

Rozmaite cierpienia

Na podstawie wykładów
Prof. Świątkowskiego
w semestrze letnim 2022/2023



oraz *Introduction to Smooth Manifolds* J.M. Lee

Spis treści

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Definiowanie rozmaitości | 3 |
| 1.1 | Rozmaitość topologiczna | 3 |
| 1.2 | Mapy, współrzędne lokalne | 4 |
| 1.3 | Rozmaitości gładkie (różniczkowalne) | 6 |
| 1.4 | Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej | 10 |
| 1.5 | Dopowiedzenie o funkcjach gładkich | 10 |
| 1.6 | Dyfeomorfizmy | 11 |
| 1.7 | C^k -różniczkowalność odwzorowań rozmaitości | 12 |
| 1.8 | Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu | 13 |
| 1.9 | Rozmaitość gładka z brzegiem | 14 |
| 2 | Rozkład jedności | 17 |
| 2.1 | Lokalnie skończone rozdrobnienie | 17 |
| 2.2 | Twierdzenie o rozkładzie jedności | 19 |
| 2.3 | Zastosowania rozkładów jedności | 20 |
| 2.4 | Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności | 22 |
| 3 | Dyskretne ilorazy rozmaitości | 23 |
| 3.1 | Klejenie rozmaitości wzdłuż brzegu | 23 |
| 3.2 | Suma spójna rozmaitości | 24 |
| 3.3 | Działanie grupy dyfeomorfizmów | 26 |
| 3.4 | Gładki atlas na M/G | 29 |
| 4 | Wektory styczne | 32 |
| 4.1 | Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna | 32 |
| 4.2 | Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$ | 33 |
| 4.3 | Różniczka | 34 |

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

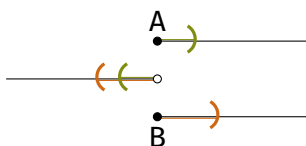
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową rozmaitością (n -rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n , tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

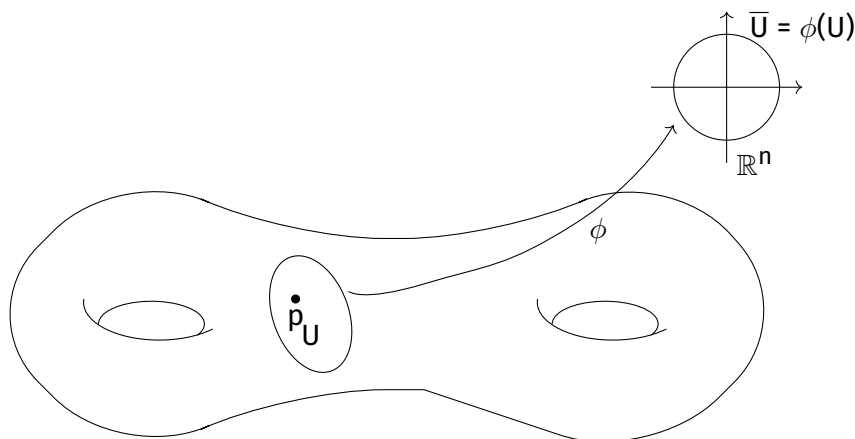
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z \mathbb{R}^n przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego zwanego $\bar{K} \subseteq \bar{U}$ jego odpowiednik na M , czyli $K = \phi^{-1}(\bar{K}) \subseteq U$, jest domknięty i zwarty [ćwiczenia]. Jeśli zaś \bar{K} jest zbiorem domknięty w \bar{U} , ale niezwanym, to nie zawsze K jest domknięty w M . Weźmy np. $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \mathbb{R}^n$ i zbiór domknięty $\bar{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\bar{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że \bar{K} jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii \mathbb{R}^n nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots,$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n . Czyli na przykład S^2 , sfera, ma naturalne włożenie w \mathbb{R}^3 pomimo lokalnej euklidesowości z \mathbb{R}^2 .

Rodzina \mathcal{X} podzbiorów M jest **lokalnie skończona**, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z \mathcal{X} . Jeżeli M ma dwa pokrycia: \mathcal{U} i \mathcal{V} takie, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ znajdziemy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to \mathcal{V} jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem** \mathcal{U} . Dzięki przeliczalności bazy M , każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. Twierdzenie Brouwer'a Dla $m \neq n$ otwarty podzbiór \mathbb{R}^n nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem \mathbb{R}^m .

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n , to nazywamy ją czasem **n -rozmaitością**.

Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w \mathbb{R}^n , których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna \iff jest łukowo spójna. Składowe spójności M są równe składowym łukowej spójności M .
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

1.2. Mapy, współrzędne lokalne

Definicja 1.3. Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ) , gdzie U jest otwartym podzbiorem M , zaś $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w \mathbb{R}^n . Zbiór U nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**.

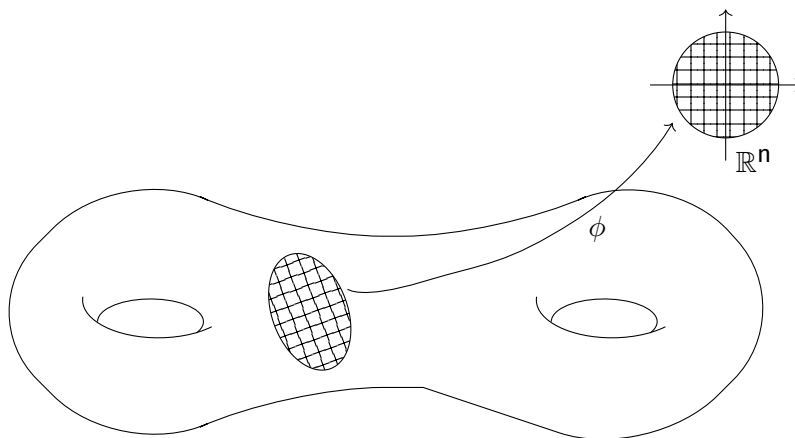
Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to M jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy (U, ϕ) takiej, że $p \in U$ i $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ mówimy, że jest **mapą wokół p** . Za pomocą translacji możemy każdą mapę zawsze przesunąć tak, aby $\phi(p) = 0$. Czyli możemy ogólnie zakładać, że mapa (U, ϕ) jest mapą o początku w p .

Często będziemy przechodzić do coraz to mniejszych zbiorów mapowych poprzez branie odwzorowań obciętych co nie burzy gładkości ani zgodności z atlasem. Pozwoli to np. zakładać, że dla $p \notin F$ domkniętego bierzemy mapę (U, ϕ) taką, że $U \cap F = \emptyset$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n . Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Mapy nazywa się też czasem *lokalnymi współrzędnymi* na M lub *lokalną parametryzacją* M . Ponieważ o mapie można myśleć jako o przeniesieniu siatki współrzędnych (x_1, \dots, x_n) z $\bar{U} = \phi(U)$ przez ϕ^{-1} na U , to będziemy często utożsamiać $U \subseteq M$ z \bar{U} . O punkcie $p \in M$ takim, że $\phi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ będziemy myśleć jako o $p = (x_1, \dots, x_n)$.



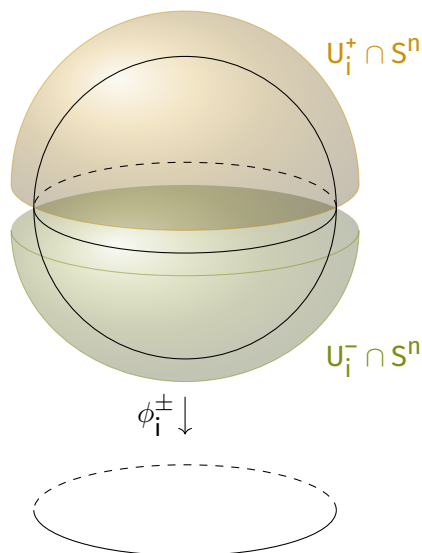
Przykłady:

1. Każdy otwarty podzbiór n -rozmaitości topologicznej jest n -rozmaitością [ćwiczenia].
2. **Wykresy ciągłych funkcji:** Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą. Wykresem f nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

Oznaczmy przez $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ projekcję na \mathbb{R}^n , tzn. $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy funkcja $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$ będąca obcięciem π_1 do $\Gamma(f)$. Ponieważ ϕ jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(f)$ dana przez $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$, jest ciągłą funkcją odwrotną do ϕ . W takim razie, ϕ jest homeomorfizmem między U a $\Gamma(f)$ i wykres funkcji ciągłych jest lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaitością topologiczną.

3. Sfery S^n są n -rozmaitościami, które wkładają się w \mathbb{R}^{n+1} ($S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$).



Rozważmy rodzinę par $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, \dots, n+1\}$ na S^n zdefiniowanych jako:

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Oznaczenie \widehat{x}_i oznacza "wyrzucenie" danej współrzędnej.

Zbiory U_i^\pm pokrywają całe S^n , gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje ϕ_i^\pm są ciągłe jako obcięcia rzutów \mathbb{R}^{n+1} na \mathbb{R}^n . Obrazem zbioru U_i^\pm przez ϕ_i^\pm jest zbiór

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w \mathbb{R}^n .

Odwzorowania ϕ_i^\pm są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie ϕ_i^\pm są homeomorfizmami między otwartymi podzbiórmi S^n a otwartymi podzbiórmi \mathbb{R}^n .

Pokazaliśmy lokalną euklidesowość S^n , natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie S^n dziedziczy z \mathbb{R}^{n+1} .

4. Produkt kartezjański dwóch (lub k) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].
5. n -torus jest przestrzenią produktową $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ i n -rozmaitością topologiczną. \mathbb{T}^2 nazywamy po prostu torusem.

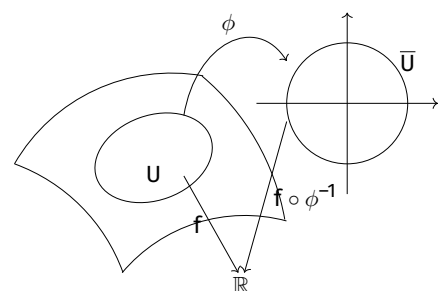
1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

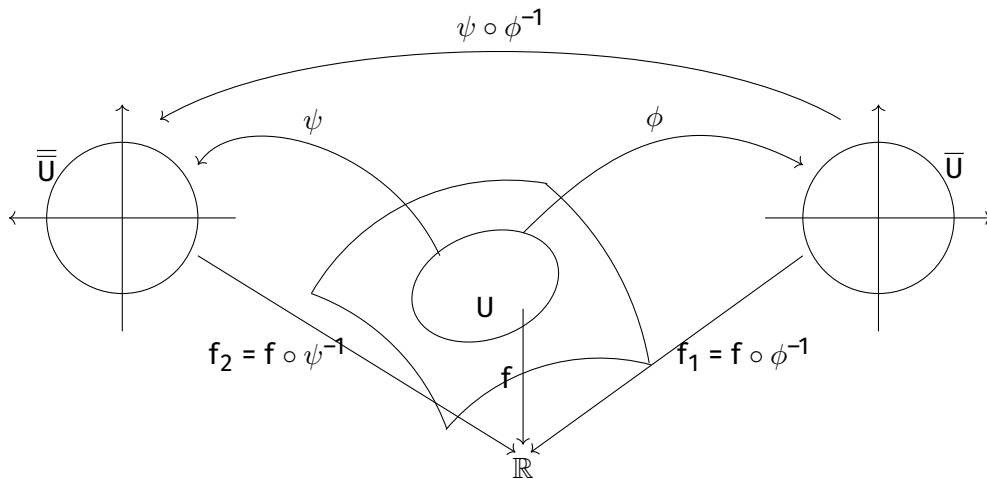
Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać jej różniczkowalność za pomocą map (U, ϕ) na M .

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **wyrażona w mapie** (U, ϕ) to złożenie $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 1.4. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy (U, ϕ) f może być gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy (U, ψ) to może się okazać, że $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ nie jest gładka:



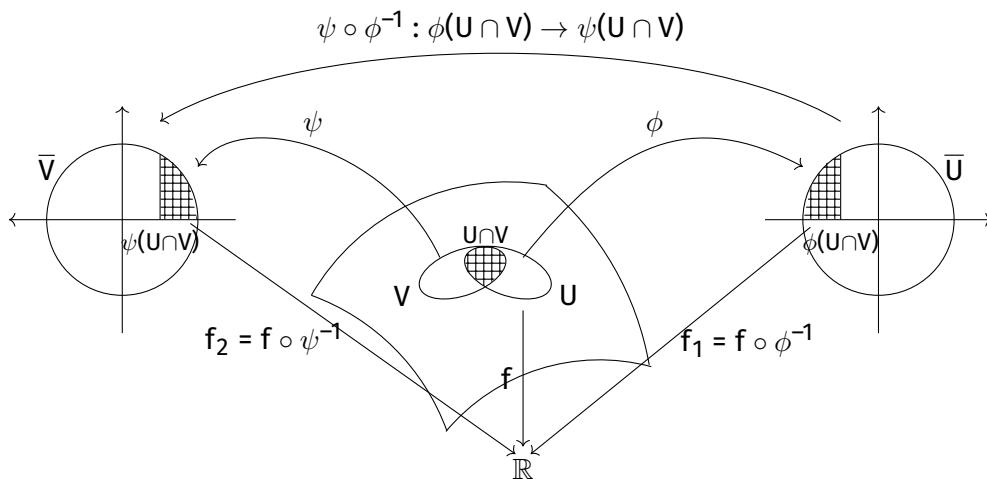


Dlatego chcemy móc założyć, że $\phi \circ \psi^{-1}$ jest przekształceniem gładkim.

Definicja 1.5. Mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania $\phi\psi^{-1}$ nazywamy **odwzorowaniami przejścia** z jednej mapy do drugiej. Jeśli $\phi\psi^{-1}$ i $\psi\phi^{-1}$ są gładkie, to są one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** (def. 1.14) pomiędzy otwartymi podzbiórmi \mathbb{R}^n . Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy $U \cap V \neq \emptyset$, rysunek wygląda:



Mapy (U, ϕ) i (V, ψ) nazywamy zgodnymi, jeśli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejścia

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

oraz

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

są gładkie (\iff są dyfeomorfizmami podzbiórów $\phi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$).

Definicja 1.6. Gładkim atlasem \mathcal{A} na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ takich, że:

- $\{U_\alpha\}$ pokrywają całą M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykłady:

1. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ na sferze S^n jest atlasem gładkim na S^n . Dla przykładu zbadamy zgodność map (U_i^+, ϕ_i^+) i (U_j^+, ϕ_j^+) dla $i < j$.

Popatrzmy jak wyglądają interesujące nas zbiory:

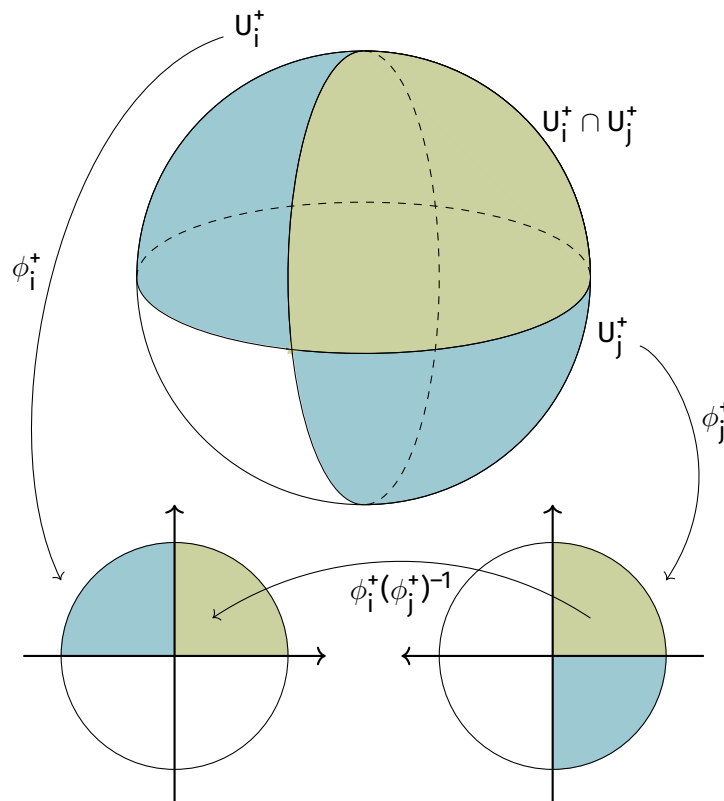
$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

bo usuwamy i -tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\}$$

bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od i , więc jej położenie nie zmienia się.



$$\begin{array}{ccc}
 (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 \cap & & \downarrow \phi_i^+ \\
 \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\} & & (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 & & \cap \\
 & & \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}
 \end{array}$$

Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+ (\phi_j^+)^{-1} (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

2. Jeśli V jest przestrzenią liniową wymiaru $n < \infty$ nad \mathbb{R} , to dowolna norma określona na V zadaje metrykę, która pozwala określić na V topologię (identyczną dla równoważnych norm). Z taką topologią V jest n -rozmaiutością z naturalnie zdefiniowaną strukturą.

Niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą V . Rozważmy izomorfizm $E : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ zadany przez

$$E(x) = \sum_{i \leq n} x^i e_i.$$

Funkcja ta w kontekście topologicznym jest homeomorfizmem, więc (V, E^{-1}) jest mapą na V .

Jeśli $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ jest inną bazą na V , to mamy homeomorfizm

$$\bar{E}(x) = \sum x^j \bar{e}_j$$

Istnieje wtedy pewna odwracalna macierz (A_i^j) taka, że

$$e_i = \sum A_i^j \bar{e}_j$$

dla każdego i .

Stąd odwzorowanie przejścia między tymi dwoma mapami jest zadane przez $\bar{E}^{-1} \circ E(x) = \bar{x}$, gdzie $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ jest zadane przez

$$\sum_{j \leq n} \bar{x}^j \bar{e}_j = \sum_{i \leq n} x^i e_i = \sum_{i, j \leq n} x^i A_i^j \bar{e}_j \implies \bar{x}^j = \sum_{i \leq n} A_i^j x^i$$

W takim razie jakkolwiek mapa wysyłająca x na \bar{x} jest odwracalna i liniowa \implies jest dyfeomorfizmem. Stąd dowolne dwie mapy (V, E) są gładko zgodne i ich rodzina definiuje na V standardową gładką strukturę.

Definicja 1.7. Rozmaiutością gładką nazywamy parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaiutością topologiczną, zaś \mathcal{A} jest pewnym atlasem gładkim na M .

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaiutości topologicznej M mogą zadawać tę samą rozmaiutość gładką. Na przykład dla $M = \mathbb{R}^n$ istnieje atlas zawierający jedną mapę $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ oraz atlas $\{(B_x(r), \text{id}_{B_x(r)}) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, który jest tak naprawdę "rozdrobieniem" pierwszego atlasu.

Definicja 1.8. Niech \mathcal{A} będzie gładkim atlasem na M .

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z \mathcal{A} , jeśli jest zgodna z każdą mapą $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na M są zgodne, jeśli każda mapa z \mathcal{A}_1 jest zgodna z \mathcal{A}_2 .

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotną i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaitości gładkiej na topologicznej rozmaitości M . Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

Definicja 1.9. \mathcal{A} jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości M , jeśli każda mapa zgodna z \mathcal{A} należy do \mathcal{A} .

Każdy atlas \mathcal{A} na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z \mathcal{A} [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaitością topologiczną, a \mathcal{A} jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

Mówimy, że mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ są **C^k -zgodne** jeśli $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (posiadają pochodne cząstkowe rzędów $\leq k$). C^k -atlas to z kolei rodzina C^k -zgodnych map, która określa strukturę C^k -rozmaitości na M . Struktura C^k -rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy C^m dla $m > k$.

C^0 rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a C^∞ -rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

Dychotomia C^0 i C^k dla $k > 0$ aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu C^1 -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞ -zgodnych. Zatem, każda C^1 -rozmaitość posiada C^1 -zgodną strukturę C^∞ -rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak C^0 -rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne [C^ω]. Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w \mathbb{C}^n zamiast \mathbb{R}^n .
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

1.5. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu \mathcal{A} na M , jeśli dla każdej mapy $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

Fakt 1.10.

- Jeśli $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem \mathcal{A} , zaś (U, ϕ) jest mapą zgodną z \mathcal{A} , to $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

- Jeśli \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 są zgodnymi atlasami, to $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładką względem $\mathcal{A} \iff f$ jest gładką względem $\mathcal{A}_2 \iff f$ jest gładką względem atlasu maksymalnego \mathcal{A}_{\max} zawierającego \mathcal{A}_1 i \mathcal{A} .

Dowód. Ćwiczenia



Fakt 1.11. Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie.

Dowód. Niech $f : M \rightarrow N$ i $g : N \rightarrow P$ będą gładkimi funkcjami. Weźmy $p \in M$ oraz oznaczmy $q = f(p) \in N$, $s = g(q) = g(f(p)) \in P$. Niech $(U, \phi), (V, \psi), (W, \xi)$ będą mapami odpowiednio wokół p, q, s .

Wiemy, że $\psi f \phi^{-1}$ oraz $\xi g \psi^{-1}$ są funkcjami gładkimi. Chcemy sprawdzić, czy $\xi(g \circ f) \phi^{-1}$ jest funkcją gładką.

$$\xi(g \circ f) \phi^{-1} = (\xi g \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})$$

jest złożeniem dwóch funkcji gładkich między \mathbb{R}^n -ami, więc $g \circ f$ jest gładką funkcją między rozmaitościami.



Definicja 1.12. Rzędem funkcji $f : M \rightarrow N$ C^1 -różniczkowalnego (def. 1.15) w punkcie p nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania $\psi f \phi^{-1}$ w $\phi(p)$.

Fakt 1.13. Powyższa liczba [rząd funkcji w p] nie zależy od wyboru mapy wokół p ani wokół $f(p)$.

Dowód. Szkicowy.

Dla map $(U, \phi), (V, \psi)$ oraz $(U', \phi'), (V', \psi')$ chcemy porównać rząd macierzy jacobianu $\hat{f} = \psi f \phi^{-1}$ oraz $\hat{f}' = \psi' f (\phi')^{-1}$. Wiemy, że

$$\hat{f}' = \alpha \hat{f} \beta,$$

gdzie $\alpha = \psi' \psi^{-1}$ i $\beta = \phi (\phi')^{-1}$.

Macierz jacobianu złożenia to iloczyn macierzy jacobianu funkcji składowych. Macierz jacobianu odwzorowań przejścia jest nieosobliwa [są one bijekcjami]. W takim razie domnożenie przez jacobian α i β nie zmieni rzędu jacobianu \hat{f} .



1.6. Dyfeomorfizmy

Definicja 1.14. Gładkie odwzorowanie $f : M \rightarrow N$ nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli jest wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) oraz odwzorowanie do niego odwrotne f^{-1} jest gładkie.

Dwie rozmaitości M, N są **dyfeomorficzne**, jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm. Są one wtedy nierozróżnialne jako gładkie rozmaitości.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda C^1 -rozmaitość posiada C^1 -zgodną strukturę C^∞ rozmaitości. Teraz możemy dopowiedzieć, że jeśli dwie C^∞ -rozmaitości są C^1 -dyfeomorficzne, to są one też C^∞ -dyfeomorficzne. Stąd klasyfikacja C^1 rozmaitości różniczkowalnych z dokładnością do C^1 -dyfeomorfizmu jest taka sama jak klasyfikacja C^∞ rozmaitości z dokładnością do C^∞ dyfeomorfizmu.

Wiemy już, że istnieją C^0 -rozmaitości bez struktury C^∞ -rozmaitości. Możemy teraz dodać do tego fakt, że istnieją C^0 -rozmaitości które nie są dyfeomorficznie zgodne

jako C^∞ rozmaitości. W 1956 pokazano, że dla sfer S^n $n \geq 7$ istnieje skończenie wiele takich niedyfeomorficznych struktur.

W latach 1980 pokazano, że na \mathbb{R}^4 istnieje nieprzeliczalnie wiele struktur o których mowa wyżej. Z kolei przypadku ≤ 3 związek pomiędzy C^0 a C^∞ jest taki jak pomiędzy C^1 a C^∞ .

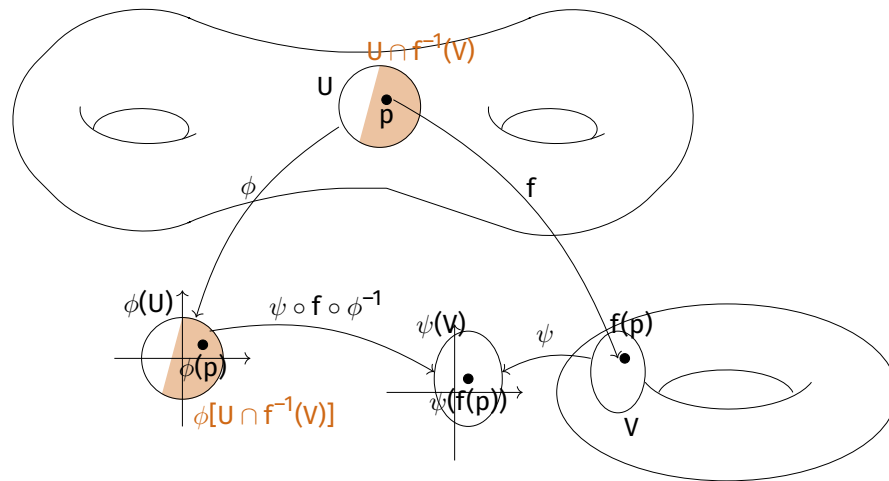
1.7. C^k -różniczkowalność odwzorowań rozmaitości

Definicja 1.15. Dla M, N gładkich rozmaitości i $f : M \rightarrow N$ ciągłej mówimy, że f jest **C^k -różniczkowalna** w punkcie p , jeśli dla dowolnych map $(U, \phi) \ni p$ oraz $(V, \psi) \ni f(p)$ złożenie

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U \cap f^{-1}(V)] \rightarrow \psi(V)$$

jest C^k -różniczkowalne w punkcie $\phi(p)$.

f jest C^k na otoczeniu p , jeśli $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest C^k różniczkowalne na pewnym otwartym otoczeniu $\phi(p)$.



Funkcję $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest nazywana **wyrażeniem f w mapach** (U, ϕ) i (V, ψ) lub też wyrażeniem f w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy.

Fakt 1.16. Jeśli f wyrażona w mapach (U, ϕ) i (V, ψ) jest C^k -różniczkowalna w punkcie $\phi(p)$ [na jego otoczeniu] to wyrażona w innych mapach (U', ϕ') , (V', ψ') też jest C^k różniczkowalna wokół p [na jego otoczeniu].

Dowód. Niech $\hat{f} = \psi f \phi^{-1}$ a $\hat{\hat{f}} = \psi' f (\phi')^{-1}$. Oznaczmy odwzorowania przejścia $\alpha = \phi(\phi')^{-1}$ oraz $\beta = \psi' \psi^{-1}$. Zachodzi

$$\hat{\hat{f}} = \beta \circ \hat{f} \circ \alpha = (\psi' \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1}) (\phi(\phi')^{-1}) = \psi' f (\phi')^{-1}.$$

Zarówno $\hat{\hat{f}}$ jak i $\beta \hat{f} \alpha$ są funkcjami określonymi na pewnych podzbiorach \mathbb{R}^n oraz $\alpha(\phi'(p)) = \phi(p)$. W takim razie jeśli \hat{f} jest funkcją C^k -różniczkowalną, to $\hat{\hat{f}}$ jako złożenie funkcji gładkich z funkcją C^k -różniczkowalną też takie jest. ☕

Dzięki tej obserwacji możemy definiować C^k -różniczkowalność funkcji jako bycie C^k -różniczkowalną w dowolnej mapie. Możemy więc dobrać sobie mapę w której sprawdzamy C^k -różniczkowalność tak, aby dowód był wygodny.

Uwaga 1.17. Funkcja $f : M \rightarrow N$ jest C^k -różniczkowalna \iff dla dowolnych map (U, ϕ) oraz (V, ψ) wyrażenie $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ funkcji f jest C^k -różniczkowalne na całym zbiorze, na którym jest ono określone.

Pojęcia:

- odwzorowań gładkich
- różniczkowalności w punkcie (otoczeniu)
- dyfeomorfizmu
- rzędu odwzorowania w punkcie

oraz ich własności bez zmian przenoszą się na rozmaitości gładkie z brzegiem (def. 1.19).

1.8. Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 1.18. Niech X będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów w X taką, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ różniczkowalne takie, że

1. dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty
2. dla dowolnych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w \mathbb{R}^n .
3. jeśli $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ też jest gładkie)
4. przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X
5. dla każdego $p, q \in X$, jeśli $p \neq q$, to istnieją α, β oraz otwarte $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$ i $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p)$, $q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ (oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).

Wówczas na X istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory U_α są otwarte. Ponadto rodzina $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tworzy wtedy gładki atlas na X .

Dowód. A dokładniej szkic dowodu.

Dokładny dowód w Lee, lemat 1.35.

Określimy topologię na X przy pomocy przeciwbrazów przez ϕ_α otwartych podzbiorów $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5.



Przykłady:

1. \mathcal{L} jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą można by od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste nie pionowe}\}$$

oraz funkcje ϕ_h, ϕ_v :

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \xrightarrow{\phi_h} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \xrightarrow{\phi_v} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to \mathbb{R}^2 , czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całego X , to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste nie pionowe i nie poziome}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cy + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) : c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

$$\text{Weźmy prostą } L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v.$$

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

Zatem $\phi_h \phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$ jest gładkie (podobnie $\phi_v \phi_h^{-1}$).

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią \mathcal{L} jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisu \mathcal{L} nie wystarcza jedna mapa.

O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subseteq M$ z obrazem przez mapę, czyli $\bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych (x_1, \dots, x_n) z \bar{U} przez ϕ^{-1} na $U \subseteq M$.
- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że $p = (0, \dots, 0)$ w mapie, czyli możemy założyć, że (U, ϕ) jest mapą o początku w p .
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół p ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subseteq M$ niezawierającym p .

1.9. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

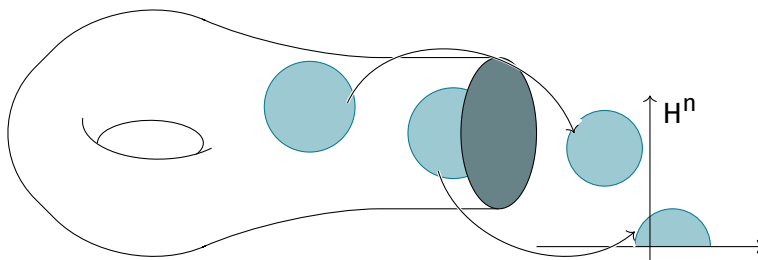
a wnętrzem:

$$\text{int}(H^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Dla $U \subseteq H^n$ oznaczmy $\partial U = U \cap \partial H$ oraz $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$, czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy H^n oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla $U \subseteq \mathbb{H}^n$ otwartego i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mówimy, że f jest **gładka**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego, $U \subseteq \hat{U}$. Pochodne cząstkowe funkcji f są dobrze określone na $\text{int}(U)$, a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na ∂U (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia \hat{f}). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia \hat{f} istnieje \iff wszystkie pochodne cząstkowe f w $\text{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U .

Definicja 1.19. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $U_\alpha \subseteq M$ i $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{H}^n$ i $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w \mathbb{H}^n , gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn. $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w \mathbb{H}^n).



Fakt 1.20. Jeśli w pewnej mapie (U_α, ϕ_α) , $\phi_\alpha(p) \in \partial \mathbb{H}^n$, to w każdej innej mapie (U_β, ϕ_β) zawierającej p $\phi_\beta(p) \in \partial \mathbb{H}^n$.

Dowód. Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jakobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych iniekcji.



Definicja 1.21. **Brzegiem** n -rozmaitości M z brzegiem nazywamy zbiór

$$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n\}$$

wnętrze M nazywa się

$$\text{int}(M) = \{p \in M : (\exists (U_\alpha, \phi_\alpha)) \phi_\alpha(p) \in \text{int}(\mathbb{H}^n)\}$$

Fakt 1.22. Wnętrze $\text{int}(M)$ n -rozmaitości gładkiej M jest n -rozmaitością bez brzegu.

Dowód. Jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\text{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{U'_\alpha}$$

Odwzorowania przejścia $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$, więc są gładkie.



Przykłady:

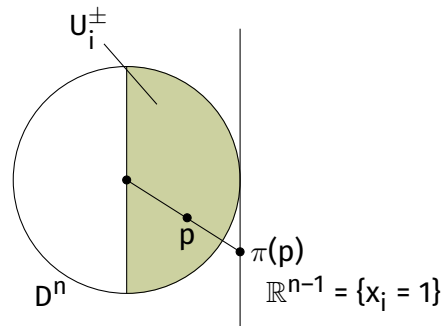
1. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ jest n -rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Dowód. Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa (U_0, ϕ_0) :

$$U_0 = \{x : |x| < 1\}, \phi_0 : U_0 \rightarrow H^n, \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$

Mapy (U_i^\pm, ϕ_i^\pm)



$$U_i^+ = \{x \in D^n : x_i > 0\}$$

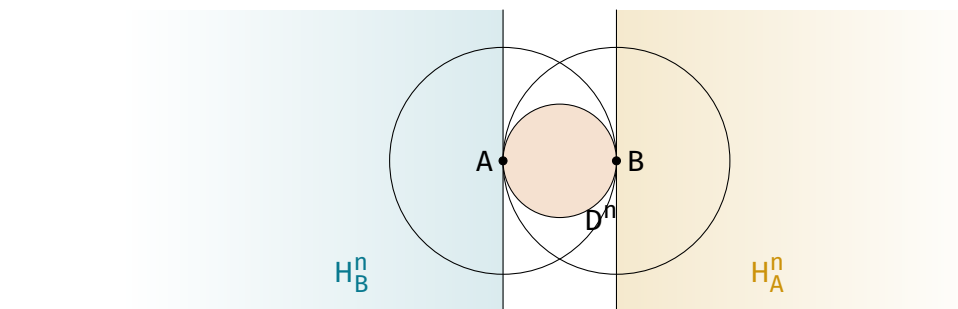
$$U_i^- = \{x \in D^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}_{1-r^2} \right)$$

$$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$



2. Inny atlas na D^n , składający się tylko z dwóch map:



Niech A i B będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku D^n . Rozważmy zbiory

$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

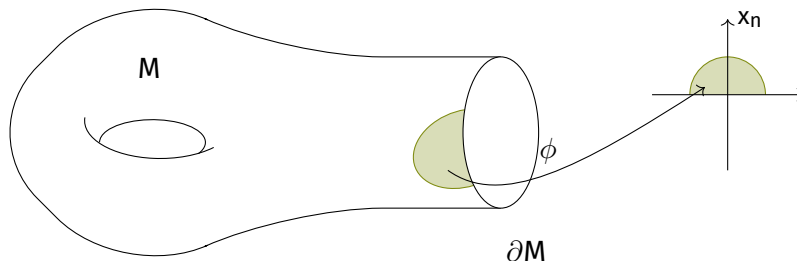
oraz odwzorowania $\phi_A : U_A \rightarrow H_A^n$ i $\phi_B : U_B \rightarrow H_B^n$ będące inwersjami dysku względem sfer S^n o środkach w A i B oraz promieniu 2.

3. Tutaj warto zaznaczyć, że jeśli $n = 0$, to wtedy $\partial M = \emptyset$ i M jest 0-rozmaitością. W dodatku, zbiór rozmaitości gładkich z brzegiem można rozumieć jakoby zawierał zbiór rozmaitości topologicznych, gdyż $\partial M = \emptyset \iff M$ jest rozmaitością topologiczną.

2. Rozkład jedności

Rozważmy rozmaitość z brzegiem M . Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(p) = 0$ gdy $p \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla dowolnego $p \in \text{Int}(M)$.

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq M$ znaleźć funkcję, która dla $p \in D$ jest równa zero, a na $M \setminus D$ ma wartości ściśle dodatnie.



Lokalnie, na zbiorze mapowym (U_α, ϕ) możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z ∂M jest zawsze zerowa (gdyż są one w ∂H^n). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przełożyć lokalne f_α na funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

Definicja 2.1. Pokrycie $\{A_\alpha\}$ podzbiórów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α .

Definicja 2.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia** $\{U_\alpha\}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α .

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$.

$$\{W_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\} \implies \{W_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$$

Definicja 2.3. Przestrzeń topologiczna X jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego punktu otoczeń prezwartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

Dowód: patrz Lee strona 36-37

Uwaga 2.4. Rozdrobnienie wynikające z parazwarcia rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z prezwartych zbiorów mapowych.

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie pokryciem M . Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych. Wystarczy obraz każdego U_α w \mathbb{R}^n pokryć

zbiorami prezwartymi i wrócić z nimi na M . Z faktu, że rozmaitości są parazwarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które z przechodności \prec jest też rozdrobieniem $\{U_\alpha\}$. Dodatkowo, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ , które były mapowe i prezwarte, więc i V_β taki jest. ☕

Uwaga 2.5. Niech $\{A_\alpha\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną parazwartych podzbiorów rozmaitości M . Wtedy dla każdego A_{α_0} podrodzina

$$\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg A_{α_i} oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w pewnym $p \in \text{cl}(A_{\alpha_0})$.

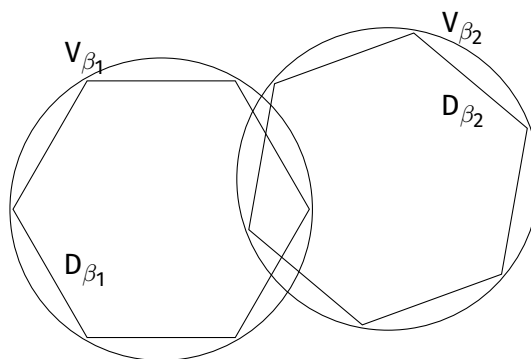
Ponieważ p jest punktem skupienia x_i , to dowolne otwarte otoczenie U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele elementów x_i . W takim razie U_p przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami A_α . Jest to sprzeczne z lokalną skończonością $\{A_\alpha\}$. ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i prezwartość zbiorów z rozdrobienia $\{V_\beta\}$ wynikającego z parazwarcia rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

Uwaga 2.6. Niech $\{V_\beta\}$ będzie lokalnie skończonym rozdrobieniem pokrycia M składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego β istnieje zwarty zbiór $D_\beta \subseteq V_\beta$ taki, że

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa M .



Dowód. Ponieważ V_β są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podzbiore w \mathbb{R}^n poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem $\bar{V}_\beta = \phi_\beta(V_\beta)$ dla mapy (V_β, ϕ_β) .

Każdy V_{β_0} jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów $V_{\beta_0,k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, które są otwarte i ich zwarte domknięcia zawierają się w V_{β_0} : $\text{cl}(V_{\beta_0,k}) \subseteq V_{\beta_0}$. Możemy np. wybierać $V_{\beta_0,k} = B(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} : d(x, V_{\beta_0}^c) > \frac{1}{k}\}$, tzn. przekroje kul otwartych w \mathbb{R}^n o środku w $x_0 \in V_{\beta_0}$ i promieniu k ze zbiorami tych $x \in V_{\beta_0}$, które są odległe od dopełnienia V_{β_0} o co najmniej $\frac{1}{k}$.

Niech teraz $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ będą zbiorami z $\{V_\beta\}$ niepusto krojącymi V_{β_0} . Jest ich skończenie na mocy 2.5. Wówczas $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ wraz z wcześniej stworzonymi $V_{\beta_0,k}$ jest pokryciem zwartego zbioru $\text{cl}(V_{\beta_0})$. Możemy więc z niego wybrać skończone podpokrycie postaci: $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}, \dots, V_{\beta_0,k_0}$. Oznacza to, że zastępując w $\{V_\beta\}$ zbiór V_{β_0} przez zbiór V_{β_0,k_0} dostajemy nowe pokrycie M z $\text{cl}(V_{\beta_0,k_0} \subseteq V_{\beta_0})$. Powtarzamy to induktywnie dla wszystkich V_β i wybieramy pokrycie

$$D_\beta = \text{cl}(V_{\beta,k}),$$

które spełnia wymagania z uwagi.



Z uwag udowodnionych wyżej wynika więc, że dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_\beta\}$ rozmaitości topologicznej M istnieje

- lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$ składające się ze zbiorów mapowych i parazwartych oraz
- rodzina $\{D_\beta\}$ zwartych podzbiorów $D_\beta \subseteq V_\beta$, która dalej pokrywa M .

To samo dotyczy też rozmaitości z brzegiem.

2.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

Definicja 2.7. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ określamy jej **nośnik** jako:

$$\text{supp}(f) := \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

Fakt 2.8. [z \mathbb{R}^n] Dla dowolnego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_+$ oraz dowolnego zwartego $D \subseteq \Omega$ istnieje gładka funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $f \geq 0$
2. $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$
3. $f(x) > 0$ dla $x \in D$

Twierdzenie 2.9. [O rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_i\}$ gładkich funkcji $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

1. $f_i \geq 0$
2. dla każdego i nośnik $\text{supp}(f_i)$ zawiera się w pewnym U_α
3. nośniki $\{\text{supp}(f_i)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M
4. dla każdego $x \in M$ $\sum f_i(x) = 1$ [suma ta jest skończona wokół każdego x dzięki 3.]

Dowód. Niech $\{V_j\} \prec \{U_\alpha\}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym przewartymi zbiorami mapowymi. Niech $D_j \subseteq V_j$ będą zbiorami zwartymi, które dalej pokrywają M (na mocy 2.6).

Niech (V_j, ϕ_j) będzie mapą na M i niech

$$\bar{D}_j = \phi(D_j) \subseteq \phi_j(V_j) = \bar{V}_j$$

będzie zbiorem zwartym. Dzięki faktowi z \mathbb{R}^n 2.8 wiemy, że dla każdego j istnieje gładka funkcja $\bar{h}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $\bar{h}_j \geq 0$
2. $\text{supp}(\bar{h}_j) \subseteq \bar{V}_j$
3. $\bar{h}_j(x) > 0$ dla $x \in D_j$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że:

$$h_j(x) = \begin{cases} \bar{h}_j \circ \phi_j(x) & x \in V_j \\ 0 & x \notin V_j \end{cases}$$

Żeby pokazać gładkość h_j , wystarczy pokazać jej gładkość na pewnym otoczeniu każdego punktu.

Na otoczeniu punktów z V_j funkcja jest oczywiście gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich. Dla $p \notin V_j$ istnieje otwarte otoczenie U_p które jest rozłączne z $\text{supp}(h_j)$, a więc jest otwartym otoczeniem na którym h_j jest stale równe zero. Taka funkcja jest oczywiście gładka.

Niech teraz $h(x) = \sum_j h_j(x)$. Jest to dobrze określona definicja, gdyż $\text{supp}(h_j)$ tworzą rodzinę lokalnie skończoną (bo $\{V_j\}$ taka jest). Z lokalnej skończoności nośników wynika, że h jest gładka na M .

Dostajemy też $h(x) > 0$, bo D_j pokrywają całą M , a więc dla każdego $x \in M$ istnieje i takie, że $x \in D_i$, a więc $h_i(x) > 0$.

Określmy $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)}$. Wiemy, że $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka na M , $\text{supp}(f_j) = \text{supp}(h_j) \subseteq V_j$, więc rodzina $\{\text{supp}(f_j)\}$ jest lokalnie skończona i każdy $\text{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α . Wreszcie mamy

$$\sum f_j(x) = \sum \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{\sum h_j(x)} = 1$$

dla każdego $x \in M$.



Definicja 2.10. Rodzina funkcji $\{f_j\}$ jak w dowodzie twierdzenia wyżej jest nazywana **rozkładem jedności** wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

2.3. Zastosowania rozkładów jedności

Zazwyczaj rozkłady jedności służą do konstruowania gładkich funkcji, które są określone na całym M i spełniają pewne wymagania. Z pomocą rozkładów jedności będziemy też "globalizować" inne obiekty na rozmaitościach, np. pola wektorowe, metryki Riemanna czy formy różniczkowalne.

Przykłady:

1. Niech F_1, F_2 będą domkniętymi rozłącznymi podzbiórmi gładkiej rozmaitości M . Wówczas istnieje gładka funkcja $f : M \rightarrow [0, 1]$ taka, że

$$f \upharpoonright F_1 \equiv 1$$

oraz $f \upharpoonright F_2 \equiv 0$.

Dowód. Niech $U_i = M \setminus F_i$, wtedy $\{U_1, U_2\}$ jest pokryciem M . Niech $\{f_i\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_1, U_2\}$. Określmy

$$f(x) = \sum_{\text{supp}(f_i) \subseteq U_2} f_i(x).$$

Weźmy $x \in F_1$, wtedy wszystkie nośniki $\text{supp}(f_i)$ zawierające x zawierają się w U_2 , zatem dla takich x jest

$$f(x) = \sum f_i(x) = 1$$

Jeśli $x \in F_2$, to nośniki $\text{supp}(f_i)$ zawierające x nie mogą zawierać się w U_2 . W takim razie $f(x) = 0$. ☕

2. Rozważmy istnienie gładkiej funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(p) = \begin{cases} = 0 & p \in \partial M \\ > 0 & p \in \text{Int}(M) \end{cases}$$

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem zbiorami mapowymi, a $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą lokalnie gładkimi funkcjami takimi, że

$$f_\alpha = \begin{cases} \bar{f}_\alpha \circ \phi_\alpha & U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \\ 1 & U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \end{cases}$$

gdzie $\bar{f}_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowane jako

$$\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Niech $\{h_\beta\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego β wybieramy $\alpha(\beta)$ takie, że $\text{supp}(h_\beta) \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. Definiujemy $h'_\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ przez

$$h'_\beta = h_\beta \circ f_{\alpha(\beta)}.$$

Wtedy h'_β jest gładkie oraz $\text{supp}(h'_\beta) \subseteq \text{supp}(h_\beta)$, więc rodzina nośników $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$ jest lokalnie skończona.

Zdefiniujmy teraz

$$f(x) = \sum h'_\beta,$$

które z lokalnej skończoności nośników $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$ jest dobrze określone.

- $p \in \partial M$, to dla każdego β $h'_\beta(p) = 0$, więc $f(p) = 0$.
- $p \in \text{Int}(M)$, to wtedy istnieje β takie, że $h_\beta(p) > 0$, a ponieważ dla $\gamma \neq \beta$ $h'_\gamma(p) \geq 0$, to $f(p) > 0$.

3. Dla dowolnego $A \subseteq M$ domkniętego oraz $A \subseteq U \subseteq M$ otwartego istnieje funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla $x \in A$ $f(x) = 1$ oraz $\text{supp}(f) \subseteq U$.

Po angielsku taka funkcja nazywa się *bump function*

Dowód. Niech $U_1 = U$ oraz $U_2 = M \setminus A$, zbiory te pokrywają całe M . Niech h_1, h_2 będzie rozkładem jedności wpisanym w to pokrycie. Wtedy funkcja h_1 ma poszukiwane własności, bo dla $x \in A$ mamy $h_2(x) = 0$, więc $1 = h_1(x) + h_2(x) = h_1(x)$. ☕

4. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest nazywana *exhaust function*, jeśli dla każdego $c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c])$ jest zwartym podzbiorem M . Kiedy idąc po liczbach naturalnych n rozpatrujemy $f^{-1}((-\infty, n])$, to po drodze zahaczamy o wszystkie zwarte zbiory w M , stąd też nazwa. Dowód istnienia *exhaust function* korzysta z rozkładów jedności $\{h_i\}$ wpisanych w dowolne pokrycie przwartymi zbiorami oraz funkcji $f(x) = \sum_{j \geq 1} j \cdot \phi_j(x)$.

Dowód istnienia to wniosek 2.28 z Lee.

2.4. Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności

Twierdzenie 2.11. Dla dowolnego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_\alpha\}$ gładkich funkcji $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

1. $f_\alpha \geq 0$
2. $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$
3. nośniki $\{\text{supp}(f_\alpha)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M [czyli wiele spośród f_α jest zerowych]
4. dla każdego $x \in M$ $\sum f_\alpha(x) = 1$

Dowód. Znowu szkic dowodu za pomocą wyjściowej wersji twierdzenia.

Rozważmy rodzinę $\{f_j\}_{j \in J}$ jak w wyjściowej wersji twierdzenia. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j) \in A$ takie, że $\text{supp}(f_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Zdefiniujmy

$$f_\alpha = \sum_{j: \alpha(j)=\alpha} f_j.$$

Z lokalnej skończoności nośników $\text{supp}(f_j)$ wiemy, że f_α również jest funkcją gładką. Warunek 4 zachodzi w sposób oczywisty, tak samo warunek 1.

Warunki 2 i 3 w łatwy sposób wynikają z obserwacji, że dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny podzbiorów P_t w przestrzeni X , $\text{cl}(\bigcup P_t) = \bigcup \text{cl}(P_t)$. ☕

3. Dyskretne ilorazy rozmaitości

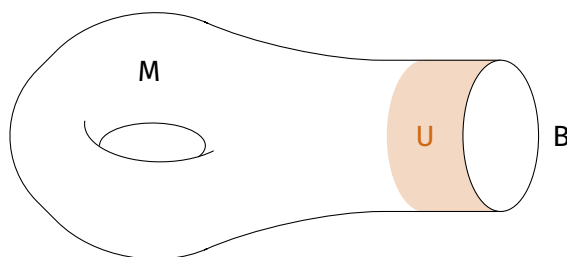
3.1. Klejenie rozmaitości wzdłuż brzegu

Twierdzenie 3.1. Niech M będzie gładką n -rozmaitością, a B niech będzie komponentą brzegu ∂M . Wtedy istnieje dyfeomorficzne (dyfeomorfizm na obraz) włożenie

$$K : B \times [0, 1) \rightarrow M$$

na otwarte otoczenie U komponenty B w M takie, że $K(x, 0) = x$ dla $x \in B$.

Dowód. Dowód za kilka wykładów przy pomocy potoków wektorowych.



Jeśli M_1, B_1 oraz M_2, B_2 są jak wyżej oraz istnieje dyfeomorfizm

$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

to możemy zdefiniować relację równoważności

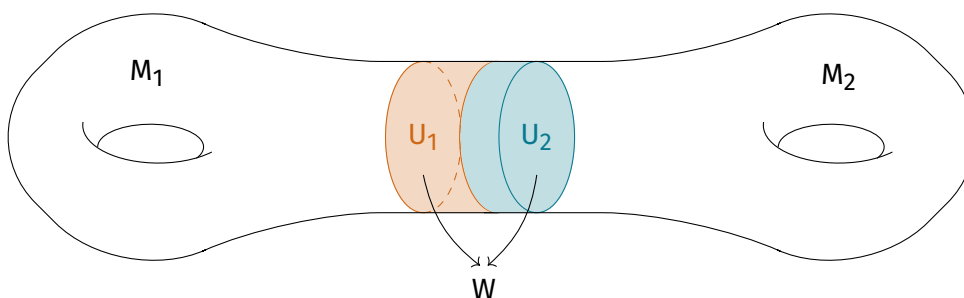
$$B_1 \ni x \sim f(x) \in B_2$$

oraz stworzyć rozmaitość:

$$M_1 \cup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \sim.$$

Struktura na $M_1 \cup_f M_2$ jest częściowo odziedziczona po M_1 i M_2 . Dodatkowo sklejamy zbiory U_i utożsamiając je z produktami $B_i \times [0, 1)$ za pomocą B_i :

$$K_i : B_i \times [0, 1) \rightarrow M_i$$



Na $M_1 \cup_f M_2$ istnieją trzy rodzaje map:

1. dla dowolnej mapy (U, ϕ) na M_1 rozważamy jej obcięcie do $U \setminus B_1$
2. dla dowolnej mapy (V, ψ) na M_2 rozważamy jej obcięcie do $V \setminus B_2$

3. dla dowolnej mapy (W, ξ) na B_1 i $\xi : W \rightarrow \bar{W} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ rozważamy zbiór

$$[W \times [0, 1)] \cup_{f|_W} [f(W) \times [0, 1)] = \hat{W} \subseteq M_1 \cup_f M_2$$

z mapą

$$\hat{\xi} : \hat{W} \rightarrow \bar{\hat{W}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\xi}(x, t) = \begin{cases} (\xi(x), -t) & (x, t) \in U_1 \\ (\xi(f^{-1}(x)), t) & (x, t) \in U_2 \end{cases}$$

Mamy $\hat{\xi}(x, 0) = \hat{\xi}(f(x), 0)$, więc \hat{x} jest dobrze zdefiniowane w punktach sklejenia.

$$\bar{\hat{W}} = \bar{W} \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^n \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

zaś $\hat{\xi} : \hat{W} \rightarrow \bar{\hat{W}}$ jest homeomorfizmem.

Sprawdzenie gładkiej zgodności map z podpunktów 1, 2 i 3 zostanie pominięte.

Rozmaitość $M_1 \cup_f M_2$ wydaje się zależeć jednocześnie od wyboru f oraz otoczeń kołnier-zowych K_i komponent brzegów B_i . W rzeczywistości jednak, $M_1 \cup_f M_2$ jest takie same z dokładnością do dyfeomorfizmu dla dowolnych wyborów K_i :

Fakt 3.2.

1. Jeśli K_1, K'_1 są podobnie położone w M_1 , tzn. istnieje $h : M_1 \rightarrow M_1$ dyfeomorfizm taki, że

$$K'_1 \upharpoonright B_1 \times [0, 1\frac{1}{2}) = h \circ K_1 \upharpoonright B_1 \times [0, \frac{1}{2}),$$

to wtedy

$$M_1 \cup_{f, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f, K'_1, K_2} M_2.$$

Analogicznie gdy weźmiemy K_2, K'_2 . [dowód: ćwiczenia]

2. Każde dwa otoczenia kołnier-zowe komponenty B_1 brzegu ∂M są podobnie położone. [dowód: trudny]
3. Ustalmy otoczenia kołnier-zowe K_1, K_2 . Jeśli $f_0, f_1 : B_1 \rightarrow B_2$ są izotopijnymi dyfeomorfizmami, tzn. istnieje gładkie $F : [0, 1] \times B_1 \rightarrow B_2$ takie, że $F(0) = f_0$ a $F(1) = f_1$, wtedy

$$M_1 \cup_{f_0, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f_1, K_1, K_2} M_2.$$

[dowód: łatwy]

3.2. Suma spójna rozmaitości

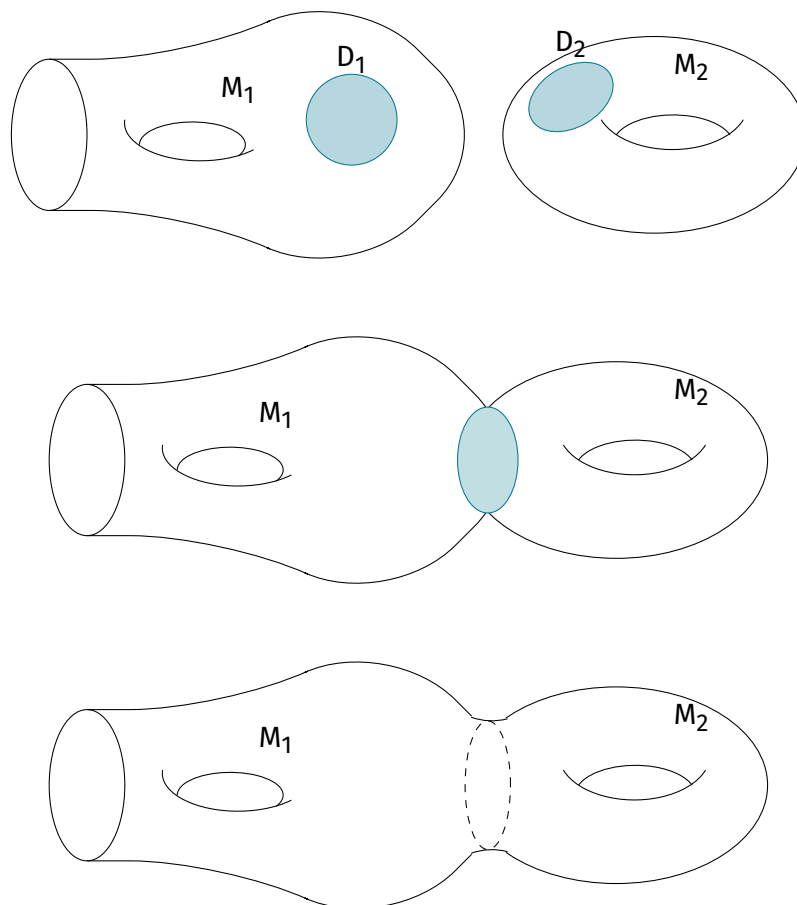
Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami wymiaru n . Weźmy $D_i \subseteq M_i$, czyli kule n -wymiarowe zawarte w otoczeniach mapowych. Oznaczmy $B_i = \partial D_i \cong S^{n-1}$ jako komponenty brzegu rozmaitości $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$. Niech

$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

będzie dyfeomorfizmem. Oznaczamy wówczas

$$[M_1 \setminus \text{Int}(D_1)] \cup_f [M_2 \setminus \text{Int}(D_2)] = M_1 \# M_2$$

jako **sumę spójną** rozmaitości M_1 i M_2 .



Uwaga 3.3.


1. Jeśli M_i jest rozmaiłością spójną, to $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$, z dokładnością do dyfeomorfizmu, nie zależy od wyboru dysku D_i .
2. Istnieją dokładnie 2 klasy izotopii dyfeomorfizmów $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$: te zachowujące orientację oraz te, które orientacji nie zachowują.
3. Są co najwyżej dwie rozmaiłości będące sumą spójną $M_1 \# M_2$. W przypadku rozmaiłości zorientowanych, jedna z nich jest preferowana.

Klasyfikacja zamkniętych powierzchni spójnych (czyli zwarte 2-wymiarowe rozmaiłości bez brzegu):

1. Powierzchnie orientowalne: $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2, \dots$
2. Powierzchnie nieorientowalne $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2, \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots$

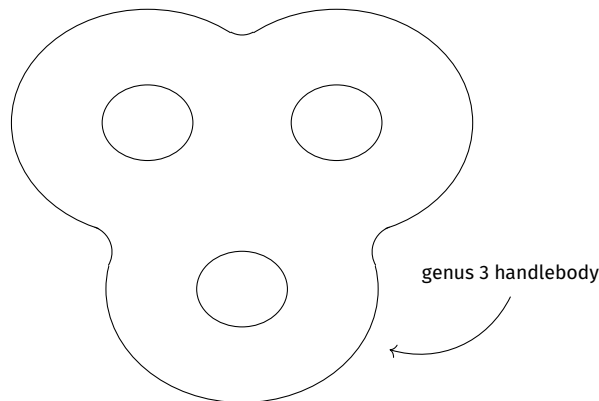
Powierzchnie z powyższej listy są parami niedyfeomorficzne. Każda zamknięta powierzchnia jest dyfeomorficzna z jedną z tej listy.

3-rozmaiłości:

 **Dehn surgery:** niech M będzie 3-wymiarową rozmaiłością M z kolekcją węzłów (podrozmaiłości S^1 dyfeomorficznych do skończonej rozłącznej sumy S^1) $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$. Rozmaiłość M wywiercona wzdłuż tubowego otoczenia L posiada k -wiele komponentów brzegu $T_1 \cup \dots \cup T_k$. Chirurgia Dehna polega na wywierceniu z M tubowego otoczenia L wraz ze sklejeniem każdej z komponent brzegu $T_1 \cup \dots \cup T_k$ w jeden torus [to jest Dehn filling i jest wiele sposobów na wytworzenie go].

Poniżej bardzo luźne opisy z wikipedii. Dokładniejsze opisy lepiej jest doczytać w literaturze.

➡ **Rozkłady Heegaarda** [Heegaard's splittings] na zorientowanej 3-rozmaitości z brzegiem M polega na na podzieleniu jej na dwa handlebody [fidget spinnery; 3-rozmaitości oriengowalne z brzegiem zawierające parami rozłączne włożone 2-dyski takie, że rozmaitość wzdłuż nich przecięta jest S^3].



3.3. Działanie grupy dyfeomorfizmów

Definicja 3.4. Grupa G dyfeomorfizmów M to zbiór dyfeomorfizmów $g : M \rightarrow M$ zamknięty na składanie i branie odwrotności. Mówimy wtedy, że G działa na M przez dyfeomorfizmy.

Definicja 3.5. **Orbitą** punktu $x \in M$ względem działania G na M nazywamy zbiór

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

Uwaga 3.6. Orbity $G(x)$ i $G(y)$ są albo rozłączne, albo pokrywają się.

Rodzina wszystkich orbit stanowi **rozbitcie** rozmaitości M na podzbiory.

Definicja 3.7. **Przestrzeń ilorazowa** działania G na M to przestrzeń, której punktami są orbity $G(x)$:

$$M/G = \{G(x) : x \in M\}$$

zaś topologia jest ilorazowa, tzn. **zbiór orbit jest otwarty** w $M/G \iff$ suma tych orbit stanowi otwarty podzbiór w M .

Jeśli $U \subseteq M$ jest otwartym podzbiorem, to

$$G(U)/G = \{G(x) : x \in U\}$$

jest otwarty w M/G i każdy zbiór otwarty w M/G jest takiej postaci. Kiedy \mathcal{B} jest bazą topologii w M , to rodzina

$$\{G(U)/G : U \in \mathcal{B}\}$$

jest **bazą topologii** w M/G . Z tego powodu M/G **zawsze posiada przeliczalną bazę**.

Definicja 3.8. Lokalną euklidesowość M/G zapewnia warunek na **działanie nakrywające**:

$$(\forall p \in M)(\exists p \in U \overset{\text{otw.}}{\subseteq} M)(\forall g_1, g_2 \in G) g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Przy takim działaniu G na M podzbiór $G(U)/G$ jest otoczeniem $G(p)$ homeomorficzny z U . Oznacza to lokalną euklidesowość M/G .

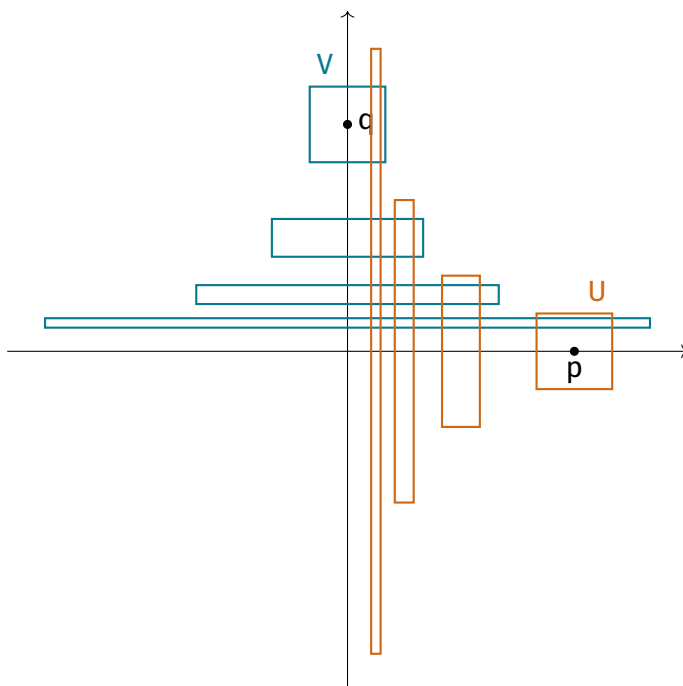
Fakt 3.9. Jeśli działanie grupy G przez homeomorfizmy na rozmaitości M jest nakrywające, to iloraz M/G jest lokalnie euklidesowy dla wymiaru $n = \dim(M)$.

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

jest nakrywające. W takim razie iloraz $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\langle A \rangle$ jest lokalnie euklidesowy wymiaru 2. Jednak iloraz ten nie jest przestrzenią Hausdorffa, bo dla punktów na osobnych osiach p i q zbiory otwarte:



nigdy nie mogą być rozłączne. Stąd rozmaitość ilorazowa M/G nie może być nigdy rozmaitością różniczkowalną.

Definicja 3.10. Działanie G na M przez dyfeomorfizm jest:

1. **wolne**, gdy dla każdego $g \in G \setminus \{id\}$ i dla każdego $x \in M$ $g(x) \neq x$
2. **właściwie nieciągłe** [properly discontinuous], gdy dla każdego zwartego $K \subseteq M$ zbiór $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony.

Definicja 3.11. Dla $x \in M$ **stabilizator** (nadgrupa stabilizująca) punktu x względem G to

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G : g(x) = x\}$$

jest automatycznie podgrupą G .

Fakt 3.12. Działanie G jest wolne \iff wszystkie stabilizatory $\text{stab}(x)$ są trywialne ($= \{id\}$).

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z}_n na \mathbb{R}^2 zadane przez potęgi obrotu o kąt $\frac{2\pi}{n}$ nie jest wolne.

2. Działanie G jest wolne \iff dla każdego $x \in M$ odwzorowanie $G \rightarrow G(x)$ zadane przez $g \mapsto g(x)$ jest bijekcją.

Fakt 3.13.

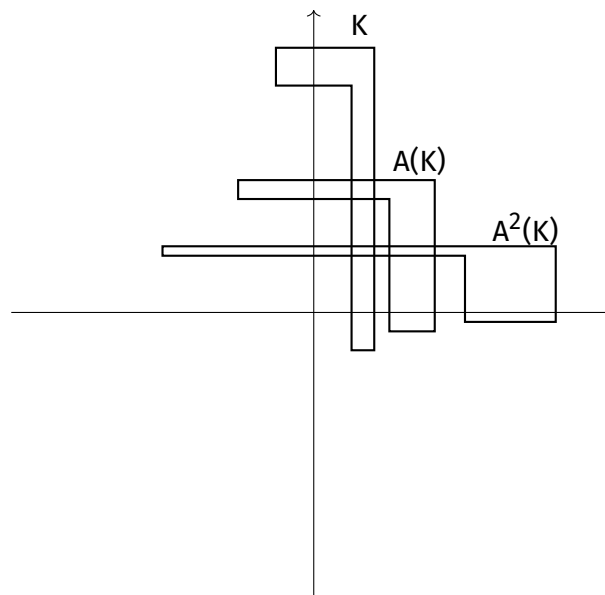
1. Gdy działanie G przez homeomorfizmy na przestrzeni topologicznej lokalnie zwartej X jest właściwie nieciągłe, to każda orbita $G(x)$ jest dyskretnym podzbiorem w X (tzn. każdy $x \in G(x)$ ma otwarte otoczenie U takie, że $U \cap G(x) = \{x\}$).
2. Jeśli działanie G na X jest właściwie nieciągłe i wolne, to jest też nakrywające.
3. Jeśli G działa przez homeomorfizmy na przestrzeni lokalnie zwartej X w sposób właściwie nieciągły, to iloraz X/G jest przestrzenią Hausdorffa.

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z} na S^1 przez potęgi obrotu o kąt α niewspółmierny z 2π jest wolne, ale ma orbity gęste w S^1 , a więc nie są one dyskretne. Zatem działanie nie jest ani właściwie nieciągłe, ani wolne. Iloraz S^1/\mathbb{Z} jest wtedy przestrzenią z topologią trywialną, więc nie jest rozmaitością.
2. Działanie \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nie może być właściwie nieciągłe. Można to zobaczyć bezpośrednio:



dla każdego $n \geq 1$ mamy $A^n(K) \cap K \neq \emptyset$.

Jednakże tak zadane działanie \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jest wolne i ma dyskretne orbity. W takim razie warunek, by działanie było wolne i miało dyskretne orbity nie jest wystarczający do tego, by iloraz był rozmaitością. Nie musi być nawet przestrzenią Hausdorffa, jak pokazaliśmy wcześniej.

Fakt 3.14. Jeśli G jest działaniem na M^n przez dyfeomorfizmy w sposób wolny i właściwie nieciągły, to iloraz M/G jest


- lokalnie euklidesowy n -wymiarowy
- Hausdorffa



- ma przeliczalną bazę

Zatem M/G jest n -wymiarową rozmaitością topologiczną.

3.4. Gładki atlas na M/G

Niech $U \subseteq M$ spełnia warunek:

() U jest zbiorem mapowym oraz dla każdych $g_1, g_2 \in G, g_1 \neq g_2 \implies g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

Zauważmy, że każdy $p \in M$ ma otoczenie U spełniające () , a zatem każda orbita $G(p) \in M/G$ ma otoczenie postaci $G(U)/G$ ze zbiorem U spełniającym () . Dla takiego U odwzorowanie

$$i_U : U \rightarrow G(U)/G$$

$$p \mapsto G(p)$$

jest homeomorfizmem. Niech teraz $\phi : I \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie mapą z atlasu \mathcal{A} . Wtedy

$$\phi_G : G(U)/G \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi_G = \phi \circ i_U^{-1}$$

jest obiecującym kandydatem na mapę dla M/G . Rozważmy rodzinę

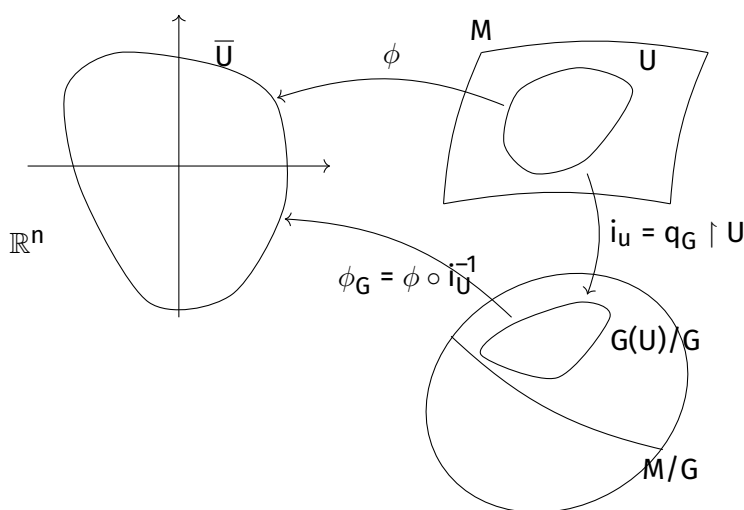
$$\mathcal{A}_G = \{(G(U)/G, \phi_G) : U \text{ spełnia } (\text{orange box icon}) \text{ oraz } (U, \phi) \in \mathcal{A}\}.$$


Fakt 3.15. Odwzorowanie ilorazowe $q_G : M \rightarrow M/G$ zadane przez

$$q_G(x) = G(x) \in M/G$$

jest gładkie i jest lokalnym dyfeomorfizmem.

Dowód.



Zakładamy, że \mathcal{A}_G tworzy gładki atlas [fakt 3.16]. Wtedy q_G obcięte do mapowego U musi spełniać () , więc jest bijekcją na otwarty podzbiór w M/G . Ponadto

$$\phi_G \circ q_G \circ \phi^{-1} = \phi \circ i_U^{-1} \circ i_U \phi^{-1} = \text{id}_{\bar{U}}$$

czyli q_G musi być funkcją gładką, bo inaczej $\text{id}_{\bar{U}}$ takie nie będzie. Stąd q_G jest dyfeomorfizmem. ☕

Fakt 3.16. \mathcal{A}_G jest gładko zgodny, więc jest gładkim atlasem na M/G .

Dowód. Niech $(G(U)/G, \phi_G)$ oraz $(G(V)/G, \psi_G)$ będą mapami związanymi z (U, ϕ) i (V, ψ) na zbiorach U, V spełniającymi (\circledast) . Rozważmy odwzorowanie przejścia

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} : \phi_G(G(U)/G \cap G(V)/G) \rightarrow \psi_G(G(U)/G \cap G(V)/G)$$

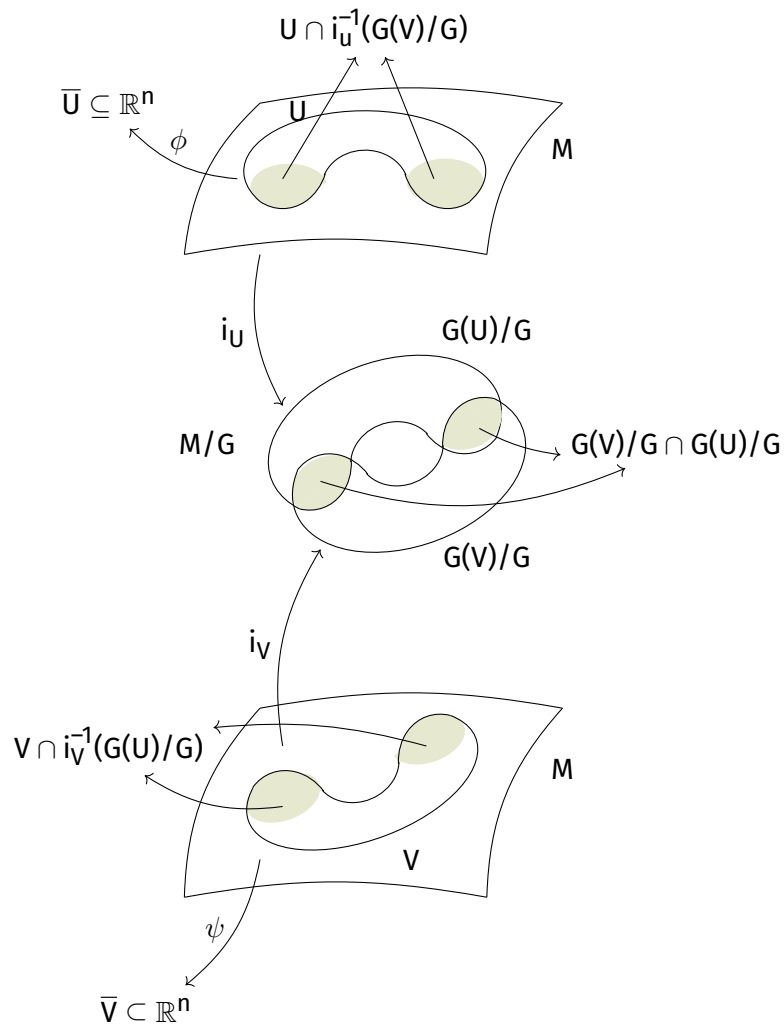
wiemy, że zachodzi

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ [\phi \circ i_U^{-1}]^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ i_U \circ \phi^{-1}$$

czyli wystarczy, żeby

$$i_V^{-1} i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

było gładkie.



Złożenie

$$i_V^{-1} \circ i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

jest homeomorfizmem otwartych podzbiorów w M . Weźmy $y = i_V^{-1} i_U(x)$, wtedy

$$G(x) \ni i_U(x) = i_V(y) \in G(y)$$

czyli x i y są w tej samej orbicie działania G . W takim razie istnieje $g_x \in G$ takie, że $y = g_x(x)$. Z ciągłości $i_V^{-1}i_U$ możemy wywnioskować, że przyporządkowanie $x \mapsto g_x$ musi być stałe na komponentach spójności. W przeciwnym przypadku obraz spójnej komponenty przez ciągłe $i_V^{-1}i_U$ przeciąłby zbiory $g(U)$ dla kilku różnych g , a te są rozłączne dla różnych g . Stąd obraz nie byłby spójny, co daje sprzeczność.

Komponenty spójności $U \cap i_U^{-1}(G(V)/G)$ są otwarte w M . Na każdej takiej komponentce W mamy $i_V^{-1}i_U(x) = g(x)$ dla ustalonego g , które jest zależne od doboru komponenty (może być różne dla różnych komponent). Zatem

$$\psi_G \phi_G^{-1} = \psi i_V^{-1} i_U \phi^{-1}$$

jest zadane an $\phi(W)$ wzorem

$$\psi_G \phi_G^{-1}(x) = \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x).$$

Odwzorowanie $\psi g \phi$ jest wyrażeniem dyfeomorfizmu g w mapach ϕ i ψ , więc jest gładkie. Z tego wynika, że $\psi_G \phi_G^{-1}$ jest gładkie na każdej komponentce spójności dziedziny, czyli jest gładkie. ☕

Uwaga. Iloraz M/G dla wolnego i właściwie nieciągłego działania grupy dyfeomorfizmów G na rozmaitość M z brzegiem jest rozmaitością z brzegiem.

Przykłady:

1. Działanie \mathbb{Z}^n na \mathbb{R}^n przez przesunięcia. Wtedy $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ to n -wymiarowy torus.

2. \mathbb{Z} działa na produkcie $S^1 \times \mathbb{R}$ tak, że dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$k \cdot (\theta, t) = ((-1)^k \theta, t + k)$$

Jest to przesunięcie z odpowiednią potęgą odbicia. Iloraz $(S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ jest butelką Kleina.

3. \mathbb{Z} działa na $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ przez

$$k \cdot (x, y) = ((-1)^k x, y + k)$$

a iloraz $([-1, 1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ jest wstęgą Möbiusa.

4. $\text{Conf}_n(M)$ jest przestrzenią konfiguracyjną n -elementowych podzbiorów gładkiej rozmaitości M (bez brzegu), tzn. jej punkty opisują wszystkie możliwe położenia punktów w układzie.

$\text{Conf}_n(M)$ można wyrazić jako iloraz działania nieciągłej grupy dyfeomorfizmów. Rozważmy produkt

$M \times \dots \times M_n$ oraz tzw. uogólnioną przekątną $\Delta^n(M)$ złożoną z punktów

$$(x_1, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M$$

takich, że $x_i = x_j$. Zbiór $\Delta^n(M)$ jest domknięty w $M \times \dots \times M$, więc $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$ jest otwarty i składa się z (x_1, \dots, x_n) takich, że x_i są parami różne. Grupa permutacji S_n działa na $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$ przez

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Wtedy $(M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M))/S_n = \text{Conf}(M)$. Takie działanie jest wolne i właściwie nieciągłe, bo S_n jest skończona. Dodatkowo, każda taka funkcja σ jest dyfeomorfizmem.

TRZEBABY DOPISAĆ

4. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, \dots, f_n)$ i dla $t \in (a, b)$ pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \\ \dots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

4.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a, b) \rightarrow M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest **zbazowana w p** . Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy $C_p M$.

Definicja 4.1. Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p . Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 4.2. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne w mapie (U, ϕ) wokół p , to są też styczne w dowolnej innej mapie (W, ψ) wokół p (zgodnej z (U, ϕ)).

Dowód.

$$\begin{aligned} (\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' = \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$



Definicja 4.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p .

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na $C_p M$, bo jest zwrotna, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 4.4. Przestrzenią styczną do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_p M := C_p M / \text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_p M$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p .

4.2. Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$

Dla mapy $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\begin{aligned} \phi_p^* : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^n & \phi_p^*([c, t_0]) &= (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n \\ \lambda_{\phi, p} : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_p M & \lambda_{\phi, p}(v) &= [c_v, 0] \end{aligned}$$

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji $T_p M$ (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Lemat 4.5. $\phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^* = \text{id}_{T_p M}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi, p}$ są one wzajemnie jednoznaczne i do siebie odwrotne.

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy


$$\begin{aligned} \phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) = v \end{aligned} \quad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_p M$

$$\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi, p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi \circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi \circ c)'(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)]$ i w takim razie $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$  \checkmark .

Fakt 4.6. Na przestrzeni stycznej $T_p M$ istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi, p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_p M$: $X + Y := \lambda_{\phi, p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w \mathbb{R}^n)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi, p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w \mathbb{R}^n).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z \mathbb{R}^n przez $\lambda_{\phi, p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z \mathbb{R}^n na $T_p M$ struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_p M \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi,p^{-1}}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\begin{aligned} \psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})\left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\phi(p) + tv)\right] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v) \end{aligned}$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.



O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla $T_p M$ stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p . W tej mapie działania na wektorach z $T_p M$ sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w \mathbb{R}^n .

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (\text{id}_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p \mathbb{R}^n$ z \mathbb{R}^n .
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \rightarrow M$ oraz $c : (a, t_0] \rightarrow M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy $C_p M$. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na $T_p M$ określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, $\frac{\partial}{\partial x_2}(p)$, ..., $\frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p \mathbb{R}^n$ ($T_p U$), zaś dowolny wektor z $T_p \mathbb{R}^n$ ($T_p U$) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

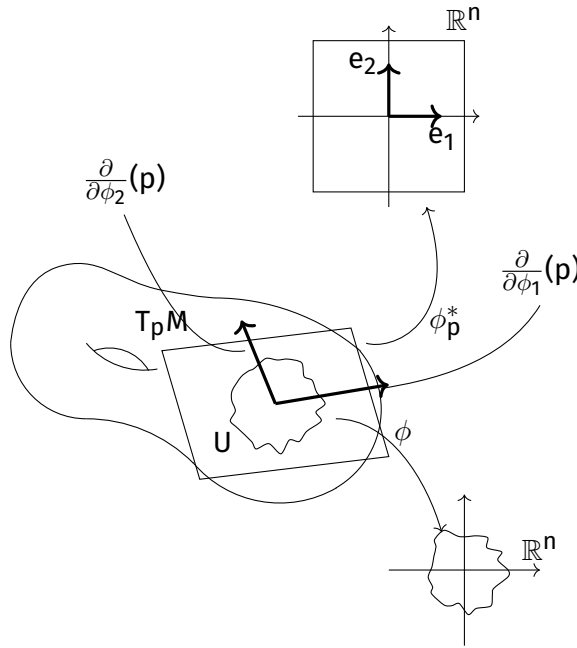
Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wektorów e_1, \dots, e_n oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę $T_p M$ i dowolny wektor z $T_p M$ ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.

4.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \rightarrow N$ i $p \in M$, $f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_p M$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_q N$.



Lemat 4.7. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, to $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_q N$ też są styczne

Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q ,
 $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 4.8. Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 4.7.

Lemat 4.9. $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_p M \xrightarrow{df_p} T_{f(p)} N \xrightarrow{\psi_{f(p)}^*} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 4.6).

$$\begin{aligned} \psi_{f(p)}^* \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_{f(p)}^* \circ df_p([c_v, 0]) = \psi_{f(p)}^*([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v] \end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \rightarrow N$ odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół $f(p)$ jako

$$\psi_{f(p)}^* df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w $T_p M$ i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)} N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ jest wónna odwzorowaniu "mapowemu" $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_p M$, wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

Mapę $(id_{\mathbb{R}^n})_{\phi(p)}^* : T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $id_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \rightarrow M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \rightarrow T_{c(t_0)} M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)} M$.
- Rozważmy gładką funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym na $T_p M$.

Definicja 4.10. Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_p M$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X :

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$



- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_p M$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$


Przykłady:

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p \mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_p M$ i $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

Stąd oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Spis twierdzeń

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Definicja: przestrzeń topologiczna | 3 |
| 1.2 | Twierdzenie: twierdzenie brouwer'a | 4 |
| 1.3 | Definicja: mapa | 4 |
| 1.4 | Definicja: funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka | 6 |
| 1.5 | Definicja: zgodność map | 7 |
| 1.6 | Definicja: atlas gładki | 8 |
| 1.7 | Definicja: rozmaitość gładka | 9 |
| 1.8 | Definicja: zgodność atlasów, mapy z atlasem | 10 |
| 1.9 | Definicja: atlas maksymalny | 10 |
| 1.10 | Fakt: gładkość względem atlasu | 10 |
| 1.11 | Fakt | 11 |
| 1.12 | Definicja | 11 |
| 1.13 | Fakt | 11 |
| 1.14 | Definicja: dyfeomorfizm | 11 |
| 1.15 | Definicja: odwzorowanie C^k -różniczkowalne | 12 |
| 1.16 | Fakt | 12 |
| 1.17 | Uwaga | 13 |
| 1.18 | Lemat | 13 |
| 1.19 | Definicja: rozmaitość z brzegiem | 15 |
| 1.20 | Fakt: raz w brzegu, zawsze w brzegu | 15 |
| 1.21 | Definicja: brzeg, wnętrze | 15 |
| 1.22 | Fakt | 15 |
| 2.1 | Definicja: pokrycie lokalnie skończone | 17 |
| 2.2 | Definicja: rozdrobnienie | 17 |
| 2.3 | Definicja: przestrzeń parazwarta | 17 |
| 2.4 | Uwaga | 17 |
| 2.5 | Uwaga | 18 |
| 2.6 | Uwaga | 18 |
| 2.7 | Definicja: nośnik funkcji | 19 |
| 2.8 | Fakt | 19 |
| 2.9 | Twierdzenie: o rozkładzie jedności | 19 |
| 2.10 | Definicja: rozkład jedności | 20 |
| 2.11 | Twierdzenie | 22 |
| 3.1 | Twierdzenie: otoczenie kołnierzone | 23 |
| 3.2 | Fakt | 24 |
| 3.3 | Uwaga | 25 |
| 3.4 | Definicja: grupa dyfeomorfizmów | 26 |
| 3.5 | Definicja: orbita | 26 |
| 3.6 | Uwaga | 26 |
| 3.7 | Definicja: przestrzeń ilorazowa działania G na M | 26 |
| 3.8 | Definicja: działanie nakrywające | 26 |
| 3.9 | Fakt | 27 |
| 3.10 | Definicja: działanie wolne, właściwie nieciągłe | 27 |
| 3.11 | Definicja: stabilizator | 27 |
| 3.12 | Fakt | 27 |
| 3.13 | Fakt | 28 |
| 3.14 | Fakt | 28 |
| 3.15 | Fakt | 29 |
| 3.16 | Fakt | 30 |
| 4.1 | Definicja: styczność krzywych w mapie | 32 |
| 4.2 | Lemat: styczność w jednej mapie \iff styczność w każdej mapie | 32 |
| 4.3 | Definicja: styczność krzywych | 32 |
| 4.4 | Definicja: przestrzeń styczna | 33 |
| 4.5 | Lemat | 33 |
| 4.6 | Fakt: struktura przestrzeni wektorowej na przestrzeni stycznej | 33 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.7 | Lemat: <i>krzywe stycznne po przejściu przez $f:M \rightarrow N$ są nadal stycznne</i> | 35 |
| 4.8 | Definicja: <i>różniczka</i> | 35 |
| 4.9 | Lemat: <i>df jest odwzorowaniem liniowym</i> | 35 |
| 4.10 | Definicja: <i>pochodna kierunkowa</i> | 36 |