimes M_i \to 0$$

nie było dokładne, czyli tutaj psuje się iniekcja

$$f_1 : N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i$$

No dobra, ale ja mogę zapisać sobie

$$M = M_i \bigoplus_{j \neq i} M_j$$

i zrobić

$$F_1 : N_1 \otimes (M_i \bigoplus M_j) \to N_2 \otimes (M_i \bigoplus M_j)$$

czyli coś typu $n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto n_2 \otimes (m_i, m)$, ale mam też izomorfizmy

$$n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_1, m_i) \otimes (n_1, m)$$

$$n_2 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_2, m_i) \otimes (n_2, m)$$

no i tak jakby iniekcyjność F_1 jest psuta przez brak inikcyjności w f_1, czyli sprzeczność? Bo przecież $F_1 = f_1 \otimes F'$ dla jakiejś ładnej iniekcji F'.

ZADANIE 5.

Niech $A[X]$ będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem A. Pokaż, że $A[X]$ jest płaską A-algebrą.

No jak dla mnie to $A[X]$ to jest suma prosta $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Ax^n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ i $A[X]$ to moduł wolny. Ah, no i teraz korzystam z tego, że $A \otimes M = M$ i śmiga.

ZADANIE 6.

Dla dowolnego A-moduły, niech $M[X]$ będzie oznaczało zbiór wszystkich wielomianów w x o współczynnikach z M, to znaczy wyrażenia formy

$$m_0 + m_1 x + \ldots + x_r x^r$$

Zdefiniuj iloczyn elementu $A[X]$ z elementem $M[X]$ w oczywisty sposób, pokaż że $M[X]$ jest $A[X]$-modułem. Pokaż, że $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Jak to leciało dla A-modułu? $a, b \in A, x, y \in M$

$$a(x+y) = ax + ay$$
$$(a+b)x = ax + by$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1x = x$$

Czy ja chce brać sobie $w, v \in M[X]$ oraz $p, r \in A[X]$ i robić zwykłe mnożenie wielomianów? Chyba tak XD

$$p(w+v) = \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum w_i x^i + \sum v_i x^i\right) = \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum (w_i + v_i) x^i\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k} p_i (w_j + v_j) x^k\right) = \sum\left(\sum p_i w_j x^k + \sum p_i v_j x^k\right) =$$
$$= \sum\sum p_i w_j x^k + \sum\sum p_i v_j x^k = pw + pv$$

I reszty sprawdzania to mi się nie chce.

Homomorfizm na

$$f : M[X] \to A[X] \otimes_A M$$
$$f(\sum m_j x^j) = \sum (x^j \otimes m_j)$$

jest $1-1$, bo każdy wielomian jest unikalny ze względu na współczynniki przy kolejnych potęgach, bla bla bla. Widać. Nawet mi się nie chce tego pisać ładnie

To teraz w drugą stronę jest też dość prosty

$$g : A[X] \otimes_A M \to M[X]$$
$$g(\left(\sum a_i x^i\right) \otimes m) = \sum a_i m x^i$$

ZADANIE 7.

Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem pierwszym w A. Pokaż, że $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym w $A[X]$. Czy jeśli $\mathfrak{m}$ jest ideałem pierwszym w A, to $\mathfrak{m}[X]$ jest ideałem maksymalnym w $A[X]$?

Z poprzedniego zadania wiem, że $\mathfrak{p}[X] \cong A[X] \otimes_A \mathfrak{p}$, bo każdy ideał jest A-modułem.

Czy mogę określić sobie homomorfizm (ewualuację w $x = 1$)

$$f : A[X] \to A$$
$$f(\sum a_i x^i) = \sum a_i$$

i wtedy $f^{-1}[\mathfrak{p}]$ jest całością $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym jako przeciwobraz ideału pierwszego przez homomorfizm.

Alternatywnie

$$(A[X])/(\mathfrak{p}[X]) \cong (A/\mathfrak{p})[X]$$

w pierwszym zadaniu z poprzedniego rozdziału pokazywaliśmy, że $f \in A[X]$ jest dzielnikiem zera $\iff$ $af = 0$ dla pewnego $a \in A \setminus \{0\}$, czyli $\iff$ w A są dzielniki zera. Ale w $(A/\mathfrak{p})$ dzielników zera nie ma, bo wszystkie są w $\mathfrak{p}$ który to wyrzuciliśmy, więc śmiga.

ZADANIE 9.

TO WYPADAŁOBY ZROBIĆ, ALE NIEEE CHCEEE MIII SIEEEE

ZADANIE 10.

Niech A będzie pierścieniem i $\mathfrak{a}$ ideałem zawartym w radykalne Jacobsona. Niech M będzie A-modułem, a N niech będzie skończenie generowanym A-modułem. Niech $u : M \to N$ będzie homomorfizmem. Pokaż, że jeżeli indukowany homomorfizm $\bar{:}M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ jest surjektywny, to również u taki jest.

Najpierw rysuneczek:

$$\begin{tikzcd}
M/\mathfrak{a}M \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "\cong"] & N/\mathfrak{a}N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Coker}(\bar{u}) = 0 \arrow[d, "\cong"] \\
M \otimes A/\mathfrak{a} \arrow[r, "u\otimes 1"] & N \otimes A/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0 = ??? = \mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a}
\end{tikzcd}$$

$$M \xrightarrow{u} N \longrightarrow \mathrm{Coker}(u)$$

No i to jest tak, że to co jest w ??? jest izomorficzne z $\mathrm{Coker}(\bar{u})$, bo no izomorfizm w dół mi nie popsuje $\mathrm{Coker}(\bar{u})$, które było równe 0. Czyli ??? = 0. Z drugiej strony, to co jest w ??? jest równe $\mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a}$. Skoro N było skończenie generowane, to takie jest też $\mathrm{Coker}(u)$, bo przecież wychodzi z N. Czyli mam, że

$$0 = \mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a} \cong \mathrm{Coker}(u)/\mathfrak{a}\mathrm{Coker}(u)$$

i z tego wynika, że $\mathrm{Coker}(u) = \mathfrak{a}\mathrm{Coker}(u)$ i z lematu Nakayamy wiem, że $\mathrm{Coker}(u) = 0$.

Nieskończenie generowany moduł, który nie spełnia lematu Nakayamy. Wyzwanie: znaleźć pierścień R, moduł M i ideał $\mathfrak{a}$ taki, że $M = \mathfrak{a}M$ i $M \neq 0$

Mam pierścień $k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$

ZADANIE 11.

Niech A będzie pierścieniem $\neq 0$. Pokaż, że $A^n \cong A^m \implies m = n$.

[Niech $\mathfrak{m}$ będzie ideałem maksymalnym w A i niech $\phi : A^n \to A^m$ będzie izomorfizmem. Wtedy $1 \otimes \phi : (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n \to (A/\mathfrak{m}) \otimes A^m$ jest izomorfizmem pomiędzy przestrzeniami liniowymi wymiaru m i n nad ciałem $k = A/\mathfrak{m}$. Czyli $m - n$.]

- *Jeżeli $\phi : A^m \to A^n$ jest surjekcją, to $m \geq n$*
- *Czy jeżeli $\phi : A^m \to A^n$ jest iniekcją, to $m \leq n$?*

Mamy $A^m \cong A^n$ i $\mathfrak{m} \lhd A$.

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & A^m \arrow[d] \\
(A/\mathfrak{m})^n \arrow[r, "\cong"] & (A/\mathfrak{m})^m
\end{tikzcd}$$

i to niżej to jest przestrzeń liniowa, korzystamy z fakty dobrej określonowości wymiaru takich przestrzeni.

Na surjekcję to działa, ale przy iniekcji niekoniecznie to się przenosi.

Zakładamy nie wprost, że $m > n$ i mamy strzałkę $\phi : A^m \to A^n$. Będziemy uzasadniać, że ona ma nietrywialne jądro.

$$\begin{tikzcd}
A^m \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & A^n \arrow[r, hook] & A^m
\end{tikzcd}$$

Niech M będzie modułem z A^k. i $\psi \in \mathrm{End}(A^m)$. Mamy, że dla $a_i \in A$

$$\psi^k + \ldots + a_1\psi^{k-1} + \ldots + a_k \mathrm{id}_{a^m} = 0$$

$$\begin{tikzcd} A^k \arrow[r] \arrow[d] & A^k \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

ZADANIE 12.

Niech M będzie skończenie generowanym A-modułem i ϕ : $M]toA^n$ będzie surjektywnym homomorfizmem. Pokaż, że $\ker(\phi)$ jest skończenie generowany.

[Niech $e_1, ..., e_n$ będzie bazą A^n i wybierzmy $u_i \in M$ takie, że $\phi(u_i) = e_i$. Pokaż, że M jest sumą prostą $\ker(\phi)$ i podmodułów generowanych przez $u_1, ..., u_n$.

Korzystamy ze wskazówki, czyli te u_i istnieją tak jak chcemy. Niech $m \in M$, wtedy

$$\phi(m) = \sum a_i e_i \implies m - \sum a_i u_i \in \ker(\phi)$$

Czyli $m \in M$ to jest suma czegoś z $\langle u_i \rangle$ i czegoś z $\ker(\phi)$.

Z tego wnioskujemy, że $\ker(\phi) \cong M/\langle u_i \rangle$ i my mówimy, że to jest skończenie generowane, bo jest suriekcja z M w to cóś.

ZADANIE 13

Niech $f : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni i niech N będzie B-modułem. Patrzenie na N jako na A-moduł poprzez restrykcję skalarów daje nam B-moduł $N_B = B \otimes_A N$. Pokaż, że homomorfizm $g : N \to N_B$ taki, że $y \mapsto 1 \otimes y$ jest iniekcją i że $g(N)$ jest składnikiem sumy N_B (czyli $N_B = g(N) \oplus C$ dla pewnego C).

[Zdefiniuje $p : N_B \to N$ przez $p(b \otimes y) = by$ i pokaż, że $N_B = \mathrm{Im}(g) \oplus \ker(p)$.]

To, że g jest iniekcją to raczej widać. Bo wpp.

$$g(y) = 1 \otimes y = 1 \otimes y' = g(y')$$

ale $y \neq y'$, czyli $1 \otimes y \neq 1 \otimes y'$.

Chyba mam pokazać, że $\ker(p)$ i $\mathrm{Im}(g)$ są rozłączne i coś z N jest albo w ker albo w Im. Ale to chyba widać.

Niech $b \otimes n \in N_B$. Wtedy mamy dwie opcje:

- $bn = 0$, wtedy $b \otimes n \in \ker(p)$
- $bn \neq 0$, wtedy $b \otimes n = 1 \otimes bn \in \mathrm{Im}(g)$.

Wypadałoby też pokazać, że p jest liniowe, ale sobie pominiemy.

Wiemy, że $g \circ p = \mathrm{id}$ i chcemy, by $\ker(g) = 0$

ZADANIE 14

Częściowo uporządkowany zbiór I jest skierowany, jeżeli dla każdej pary $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ takie, że $i \leq k \wedge j \leq k$.

Niech A będzie pierścieniem, I będzie skierowanym zbiorem i niech $\{M_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną A modułów indeksowanych przez I. Dla każdej pary $i, j \in I$ takiej, że $i \leq j$ niech $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ będzie A-homomorfizmem i załóżmy, że poniższe aksjomaty są spełnione:

- *μ_{ii} jest identycznością na M_i*
- *$\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ zawsze gdy $i \leq j \leq k$.*

Wtedy moduł M_i i homomorfizmy μ_{ij} są skierowanym systemem $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{ij})$ nad zbiorem skierowanym I.

Skonstruujemy A-moduł M nazywany skierowaną granicą skierowanego systemu $\mathbb{M}$. Niech C będzie sumą prostą M_i i zidentyfikuj każdy moduł M_i z jego kanonicznym obrazem w C. Niech D będzie podmodułem C generowanym przez wszystkie elementy postaci $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ dla $i \leq j$ i $x_i \in M_i$. Niech $M = C/D$ i $\mu : C \to M$ będzie projekcją, μ_i oznacza restrykcję μ do M_i.

Moduł M, albo bardziej dokładnie, para składająca się z M i rodziny homomorfizmów $\mu_i : M_i \to M$ jest nazywana skierowaną granicą skierowanego systemu $\mathbb{M}$ i piszemy $\varinjlim M_i$. Z tej konstrukcji jasno wynika, że $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ gdy tylko $i \leq j$.

No konstrukcja, coś tutaj mam zrobić sama?

ZADANIE 15.

W sytuacji jak w zadaniu 14, pokaż, że każdy element M może być zapisany w formie $\mu_i(x_i)$ dla pewnego $i \in I$ i pewnego $x_i \in M_i$.

Pokaż, że jeśli $\mu_i(x_i) = 0$, wtedy istnieje $j \geq i$ takie, że $\mu_{ij}(x_i) = 0$ w M_j.

Widzę to. Teraz pokazać.

Weźmy element $x \in M$. Wtedy $x = \sum x_i + D$ dla $x_i \in M_i$. Ale mamy zbiór uporządkowany, czyli istnieje j takie, że $\sum x_i + D = \sum_{i \leq j} x_i + D$. To mogę sobie wszystko rzucić na M_j, to znaczy zrobić

$$y_j = \sum \mu_{ij}(x_i) \in M_j.$$

Wtedy

$$\sum_{i \leq j} x_i - \sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i) = \sum_{i \leq j} (x_i - \mu_{ij}(x_i)) \in D$$

Czyli $\sum_{i \leq j} x_i = \sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i)$ w środku $C/D = M$, czyli

$$x = y_j + D = \mu_j(y_j)$$

Jeżeli $\mu_i(x_i) = 0$, to $x_i \in D$? A to znaczy, że $x_i - \mu_{ij}(x_i) = x_i$ dla pewnego j, czyli $\mu_{ij}(x_i) = 0$?

ZADANIE 16.

Pokaż, że skierowana granica jest wyznaczona (z dokładnością do izomorfizmu) przez następującą własność. Niech N będzie A-modułem i dla każdego $i \in I$ niech $\alpha_i : M_i \to N$ będzie homomorfizmem A-modułów takim, że $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ kiedy $i \leq j$. Wtedy istnieje jedyny homomorfizm $\alpha : M \to N$ taki, że $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ dla wszystkich $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
M_i \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\mu_{ij}"'] & & N \\
& M_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

To, że taka istnieje to widać z diagramu. Teraz co, gdyby były dwie takie strzałki? α' i α? Wtedy

$$\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$$

$$\alpha_i = \alpha' \circ \mu_i$$

a z drugiej strony

$$\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij} = (\alpha \circ \mu_j) \circ \mu_{ij}$$

$$\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij} = (\alpha' \circ \mu_j) \circ \mu_{ij}$$

Zadanie 17. Niech $(M_i)_{i \in I}$ będzie rodziną podmodułów A-modułu takich, że dla każdej pary indeksów $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ takie, że $M_i + M_j \subseteq M_k$. Zdefiniujmy $i \leq j$ przez $M_i \subseteq M_j$ i niech $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ będzie włożeniem M_i w M_j. Pokaż, że

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i.$$

W szczególności, dowolny A-moduł jest granicą skierowaną swoich skończenie generowanych podmodułów.