ZADANIE 1.

Dla ciągłych funkcji rzeczywistych $f, g : M \to \mathbb{R}$ na rozmaitości gładkiej M, oraz dla $\varepsilon > 0$ mówimy, że g jest ε-aproskymacją f, jeśli $\|f - g\| < \varepsilon$ (tzn. dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$).

(a) *Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ każda ciągła funkcja $F : M \to \mathbb{R}$ posiada gładką ε-aproksymację.*

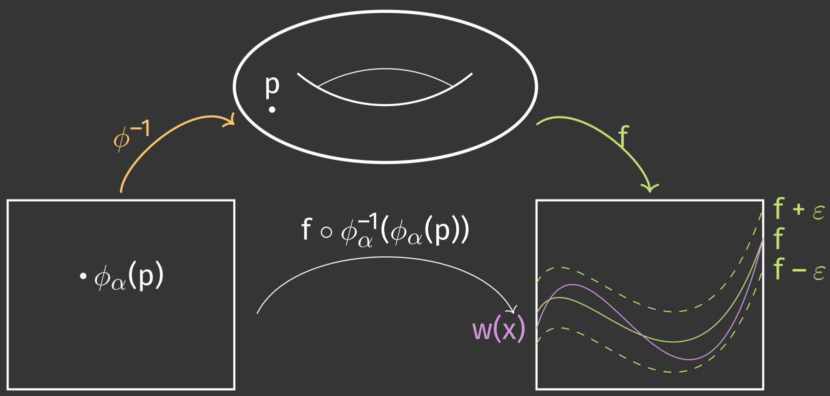
(b) *Rozszerz ten wynik do sytuacji, gdy $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ jest dowolną ciągłą dodatnią funkcją rzeczywistą, zaś ε-aproksymacja funkcji f to dowolna taka funkcja g, że dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$.*

(c) *Niech $D \subseteq M$ będzie dowolnym domkniętym podzbiorem. Dla dowolnego ε jak w punkcie (b) uzasadnij, że dowolna funkcja ciągła $f : M \to \mathbb{R}$, która jest gładka na pewnym otwartym otoczeniu zbioru D, posiada gładką ε-aproksymację $g : M \to \mathbb{R}$ taką, że $g \restriction D = f \restriction D$.*

(a)

Daną mam ciągłą funkcję $F : M \to \mathbb{R}$. Wiem, że każdą funkcję mogę dowolnie dokładnie aproksymować za pomocą wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Weźmy sobie jakiś atlas na M zawierający mapy (U_α, ϕ_α). Wiem, że skoro f było ciągłe, a ϕ nic nie psuje, to pewnie i $f \circ \phi^{-1}$ jest ciągłe. Czyli w ten sposób dostaję funkcję $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i na tym już chyba umiem pracować jakoś po ludzku.



Chyba mogę znaleźć sobie wielomian $w \in \mathbb{R}[X^n]$ taki, że siedzi w kulce nałożonej na f w przestrzeni funkcji ciągłych. Ewentualnie mogę powiedzieć, że w to jest po prostu gładka funkcja blisko f określona na $\phi_\alpha(U_\alpha)$, bo chyba funkcje gładkie są gęste w zbiorze funkcji ciągłych czy jakoś tak. Teraz chcę sobie produkować $g = w(\phi(p))$, ale wtedy to nie wyśmignie się chyba tak od razu?

Może wyprodukujmy sobie rozkład jedności ψ_α taki, że $\psi_\alpha \equiv 0$ poza U_α i dowolny punkt $p \in M$ jest $\psi_\alpha(p) > 0$ dla skończenie wielu α. No i jeszcze ten $\sum \psi_\alpha(p) = 1$ dla każdego $p \in M$. Czyli mam pysia będącego rozkładem jedności. Czyli mogę go chyba użyć do wytworzenia w końcu tego g? Bo jak ψ_α jest gładkie, to ten

$$g(p) = \sum w(\phi_\alpha(p))\psi_\alpha(p)$$

jest nadal gładkie? Znaczy tutaj jest nieścisłość, bo powinnam pisać, że tak jest dla $p \in U_\alpha$, a jeśli $p \notin U_\alpha$, to po prostu 0, ale to i tak na jedno wychodzi, bo wtedy $\psi_\alpha(p)$ się zeruje. No i jakaś suma skończenie lokalnych gładkich funkcji bla bla bla bla bla

Teraz muszę się upewnić, że to faktycznie jest ograniczeniem moim?

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= \left\|f(x) - \sum w(\phi_\alpha(x))\psi_\alpha(x)\right\| \leq \\
&\leq \left\|\sum(\psi_\alpha(x))[f(x) - w(\phi_\alpha(x))]\right\| < \\
&< \left|\sum(\psi_\alpha(x))\varepsilon\right| = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

(b)

Teraz zamiast ładnej kulki mam troszkę brzydszą kulkę bo $\{w : f(x) - \varepsilon(x) < w(x) < f(x) + \varepsilon(x)\}$, ale nadal mogę znaleźć jakieś gładkie w i postąpić analogicznie jak wyżej.

(c)

Czyli robię jakieś bump function? Czyli biorę sobie atlas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ taki, że $U_1 = M \setminus D$, a U_2 jest otwartym podzbiorem zawierającym $D \subseteq U_2$. Niech wtedy ψ_1, ψ_2 będzie gładkim rozkładem jedności takim, że $\psi_1 \equiv 0$ na D. Wtedy ϕ_2 na D się nie zeruje, a sumuje do 1, a na okolicy D musi stopniowo schodzić do 0, czyli wyśmignie. To teraz wystarczy znaleźć funkcję, która na $f(\phi_2(D))$ jest identyczna, a na pozostałej części troszkę odbiega, ale to też się da zrobić, taka funkcja to może być w i wtedy

$$g(x) = \begin{cases} w(\phi_2(x)) & x \in D \\ \sum w(\phi_\alpha(x))\psi_\alpha(x) & \text{wpp} \end{cases}$$

ZADANIE 2.

Dla niezwartej rozmaitości gładkiej M skonstruuj gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego naturalnego n przeciwobraz $f^{-1}([-n, n])$ jest zwartym podzbiorem w M. Funkcje o tej własności nazywają się funkcjami właściwymi. Wskazówka: wykorzystaj zadanie 6 z listy 1: uzasadnij też najpierw następujący fakt pomocniczy: istnieje ciąg otwartych zbiorów V_i takich, że $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = M$, oraz dla każdego i domknięcie $cl(V_i)$ w M jest zwarte i zawarte w V_{i+1}.

Zadanie 6 w liście 1 mówi, że każda rozmaitość M jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia w M sa homeomorficzne z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$.