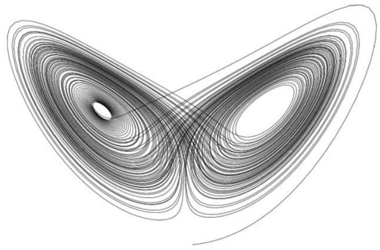
G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN



Atraktor Lorentza

Portret fazowy okładów na płaszczyźnie

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie orbity następujących układów:
a) $x' = y, \quad y' = -x;$ b) $x' = y(1 + x + y), \quad y' = -x(1 + x + y);$ c) $x' = 2xy, \quad y' = x^2 - y^2.$

Zadanie 2. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = -1 + xy + \cos y,$$

które startują w pierwszej ćwiartce układy współrzędnych $(x > 0, y > 0)$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$\frac{dx}{dt} = y(e^x - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + e^y,$$

które startują w prawej półpłaszczyźnie układy współrzędnych $(x > 0)$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy + \operatorname{tg} y,$$

które startują w górnej półpłaszczyźnie układy współrzędnych $(y > 0)$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$\frac{dx}{dt} = -1 - y + x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + xy,$$

które startują wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wskazówka: Oblicz $d(x^2 + y^2)/dt$.

Zadanie 6. Niech $x(t), y(t)$ będzie rozwiązaniem układu

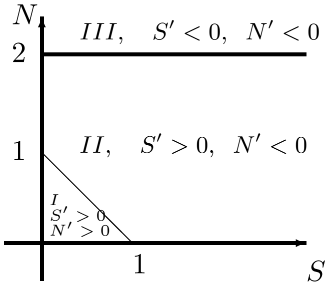
$$\frac{dx}{dt} = y + x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + y^2.$$

Udowodnij, że jeżeli $x(t_0) \neq y(t_0)$ dla pewnego t_0, to $x(t) \neq y(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7. Badamy następujący układ równań z niewiadomymi funkcjami $S = S(t)$ i $N = N(t)$:

$$S' = \frac{1}{10}S - \frac{1}{20}SN, \qquad N' = \frac{1}{100}N - \frac{1}{100}N^2 - \frac{1}{100}SN.$$

a) Udowodnij, że proste $N = 2$ i $N + S = 1$ dzielą pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych na trzy obszary, gdzie pochodne S' i N' mają ustalony znak (tak jak na rysunku).



b) Udowodnij, że każde rozwiązanie które startuje w jednym z obszarów I lub III musi wpaść do obszaru II.

c) Udowodnij, że każde rozwiązanie startujące w obszarze II, pozostaje już w nim.

d) Stosując (c) uzasadnij, że jeżeli $S(t_0) > 0$ i $N(t_0) > 0$, to $\lim_{t\to\infty} S(t) = \infty$ natomiast $\lim_{t\to\infty} N(t)$ istnieje i jest mniejsza od 2.

e) Udowodnij, że istnieje $t_0 > 0$ takie, że dla wszystkich $t \geq t_0$ zachodzi nierówność $N' \leq -N$. Wywnioskuj stąd, że $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$.
Wskazówka do (e). Udowodnij, że jeżeli $f \in C^1((0,\infty))$ spełnia $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, to istnieje ciąg $x_n \to \infty$ taki, że $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$. Podać przykład funkcji $f = f(x)$ takiej, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ale $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ nie istnieje.

Zadanie 8. Rozważamy układ równań różniczkowych

$$x' = ax - bxy, \qquad y' = cy - dxy - ey^2$$

gdzie $a/b > c/e$. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ dla każdego rozwiązania startującego z warunku początkowego $x(t_0) > 0$, $y(t_0) > 0$. (Wskazówka: naśladuj rozumowanie z poprzedniego zadania.)

Zadanie 9. Zbadać portret fazowy dla $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$ następującego układu typu drapieżnik-ofiara

$$x_1' = x_1(1 - x_2 - \alpha x_1), \quad x_2' = -x_2(1 - x_1 + \alpha x_2) \quad \text{dla } \alpha \in [0, 1).$$

Zadanie 10. Zbadać istnienie cykli granicznych dla układów zapisanych we współrzędnych biegunowych i naszkicować ich portrety fazowe:
a) $r' = r(1-r)^2,\ \varphi' = 1;$ b) $r' = \sin r,\ \varphi' = 1.$

Zadanie 11. Dany jest układ równań $r' = f(r),\ \varphi' = 1$, gdzie f jest daną funkcją klasy C^1. Jakie warunki musi spełniać ta funkcja, aby układ miał cykl graniczny?

Zadanie 12. Udowodnić, że układ równań

$$x_1' = (x_1 - x_2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1, \quad x_2' = (x_1 + x_2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2$$

ma tylko jeden cykl graniczny.

Zadanie 13. Stosując twierdzenie Poincarégo-Benedixsona udowodnij istnienie nietrywialnego rozwiązania okresowego dla równania $z'' + [\log(z^2 + 4(z')^2)]z' + z = 0$.