

Różne cierpienia

Na podstawie wykładów
Prof. Świątkowskiego
w semestrze letnim 2022/2023



oraz *Introduction to Smooth Manifolds* J.M. Lee

Spis treści

1	Definiowanie rozmaiłości	3
1.1	Rozmaiłość topologiczna	3
1.2	Mapy, współrzędne lokalne	5
1.3	Rozmaiłości gładkie (różniczkowalne)	7
1.4	Warianty pojęcia rozmaiłości różniczkowalnej	11
1.5	Dopowiedzenie o funkcjach gładkich	11
1.6	Dyfeomorfizmy	12
1.7	C^k -różniczkowalność odwzorowań rozmaiłości	13
1.8	Definiowanie rozmaiłości gładkiej X za pomocą samego atlasu	14
1.9	Rozmaiłość gładka z brzegiem	16
2	Rozkład jedności	20
2.1	Lokalnie skończone rozdrobnienie	20
2.2	Twierdzenie o rozkładzie jedności	23
2.3	Zastosowania rozkładów jedności	24
2.4	Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności	26
3	Dyskretnie ilorazy rozmaiłości	27
3.1	Klejenie rozmaiłości wzdłuż brzegu	27
3.2	Suma spójna rozmaiłości	29
3.3	Działanie grupy dyfeomorfizmów	31
3.4	Gładki atlas na M/G	34
4	Wektory styczne	40
4.1	Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna	40
4.2	Struktura wektorowa przestrzeni T_pM	41
4.3	Różniczka	43
4.4	Wiązka styczna	46
5	Pola wektorowe	50
5.1	Definiowanie pola wektorowego za pomocą rozkładów jedności	51
5.2	Przenoszenie gładkich pól wektorowych przez dyfeomorfizmy	53
5.3	Krzywe całkowe	54
5.4	Zastosowania potoków pól wektorowych	61
5.5	Interpretacja pól wektorowych jako derywacji	65
6	Komutator i pochodna Liego	68
6.1	Komutator pól wektorowych	68
6.2	Komutator w lokalnych współrzędnych	69
6.3	Definicja pochodnej Liego	69
6.4	Własności	72
6.5	Komutowanie potoków	74

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

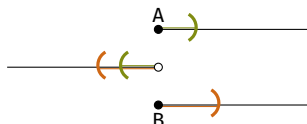
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową rozmaitością (n -rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n , tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

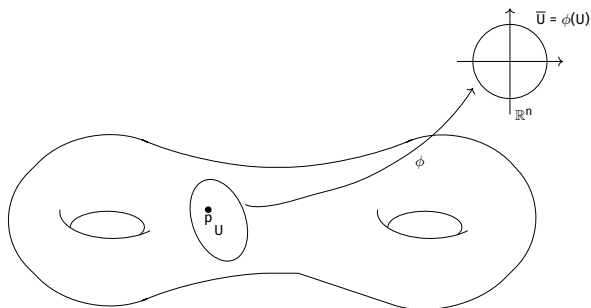
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z \mathbb{R}^n przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego *zwanego* $\bar{K} \subseteq \bar{U}$ jego odpowiednik na M , czyli $K = \phi^{-1}(\bar{K}) \subseteq U$, jest *domknięty i zwarty* [ćwiczenia]. Jeśli zaś \bar{K} jest zbiorem domknięty w \bar{U} , ale niezwanym, to nie zawsze K jest domknięty w M . Weźmy np. $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \mathbb{R}^n$

i zbiór domknięty $\bar{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\bar{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że \bar{K} jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii \mathbb{R}^n nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n . Czyli na przykład S^2 , sfera, ma naturalne włożenie w \mathbb{R}^3 pomimo lokalnej euklidesowości z \mathbb{R}^2 .

Rodzina \mathcal{U} podzbiorów M jest **lokalnie skończona**, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z \mathcal{U} . Jeżeli M ma dwa pokrycia: \mathcal{U} i \mathcal{V} takie, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ znajdziemy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to \mathcal{V} jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem** \mathcal{U} . Dzięki przeliczalności bazy M , każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. Twierdzenie Brouwer'a Dla $m \neq n$ otwarty podzbiór \mathbb{R}^n nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem \mathbb{R}^m .

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n , to nazywamy ją czasem **n -rozmaitością**.

Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w \mathbb{R}^n , których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna \iff jest łukowo spójna. Składowe spójności M są równe składowym łukowej spójności M .
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n . Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

1.2. Mapy, współrzędne lokalne

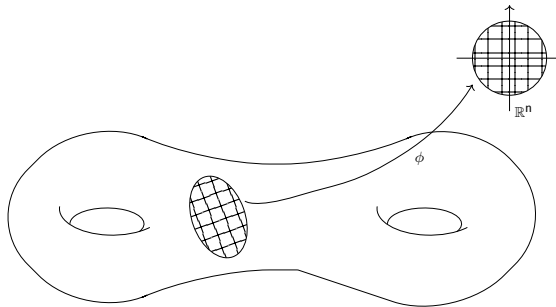
Definicja 1.3. Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ) , gdzie U jest otwartym podzbiorem M , zaś $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w \mathbb{R}^n . Zbiór U nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**

Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to M jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy (U, ϕ) takiej, że $p \in U$ i $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ mówimy, że jest **mapą wokół p** . Za pomocą translacji możemy każdą mapę zawsze przesunąć tak, aby $\phi(p) = 0$. Czyli możemy odgórnie zakładać, że mapa (U, ϕ) jest mapą o początku w p .

Często będziemy przechodzić do coraz to mniejszych zbiorów mapowych poprzez branie odwzorowań obciętych co nie burzy gładkości ani zgodności z atlasem. Pozwoli to np. zakładać, że dla $p \notin F$ domkniętego bierzemy mapę (U, ϕ) taką, że $U \cap F = \emptyset$.

Mapy nazywa się też czasem **lokalnymi współrzędnymi** na M lub **lokalną parametryzacją** M . Ponieważ o mapie można myśleć jako o przeniesieniu siatki współrzędnych (x_1, \dots, x_n) z $\bar{U} = \phi(U)$ przez ϕ^{-1} na U , to będziemy często utożsamiać $U \subseteq M$ z \bar{U} . O punkcie $p \in M$ takim, że $\phi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ będziemy myśleć jako o $p = (x_1, \dots, x_n)$.



Przykłady:

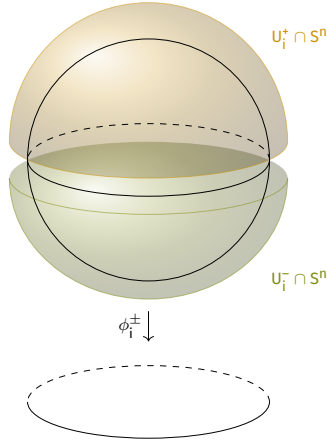
1. Każdy otwarty podzbiór n -rozmaitości topologicznej jest n -rozmaitością [ćwiczenia].
2. **Wykresy ciągłych funkcji:** Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą. Wykresem f nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

Oznaczmy przez $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ projekcję na \mathbb{R}^n , tzn. $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy funkcja $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$ będąca obcięciem π_1 do $\Gamma(f)$. Ponieważ ϕ jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(f)$ dana przez $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$, jest ciągłą funkcją odwrotną do ϕ . W takim razie, ϕ jest homeomorfizmem między U a $\Gamma(f)$ i wykres funkcji ciągłych jest

lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaićnością topologiczną.

3. Sfery S^n są n -rozmaićnościami, które wkładają się w \mathbb{R}^{n+1} ($S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$).



Rozważmy rodzinę par $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, \dots, n+1\}$ na S^n zdefiniowanych jako:

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Zbiory U_i^\pm pokrywają całą S^n , gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje ϕ_i^\pm są ciągłe jako obcięcia rzutów \mathbb{R}^{n+1} na \mathbb{R}^n . Obrazem zbioru U_i^\pm przez ϕ_i^\pm jest zbiór

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w \mathbb{R}^n .

Odwzorowania ϕ_i^\pm są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie ϕ_i^\pm są homeomorfizmami między otwartymi podzbiórmi S^n a otwartymi podzbiórmi \mathbb{R}^n .

Oznaczenie $\widehat{x_i}$ oznacza "wyrzucenie" danej współrzędnej.

Pokazaliśmy lokalną euklidesowość S^n , natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie S^n dziedziczy z \mathbb{R}^{n+1} .

4. Produkt kartezjański dwóch (lub k) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].
5. n -torus jest przestrzenią produktową $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ i n -rozmaitością topologiczną. T^2 nazywamy po prostu torusem.

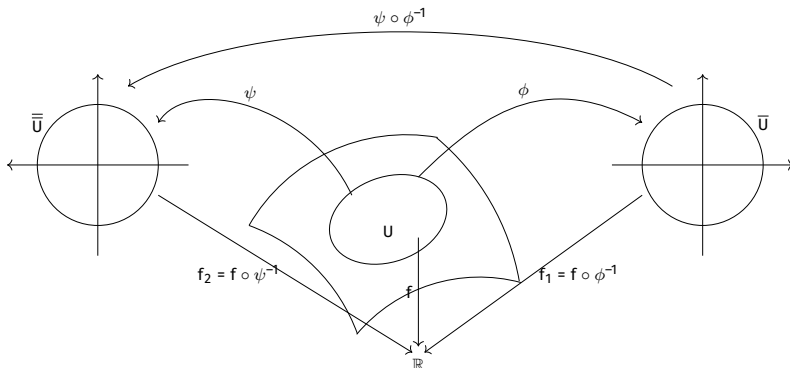
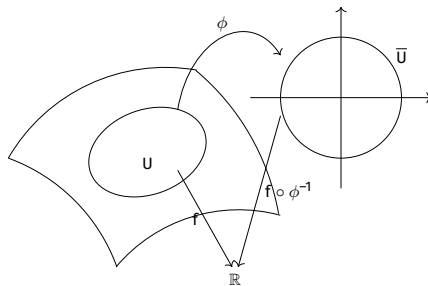
1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać je różniczkowalność za pomocą map (U, ϕ) na M .

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **wyrażona w mapie** (U, ϕ) to złożenie $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 1.4. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy (U, ϕ) f może być gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy (U, ψ) to może się okazać, że $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ nie jest gładka:

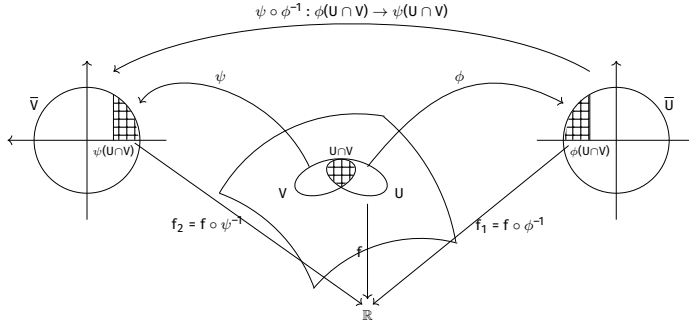


Dlatego chcemy móc założyć, że $\phi \circ \psi^{-1}$ jest przekształceniem gładkim.

Definicja 1.5. Mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania $\phi\psi^{-1}$ nazywamy **odwzorowaniami przejścia** z jednej mapy do drugiej. Jeśli $\phi\psi^{-1}$ i $\psi\phi^{-1}$ są gładkie, to są one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** (def. 1.14) pomiędzy otwartymi podzbiorami \mathbb{R}^n . Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy $U \cap V \neq \emptyset$, rysunek wygląda:



Mapy (U, ϕ) i (V, ψ) nazywamy zgodnymi, jeśli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejścia

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

oraz

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

są gładkie (\iff są dyfeomorfizmami podzbiorów $\phi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$).

Definicja 1.6. Gładkim atlasem \mathcal{A} na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ takich, że:

- $\{U_\alpha\}$ pokrywają całe M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykłady:

1. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ na sferze S^n jest atlasem gładkim na S^n . Dla przykładu zbadamy zgodność map (U_i^+, ϕ_i^+) i (U_j^+, ϕ_j^+) dla $i < j$.

Popatrzmy jak wyglądają interesujące nas zbiory:

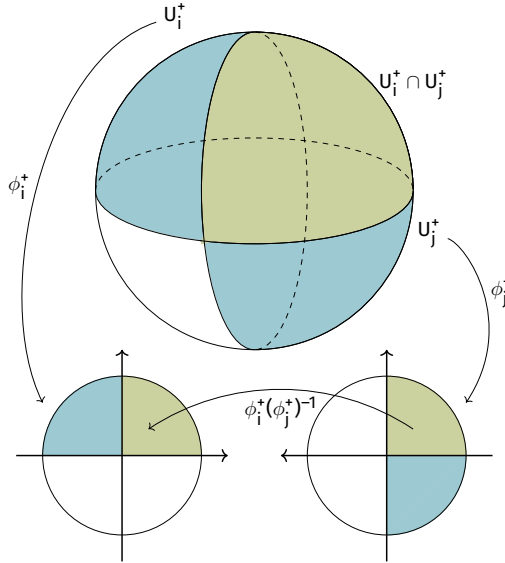
$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

bo usuwamy i-tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\}$$

bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od i, więc jej położenie nie zmienia się.



$$\begin{array}{ccc}
 (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 \cap & & \downarrow \phi_i^+ \\
 \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\} & & (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\
 & & \cap \\
 & & \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}
 \end{array}$$

Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

2. Jeřli V jest przestrzenią liniową wymiaru $n < \infty$ nad \mathbb{R} , to dowolna norma określona na V zadaje metrykę, która pozwala okrećlić na V topologię (identyczną dla równoważnych norm). Z taką topologią V jest n -rozmaićnością z naturalnie zdefiniowaną strukturą.

Niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą V . Rozważmy izomorfizm $E : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ zadany przez

$$E(x) = \sum_{i \leq n} x^i e_i.$$

Funkcja ta w kontekście topologicznym jest homeomorfizmem, więc (V, E^{-1}) jest mapą na V .

Jeřli $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ jest inną bazą na V , to mamy homeomorfizm

$$\bar{E}(x) = \sum x^i \bar{e}_i$$

Istnieje wtedy pewna odwracalna macierz (A_i^j) taka, że

$$e_i = \sum A_i^j \bar{e}_j$$

dla kaźdego i .

Stąd modworowanie przejřcia między tymi dwoma mapami jest zadana przez $\bar{E}^{-1} \circ E(x) = \bar{x}$, gdzie $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ jest zadane przez

$$\sum_{j \leq n} \bar{x}^j \bar{e}_j = \sum_{i \leq n} x^i e_i = \sum_{i,j \leq n} x^i A_i^j \bar{e}_j \implies \bar{x}^j = \sum_{i \leq n} A_i^j x^i$$

W takim razie jakakolwiek mapa wysyłająca x na \bar{x} jest odwracalna i liniowa \implies jest dyfeomorfizmem. Stąd dowolne dwie mapy (V, E) są gładko zgodne i ich rodzina definiuje na V standardową gładką strukturę.

Definicja 1.7. Rozmaićnością gładką nazywamy parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaićnością topologiczną, zaś \mathcal{A} jest pewnym atlasem gładkim na M .

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaićności topologicznej M mogą zadawać tę samą rozmaićność gładką. Na przykład dla $M = \mathbb{R}^n$ istnieje atlas zawierający jedną mapę $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ oraz atlas $\{(B_x(r), \text{id}_{B_x(r)}) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, który jest tak naprawdę "rozdrobnieniem" pierwszego atlasu.

Definicja 1.8. Niech \mathcal{A} będzie gładkim atlasem na M .

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z \mathcal{A} , jeřli jest zgodna z kaźdą mapą $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na M są zgodne, jeřli kaźda mapa z \mathcal{A}_1 jest zgodna z \mathcal{A}_2 .

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotnią i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaićności gładkiej na topologicznej rozmaićności M . Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było

przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

Definicja 1.9. \mathcal{A} jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości M , jeśli każda mapa zgodna z \mathcal{A} należy do \mathcal{A} .

Każdy atlas \mathcal{A} na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z \mathcal{A} [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaitością topologiczną, a \mathcal{A} jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

Mówimy, że mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ są C^k -zgodne jeśli $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (posiadają pochodne cząstkowe rzędów $\leq k$). C^k -atlas to z kolei rodzina C^k -zgodnych map, która określa strukturę C^k -rozmaitości na M . Struktura C^k -rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy C^m dla $m > k$.

C^0 rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a C^∞ -rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

Dychotomia C^0 i C^k dla $k > 0$ aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu C^1 -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞ -zgodnych. Zatem, każda C^1 -rozmaitość posiada C^1 -zgodną strukturę C^∞ -rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak C^0 -rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne $[C^\omega]$. Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w C^n zamiast \mathbb{R}^n .
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

1.5. Odpowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu \mathcal{A} na M , jeśli dla każdej mapy $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

Fakt 1.10.

- Jeśli $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem \mathcal{A} , zaś (U, ϕ) jest mapą zgodną z \mathcal{A} , to $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

- Jeśli \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 są zgodnymi atlasami, to $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładką względem $\mathcal{A} \iff f$ jest gładką względem $\mathcal{A}_2 \iff f$ jest gładką względem atlasu maksymalnego \mathcal{A}_{\max} zawierającego \mathcal{A}_1 i \mathcal{A} .

Dowód. Ćwiczenia



Fakt 1.11. Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie.

Dowód. Niech $f : M \rightarrow N$ i $g : N \rightarrow P$ będą gładkimi funkcjami. Weźmy $p \in M$ oraz oznaczmy $q = f(p) \in N$, $s = g(q) = g(f(p)) \in P$. Niech $(U, \phi), (V, \psi), (W, \xi)$ będą mapami odpowiednio wokół p, q, s .

Wiemy, że $\psi f \phi^{-1}$ oraz $\xi g \psi^{-1}$ są funkcjami gładkimi. Chcemy sprawdzić, czy $\xi(g \circ f) \phi^{-1}$ jest funkcją gładką.

$$\xi(g \circ f) \phi^{-1} = (\xi g \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})$$

jest złożeniem dwóch funkcji gładkich między \mathbb{R}^n -ami, więc $g \circ f$ jest gładką funkcją między rozmaitościami.



Definicja 1.12. Rzędem funkcji $f : M \rightarrow N$ C^1 -różniczkowalnego (def. 1.15) w punkcie p nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania $\psi f \phi^{-1}$ w $\phi(p)$.

Fakt 1.13. Powyższa liczba [rząd funkcji w p] nie zależy od wyboru mapy wokół p ani wokół $f(p)$.

Dowód. Szkieletowy.

Dla map $(U, \phi), (V, \psi)$ oraz $(U', \phi'), (V', \psi')$ chcemy porównać rząd macierzy jacobianu $\hat{f} = \psi f \phi^{-1}$ oraz $\hat{f}' = \psi' f' (\phi')^{-1}$. Wiemy, że

$$\hat{f}' = \alpha \hat{f} \beta,$$

gdzie $\alpha = \psi' \psi^{-1}$ i $\beta = \phi(\phi')^{-1}$.

Macierz jacobianu złożenia to iloczyn macierzy jacobianu funkcji składowych. Macierz jacobianu odwzorowań przejścia jest nieosobliwa [są one bijekcjami]. W takim razie domnożenie przez jacobian α i β nie zmienia rzędu jacobianu \hat{f} .



1.6. Dyfeomorfizmy

Definicja 1.14. Gładkie odwzorowanie $f : M \rightarrow N$ nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli jest wzajemnie jednoznaczne (bijekcja) oraz odwzorowanie do niego odwrotne f^{-1} jest gładkie.

Dwie rozmaitości M, N są **dyfeomorficzne**, jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm. Są one wtedy nierozróżnialne jako gładkie rozmaitości.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda C^1 -rozmaićność posiada C^1 -zgodną strukturę C^∞ rozmaićności. Teraz możemy dopowiedzieć, że jeśli dwie C^∞ -rozmaićności są C^1 -dyfeomorficzne, to są one też C^∞ -dyfeomorficzne. Stąd klasyfikacja C^1 rozmaićności różniczkowalnych z dokładnością do C^1 -dyfeomorfizmu jest taka sama jak klasyfikacja C^∞ rozmaićności z dokładnością do C^∞ dyfeomorfizmu.

Wiemy już, że istnieją C^0 -rozmaićności bez struktury C^∞ -rozmaićności. Możemy teraz dodać do tego fakt, że istnieją C^0 -rozmaićności które nie są dyfeomorficznie zgodne jako C^∞ rozmaićności. W 1956 pokazano, że dla sfer S^n $n \geq 7$ istnieje skończenie wiele takich niedyfeomorficznych struktur.

W latach 1980 pokazano, że na \mathbb{R}^4 istnieje nieprzeliczalnie wiele struktur o których mowa wyżej. Z kolei przypadku ≤ 3 związek pomiędzy C^0 a C^∞ jest taki jak pomiędzy C^1 a C^∞ .

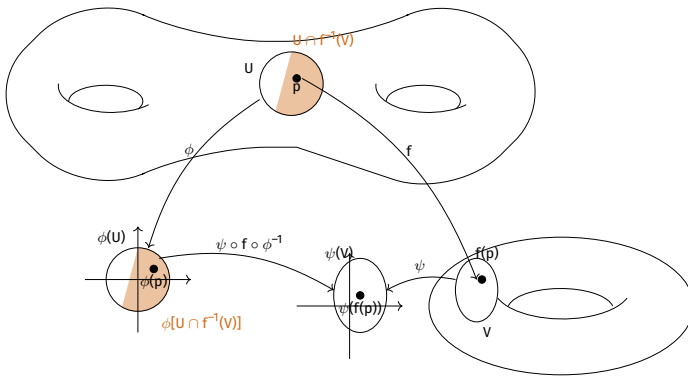
1.7. C^k -różniczkowalność odwzorowań rozmaićności

Definicja 1.15. Dla M, N gładkich rozmaićności i $f : M \rightarrow N$ ciągłej mówimy, że f jest C^k -różniczkowalna w punkcie p , jeśli dla dowolnych map $(U, \phi) \ni p$ oraz $(V, \psi) \ni f(p)$ złożenie

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi[U \cap f^{-1}(V)] \rightarrow \psi(V)$$

jest C^k -różniczkowalne w punkcie $\phi(p)$.

f jest C^k na otoczeniu p , jeśli $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest C^k różniczkowalne na pewnym otwartym otoczeniu $\phi(p)$.



Funkcję $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ jest nazywana **wyrażeniem f w mapach** (U, ϕ) i (V, ψ) lub też wyrażeniem f w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy.

Fakt 1.16. Jeśli f wyrażona w mapach (U, ϕ) i (V, ψ) jest C^k -różniczkowalna w punkcie $\phi(p)$ [na jego otoczeniu] to wyrażona w innych mapach (U', ϕ') , (V', ψ') też jest C^k różniczkowalna wokół p [na jego otoczeniu].

Dowód. Niech $\widehat{f} = \psi f \phi^{-1}$ a $\widehat{f} = \psi' f(\phi')^{-1}$. Oznaczmy odwzorowania przejścia $\alpha = \phi(\phi')^{-1}$ oraz $\beta = \psi' \psi^{-1}$. Zachodzi

$$\widehat{f} = \beta \circ \widehat{f} \circ \alpha = (\psi' \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})(\phi(\phi')^{-1}) = \psi' f(\phi')^{-1}.$$

Zarówno \widehat{f} jak i $\beta \widehat{f} \alpha$ są funkcjami określonymi na pewnych podzbiorach \mathbb{R}^n oraz $\alpha(\phi'(p)) = \phi(p)$. W takim razie jeśli \widehat{f} jest funkcją C^k -różniczkowalną, to \widehat{f} jako złożenie funkcji gładkich z funkcją C^k -różniczkowalną też takie jest. ☕

Dzięki tej obserwacji możemy definiować C^k -różniczkowalność funkcji jako bycie C^k -różniczkowalną w dowolnej mapie. Możemy więc dobrać sobie mapę w której sprawdzamy C^k -różniczkowalność tak, aby dowód był wygodny.

Uwaga 1.17. Funkcja $f : M \rightarrow N$ jest C^k -różniczkowalna \iff dla dowolnych map (U, ϕ) oraz (V, ψ) wyrażenie $\psi f \phi^{-1}$ funkcji f jest C^k -różniczkowalne na całym zbiorze, na którym jest ono określone.

Pojęcia:

- odwzorowań gładkich
- różniczkowalności w punkcie (otoczeniu)
- dyfeomorfizmu
- rzędu odwzorowania w punkcie

oraz ich własności bez zmian przenoszą się na rozmaitości gładkie z brzegiem (def. 1.19).

1.8. Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 1.18. Niech X będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów w X taką, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ różniczkowalne takie, że

1. dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty
2. dla dowolnych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w \mathbb{R}^n .
3. jeśli $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ też jest gładkie)
4. przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X
5. dla każdego $p, q \in X$, jeśli $p \neq q$, to istnieją α, β oraz otwarte $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$ i $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p)$, $q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ (oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).

Wówczas na X istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory U_α są otwarte. Ponadto rodzina $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tworzy wtedy gładki atlas na X .

Dowód. A dokładnie szkielet dowodu.

Dokładny dowód w Lee, lemat 1.35.

Określimy topologię na X przy pomocy przeciwbrazów przez ϕ_α otwartych podzbiorów $U_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5.



Przykłady:

- \mathcal{L} jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą można by od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

oraz funkcje ϕ_h, ϕ_v :

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \xrightarrow{\phi_h} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \xrightarrow{\phi_v} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to \mathbb{R}^2 , czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całego X , to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepionowe i niepoziome}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cy + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) : c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

$$\text{Weźmy prostą } L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v.$$

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

$$\text{Zatem } \phi_h \phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \text{ jest gładkie (podobnie } \phi_v \phi_h^{-1}).$$

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią \mathcal{L} jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania \mathcal{L} nie wystarczy jedna mapa.

O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subseteq M$ z obrazem przez mapę, czyli $\bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych (x_1, \dots, x_n) z \bar{U} przez ϕ^{-1} na $U \subseteq M$.
- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że $p = (0, \dots, 0)$ w mapie, czyli możemy założyć, że (U, ϕ) jest mapą o początku w p .
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół p ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subseteq M$ niezawierającym p .

1.9. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

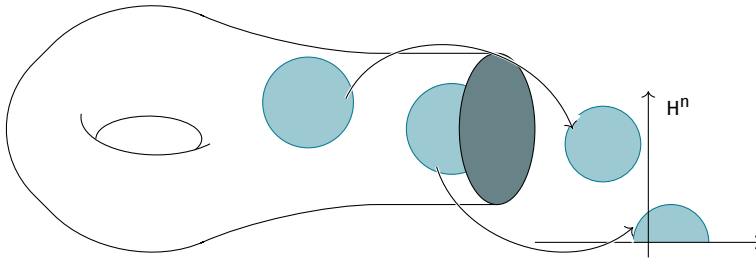
a wnętrzem:

$$\text{int}(H^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Dla $U \subseteq H^n$ oznaczmy $\partial U = U \cap \partial H$ oraz $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$, czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy H^n oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla $U \subseteq H^n$ otwartego i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mówimy, że f jest **gładką**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego, $U \subseteq \hat{U}$. *Pochodne cząstkowe funkcji f są dobrze określone na $\text{int}(U)$, a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na ∂U* (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia \hat{f}). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia \hat{f} istnieje \iff wszystkie pochodne cząstkowe f w $\text{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U .

Definicja 1.19. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $U_\alpha \subseteq M$ i $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^n$ i $\bar{U}_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w H^n , gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn. $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w H^n).



Fakt 1.20. Jeśli w pewnej mapie (U_α, ϕ_α) , $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, to w każdej innej mapie (U_β, ϕ_β) zawierającej p $\phi_\beta(p) \in \partial H^n$.

Dowód. Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jakobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji.



Definicja 1.21. Brzegiem n -rozmaitości M z brzegiem nazywamy zbiór

$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial H^n\}$
wnętrze M nazywa się

$$\text{int}(M) = \{p \in M : (\exists (U_\alpha, \phi_\alpha)) \phi_\alpha(p) \in \text{int}(H^n)\}$$

Fakt 1.22. Wnętrze $\text{int}(M)$ n -rozmaitości gładkiej M jest n -rozmaitością bez brzegu.

Dowód. Jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\text{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \upharpoonright U'_\alpha$$

Odwzorowania przejścia $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\phi_\alpha\phi_\beta^{-1}$, więc są gładkie.



Przykłady:

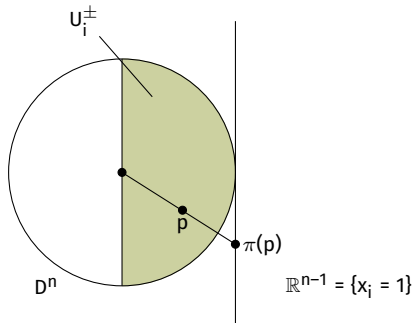
1. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ jest n -rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Dowód. Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa (U_0, ϕ_0) :

$$U_0 = \{x : |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \rightarrow H^n, \quad \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$

Mapy (U_i^\pm, ϕ_i^\pm)



$$U_i^+ = \{x \in D^n : x_i > 0\}$$

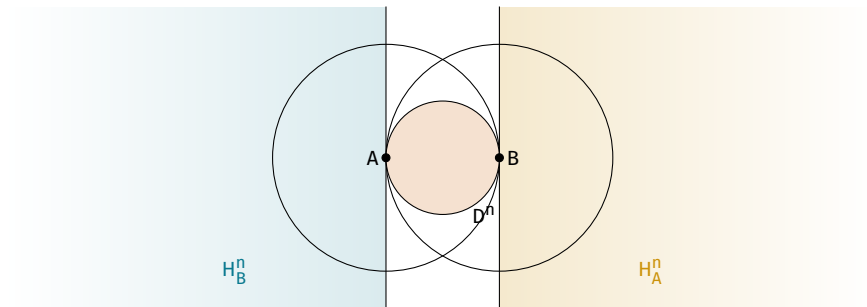
$$U_i^- = \{x \in D^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum x_j^2}_{1-r^2} \right)$$

$$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$



2. Inny atlas na D^n , składający się tylko z dwóch map:



Niech A i B będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku D^n .
Rozważmy zbiory

$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

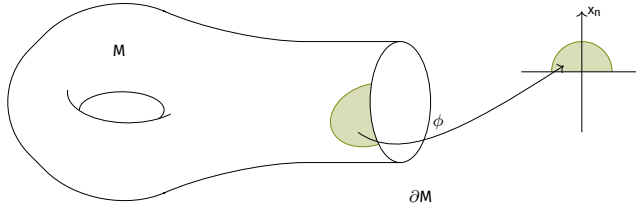
oraz odwzorowania $\phi_A : U_A \rightarrow H_A^n$ i $\phi_B : U_B \rightarrow H_B^n$ będące inwersjami dysku względem sfer S^n o środkach w A i B oraz promieniu 2.

3. Tutaj warto zaznaczyć, że jeśli $n = 0$, to wtedy $\partial M = \emptyset$ i M jest 0-rozmaitością. W dodatku, zbiór rozmaitości gładkich z brzegiem można rozumieć jakoby zawierał zbiór rozmaitości topologicznych, gdyż $\partial M = \emptyset \iff M$ jest rozmaitością topologiczną.

2. Rozkład jedności

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq M$ znaleźć funkcję, która dla $p \in D$ jest równa zero, a na $M \setminus D$ ma wartości ściśle dodatnie.

Rozważmy rozmaitość z brzegiem M . Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(p) = 0$ gdy $p \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla dowolnego $p \in \text{Int}(M)$.



Lokalnie, na zbiorze mapowym (U_α, ϕ) możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z ∂M jest zawsze zerowa (gdyż są one w ∂H^n). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przenieść lokalne f_α na funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

Definicja 2.1. Pokrycie $\{A_\alpha\}$ podzbiorami przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α .

Definicja 2.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia** $\{U_\alpha\}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α .

$$\begin{aligned} \{W_\gamma\} < \{V_\beta\} < \\ \{U_\alpha\} &\implies \\ \{W_\gamma\} < \{U_\alpha\} \end{aligned} \implies$$

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez $\{V_\beta\} < \{U_\alpha\}$.

Definicja 2.3. Przestrzeń topologiczna X jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego

punktu otoczeń przwartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

Uwaga 2.4. Rozdrobnienie wynikające z parawartości rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z przwartych zbiorów mapowych.

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie pokryciem M . Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów przwartych mapowych. Wystarczy obraz każdego U_α w \mathbb{R}^n pokryć zbiorami przwartymi i wrócić z nimi na M . Z faktu, że rozmaitości są parawarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które z przechodności \prec jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Dodatkowo, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ , które były mapowe i przwarte, więc i V_β taki jest. ☕

Uwaga 2.5. Niech $\{A_\alpha\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną parawzartych podzbiorów rozmaitości M . Wtedy dla każdego A_{α_0} podrodzina

$$\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

Dowód. Założmy nie wprost, że dla pewnego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg A_{α_i} oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w pewnym $p \in \text{cl}(A_{\alpha_0})$.

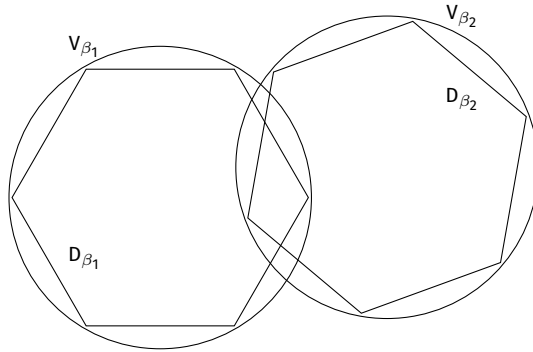
Ponieważ p jest punktem skupienia x_i , to dowolne otwarte otoczenie U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele elementów x_i . W takim razie U_p przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami A_α . Jest to sprzeczne z lokalną skończonością $\{A_\alpha\}$. ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i przwartość zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$ wynikającego z parawartości rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

Uwaga 2.6. Niech $\{V_\beta\}$ będzie lokalnie skończonym rozdrobnieniem pokrycia M składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego β istnieje zwarty zbiór $D_\beta \subseteq V_\beta$ taki, że

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobnienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa M .



Dowód. Ponieważ V_β są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podziorze w \mathbb{R}^n poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem $\overline{V_\beta} = \phi_\beta(V_\beta)$ dla mapy (V_β, ϕ_β) .

Każdy V_{β_0} jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów $V_{\beta_0,k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, które są otwarte i ich zwarte domknięcia zawierają się w V_{β_0} : $\text{cl}(V_{\beta_0,k}) \subseteq V_{\beta_0}$. Możemy np. wybierać $V_{\beta_0,k} = B(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} : d(x, V_{\beta_0}^c) > \frac{1}{k}\}$, tzn. przekroje kul otwartych w \mathbb{R}^n o środku w $x_0 \in V_{\beta_0}$ i promieniu k ze zbiorami tych $x \in V_{\beta_0}$, które są odległe od dopełnienia V_{β_0} o co najmniej $\frac{1}{k}$.

Niech teraz $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ będą zbiorami z $\{V_\beta\}$ niepusto krojącymi V_{β_0} . Jest ich skończenie na mocy 2.5. Wówczas $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ wraz z wcześniej stworzonymi $V_{\beta_0,k}$ jest pokryciem zwarte go zbioru $\text{cl}(V_{\beta_0})$. Możemy więc z niego wybrać skończone podpokrycie postaci: $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}, \dots, V_{\beta_0,k_0}$. Oznacza to, że zastępując w $\{V_\beta\}$ zbiór V_{β_0} przez zbiór V_{β_0,k_0} dostajemy nowe pokrycie M z $\text{cl}(V_{\beta_0,k_0}) \subseteq V_{\beta_0}$. Powtarzamy to induktywnie dla wszystkich V_β i wybieramy pokrycie

$$D_\beta = \text{cl}(V_{\beta,k}),$$

które spełnia wymagania z uwagi.



Z uwag udowodnionych wyżej wynika więc, że dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_\beta\}$ rozmaitości topologicznej M istnieje

- lokalnie skończone rozdrobienie $\{V_\beta\}$ składające się ze zbiorów mapowych i parazwartych oraz
- rodzina $\{D_\beta\}$ zwartych podzbiorów $D_\beta \subseteq V_\beta$, która dalej pokrywa M .

To samo dotyczy też rozmaitości z brzegiem.

2.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

Definicja 2.7. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ określamy jej **nośnik** jako:

$$\text{supp}(f) := \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

Fakt 2.8. [z \mathbb{R}^n] Dla dowolnego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz dowolnego zwartego $D \subseteq \Omega$ istnieje gładka funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $f \geq 0$
2. $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$
3. $f(x) > 0$ dla $x \in D$

Twierdzenie 2.9. [O rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_i\}$ gładkich funkcji $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

1. $f_i \geq 0$
2. dla każdego i nośnik $\text{supp}(f_i)$ zawiera się w pewnym U_α
3. nośniki $\{\text{supp}(f_i)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M
4. dla każdego $x \in M$ $\sum f_i(x) = 1$ [suma ta jest skończona wokół każdego x dzięki 3.]

Dowód. Niech $\{V_j\} \prec \{U_\alpha\}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym przewartymi zbiorami mapowymi. Niech $D_j \subseteq V_j$ będą zbiorami zwartymi, które dalej pokrywają M (na mocy 2.6).

Niech (V_j, ϕ_j) będzie mapą na M i niech

$$\bar{D}_j = \phi(D_j) \subseteq \phi_j(V_j) = \bar{V}_j$$

będzie zbiorem zwartym. Dzięki faktowi z \mathbb{R}^n 2.8 wiemy, że dla każdego j istnieje gładka funkcja $\bar{h}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $\bar{h}_j \geq 0$
2. $\text{supp}(\bar{h}_j) \subseteq \bar{V}_j$
3. $\bar{h}_j(x) > 0$ dla $x \in D_j$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że:

$$h_j(x) = \begin{cases} \bar{h}_j \circ \phi_j(x) & x \in V_j \\ 0 & x \notin V_j \end{cases}$$

Żeby pokazać gładkość h_j , wystarczy pokazać jej gładkość na pewnym otoczeniu każdego punktu.

Na otoczeniu punktów z V_j funkcja jest oczywiście gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich. Dla $p \notin V_j$ istnieje otwarte otoczenie U_p które jest rozłączne z $\text{supp}(h_j)$, a więc jest otwartym otoczeniem na którym h_j jest stale równe zero. Taka funkcja jest oczywiście gładka.

Niech teraz $h(x) = \sum_j h_j(x)$. Jest to dobrze określona definicja, gdyż $\text{supp}(h_j)$ tworzą rodzinę lokalnie skończoną (bo $\{V_j\}$ taka jest). Z lokalnej skończoności nośników wynika, że h jest gładka na M .

Dostajemy też $h(x) > 0$, bo D_j pokrywają całe M , a więc dla każdego $x \in M$ istnieje i takie, że $x \in D_j$, a więc $h_j(x) > 0$.

Określmy $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)}$. Wiemy, że $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka na M , $\text{supp}(f_j) = \text{supp}(h_j) \subseteq V_j$, więc rodzina $\{\text{supp}(f_j)\}$ jest lokalnie skończona i każdy $\text{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α . Wreszcie mamy

$$\sum f_j(x) = \sum \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{\sum h_j(x)} = 1$$

dla każdego $x \in M$.



Definicja 2.10. Rodzina funkcji $\{f_j\}$ jak w dowodzie twierdzenia wyżej jest nazywana **rozkładem jedności** wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

2.3. Zastosowania rozkładów jedności

Zazwyczaj rozkłady jedności służą do konstruowania gładkich funkcji, które są określone na całym M i spełniają pewne wymagania. Z pomocą rozkładów jedności będziemy też "globalizować" inne obiekty na rozmaitościach, np. pola wektorowe, metryki Riemanna czy formy różniczkowalne.

Przykłady:

1. Niech F_1, F_2 będą domkniętymi rozłącznymi podzbiorami gładkiej rozmaitości M . Wówczas istnieje gładka funkcja $f : M \rightarrow [0, 1]$ taka, że

$$f \upharpoonright F_1 \equiv 1$$

oraz $f \upharpoonright F_2 \equiv 0$.

Dowód. Niech $U_i = M \setminus F_i$, wtedy $\{U_1, U_2\}$ jest pokryciem M . Niech $\{f_i\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_1, U_2\}$. Określmy

$$f(x) = \sum_{\text{supp}(f_j) \subseteq U_2} f_j(x).$$

Weźmy $x \in F_1$, wtedy wszystkie nośniki $\text{supp}(f_i)$ zawierające x zawierają się w U_2 , zatem dla takich x jest

$$f(x) = \sum f_i(x) = 1$$

Jeśli $x \in F_2$, to nośniki $\text{supp}(f_i)$ zawierające x nie mogą zawierać się w U_2 . W takim razie $f(x) = 0$. ☕

2. Rozważmy istnienie gładkiej funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$f(p) = \begin{cases} = 0 & p \in \partial M \\ > 0 & p \in \text{Int}(M) \end{cases}$$

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem zbiorami mapowymi, a $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą lokalnie gładkimi funkcjami takimi, że

$$f_\alpha = \begin{cases} \bar{f}_\alpha \circ \phi_\alpha & U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \\ 1 & U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \end{cases}$$

gdzie $\bar{f}_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowane jako

$$\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Niech $\{h_\beta\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego β wybieramy $\alpha(\beta)$ takie, że $\text{supp}(h_\beta) \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. Definiujemy $h'_\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ przez

$$h'_\beta = h_\beta \circ f_{\alpha(\beta)}.$$

Wtedy h'_β jest gładkie oraz $\text{supp}(h'_\beta) \subseteq \text{supp}(h_\beta)$, więc rodzina nośników $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$ jest lokalnie skończona.

Zdefiniujmy teraz

$$f(x) = \sum h'_\beta,$$

które z lokalnej skończoności nośników $\{\text{supp}(h'_\beta)\}$ jest dobrze określone.

- $p \in \partial M$, to dla każdego β $h'_\beta(p) = 0$, więc $f(p) = 0$.
- $p \in \text{Int}(M)$, to wtedy istnieje β takie, że $h_\beta(p) > 0$, a ponieważ dla $\gamma \neq \beta$ $h'_\gamma(p) \geq 0$, to $f(p) > 0$.

3. Dla dowolnego $A \subseteq M$ domkniętego oraz $A \subseteq U \subseteq M$ otwartego istnieje funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla $x \in A$ $f(x) = 1$ oraz $\text{supp}(f) \subseteq U$.

Po angielsku taka funkcja nazywa się *bump function*

Dowód. Niech $U_1 = U$ oraz $U_2 = M \setminus A$, zbiory te pokrywają całą M . Niech h_1, h_2 będzie rozkładem jedności wpisanym w to pokrycie. Wtedy funkcja h_1 ma poszukiwane własności, bo dla $x \in A$ mamy $h_2(x) = 0$, więc $1 = h_1(x) + h_2(x) = h_1(x)$. ☕

4. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest nazywana *exhaust function*, jeśli dla każdego $c \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, c])$ jest zwartym podzbiorem M . Kiedy idąc po liczbach naturalnych n rozpatrujemy $f^{-1}((-\infty, n])$, to po drodze zahaczamy o wszystkie zwarte zbiory

Dowód istnienia to wniosek 2.28 z Lee.

w M , stąd też nazwa. Dowód istnienia exhaust function korzysta z rozkładów jedności $\{h_i\}$ wpisanych w dowolne pokrycie przwartymi zbiorami oraz funkcji $f(x) = \sum_{j \geq 1} j \cdot \phi_j(x)$.

2.4. Alternatywna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_\alpha\}$ gładkich funkcji $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że*

1. $f_\alpha \geq 0$
2. $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$
3. *nośniki $\{\text{supp}(f_\alpha)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M [czyli wiele spośród f_α jest zerowych]*
4. dla każdego $x \in M$ $\sum f_\alpha(x) = 1$

Dowód. Znowu szkic dowodu za pomocą wyjściowej wersji twierdzenia.

Rozważmy rodzinę $\{f_j\}_{j \in J}$ jak w wyjściowej wersji twierdzenia. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j) \in A$ takie, że $\text{supp}(f_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Zdefiniujemy

$$f_\alpha = \sum_{j: \alpha(j)=\alpha} f_j.$$

Z lokalnej skończoności nośników $\text{supp}(f_j)$ wiemy, że f_α również jest funkcją gładką. Warunek 4 zachodzi w sposób oczywisty, tak samo warunek 1.

Warunki 2 i 3 w łatwy sposób wynikają z obserwacji, że dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny podzbiorów P_t w przestrzeni X , $\text{cl}(\bigcup P_t) = \bigcup \text{cl}(P_t)$. ☕

3. Dyskretnie ilorazy rozmaitości

3.1. Klejenie rozmaitości wzdłuż brzegu

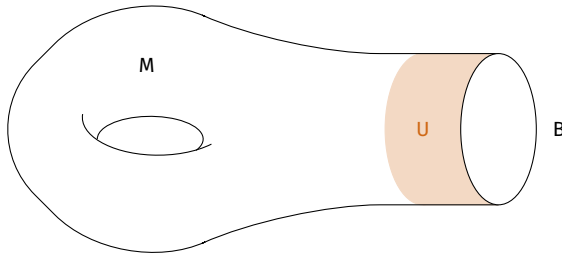
Twierdzenie 3.1. Niech M będzie gładką n -rozmaitością, a B niech będzie komponentą brzegu ∂M . Wtedy istnieje dyfeomorficzne (dyfeomorfizm na obraz) włożenie

$$K : B \times [0, 1) \rightarrow M$$

na otwarte otoczenie U komponenty B w M takie, że $K(x, 0) = x$ dla $x \in B$.

Otoczenie kołnierzone to otwarte otoczenie U brzegu ∂M na M , wraz z dyfeomorfizmem $F : [0, 1) \times \partial M \rightarrow U$ takie, że $F(0, x) = x$.

Dowód. Dowód za kilka wykładów przy pomocy potoków wektorowych (Rozdział 5.4).



Jeśli M_1, B_1 oraz M_2, B_2 są jak wyżej oraz istnieje dyfeomorfizm

$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

to możemy zdefiniować relację równoważności

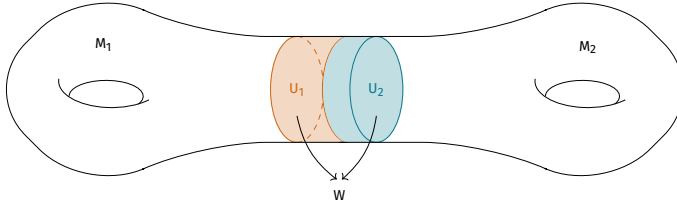
$$B_1 \ni x \sim f(x) \in B_2$$

oraz stworzyć rozmaitość:

$$M_1 \cup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \sim.$$

Struktura na $M_1 \cup_f M_2$ jest częściowo odziedziczona po M_1 i M_2 . Dodatkowo sklejamy zbiory U_i utożsamiając je z produktami $B_i \times [0, 1)$ za pomocą B_i :

$$K_i : B_i \otimes [0, 1) \rightarrow M_i$$



Na $M_1 \cup_f M_2$ istnieją trzy rodzaje map:

1. dla dowolnej mapy (U, ϕ) na M_1 rozważamy jej obcięcie do $U \setminus B_1$
2. dla dowolnej mapy (V, ψ) na M_2 rozważamy jej obcięcie do $V \setminus B_2$
3. dla dowolnej mapy (W, ξ) na B_1 i $\xi : W \rightarrow \bar{W} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ rozważamy zbiór

$$[W \times [0, 1]] \cup_{f|_W} [f(W) \times [0, 1]] = \widehat{W} \subseteq M_1 \cup_f M_2$$

z mapą

$$\widehat{\xi} : \widehat{W} \rightarrow \bar{\widehat{W}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\widehat{\xi}(x, t) = \begin{cases} (\xi(x), -t) & (x, t) \in U_1 \\ (\xi(f^{-1}(x)), t) & (x, t) \in U_2 \end{cases}$$

Mamy $\widehat{\xi}(x, 0) = \widehat{\xi}(f(x), 0)$, więc $\widehat{\xi}$ jest dobrze zdefiniowane w punktach sklejenia.

$$\bar{\widehat{W}} = \bar{W} \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^n \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

zaś $\widehat{\xi} : \widehat{W} \rightarrow \bar{\widehat{W}}$ jest homeomorfizmem.

Sprawdzenie gładkiej zgodności map z podpunktów 1, 2 i 3 zostanie pominięte.

Rozmaitość $M_1 \cup_f M_2$ wydaje się zależeć jednocześnie od wyboru f oraz otoczeń kołnierзовych K_i komponent brzegów B_i . W rzeczywistości jednak, $M_1 \cup_f M_2$ jest takie same z dokładnością do dyfeomorfizmu dla dowolnych wyborów K_i :

Fakt 3.2.

1. Jeśli K_1, K'_1 są podobnie położone w M_1 , tzn. istnieje $h : M_1 \rightarrow M_1$ dyfeomorfizm taki, że

$$K'_1 \upharpoonright B_1 \times [0, 1] = h \circ K_1 \upharpoonright B_1 \times [0, 1],$$

to wtedy

$$M_1 \cup_{f, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f, K'_1, K_2} M_2.$$

Analogicznie gdy weźmiemy K_2, K'_2 . [dowód: ćwiczenia]

2. Każde dwa otoczenia kołnierзовe komponenty B_1 brzegu ∂M są podobnie położone. [dowód: trudny]

3. Ustalmy otoczenia kołnierzone K_1, K_2 . Jeśli $f_0, f_1 : B_1 \rightarrow B_2$ są izotopijnymi dyfeomorfizmami, tzn. istnieje gładkie $F : [0, 1] \times B_1 \rightarrow B_2$ takie, że $F(0) = f_0$ a $F(1) = f_1$, wtedy

$$M_1 \cup_{f_0, K_1, K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f_1, K_1, K_2} M_2.$$

[dowód łatwy]

3.2. Suma spójna rozmaitości

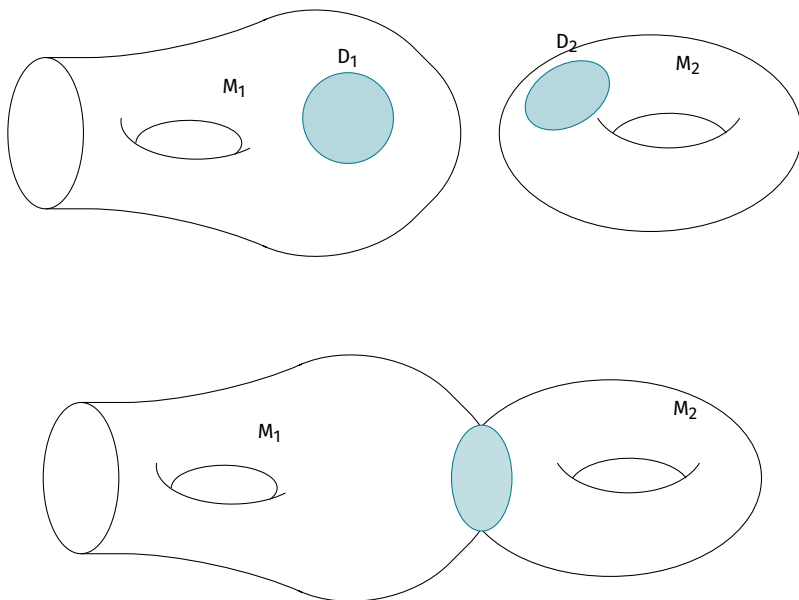
Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami wymiaru n . Weźmy $D_i \subseteq M_i$, czyli kule n -wymiarowe zawarte w otoczeniach mapowych. Oznaczmy $B_i = \partial D_i \cong S^{n-1}$ jako komponenty brzegu rozmaitości $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$. Niech

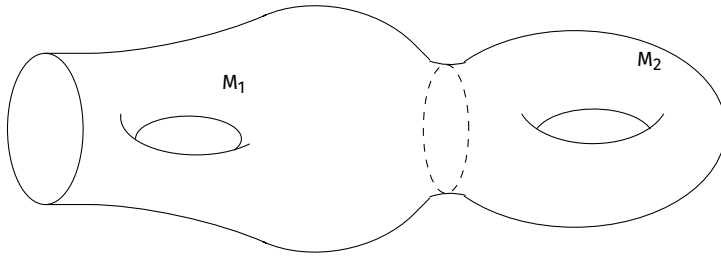
$$f : B_1 \rightarrow B_2$$

będzie dyfeomorfizmem. Oznaczamy wówczas

$$[M_1 \setminus \text{Int}(D_1)] \cup_f [M_2 \setminus \text{Int}(D_2)] = M_1 \# M_2$$

jako **sumę spójną** rozmaitości M_1 i M_2 .





Uwaga 3.3.

1. Jeśli M_i jest rozmaitością spójną, to $M_i \setminus \text{Int}(D_i)$, z dokładnością do dyfeomorfizmu, nie zależy od wyboru dysku D_i .
2. Istnieją dokładnie 2 klasy izotopii dyfeomorfizmów $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$: te zachowujące orientację oraz te, które orientacji nie zachowują.
3. Są co najwyżej dwie rozmaitości będące sumą spójną $M_1 \# M_2$. W przypadku rozmaitości zorientowanych, jedna z nich jest preferowana.

Klasyfikacja zamkniętych powierzchni spójnych (czyli zwarte 2-wymiarowe rozmaitości bez brzegu):

1. Powierzchnie orientowalne: $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2, \dots$
2. Powierzchnie nieorientowalne $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2, \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots$

Powierzchnie z powyższej listy są parami niedyfeomorficzne. Każda zamknięta powierzchnia jest dyfeomorficzna z jedną z tej listy.

3-rozmaitości:

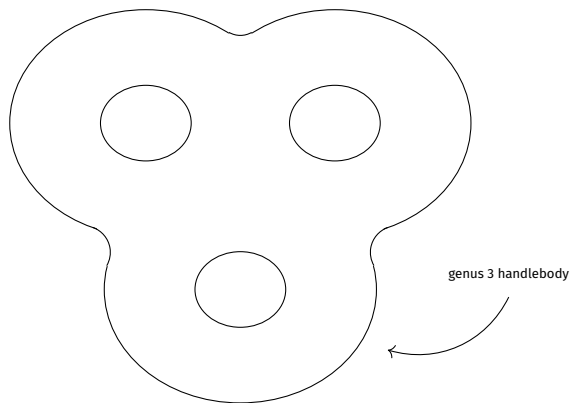
Poniżej bardzo luźne opisy z wikipedii. Dokładniejsze opisy lepiej jest doczytać w literaturze.



Dehn surgery: niech M będzie 3-wymiarową rozmaitością M z kolekcją węzłów (podrozmaitości S^1 dyfeomorficznych do skończonej rozłącznej sumy S^1) $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$. Rozmaitość M wywiercona wzdłuż tubowego otoczenia L posiada k -wiele komponentów brzegu $T_1 \cup \dots \cup T_k$. Chirurgia Dehna polega na wywierceniu z M tubowego otoczenia L wraz ze sklejeniem każdej z komponent brzegu $T_1 \cup \dots \cup T_k$ w jeden torus [to jest Dehn filling i jest wiele sposobów na wytworzenie go].



Rozkłady Heegaarda [Heegaard's splittings] na zorientowanej 3-rozmaitości z brzegiem M polega na na podzieleniu jej na dwa handlebody [fidget spinnery; 3-rozmaitości orientowalne z brzegiem zawierające parami rozłączne włożone 2-dyski takie, że rozmaitość wzdłuż nich przecięta jest S^3].



3.3. Działanie grupy dyfeomorfizmów

Definicja 3.4. Grupa G dyfeomorfizmów M to zbiór dyfeomorfizmów $g : M \rightarrow M$ zamknięty na składanie i branie odwrotności. Mówimy wtedy, że G działa na M przez dyfeomorfizmy.

Definicja 3.5. **Orbitą** punktu $x \in M$ względem działania G na M nazywamy zbiór

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

Uwaga 3.6. Orbity $G(x)$ i $G(y)$ są albo rozłączne, albo pokrywają się.

Rodzina wszystkich orbit stanowi **rozbicie** rozmaitości M na podzbiory.

Definicja 3.7. **Przestrzeń ilorazowa** działania G na M to przestrzeń, której punktami są orbity $G(x)$:

$$M/G = \{G(x) : x \in M\}$$

zaś topologia jest ilorazowa, tzn. **zbiór orbit jest otwarty** w $M/G \iff$ suma tych orbit stanowi otwarty podzbiór w M .

Jeśli $U \subseteq M$ jest otwartym podzbiorem, to

$$G(U)/G = \{G(x) : x \in U\}$$

jest otwarty w M/G i każdy zbiór otwarty w M/G jest takiej postaci. Kiedy \mathcal{B} jest bazą topologii w M , to rodzina

$$\{G(U)/G : U \in \mathcal{B}\}$$

jest **bazą topologii** w M/G . Z tego powodu M/G **zawsze posiada przeliczalną bazę**.

Definicja 3.8. Lokalną euklidesowość M/G zapewnia warunek na **działanie nakrywające**:

$$(\forall p \in M)(\exists p \in U \subseteq M)^{\text{otw.}} (\forall g_1, g_2 \in G) g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Przy takim działaniu G na M podzbiór $G(U)/G$ jest otoczeniem $G(p)$ homeomorficzny z U . Oznacza to lokalną euklidesowość M/G .

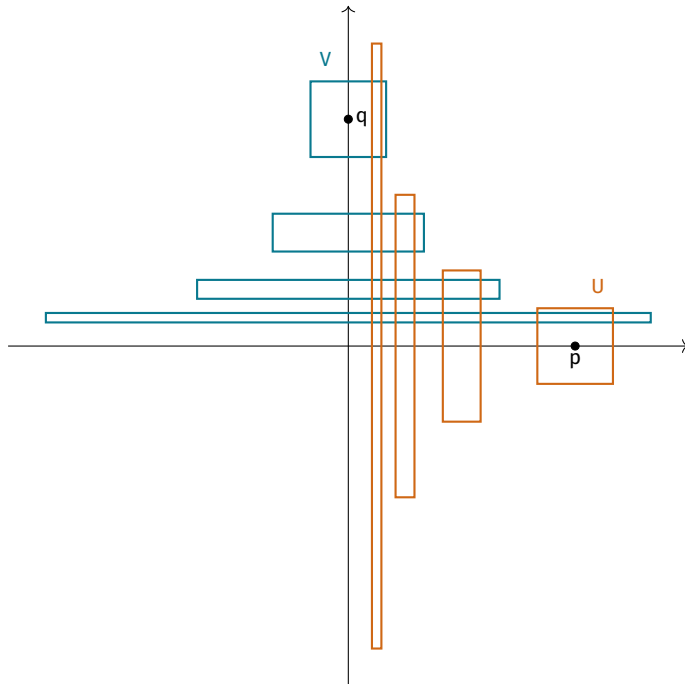
Fakt 3.9. Jeśli działanie grupy G przez homeomorfizmy na rozmaitości M jest nakrywające, to iloraz M/G jest lokalnie euklidesowy dla wymiaru $n = \dim(M)$.

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

jest nakrywające. W takim razie iloraz $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\langle A \rangle$ jest lokalnie euklidesowy wymiaru 2. Jednak iloraz ten nie jest przestrzenią Hausdorffa, bo dla punktów na osobnych osiach p i q zbiory otwarte:



nigdy nie mogą być rozłączne. Stąd rozmaitość ilorazowa M/G nie może być nigdy rozmaitością różniczkowalną.

Definicja 3.10. Działanie G na M przez dyfeomorfizm jest:

1. **wolne**, gdy dla każdego $g \in G \setminus \{id\}$ i dla każdego $x \in M$ $g(x) \neq x$
2. **właściwie nieciągłe** [properly discontinuous], gdy dla każdego zwarteo $K \subseteq M$ zbiór $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony.

Definicja 3.11. Dla $x \in M$ **stabilizator** (nadgrupa stabilizująca) punktu x względem G to

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G : g(x) = x\}$$

jest automatycznie podgrupą G .

Fakt 3.12. Działanie G jest wolne \iff wszystkie stabilizatory $\text{stab}(x)$ są trywialne ($= \{id\}$).

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z}_n na \mathbb{R}^2 zadane przez potęgi obrotu o kąt $\frac{2\pi}{n}$ nie jest wolne.
2. Działanie G jest wolne \iff dla każdego $x \in M$ odwzorowanie $G \rightarrow G(x)$ zadane przez $g \mapsto g(x)$ jest bijekcją.

Fakt 3.13.

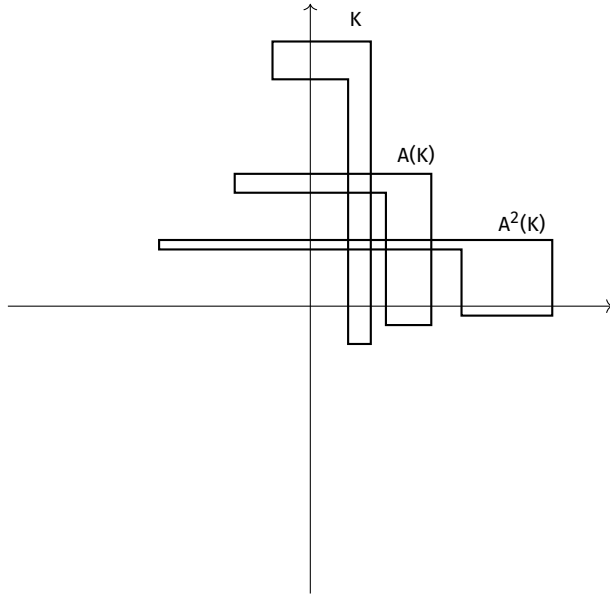
1. Gdy działanie G przez homeomorfizmy na przestrzeni topologicznej lokalnie zwartej X jest właściwie nieciągłe, to każda orbita $G(x)$ jest dyskretnym podzbiorem w X (tzn. każdy $x \in G(x)$ ma otwarte otoczenie U takie, że $U \cap G(x) = \{x\}$).
2. Jeśli działanie G na X jest właściwie nieciągłe i wolne, to jest też nakrywające.
3. Jeśli G działa przez homeomorfizmy na przestrzeni lokalnie zwartej X w sposób właściwie nieciągły, to iloraz X/G jest przestrzenią Hausdorffa.

Przykłady:

1. Działanie grupy \mathbb{Z} na S^1 przez potęgi obrotu o kąt α niewspółmierny z 2π jest wolne, ale ma orbity gęste w S^1 , a więc nie są one dyskretne. Zatem działanie nie jest ani właściwie nieciągłe, ani wolne. Iloraz S^1/\mathbb{Z} jest wtedy przestrzenią z topologią trywialną, więc nie jest rozmaitością.
2. Działanie \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ przez potęgi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nie może być właściwie nieciągłe. Można to zobaczyć bezpośrednio:



dla każdego $n \geq 1$ mamy $A^n(K) \cap K \neq \emptyset$.

Jednakże tak zadane działanie \mathbb{Z} na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ jest wolne i ma dyskretne orbity. W takim razie warunek, by działanie było wolne i miało dyskretne orbity nie jest wystarczający do tego, by iloraz był rozmaiłością. Nie musi być nawet przestrzenią Hausdorffa, jak pokazaliśmy wcześniej.

Fakt 3.14. Jeśli G jest działaniem na M^n przez dyfeomorfizmy w sposób wolny i właściwie nieciągły, to iloraz M/G jest

- lokalnie euklidesowy n -wymiarowy
- Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę

Zatem M/G jest n -wymiarową rozmaiłością topologiczną.

3.4. Gładki atlas na M/G

Niech $U \subseteq M$ spełnia warunek:

$$\left(\begin{array}{c} \text{👉} \end{array} \right) U \text{ jest zbiorem mapowym oraz dla każdych } g_1, g_2 \in G, \\ g_1 \neq g_2 \implies g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Zauważmy, że każdy $p \in M$ ma otoczenie U spełniające (\mathcal{L}) , a zatem każda orbita $G(p) \in M/G$ ma otoczenie postaci $G(U)/G$ ze zbiorem U spełniającym (\mathcal{L}) . Dla takiego U odwzorowanie

$$i_U : U \rightarrow G(U)/G$$

$$p \mapsto G(p)$$

jest homeomorfizmem. Niech teraz $\phi : I \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie mapą z atlasu \mathcal{A} . Wtedy

$$\phi_G : G(U)/G \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi_G = \phi \circ i_U^{-1}$$

jest obiecującym kandydatem na mapę dla M/G . Rozważmy rodzinę

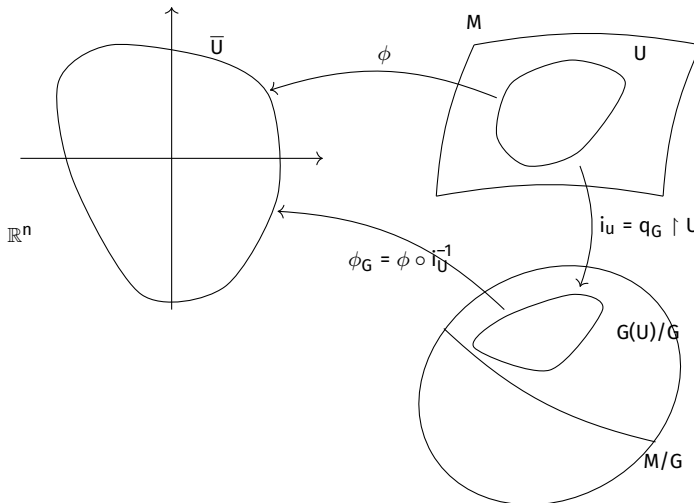
$$\mathcal{A}_G = \{(G(U)/G, \phi_G) : U \text{ spełnia } (\mathcal{L}) \text{ oraz } (U, \phi) \in \mathcal{A}\}.$$

Fakt 3.15. Odwzorowanie ilorazowe $q_G : M \rightarrow M/G$ zadane przez


$$q_G(x) = G(x) \in M/G$$

jest gładkie i jest lokalnym dyfeomorfizmem.

Dowód.




Zakładamy, że \mathcal{A}_G tworzy gładki atlas [fakt 3.16]. Wtedy q_G obcięte do mapowego U

musi spełniać , więc jest bijekcją na otwarty podzbiór w M/G . Ponadto

$$\phi_G \circ q_G \circ \phi^{-1} = \phi \circ i_U^{-1} \circ i_U \phi^{-1} = \text{id}_U$$

czyli q_G musi być funkcją gładką, bo inaczej id_U takie nie będzie. Stąd q_G jest dyfeomorfizmem. ☕

Fakt 3.16. \mathcal{A}_G jest gładko zgodny, więc jest gładkim atlasem na M/G .

Dowód. Niech $(G(U)/G, \phi_G)$ oraz $(G(V)/G, \psi_G)$ będą mapami związanymi z (U, ϕ) i (V, ψ) na zbiorach U, V spełniającymi . Rozważmy odwzorowanie przejścia

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} : \phi_G(G(U)/G \cap G(V)/G) \rightarrow \psi_G(G(U)/G \cap G(V)/G)$$

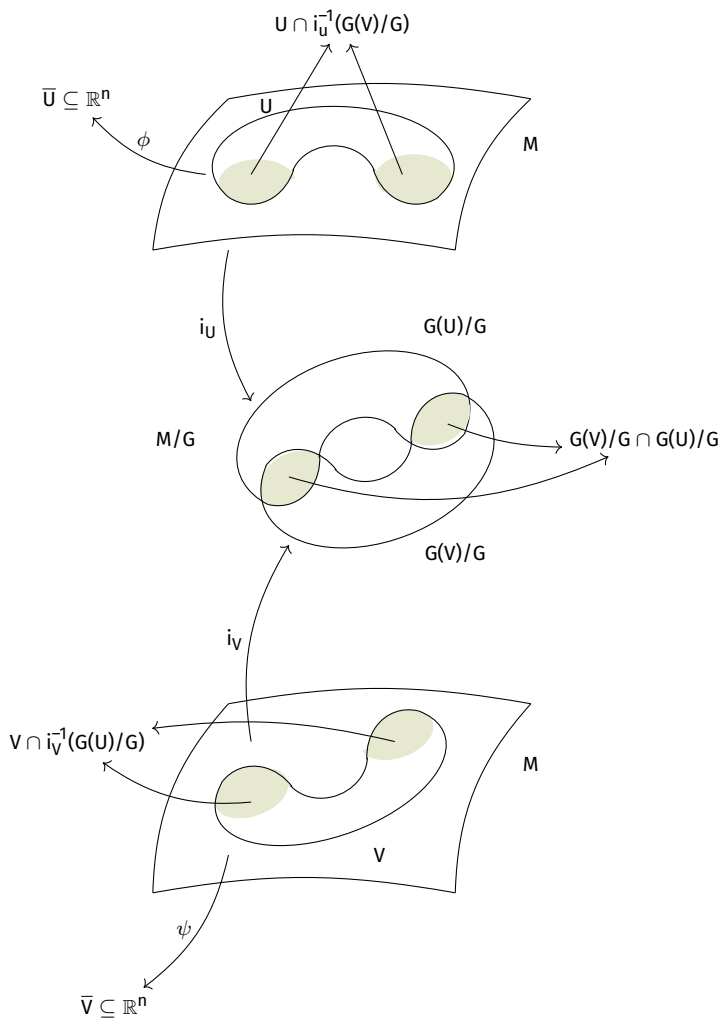
wiemy, że zachodzi

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ [\phi \circ i_U^{-1}]^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ i_U \circ \phi^{-1}$$

czyli wystarczy, żeby

$$i_V^{-1} i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

było gładkie.



Złożenie

$$i_V^{-1} \circ i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \rightarrow V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

jest homeomorfizmem otwartych podzbiorów w M . Weźmy $y = i_V^{-1}i_U(x)$, wtedy

$$G(x) \ni i_U(x) = i_V(y) \in G(y)$$

czyli x i y są w tej samej orbicie działania G . W takim razie istnieje $g_x \in G$ takie, że

$y = g_x(x)$. Z ciągłości $i_V^{-1}i_U$ możemy wywnioskować, że przyporządkowanie $x \mapsto g_x$ musi być stałe na komponentach spójności. W przeciwnym przypadku obraz spójnej komponenty przez ciągłe $i_V^{-1}i_U$ przeciąłby zbiory $g(U)$ dla kilku różnych g , a te są rozłączne dla różnych g . Stąd obraz nie byłby spójny, co daje sprzeczność.

Komponenty spójności $U \cap i_U^{-1}(G(V)/G)$ są otwarte w M . Na każdej takiej komponentce W mamy $i_V^{-1}i_U(x) = g(x)$ dla ustalonego g , które jest zależne od doboru komponenty (może być różne dla różnych komponent). Zatem

$$\psi_G \phi_G^{-1} = \psi i_V^{-1} i_U \phi^{-1}$$

jest zadane an $\phi(W)$ wzorem

$$\psi_G \phi_G^{-1}(x) = \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x).$$

Odwzorowanie $\psi \circ g \circ \phi^{-1}$ jest wyrażeniem dyfeomorfizmu g w mapach ϕ i ψ , więc jest gładkie. Z tego wynika, że $\psi_G \phi_G^{-1}$ jest gładkie na każdej komponentce spójności dziedziny, czyli jest gładkie. ☕

Uwaga. Iloraz M/G dla wolnego i właściwie nieciągłego działania grupy dyfeomorfizmów G na rozmaitość M z brzegiem jest rozmaitością z brzegiem.

Przykłady:

1. Działanie \mathbb{Z}^n na \mathbb{R}^n przez przesunięcia. Wtedy $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ to n -wymiarowy torus.
2. \mathbb{Z} działa na produkcie $S^1 \times \mathbb{R}$ tak, że dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$k \cdot (\theta, t) = ((-1)^k \theta, t + k)$$

Jest to przesunięcie z odpowiednią potęgą odbicia. Iloraz $(S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ jest butelką Kleina.

3. \mathbb{Z} działa na $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ przez

$$k \cdot (x, y) = ((-1)^k x, y + k)$$

a iloraz $([-1, 1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ jest wstęgą Möbiusa.

4. $\text{Conf}_n(M)$ jest przestrzenią konfiguracyjną n -elementowych podzbiorów gładkiej rozmaitości M (bez brzegu), tzn. jej punkty opisują wszystkie możliwe położenia punktów w układzie.

$\text{Conf}_n(M)$ można wyrazić jako iloraz działania nieciągłej grupy dyfeomorfizmów. Rozważmy produkt $\underbrace{M \times \dots \times M}_n$ oraz tzw. uogólnioną przekątną $\Delta^n(M)$ złożoną z

punktów

$$(x_1, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M$$

takich, że $x_i = x_j$. Zbiór $\Delta^n(M)$ jest domknięty w $M \times \dots \times M$, więc $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$ jest otwarty i składa się z (x_1, \dots, x_n) takich, że x_i są parami różne. Grupa permutacji S_n działa na $M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M)$ przez

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Wtedy $(M \times \dots \times M \setminus \Delta^n(M))/S_n = \text{Conf}(M)$. Takie działanie jest wolne i właściwie nieciągłe, bo S_n jest skończone. Dodatkowo, każda taka funkcja σ jest dyfeomorfizmem.

Naturalna mapa w $\text{Conf}_n(M)$ wokół punktu $p = (x_1, \dots, x_n)$ to $U_1 \times \dots \times U_n$, gdzie U_i są parami rozłącznymi otoczeniami punktów x_i (można je tak dobrać ze względu na Hausdorffowość M).

4. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, \dots, f_n)$ i dla $t \in (a, b)$ pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \\ \dots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczką f w p).

4.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

Niech M będzie rozmaićością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a, b) \rightarrow M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest **zbazowana w p** . Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy $C_p M$.

Definicja 4.1. Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p . Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 4.2. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne w mapie (U, ϕ) wokół p , to są też styczne w dowolnej innej mapie (W, ψ) wokół p (zgodnej z (U, ϕ)).

Dowód.

$$\begin{aligned} (\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' = \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$



Definicja 4.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p .

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na $C_p M$, bo jest zwrotna, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 4.4. Przestrzeń styczną do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_p M := C_p M / \text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_p M$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p .

4.2. Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$

Dla mapy $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_{\phi, p} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M \quad \lambda_{\phi, p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji $T_p M$ (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

Lemat 4.5. $\phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^* = \text{id}_{T_p M}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi, p}$ są one wzajemnie jednocznie i do siebie odwrotnie.

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\begin{aligned} \phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) = v \end{aligned} \quad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_p M$

$$\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi, p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi \circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi \circ c)'(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$ i w takim razie $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0] \quad \checkmark$ ☕

Fakt 4.6. Na przestrzeni stycznej $T_p M$ istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi, p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_p M$: $X + Y := \lambda_{\phi, p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w \mathbb{R}^n)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi, p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w \mathbb{R}^n).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z \mathbb{R}^n przez $\lambda_{\phi, p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z \mathbb{R}^n na $T_p M$ struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi, p}} T_p M \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi, p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\begin{aligned} \psi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) \right] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v) \end{aligned}$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.



O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla $T_p M$ stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p . W tej mapie działania na wektorach z $T_p M$ sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w \mathbb{R}^n .

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (\text{id}_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p \mathbb{R}^n$ z \mathbb{R}^n .
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \rightarrow M$ oraz $c : (a, t_0] \rightarrow M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy $C_p M$. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałoby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na $T_p M$ określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$

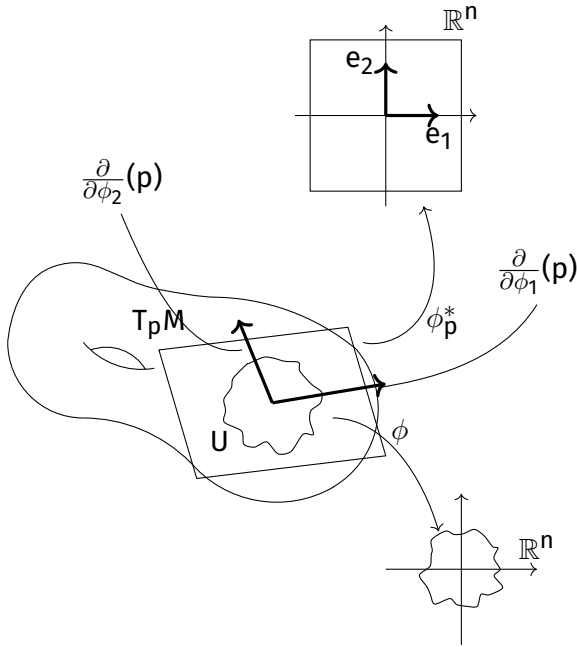
oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU), zaś dowolny wektor z $T_p\mathbb{R}^n$ (T_pU) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwbioraz przez $\phi_p^* : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ wersorów e_1, \dots, e_n oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę T_pM i dowolny wektor z T_pM ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami



Dla gładkiej $c : (a, b) \rightarrow M$ **wektor styczny** do c w $t \in (a, b)$ to

$$c'(t) := [c, t] = [(\phi \circ c)'(t)] = \sum_i (\phi \circ c)'_i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i}(c(t)),$$

gdzie (U, ϕ) jest mapą wokół $c(t)$.

4.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \rightarrow N$ i $p \in M, f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_p M$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_q N$.

Lemat 4.7. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, to $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_q N$ też są styczne

Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q ,

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 4.8. Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 4.7.

Lemat 4.9. $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_p M \xrightarrow{df_p} T_{f(p)} N \xrightarrow{\psi_{f(p)}^*} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 4.6).

$$\begin{aligned} \psi_{f(p)}^* \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_{f(p)}^* \circ df_p([c_v, 0]) = \psi_{f(p)}^*([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v] \end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \rightarrow N$ odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół $f(p)$ jako

$$\psi_{f(p)}^* df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w $T_p M$ i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)} N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})(\phi(p))}{\partial x_j} \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ jest wówna odwzorowaniu "mapowemu" $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_p M$, wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

Mapę $(id_{\mathbb{R}^n})_{\phi(p)}^* : T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $id_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \rightarrow M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \rightarrow T_{c(t_0)} M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)} M$.
- Rozważmy gładką funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonatem liniowym na $T_p M$.

Definicja 4.10. Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_p M$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X :

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$



- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_p M$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$



Stąd oznaczenie

$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to

i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

Przykłady:

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p \mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_p M$ i $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

4.4. Wiązka styczna

Definicja 4.11. Wiązka styczna to rozłączna suma przestrzeni stycznych we wszystkich punktach rozmaitości M :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

Chcemy teraz opisać na TM strukturę rozmaitości gładkiej. Rozważymy w tym celu rzutowanie

$$\pi : TM \rightarrow M$$

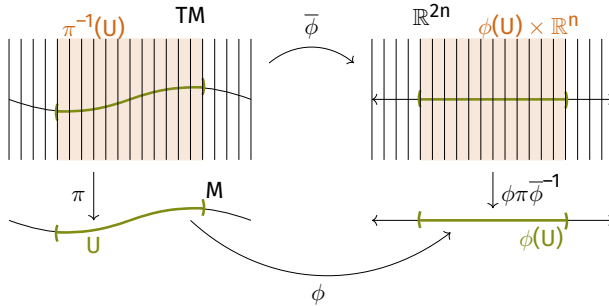
$$\pi(v) = p, \quad v \in T_p M,$$

które wektorowi przyporządkowuje jego punkt zaczepienia.

Lemat 4.12. Niech M będzie rozmaitością n -wymiarową M klasy C^k . Wówczas na wiązce stycznej TM istnieje naturalna struktura $2n$ -wymiarowej rozmaitości klasy C^{k-1} , dla której rzutowanie π jest C^{k-1} -różniczkowalne.

Jeśli M jest rozmaitością gładką (C^∞), to π również takie jest.

Dowód. Strukturę rozmaitości zadamy za pomocą samych map, nie definiując właściwej topologii na TM.



Niech (U, ϕ) będzie mapą na M . Rozważmy zbiór

$$TU = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_p M \subseteq TM$$

oraz odwzorowanie

$$\bar{\phi} : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\bar{\phi}(v) = (\phi(\pi(v)), \phi_{\pi(v)}^*(v)) = (\phi(p), \phi_p^*(v)) \quad v \in T_p M.$$

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0)$$

$\bar{\phi}$ jest różniczkowalne jako produkt kartezjański dwóch różniczkowalnych odwzorowań, a jego obraz to $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Sprawdźmy teraz zgodność tak zadanego atlasu. Niech (U, ϕ) i (V, ψ) będą mapami na M , a $(TU, \bar{\phi})$, $(TV, \bar{\psi})$ odpowiadającymi im mapami na TM . Spójrzmy na odwzorowania przejścia:

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \bar{\phi}^{-1}(x, w) &= (\psi \pi [\phi \pi]^{-1}(x), \psi_{\phi^{-1}(x)}^* [\phi_{\phi^{-1}(x)}^*]^{-1}(w)) = \\ &= (\psi \phi^{-1}(x), D_x(\psi \phi^{-1})(w)) \end{aligned}$$

Jest to odwzorowanie różniczkowalne klasy C^{k-1} jako produkt odwzorowania klasy C^k i C^{k-1} .

Pozostaje sprawdzić różniczkowalność odwzorowania π . Wyrazimy je w mapach (U, ϕ) na M oraz $(TU, \bar{\phi})$ na TM . Niech $p \in U$ oraz $v \in T_p U$, wtedy:

$$\phi \pi \bar{\phi}^{-1}(\phi(p), \phi_p^*(v)) = \phi \pi(v) = \phi(p)$$

więc π jest w tych mapach rzutowaniem na pierwszą składową \mathbb{R}^n , więc jest gładkie



Definicja 4.13. Dla $f : M \rightarrow N$ **odwzorowaniem stycznym** $df : TM \rightarrow TN$ nazywamy odwzorowanie

$$df(v) = df_{\pi(v)}(v) \in T_{f(\pi(v))}N \subseteq TN$$

Lemat 4.14. Dla gładkiego f również df jest gładkie.

Dowód. Weźmy $v \in T_pM$ i niech (U, ϕ) będzie mapą wokół p . Oznaczmy wówczas $q = f(p)$ i niech (V, ψ) będzie mapą wokół q . Wyrazimy df w mapach $(TU, \bar{\phi})$ i $(TV, \bar{\psi})$.

$$\mathbb{R}^{2m} \xrightarrow{\bar{\phi}^{-1}} TU \xrightarrow{df} TV \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbb{R}^{2n}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} df \bar{\phi}^{-1}(x, w) &= (\psi f \phi^{-1}(x), \psi_{f \phi^{-1}(x)}^* df_{\phi^{-1}(x)} [\phi_{\phi^{-1}(x)}^*]^{-1}(w)) \stackrel{1}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d\psi_{f \phi^{-1}(x)} df_{\phi^{-1}(x)} (d\phi_{\phi^{-1}(x)}^{-1}(x)) \stackrel{2}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d\psi_{f \phi^{-1}(x)} df_{\phi^{-1}(x)} d\phi_x^{-1}(w)) \stackrel{3}{=} \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), d(\psi f \phi^{-1})_x(w)) = \\ &= (\psi f \phi^{-1}(x), D_x(\psi f \phi^{-1})(x)) \end{aligned}$$

Równość 1 wynika z utożsamienia $d\phi_p = \phi_p^*$ (uzasadnione tutaj). Równość 2 to ogólny fakt, że jeśli f jest dyfeomorfizmem, to $(df_p)^{-1} = df_{f(p)}^{-1}$, natomiast równość 3 pojawia się na liście ćwiczeń:

$$d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p.$$



Uwaga 4.15. Różniczka df_p jak w lemacie wyżej zapisuje się w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w T_pM oraz $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(q)\}$ w T_qN przy pomocy macierzy:

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial(\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{i,j}.$$

To znaczy ma postać:

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(q)$$

Przykłady:

1. Dla otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^n$, wiązka styczna TU do U utożsamia się z $U \times \mathbb{R}^n$ poprzez

$$\sum_{i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (p) \mapsto (p, a_1, \dots, a_n)$$

Niech $f : M \rightarrow N$ i $g : N \rightarrow P$ będą odwzorowaniami gładkimi, wtedy:

- $d(g \circ f) = dg \circ df$
- $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$
- jeśli f jest dyfeomorfizmem, to również df jest dyfeomorfizmem oraz $(df)^{-1} = df^{-1}$

Dowód tych
właściwości jest
ćwiczeniem

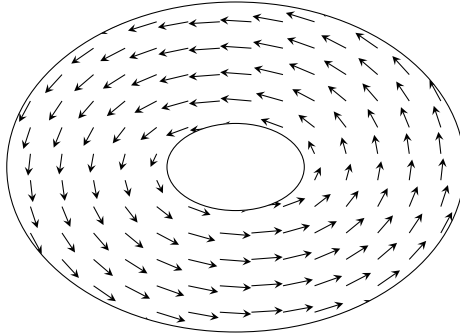
5. Pola wektorowe

Definicja 5.1. Niech M będzie gładką rozmaiłością. Gładką funkcję $X : M \rightarrow TM$ taką, że dla każdego $p \in M$ $X(p) \in T_p M \subseteq TM$ nazywamy **gładkim polem wektorowym** na M .

Równoważnie możemy postawić warunek, że $\pi \circ X = \text{id}_M$.

Uogólnienie pól wektorowych pojawiających się w kontekście równań różniczkowych.

Często zamiast $X(p)$ piszemy krócej X_p , co oznacza wektor pola w punkcie p . Pozwala to również uniknąć konfliktu notacji z pochodną kierunkową funkcji f wzdłuż wektora $X(Xf)$.



Wyraźmy pole wektorowe $X : M \rightarrow TM$ w mapach (U, ϕ) na M oraz $(TU, \bar{\phi})$ na TM . Niech $a_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ będą gładkimi funkcjami rzeczywistymi (nazwiemy je **współrzędnymi** X w mapach ϕ i $\bar{\phi}$) takimi, że

$$\bar{\phi} X \phi^{-1}(x) = (x, a_1(x), \dots, a_n(x)) = (x, \sum a_i(x) e_i),$$

gdzie e_i to baza standardowa \mathbb{R}^n . Zgodnie z oznaczeniem z poprzedniego rozdziału $\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) = (\phi_p^*)^{-1}(e_i)$ mamy

$$X(p) = \sum a_i(\phi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Jeśli teraz oznaczymy $b_i = a_i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, to wówczas

$$X(p) = \sum b_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Fakt 5.2. Pole $X : M \rightarrow TM$ jest gładkim polem wektorowym na $M \iff$ w mapie (U, ϕ) na M i odpowiadającej jej mapie $(TU, \bar{\phi})$ na TM wyraża się jako

$$X(p) = \sum b_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

dla pewnych gładkich $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Dowód. Bezpośrednio z przestawienia X w mapach (U, ϕ) i $(TU, \overline{\phi})$ jak wyżej.



Pole wektorowe na otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ma postać

$$X(x) = \sum_{i \leq n} a_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

dla pewnych gładkich funkcji $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Z tego powodu będziemy pisać

$$X(x) = [a_1(x), \dots, a_n(x)] \in \mathbb{R}^n \cong T_x U.$$

Zjawiska lokalne dla pól na rozmaitościach będziemy wyrażać za pośrednictwem map za pomocą pól na otwartych podzbiorach \mathbb{R}^n .

Wniosek 5.3. Suma dwóch gładkich pól wektorowych

$$(X + Y)(p) := X(p) + Y(p)$$

jest gładkim polem wektorowym.

Iloczyn gładkiej funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz gładkiego pola X

$$(f \cdot X)(p) := f(p) \cdot X(p)$$

jest gładkim polem wektorowym

Rodzinę wszystkich gładkich pól wektorowych na M będziemy oznaczać przez $C^\infty(TM)$ lub $\mathfrak{X}(M)$. W algebraicznym rozumieniu jest to moduł nad pierścieniem $C^\infty(M)$ gładkich funkcji rzeczywistych na M (patrz wniosek 5.3).

5.1. Definiowanie pola wektorowego za pomocą rozkładów jedności

Niech M będzie rozmaitością z niepustym brzegiem ∂M .

Definicja 5.4. Mówimy, że wektor $Y \in T_p M$, gdzie $p \in \partial M$, jest **skierowany do wewnątrz** M , jeśli w pewnej mapie $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{H}^n$ wyraża się przez

$$Y = \sum_{i \leq n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p), \quad a_n > 0$$

Fakt 5.5. Jeśli wektor o początku p jest skierowany do wewnątrz w jednej mapie, to jest tak w każdej innej mapie wokół p . Ponadto, suma wektorów skierowanych do wewnątrz jest wektorem skierowanym do wewnątrz.

Dowód. Niech Y będzie wektorem skierowanym do wewnątrz w mapie (U, ϕ) . Niech (V, ψ) będzie inną mapą wokół p . Wiemy, że

$$Y = \sum a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

i $a_n > 0$. Chcemy teraz sprawdzić, co się dzieje w indeksie n , gdy przedstawimy ten wektor jako kombinację liniową $\frac{\partial}{\partial \psi_i}(p)$. Popatrzmy na zamianę baz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_n}(p) &= (\phi_p^*)^{-1}(e_n) = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}[\psi_p^*(\phi_p^*)^{-1}(e_n)] = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}d\psi_p d(\phi_p)^{-1}(e_n) = \\ &= (\psi_p^*)^{-1}[d(\psi\phi^{-1})_{\phi(p)}(e_n)] \end{aligned}$$

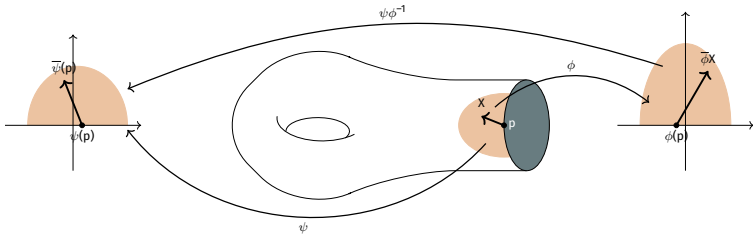
Wiemy, że $\psi\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją rzeczywistą, czyli

$$d(\psi\phi^{-1})_{\phi(p)} = D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})$$

jest jej pochodną. Dodatkowo, wiemy, że $\psi\phi^{-1}$ jest bijekcją, więc na pewno $D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})(e_n)$ nie może się zerować. Zarówno ψ jak i ϕ są mapami wokół brzegu ∂M , czyli tak naprawdę:

$$\psi\phi^{-1} : H^n \rightarrow H^n$$

W takim razie, $D_{\phi(p)}(\psi\phi^{-1})(e_n) \in \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.



Dla sumy wektorów $X + Y$ takich, że $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$ i $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, $a_n, b_n > 0$, mamy

$$X + Y = \sum (a_i + b_i) \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$$

wieć $a_i + b_i > 0$.



Definicja 5.6. Pole wektorowe $X : M \rightarrow TM$ jest **skierowane do wewnątrz** M , jeśli dla każdego $p \in \partial M$ $X(p)$ jest skierowany do wewnątrz M .

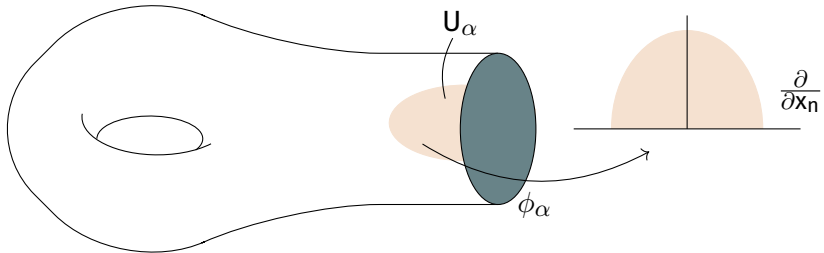
Fakt 5.7. Na każdej rozmaitości gładkiej z brzegiem M istnieje gładkie pole wektorowe X skierowane do wewnątrz M .

Dowód. Rozważmy rozkład jedności $\{f_i\}$ wpisany w pokrycie M zbiorami mapowymi U_α i niech $\text{supp}(f_i) \subseteq U_{\alpha_i}$. Dla tych U_α , które zahaczają o brzeg ∂M określmy pola wektorowe

$$X_\alpha : U_\alpha \rightarrow TU_\alpha \subseteq TM$$

$$X_\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha)_n}(p).$$

Dla pozostałych U_α określamy X_α dowolnie.



Zdefiniujemy teraz pole wektorowe:

$$X = \sum_j f_j X_{\alpha_j},$$

które jest lokalnie skończoną kombinacją gładkich pól skierowanych do wewnątrz i funkcji dodatnich. Jest to więc pole wektorowe skierowane do wewnątrz. ☕

5.2. Przenoszenie gładkich pól wektorowych przez dyfeomorfizmy

Niech $f : M \rightarrow N$ będzie dyfeomorfizmem i niech $X \in \mathfrak{X}(M)$ będzie gładkim polem wektorowym na M . Poszczególne wektory X_p pola X przenoszone przez odwzorowanie styczne df do TN tworzą pola wektorowe na N oznaczane przez $df(X)$ w ten sposób, że

$$df_p(X_p) = df(X)_{f(p)}.$$

Określamy pole wektorowe $df(X)$ na N przez

$$df(X)_q := df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)}) \in T_q N \subseteq N.$$

Powyższe określenia oznaczają, że pole $df(X)$, jako odwzorowanie $N \rightarrow TN$, jest złożeniem

$$df(X) = df \circ X \circ f^{-1}.$$

Jako złożenie odwzorowań gładkich, samo też jest odwzorowaniem gładkim.

Definicja 5.8. Gładkie pole wektorowe $df(X)$ określone jak wyżej jest nazywane **przeniesieniem** pola X na N przez dyfeomorfizm f .

Jeśli o dyfeomorfizmie f myślimy jako o sposobie utożsamienia rozmaiłości M i N , to o polu $df(X)$ na N możemy myśleć jako o tym samym polu co pole X na M względem utożsamienia za pomocą f .

Przykłady:

- Wybermy pole $X \in \mathfrak{X}(M)$, takie, że dla mapy (U, ϕ) na M mamy

$$X(p) = \sum a_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p), \quad p \in U.$$

Wówczas

- przeniesienie pola $X \upharpoonright U$ na $\phi(U)$ przez dyfeomorfizm ϕ daje pole $d\phi(X)(u) = \sum a_i(\phi^{-1}(u)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$
- wyrażenie pola X w mapach (U, ϕ) na M oraz $(TU, \bar{\phi})$ na TM daje

$$\bar{\phi}X\phi^{-1}(x) = (x, a_1(\phi^{-1}(x)), \dots, a_n(\phi^{-1}(x)))$$

Oba te pola, a zwłaszcza pierwsze z nich, będziemy nazywać **wyrażeniem pola X w mapie (U, ϕ)** . Ponadto zachodzi

$$X(p) = [c, t_0] \iff d\phi(X)(\phi(p)) = [\phi \circ c, t_0]$$

5.3. Krzywe całkowe

Definicja 5.9. Niech M będzie rozmaiłością bez brzegu. **Krzywą całkową** pola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(M)$ to dowolna krzywa

$$\gamma : (a, b) \rightarrow M$$

taka, że dla każdego $t \in (a, b)$

$$\gamma'(t) = [\gamma, t] = X(\gamma(t))$$

Lemat 5.10. Niech γ będzie krzywą całkową pola $X \in \mathfrak{X}(M) \iff$ dla każdej mapy (U, ϕ) na M krzywa $\phi \circ \gamma$ jest krzywą całkową pola $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(\phi(U))$.

Dowód.

\implies

Jeśli $\gamma'(t) = [\gamma, t] = X_{\gamma(t)}$, to z definicji $d\phi$ mamy

Dla przypomnienia
 $df(X)_{f(p)} = df_p(X)$

Dowód w lemacie
 5.10

$$(\phi \circ \gamma)'(t) = [\phi \circ \gamma, t] = d\phi_{\gamma(t)}([\gamma, t]) = d\phi(X_{\gamma(t)}) = d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}$$

←

Niech $(\phi \circ \gamma)'(t) = [\phi \circ \gamma, t] = d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= [\phi^{-1}(\phi \circ \gamma)]'(t) = d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}^{-1}[(\phi \circ \gamma)'(t)] = \\ &= d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}[d\phi(X)_{\phi \circ \gamma(t)}] = \underbrace{d\phi_{\phi \circ \gamma(t)}^{-1} d\phi_{\gamma(t)}}_{\text{id}_{T_{\gamma(t)}M}}(X_{\gamma(t)}) = X_{\gamma(t)} \end{aligned}$$



Krzywe całkowe mają **następujące własności**:

- dla każdego $p \in M$ istnieje krzywa całkowa o początku w p (twierdzenie 5.11)
- jeśli krzywe całkowe przecinają się, to są sobie równe (uwaga 5.12)
- krzywe całkowe pola na otoczeniu pewnego punktu $p \in M$ są gładko zależne (fakt 5.13)

Które zostaną udowodnione niżej.

Twierdzenie 5.11. Dla każdego $p \in M$ istnieje krzywa całkowa o początku w p , tzn. krzywa całkowa $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka, że $\gamma(0) = p$

Krzywe całkowe wyrażenia pola X w mapie (U, ϕ) to wyrażenie krzywych całkowych pola X w tej samej mapie.

Dowód. Niech (U, ϕ) będzie mapą na M taką, że powiązane z nią pole wektorowe na $T\mathbb{R}^n$ spełnia

$$[d\phi(X)](u) = \sum_{i \leq n} a_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i}(u),$$

gdzie $\phi(p) = x_0 \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Wystarczy pokazać, że istnieje krzywa całkowa pola $d\phi(X)$ o początku x_0 .

Poszukiwana krzywa rozwiązuje równanie różniczkowe zwyczajne w \mathbb{R}^n :

$$c'(t) = [a_1(c(t)), \dots, a_n(c(t))]$$

z warunkiem początkowym $c(0) = x_0$.



Uwaga 5.12. Niech $\gamma_1, \gamma_2 : (a, b) \rightarrow M$ będą krzywymi całkowymi pola $X \in \mathfrak{X}(M)$. Jeśli istnieje $t_0 \in (a, b)$ takie, że

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$$

to krzywe te są równe.

Dowód. Rozważmy zbiór

$$A = \{t \in (a, b) : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}.$$

Jest on domknięty, gdyż γ_1 i γ_2 są funkcjami ciągłymi. Ze względu na to, że γ_i jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego tak jak w dowodzie wyżej, to zbiór ten jest otwarty (rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych są lokalnie jednoznaczne). Wiemy, że $t_0 \in A$, więc zbiór A jest niepusty. Odcinek (a, b) jest spójny, czyli skoro $A \subseteq (a, b)$ jest zbiorem jednocześnie otwartym i domkniętym, to może być pusty (ale t_0) lub być całością. Stąd $A = (a, b)$. ☕

Fakt 5.13. Dla każdego $p \in M$ istnieje $p \in U_p \subseteq M$ oraz gładka funkcja

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \rightarrow M$$

taka, że dla każdego $q \in U_p$ $\gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ określone przez

$$\gamma_q(t) = \Gamma(t, q)$$

jest krzywą całkową pola X o początku w q .

Dowód. Wynika z analogicznego faktu dla równań różniczkowych zwyczajnych. ☕

Definicja 5.14. Pole wektorowe $X \in \mathfrak{X}(M)$ jest **zupętne**, jeśli dla każdego $p \in M$ istnieje krzywa całkowa $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ o początku w p . To znaczy każda lokalnie określona krzywa całkowa przedłuża się do całego \mathbb{R} .

Przykłady:

1. Rozważmy pole wektorowe

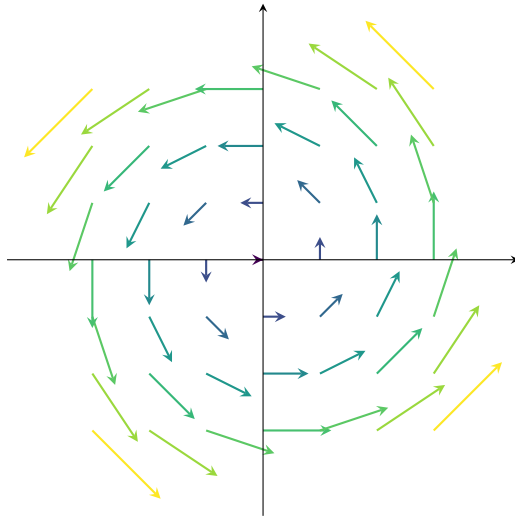
$$X(u, v) = -v \frac{\partial}{\partial u}(u, v) + u \frac{\partial}{\partial v}(u, v)$$

na \mathbb{R}^2 . Jest ono zupętne, gdyż krzywe całkowe mają postać

$$\gamma(t) = (r \cdot \cos(t + t_0), r \cdot \sin(t + t_0))$$

i są określone na całym \mathbb{R} .

To samo pole ale określone na $\text{Int}(\mathbb{H}^2) = \{(x, y) : y > 0\}$ nie jest zupętne.



Fakt 5.15. Jeśli $X \in \mathfrak{X}(M)$ jest zupełnym polem wektorowym, a dla każdego $p \in M$

$$\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$$

jest maksymalnie przedłużoną krzywą całkową pola X o początku w p , to

$$\Gamma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

określone przez

$$\Gamma(t, p) = \gamma_p(t)$$

jest odwzorowaniem gładkim.

Ponadto, dla każdego $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\phi_t : M \rightarrow M$ zadane przez

$$\phi_t(p) = \gamma_p(t)$$

jest dyfeomorfizmem rozmaitości M , a przyporządkowanie $t \mapsto \phi_t$ jest homomorfizmem grupy \mathbb{R} w grupę dyfeomorfizmów M ($\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$).

Dowód. Gładkość odwzorowania Γ wynika z gładkiej lokalnej zależności krzywych całkowych od punktu początkowego. Tak samo jak dla równań różniczkowych gładka zależność lokalna pociąga gładką zależność globalną.

W takim razie $\phi_t = \Gamma(t, \cdot)$ jest gładkim odwzorowaniem $M \rightarrow M$, gdzie oczywiście $\phi_0 = \text{id}_M$. Weźmy dowolne $t, s \in \mathbb{R}$, wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t(\phi_s(p)) &= X(\phi_t(\phi_s(p))) \\ \frac{d}{dt} \phi_{t+s}(p) &= X(\phi_{t+s}(p)) \end{aligned}$$

są krzywymi całkowymi. Rozważmy teraz krzywe całkowe $\alpha(t) = (\phi_t \circ \phi_s)(p)$ oraz $\beta(t) = \phi_{t+s}(p)$. Mamy

$$\alpha(0) = (\phi_0 \circ \phi_s)(p) = (\text{id}_M \circ \phi_s)(p) = \phi_s(p)$$

$$\beta(0) = \phi_{0+s}(p) = \phi_s(p),$$

czyli α oraz β są obie krzywymi całkowymi o początku w punkcie $\phi_s(p)$, więc na mocy 5.12 mamy

$$\phi_t \circ \phi_s = \alpha = \beta = \phi_{t+s}$$

Z równości $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ wynika, że:

- ϕ_t jest dyfeomorfizmem, bo

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_{t+(-t)} = \phi_0 = \text{id}_M$$

- $t \mapsto \phi_t$ jest homomorfizmem $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$.



Rodzina $\{\phi_t\}$ jak wyżej jest nazywana **potokiem pola** X lub **jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów** generowaną przez X . Pojawia się też określenie *potok fazowy* pola X .

Krzywe całkowe $t \mapsto \phi_t(p)$ są nazywane **trajektoriami potoku** $\{\phi_t\}$, trajektoriami pola X , krzywymi fazowymi pola X , liniami sił etc.

Przykłady:

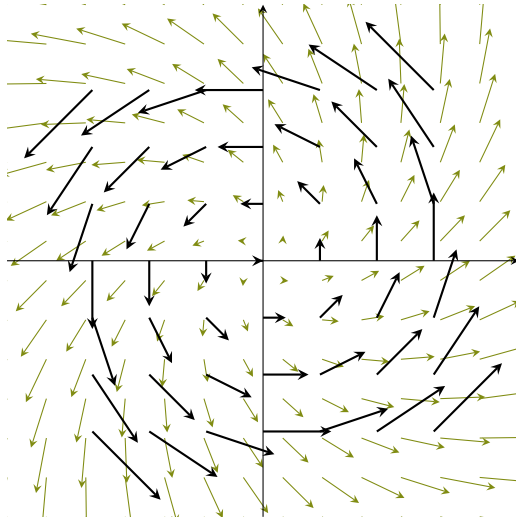
1. W przykładzie pola zupełnego

$$X(u, v) = -v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}$$

na \mathbb{R}^2 jak wyżej mamy potok

$$\phi_t(u, v) = (u \cos t - v \sin t, u \sin t + v \cos t)$$

będący obrotem wokół $(0, 0)$ o kąt t . Na zielono niżej przedstawiono ϕ_{40° .



Definicja 5.16. Jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów na rozmaitości M nazywamy

- każdy homomorfizm $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ gładko zależny od $t \in \mathbb{R}$ lub, równoważnie,
- każdą rodzinę $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ dyfeomorfizmów gładko zależną od t , taką, że $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ dla każdego $t, s \in \mathbb{R}$.

Pole wektorowe $X \in \mathfrak{X}(M)$, które nie jest zupełne wyznacza jedynie tzw. lokalną jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, tzn. rodzinę

$$\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)\}_\alpha$$

taką, że

1. zbiory $U_\alpha \subseteq M$ są otwarte i pokrywają M
2. $\phi^\alpha : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \rightarrow M$ jest gładkie
3. $\phi^\alpha(0, p) = p$ dla każdego $p \in U_\alpha$
4. oznaczając

$$\phi_t^\alpha(p) = \phi^\alpha(t, p)$$

jeśli $s, s+t \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$, $t \in (-\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta)$ oraz $\phi_s^\alpha(p) \in U_\beta$, to wówczas

$$\phi_t^\beta \circ \phi_s^\alpha(p) = \phi_{t+s}^\alpha(p)$$

Każdy $(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)$ tworzony jest z lokalnych krzywych całkowych pola X gładko

zależnych po punktu początkowego:

$$t \mapsto \phi^\alpha(t, p)$$

jest krzywą całkową pola X o początku w p . To znaczy

$$\phi^\alpha(0, p) = p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^\alpha(t, p) = X(\phi^\alpha(t, p)).$$

Taką rodzinę nazywamy też **potokiem pola X** , zaś X to jej *potok generujący*.

Twierdzenie 5.17. *Każda abstrakcyjna jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów M jest potokiem pewnego zupełnego pola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Ponadto, jeśli patrzymy na prawdziwą jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, to generując ją pole X jest zupełne.

Dowód. Niech $\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \phi^\alpha)\}$ będzie rodziną dyfeomorfizmów jak wyżej.

Określmy pole $X \in \mathfrak{X}(M)$. Jeśli $p \in U_\alpha$, to

$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\alpha(t, p) \in T_p M$$

według punktu 3. wyżej.

Takie pole jest dobrze określone, tzn. jeśli $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, to

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\alpha(t, p) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \phi^\beta(t, p).$$

Można to pokazać stosując warunek 4. wyżej dla $s = 0$. Weźmy $\phi_s^\alpha(p) = \phi_0^\alpha = p \in U_\beta$, więc dla $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon = \min(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$, zachodzi

$$\phi_t^\beta(p) = \phi_t^\beta(\phi_s^\alpha(p)) = \phi_{t+s}^\alpha(p) = \phi_{t+0}^\alpha = \phi_t^\alpha(p).$$

Stąd wynika równość pochodnych.

Pokażemy, że na pojedynczym U_α tak określone pole X jest polem gładkim. Niech Z będzie pomocniczym polem na produkcie $(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha$ zadany przez

$$Z(t, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=t} (s, p) = \frac{\partial}{\partial t} (t, p).$$

Oczywiście, jest to gładkie odwzorowanie

$$Z : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \rightarrow T[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha]$$

kóre daje również

$$d\phi^\alpha : T[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha] \rightarrow TM.$$

Ponadto, dla $p \in U_\alpha$ zachodzi

$$X(p) = d\phi^\alpha \circ Z(0, p)$$

i łatwo jest już sprawdzić gładkość w lokalnych mapach na U_α .

Pokażemy teraz, że krzywe $t \mapsto \phi^\alpha(t, p)$ są krzywymi całkowymi pola X , tzn. sprawdzimy, że

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} \phi^\alpha(t, p) = X(\phi^\alpha(t_0, p))$$

dla każdego $p \in U_\alpha$ oraz $t_0 \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$.

Zbiory postaci U_α pokrywają całe M , stąd istnieje β takie, że $\phi^\alpha(t_0, p) \in U_\beta$, przy czym może się zdarzyć, że $\beta = \alpha$. Wtedy

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=t_0} \phi^\alpha(t, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} \phi^\alpha(t_0 + s, p) = \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} \phi_s^\beta(\phi_{t_0}^\alpha(p)) = X(\phi_{t_0}^\alpha(p))$$

przedostatnia równość wynika z warunku 4, a ostatnia równość to oczywiście sposób w jaki X jest zdefiniowane. ☕

Twierdzenie 5.18. *Jeśli $X \in \mathfrak{X}(M)$ ma nośnik zwarty, to X jest zupełne.*

Na zwartej rozmaitości M każde pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ ma nośnik zwarty, więc każde jest zupełne.

Dowód. Nośnik $\text{supp}(X)$ możemy pokryć skończoną rodziną zbiorów U_{α_i} , dla których istnieją odpowiednie

$$\phi^{\alpha_i} : (-\varepsilon_{\alpha_i}, \varepsilon_{\alpha_i}) \times U_{\alpha_i} \rightarrow M.$$

Wtedy dla $\varepsilon = \min_i \{\varepsilon_{\alpha_i}\}$ możemy stworzyć krzywe całkowe o początku w dowolnym $p \in M$ i określone na przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ponieważ tak dobrane ε jest jednostajne na całym M , to możemy w ten sposób dobrane krzywe całkowe przedłużać w nieskończoność w obie strony, a więc pole z którym są one powiązane jest polem zupełnym. ☕

5.4. Zastosowania potoków pól wektorowych

Przykłady:

1. Jeśli M jest rozmaitością spójną, a $p, q \in M$, to istnieje dyfeomorfizm $f : M \rightarrow M$ taki, że $f(p) = q$. Określamy tę własność tranzytywnością dyfeomorfizmów na punktach spójnej rozmaitości.

Dowód. Ponieważ M jest spójna, to p możemy z q połączyć kawałkami gładką krzywą γ . Mówiąc dokładniej, istnieje

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M$$

oraz $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ takie, że $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ jest gładkim włożeniem. Oznacza to, $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ jest różnowartościowa i pochodna nie zeruje się na żadnym punkcie $t \in [a_i, a_{i+1}]$. Dodatkowo wymagamy, by $\gamma(a) = p$ i $\gamma(b) = q$.

Dla każdego $i \in \{0, \dots, n-1\}$ skonstruujemy dyfeomorfizm $f_i : M \rightarrow M$ taki, że

$$f_i(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1}).$$

Wówczas dyfeomorfizm $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$ będzie dyfeomorfizmem którego istnienie chcemy dowieść.

Dla $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ rozważmy pole wektorowe X_i o nośniku zwartym takie, że

$$X_i(\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}](t)) = \frac{d}{dt} \gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}](t)$$

dla $t \in [a_i, a_{i+1}]$. Takie pole może zostać skonstruowane za pomocą rozkładów jedności i jest ono zupełne.

Oznaczmy $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}] = \gamma^i$. Rozważmy mapę (U, ϕ) na M . Wtedy

$$\phi \circ \gamma^i = (\gamma_1^i(t), \dots, \gamma_n^i(t)).$$

Ponieważ $(\gamma^i)'(t) \neq 0$, to dla ustalonego t_0 możemy przyjąć, że $(\gamma_1^i)'(t_0) \neq 0$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, że γ_1^i jest gładko odwracalne wokół t_0 . Nakładając γ_1^{-1} lokalnie wokół t_0 na $\phi \circ \gamma^i(t)$ dostajemy dyfeomorfizm

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\gamma_1^{-1}(x_1), x_2, \dots, x_n)$$

dający mapę ψ , w której

$$\psi \gamma^i(t) = (t, \gamma_2^i(t), \dots, \gamma_n^i(t)).$$

Zdefiniujmy lokalnie pole Y_α przez

$$Y_\alpha(x_1, \dots, x_n) = [1, \gamma_2'(x_1), \dots, \gamma_n'(x_1)]$$

Wtedy

$$(\psi \gamma^i)'(t) = Y_\alpha(\psi \gamma^i(t)).$$

Wystarczy w pokrycie ze zbiorem odpowiadającym mapie ψ wpisać rozkład jedności i zdefiniować $X_i = \sum f_\alpha Y_\alpha$, gdzie Y_α różne niż to opisane wyżej jest zerowe.

Krzywa $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ jest krzywą całkową tego pola. Zatem potok $\phi_t^{X_i}$ tego pola spełnia warunek

$$\phi_{a_{i+1}-a_i}^{X_i}(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1}).$$

Bierzemy więc $f_i = \gamma_{a_{i+1}-a_i}^{X_i}$.



- Niech $p \in M$ oraz $X \in C^\infty(TM)$ takie, że $X(p) \neq 0$. Wówczas istnieje otoczenie $p \in U$ oraz mapa $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że pole X w tej mapie wyraża się $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. [Wyprostowanie pola wektorowego]

Wyrażenie pola $X \in C^\infty(TM)$ w mapie $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ to zapisanie pola

$$d\phi(X) = d\phi_{\phi^{-1}(u)}(X(\phi^{-1}(u)))$$

dla $u \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, w postaci

$$\sum_{i \leq n} x_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u)$$

Dowód. Problem jest lokalny wokół p , więc wystarczy rozumienie go w dowolnej mapie wokół p . Możemy od razu przyjąć, że X jest polem wektorowym na $U \subseteq \mathbb{R}^n$ postaci

$$X = \sum x_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u).$$

Załóżmy, że punktowi p odpowiada punkt $u_0 \in U$ taki, że $u_0 = (0, \dots, 0)$.

Przyjmijmy, że $x_1(u_0) \neq 0$, bo $X(u_0) \neq 0$. Niech ϕ_t oznacza lokalny potok wokół u_0 , tzn.

$$\phi_t(u) = \phi(t, u),$$

gdzie $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \rightarrow U$ i $U_0 \subseteq U$ jest mniejszym otoczeniem p . Ponadto, niech $\phi(0, u) = u$ oraz

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = X(\phi(t, u)).$$

Oznaczmy zbiór otwarty

$$\Omega = \{(u_2, \dots, u_n) : (0, u_2, \dots, u_n) \in U_0\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

i rozważmy funkcję

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow U$$

$$F(t, (u_2, \dots, u_n)) = \phi_t(0, u_2, \dots, u_n) = \phi(t, (0, u_2, \dots, u_n)).$$

Jej jacobian ma postać

$$DF(0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} x_1(u_0) & 0 & \dots & 0 \\ x_2(u_0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ x_n(u_0) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(DF(0, \dots, 0)) = x_1(u_0) \neq 0,$$

zatem na otoczeniu $(0, \dots, 0)$ F jest dyfeomorfizmem. Potraktujmy więc F^{-1} jako

nową mapę wokół $u_0 = (0, \dots, 0)$. Pokażemy, że $dF^{-1}(X) = \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} (dF \upharpoonright (t, u_2, \dots, u_n))^{-1}(X(F(t, u_2, \dots, u_n))) &= \frac{\partial}{\partial t}(t, u_2, \dots, u_n) \\ (dF \upharpoonright (t, u_2, \dots, u_n))\left(\frac{\partial}{\partial t}(t, u_2, \dots, u_n)\right) &= \frac{d}{dt}F(t, u_2, \dots, u_n) = \\ &= \frac{d}{dt}\phi_t(0, u_2, \dots, u_n) = \\ &= X(\phi_t(0, u_2, \dots, u_n)) = X(F(t, u_2, \dots, u_n)) \end{aligned}$$



Otoczenie
kołnierzone to
otwarte otoczenie
 $U \subset \partial M$ w M wraz
z dyfeomorfizmem
 $F: [0, 1) \times \partial M \rightarrow U$
takim, że
 $F(0, x) = x$.

3. **Otoczenie kołnierzone** [twierdzenie 3.1] brzegu zwartej rozmaiłości. Pokażemy istnienie otoczenia kołnierzonego.

Dowód. Niech M będzie zwartą rozmaiłością o niepustym brzegu $\partial M \neq \emptyset$, a X niech będzie polem wektorowym na M , które na brzegu jest skierowane do wewnątrz M (istnienie takiego pola: 5.7). Oznacza to, że w mapie $\psi: U_p \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ wokół punktu $p \in \partial M$, gdzie $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0\}$ pole X ma postać

$$X(x) = \sum_{i \leq n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gdzie $X_1(0, x_2, \dots, x_n) > 0$.

Dla każdego $p \in \partial M$ istnieje lokalna krzywa całkowa $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$ pola X o początku w p , tzn. $\gamma(0) = p$. Ponadto, istnieje również gładka funkcja

$$\phi_p: [0, \varepsilon) \times U_p \rightarrow M$$

taka, że odwzorowanie $t \mapsto \phi_p(t, q)$ jest krzywą całkową pola X o początku w q dla każdego $q \in U_p$.

Ponieważ M jest zwarte, to każde lokalne jednostronne rozwiązanie równania różniczkowego można dowolnie przedłużać, otrzymując gładkie

$$\phi: [0, \infty) \times M \rightarrow M$$

takie, że $t \mapsto \phi(t, x)$ są krzywymi całkowymi pola X .

Określmy funkcję $F: [0, \infty) \times \partial M \rightarrow M$ taką, że

$$F(t, p) = \phi(t, p).$$

Wtedy funkcja F ma maksymalny rząd we wszystkich punktach $(0, p)$, bo macierz Jakobianu w mapie ψ_p ma postać

$$DF_{(0,p)} = \begin{bmatrix} X_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ X_2(p) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(p) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

czyli $\det DF_{(0,p)} = X_1(p) > 0$. Zatem istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że obcięcie $F \upharpoonright [0, \varepsilon \times \partial M$ jest gładkie i w każdym punkcie ma rząd n (maksymalny). Do pokazania, że $F \upharpoonright [0, \varepsilon) \times$

∂M jest otoczeniem kołnierзовym wystarczy różnowartościowość $F \upharpoonright [0, \varepsilon) \times \partial M$ (dyfeomorfizm na otwarte otoczenie brzegu).

Założmy, że $F(t_1, p_1) = F(t_2, p_2)$, gdzie $t_1 \geq t_3$. Wówczas z jednoznaczności krzywych całkowych dostajemy

$$F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_2, 0) = p_2.$$

Gdyby $t_1 > t_2$, to istniałaby krzywa całkowa $\gamma[0, t_1 - t_2] \rightarrow M$ zadana przez $\gamma(t) = F(p_1, t)$, gdzie $\gamma(t_1 - t_2) = p_2$, co jest niemożliwe, bo z punktu $p_2 \in \partial M$ nie da się poprowadzić krzywej całkowej "wstecz". Stąd też $t_1 = t_2$ i $F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_1, 0) = p_1$, czyli $p_2 = p_1$. ☕

5.5. Interpretacja pól wektorowych jako derywacji

Definicja 5.19. Derywacja (lub **różniczkowanie**) w punkcie $p \in M$ to operator

$$L_p : \{\text{funkcje gładkie określone na otoczeniach otwartych } p\} \rightarrow \mathbb{R}$$

który jest dodatkowo:

1. liniowy, tzn. $L_p(f + g) = L_p(f) + L_p(g)$ oraz $L_p(c \cdot f) = c \cdot L_p(f)$ dla wszystkich $c \in \mathbb{R}$ oraz funkcji gładkich f, g
2. spełniający regułę Leibniza

$$L_p(f \cdot g) = f(p) \cdot L_p(g) + g(p) \cdot L_p(f)$$

Należy rozumieć, że $f + g$ i $f \cdot g$ są określone na przekroju dziedzin f oraz g .

Ponieważ derywacje działają w pobliżu punktu p , to możemy założyć $M = \mathbb{R}^n$ oraz $p = (0, \dots, 0)$ przez wyrażenie wszystkich obiektów w odpowiedniej mapie.

Przykłady:

1. Niech $X \in T_p M$ będzie wektorem stycznym. Wówczas pochodna w kierunku X jest przykładem derywacji w punkcie p ($L_p(f) = Xf$).

Niech 1_U oznacza funkcję stałą równą 1 na otoczeniu U punktu p . Wówczas

$$L_p(1_U) = L_p(1_U \cdot 1_U) = 1_U \cdot L_p(1_U) + 1_U \cdot L_p(1_U) = 2L_p(1_U)$$

zatem $L_p(1_U) = 0$. Jeśli teraz c_U oznacza funkcję stałą równą c na otoczeniu $p \in U$, to dzięki liniowości L_p mamy

$$L_p(c_U) = cL_p(1_U) = c \cdot 0 = 0.$$

Zatem każda derywacja L_p przyjmuje wartość 0 na funkcjach stałych.

Jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in U$ oraz $p \in V \subseteq U$, to $L_p(f) = L_p(f \upharpoonright V)$. W takim razie, jeśli f, g pokrywają się na otoczeniu p , to $L_p(f) = L_p(g)$.

Lemat 5.20. Dowolna gładka funkcja f [po wyrażeniu w mapie] określona na kuli

wokół $p = (0, \dots, 0) \subseteq \mathbb{R}^n$ przedstawia się w postaci

$$f(x) = f(0) + \sum_{i \leq n} x_i \cdot h_i(x),$$

gdzie h_i są gładkimi funkcjami takimi, że $h_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)$ dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód. Ustalmy $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{i \leq n} \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i \leq n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Zatem kładąc $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ dostajemy szukaną postać $f(x)$. ☕

Twierdzenie 5.21. Każda derywacja L_p w punkcie p jest pochodną kierunkową w kierunku pewnego wektora $X \in T_p M$. Wektor o tej własności jest jedyny.

Dowód. Rozważmy wektor X zadany

$$X = \sum_{i \leq n} L_p(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

gdzie x_i jest traktowane jako funkcja wokół $p = (0, \dots, 0)$.

Pokażemy, że dla dowolnej funkcji gładkiej f zachodzi $Xf = L_p f$.

Niech $f(x) = f(0) + \sum x_i h_i(x)$, gdzie $h_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)$. Wówczas

$$\begin{aligned} L_p(f) &= L_p(f(0) + \sum x_i h_i) = \\ &= L_p(f(0)) + \sum L_p(x_i h_i) = \\ &= 0 + \sum [h_i(p) L_p(x_i) + x_i(0) L_p(h_i)] = \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) L_p(x_i) = Xf \end{aligned}$$

Jedyność X wynika z łatwej obserwacji, że różne wektory $X \in T_p M$ są wyznaczone przez różne derywacje. ☕

Definicja 5.22. Derywacja na M to operacja

$$L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

która jest liniowa i spełnia regułę Leibniza:

$$L(f \cdot g) = L(f) \cdot g + L(g) \cdot f$$

Przykłady:

1. Gładkie pole wektorowe X na M określa derywację na M poprzez $L(f) = Xf$ lub dokładniej $L(f)(p) = X(p)f$.

Twierdzenie 5.23. Każda derywacja na M jest określona przez gładkie pole wektorowe X na M . Takie pole jest wyznaczone w sposób jednoznaczny.

Dowód. W każdym punkcie $p \in M$ derywacja L na M wyraża derywację w punkcie p poprzez

$$L_p(f) = L(\hat{f})(p),$$

gdzie \hat{f} jest rozszerzeniem f do całego M . Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że w każdym $p \in M$ istnieje wektor $X(p) \in T_p M$ taki, że L_p jest przez niego zadana. Pozostaje teraz wykazać, że pole wektorowe X zadane w ten sposób jest gładkie.

Założmy, że X nie jest gładkie. To znaczy, że istnieje i oraz mapa ψ wokół $p \in M$ takie, że i -ta współrzędna X wyrażonego w mapie ψ wokół p nie jest gładką funkcją. Dałoby się więc znaleźć gładką funkcję f na M dla której $X_p f$ nie jest gładkie. Ale tak być nie może, więc sprzeczność. ☕

Twierdzenia powyżej mówią o istnieniu jednoznacznej korespondencji

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{derywacje na} \\ \text{rozmaitości } M \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{gładkie pola} \\ \text{wektorowe } X \\ \text{na rozmaitości } M \end{array} \right\}$$

zadanej przez działanie pola X na funkcja f poprzez pochodną kierunkową w poszczególnych punktach:

$$Xf(p) := X_p f$$

Tak jak w przypadku 1_U możemy pokazać, że $L(0_M) = 0_M$:

$$L(0_M) = L(0_M + 0_M) = 2L(0_M) \implies L(0_M) = 0_M$$

Lemat 5.24. Niech $f \in C^\infty(M)$, a L niech będzie derywacją na M . Rozważmy zbiór

$$Z_f = \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Wówczas dla każdego $p \in \text{Int}(Z_f)$ mamy $L(f)(p) = 0$.

Dowód. Niech $g \in C^\infty(M)$ i niech $g(p) \neq 0$, $\text{supp}(g) \subseteq \text{Int}(Z_f)$. Wówczas $f \cdot g \equiv 0$, stąd

$$0 \equiv L(f \cdot g) = L(f)g + L(g) \cdot f$$

i dalej

$$0 = L(f)(p) \cdot g(p) + L(g)(p) \cdot f(p) = L(f)(p) \cdot g(p)$$

ponieważ $g(p) \neq 0$ dla pewnego $p \in \text{Int}(Z_f)$, to musi być $L(f)(p) = 0$. ☕

Jeśli $f, g \in C^\infty(M)$ zgadzają się na pewnym otoczeniu $p \in M$, to $L(f)(p) = L(g)(p)$, gdyż $0 = L(f - g)(p) = L(f)(p) - L(g)(p)$.

6. Komutator i pochodna Liego

6.1. Komutator pól wektorowych

Lemat 6.1. Niech X, Y będą polami wektorowymi na rozmaitości M . Wówczas operator

$$XY - YX : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

określony przez $f \mapsto XYf - YXf$ jest derywacją.

Dowód. Liniowość $XY - YX$ wynika wprost z liniowości X oraz Y jako operatorów na $C^\infty(M)$. Operator ten spełnia również regułę Leibniza:

$$\begin{aligned} (XY - YX)(f \cdot g) &= XY(f \cdot g) - YX(f \cdot g) = \\ &= X(g \cdot Yf + f \cdot Yg) - Y(g \cdot Xf + f \cdot Xg) = \\ &= X(g \cdot Yf) + X(f \cdot Yg) - Y(g \cdot Xf) - Y(f \cdot Xg) = \\ &= Yf \cdot Xg + g \cdot XYf + Yg \cdot Xf + f \cdot XYg + \\ &\quad - Xf \cdot Yg - g \cdot YXf - Xg \cdot Yf - f \cdot YXg = \\ &= g \cdot (XYf - YXf) + f \cdot (XYg - YXg) = \\ &= g \cdot (XY - YX)f + f \cdot (XY - YX)g \end{aligned}$$



Lemat wyżej jest zaskakujący, gdyż np. $XY + YX$ nie jest derywacją. Jest to operator drugiego rzędu, tzn. jego wartość na funkcji f zależy nie tylko od pierwszych pochodnych, ale również od pochodnych drugiego rzędu. W przypadku $XY - YX$ pochodne rzędu dwa są kasowane jak wyżej i pozostają jedynie składniki rzędu 1.

Definicja 6.2. Pole wektorowe na M odpowiadające derywacji $XY - YX$ oznaczane jest symbolem $[X, Y]$ i nazywa się **komutatorem** pól X i Y .

Komutator ma następujące własności:

- | | |
|--|--|
| 1. $[X, Y] = -[Y, X]$ | 4. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ |
| 2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ | 5. $[X, fY] = Xf \cdot Y + f \cdot [X, Y]$ |
| 3. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ | 6. $[cX, Y] = c[X, Y] = [X, cY]$ |

6.2. Komutator w lokalnych współrzędnych

Niech $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ oraz $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ będą polami wektorowymi i X_i, Y_i niech będą funkcjami współrzędnych. Wówczas:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]f &= XYf - YXf = \\
 &= \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] - \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] = \\
 &= \sum X_i \left[\sum \left[\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right] - \sum Y_i \left[\sum \left[\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right] = \\
 &= \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \\
 &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} \left[\sum \left[X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] \right]
 \end{aligned}$$

W takim razie komutator wyrażony we współrzędnych pól X i Y to:

$$[X, Y] = \sum \left[\sum \left[X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] \right] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

6.3. Definicja pochodnej Liego

W przestrzeni \mathbb{R}^n możemy bez problemu zdefiniować pochodną kierunkową pola wektorowego Y wzdłuż wektora $v \in T_p M$ jako

$$D_v Y(p) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} Y(p + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tv) - Y(p)}{t}$$

gdyż wektory styczne w jednym punkcie utożsamiają się jako wektory swobodne z wektorami stycznymi w każdym innym punkcie. Na innych rozmaitościach, które nie mają struktury przestrzeni wektorowej, niekoniecznie musi być to możliwe i utożsamienia takie mogą się różnić w różnych mapach.

Wzór wyżej możemy uogólniać. Pierwszą możliwością byłoby zastąpienie $Y(p + tv)$ przez krzywą całkową o początku p wzdłuż wektora Y , ale wtedy $Y_{\gamma(t)}$ oraz $Y_{\gamma(0)}$ nie leżałyby w tej samej przestrzeni stycznej. Stąd wektor $v \in T_p M$ zastąpimy przez pole wektorowe X i wektor Y przesuniemy o t za pomocą potoku pola X , po czym wrócimy je na tę samą przestrzeń w której było $Y(p)$. Działając w ten sposób definiujemy pochodną Liego.

Definicja 6.3. Pochodną Liego, $L_X Y(p)$, nazywamy wektor z $T_p M$ otrzymany jako

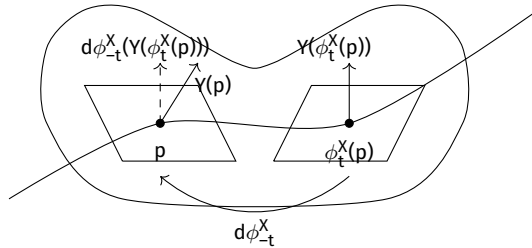
$$L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_{-t}^X[Y(\phi_t^X(p))] - Y(p)}{t}$$

Czasem pochodną Liego oznaczamy jako $(L_X Y)_p$.

lub równoważnie

$$\frac{d}{dt}_{t=0} d\phi_{-t}^X[Y(\phi_t^X(p))]$$

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1}[Y(\phi_t^X(p))]$$



Przykłady:

1. Rozważmy \mathbb{R}^3 jako rozmaiłość i niech $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Mamy wtedy

$$\phi_t^X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3)$$

$$d\phi_t^X : T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\phi_t^X(p)} \mathbb{R}^3 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$$

$\cong \mathbb{R}^3 \qquad \qquad \qquad \cong \mathbb{R}^3$

Niech teraz

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}$$

będzie wektorem stycznym do \mathbb{R}^3 w punkcie $p = (x_1, x_2, x_3)$. Do wyliczenia pochodnej Liego potrzebujemy

$$Y(\phi_t^X(p)) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

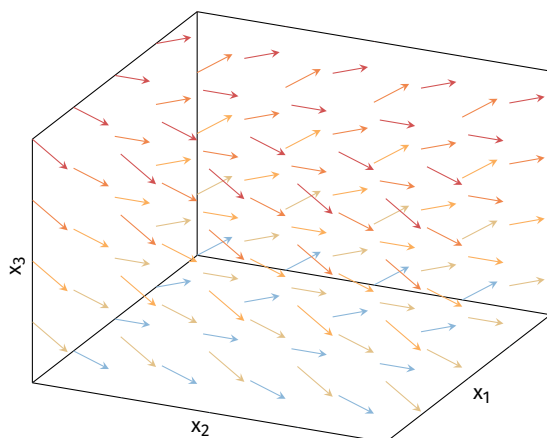
oraz

$$(d\phi_t^X)^{-1}(Y(\phi_t^X(p))) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Skorzystamy teraz z ostatniej wariacji definicji

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1}(Y(\phi_t^X(p))) = \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + t) \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{czyli } L_X(Y) = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

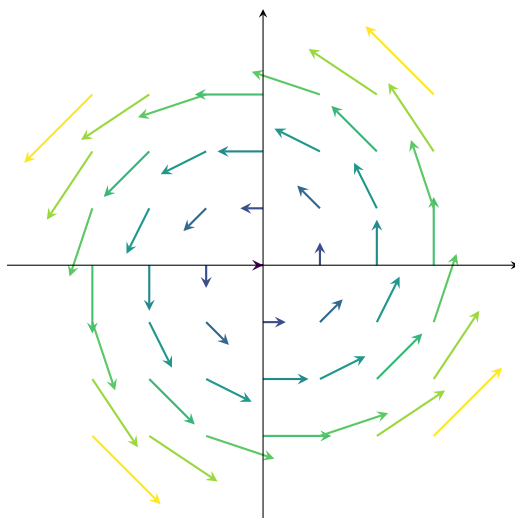


2. Rozważmy teraz $M = \mathbb{R}^3$ oraz pole wektorowe

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

jak w przykładzie z poprzedniego rozdziału. Wówczas

$$\phi_t^X(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$



$$d(\phi_t^X)_p : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\phi_t^X(p)} \mathbb{R}^2$$

jest zadana macierzą obrotu o t stopni

$$d(\phi_t^X) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

W takim razie macierz odwzorowania odwrotnego to

$$(d(\phi_t^X)_p)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Rozważmy teraz pole wektorowe $Y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$. Wtedy pochodna Liego Y to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{t=0} Y(\phi_t^X(x, y)) &= \frac{d}{dt}_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ -\cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y} = L_X(Y)(x, y) \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że $X(0, 0) = 0$, a jednak $L_X Y(0, 0) \neq 0$.

6.4. Własności

Twierdzenie 6.4.

$$L_X Y = [X, Y]$$

Dowód. Pokażemy, że dla każdego $p \in M$ $L_X Y(p) = [X, Y](p)$. Rozbijemy to na przypadki w zależności od tego, czy $X(p)$ jest zerowe czy nie.

1. $X(p) \neq 0$

Z przykładu o wyprostowywaniu pola wektorowego wiemy, że możemy dobrać mapę, w której

$$X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

oraz $p = (0, \dots, 0)$. Niech $Y(x) = \sum_{i \leq n} Y_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ w tej mapie. Komutator X i Y w takim przypadku wynosi $[X, Y] = \sum \frac{\partial Y_i}{\partial x_1}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, bo X ma wszystkie pochodne zerowe i niezerową wartość tylko na pierwszej współrzędnej:

$$[X, Y](0) = \sum \left[\sum \left[x_i(0) \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}(0) - Y_i(0) \frac{\partial x_i}{\partial x_i}(0) \right] \right] = \sum_{j \leq n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_1}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Do wyliczenia pochodnej Liego potrzebujemy potoku pola X

$$\phi_t^X(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$$

oraz jego pochodnej, czyli $d\phi_t^X = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = (d\phi_t^X)^{-1}$. Podstawiając do definicji

otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_X Y(0) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1} Y(\phi_t^X(0)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\phi_t^X)^{-1} Y(t, 0, \dots, 0) = \\ &= \frac{d}{dt} Y(t, 0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} Y(0) = [X, Y](0) \end{aligned}$$

Czyli po takim wyrażeniu X i Y w mapie mamy $[X, Y](p) = L_X Y(p)$.

$X(p) = 0$

Zacniemy od udowodnienia dwóch faktów pomocniczych.

Fakt 1. Jeśli $X : (a, b) \rightarrow T_p M$ oraz $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkimi funkcjami, to $\frac{d}{dt}[X(t)f] = \left[\frac{d}{dt}X(t)\right]f$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[X(t)f] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\varepsilon)f - X(t)f}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \cdot f \right] \stackrel{*}{=} \\ &= \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \right] \cdot f = \left[\frac{d}{dt}X(t) \right] f \end{aligned}$$

Równość $*$ wynika z ciągłości pochodnej kierunkowej względem kierunku.

Fakt 2. Dla $X \in C^\infty(TM)$, $f \in C^\infty(M)$ oraz dyfeomorfizmu $h : M \rightarrow N$ rozważmy pole wektorowe $dh(X) \in C^\infty(TN)$ oraz funkcję $f \circ h^{-1} \in C^\infty(N)$ przeniesione na N przez h . Wówczas

$$Xf(p) = dh(X)(fh^{-1})(h(p)).$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Da $q \in N$ mamy

$$dh(X) = dh_{h^{-1}(q)}(X(h^{-1}(q)))$$

ale ponieważ h jest dyfeomorfizmem, to zawsze istnieje $p \in M$ takie, że $q = h(p)$. Możemy więc zapisać

$$dh(X) = dh_{h^{-1}(h(p))}(X(h^{-1}(h(p)))) = dh_p(X(p)).$$

W takim razie

$$dh(X)(fh^{-1})(h(p)) = d_p(X(p))(fh^{-1})(h(p)) = d_pX(fh^{-1}(h(p))) = d_pX(f(p)) = Xf(p)$$

tak jak chcieliśmy.

Niech f będzie dowolną funkcją gładką na rozmaitości M . Zadziałamy na nią wektorami $[X, Y](p)$ oraz $L_X Y(p)$

$$[X, Y](p)f = [X, Y]f(p) = XYf(p) - YXf(p) = -YXf(p)$$

bo $X(p) = 0$. Ponieważ $X(p) = 0$, to na pewnym otoczeniu p mamy $\phi_t^X(p) = p$ dla każdego p . Czyli

$$\begin{aligned} (L_X Y)f(p) &= (L_X Y)_p f = \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\phi_{-t}^X[Y(\phi_t^X(p))] \right] f = \\ &= \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\phi_{-t}^X[Y(p)] \right] f \stackrel{F.1}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [d\phi_{-t}^X(Y)f(p)] \stackrel{F.2}{=} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y(f\phi_{-t}^X)(\phi_t^X(p))] = \frac{d}{dt} [Y(f\phi_{-t}^X)(p)] = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} [f\phi_{-t}^X(\phi_s^Y(p))] = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [f\phi_{-t}^X\phi_s^Y(p)] = \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} -Xf(\phi_s^Y(p)) = Y(-Xf(p)) = -YXf(p) = [X, Y]f(p) \end{aligned}$$



Pochodna Liego ma **następujące własności**, które wynikają z własności komutatora:

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $L_X Y = -L_Y X$ | 4. $L_{X+Y} Z = L_X Y + L_Y Z$ |
| 2. $L_X[Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$ | 5. $L_X(fY) = XfY + fL_X Y$ |
| 3. $L_X(Y + Z) = L_X Y + L_X Z$ | 6. $L_{fX} Y = fL_X Y - (Yf)X$ |

6.5. Komutowanie potoków

Definicja 6.5. Lokalne potoki pól X, Y na M **komutują** na otoczeniu punktu $p \in M$, jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego $|t|, |s| < \varepsilon$ zachodzi

$$\phi_s^Y \circ \phi_t^X(q) = \phi_t^X \circ \phi_s^Y(q)$$

dla q bliskich punktowi p .

Oznacza to, że $YXf = XYf$ dla wszystkich f gładkich na otoczeniu p .

Twierdzenie 6.6. Lokalne potoki pól X, Y komutują na otoczeniu punktu $p \iff [X, Y] \equiv 0$ na pewnym otoczeniu punktu p . Oznacza to również, że $L_X Y = 0$ na otoczeniu punktu p .

Dowód. \Leftarrow

Potrzebujemy faktu pomocniczego:

Jeśli $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ jest dyfeomorfizmem i X_1 jest polem na M_1 , a $X_2 = d\phi(X_1)$ jest polem na M_2 , to wówczas ϕ przenosi trajektorie pola X_1 na trajektorie pola X_2 . Oznacza to, że

$$\phi(\phi_t^{X_1}(p)) = \phi_t^{X_2}(\phi(p))$$

