

Lista 6

Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadany gęstością $f(x, y) = C(x + y)$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź wartość C . Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Mamy dane

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

i w pierwszej kolejności pytamy o wartość zmiennej C . Wiemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = 1,$$

a ponieważ my żyjemy w świecie trójkąta pod $y = x$, to mamy:

$$1 = \int_0^1 \int_0^x C(x + y) dy dx = C \int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2}) dx = C(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$$

czyli z moich bardzo precyzyjnych kalkulacji wynika, że $C = 2$.

Teraz pora na rozkłady brzegowe.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \in A] &= \mathbb{P}[(X, Y) \in A \times \mathbb{R}] = \int_{A \times \mathbb{R}} f(x, y) dy dx = \int_A \int_{\mathbb{R}} 2(x + y) dy dx = \\ &= \int_A \int_0^x 2(x + y) dy dx = \int_A 3x^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y \in B] &= \mathbb{P}[(X, Y) \in \mathbb{R} \times B] = \int_{\mathbb{R} \times B} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \int_B f(x, y) dy dx = \int_B \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_B \int_y^1 2(x + y) dx dy = \int_B [1 + 2y - 3y^2] dy \end{aligned}$$

Na pytanie, czy są to zmienne niezależne odpowiadamy patrząc na gęstości tych dwóch zmiennych losowych. Żeby były niezależne, musiałyby zachodzić

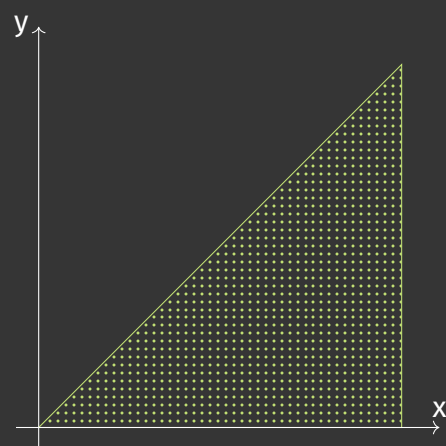
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Tutaj mamy

$$f_X(x)f_Y(y) = 3x^2(1 + 2y - 3y^2) \neq 2(x + y)$$

więc są bardzo zależne.

Zadanie 4. Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znajdź rozkład $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Czy X_n i Y są niezależne?



Mają rozkład wykładniczy, więc funkcja gęstości X_i to:

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

jeśli $t \geq 0$, wpp. mamy 0.

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Pokaż, że jeżeli X nie ma atomów, to $P(X = Y) = 0$.

Ponieważ X nie ma atomów, to zbiór $\{x : \mathbb{P}[X = x] > 0\} = \emptyset$.

Szukamy tak naprawdę $\mathbb{P}[X = t, Y = t]$ po wszystkich t . Ponieważ zdarzenia są niezależne, to:

$$\mathbb{P}[X = Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X = t, Y = t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X = t] \mathbb{P}[Y = t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt = 0,$$

gdyż X jest bezatomowa.

Zadanie 7. Pokaż, że zmienne losowe X_1, \dots, X_n o gęstościach f_1, \dots, f_n są niezależne \iff zmienna $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

$$\text{Niezależne} \iff f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

\implies

Nierch $T_i \subseteq \mathbb{R}$, wtedy z niezależności zmiennych mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 \in T_1, \dots, X_n \in T_n] &= \int_{T_1} \dots \int_{T_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{T_1} f_1(x_1) dx_1 \dots \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n = \mathbb{P}[X_1 \in T_1] \dots \mathbb{P}[X_n \in T_n] \end{aligned}$$

rozpisując krok po kroku:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 \in T_1] \dots \mathbb{P}[X_n \in T_n] &= \int_{T_1} f_1(x_1) dx_1 \dots \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n = \int_{T_1} f_1(x_1) \int_{T_2} f_2(x_2) dx_2 dx_1 \dots \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n = \\ &= \int_{T_1} \int_{T_2} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_2 dx_1 \dots \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n = \dots = \int_{T_1} \dots \int_{T_n} f_1(x_1) \dots f_n(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{T_1} \dots \int_{T_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \mathbb{P}\left[X_1 \int_{T_1} \dots, X_n \in T_n\right] \end{aligned}$$

Ponieważ dzieje się tak dla dowolnych T_i , to funkcje pod całką muszą się równać (prawie wszędzie?). Czyli

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

\impliedby

Wychodzimy z tego, że

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Wybierając dowolne $T_i \subseteq \mathbb{R}$ i całkując obie strony dostajemy:

$$\begin{aligned} \int_{T_1} \dots \int_{T_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{T_1} \dots \int_{T_n} f_1(x_1) \dots f_n(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{T_1} \dots \int_{T_{n-1}} f_1(x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n = \dots \\ &= \int_{T_1} f_1(x_1) dx_1 \dots \int_{T_n} f_n(x_n) dx_n \end{aligned}$$

Prawa strona równania to iloczyn $\mathbb{P}[X_1 \in T_1] \dots \mathbb{P}[X_n \in T_n]$, a lewa to $\mathbb{P}[X_1 \in T_1, \dots, X_n \in T_n]$ i znowu dzieje się tak bez względu na wybór T_i , czyli mamy równość i zmienne są niezależne.

Zadanie 8. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy niezależnie w sposób jednostajny liczby X_1, X_2, \dots . Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg $\{X_n\}$ jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

Weźmy sobie dowolną kulę na odcinku $[0, 1]$ o promieniu r i środku x : $B_r(x)$. Prawdopodobieństwo, że ani jedna ze zmiennych w nią trafi wynosi $1 - 2r$ (tutaj $r \leq \frac{1}{2}$). Losujemy niezależnie, więc zmienne są niezależne. Jeśli rozważymy pierwsze n zmiennych, to prawdopodobieństwo, że ani jedna z nich wpadnie w $B_r(x)$ wynosi:

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_r(x)^c, X_2 \in B_r(x)^c, \dots, X_n \in B_r(x)^c] = \mathbb{P}[X_1 \in B_r(x)^c] \dots \mathbb{P}[X_n \in B_r(x)^c] = (1 - 2r)^n$$

Chcemy użyć lematu Borela-Cantelliego, więc sprawdzamy sumę:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - 2r)^n = \frac{1}{1 - (1 - 2r)} = \frac{1}{2r} < \infty$$

czyli z prawdopodobieństwem 1 skończenie wiele zmiennych nie trafi do $B_r(x)$, czyli nieskończenie wiele z nich do $B_r(x)$ trafi. Tak się dzieje dla każdej kuli, więc z prawdopodobieństwem 1 przetniemy dowolną kulę - tworzy się gęsty podzbiór $[0, 1]$.

Zadanie 9. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze z parametrami λ i μ odpowiednio. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X + Y$.

Co wiemy? Że gęstość X to $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ gdy $t \geq 0$, a gęstość Y to $f_Y(t) = \mu e^{-\mu t}$ gdy $t \geq 0$. Dalej, wiem że

$$f(t_x, t_y) = f_X(t_x)f_Y(t_y)$$

a poszukuję $\mathbb{P}[X + Y = t]$

Skrypt mówi, że sploty is the way (ale miałam nawet ten sam pomysł!). Nie mogę puścić całki aż do ∞ , bo wtedy mi się zeruje e^{t-s} dla $s > t$. Czyli:

$$\mathbb{P}[X + Y = t] = \int_0^t \mathbb{P}[X = a, Y = t - a] da,$$

a w mowie skryptowej:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X + Y = t] &= f_X \star f_Y(t) = \int_0^t f_X(t-s)f_Y(s)ds = \lambda\mu \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}e^{-\mu s}ds = \\ &= \lambda\mu e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s - \mu s}ds = \lambda\mu e^{-\lambda t} \int_0^t e^{s(\lambda - \mu)}ds = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} [e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}] \end{aligned}$$