ZADANIE 18

Z psychologicznych powodów, czasem wygodniej jest oznaczać ideał pierwszy pierścienia A literami x, y jeśli myślimy o nich jako o punkcie $X = \operatorname{Spec}(A)$. Kiedy myślimy o x jako o ideale pierwszym A, oznaczamy go przez $\mathfrak{p}_x$ (oczywiście jest to ta sama rzecz). Pokaż, że

(i) zbiór $\{x\}$ jest domknięty w $\operatorname{Spec}(A)$ $\iff$ $\mathfrak{p}_x$ jest maksymalny

$\Longleftarrow$

Jeśli $\mathfrak{p}_x$ jest ideałem maksymalnym, to $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$, gdyż żaden inny ideał pierwszy nie zawiera $\mathfrak{p}_x$. My definiowaliśmy $V(E)$ jako zbiory domknięte, więc $\{x\}$ też taki jest.

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Czyli jest przekrojem pewnej rodziny domkniętych zbiorów bazowych

$$\{x\} = \bigcap_{i\in I} V(E_i) = V\left(\bigcup_{i\in I}(E_i)\right)$$

ale jeśli taka suma zawiera się w jednym, jedynym ideale pierwszym, to jest on maksymalny.

(ii) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$

$\subseteq$

Jest raczej prostym zawieraniem: $\overline{\{x\}}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $\{x\}$, a $V(\mathfrak{p}_x)$ z pewnością to spełnia.

$\supseteq$

Po pierwsze zauważmy, że

$$V(\mathfrak{p}_x) = \bigcap_{E\subseteq\mathfrak{p}_x} V(E) = V\left(\bigcup_{E\subseteq\mathfrak{p}_x} V(E)\right),$$

bo to są wszystkie te ideały pierwsze, które zawierają jakiś podzbiór $\mathfrak{p}_x$, czyli obcinamy te mniejsze podzbiory $\mathfrak{p}_x$ w trakcie brania przekroju.

Wiemy, że $\bigcap_{E\subseteq\mathfrak{p}_x} V(E)$ jest zbiorem domkniętym. Wiemy, że $x \in \bigcap V(E)$, czyli dostajemy, że $V(\mathfrak{p}_x)$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających x, czyli jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym x, czyli domknięciem x.

(iii) $y \in \overline{\{x\}}$ $\iff$ $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$

$\Longleftarrow$

Niech $x, y \in X$ takie, że $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$. Wówczas, $x \in V(E) \implies y \in V(E)$. Ponieważ $\overline{\{x\}}$ jest przekrojem zbiorów $V(E_i)$, który zawiera x, to w szczególności każdy z tych zbiorów zawiera również y, stąd $y \in \overline{\{x\}}$.

$\Longrightarrow$

Trywialne z *(ii)*.

(iv) X jest T_0-przestrzenią (jeśli x, y są rozróżnialnymi punktami X, to albo istnieje otoczenie x które nie zawiera y, albo istnieje otocznie y, które nie zawiera x).

Weźmy dowolne punkty $x, y \in X$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ (lub $\mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$, ale WLOG pierwsza wersja)

Wtedy $x \in X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$, które jest zbiorem otwartym takim, że $y \notin X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$.

2. $\mathfrak{p}_x \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ i $\mathfrak{p}_y \not\subseteq \mathfrak{p}_x$

Wtedy $y \notin \overline{\{x\}}$ i $x \notin \overline{\{y\}}$. Czyli $y \in X \setminus \{x\}$ jest otwartym zbiorem zawierającym y ale niezawierającym x.

ZADANIE 19.

Przestrzeń topologiczna X jest nieredukowalna, jeśli $X \neq \emptyset$ i jeśli każda para niepustych otwartych podzbiorów X się przecina (równoważnie, każdy niepusty podzbiór otwarty jest gęsty w X). Pokaż, że Spec(A) *jest nieredukowalny $\iff$ nilradykał* A *jest ideałem pierwszym.*

$\implies$

Chcę mieć punkt, którego dopełnienie jest wszystkim.

$\impliedby$

Niech r będzie nilradykałem pierścienia A i niech r będzie ideałem pierwszym. Weźmy dowolne $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \triangleleft A$ i rozpatrzmy $U_1 = V(\mathfrak{a}_1)^c, U_2 = V(\mathfrak{a}_2)^c$.

ZADANIE 20

Niech X będzie przestrzenią topologiczną

(i) Jeśli Y jest nieredukowalną podprzestrzenią X, wtedy domknięcie $\overline{Y}$ w X jest nieredukowalne.