

ZADANIE 1.

Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę, gdy $n \rightarrow \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego

(a) $y' = -y$, $y(0) = 1$

Chcemy wyprowadzić wzór na n-ty wyraz ciągu

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Czyli mamy, że

$$y_1 = y_0 + \int_0^t -1 ds = 1 - t$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^t (s - 1) ds = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_n(y) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^i}{i!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t}$$

(b) $y' = 2yt$, $y(0) = 1$

$$y_1 = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$y_2 = 1 + 2 \int_0^t s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$y_3 = 1 + 2 \int_0^t s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2}) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}$$

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{t^{2i}}{i!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{2t}$$

ZADANIE 2.

Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego $x' = x^2$, $x_0 = 1$ na odcinku $[0, 2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$. Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.

Zacznijmy od rozwiązania tego zagadnienia:

$$x' = x^2$$

$$\frac{x'}{x^2} = 1$$

$$\int_0^t \frac{x'}{x^2} dx = \int_0^t 1 ds$$

$$-\frac{1}{x} + 1 = t$$

$$1 - t = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{1-t} = x$$

Wiem czego się spodziewać, chociaż nie jest to może najbardziej ciągłym byczkiem w $t = 1$. Spróbujmy popatrzeć na Picarda.

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 - \int_0^t 1^2 ds = 1 + t$$

$$x_2 = 1 + \int_0^t (1+s)^2 ds = 1 + \frac{(1+t)^3}{3} = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$$

$$x_3 \stackrel{\text{wolfram}\alpha}{=} 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9} + \frac{t^7}{63}$$

Co teraz zauważamy? Że to początek, czyli tam gdzie współczynniki są równe 1, będzie się związało do $\sum t^i$, czyli $\frac{1}{1-t}$, ale to tylko na $t \in [0, 1)$. Kiedy $n \rightarrow \infty$ to ten ogon, który wydaje się być aż do $2^n - 1$ też będzie dla małego t maluczki, bo t^{2^n-1} dla małych t i dużego n jest pomijanie małe.

Czyli ogon jest $O(t^{2^n-1})$, na ćwiczeniach powiedzieliśmy, że to jest nawet $O(t^{\frac{2^n-1}{n}}) \subseteq O(\frac{1}{n})$ i ogon zbiega do 0, a całość do $\sum t^i$, co wynosi $\frac{1}{1-t}$.

ZADANIE 3.

Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na danym przedziale:

$$(a) y' = y^2 + \cos t^2, y_0 = 0, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

Super, tutaj nie muszę nic liczyć.

Rozważamy

$$R = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$$

i wiemy, że $a = \frac{1}{2}$.

1. f ciągłe wokół $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Widać, bo suma ciągłych funkcji.
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ciągłe.
3. $M = b^2 + 1$, $L = 2b$, czyli $h < \min(\frac{1}{2}, \frac{b}{b^2+1})$. Jeżeli $b = 1$, to wtedy $h < \frac{1}{2}$, a b możemy wybierać dowolnie, więc możemy wybierać tak, żeby nam pasowało.

Za pomocą stałej a mówimy dokąd chcemy przedłużać. Potem dopiero chcemy dobierać b żeby sprawdzać, czy da się do tego co chcemy przedłużać. Czy coś takiego, wyłączyłam się.

$$(b) y' = 1 + y + y^2 \cos t, y(0) = 0, 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

1. $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe.
2. $M = \max |f(y, t)| = 1 + b + b^2$
3. $\min(\frac{1}{3}, \frac{b}{1+b+b^2})$ i $b = 1$.

ZADANIE 4.

Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Najpierw odpowiem na to, które założenie twierdzenia Picarda nie jest spełnione. Będziemy rozważać prostokąt z $0 \leq t \leq a$ i wymagać, żeby pochodna $\frac{\partial}{\partial y}f(t, y)$ była ciągła. Ale no jak wygląda pochodna?

$$\frac{\partial}{\partial y} t\sqrt{1-y^2} \stackrel{\text{wolfram}\alpha}{=} \frac{ty}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}$$

i to jest bardzo nieciągłe w $t = 0$.

W takim razie szukanie rozwiązania to po prostu liczenie całek:

$$y' = t\sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} &= t \\ \int_0^t \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} ds &= \int_0^t s ds \\ \sin^{-1}(y) - \sin^{-1}(1) &= \frac{1}{2}t^2 \\ \sin^{-1}(y) &= \frac{t^2 + \pi}{2} \\ y &= \sin\left(\frac{t^2 + \pi}{2}\right)\end{aligned}$$

ZADANIE 5.

Niech $y(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$y(t) \leq L \int_{t_0}^t y(s) ds$$

na odcinku $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Udowodnij, że $y(t) = 0$ dla $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ (łatwiejsza wersja lematu Gronwalla).
Wskazówka: Pokaż indukcyjnie, że $y(t) \leq c \frac{L^n}{n!} (t - t_0)^n$

Zrobię dokładnie to, co jest we wskazówce. Niech $c = \max_{t \in [t_0, t_0 + \alpha]} y(t)$. Dla $n = 1$ mam treść zadania i

twierdzenie o wartości średniej. Czyli zakładam, że działa dla n -tego kroku, weźmy krok numer $n + 1$ i popatrzmy co się dzieje

$$\begin{aligned}y(t) &\leq \int_0^t y(s) ds \leq L \int_0^t c \frac{L^n}{n!} (s - t_0)^n ds = \\ &= c \frac{L^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds = c \frac{L^{n+1}}{n!} \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n + 1} = \\ &= c \frac{L^{n+1}}{(n + 1)!} (t - t_0)^{n+1}\end{aligned}$$

Czyli mam, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}y(t) &\leq L^n \frac{c}{n!} (t - t_0)^n \\ \frac{y(t)}{L^n} &\leq \frac{c(t - t_0)^n}{n!}\end{aligned}$$

Ponieważ $L \neq 0$ (wpp to mamy już dość prosto z treści), a

$$\frac{c(t-t_0)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

to $y(t)$ jest ograniczone od góry przez ciąg dążący do 0, więc koniec dowodu.

ZADANIE 6.

Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1+y)$, $y(0) = -1$.

Założmy, że tych rozwiązań jest więcej niż jedno, czyli mamy jakieś $\bar{y} \neq y$. Rozważmy wartość bezwzględną ich różnicy

$$w = |y - \bar{y}|.$$

Chcemy skorzystać z lematu Gronwalla, czyli potrzebujemy

$$w \leq a + b \int_{t_0}^t w ds$$

dla $a = 1$ i $b \geq 1$.

$$\begin{aligned} w = |y - \bar{y}| &= \left| y_0 + \int s(1+y)ds - y_0 - \int s(1+\bar{y})ds \right| = \\ &= \left| \int s(1-1)ds - \int s(1+\bar{y})ds \right| = \left| \int s(1+\bar{y})ds \right| \leq \\ &\leq \int |s(\bar{y} - y)| ds = \int s w ds \end{aligned}$$

Jeśli ograniczę się do bliskiej okolicy 0, to $\int s w ds \leq \int w ds$, czyli mam

$$w \leq \int s w ds \leq \int w ds$$

a więc na odcinku $[0, 1]$ $w \equiv 0$ i $y = -1$ jest jedynym rozwiązaniem. Dla $t > 1$ też to śmiga, bo wtedy

$$w \leq \int_{t_0}^t s w ds \leq \int_{t_0}^t t w ds = t \int w ds,$$

bo $s \leq t$, natomiast $t > 1$.

ZADANIE 7.

Zbadaj istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $y' = f(y, t)$ i $y(0) = 0$, gdzie

$$f(y, t) = \begin{cases} -1 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$y' = f(y, t), \quad y(0) = 0$$

$$f(y, t) = \begin{cases} -1 & t \leq 0, y \in \mathbb{R} \\ 1 & t > 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

to nie jest ciągłe, więc nie będzie rozwiązania mocnego (czyli ciągłego). Ale słabe rozwiązanie już istnieje, bo spełnia odcatkowane równanie liniowe czy coś takiego. Są zwykle całe klasy rozwiązań i w zależności od tego, na co chcemy patrzeć to to znajdziemy. Tutaj słabym rozwiązaniem jest

$$y(t) = |t|$$

ZADANIE 8.

Udowodnij, że równanie $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in C^1$, nie może mieć rozwiązań okresowych różnych od stałej.

Co by znaczyło, że y' ma rozwiązanie okresowe różne od stałej? Po pierwsze, $0 \neq y'(t_0) = f(y_0)$ i co więcej, jeśli y jest rozwiązaniem i y jest okresowe, to dla T - okresu y musi zajść

$$\int_0^T y' ds = 0,$$

bo ona rośnie o tyle samo co maleje, więc pochodna jest symetryczna względem OX . Czyli również pochodna jest okresowa.

$y(t + T) = y(t)$. Dla każdego $t \in [0, T]$ z twierdzenia o wartości średniej mamy, że $(\exists c \in [0, T]) y'(c) = \frac{1}{T} |y(T) - y(0)| = 0$, co oznacza, że $f(y(c)) = 0$. Mając funkcję $y(t) \equiv y(c)$, ale mamy jedyne takie rozwiązanie, więc koniec.

ZADANIE 9.

Udowodnij, że \mathbb{R}^n z normami (a) euklidesową, (b) taksówkową, są przestrzeniami Banacha.

(a) euklidesowa

Wystarczy pokazać, że jest zupełna, czyli bierzemy ciąg Cauchy'ego $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ i pokazujemy, że on jest zbieżny.

Wiemy, że \mathbb{R} jest przestrzenią zupełną, a więc po nałożeniu normy jest to też przestrzeń Banacha. Niech więc

$$x = (\lim_k x_k^1, \dots, \lim_k x_k^n) = (x^1, \dots, x^n).$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ mogą znaleźć takie N , że dla każdego $k > N$ mam $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > |x_k^i - x^i|$. W takim razie

$$\begin{aligned} \|x_k - x\| &= \left[\sum_{i=1}^n |x_k^i - x^i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

(taksówkowa)

Jedyna zmiana tutaj jest, że metryka to po prostu sumy różnic poszczególnych współrzędnych, reszta tak samo.

ZADANIE 10.

Udowodnij, że zbiór

$$C^1([a, b]) = \{u \in C[a, b] : u' \in C[a, b]\}$$

z normą $\|u\|_{1, \infty} = \max_{x \in [a, b]} |u(x)| + \max_{x \in [a, b]} |u'(x)|$ jest przestrzenią Banacha.

Czyli mam ciąg Cauchy'ego $u_1, \dots, u_n, \dots \in C^1[a, b]$ i wiem, że $u_i, u_i' \in C[a, b]$. Niech $v \in C[a, b]$ będzie takie, że $\lim \|u_i - v\| = 0$, bo wiemy, że $C[a, b]$ jest zupełne, więc u_i mają tam jakąś granicę. Tak samo dla u_i' , niech $w \in C[a, b]$ będzie takie, że $\lim \|u_i' - w\| = 0$. No dobra, to lecimy z pokazaniem, że $v' = w$:

$$\lim u_i(x) = \lim \left(u_i(0) + \int_0^x u_i' ds \right) = v(0) + \lim \int_0^x u_i' ds$$

i teraz dlatego, że u'_i zbiega jednostajnie do w , to wsadzamy lim pod całkę

$$v(0) + \lim \int_0^t u'_i ds = v(0) + \int_0^t \lim u'_i ds = v(0) + \int_0^t w ds$$

czyli

$$v(t) = v(0) + \int_0^t w ds$$

i mamy, że $v' = w$. Super.

Bierzemy $\varepsilon > 0$ i wtedy istnieje N takie, że dla każdego $i > N$ mam $\frac{\varepsilon}{2} > \|u_i - v\|$ i $\frac{\varepsilon}{2} > \|u'_i - w\|$ w $C[a, b]$. Czyli

$$\begin{aligned} \|u_i - v\|_{1,\infty} &= \max |u_i(x) - v(x)| + \max |u'_i(x) - v'(x)| = \|u_i - v\| + \max |u'_i(x) - w(x)| = \\ &= \|u_i - v\| + \|u'_i - w\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ZADANIE 11.

Ustal, dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, operator $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ zadany wzorem

$$F(u)(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x) dy$$

jest kontrakcją.

Tylko u mnie to w sumie $[a, b] = [0, 1]$...

F jest kontrakcją, znaczy, że

$$\|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|$$

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\| &= \max \left| x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x) dy - x - \lambda \int_a^b \sin(v(y) + x) dy \right| = \\ &= |\lambda| \max \left| \int_a^b (\sin(u(y) + x) - \sin(v(y) + x)) dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \max \int_a^b |\sin(u(y) + x) - \sin(v(y) + x)| dy \\ &= |\lambda| \int_a^b \|u - v\| dy = |\lambda| (b - a) \|u - v\| \end{aligned}$$

Ostatnie przejście jest z mean value theorem:

$$\begin{aligned} \frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a - b|} &= |\cos(c)| \leq 1 \\ |\sin(a) - \sin(b)| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Czyli $\lambda \in [0, \frac{1}{b-a}]$?

ZADANIE 12

Znajdź $b > 0$ oraz domknięty podzbiór przestrzeni $C[0, b]$ na którym operator F

$$F(u)(x) = 1 + \int_0^x u^3(y) dy$$

jest kontrakcją

Krzysztof wskazuje jawnie taką przestrzeń (na co Maciek mówi zbiór pusty)

$$\begin{aligned}
\|F(u)(x) - F(v)(x)\| &= \left\| \int_0^x u^3(y) - v^3(y) dy \right\| = \max \left| \int_0^x u^3(y) - v^3(y) dy \right| = \max \left| \int_0^x (u-v)(u^2 + uv + v^2) dy \right| \leq \\
&\leq \max \int_0^x |u-v| |u^2 + uv + v^2| dy \leq \int_0^x \|u-v\| |u^2 + uv + v^2| dy = \\
&= \|u-v\| \int_0^x |u^2 + uv + v^2| dy = (\text{☹})
\end{aligned}$$

I to jest moment, w którym wybieramy przestrzeń

$$M = \{u \in C[0, b] : \|u\| \leq A\}$$

$$\begin{aligned}
(\text{☹}) &\leq \|u-v\| \int_0^x |u^2| + |uv| + |v^2| dy \leq \|u-v\| \int_0^b |u^2| + |uv| + |v^2| dy \\
&\leq \|u-v\| \int_0^b \|u^2\| + \|uv\| + \|v^2\| dy \leq \|u-v\| \int_0^b [a^2 + a^2 + a^2] dy = \\
&= \|u-v\| b \cdot 3a^2
\end{aligned}$$

czyli $3ba^2 < 1$.

ZADANIE 16.

Zbadaj ilość rozwiązań zagadnienia w zależności od wartości parametru a :

$$(a) y' = y^a, y(0) = 0$$

Rozważamy przypadki

1. $a \geq 1 \implies y'(t) = y^a(t)$ i z twierdzenia Picarda mamy jedność rozwiązań
2. $0 < a < 1 \implies$ nieskończenie wiele rozwiązań. Pochodna y^a nie jest ciągła, więc mamy tylko istnienie z Peano. Znajdźmy je

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'}{y^a} ds &= \int 1 ds \\
Ay^{1-a} - C &= t \\
y &= \begin{cases} 0 & t < C \\ (t-C)^{\frac{1}{1-a}} A & \end{cases}
\end{aligned}$$

wymagamy, żeby $y(0) = 0$

3. $a = 0$, to $y = t$ i to jest jedyne z Picarda
4. $a \leq 0$ $y'(t) = y^{-|a|}(t)$, czyli rozwiązujemy $y'y^{|a|} = 1$ i to już jest proste.