Wykład 13. Produkty tensorowe c.d.

Przykład. $R[X]$, $R[X]$: R-moduły.

$$R[X]\otimes R[Y] \cong R[X,Y] \text{ w tym sensie, że:}$$

$$R[X]\times R[Y] \xrightarrow{\otimes} R[X,Y]$$

dane przez: $\cancel{W(X)}$ $W(X)\otimes V(Y) = W(X)\cdot V(Y)$

spełnia warunek (*) z Uwagi 12.3 uniwersalności:

$$\begin{tikzcd}
R[X]\times R[Y] \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g"', "R\text{-}2\text{-liniowe}"'] & R[X,Y] \arrow[d, dashed, "\exists!\, h\ R\text{-liniowe}?"] \arrow[dl, phantom, "\#"] \\
& N
\end{tikzcd} \qquad (+)$$

wtedy $h(W(X)\cdot V(Y)) =$

ten warunek → $= g(W(X), V(Y))$

dla wszystkich $W(X)\in R[X]$, $V(Y)\in R[Y]$

+ R-liniowość

wyznacza h na całym $R[X,Y]$.

stąd: jedyność h w (+).

- Istnienie h:
  - dla jednomianów $\{X^nY^m\}_{n,m\geq 0}$: baza R-modułu $R[X,Y]$

$$h(X^nY^m) = g(X^n, Y^m).$$

– dla $W(X,Y) \in R[X,Y]$

$$\underset{\parallel}{W} = \sum_{n,m} \underset{\hat{R}}{r_{n,m}} X^n Y^m \qquad h(W) = \sum r_{nm} h(X^n Y^m)$$

– łatwo sprawdzić, że tak określone h ~~spełnia~~ dobre w (†).

~~Wn~~ **Wn.** Jeśli M_n : wolny R-moduł wymiaru n o bazie $\{b_1, \dots, b_n\}$, M_m — // — // — m

$\underset{\{c_1,\dots,c_m\} \text{ baza}}{\cup}$,

to $M_n \otimes M_m$: wolny R-moduł o bazie $\{b_i \otimes c_j\}_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, wymiaru $n \times m$.

D-d. $M_n \cong R_{<n}[X]$: R-moduł wielomianów stopnia $<n$.

$$R_{<n}[X] \otimes R_{<m}[Y] \cong \underbrace{R_{<n,<m}[X,Y]}_{\substack{\text{wielomiany } W(X,Y) \text{ t. że} \\ \deg_X W < n,\ \deg_Y W < m.}}$$

jak w przykładzie.

<u>Własności iloczynu tensorowego</u>

(1) $M_1 \otimes M_2 \underset{\varphi}{\cong} M_2 \otimes M_1$

t. że $\varphi(m_1 \otimes m_2) = m_2 \otimes m_1$

(2) $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \underset{\varphi}{\cong} (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$

t. że $\varphi(m_1 \otimes m_2 \otimes m_3) =$
$= (m_1 \otimes m_2) \otimes m_3$

Analogicznie $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$.

(3) $R \otimes M \cong M$.

<u>D-d</u> (1), (2): ćwiczenie.

(3) $f : R \times M \longrightarrow M \quad f(r,m) = r \cdot m$

R-2-liniowe.

Wystarczy pokazać, że f spełnia (*) z Uwagi 12.3:

$$\begin{tikzcd} R \times M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"', "\text{R-2-liniowe}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\#"] & M \arrow[d, dashed, "\exists!\, h \text{ R-liniowe}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

bo: $h(\underset{\substack{\uparrow \\ M}}{m}) = h(f(1,m)) = \underline{g(1,m)} \Rightarrow$ jedyność h

Istnienie h: Wzór $h(m) = g(1,m)$

- Zadaje R-homomorfizm, bo g R-liniowe na 2. współrzędnej.
- Diagram komutuje bo

g: R-liniowe na obu współrzędnych:

$f(r,m) = r \cdot m \cancel{\#} \Rightarrow$

$\cancel{g(} \ \cancel{h(r,} \ \cancel{h(rm)=}$

$$(h \circ f)(r,m) = h(rm) = g(1, rm) = \cancel{r(g(1,} \ r \cdot g(1,m) = g(r,m)$$

D-dy (1), (2): podobne.

Uwaga 13.1. (1) Jeśli $\underbrace{A \subseteq M,\ B \subseteq N}_{\text{zbiory generujące}}$, to $A \otimes B = \{a \otimes b : a \in A, b \in B\}$ generuje $M \otimes N$.

(2) Załóżmy, że

$f : M \longrightarrow M'$, $g : N \longrightarrow N'$ R-liniowe.

Wtedy $\exists !\, h : M \otimes N \xrightarrow{R\text{-liniowe}} M' \otimes N'$ t. że

$$h(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

D-d

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f \times g"'] \arrow[dr, "(\otimes \circ (f \times g))^{\#}"] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\
M' \times N' \arrow[r, "\otimes"'] \arrow[ur, phantom, "\#"] & M' \otimes N'
\end{tikzcd}$$

$h(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$

$\otimes \circ (f \times g)$: 2-liniowe, bo:

$\otimes \circ (f \times g)(m + m', n) = \otimes\big(f(m) + f(m'), g(n)\big) =$

$= \big(f(m) + f(m')\big) \otimes g(n) = f(m) \otimes g(n) + f(m') \otimes g(n) =$

$= \otimes \circ (f \times g)(m, n) + \otimes \circ (f \times g)(m', n).$

podobnie reszta

Def. 13.2. $\underbrace{f \otimes g}_{} = h$ z uwagi 13.1

Iloczyn tensorowy f i g.

Uwaga 13.3.

(1)
$$M \xrightarrow{f} M' \qquad N \xrightarrow{g} N' \qquad \longrightarrow \qquad M \otimes N \xrightarrow{f \overset{\Phi}{\otimes} g} M' \otimes N'$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f' \circ f"'] & M' \arrow[dl, "f'"] \\ M'' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g' \circ g"'] & N' \arrow[dl, "g'"] \\ N'' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "f \otimes g"] \arrow[d] & M' \otimes N' \arrow[dl, "f' \otimes g'"] \\ M'' \otimes N'' & \end{tikzcd}$$

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

(d-d:
wystarczy sprawdzić
= na tensorach prostych)

(2) $id_M \otimes id_N = id_{M \otimes N}$

(3) $\Phi : Hom(M, M') \times Hom(N, N') \longrightarrow Hom(M \otimes M', N \otimes N')$

$\Phi(f, g) = f \otimes g$

Φ R-2-liniowe.

Uwaga 13.4. $M \otimes (\bigoplus_{i \in I} N_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$

$$m \otimes \sum_i n_i \mapsto \sum_i m \otimes n_i.$$

D-d. Niech

$$\begin{tikzcd} M \times \bigoplus_i N_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"', "\text{2-liniowe}"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \bigoplus_i (M \otimes N_i) \arrow[dl, dashed, "\exists! h \text{ R-liniowe}:"] \\ N & \end{tikzcd}$$

$f(m, \sum_i n_i) = \sum_i m \otimes n_i$ R-2-liniowe!

- jedyność h:

$$h(\underbrace{\sum_i m\otimes n_i}) = g(m, \sum_i n_i) \quad \text{z komutowania.}$$

elementy tej postaci generują $\bigoplus_i (M\otimes N_i)$

- istnienie h:

$$\begin{tikzcd} M\times N_i \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g|_{M\times N_i}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\#"] & M\otimes N_i \arrow[d, dashed, "\exists!\, h_i:\ R\text{-liniowe}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$M\times \bigoplus_i N_i \supseteq$

$h_i(m\otimes n_i) = g(m,n_i)$

R-2-liniowe

$\Downarrow$ własności uniwersalności $\bigoplus_i$

$\exists!\, h: \bigoplus_i (M\otimes N_i) \xrightarrow[R\text{-liniowe}]{} N \quad \forall i:$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i (M\otimes N_i) \arrow[r, "h"] & N \\ M\otimes N_i \arrow[u, "\cup\!|"] \arrow[ur, "h_i"'] \arrow[u, phantom, shift left=8ex, "\#"] & \end{tikzcd}$$

tzn: $h(m\otimes n_i) = h_i(m\otimes n_i) = g(m, n_i)$

wsc: $h(\sum_i m\otimes n_i) = \sum_i g(m, n_i) = g(m, \sum_i n_i)$

Dla $N = M\otimes \bigoplus_i N_i$ dostajemy: h: izomorfizm i

$$h(\sum_i m\otimes n_i) = m\otimes \sum_i n_i.$$

Iloczyny zewnętrzne $R = K$: ciało.

V : p. liniowa$/K$. $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$.

$\sigma \in S_n$ działa na $V \otimes \ldots \otimes V$ permutując współrzędne (w tensorach prostych)

$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) =$

$= v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$.

Def. 13.5. ~~(1) Te~~ Niech $x \in V^{\otimes n}$.

(1) x jest symetryczny, gdy $\forall \sigma \in S_n \ \sigma(x) = x$

(2) x antysymetryczny, gdy $\forall \sigma \in S_n \ \sigma(x) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x$.

$\Lambda^n V = \{x \in V^{\otimes n} : x \text{ antysymetryczny}\}$,

$S^n V = \{x \in V^{\otimes n} : x \text{ symetryczny}\}$

Gdy $\operatorname{char} K = 0$ (3), $\Lambda^n V, S^n V < V^{\otimes n}$.

· $n = 2 \Rightarrow V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$.

$x = \frac{1}{2}(x + \sigma(x)) + \frac{1}{2}(x - \sigma(x))$,

gdzie $\sigma = (1,2) \in S_2$. $S^2 V \cap \Lambda^2 V = \{0\}$.

· $f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \xrightarrow[\text{n-liniowe}]{} W$ / symetryczne ... \ antysymetryczne ...

~~$f(v_{\sigma(1)} \ldots$~~ ~~$f(v_1 \ldots$~~

$\forall \sigma \in S_n$

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \begin{cases} f(v_1, \ldots, v_n) & \text{– symetryczne} \\ \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_1, \ldots, v_n) & \text{: antysymetryczne.} \end{cases}$$

Np $\det : K^n \times \ldots \times K^n \longrightarrow K$ antysymetryczne.

$$V^{\otimes n} \ni x \rightsquigarrow x_s = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x) \in S^n V < V^{\otimes n}$$

$$x_a = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma(x) \in \Lambda^n V < V^{\otimes n}.$$

dla $\cancel{A}$ Λ : $\quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)_a$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Lambda^n V \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$f(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ n-liniowe antysymetryczne

n-liniowe antysymetryczne $\to g$

#

$\exists! h$ liniowe

Uwaga 13.6 ($\operatorname{char} K \neq 2$) $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq V$ baza

$\Rightarrow \{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq k\}$: baza $\Lambda^n V$.

Stąd: $\dim \Lambda^n V = \binom{k}{n}$, $\dim \Lambda^k V = 1$, dla $n > k$ $\dim \Lambda^n V = 0$.

<u>Przykład</u> $v \wedge v = - v \wedge v = 0$.

Przykład $v_1, v_2 \in V$ lin. niezależne $/K$

- $v_1 \wedge v_2 \underset{\neq 0}{\overset{\exists}{=}} r \cdot w_1 \wedge w_2 \iff \mathrm{Lin}(v_1, v_2) = \mathrm{Lin}(w_1, w_2)$.

Ogólniej:

Zał., że $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{lin. niezależne}} \in V$. Wtedy dla $w_1, \dots, w_n \in V$

$$\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists r \neq 0 \quad r\, v_1 \wedge \dots \wedge v_n = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$$

(wielowektor).

- $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$
- $\Lambda^n V^* \cong (\Lambda^n V)^*$ ... analiza wieloczynnikowa, geometria różniczkowa..., formy różniczkowe...