Algebra Przemienna

why am I doing this

koteczek

∼

Contents

Pomoce dydaktyczne:

playlista z losowymi wykladami

1. Wstęp

1.1. Gradacje, filtracje

Są pierścienie i ideały, St_K to struktura pierścienia, dalej na środku mamy przykład pierścienia.

Są pierścienie, które są zgradowane i są pierścienie, które są zfiltrowane. Czemu nas to interesuje? bo mamy ciąg liczb. Stanley jest zgradowany.

Jak jest zgradowany, to ma ciąg wymiarów. Jakie są wymiary stopni gradacji?

Liczymy $\sum_{i=0}^{\infty} \dim R_i \cdot t^i$ dla punktu i dwóch punktów. Jeżeli K to $\frac{1}{1-t}$, dla połączonych dwóch punktów to $\left(\frac{1}{1-t}\right)^2$, a dla dwóch niepołączonych punktów $\frac{2}{1-t} - 1$.

Topologia <3

Pierwszy rodzaj pierścieni pojawiających się w topologii to twory oznaczane

$$H^{\cdot}(X, R),$$

gdzie R to pierścień, a X to przestrzeń topologiczna. To jest chwilowo blackbox i my potem to wytłumaczymy. To coś jest zgradowane.

Taki pierścień to na przykład $R[X]/x^2 = 0$.To jest pierścień wielomianów jednej zmiennej. Teraz dla dwóch zmiennych $R[X, Y] : /X^2 = 0 = y^2, xy = -yx$. Pierwsze odpowiada okręgowi $[S^1]$, a drugie odpowiada torusowi $[T^2]$. Czyli torusowi przypisujemy taki pierścień, o to mniej więcej tutaj chodzi.

Te obiekty, o których algebra przemienna chce mówić to są zgradowane przemienne obiekty. Czyli $R = \otimes R_i$, a potem przemienność ma być taka, że $r_i r_j = (-1)^{\alpha ij} r_j r_i$. Możemy na przykład mieć $\alpha = 1$.

Pierścienie grupowe: k[G], gdzie k jest być może ciałem, a G jest grupą. I teraz jeżeli G jest nieprzemienne, to to jest bardzo nieprzemienne. Teoria reprezentacji zajmuje się badaniem takich pysi. W topologii jak mamy przestrzeń X, to nad nią wisi $\overline{X}$ razem z działaniem grupy G takie, że $\overline{X}/G = X$ i to się nazywa pokryciem uniwersalnym. Iloraz jest X i to działa nakrywająco, to znaczy każda orbita G to jest zawsze otoczenie punktu który wybraliśmy. Zawsze możemy rozłożyć to jakoś trudne słowo, triangulacja. To co działa początkowo na $\overline{X}$, to działą teraz na traingulacji XDDD. $C_k(\overline{X})$ to formalne kombinacje liniowe o współczynnikach w k[G] k-sympleksów. Operatory brzegów. Mam wrażenie, że to akurat jest jakaś losowa baja o trójkącikach.

2. Pierścienie i ideały

Szybkie powtórzenie notacji i podstawowych definicji, z małym dodatkiem ponad algebrę 1r.

2.1. Pierścienie i homomorfizmy pierścieni

Pierścień A to zbiór z dwoma binarnymi operacjami (dodawanie i mnożenie) takimi, że

1. A jest abelową grupą względem dodawania,
2. mnożenie jest łączne i rozłączne względem dodawania,
3. dla nas dodatkowo mnożenie jest przemienne,
4. i ma element neutralny.

Czyli rozważamy tylko *pierścienie przemienne z jednością*. Warto zaznaczyć, że nie wykluczamy że $1 = 0$, ale wtedy A ma tylko jeden element i jest pierścieniem zerowym, oznaczanym przez 0.

Homomorfizm pierścieni to funkcja f z pierścienia A w pierścień B taka, że

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(xy) = f(x)f(y)$,
3. $f(1) = 1$.

2.2. Ideały, pierścienie ilorazowe

Ideał I pierścienia A to podzbiór A taki, że jest podgrupą względem dodawania i taki, że $AI \subseteq I$. Grupa ilorazowa A/I zachowuje mnożenie zdefiniowane w I, co sprawia, że jest pierścieniem, nazywanym **pierścieniem ilorazowym** [lub *residue-class ring*]. Elementami A/I są warstwy I w A, a funkcja $\phi : A \to A/I$ taka, że $\phi(x) = x + I$ jest surjiektywnym homomorfizmem.

Twierdzenie: Istnieje funkcja $1-1$ zachowująca porządek zależności pomiędzy ideałami $I \subseteq J \triangleleft A$ oraz ideałami $J' \triangleleft A/I$ zadana przez $J = \phi^{-1}(J')$.

Dowód: Jeśli $f : A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni, to jądro f jest ideałem I w A oraz obraz f jest podpierścieniem $C \subseteq B$. f indukuje izomorfizm pierścieni $A/I \cong C$.

i śmiga

W dalszej części możemy stosować oznaczenie $x \equiv y \mod I$ żeby powiedzieć, że $x - y \in I$.

2.3. Dzielniki zera, elementy nilpotentne i odwracalne

Dzielnik zera pierścienia A to element x taki, że istnieje dla niego $y \neq 0$ takie, że $xy = 0$. Pierścień, który nie posiada dzielników zera różnych od 0 jest nazywany **dziedziną całkowitą** [*integral domain*].

Element $x \in A$ jest **nilpotentny**, jeżeli istnieje $n > 0$ takie, że $x^n = 0$. Element nilpotenty jest zawsze dzielnikiem zera, ale odwrotna zależność nie zawsze zachodzi.

Element odwracalny $x \in A$ to element "dzielący zero", czyli istnieje unikalne $y \in A$ takie, że $xy = 1$. Zwykle oznaczamy $y = x^{-1}$. Wszystkie elementy odwracalne pierścienia A tworzą **grupę multiplikatywną** [*multiplicative group*], która jest abelową.

Wielokrotności ax elementu $x \in A$ tworzą **ideał główny** [*principal ideal*] pierścienia A, co oznaczamy przez (x). Jeżeli x jest odwracalny, to $(x) = A = (1)$. Ideał generowany przez 0 jest zwykle oznaczany $(0) = 0$.

Ciało to pierścień A w którym $1 \neq 0$ i każdy niezerowy dzielnik zera jest odwracalny. Każde ciało jest domeną całkowitą.

Twierdzenie: Niech A będzie pierścieniem, wtedy poniższe są równoważne:

I A jest ciałem,

II jedyne ideały w A są 0 lub (1),

III każdy homomorfizm z A w niezerowy pierścień B jest iniekcyjną.

Dowód:

I $\implies$ II: Niech $I \neq 0$ będzie ideałem w A. Wtedy I zawiera niezerowy element x, który jest odwracalny. W takim razie $(x) \subseteq I$, a ponieważ $(x) = (1)$, to $I = (1)$.

II $\implies$ III: Niech $\phi : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Wtedy $\ker(\phi)$ jest ideałem różnym od (1), czyli $\ker(\phi)$ musi byc zerem, a więc jest funkcją $1-1$.

III $\implies$ I: Niech x będzie elementem A, który nie jest odwracalny. WTedy $(x) \neq (1)$, czyli $B = A/(x)$ nie jest pierścieniem zerowym. Niech $\phi : A \to B$ będzie naturalnym homomorfizmem A w B z jądrem (x). Przez hipotezę ϕ jest $1-1$, czyli $(x) = 0$, więc $x = 0$.

i śmiga

2.4. Ideały główne i maksymalne

Ideał $I \lhd A$ jest **ideałem pierwszym**, jeżeli $I \neq (1)$ oraz $xy \in I \implies x \in I$ albo $y \in I$. Ideał $I \lhd A$ jest z kolei **ideałem maksymalnym**, jeżeli $I \neq (1)$ i nie istnieje ideał J taki, że $I \subsetneq J \subsetneq (1)$. Równoważnie:

- $\hookrightarrow$ I jest ideałem pierwszym $\iff$ A/I jest domeną całkowitą,
- $\hookrightarrow$ J jest ideałem maksymalnym $\iff$ A/J jest ciałem.

Stąd też, ideał maksymalny jest zawsze pierwszy, ale nie każdy ideał pierwszy jest ideałem maksymalnym.

Jeżeli $f : A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni i I jest ideałem pierwszym w B, wtedy $f^{-1}(I)$ jest ideałem pierwszym w A, ale jeżeli J jest ideałem maksymalnym to $f^{-1}(J)$ niekoniecznie musi byc ideałem maksymalnym.

Twierdzenie: Każdy pierścień $A \neq 0$ ma co najmniej jeden ideał maksymalny.

Dowód: Standardowe zastosowanie lematu Zorna[1]. Niech Σ będzie zbiorem wszystkich ideałów różnych od (1). Uporządkujmy Σ przez inkluzję. Σ jest zbiorem niepustym, bo $0 \in \Sigma$. Musimy pokazać, że każdy łańcuch w Σ jest ograniczony od góry. Niech $\{I_n\}$ będzie ciągiem ideałów z Σ, wtedy $I = \bigcup I_n$ też jest ideałem i nie zawiera 1, bo nic w ciągu 1 nie zawierało. Wskazaliśmy więc górne ograniczenie dowolnego łańcucha z Σ, więc z lematu Zorna Σ ma element maksymalny.

i śmiga

Jeśli $I \neq (1)$ jest ideałem w A, to istnieje ideał maksymalny w A zawierający I. Trywialne.

Każdy nieodwracalny element A jest zawarty w pewnym maksymalnym ideale. Też trywialne.

Zauważmy, że jeśli pierścień jest noetherowski, to nie musimy używać Zorna w dowodzie wyżej. Dalej, istnieją pierścienie mające dokładnie jeden pierścień maksymalny, na przykład ciała. Pierścień zawierający dokładnie jeden pierścień maksymalny I jest nazywany **pierścieniem lokalnym** [*local ring*], a ciało $k = A/I$ jest nazywane residue field pierścienia A.

Twierdzonko:

I. Jeżeli A jest pierścieniem, a $I \neq (1)$ jego ideałem takim, że dla każdego $x \in A \setminus I$ x jest elementem odwracalnym, to A jest pierścieniem lokalnym.

II. JEżeli A jest pierścieniem i I jego ideałem maksymalnym takim, że każdy element $1 + I$ (czyli $1 + x, x \in I$) jest odwracalny w A, to A jest pierścieniem lokalnym.

Dowód:

I. Każdy ideał składa się z elementów nieodwracalnych, więc jest zawarty w I. Czyli I jest jedynym pierścieniem maksymalnym A.

II. Niech $x \in A \setminus I$. Skoro I jest maksymalny, to ideał generowany przez x i I jest równy (1), więc istnieje $y \in A$ i $t \in I$ takie, że $xy + t = 1$. Stąd, $xy = 1 - t$ należy do $1 + I$ i jest odwracalny. Teraz używamy punktu I i śmiga.

i śmiga

[1] Niech S będzie niepustym, częściowo uporządkowanym zbiorem, wtedy jeśli każdy jego łańcuch T ma górną granicę w S, to S ma co najmniej jeden element maksymalny.

Pierścień **półlokalny** to pierścień zawierający skończoną liczbę ideałów maksymalnych.

Dziedzina ideałów głównych [*Principal ideal domain*, *PID*] to dziedzina całkowita w której każdy ideał jest ideałem głównym.

2.5. Nilradykał i radykał Jacobsona

Zbiór $\mathfrak{R}$ zawierający wszystkie nilpotentne elementy pierścienia A jest nazywany jego **nilradykałem** i jest ideałem. Później zostanie podana równoważna definicja nilradykału, ale najpierw twierdzonko.

Twierdzenie: Nilradykał $\mathfrak{R}$ jest ideałem i $A/\mathfrak{R}$ nie posiada elementów nilpotentych różnych od 0.

Dowód: Jeśli $x \in \mathfrak{R}$, to $ax \in \mathfrak{R}$ dla dowolnego $a \in A$. Niech $x, y \in \mathfrak{R}$ takie, że $x^m = 0 = y^n$. Wtedy również $(x+y)^{n+m-1}$ jest sumą wielokrotności $x^r y^s$ takich, że $r + s = m + n - 1$. Wiemy, że $r < m$ i $s < n$, stąd też każdy produkt z nich znika i mamy,że $(x+y)^{n+m-1} = 0$. Czyli $x + y \in \mathfrak{R}$, więc $\mathfrak{R}$ w istocie jest ideałem.

Niech $\overline{x} \in A/\mathfrak{R}$ będzie reprezentowane przez $x \in A$. Wtedy $\overline{x}^n$ jest reprezentowane przez x^n, więc jeśli $\overline{x}^n = 0$, to również $x^n = 0$ i $x \in \mathfrak{R}$, a więc $\overline{x} = 0$.

i śmiga

Druga definicja nilradykału to przekrój wszystkich pierwszych ideałów pierścienia A.

Dowód: Niech $\mathfrak{R}'$ oznacza przekrój wszystkich pierwszych ideałów pierścienia A. Wtedy jeśli $f \in A$ jest nilpotentne i I jest ideałem pierwszym, to $f^n = 0 \in I$, stąd też $f \in I$, bo I jest ideałem pierwszym. Stąd też $f \in \mathfrak{R}'$.

Z drugiej strony, co jeśli f nie jest nilpotentny? Niech Σ będzie zbiorem wszystkich ideałów z własnością $n > 0 \implies f^n \notin I$. Wtedy Σ nie jest pusty, ponieważ $0 \in \Sigma$. Znowu możemy śmignąć Zornem przy porządkowaniu przez inkluzję i Σ ma pewien element maksymalny, nazwijmy go J. Pokażemy, że J jest ideałem pierwszym. Niech $x, y \notin J$. Wtedy ideały $J + (x)$ i $J + (y)$ zawierają właściwie J i stąd też nie należą do Σ. Stąd też $f^m \in J + (x)$ oraz $f^n \in J + (y)$ dla pewnych m, n. W takim razie $f^{m+n} \in J + (xy)$ i ideał $J + (xy)$ nie jest w Σ, czyli $xy \notin J$. W takim razie mamy ideał pierwszy J taki, że $f \notin J$ i $f \notin \mathfrak{R}'$.

i śmiga

Radykał Jacobsona $\mathfrak{R}$ to przekrój wszystkich maksymalnych ideałów pierścienia A. Spełnia on:

$$x \in \mathfrak{R} \iff 1 - xy \text{ jest odwracalne dla wszystkich} y$$

Dowód:

$\implies$ Załóżmy, że $1 - xy$ nie jest odwracalne. Wtedy jest zawarte w pewnym ideale maksymalnym I. Ale skoro $x \in \mathfrak{R} \subseteq I$, to $xy \in I$ i $1 \in I$, co jest sprzecznością.

$\impliedby$ Załóżmy, że $x \notin I$ dla pewnego ideału maksymalnego I. Wtedy I i x generują ideał (1), więc dla pewnego $u \in I$ oraz $y \in A$ mamy $u + xy = 1$. Stąd też $1 - xy \in I$, a więc nie jest elementem odwracalnym i mamy sprzeczność.

i śmiga

2.6. Operacje na ideałach

Sumę dwóch ideałów $I, J \triangleleft A$ definiujemy jako zbiór wszystkich sum $x + y$, gdzie $x \in I$ oraz $y \in J$. Jest to najmniejszy ideał zawierający I oraz J. W ogólności, jeśli mamy jakąś rodzinę ideałów I_α, to $\sum I_\alpha$ jest definiowane jako zbiór elementów $\sum x_\alpha$, gdzie $x_\alpha \in I_\alpha$. Znowu, jest to najmniejszy ideał zawierający wszystkie ideały I_α.

Przekrój ideałów jest nadal ideałem, to wiemy, ale nie wiemy, że tworzą one pełną sałatę względem zawierania.

Produkt dwóch ideałów I, J to ideał IJ generowany przez wszystkie xy dla $x \in I$ oraz $y \in J$. Możemy to uogólnić na zbiór wszystkich $\sum x_\alpha y_\alpha$ dla $x_\alpha \in I$ i $y_\alpha \in J$. Analogicznie możemy zapisać produkt dowolnej, skończonej rodziny ideałów. W szczególności, potęgi I^n ideału I to dobrze zdefiniowane ideały.

Wszystkie powyżej zdefiniowane operacje sa przemienne i łączne. Co więcej, działa rozłączność mnożenia względem dodawania (czy tam na odwrót). Dodatkowo mamy prawo modułu(?) [*modular law*], czyli jeśli $J \subseteq I$ albo $L \subseteq I$, to

$$I \cap (J + L) = I \cap J + I \cap L.$$

Z ciekawych rzeczy, w $\mathbb{Z}$ $\cap$ i + są rozdzielne względem siebie oraz $(I+J)(I \cap J) = IJ$, ale nie jest to regułą ogólną, zwykle tylko $(I+J)(I \cap J) \subseteq IJ$.

Dwa ideały I oraz J są **względnie pierwsze** lub względnie maksymalne [*coprime or comaximal*], jeżeli $I + J = (1)$. W takim przypadku mamy $I \cap J = IJ$. Jasno widać, że I i J są względnie pierwsze $\iff$ istnieją $x \in I$ oraz $y \in J$ takie, że $x + y = 1$.

Niech $A_1, \dots, A_n$ będą pierścieniami. Wtedy ich iloczyn prosty *direct product*

$$A = \prod A_i$$

jest zbiorem wszystkich ciągów $x = (x_1, \dots, x_n)$ dla $x_i \in A_i$ i dodawaniem oraz mnożeniem po współrzędnych.

Niech A będzie pierścieniem, a $I_1, \dots, I_n$ jego ideałami. Możemy zdefiniować homomorfizm

$$\phi : A \to \prod (A/I_i)$$

$$\phi(x) = (x + I_1, \dots, x + I_n).$$

Twierdzenie:

I. Jeżeli I_i, I_j są względnie pierwsze, wtedy $\prod I_i = \bigcap I_i$

II. ϕ jak wyżej jest "na" $\iff$ I_i, I_j są względnie pierwsze

III. ϕ jest 1-1 $\iff$ $\bigcap I_i = (0)$

Dowód:

I. Indukcją po n. Przypadek dla $n = 2$ jest już rozpykany. Załóżmy, że $n > 2$. Niech $J = \prod_{i=1}^{n-1} I_i = \bigcap I_i$.

STRONA 7 ŚRODEK DOWODU