

# Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

# Spis rzeczy niezbyt mądrych

<b>1</b>	<b>Definicja rozmaitości</b>	<b>3</b>
1.1	Rozmaitości topologiczne . . . . .	3
1.2	Mapy, lokalne współrzędne . . . . .	4
1.3	Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne] . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Funkcje różniczkowalne</b>	<b>7</b>
2.1	Dopowiedzenie o funkcjach gładkich . . . . .	7
2.2	Atlasy $C^k$ . . . . .	7
2.3	Rozmaitość gładka bez topologii . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Rozmaitość z brzegiem</b>	<b>9</b>
3.1	O brzegu i wewnątrz . . . . .	10

# 1. Definicja rozmaitości

Zanim podany dokładną definicję, możemy rozważyć kilka przykładów rozmaitości różniczkowalnych:

- ↪ powierzchnia, domknięta lub nie,
- ↪ przestrzeniach opisanych (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- ↪ podzbiory  $\mathbb{R}^n$  lub  $\mathbb{C}^n$  zapisywalne równaniami algebraicznymi (np.  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^1$  w  $\mathbb{C}^3$ ).

Cały wykład będzie wstępnym słownikiem wokół pojęcia rozmaitości różniczkowalnej.

## 1.1. Rozmaitości topologiczne

**Definicja 1.1.** Przestrzeń topologiczna  $M$  jest  $n$ -wymiarową **rozmaitością topologiczną** [ $n$ -rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest **lokalnie euklidesowa** wymiaru  $n$ , czyli każdy punkt  $z$   $M$  posiada otwarte otoczenie w  $M$  homeomorficzne z otwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^n$ .

### Konsekwencje Hausdorffowości:

- ↪ Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

- ↪ Pewne własności otoczeń punktów są zachowywane. To znaczy, dla dowolnego zwartego podzbioru otoczenia punktu  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$   $K \subseteq U$  jego odpowiednik  $\bar{K} = \phi^{-1}(K) \subseteq \bar{U} \subseteq M$  jest domknięty i zwarty w  $M$ . [ćwiczenia]

### Konsekwencje przeliczalności bazy:

- ↪ Spełniany jest warunek Lindelöfa: każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćwiczenia]

- ↪ Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które są po domknięciu w  $M$  zwarte. Czyli możemy ją wyczerpać za pomocą zbiorów, które są małe.

- ↪ **Parazwartość**, czyli każde zwarte pokrycie  $M$  posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
- ↪ Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w  $\mathbb{R}^n$  dla odpowiednio dużego  $n$ .

### Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- ↪ **Twierdzenie Brouwer'a**: dla  $n \neq m$  niepusty otwarty podzbiór  $\mathbb{R}^n$  nie jest homeomorficzny z jakimkolwiek otwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^m$ .

- ↪ Czyli liczba  $n$  w definicji jest jednoznaczna dla danej rozmaitości. Określamy **wymiar rozmaitości**  $\dim M = n$ .

## 1.2. Mapy, lokalne współrzędne

**Mapą** na rozmaitości topologicznej  $M$  nazywamy parę  $(U, \phi)$ , gdzie  $U$  to otwarty podzbiór w  $M$ , a  $\phi$  to homeomorfizm  $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Mapa to jest jakiś homeomorfizm między rozmaitością a pewnym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ . Zbiór  $U$  nazywamy **zbiorem mapowym**. **Przez lokalną euklidesowość wiemy, że pokrywają one całą rozmaitość.**

Parę  $(U, \phi)$  nazywamy też **lokalnymi współrzędnymi** na  $M$  albo *lokalną parametryzacją*  $M$ .

**Fakt 1.2.** Hausdorffowska przestrzeń  $X$  o przeliczalnej bazie jest  $n$ -rozmaitością  $\iff$  posiada rodzinę map  $n$ -wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają całą  $X$ .

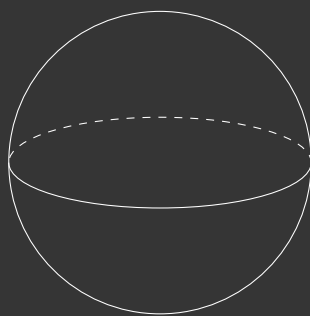
### Przykład:

Rozważmy  $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  z dziedziczną topologią. Z racji, że  $\mathbb{R}^{n+1}$  jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to  $S^n$  też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całą  $S^n$ . Dla  $i = 1, \dots, n+1$  określmy otwarte podzbiory w  $S^n$

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

### RYSUNEK DLA $S^3$



Określmy odwzorowania  $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\bar{U}_i^\pm = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_j^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie  $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \bar{U}_i^\pm$  jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.3. Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle znaczą one to samo.

Dla funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  chcemy określić, co znaczy, że  $f$  *jest różniczkowalna*? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

- Funkcja  $f$  **wyrażona** w mapie  $(U, \phi)$  to nic innego jak złożenie  $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Teraz  $f \circ \phi^{-1}$  jest funkcją zależącą od  $n$  zmiennych rzeczywistych.
- Chciałoby się powiedzieć, że funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka, jeśli dla każdej mapy  $(U, \phi)$  na  $M$ , ten fragment wyrażony w tej mapie  $f \circ \phi^{-1}$  jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.
- **Odwzorowanie przejścia między dwoma mapami**  $(U_1, \phi_1)$  i  $(U_2, \phi_2)$  to funkcje  $\phi_1 \phi_2^{-1}$  i  $\phi_2 \phi_1^{-1}$  określone na  $U_1 \cap U_2$ .

**Definicja 1.3. Mapy**  $(U, \phi_1)$  oraz  $(U, \phi_2)$  są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia  $\phi_1 \phi_2^{-1}$  jest gładkie. Dla map  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$ , albo
- $\phi \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  i  $\psi \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  są zgodne, to  $f \circ \phi^{-1} \upharpoonright (\phi(U \cap V))$  jest gładkie  $\iff$

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie **dyfeomorfizmami**.

**Definicja 1.4. Gładkim atlasem**  $\mathcal{A}$  na topologicznej rozmaitości  $M$  nazywamy dowolny taki zbiór map  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  taki, że:

1. zbiory mapowe  $U_\alpha$  pokrywają całe  $M$
2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

**Przykład:** Rodzina map  $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$  jak wcześniej na sferze  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek:  $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$ . Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n)$$

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

**Definicja 1.5. Rozmaitość gładka** to para  $(M, \mathcal{A})$  złożona z rozmaitości  $M$  i gładkiego atlasu  $\mathcal{A}$  opisanego na  $M$ .

**Uściślenie:** Często  $(M, \mathcal{A}_1)$  i  $(M, \mathcal{A}_2)$  będące rozmaitościami gładkimi określają tę samą rozmaitość.

**Definicja 1.6.** Niech  $\mathcal{A}$  będzie gładkim atlasem na  $M$ .

1. Mapa  $(U, \phi)$  jest **zgodna z atlasem**  $\mathcal{A}$ , jeśli jest zgodna z każdą mapą z  $\mathcal{A}$ .
2. Dwa **atlasy**  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  na  $M$  są **zgodne**, jeśli każda mapa z  $\mathcal{A}_1$  jest zgodna z atlasem  $\mathcal{A}_2$ .

**Twierdzenie 1.7.** Relacja zgodności atlasów jest relacją równoważności.

**Dowód:** Ćwiczenia.

Konwencja jest wtedy taka, że zgodne atlasy zadają tę samą strukturę gładką na  $M$ . W takim razie, zgodne atlasy można wysumować do jednego większego atlasu.

**Definicja 1.8.**  $\mathcal{A}$  jest **atlasem maksymalnym** na  $M$ , jeśli każda mapa na  $M$  z nim zgodna jest w nim zawarta.

**Fakt 1.9.** Każdy atlas  $\mathcal{A}$  na  $M$  zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na  $M$ . Zaś ten atlas maksymalny to zbiór wszystkich map na  $M$  zgodnych z  $\mathcal{A}$ .

**Dowód:** Ćwiczenia.

*Równoważna definicja rozmaitości gładkiej:* para  $(M, \mathcal{A})$ , gdzie  $M$  to rozmaitość topologiczna, zaś  $\mathcal{A}$  to pewien atlas maksymalny.

## 2. Funkcje różniczkowalne

### 2.1. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

**Definicja 2.1.** Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest **gładka względem atlasu**  $\mathcal{A}$  na  $M$ , jeśli

$$(\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}) f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest gładka.}$$

To znaczy po wyrażeniu w dowolnej mapie atlasu jest nadal funkcją gładką.

**Fakt 2.2.**

1. Jeśli  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka względem  $\mathcal{A}$ , zaś  $(U, \phi)$  jest zgodna z  $\mathcal{A}$ , to wówczas funkcja  $f$  wyrażona w tej nowej mapie (czyli  $f \circ \phi^{-1}$ ) też jest gładka.
2. Jeśli  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  są zgodnymi atlasami, wówczas taka funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka względem  $\mathcal{A}_1 \iff$  jest gładka względem  $\mathcal{A}_2 \iff$  jest gładka względem atlasu maksymalnego  $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  zawierającego  $\mathcal{A}_1$  (oraz  $\mathcal{A}_2$ ).

Niech  $M$  będzie gładką rozmaitością. Wówczas  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  **jest gładka** jeśli  $f$  jest gładka względem każdego (dowolnego) atlasu  $\mathcal{A}$  wyznaczającego na  $M$  daną gładką strukturę.

### 2.2. Atlasy $C^k$

**Definicja 2.3.**

- Dwie mapy  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  są  **$C^k$ -zgodne**, jeśli  $\phi\psi^{-1}$  oraz  $\psi\phi^{-1}$  są funkcjami klasy  $C^k$ .
- **$C^k$ -atlas** to atlas składający się z map, które są  $C^k$ -zgodne.
  - Taki atlas określa strukturę  $C^k$ -rozmaitości na  $M$ .
  - Jest ona słabsza niż struktura rozmaitości gładkiej.

$C^0$  w tej konwencji to rozmaitość topologiczna, a  $C^\infty$  to często jest rozmaitość gładka.

Na  $C^k$ -rozmaitości nie da się sensownie określić funkcji klasy  $C^m$  dla  $m > k$ .

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych. Przykłady to:

- $\hookrightarrow$  **Rozmaitość analityczna**  $[C^\omega]$  to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- $\hookrightarrow$  **Rozmaitość zespolona** ma mapy jako funkcje w  $\mathbb{C}^n$  zamiast w  $\mathbb{R}^n$ .
- $\hookrightarrow$  Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty.
- $\hookrightarrow$  Rozmaitość kawałkami liniowa

### 2.3. Rozmaitość gładka bez topologii

Dychotomia pomiędzy sytuacją  $C^0$  a sytuacją  $C^k$  dla  $k > 0$ :

- Z każdego maksymalnego atlasu  $C^k$ -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map  $C^\infty$ -zgodnych. A zatem, każda  $C^k$ -rozmaitość posiada  $C^k$ -zgodną strukturę  $C^\infty$ -rozmaitości.
- Istnieją  $C^0$ -rozmaitości niedopuszczające żadnej struktury gładkiej.

**Lemat 2.4.** Niech  $X$  będzie zbiorem (bez topologii). Niech  $\{U_\alpha\}$  będzie kolekcją podzbiorów  $X$  i dla każdego  $\alpha$  mamy  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  różnowartościowe ( $n$  jest ustalone dla całego  $X$ ). Ta trójka obiektów ma spełniać następujące warunki:

1. Dla każdego  $\alpha$   $\phi_\alpha(U_\alpha)$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^n$ .
2. Dla każdych  $\alpha, \beta$   $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  oraz  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  są otwarte w  $\mathbb{R}^n$ .
3. Gdy  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , to  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  jest odwzorowaniem gładkim. Są to dyfeomorfizmy (gładkie i odwracalne).
4. Przeliczalnie wiele spośród zbiorów  $U_\alpha$  pokrywa całe  $X$ .
5. Dla dowolnych punktów  $p, q \in X, p \neq q$  istnieją  $\alpha, \beta$  oraz otwarte podzbiory  $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$  takie, że  $p \in \phi_\alpha^{-1}[V_p], q \in \phi_\beta^{-1}[V_q]$  oraz  $\phi_\alpha^{-1}[V_p] \cap \phi_\beta^{-1}[V_q] = \emptyset$ . Czyli możemy rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^n$ .

Wówczas na  $X$  istnieje **struktura rozmaitości topologicznej** dla której  $U_\alpha$  są otwarte. Ponadto rodzina  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  tworzy **gładki atlas** na  $X$ .

#### Szkic dowodu:

- Topologię produkujemy jako bazę topologii na  $X$ : bierzemy przeciwobrazy przez poszczególne  $\phi_\alpha$  otwartych podzbiorów w zbiorach  $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- Lokalna  $n$ -euklidesowość  $X$  względem takiej topologii jest oczywista.
- Nietrudno jest też wybrać mniejszą bazę przeliczalną [ćwiczenia].
- Hausdorffowość tak określonej topologii wynika z warunku 5.

i smiga



**Przykład:** Niech  $\mathcal{L}$  będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Nie ma na tym zbiorze wygodnej do opisu topologii, ale możemy skorzystać z lematu wyżej.

Zacznijmy od opisu podzbiorów

$$U_h = \{\text{proste nie pionowe}\}$$

$$U_v = \{\text{proste nie poziome}\}$$

Jeśli  $U_h \ni L$ , to wtedy  $L = \{y = ax + b\}$  i wtedy  $\phi_h$  będzie przypisywać takiej prostej parę  $(a, b)$ . Jeśli zaś  $U_v \ni L$ , to wtedy  $L = \{x = yc + d\}$  i wtedy  $\phi_v$  przypisze jej  $(c, d)$ . To, że  $\phi_h(U_h)$  i  $\phi_v(U_v)$  są różnowartościowe widać. Przyjrzyjmy się teraz przekrojowi naszych zbiorów:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepoziomie i nie pionowe}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cd + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 : c \neq 0\}$$

i są to zbiory otwarte, więc warunek 3. jest spełniony. Warunek 4. jest tutaj trywialny.

Niech **COŚ TUTAJ SIĘ URWAŁO**

To jest homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Mobiusa.



### 3. Rozmaitość z brzegiem

Lokalnie wygląda jak  $\mathbb{R}^n$  albo jak półprzestrzeń n-wymiarowa:

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

**brzegiem** takiej półprzestrzeni nazywamy zbiór:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

definiuje się też wnętrze takiej półprzestrzeni:

$$\text{int}(H^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

**Definicja 3.1.** Dla otwartego zbioru  $U \subseteq H^n$  określamy

$\hookrightarrow$  brzeg zbioru:  $\partial U = U \cap \partial H^n$

$\hookrightarrow$  wnętrze zbioru:  $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$

$\hookrightarrow$  Jeżeli mamy zadane  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , to jest ono **gładkie**, gdy jest obcięciem do  $U$  pewnej gładkiej funkcji  $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\bar{U}$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  taki, że  $U \subseteq \bar{U}$ .

Jeśli  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest gładka, to wówczas pochodne cząstkowe  $f$  są dobrze określone w punktach  $\text{int}(U)$ . Ze względu na ciągłość pochodnych cząstkowych dowolnego rozszerzenia  $\bar{f}$ , **pochodne cząstkowe  $f$  są również dobrze określone w punktach  $\partial U$ .**

**Fakt 3.2.** Z analizy: rozszerzenie  $\bar{f}$  istnieje  $\iff$   $f$  jest gładka na  $\text{int}(U)$  oraz pochodne cząstkowe tego  $f$  obciętego do  $\text{int}(U)$  w sposób ciągły rozszerzają się na  $\partial U$ .

**Definicja 3.3.**  $M$  jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  taki, że

$\hookrightarrow U_\alpha$  jest otwartym podzbiorem  $M$

$\hookrightarrow$  oraz  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^n$  jest homeomorfizmem na swój obraz,

$\hookrightarrow \bar{U}_\alpha = \phi(U_\alpha) \subseteq H^n$  jest otwarty,

$\hookrightarrow$  odwzorowania przejścia  $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  są gładkie [ $U_\alpha \cap U_\beta \subseteq H^n$  otwarte].

**Fakt 3.4.** Jeśli w pewnej mapie  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$   $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$ , to w każdej innej mapie  $(U_\beta, \phi_\beta)$  zawierającej punkt  $p$  również obraz punktu  $p$  należy do brzegu  $H^n$ .

**Dowód:**

Odwzorowania przejścia są gładkie, ale gładkie są też odwzorowania odwrotne, czyli  $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$  są gładkie i gładko odwracalne.

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym z analizy wielu zmiennych

Odwzorowania przejścia mają nieosobliwe macierze pierwszych pochodnych cząstkowych we wszystkich punktach.



**Uwaga 3.5.** Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem (ta sama definicja, tylko odwzorowania przejścia nie muszą być gładkie, a wystarczy homeomorfizmy) dowód wyżej nie śmignie, ale *analogiczny fakt również zachodzi*, tylko dowód jest trudniejszy i opiera się na twierdzeniu Brouwera o niezmienniczości obszaru (analog twierdzenia o odwzorowaniach otwartych dla ciągłych  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ )

Dzięki twierdzeniom powyżej następujące definicje mają sens:

$$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej mapie (każdej)} \phi_\alpha(p) \in \partial \mathbb{H}^n\}$$

$$\text{int}(M) = \{p \in M : \text{dla pewnej mapy } (U_\alpha, \phi_\alpha), \phi_\alpha(p) \in \text{int}(\mathbb{H}^n)\}$$

### 3.1. O brzegu i wnętrzu

**Fakt 3.6.** Wnętrze  $\text{int}(M)$   $n$ -rozmaitości gładkiej  $M$  jest  $n$ -rozmaitością gładką bez brzegu.

**Dowód:**

Pokażemy atlas, który działa dla  $\text{int}(M)$ . Weźmy  $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ , gdzie

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{U'_\alpha}$$

a  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  było atlasem na  $M$ .

i śmiga



**Fakt 3.7.** Brzeg  $\partial M$   $n$ -rozmaitości  $M$  z brzegiem jest  $(n - 1)$  wymiarową rozmaitością gładką bez brzegu.

**Dowód:**

Jako atlas na  $\partial M$  bierzemy  $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ , gdzie

$$U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$$

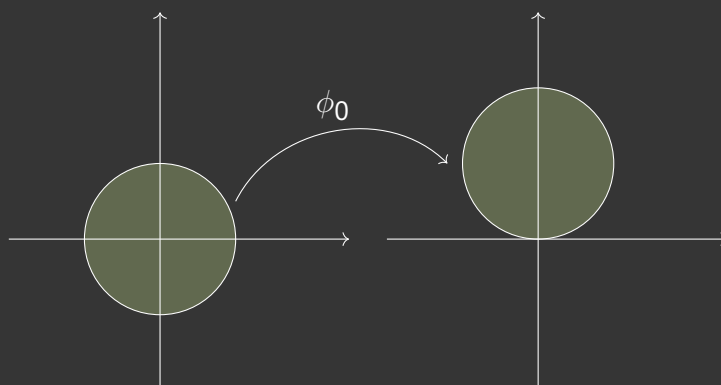
$$\phi'_\alpha : U'_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{H}^n \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{U'_\alpha}$$

i śmiga

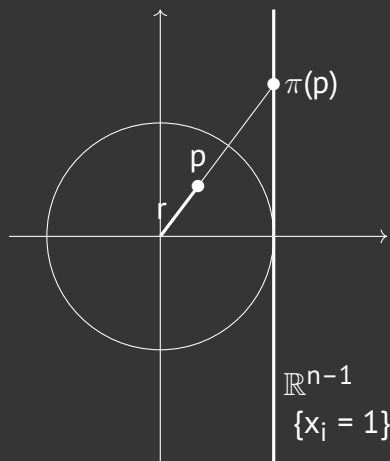


**Przykład:** Dysk  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  jest rozmaitością gładką z brzegiem  $\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ . Pokażemy mapy, ale uzasadnienie ich gładkiej zgodności pominiemy.

$$(U_0, \phi_0) : U_0 = \{x : |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{H}^n, \quad \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$



$$(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : U_i^\pm = \{x \in D^n : \pm x_i > 0\}, \quad \phi_1 : U_1 \rightarrow H^n$$



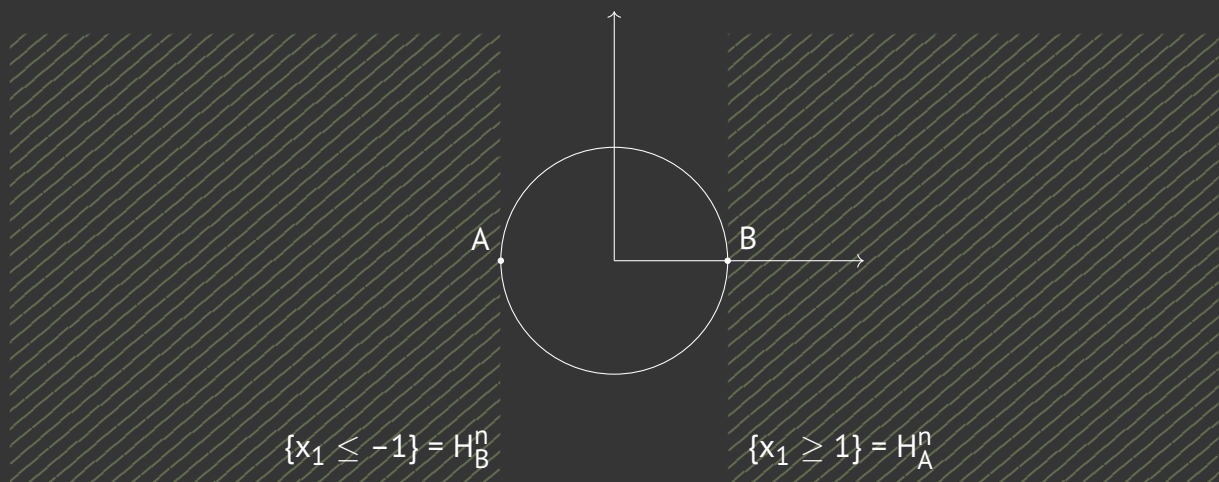
Czyli w punkcie opisujemy  $n - 1$  wymiarową płaszczyznę styczną i rzucamy punkty  $p \in D^n$  przez rzut odśrodkowy  $\pi$  na tę płaszczyznę. Funkcje  $\phi_i^\pm$  opisują się wtedy wzorem:

$$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2)$$

lub konkurencyjnie

$$\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, 1 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

Inny atlas gładki na dysku  $D^n$  (zgodny z poprzednim)



$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

$$\phi_A : U_A \rightarrow H_A^n \leftarrow \text{inwersja względem sfery o środku A i } r = 2$$

**Definicja 3.8.** Rodzina  $\{A_i\}$  podzbiorów przestrzeni topologicznej  $X$  jest **lokalnie skończona**, jeśli dla każdego  $p \in X$  istnieje otwarte otoczenie  $p \in U_p$  w  $X$  takie, że  $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$  tylko dla skończenie wielu  $\alpha$ .

**Definicja 3.9.** Dla funkcji rzeczywistej  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jej **nośnik**  $\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$

**Twierdzenie 3.10.** [Twierdzenie o rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia  $\{U_\alpha\}$  rozmaitości gładkiej  $M$  (może być z brzegiem) istnieje rodzina  $\{f_j\}_{j \in J}$  gładkich funkcji  $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że

- $f_j \geq 0$
- każdy nośnik  $\text{supp}(f_j)$  zawiera się w pewnym  $U_\alpha$  z pokrycia
- nośniki  $\{\text{supp}(f_j)\}_{j \in J}$  tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w  $M$
- dla każdego  $x \in M$   $\sum_{j \in J} f_j(x) = 1$

Jest to **rozkład jedności wpisany w pokrycie**  $\{U_\alpha\}$

Wracamy do pytania o istnienie  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  takiego, że  $f \upharpoonright \partial M \equiv 0$  i  $f \upharpoonright \text{int}(M) > 0$ .

## Skorowidz definicji

1.1	Definicja: <i>rozmaitość topologiczna</i> . . . . .	3
1.3	Definicja: <i>zgodność map</i> . . . . .	5
1.4	Definicja: <i>atlas gładki</i> . . . . .	5
1.5	Definicja: <i>rozmaitość gładka</i> . . . . .	5
1.6	Definicja: <i>zgodność map, atlasów</i> . . . . .	5
1.8	Definicja: <i>atlas maksymalny</i> . . . . .	6
2.1	Definicja: <i>gładkość względem atlasu</i> . . . . .	7
2.3	Definicja: <i>mapa <math>C^k</math>-zgodna, <math>C^k</math>-atlas</i> . . . . .	7
3.1	Definicja: <i>brzeg, wnętrze zbioru otwartego, gładka funkcja ze zbioru</i> . . . . .	9
3.3	Definicja: <i>gładka rozmaitość z brzegiem</i> . . . . .	9
3.8	Definicja: <i>lokalna skończoność</i> . . . . .	11
3.9	Definicja: <i>nośnik funkcji</i> . . . . .	11

# Twierdzonekowa zabawa

1.2	Fakt: $n$ -rozmaitość $\iff$ rodzina map pokrywających . . . . .	4
1.7	Twierdzenie: zgodność to relacja równoważności . . . . .	6
1.9	Fakt: dla każdego atlasu istnieje jedyny atlas maksymalny . . . . .	6
2.2	Fakt: funkcja gładka względem atlasu . . . . .	7
2.4	Lemat: rozmaitość gładka bez topologii . . . . .	8
3.2	Fakt: o istnieniu rozszerzenia funkcji . . . . .	9
3.4	Fakt: jeśli obraz punktu jest w rzegu w jednej mapie, to jest w brzegu w każdej . . . . .	9
3.5	Uwaga: fakt wyżej jest prawdziwy dla rozmaitości topologicznych z brzegiem . . . . .	10
3.6	Fakt: wnętrze rozmaitości jest rozmaitością . . . . .	10
3.7	Fakt: brzeg rozmaitości jest rozmaitością . . . . .	10
3.10	Twierdzenie: o rozkładzie jedności . . . . .	11