ZADANIE 1.

Wyprowadź wzór na n-tą *interację Picarda* $y_n(x)$ *i oblicz jej granicę, gdy* $n \to \infty$ *dla podanych zagadnień Cauchy'ego*

(a) $y' = -y,\ y(0) = 1$

Chcemy wyprowadzić wzór na n-ty wyraz ciągu

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Czyli mamy, że

$$y_1 = y_0 + \int_0^t -1ds = 1 - t$$
$$y_2 = y_0 + \int_0^t (s-1)ds = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$
$$y_n(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^i}{i!} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-t}$$

(b) $y' = 2yt,\ y(0) = 1$

$$y_1 = 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2$$
$$y_2 = 1 + 2\int_0^t s(1+s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$
$$y_3 = 1 + 2\int_0^t s(1+s^2+\frac{s^4}{2})ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}$$
$$y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^{2i}}{i!} \xrightarrow{n\to\infty} e^{2t}$$

ZADANIE 2.

Wyprowadź wzór na n-tą *iterację Picarda dla zagadnienia początkowego* $x' = x^2$, $x_0 = 1$ *na odcinku* $[0, 2]$, *jeżeli* $x_0(t) \equiv 1$. *Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.*

Zacznijmy od rozwiązania tego rozwiązania:

$$x' = x^2$$
$$\frac{x'}{x^2} = 1$$
$$\int_0^t \frac{x'}{x^2}dx = \int_0^t 1ds$$
$$-\frac{1}{x} + 1 = t$$
$$1 - t = \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{1-t} = x$$

Wiem czego się spodziewać, chociaż nie jest to może najbardziej ciągłym byczkiem w $t = 1$. Spróbujmy popatrzeć na Picarda.

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 1 - \int_0^t 1^2 ds = 1 + t$$
$$x_2 = 1 + \int_0^t (1+s)^2 ds = 1 + \frac{(1+t)^3}{3} = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$$
$$x_3 \overset{\text{wolfram}\alpha}{=} 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9} + \frac{t^7}{63}$$

Co teraz zauważamy? Że to początek, czyli tam gdzie współczynniki są równe 1, będzie się zwijał do $\sum t^i$, czyli $\frac{1}{1-t}$, ale to tylko na $t \in [0, 1)$. Kiedy $n \to \infty$ to ten ogon, który wydaje się być aż do $2^n - 1$ też będzie dla małego t maluczki, bo t^{2^n-1} dla małych t i dużego n jest pomijanie małe.

Czyli ogon jest $O(t^{2^n-1})$, na ćwiczeniach powiedzieliśmy, że to jest nawet $O(\frac{t^{2^n-1}}{n}) \subseteq O(\frac{1}{n})$ i ogon zbiega do 0, a całość do $\sum t^i$, co wynosi $\frac{1}{1-t}$.

ZADANIE 3.

Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'egp udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

(a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y_0 = 0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

Super, tutaj nie muszę nic liczyć.

Rozważamy
$$R = \{(t, y)\ :\ t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$$
i wiemy, że $a = \frac{1}{2}$.

1. f ciągłe wokół $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Widać, bo suma ciągłych funkcji.
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ciągłe.
3. $M = b^2 + 1$, $L = 2b$, czyli $h < \min(\frac{1}{2}, \frac{b}{b^2+1})$. Jeżeli $b = 1$, to wtedy $h < \frac{1}{2}$, a b możemy wybierać dowolnie, więc możemy wybierać tak, żeby nam pasowało.

Za pomocą stałej a mówimy dokąd chcemy przedłużać. Potem dopiero chcemy dobierać b żeby sprawdzać, czy da się do tego co chcemy przedłużać. Czy coś takiego, wyłączyłam się.

(b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t, y(0) = 0, 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

1. f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe.
2. $M = \max |f(y, t)| = 1 + b + b^2$
3. $\min(\frac{1}{3}, \frac{b}{1+b+b^2})$ i $b = 1$.