

Lista 5

Rachunek Prawdopodobieństwa

Weronika Jakimowicz

23.03.2023

Zadanie 1. Czy λ -układ jest zawsze σ -ciałem?

Definicja λ -układu to rodzina \mathcal{L} podzbiorów Ω taka, że

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- $A, B \in \mathcal{L} \text{ i } A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{L}$
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in \mathcal{L} \implies \bigcup A_i \in \mathcal{L}$

Rozważam sobie teraz zdarzenia niezależne. I ja mówię, że one tworzą taki system, ale nie ma to szansy być sigma ciałem? Może kiedyś to zrobię.

Zadanie 2. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina

$$\mathcal{L} = \{A \in \text{Bor}(\mathbb{R}) : \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$$

jest λ -układem.

Najpierw zajebiście by było poznać definicje tych rozkładów. XD

Zadanie 3. Dane są miary probabilistyczne μ na \mathbb{R} oraz ν na \mathbb{R}^2 takie, że dla dowolnych s, t

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

Z wykładu Miara i Całka wiemy, że $\text{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \text{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \text{Bor}(\mathbb{R})$, czyli każdy zbiór z $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$ zapisuje się jako $A \times B$ dla $A, B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

Co więcej wiem, że $\text{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, s] : s \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\})$, czyli

$$\text{Bor}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty, s] \times [t, \infty)\})$$

Nasza miara ν zachowuje się jak miara produktowa na zbiorze generujących σ -ciało $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$, czyli zachowuje się tak na całym $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$ i to kończy dowód?

Zadanie 4. Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnego $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

Rozważmy zbiór $A \cap [-n, n]$, bo $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n, n])$ i $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap [-n, n])$, tak samo dla ν .

Zauważmy, że $A \cap [-n, n]$ można zapisać jako przeliczalne operacje na zbiorach postaci

$$[-p, -q) \cup (q, p],$$

więc wystarczy, że ograniczę się do zbiorów takiej postaci. Mamy

$$\begin{aligned} \mu([-p, -q) \cup (q, p]) &= \mu([-p, p] \setminus [-q, q]) = \mu([-p, p]) - \mu([-q, q]) = \\ &= \nu([-p, p]) - \nu([-q, q]) = \nu([-p, p] \setminus [-q, q]) = \nu([-p, -q) \cup (q, p]) \end{aligned}$$

Zadanie 5. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p . Niech X będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X .

Czyli mam zdarzenie ω , które jest ciągiem $(P, P, P, \dots, P, S, P, S, \dots)$ kodującym czy na i -tym miejscu był sukces czy porażka. Wtedy $X(\omega) = i$ takie, że $\omega_i = S$ i dla każdego $k < i$ $\omega_k = P$.

Czyli to jest rozkład dyskretny i $\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1}p$?

Zadanie 6. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi $p_n = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$. W ciągu jednej sekundy wykonujemy n doświadczeń. Niech X_n będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X_n . Zbadaj zachowanie tego rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$.

Tutaj jest rozkład Poisson'a, ale dlaczego?

Przy nieskończoności można de l'Hopitalelem to zrobić, ale uuuu

Zadanie 7. Dane są miary probabilistyczne μ na \mathbb{R} oraz ν na \mathbb{R}^2 takie, że dla dowolnych s, t

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

Z wykładu Miara i Całka wiemy, że $\text{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \text{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \text{Bor}(\mathbb{R})$, czyli każdy zbiór z $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$ zapisuje się jako $A \times B$ dla $A, B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

Co więcej wiemy, że $\text{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, s] : s \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\})$, czyli

$$\text{Bor}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty, s] \times [t, \infty)\})$$

Nasza miara ν zachowuje się jak miara produktowa na zbiorze generujących σ -ciało $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$, czyli zachowuje się tak na całym $\text{Bor}(\mathbb{R}^2)$ i to kończy dowód?

Zadanie 8. Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s]$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ dla rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na \mathbb{N} , wykładniczy jest jedynym bezzatomowym rozkładem z brakiem pamięci na \mathbb{R}^+ .

Rozkład geometryczny to

$$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$$

Mi jest potrzebne prawdopodobieństwo, że pierwsze zwycięstwo będzie powyżej $t + s$, jeżeli pierwsze zwycięstwo jest powyżej t ?

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s \mid X > t]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{(1 - p)^{t+s-1}}{(1 - p)^{t-1}} = (1 - p)^s = \mathbb{P}[X > s]$$

Analogicznie dla rozkładu wykładniczego $\mathbb{P}[X > k] = \int_k^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k}$:

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s \mid X > t]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Przed udowodnieniem, że są to jedyne rozkłady z amnezją, przyjrzyjmy się co konkretnie mówi mi warunek z zadania:

$$\mathbb{P}[X > t + s | X \geq t] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s]}{\mathbb{P}[X \geq t]} = \mathbb{P}[X > s]$$

czyli

$$\mathbb{P}[X > t + s] = \mathbb{P}[X > s] \mathbb{P}[X > t].$$

Zacznijmy od rozkładu geometrycznego, tzn. $t, s \in \mathbb{N}$. Będę chciała potęgować, co się stanie, gdy $t = s$. Popatrzmy, co się wtedy dzieje:

$$\mathbb{P}[X > t + t] = \mathbb{P}[X > t] \mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 2t + t] = \mathbb{P}[X > 2t] \mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2 \mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^3$$

i indukcyjnie,

$$\mathbb{P}[X > (n + 1)t] = \mathbb{P}[X > nt + n] = \mathbb{P}[X > nt] \mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^{n+1}.$$

W takim razie:

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t \cdot 1] = \mathbb{P}[X > 1]^t.$$

Dalej, wiemy, że albo $\mathbb{P}[X > t]$ albo $\mathbb{P}[X \leq t]$, czyli

$$\mathbb{P}[X > t] + \mathbb{P}[X \leq t] = 1$$

a z kolei $\mathbb{P}[X \leq t]$ to $\mathbb{P}[X = t]$ lub $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$. Czyli

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - \mathbb{P}[X \leq t - 1].$$

Z kolei $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$ mogą rozpisać korzystając z

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > (t - 1) + 1] = \mathbb{P}[X > (t - 1)] \mathbb{P}[X > 1]$$

$$\mathbb{P}[X > (t - 1)] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t - 1] = 1 - \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

Czyli dostaję, że

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - 1 + \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

nazwijmy $p = \mathbb{P}[X = 1]$, wtedy

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] = 1 - p.$$

Ostatecznie:

$$\mathbb{P}[X = t] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{1 - p} - \mathbb{P}[X > t] = \frac{(1 - p)^t}{1 - p} - (1 - p)^t = (1 - p)^{t-1}(1 - (1 - p)) = p(1 - p)^{t-1}$$

a to jest już nasz znany rozkład geometryczny.

Rozważam teraz rozkład eksponencjalny, który tym na przykład różni od geometrycznego, że przyjmuje argumenty nienaturalne. Zwykle jeśli mamy dane argumenty naturalne to chcemy przejść do wymiernych i dalej do rzeczywistych, to korzystamy najpierw z ułamków, a potem z granic ciągów tychże ułamków. Spróbujmy więc jakoś uzyskać $\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]$, wtedy zmieniając p, q będę miała wszystkie liczby wymierne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > p] &= \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]^2 \\ \mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{2}} &= \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]\end{aligned}$$

i podobnie jak wcześniej

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 1]^p &= \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-1)}{q} + \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-2)}{q}\right] \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]^q \\ \mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{q}} &= \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right].\end{aligned}$$

W tym przypadku bardzo ciężko będzie mi przechodzić do równości, ale mogę za to powiedzieć, że dla każdej liczby niewymiernej x znajdę ciąg liczb wymiernych taki, że $x = \lim q_n$. Jeśli będziemy teraz brać ten ciąg podchodzący od dołu, to dostaniemy ciąg wstępujących prawdopodobieństw, bo $X > q_n \implies X > q_{n+1}$ gdy $q_{n+1} > q_n$. Czyli będziemy mogli przejść z prawą stroną do granicy i dostać

$$\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X > 1]^x$$

nazwijmy teraz $\mathbb{P}[X > 1] = e^{-\lambda}$, żeby otrzymać

$$\mathbb{P}[X > x] = \left(e^{-\lambda}\right)^x = e^{\ln(e^{-\lambda})x} = e^{x \ln e^{-\lambda}} = e^{-x\lambda}$$

co jest dokładnie postacią rozkładu geometrycznego.