ZADANIE 1.

Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

(a) $x(t) = \tan t$, $x' = 1 + x^2$ //YUP

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = x'$$

(b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$ //YUP

$$x'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$
$$tx' + x = \frac{t\cos t - \sin t}{t} + \frac{\sin t}{t} = \frac{t\cos t}{t} = \cos t$$

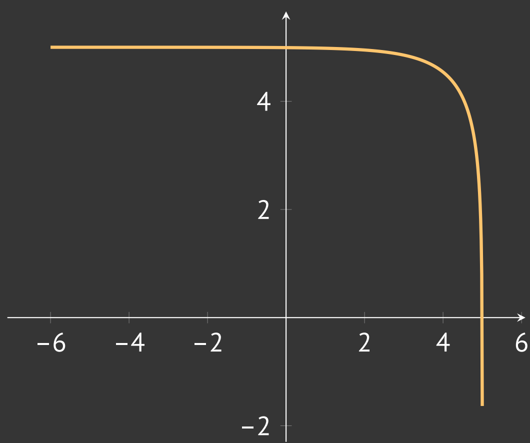
ZADANIE 2.

Znaleźć rozwiązania ogólne (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:

(a) $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$
$$e^{-y}dy = e^x dx$$
$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$
$$-e^{-y} = e^x + c$$
$$e^{-y} = c - e^x$$
$$\ln(e^{-y}) = \ln(c - e^x)$$
$$y = -\ln(c - e^x)$$

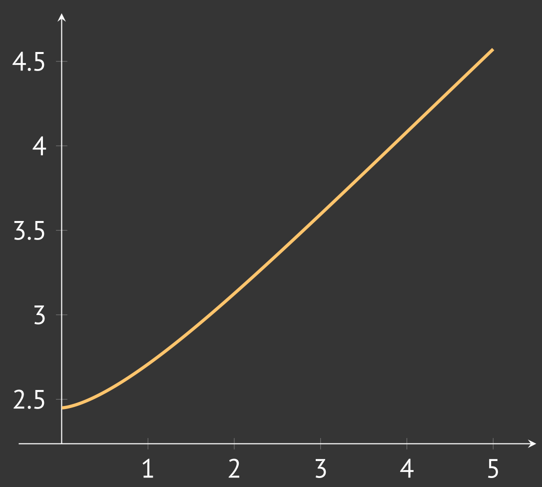
Niech $c = e^m$ dla pewnego m, bo wiadomo, że aby ta funkcja była gdziekolwiek określona, to $(c - e^x > 0)$ na pewnym przedziale, czyli $c > 0$. Rozważmy teraz dwa przypadki: $x < 0$ i $x \geq 0$. Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja będzie coraz bardziej zbliżać się do wartości m, bo e^x będzie dążyć do 0, ale nigdy go nie osiągnie. Dla $x \in [0, m)$ funkcja będzie maleć z $\lim_{x \to m} \ln(c - e^x) = -\infty$. Czyli wykres wygląda tak dla $m = 5$: (i tutaj użyję sobie paczuszki do rysowania grafów bo czemu nie XD)



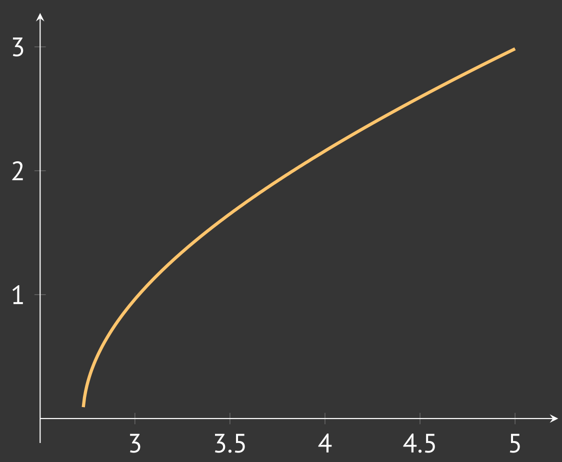
(b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{y}$$
$$ydy = \sqrt{x}dx$$
$$\int ydy = \int \sqrt{x}dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c}$$

W tym przypadku możemy mieć dodatnie i ujemne c, ale x musi być liczbą dodatnią, inaczej $x^{\frac{3}{2}}$ nie istnieje. Dla dodatniego c wiemy, że wartość w $x = 0$ będzie wynosić $\sqrt{c}$. Wtedy mamy funkcję wyglądającą jak:



Natomiast dla $c < 0$ wiemy, że będziemy ruszać gdzie graf się "zaczyna". To znaczy dla $x < \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ funkcja jest nieokreślona, a dla $x \geq \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ wygląda troszkę jak funkcja pierwiastka 4-tego stopnia z x^3?



(c) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$2y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + c$$
$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$

Dla $c < 0$ to jakaś potężna okejka, a dla $c \geq 0$ to se leeeeci w górę. Już mi się nie chce rozrysowywać.

ZADANIE 4.

Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ *oznacza temperaturę czajnika w chwili* t. *Zakładamy, że* $S(0) = 100^oC$ *w temperaturze otoczenia* 20^oC. *Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła* 60^oC. *Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę* 25^oC*?*

Wiemy, że pochodna funkcji temperatury od czasu jest wprost proporcjonalna do różnicy w temperaturze:

$$\frac{dS}{dt} = a(S - 20).$$

Rozwiążmy to równanie

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= a(20 - S(t)) \\ \frac{dS}{20 - S(t)} &= adt \\ \int \frac{dS}{20 - S(t)} &= \int adt \\ -\ln|20 - S(t)| &= at + c \\ |20 - S(t)| &= e^{-at-c} \end{aligned}$$

Tutaj ciało stygnie, więc $S(t) > 20$, czyli

$$|20 - S(t)| = S(t) - 20.$$

Z treści zadania wiemy, że $S(0) = 100$, co po podstawieniu da nam wartość c:

$$\begin{aligned} 100 - 20 &= e^{-c} \\ 80 &= e^{-c} \\ \ln 80 &= -c \\ c &= -\ln 80 \end{aligned}$$

Dalej, podstawiając $S(10) = 60$ możemy poznać wartość a:

$$\begin{aligned} 60 - 20 &= e^{-10a+\ln 80} \\ 40 &= e^{-10a} \cdot 80 \\ \frac{1}{2} &= e^{-10a} \\ \ln\frac{1}{2} &= -10a \\ a &= \ln 2^{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Dostajemy wzór:

$$S(t) = 20 + e^{-t\ln 2^{\frac{1}{10}} + \ln 80}$$

po ilu minutach będziemy mieli temperaturę 25^oC? Jeszu nie wiem i nie chce tego zmieniać tbh.

$$\begin{aligned} 25 - 20 &= e^{-ta-c} \\ \ln 5 &= -ta - c \\ \ln 5 + \ln 80 &= -ta \\ 10\ln 400 &= t\ln 2 \\ 10\ln 20^2 &= t\ln 2 \\ \ln 20^{20} &= t\ln 2 \end{aligned}$$

ZADANIE 5.

Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób. Załóżmy, że 5 *osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już* 10 *osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się* 850 *osób, przy założeniu, że:*

1. *Plotka rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki.*

2. *Plotka rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:* $y' = ke^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.