



Każdą macierz  $A$   $m \times n$  o wyrazach rzeczywistych taką, że  $\text{rank}(A) = n$ , można zapisać jako  $A = QR$ , gdzie  $R$  jest macierzą górnątrójkątną, a  $Q$  ma kolumny ortogonalne. Ponieważ my będziemy rozważać macierze  $A$  będące reprezentacją jednoznacznych układów równań, to interesują nas tylko  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

Zauważmy, że jeśli  $A$  ma niezerowy wyznacznik, to  $A$  nie może mieć liniowo zależnych kolumn. W takim razie, wektory  $a_1, \dots, a_n$  odpowiadające kolumnom  $A$  są bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  jako maksymalny możliwy układ wektorów liniowo niezależnych. Możemy na ich podstawie stworzyć bazę ortonormalną  $u_1, \dots, u_n$  przez proces Grama-Schmidta. Wtedy dla  $k = 1, \dots, n$

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Co więcej, dla dowolnego  $a_k$  z oryginalnej bazy możemy go zapisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów z bazy ortonormalnej:

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i \left[ a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \right]$$

a ponieważ  $a_1, \dots, a_n$  były wektorami lnz, to dla  $i > k$   $c_i = 0$ . Niech  $r_k$  to będzie wektor zawierający współczynniki  $c_i$  dla wektora  $a_k$ :

$$r_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli mamy, że

$$a_k = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] r_k$$

i dalej

$$A = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n].$$

Zauważamy, że  $R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]$  to macierz górnątrójkątna, a  $Q$  to macierz ortogonalna.

# 1. Section test

## 1.1. Subsection test

Niech teraz  $A$  to **macierz główna rozważanego** układu równań,  $Q, R$  to **macierze z jej rozkładu**,  $X$  niech będzie **wektorem** wartości szukanych, a  $B$  niech będzie wektorem wyrazów wolnych. Wtedy

$$AX = B$$

$$(QR)X = B$$

i ponieważ dla macierzy ortonormalnych mamy  $Q^{-1} = Q^T$ , to w prosty sposób możemy zamienić powyższy układ na

$$RX = Q^T B.$$

$$A \implies B$$

i śmiga

