ZADANIE 18

Z psychologicznych powodów, czasem wygodniej jest oznaczać ideał pierwszy pierścienia A *literami* x, y *jeśli myślimy o nich jako o punkcie* $X = \mathrm{Spec}(A)$. *Kiedy myślimy o* x *jako o ideale pierwszym* A, *oznaczamy go przez* $\mathfrak{p}_x$ *(oczywiście jest to ta sama rzecz). Pokaż, że*

(i) zbiór $\{x\}$ *jest domknięty w* $\mathrm{Spec}(A)$ $\iff$ $\mathfrak{p}_x$ *jest maksymalny*

$\Longleftarrow$

Jeśli $\mathfrak{p}_x$ jest ideałem maksymalnym, to $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$, gdyż żaden inny ideał pierwszy nie zawiera $\mathfrak{p}_x$. My definiowaliśmy $V(E)$ jako zbiory domknięte, więc $\{x\}$ też taki jest.

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Czyli jest przekrojem pewnej rodziny domkniętych zbiorów bazowych

$$\{x\} = \bigcap_{i \in I} V(E_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} (E_i)\right)$$

Jeżeli którykolwiek z E_i zawieraj element odwracalny, to $\mathfrak{p}_x = (1)$. W przeciwnym przypadku