ZADANIE 1.

Pokaż, że $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ *jeśli* m, n *są względnie pierwsze.*

Załóżmy, że m, n są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkciku:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

ZADANIE 2.

Niech A *będzie pierścieniem,* $\mathfrak{a}$ *ideałem, a* M *A-modułem. Pokaż, że* $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ *jest izomorficzne do* $M/\mathfrak{a}M$*. [Stensoruj ciąg dokładny* $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ *z* M

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

i jakiś losowy A-moduł M, to

$$\mathfrak{a} \otimes M \to A \otimes M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebiście, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ na M'' (f to pierwsza funkcja, a myśki lecą $M' \to M \to M''$.)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja $\mathfrak{a} \to A$? To jest identyczność na $\mathfrak{a}$ lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\mathfrak{a} \otimes M \cong (A \otimes M)/(\mathfrak{a} \otimes M) \cong AM/\mathfrak{a}M = M/\mathfrak{a}M$$

ZADANIE 3.

Niech A *będzie pierścieniem lokalnym,* M, N *skończenie generowanymi* A*-modułami. Udowodnij, że* $M \otimes N = 0$ *wtedy* $M = 0$ *lub* $N = 0$.

[Niech $\mathfrak{m}$ *będzie ideałem maksymalnym,* $k = A/\mathfrak{m}$ *będzie residue filed (to jest ciało zrobione przez wytentegowanie z tym tym). Niech* $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ *na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że* $M_k = 0 \implies M = 0$*. Ale* $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$ *or* $N_k = 0$*, since* M_k, N_k *są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]*

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \overset{(\star)}{\implies} M_k \otimes_k N_k = 0 \overset{(\heartsuit)}{\implies} M_k = 0 \ \vee \ N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$(\star)$ $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_A (k \otimes_A N) = 0$

A to to jest raczej proste, bo jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to tym bardziej $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$ a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$.

$(\heartsuit)$ $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \ \vee \ N_k = 0$? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na N.

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAAA

ZADANIE 4.

Niech M_i $(i \in I)$ *będzie dowolną rodziną* A*-modułów i niech* M *będzie ich sumą prostą. Pokaż, że* M *jest płaski* $\iff$ *każdy* M_i *jest płaski*

Mamy funktor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ i on jest na kategorii A-modułów i homomorfizmów. Jeśli T_N jest dokładny, czyli tensorowanie z N przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy N jest flat A-modułem.

$\Longleftarrow$ pójdzie chyba z faktu, że $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

$\Longrightarrow$ czyli wiem, że tensorowanie przez sumę $\bigoplus M_i$ daje nam dalej ciąg dokładny i z tego chce dostać, że tensorowanie przez każdy z kolei też daje nam ciąg dokładny. A to nie jest jakoś z tego, że mogę sobie obcinać te funkcje do współrzędnych i na tych współrzędnych one muszą mieć te same własności, czyli w szczególności będą na każdej współrzędnej dokładne?

ZADANIE 5.

Niech A[X] *będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem* A*. Pokaż, że* A[X] *jest płaską* A*-algebrą.*

No jak dla mnie to taki A[X] mogę przedstawić jako sumą prostą przeliczalnie wielu A. No i teraz wystarczyłoby, żeby A było płaskie, ale co to jest A-algebra?No to jest pierścień wyposażony w strukturę A-modułu. Dlaczego ja nic nie formalizuję?