Wykład 15.

V: przestrzeń liniowa nad ciałem K,
$\dim V = n < \infty$

$\psi \in \mathrm{End}_K(V)$.

Dla $\underset{\overset{\shortparallel}{a_0 + a_1 X + \ldots + a_l X^l}}{f} \in K[X]$ $\quad f(\psi) = a_0 \cdot \underset{\psi^0}{\overset{}{id_V}} + a_1 \cdot \underset{\psi^1}{\psi} + \ldots + a_l \psi^l \in \mathrm{End}_K(V)$

$K[X] \ni f \longmapsto f(\psi) \in \mathrm{End}_K(V)$ homomorfizm pierścieni

wsc: V: $K[X]$-moduł
$f \cdot \underset{V}{v} = f(\psi)(v)$.

Uwaga 15.1.

V: skończenie generowany i torsyjny, jako $K[X]$-moduł.

<u>D-d</u> $\underset{\text{baza } K\text{-liniowa}}{\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V} \Rightarrow$ generują V jako $K[X]$-moduł.

(bo: dla $k \in K \subseteq K[X]$
$k \cdot v = kv$ w sensie przestrzeni liniowej V)

torsyjności: $v \in V$

$$\underbrace{v}_{1\cdot v},\ \underbrace{\psi(v)}_{X\cdot v},\ \underbrace{\psi^2(v)}_{X^2\cdot v},\ldots,\underbrace{\psi^n(v)}_{X^n\cdot v}$$ układ liniowo zależny w V (bo $\dim V = n$)

$$a_0 v + a_1\psi(v) + \ldots + a_n\psi^n(v) = 0 \Rightarrow f\cdot v = 0,$$

$\underbrace{a_0,\ldots,a_n \in K}_{\text{nie wszystkie } = 0}$ gdzie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$.

□

$K[X]$: PID! $\Rightarrow V = \bigoplus_{p_i} V_{p_i}$, $p_i \in K[X]$ elementy pierwsze

tzn: $p_i = f_i(X)$, nierozkładalny.

$$V_{p_i} \cong K[X]/(f_i^{k_1}) \oplus \ldots \oplus K[X]/(f_i^{k_l}),\quad 1 \le k_1 \le \ldots \le k_l.$$

utożsamiamy.

Założenie (*):

K: algebraicznie domknięte.

Wtedy $K[X] \ni f_i(X)$: nierozkładalny $\Leftrightarrow \deg f_i = 1$

$\Leftrightarrow f_i = (X - a_i)$

(z dokładnością do stowarzyszenia).

Struktura $K[X]/(f_i^{k_s}) = K[X]/(X-a_i)^{k_s}$:

Niech $j: K[X] \longrightarrow K[X]/(X-a_i)^{k_s}$ ← $K[X]$-moduł
ilorazowe

⇓

przestrzeń liniowa nad $K \subseteq K[X]$

- $\underbrace{j(1), j(X-a_i), \ldots, j(X-a_i)^{k_s-1}}_{\text{baza } \mathcal{B}_{i,s}}$: baza $K[X]/(X-a_i)^{k_s}$ jako przestrzeni liniowej nad K.

ćw. ↑

wskazówka: jako p. lin. /K

$K[X]/(X-a_i)^{k_s} \cong K[X]/X^s$

$W(X) \longmapsto W(X+a_i)$

dla $0 \leq u < k_s$

$$\underbrace{X \cdot (X-a_i)^u}_{\Downarrow} = (X-a_i)^{u+1} + a_i (X-a_i)^u$$

ψ

$$\cancel{\psi(j(X-a_i)^u) = \begin{cases} j(X-a_i)^{u+1} & a_i \end{cases}}$$

$$\psi(j(X-a_i)^u) = \begin{cases} a_i\, j(X-a_i)^u, & \text{gdy } u = k_s - 1 \\ a_i\, j(X-a_i)^u + j(X-a_i)^{u+1}, & \text{gdy } 0 \leq u < k_s - 1 \end{cases}$$

wsc ~~$m_{B_{i,s}}(\psi)$~~

$$m_{B_{i,s}}\left(\psi\restriction_{K[X]/(X-a_i)^{k_s}}\right) = \begin{bmatrix} a_i & & & & 0 \\ 1 & a_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & a_i & \\ 0 & & & 1 & a_i \end{bmatrix}$$ klatka Jordana.

$B = \bigcup_{i,s} B_{i,s}$: baza Jordana V dla ψ

klatki J.

$$m_B(\psi) = \begin{bmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \square & \\ 0 & & & \square \end{bmatrix}$$

Wn. 15.2. (tw. Jordana) K: alg. domknięte, V: p. liniowa $/K$

$\dim V < \infty$, $\psi : V \longrightarrow V$ liniowe $\Rightarrow$

$\exists\, B \subseteq V$ baza Jordana dla ψ: $m_B(\psi)$ ma postać Jordana.

Rozmiary klatek J. w $m_B(\psi)$ są wyznaczone jednoznacznie (nie zależą od wyboru B).

R : pierścień przemienny z $1 \neq 0$.

Def. 15.3 R-algebra [przemienna] =

$= R$-moduł $S = (S, +, r)_{r \in R}$ z dodatkowym mnożeniem $\cdot$ t.że $(S, +, \cdot)$: pierścień [przemienny]

i $\forall r \in R\ \forall s, s' \in S\quad r(s \cdot s') = rs \cdot s' = s \cdot (rs')$.

tzn: $S = (S, +, \cdot, r)_{r \in R}$

homomorfizm R-algebr ...

Przykład

R: pierścień $\Rightarrow$ R: $\mathbb{Z}$-algebra

$R[X]$, $R[X,Y]$: R-algebry

$R \subset S$ $\Rightarrow$ S: R-algebra.
podpierścień, $1_R = 1_S$

Uwaga 15.4. (1) Jeśli S: R-algebra z jednością 1, to $\eta: R \longrightarrow S$ dana przez $\eta(r) = r \cdot 1$ jest homomorfizmem R-algebr.

(2) Gdy R: ciało, to $\eta: R \hookrightarrow S$ i R: podciało pierścienia S.

(3) Na odwrót, gdy S: pierścień z 1 i $\underset{\text{podciało}}{R \subseteq S}$, to S: R-algebra.

Alg_R: kategoria R-algebr (algebr nad R)

Załóżmy, że S: R-algebra z 1, M: R-moduł.

$S \otimes_R M$: R-moduł, ale także: S-moduł:
produkt tensorowy R-modułów

Dla $s \in S$ istnieje jedyne mnożenie:

$s: S \otimes_R M \longrightarrow S \otimes_R M$ t.że $s \cdot (s' \otimes m) = (ss') \otimes m$

dla wszystkich $s' \in S$, $m \in M$

D-d $S \xrightarrow{s \cdot} S$, $M \xrightarrow{id} M$: homomorfizmy R-modułów

$\Downarrow$

$(s\cdot) \otimes id : S \otimes M \longrightarrow S \otimes M$

też homomorfizm R-modułów.

$(S \otimes M, +, s)_{s \in S}$: S-moduł.

Przykład 1. G : $\mathbb{Z}$-moduł $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$: $\mathbb{Q}$-moduł

gpa abelowa

tzn: przestrzeń liniowa$/\mathbb{Q}$

2. V : p. liniowa$/\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$: p. liniowa$/\mathbb{C}$

kompleksyfikacja V.

S_1, S_2 : R-algebry (z 1) $\Rightarrow$ $S_1 \otimes_R S_2$ też R-algebra (z 1):

dla $s_1 \otimes s_2 \in S_1 \otimes_R S_2$:
$s_1' \otimes s_2' \in$

- $(s_1 \otimes s_2) \cdot (s_1' \otimes s_2') = (s_1 s_1' \otimes s_2 s_2')$.
- na dowolne tensory przedłużamy 2-liniowo:

$$\left(\sum_i s_1^i \otimes s_2^i\right)\left(\sum_j s_1^j \otimes s_2^j\right) = \sum_{i,j} \left(s_1^i s_1^j \otimes s_2^i s_2^j\right).$$

AlG 28/15

dla $R \triangleright I$: $\sqrt{I} = \{a \in R : \exists n > 0\ a^n \in I\}$

radykał ideału I $\quad I \subseteq \sqrt{I} \triangleleft R$
też

TW. 15.5 (Nullstellensatz Hilberta)

Niech $I \triangleleft K[\bar{X}]$ i $f \in K[\bar{X}]$ t. że

$Z_{K^{alg}}(I) \subseteq Z_{K^{alg}}(f)$. Wtedy $f \in \sqrt{I}$.

tu: dla $K \subseteq L \leftarrow$ ciało $\quad Z_L(I) = \{\bar{a} \in K^n : \forall g \in I\ g(\bar{a}) = 0\}$.
~~zero~~ $\quad |\bar{X}| = n$

<u>D-d</u> nie wprost.

Zał, że $f \notin \sqrt{I}$. Niech $J \triangleleft K[\bar{X}]$ maksymalny

wśród ideałów $I' \supseteq \sqrt{I}$ t. że $f \notin \sqrt{I'}$.

- J: pierwszy, bo:

  Zał, że $g \cdot h \in J$, ale $g, h \notin J$.

  Wtedy $f \in \sqrt{(J,g)}$ i $f \in \sqrt{(J,h)}$

  więc $\exists n, k\ (f^n \in (J,g)$ i $f^k \in (J,h))$

  $f^n = j_1 + w_1 \cdot g \qquad f^k = j_2 + w_2 \cdot h$
  $\Downarrow$

  $f^{n+k} = f^n \cdot f^k = (j_1 + w_1 \cdot g)(j_2 + w_2 h) \in (J, gh) \subseteq J$

  $\Rightarrow f \in \sqrt{J}$ ↯.

w $K[\bar{X}]/J = K[\bar{a}]$ $(\bar{a} = \bar{X}/J)$

- $f(\bar{a}) \neq 0$ (bo $f \notin J$)
- $\bar{a} \in Z(J)$
- $K[\bar{a}]$: ~~p~~ dziedzina

$K[\bar{a}] \subseteq \underbrace{K[\bar{a}]_0}_{\text{ciało ułamków}} \subseteq K[\bar{a}]_0^{alg}$: algebraiczne domknięcie

w $K[\bar{a}]_0^{alg}$: $\exists \bar{x} \in Z(J) \setminus Z(f)$

Tw. z teorii modeli:

Jeśli $L_1 \subseteq L_2$, to $L_1 \prec L_2$

ciała alg. domknięte tzn: $\forall$ zdanie φ w języku pierścieni z parametrami w L_1:

$L_2 \models \varphi \iff L_1 \models \varphi$

$K[\bar{a}]_0^{alg} \models$ "$\exists \bar{x} \in Z(J) \setminus Z(f)$"

$\Downarrow$ zdanie w języku pierścieni z parametrami z K

$K^{alg} \models$ "$\exists \bar{x} \in Z(J) \setminus Z(f)$".

($K[\bar{a}]_0^{alg} \supseteq K^{alg} \supseteq K$)

Wn. 15.6. Zał, że K : ciało alg. domknięte i że $f_i \in K[\bar{X}]$. układ równań wielomianowych $f_1(\bar{x}) = \ldots = f_k(\bar{x}) = 0$ nie ma rozwiązań w K [tzn: $Z_K(f_1, \ldots, f_k) \subseteq Z_K(1)$].

Wtedy $1 \in (f_1, \ldots, f_k)$