Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 8

Exercise 1. *Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\mathrm{Var}(X) = 3, \mathrm{Cov}(X, Y) = -1, \mathrm{Var}(Y) = 2$. Oblicz $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2x + Y)$.*

Twierdzenie 5.16: Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$ dla $i = 1, ..., n$, to $\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) + 2\sum_{k<l} \mathrm{Cov}(X_k, X_l)$

$$\mathrm{Var}(4X - 3Y) = \mathrm{Var}(4X) + \mathrm{Var}(-3Y) + 2\mathrm{Cov}(4X, -3Y)$$

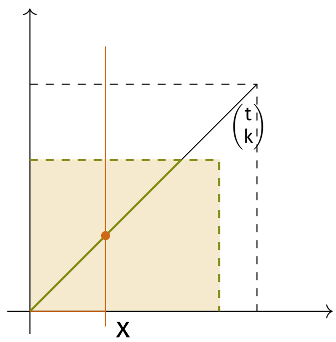
Twierdzenie 5.15(4): kowariacja jest operatorem dwuliniowym

$$16 \cdot \mathrm{Var}(X) + 9 \cdot \mathrm{Var}(Y) - 2 \cdot 4 \cdot 3\mathrm{Cov}(X, Y) = 48 + 9 + 24 = 81$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(2X - Y, 2X + Y) &= \mathrm{Cov}(2X, 2X + Y) - \mathrm{Cov}(Y, 2X + Y) = \\
&= \mathrm{Cov}(2X, 2X) + \mathrm{Cov}(2X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, 2X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = \\
&= 4 \cdot \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) - 2 \cdot \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Var}(Y) = \\
&= 12 - 2 = 10
\end{aligned}$$

Exercise 2. *Wyznacz dystrybuantę wektora losowego (X, Y) o rozkładzie jednostajnym na przekątnej kwadratu jednostkowego $[0, 1]^2$ łączącej punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Wyznacz rozkłady brzegowe, oblicz $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y), \mathrm{Cov}(X, Y), \mathrm{Var}(X + Y)$ oraz sprawdź, czy zmienne X i Y są niezależne.*

Długość tej prostej wynosi $\sqrt{2}$, więc gęstość to $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalej, wiem, że wartości, jakie może ten wektor przyjmować są postaci $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, czyli



$$F(t, k) = \mathbb{P}[X \leq t, Y \leq k] = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a > 1 \\ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \text{wpp} \end{cases}$$

gdzie $a = \min(t, k)$.

Rozkłady brzegowe:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \in \mathbb{R}] = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

jak na rysunku. Analogicznie dla Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} y & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X = x] \cdot x \, dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[Y = y] \cdot y \, dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2 = \int_0^1 \left[x - \frac{1}{2}\right]^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 - \frac{1}{4} =$$

$$= \int_0^1 \mathbb{P}[X = x, Y \in \mathbb{R}] x dx - \frac{1}{4} =$$

$$= \int_0^1 \mathbb{P}[X = x, Y = x] x dx - \frac{1}{4} =$$

$$= \int_0^1 x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{2}{12} + 2 \cdot 112 = \frac{1}{3}$$

Exercise 3. *d-wymiarowa zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m, A^{-1})$ o gęstości*

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det(A)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle A(x - m), (x - m)\rangle\right].$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$ jest macierzą kowariancji X.

Exercise 4. *Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, 1)$. Wykaż, że zmienne losowe $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ i $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$ są niezależne i obie mają rozkład $N(0, 1)$.*

Exercise 5. *Niech $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, I)$, gdzie I jest macierzą identyczności. Sprawdź, że $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.*

Exercise 6. *Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą wzajemnie nieskorelowanymi zmiennymi losowymi takimi, że ich łączny rozkład jest normalny. Wykazać, że $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależne.*

Exercise 7. *Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ oraz niech $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ będą ustalonymi wektorami. Pokaż, że zmienne losowe*

$$W = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j, \quad Z = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

są niezależne $\iff$ wektory a i b są prostopadłe. Opisz rozkłady W i Z.

Exercise 8. *Podaj przykład nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, które nie są niezależne.*

Exercise 9. *(**Transformata Boza=Müllera**) Pokaż, że jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$, to*

$$U = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y) \quad \text{i} \quad V = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y)$$

są niezależne i mają rozkład $N(0, 1)$.

Exercise 10. *Niech $A_1, \ldots, A_{2021} \in \mathscr{F}$ będą zbiorami o własności $\mathbb{P}\left[A_i\right] \geq \frac{1}{2}$. Wykaż, że istnieje $\omega \in \Omega$ taka, że $\omega \in A_i$ dla przynajmniej 1011 wartości i.*

Exercise 11. *Dane są dwa ciągi $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ zbieżne prawie wszędzie do zmiennych X, Y. Pokaż, że jeśli dla każdego n zmienne X_n i Y_n mają ten sam rozkład, to X i Y też mają ten sam rozkład.*