ZADANIE 1.

Udowodnić wzór włączeń i wyłączeń

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Indukcja po n. Jeżeli mamy tylko A_1, A_2, to

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Teraz załóżmy, że wzorek działa dla dowolnego ciągu długości n i weźmy ciąg długości $(n+1)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup (A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n))) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus ((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1})) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)) = \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((A_{n+1} \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_{n+1} \cap A_n)) = \\
&= \sum_{i \leq n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + \\
&\quad - \left(\sum_{i \leq n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{i<j \leq n} \mathbb{P}((A_{n+1} \cap A_i) \cap (A_{n+1} \cap A_j)) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \leq n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)\right) = \\
&= \sum_{i \leq n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j \leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \leq n+1} A_i\right)
\end{aligned}$$

ZADANIE 2.

(Nierówności Boole'a) *Udowodnij nierówności* [te na niebiesko]

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \leq n} A_i\right) \leq \sum_{i \leq n} \mathbb{P}(A_i)$$

Może tutaj też indukcją? Dla A_1, A_2 jest to dość oczywiste, bo

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

gdyż $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 0$.

To teraz załóżmy, że śmiga dla dowolnego ciągu n zbiorów i weźmy ciąg $(n+1)$-elementowy.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \leq n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \leq n} A_i \cup A_{n+1}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \leq n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i \leq n} A_i\right) \leq \\
&\leq \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \leq n} A_i\right) \leq \\
&\leq \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{i \leq n} \mathbb{P}(A_i) = \\
&= \sum_{i \leq n+1} \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Pierwsza nierówność tak samo jak wcześniej, a druga nierówność z założenia indukcyjnego.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\leq n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i\leq n} \mathbb{P}\left(A_i^c\right)$$

To śmiga na podstawie poprzedniej nierówności:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) \geq 1 - \sum \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

ZADANIE 3.

Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A_i) = 1$ *dla* $i \geq 1$, *to* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

Rozważmy ciąg B_n taki, że $B_n = \bigcap_{i\leq n} A_i$. Jak wygląda prawdopodobieństwo takiego osła?

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\leq n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i\leq n} \mathbb{P}\left(A_i^c\right) = 1 - \sum_{i\leq n}[1 - \mathbb{P}(A_i)] = 1 - \sum_{i\leq n} 0 = 1$$

Skoro $\mathbb{P}(B_n) \geq 1$, to musi być równe 1.

Skorzystamy teraz z twierdzenia o ciągłości, które mówi, że dla zstępującego ciągu B_n (jakim on jest, bo to widać) mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap B_n\right) = \lim \mathbb{P}(B_n) = 1$$

a ponieważ

$$\bigcap B_n = \bigcap \bigcap_{i\leq n} A_i = \bigcap A_n$$

to śmiga.

ZADANIE 4.

Rzucamy symetryczną kostką do gry do chwili otrzymania szóstki. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie podzielna przez 6?

Dziwne to zadanko. Ω to ciągi liczb $1, 2, \ldots, 5$ które na końcu mają 6. Nas interesuje ich długość. Może zróbmy tak, że rzucamy $6n$ razy kostką i zapisujemy kolejne wyniki. Zdarzenia sprzyjające to rzuty, w których 6 pojawia się po raz pierwszy na pozycji podzielnej przez 6?

To będzie ciąg rzeczy wstępujących. Dla $n = 1$ prawdopodobieństwo to po prostu

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^5}{6^6}.$$

Dka $n = 2$ jest już troszkę ciężej, ale prawdopodobieństwo to

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \frac{1}{6},$$

czyli wyrzuci 6 w 6 ruchu lub wyrzuci 6 w 12 ruchu. Uogólnić to można do

$$p_n = \sum_{i\leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} \sum_{i\leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^6}{6^6} \cdot \frac{(5/6)^{6n} - 1}{(5/6)^6 - 1} = \frac{5^5 \cdot ((5/6)^{6n} - 1)}{5^6 - 1}$$

Nie chce mi się liczyć, ale na oko to jest jakieś

$$\frac{5^5}{5^6 - 1}$$

ZADANIE 5.

Na odcinku $[0, 1]$ *umieszczono losowo punkty* L *i* M*. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:*

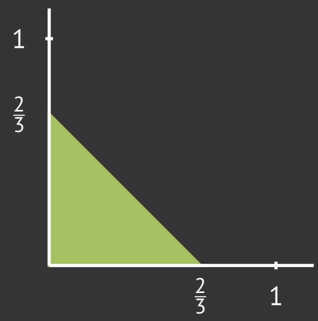
a) środek odcinka LM *należy do* $[0, \frac{1}{3}]$

Żeby ich środek był w $[0, \frac{1}{3}]$, to ich średnia arytmetyczna musi być mniejsza niż $\frac{1}{3}$, czyli

$$\frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{3}$$

$$x + y \leq \frac{2}{3}$$

No i coś takiego na płaszczyźnie to jest trójkącik

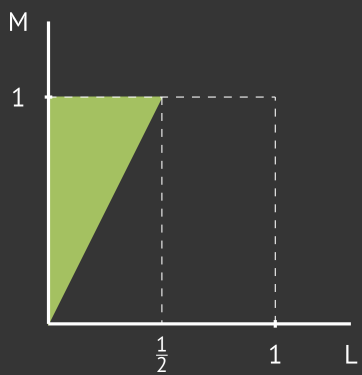


Czyli szukane prawdopodobieństwo to pole tego trójkącika, a więc $\frac{2}{9}$.

b) z L *jest bliżej do* M *niż do zera.*

Czyli $|L - M| > L$, znowu ładnie to się zaprezentuje w dwóch wymiarach. Po co oni dali zadanie o prostej, które się robi płaszczyzną?

Dla $L \geq M$ mam $|L - M| = L - M > L$, czyli $0 > M$ co tak średnio śmiga. Dla $L < M$ mam z kolei $|L - M| = M - L > L$, czyli $M > 2L$



Czyli tutaj prawdopodobieństwo to $\frac{1}{4}$.

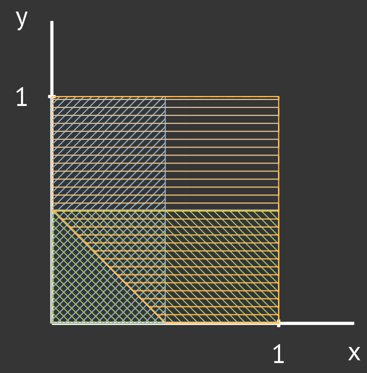
ZADANIE 6.

Z przedziału $[0, 1]$ *wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków można skonstruować trójkąt.*

Osz kurwa, to będzie duuużo liczenia. Moje odcinki mają długość $x, y, 1 - y - x$. Potrzebuję spełnić następujące warunki na raz:

1. $x + y > 1 - y - x$, czyli $2x + 2y > 1$, $y > \frac{1}{2} - x$
2. $x + 1 - x - y > y$, czyli $1 > 2y$, $\frac{1}{2} > y$
3. $y + 1 - x - y > x$, czyli $1 > 2x$, $\frac{1}{2} > x$

ROZRYSUJMY TO!



Czyli to gdzie wszystkie są spełnione to ten trójkącik w środku o polu $\frac{1}{8}$.

ZADANIE 7.

Wybrano losowy punkt (x, y) *z kwadratu* $[0, 1]^2$. *Oblicz prawdopodobieństwo, że*

a) x *jest liczbą wymierną.*

To po prostu miara $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

b) obie liczby x *i* y *są niewymierne.*

A^c to co najmniej jedna liczba jest wymierna. Czyli mam $A^c = x$ wymierny + y wymierny + oba wymierne. Oba wymierne mają prawdopodobieństwo 0, tak samo to, że x jest wymierny i że y jest wymierny też ma prawdopodobieństwo 0, czyli A^c wydaje się mieć prawdopodobieństwo 0, a więc $\mathbb{P}(A) = 1$?

c) spełniona jest nierówność $x^2 + y^2 < 1$

Czyli punkt ma wylądować w środku ćwiartki koła o promieniu 1, a więc $\mathbb{P}(A) = \frac{\pi}{4}$.

d) spełniona jest równość $x^2 + y^2 = 1$.

No to też jest miary zero? Bo ograniczam od góry przez koło o promieniu $1 + \varepsilon$ i od dołu przez $1 - \varepsilon$. Miara to ich różnica i jest dowolnie mała.