Algebra 2R, lista 9.

R oznacza pierścień przemienny z $1 \neq 0$.

1. (a) Udowodnić, że $(\mathbb{Z}_n, +_n) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_m, +_m) \cong (\mathbb{Z}_d, +_d)$ (iloczyn tensorowy $\mathbb{Z}$-modułów), gdzie $d = NWD(m, n)$.
   (b) Ogólniej, niech $I, J \triangleleft R$. Udowodnić, że $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J)$.

2. (a) Niech G będzie grupą abelową. Udowodnić, że $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$ jest podzielną grupą beztorsyjną, a więc przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$.
   (b) Jaki jest wymiar tej przestrzeni liniowej ?
   (c) Ogólniej: niech R będzie dziedziną, K ciałem ułamków R (zatem R-modułem) oraz M R-modułem. Udowodnić, że M jest R-modułem torsyjnym $\iff$ $K \otimes_R M = \{0\}$.

3. Załóżmy, że M jest R-modułem prostym. Udowodnić, że $End_R(M) \cong R/I$ dla pewnego ideału maksymalnego $I \triangleleft R$.

4. Odtąd w kolejnych zadaniach R jest dziedziną ideałów głównych. Załóżmy, że M jest R-modułem torsyjnym.
   (a)- Niech $p \in R$ będzie pierwszy. Sprawdzić, że M_p jest podmodułem M.
   (b) Niech $\{p_i, i \in I\} \subset R$ będzie zbiorem reprezentantów klas stowarzyszenia elementów pierwszych w R. Udowodnić, że
   $$M = \bigoplus_{i \in I} M_{p_i}.$$

5. (a) Załóżmy, że M jest p-prymarnym modułem cyklicznym. Udowodnić, że $M \cong R/(p^k)$ dla pewnego $k \leqslant 0$.
   (b) Załóżmy, że M jest cykliczny. Udowodnić, że M jest nierozkładalny $\iff$ M jest beztorsyjny lub p-prymarny.

6. Które skończenie generowane moduły nierozkładalne są proste ?

7. – Stosując twierdzenie Jordana udowodnić, że jeśli V jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in End_K(V)$, to $\varphi_f(f) = 0$, gdzie $\varphi_f(X)$ to wielomian charakterystyczny f (twierdzenie Cayleya-Hamiltona).

Materiał obowiązujący na egzaminie

1. Rozszerzenia ciał. Rozszerzenia o pierwiastek wielomianu nierozkładalnego. Ciało rozkładu wielomianu: istnienie, jedyność.

2. Ciało algebraicznie domknięte: definicja. Każde ciało zawiera się w ciele algebraicznie domkniętym (konstrukcja). Podciało proste: istnienie, jedyność. Ciała proste.

3. Pierwiastki z jedności, pierwiastki pierwotne, Grupa pierwiastków z jedności w ciele K: każda jej skończona podgrupa jest cykliczna. Wielomiany podziału koła¿ Funkcja Frobeniusa. Ciała skończone: własności.

4. Rozszerzenia [elementy] algebraiczne, przestępne: definicja. Stopień rozszerzenia. Warunki równoważne algebraiczności a nad K: $K[a] = K(a)$, $[K(a) : K] < \infty$. Wielomian minimalny a nad K. $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$ dla $K \subset L \subset M$.

5. Algebraiczne domknięcie ciała : definicja, istnienie, jedyność (to ostatnie bez dowodu), własności (jednorodność). Przykłady: stopień rozszerzenia $Q \subset Q(\zeta)$, gdzie ζ: pierwiastek z jedności. Istnienie rzeczywistych liczb przestępnych (ale bez liczb Liouville'a)

6. Rozszerzenia normalne: defincja, własności. Normalne domknięcie. Rozszerzenia [elementy, wielomiany] rozdzielcze. Twierdzenie Abela o elemencie pierwotnym (bez dowodu). Rozszerzenia czysto nierozdzielcze (radykalne) :definicja, własności. Stopień rozdzielczy [radykalny] rozszerzenia: definicja.

7. Norma i ślad: definicja, własności. Obliczanie w konkretnych przypadkach.

8. Grupa Galois rozszerzenia $K \subset L$. Rozszerzenia Galois: definicja, rownoważne własności. Twierdzenie Artina: $[L : L^G] = |G|$, $G = G(L/L^G)$ i $L^G \subset L$ Galois (bez dowodu). Podstawowe twierdzenie teorii Galois, zwiazek z podgrupami normalnymi. Przykłady.

9. Rozszerzenia abelowe, cykliczne, rozwiązalne. Twierdzenie Dedekinda o liniowej niezależności automorfizmów (bez dowodu). Rozszerzenia pzrez pierwiastniki: definicja, charakteryzacja (bez dowodu). Związki z rozwiązalnością równań wielomianowych. Ciało wymiernych funkcji symetrycznych: podstawowe funkcje symetryczne: generatory (z dowodem !)

10. Rozszerzenia przestępne. Operator algebraicznego domknięcia nad K :alg_K. Wymiar przestępny, wymiar pzrestępny nad K. Opis dowodlnego rozszerzenia ciał : najpierw czysto przestępne, potem algebraiczne.

11. Moduły: definicja, ppdstawowe własności. Struktura modułu wyznaczona przez homomorfizm $R \to End(G)$. R-homomorfizmy. Suma prosta, produkt modułów : konstrukcja i definicja kategoryjna (własnośći uniwersalności (∗)). Moduł ilorazowy, twierdzenia o faktoryzacji. Moduł prosty: lemat Schura.

12. Zbiory liniowo niezależne, bazy R-modułów. Rownoliczność baz (dla R przemiennych) Moduł wolny. Każdy moduł jest obrazem homomorficznym modułu wolnego. Moduł cykliczny: definicja, izomorfizm z R/I. Torsja elementu, część torsyjna modułu, elementy/moduły torsyjne/beztorsyjne. Moduły skończenie generowane. Podmoduł modułu skonćzenie generowanego nad pierścieniem noetherowskim jest skończenie generowany.

13. Iloczyn tensorowy modułów: konstrukcja, definicja kategoryjna, podstawowe własności i przykłady.

14. Moduły nad dziedzinami ideałów głównych: Rozkład modułu na sumę prostą modułu wolnego i cześci torsyjnej. Rozkład modułu torzyjnego na sumę prostą modułów p-prymarnych. Skończenie generowany mod/uł p-prymarny jest sumą prostą modułów cyklicznych (bez dowodu). Jedyność rozkładu (bez dowodu). Zastosowanie: twierdzenie Jordana o endomorfizmie przestrzeni liniowej nad ciałem algebraicznie domkniętym (idea dowodu).

15. Wszystkie zadania z list , bez gwiazdek. Miłego egzaminu.