Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 10

Exercise 1. *Pokaż, że jeśli* $0 < p < q$, *to*

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Dowód taki, jak wiele dowodów na analizie funkcjonalnej.

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}|X \cdot 1|^p \overset{\star}{\leq} \left[\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \left[\mathbb{E}1^{\frac{q}{q-p}}\right]^{\frac{q-p}{q}} = \left[\mathbb{E}|X|^q\right]^{\frac{p}{q}}$$

$$\left[\mathbb{E}|X|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\mathbb{E}|X|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$\star$ wynika z nierówności Höldera dla $\frac{q}{p}$ i $\frac{q}{q-p}$. Wszystko śmiga, bo $\mathbb{E}$ to tak naprawdę całkowanie względem miary $\mathbb{P}\left[|X|^p\right]$, więc np. $\mathbb{E}1 = \int 1 \, d\mathbb{P}\left[|X|^p\right] = 1$ bo prawdopodobieństwo całości to dokładnie 1.

Exercise 2. (Reguła n sigm) *Pokaż, że jeśli* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, *to*

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}X| > n\sigma\right] \leq \frac{1}{n^2}$$

Nierówność Czebyszewa:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| > \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X - \mu|))}{f(\lambda)}.$$

Niech $\lambda = n\sigma$ i $f(x) = x^2$. Podstawiając do wzoru wyżej:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| > n\sigma\right] \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mu|^2}{n^2\sigma^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n^2\sigma^2} = \frac{1}{n^2}$$

Exercise 3. *Sprawdzić, że zdarzenie* $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}$ *należy do* F_∞.