

1. Niech zmienne losowe X_n są niezależne i mają rozkład $U(0, 1)$. Udowodnić, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_{n-1} X_n}{n} \quad \text{p.n.}$$

istnieje i podać jej wartość.

2. Ciąg $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zmiennych takich, że zmienna losowa X_n ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}[X_n = 2^n] = \frac{1}{n^2} \quad \mathbb{P}[X_n = 2^{-n}] = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny p.n..

3. Niech X_n będzie ciągiem takim, że rozkład zmiennej X_n jest określony przez

$$\mathbb{P}\left[X_n = \frac{j}{n}\right] = \frac{2j}{n(n+1)}.$$

Udowodnij, że ciąg jest zbieżny według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

4. W trójkącie równobocznym ABC o boku 1 losujemy punkt D. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą pole trójkąta ABD. Wyznacz rozkład X , a potem $\mathbb{E}X$ oraz $\text{Var } X$.

5. Dany jest ciąg X_n niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n} \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pokaż, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$$