ZADANIE 1.

Wyprowadź wzór na n*-tą interację Picarda* $y_n(x)$ *i oblicz jej granicę, gdy* $n \to \infty$ *dla podanych zagadnień Cauchy'ego*

(a) $y' = -y,\ y(0) = 1$

Chcemy wyprowadzić wzór na n-ty wyraz ciągu

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Czyli mamy, że

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_0^t -1ds = 1 - t \\ y_2 &= y_0 + \int_0^t (s-1)ds = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ y_n(y) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^i}{i!} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-t} \end{aligned}$$

(b) $y' = 2yt,\ y(0) = 1$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2 \\ y_2 &= 1 + 2\int_0^t s(1+s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \\ y_3 &= 1 + 2\int_0^t s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2})ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} \\ y_n(t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{t^{2i}}{i!} \xrightarrow{n\to\infty} e^{2t} \end{aligned}$$

ZADANIE 2.

Wyprowadź wzór na n*-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego* $x' = x^2$, $x_0 = 1$ *na odcinku* $[0, 2]$, *jeżeli* $x_0(t) \equiv 1$. *Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.*

Zacznijmy od rozwiązania tego rozwiązania:

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ \frac{x'}{x^2} &= 1 \\ \int_0^t \frac{x'}{x^2}dx &= \int_0^t 1ds \\ -\frac{1}{x} + 1 &= t \\ 1 - t &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{1-t} &= x \end{aligned}$$

Wiem czego się spodziewać, chociaż nie jest to może najbardziej ciągłym byczkiem w $t = 1$. Spróbujmy popatrzeć na Picarda.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 - \int_0^t 1^2 ds = 1 + t \\
x_2 &= 1 + \int_0^t (1+s)^2 ds = 1 + \frac{(1+t)^3}{3} = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} \\
x_3 &\overset{\text{wolfram}\alpha}{=} 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9} + \frac{t^7}{63}
\end{aligned}
$$

Co teraz zauważamy? Że to początek, czyli tam gdzie współczynniki są równe 1, będzie się zwijał do $\sum t^i$, czyli $\frac{1}{1-t}$, ale to tylko na $t \in [0, 1)$. Kiedy $n \to \infty$ to ten ogon, który wydaje się być aż do $2^n - 1$ też będzie dla małego t maluczki, bo t^{2^n-1} dla małych t i dużego n jest pomijanie małe.

Pozostaje mi sprawdzić, czy coś się nie psuje przy $t = 1$? Chcelibyśmy, żeby $f(t, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$ było ciągłe na prostokątach:

$$R = \{(t, y)\ :\ 0 \leq t \leq 2,\ |y - 1| \leq b\}$$

$$M = \max |f(t, y)| = (b + 1)^2,$$

bo $f(y, t)$ zależy tylko od y i jest rosnące dodatnie, czyli to jest $\max y^2$.

$$\alpha = \min(2, \frac{b}{(b+1)^2}) = \frac{b}{(b+1)^2},$$

czyli y ma jedyne rozwiązanie na $t \in [0, \alpha]$, ale α w życiu nie dotknie mi nawet 1, więc jesteśmy ograniczeni do okolicy 0 z tym rozwiązaniem.

ZADANIE 3.

Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'egp udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

(a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y_0 = 0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

Super, tutaj nie muszę nic liczyć.

Rozważam $b \geq 1$ i prostokąt

$$R = \{(t, y)\ :\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\ :\ |y| \leq b\}$$

$$\max |f(t, y)| = b^2 + \cos \frac{1}{4},$$

bo znowu mamy, że obie funkcje są rosnące.

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b}{1 + \cos\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2},$$

bo $1 > \cos\frac{1}{4} > 0$. Czyli, jeśli $f(t, y)$ i pochodna są ciągłe, to będzie śmigać. To, że $y^2 + \cos t^2$ jest ciągłe to raczej widać. Jak się miewa pochodna?

$$\frac{\partial(y^2 + \cos t^2)}{y} = 2y$$

i to jest bardzo ciągłe. Czyli z Picarda mamy dokładnie jedno rozwiązanie, którego liczyć nie liczyłam, bo po co.

ZADANIE 4.

Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$, *różne od rozwiązania* $y(t) \equiv 1$. *Które z założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?*

Najpierw odpowiem na to, które założenie twierdzenia Picarda nie jest spełnione. Będziemy rozważać prostokąt z $0 \leq t \leq a$ i wymagać, żeby pochodna $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$ była ciągła. Ale no jak wygląda pochodna?

$$\frac{\partial}{\partial y} t\sqrt{1-y^2} \overset{\text{wolfram}\alpha}{=} \frac{ty}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}$$

i to jest bardzo nieciągłe w $t = 0$.

W takim razie szukanie rozwiązania to po prostu liczenie całek:

$$y' = t\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = t$$
$$\int_0^t \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} ds = \int_0^t s ds$$
$$\sin^{-1}(y) - \sin^{-1}(1) = \frac{1}{2}t^2$$
$$\sin^{-1}(y) = \frac{t^2+\pi}{2}$$
$$y = \sin\left(\frac{t^2+\pi}{2}\right)$$

ZADANIE 5.

Niech $y(t)$ *będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą*

$$y(t) \leq L \int_{t_0}^t y(s) ds$$

na odcinku $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. *Udowodnij, że* $y(t) = 0$ *dla* $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ *(łatwiejsza wersją lematu Gronwalla). Wskazówka: Pokaż indukcyjnie, że* $y(t) \leq c\frac{L^n}{n!}(t-t_0)^n$

Zrobię dokładnie to, co jest we wskazówce. Niech $c = \max_{t \in [t_0, t_0+\alpha]} y(t)$. Dla $n = 1$ mam treść zadania i twierdzenie o wartości średniej. Czyli zakładam, że działa dla n-tego kroku, weźmy krok numer $n+1$ i popatrzmy co się dzieje

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \int_0^t y(s) ds \leq L \int_0^t c\frac{L^n}{n!}(s-t_0)^n ds = \\ &= c\frac{L^{n+1}}{n!}\int_{t_0}^t (s-t_0)^n ds = c\frac{L^{n+1}}{n!}\frac{(t-t_0)^{n+1}}{n+1} = \\ &= c\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Czyli mam, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$y(t) \leq L^n \frac{c}{n!}(t-t_0)^n$$

$$\frac{y(t)}{L^n} \leq \frac{c(t-t_0)^n}{n!}$$

Ponieważ $L \neq 0$ (wpp to mamy już dość prosto z treści), a

$$\frac{c(t-t_0)^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

to $y(t)$ jest ograniczone od góry przez ciąg dążący do 0, więc koniec dowodu.

ZADANIE 6.

Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ *jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia* $y' = t(1+y)$, $y(0) = -1$.

Załóżmy, że tych rozwiązań jest więcej niż jedno, czyli mamy jakieś $\overline{y} \neq y$. Rozważmy wartość bezwzględną ich różnicy

$$w = |y - \overline{y}|.$$

Chcemy skorzystać z lematu Gronwalla, czyli potrzebujemy

$$w \leq a + b\int_{t_0}^{t} w ds$$

dla $a = 1$ i $b \geq 1$.

$$\begin{aligned} w = |y-\overline{y}| &= \left|y_0 + \int s(1+y)ds - y_0 - \int s(1+\overline{y})ds\right| = \\ &= \left|\int s(1-1)ds - \int s(1+\overline{y})ds\right| = \left|\int s(1+\overline{y})ds\right| \leq \\ &\leq \int |s(\overline{y}-y)|ds = \int swds \end{aligned}$$

Jeśli ograniczę się do bliskiej okolicy 0, to $\int swds \leq \int wds$, czyli mam

$$w \leq \int swds \leq \int wds$$

a więc na odcinku $[0,1]$ $w \equiv 0$ i $y = -1$ jest jedynym rozwiązaniem. Dla $t > 1$ też to śmiga, bo wtedy

$$w \leq \int_{t_0}^{t} swds \leq \int twds = t\int wds,$$

bo $s \leq t$, natomiast $t > 1$.

ZADANIE 7.

Zbadaj istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $y' = f(y,t)$ *i* $y(0) = 0$, *gdzie*

$$f(y,t) = \begin{cases} -1 & t \leq 0 \\ 1 & \end{cases}$$

Na chłopski rozum, to rozwiązanie jest po prostu złożeniem dwóch rozwiązań i wynosi $y = |t|$, ale jeśli popatrzymy na to ze strony Picarda, to dla

$$R = \{(t,y) \ : \ 0 \leq t \leq t + a, \ |y| \leq b\}$$

funkcja f nie jest ciągła, bo od prawej strony dąży do 1, ale $f(0,0) = -1$ i nie śmiga.

ZADANIE 8.

Udowodnij, że równanie $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in C^1$, nie może mieć rozwiązań okresowych różnych od stałej.

Co by znaczyło, że y' ma rozwiązanie okresowe różne od stałej? Po pierwsze, $0 \neq y'(t_0) = f(y_0)$ i co więcej, jeśli y jest rozwiązaniem i y jest okresowe, to dla T - okresu y musi zajść

$$\int_0^T y' ds = 0,$$

bo ona rośnie o tyle samo co maleje, więc pochodna jest symetryczna względem OX. Czyli również pochodna jest okresowa.

ZADANIE 9.

Udowodnij, że $\mathbb{R}^n$ z normami (a) euklidesową, (b) taksówkową, są przestrzeniami Banacha.

(a) euklidesowa

Wystarczy pokazać, że jest zupełna, czyli bierzemy ciąg Cauchy'ego $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ i pokazujemy, że on jest zbieżny.

Wiemy, że $\mathbb{R}$ jest przestrzenią zupełną, a więc po nałożeniu normy jest to też przestrzeń Banacha. Niech więc

$$x = (\lim_k x_k^1, \dots, \lim_k x_k^n) = (x^1, \dots, x^n).$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ mogę znaleźć takie N, że dla każdego $k > N$ mam $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > |x_k^i - x^i|$. W takim razie

$$\|x_k - x\| = \left[\sum_{i=1}^n |x_k^i - x^i|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \left[\sum_{i=1}^n |\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

(taksówkowa)

Jedyna zmiana tutaj jest, że metryka to po prostu sumy różnic poszczególnych współrzędnych, reszta tak samo.

ZADANIE 10.

Udowodnij, że zbiór

$$C^1([a,b]) = \{u \in C[a,b] \;:\; u' \in C[a,b]$$

z normą $\|u\|_{1,\infty} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u'(x)|$ jest przestrzenią Banacha.

Czyli mam ciąg Cauchy'ego $u_1, \dots, u_n, \dots \in C^1[a,b]$ i wiem, że $u_i, u_i' \in C[a,b]$. Niech $v \in C[a,b]$ będzie takie, że $\lim \|u_i - v\| = 0$, bo wiemy, że $C[a,b]$ jest zupełne, więc u_i mają tam jakąś granicę. Tak samo dla u_i', niech $w \in C[a,b]$ będzie takie, że $\lim \|u_i' - w\| = 0$. No dobra, to lecimy z pokazaniem, że $v' = w$:

$$\lim u_i(x) = \lim \left(u_i(0) + \int_0^t u_i' ds\right) = v(0) + \lim \int_0^t u_i' ds$$

i teraz dlatego, że u_i' zbiega jednostajnie do w, to wsadzamy lim pod całkę

$$v(0) + \lim \int_0^t u_i' ds = v(0) + \int_0^t \lim u_i' ds = v(0) + \int_0^t w ds$$

czyli

$$v(t) = v(0) + \int_0^t w ds$$

i mamy, że $v' = w$. Super.

Bierzemy $\varepsilon > 0$ i wtedy istnieje N takie, że dla każdego $i > N$ mam $\frac{\varepsilon}{2} > \|u_i - v\|$ i $\frac{\varepsilon}{2} > \|u_i' - w\|$ w $C[a, b]$. Czyyli

$$\begin{aligned} \|u_i - v\|_{1,\infty} &= \max |u_i(x) - v(x)| + \max |u_i'(x) - v'(x)| = \|u_i - v\| + \max |u_i'(x) - w(x)| = \\ &= \|u_i - v\| + \|u_i' - w\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$