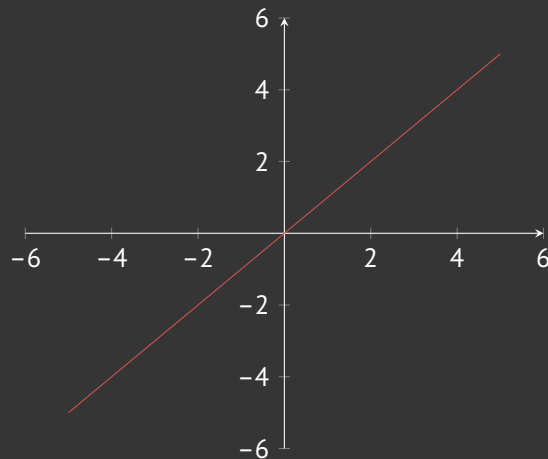
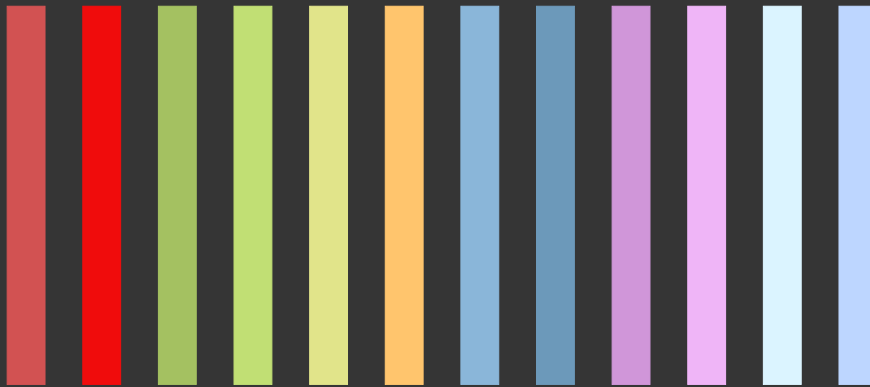


test

test

00.00.0000



Każdą macierz A $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych taką, że $\text{rank}(A) = n$, można zapisać jako $A = QR$, gdzie R jest macierzą górnątrójkątną, a Q ma kolumny ortogonalne. Ponieważ my będziemy rozważać macierze A będące reprezentacją jednoznacznych układów równań, to interesują nas tylko $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Zauważmy, że jeśli A ma niezerowy wyznacznik, to A nie może mieć liniowo zależnych kolumn. W takim razie, wektory a_1, \dots, a_n odpowiadające kolumnom A są bazą przestrzeni \mathbb{R}^n jako maksymalny możliwy układ wektorów liniowo niezależnych. Możemy na ich podstawie stworzyć bazę ortonormalną u_1, \dots, u_n przez proces Grama-Schmidta. Wtedy dla $k = 1, \dots, n$

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Co więcej, dla dowolnego a_k z oryginalnej bazy możemy go zapisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów z bazy ortonormalnej:

$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i \left[a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \right]$$

a ponieważ a_1, \dots, a_n były wektorami lnz, to dla $i > k$ $c_i = 0$. Niech r_k to będzie wektor zawierający współczynniki c_i dla wektora a_k :

$$r_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli mamy, że

$$a_k = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] r_k$$

i dalej

$$A = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n].$$

Zauważamy, że $R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]$ to macierz górnątrójkątna, a Q to macierz ortogonalna.

1. Section test

1.1. Subsection test

Niech teraz A to **macierz główna rozważanego** układu równań, Q, R to **macierze z jej rozkładu**, X niech będzie **wektorem** wartości szukanych, a B niech będzie wektorem wyrazów wolnych. Wtedy

$$AX = B$$

$$(QR)X = B$$

i ponieważ dla macierzy ortonormalnych mamy $Q^{-1} = Q^T$, to w prosty sposób możemy zamienić powyższy układ na

$$RX = Q^T B.$$

$$A \implies B$$

i śmiga

