Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis treści

1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzmy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzenie opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w $\mathbb{C}^3$).

1.1. Rozmaitości topologiczne

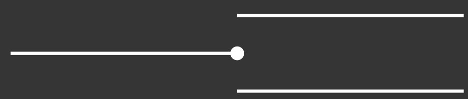
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



  nie jest rozmaitością topologiczną.
- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, to $K = \phi^{-1}[\overline{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

  które są po domknięciu zawarte w M.
- Parazwartość, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
  - Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona* [locally finite], jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończenie wieloma elementami $\mathscr{X}$.
  - Jeśli mamy pokrycie M zbiorami $\mathscr{U}$ i bierzemy drugie pokrycie $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{U}$ jest pokryciem włożonym/rozdrobnieniem
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- Twierdzenie Brouwer'a: niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.

- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.2. *Każdy otwarty podzbiór* n*-rozmaitości topologicznej jest* n*-rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].*

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Definicja 1.3. Parę (U, ϕ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, a ϕ to homeomorfizm

$$\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M. Zbiór U taki jak wyżej nazywamy zbiorem mapowym [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli (U, ϕ) jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest *wyśrodkowana na* p [centered at p].

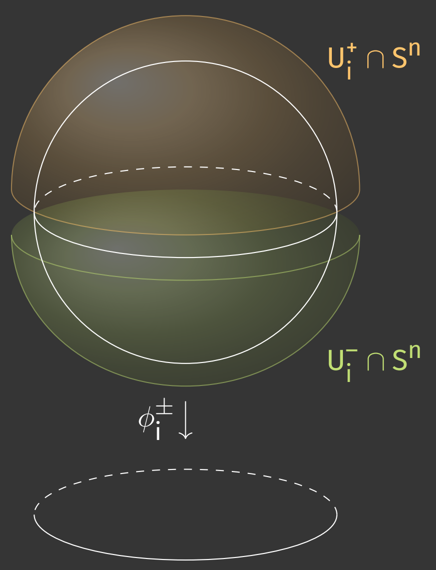
Fakt 1.4. *Hausdorffowska przestrzeń* X *o przeliczalnej bazie jest* n*-rozmaitością* $\iff$ *posiada rodzinę map* n*-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały* X*.*

Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, ..., n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \ : \ U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

PRZYKŁADY Z LEE

1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- spójna, gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- drogowo spójna, gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- lokalnie drogowo spójna, gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

Uwaga 1.5. *Jeśli przestrzeń* M *jest rozmaitością topologiczną, to*

1. M *jest lokalnie spójna drogowo,*
2. M *jest spójna* $\iff$ *jest drogowo spójna,*
3. *spójne składowe* M *są takie same jak dorogowe spójne składowe,*
4. M *ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem* M *(a więc i spójną rozmaitością)*

Dowód. Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w $\mathbb{R}^n$ [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza M jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna X jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

Uwaga 1.6. *Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.*

Dowód. Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w $q \in X$ jest nazywana fundamentalną grupą X w q. Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała $c_q(s) = q$. Dla rozmaitości topologicznych *fundamentalne grupy* są przeliczalne.

2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, *co to znaczy, że funkcja* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna?*

2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ będziemy określać za pomocą *map*:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- **Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ to funkcje $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_2\phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 2.1. Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Definicja 2.2. Mając dane dwie rozmaitości, M i N, mówimy, że funkcja $f : M \to N$ jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna f^{-1} też jest różniczkowalna

Definicja 2.3. Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. 1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. 2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, ..., n + 1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, ..., x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ...x_n) \\ & & \downarrow \phi_i^+ \\ & & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ..., x_n) \end{array}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ..., x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

2.2. Zgodność map

Definicja 2.4. Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ opisanego na M.

Definicja 2.5. Niech $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ będą gładkimi atlasami na M. Mówimy, że mapa (U, ϕ) jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}$, jeżeli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}_1$. Dalej, mówimy, że atlas $\mathscr{A}_2$ jest zgodny z altasem $\mathscr{A}_1$, jeżeli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z każdą mapą z atlasu $\mathscr{A}_2$.

Twierdzenie 2.6. *Relacja zgodnośc atlasów jest relacją równoważności.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

2.3. Atlas [maksymalny]

Zgodne atlasy określają tę samą strukturę gładką na M. W takim razie, wygodnym będzie móc zawerzeć wszystkie zgodne atlasy w czymś większym. Z pomocą przychodzi nam pojęcie atlasu maksymalnego.

Definicja 2.7. Atlas $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym**, jeżeli każda mapa (U, ϕ) z nim zgodna jest w nim zawarta.

Fakt 2.8. *Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M, który jest zbiorem wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$.*

Dowód. Ćwiczenia. Korzystamy z lematu Zorna. ☕

W takim razie, równoważnie do pary $(M, \mathscr{A})$, gdzie $\mathscr{A}$ jest dowolnym zgodnym atlasem na M, możemy wymóc w definicji, aby $\mathscr{A}$ **był atlasem maksymalnym**.

2.4. Funkcje gładkie

Definicja 2.9. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ określona na rozmaitości gładkiej $(M, \mathscr{A})$ jest gładka, jeżeli po wyrażeniu w każdej mapie z tego atlasu jest gładka:

$$(\forall\, (U, \phi) \in \mathscr{A}) \quad f \circ \phi^{-1} \text{ jest gładka}$$

Fakt 2.10. *Niech $(M, \mathscr{A})$ będzie rozmaitością gładką, a $f : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na M.*

1. *Jeżeli (U, ϕ) jest mapą zgodną z $\mathscr{A}$, to f wyrażone w (U, ϕ), czyli $f \circ \phi^{-1}$ też jest funkcją gładką.*
2. *Niech $\mathscr{A}'$ będzie atlasem zgodnym z $\mathscr{A}$. Wówczas funkcja f jest zgodna względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest gładka względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest zgodna względem atlasu maksymalnego zawierającego oba te atlasy.*

Co więcej, możemy powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka $\iff$ jest gładka względem każdego atlasu $\mathscr{A}$ wyznaczającego na M gładką strukturę. [Ćwiczenia]

Definicja 2.11.

- Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k-zgodne**, jeżeli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k.
- **C^k-atlas** to atlas składający się z map, które są C^k-zgodne
  - Taki atlas określa strukturę C^k-rozmaitości na M
  - Jest to struktura słabsza niż struktura rozmaitości gdładkiej

C^0 zwykle oznacza rozmaitość topologiczną, a C^∞ to rozmaitość gładka.

Fakt 2.12. *Na C^k rozmaitości nie można sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.*

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych, na przykład:

- **Rozmaitość analityczna** [C^ω] to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- **Rozmaitość zespolona** ma mapy jako funkcje w $\mathbb{C}^n$ zamiast w $\mathbb{R}^n$
- Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty
- Rozmaitość kawałkami liniowa

Istnieją rozmaitości topologiczne, które nie dopuszczają żadnej struktury gładkiej (pierwszym takim przykładem była zwarta 10-rozmaitość odkryta przez M. Kervaire). Z drugiej strony, z każdego maksymalnego atlasu C^k rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych, czyli na każdej C^k istnieje struktura C^∞ rozmaitości.

Lemat 2.13. *Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X takich, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ które jest różnowartościowe. Załóżmy, że takie $M, \{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}$ spełniają:*

1. *Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$*
2. *Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$*
3. *Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to*
$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
jest gładkim dyfeomorfizmem (gładkie i odwracalne)
4. *Przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X*
5. *Dla dowolnych $p, q \in X, p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p), q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q)\emptyset$, czyli możemy* rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$.

*Wówczas na X istnieje **struktura rozmaitości topologicznej na** X, dla której U_α są zbiorami otwartymi. Ponadtwo, (U_α, ϕ_α) tworzy gładki atlas na X.*

Dowód. Prezentujemy szkic dowodu:

- Topologia jest produkowana jako przeciwobrazy przez poszczeglne ϕ_α
- Lokalna euklidesowość jest oczywista
- Mniejsza baza przeliczalna też śmignie [ćwiczenia]
- Hausdorffowość wynika z warunku 5.

PRZYKŁAD - linie na prostej, ale nie chce już dzisiaj

3. Rozkłady jedności

Motywacja: jak sklejać funkcje? W szczególności, jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem M istnieje gładka funkcja $f : M \to \mathbb{R}^n$ taka, że:

$$\begin{array}{ll} f(p) = 0 & p \in \partial M \\ f(p) > 0 & p \in \mathrm{Int}(M)? \end{array}$$

3.1. Nośnik funkcji

Definicja 3.1. Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona**, jeżeli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w X takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α.

Definicja 3.2. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ jej **nośnik** to

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}(\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\})$$

Twierdzenie 3.3. [Twierdzenie o rozkładzie jedności] *Dla każdego otwartego pokrycia* $\{U_\alpha\}$ *rozmaitości gładkiej* M *istnieje rodzina* $\{f_j\}_{j \in J}$ *gładkich funkcji* $f_j : M \to \mathbb{R}$ *takich, że*

- $f_j \geq 0$
- *każdy nośnik* $\mathrm{supp}(f_j)$ *zawiera się w pewnym* U_α *z pokrycia*
- *nośniki* $\{\mathrm{supp}(f_j)\}_{j \in J}$ *tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w* M.
- *dla każdego* $x \in M$ $\sum\limits_{j \in J} f_j(x) = 1$

*Jest to **rozkład jedności wpisany w pokrycie*** $\{U_\alpha\}$

Dowód. Dla ułatwienia sprawy pokażemy prawdziwość tego twierdzenia dla rozmaitości gładkich bez brzegu. Ale to dopiero w przyszłości, bo aktualnie mi się nie chc

3.2. Rozkłady jedności w akcji

Czy istnieje $f : M \to \mathbb{R}$ *takie, że* $f \restriction \partial M \equiv 0$ *oraz* $f \restriction \mathrm{Int}(M) > 0$?

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami mapowymi. Wtedy $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, jeżeli

- $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \implies f_\alpha = \widehat{f}_\alpha \phi_\alpha$, gdzie $\widehat{f}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ i $\widehat{f}_\alpha(x_1, ..., x_n) = x_n$.
- $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \implies f_\alpha = 1$

Niech $\{h_j\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j)$ takie, że $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Definiujemy wtedy $h_j' = h_j \circ f_{\alpha(j)} : M \to \mathbb{R}$ takie, że

$$h_j'(p) = \begin{cases} h(p) f_{\alpha(j)}(p) & p \in U_{\alpha(j)} \\ \quad 0 & p \notin U_{\alpha(j)} \end{cases}$$

Taka funkcja jest gładka, bo $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$.

Bump function dla domkniętego $A \subseteq M$ z nośnikiem w otwartym $U \subseteq M$ to ciągła funkcja $\psi : M \to \mathbb{R}$ taka, że $0 \leq \psi \leq 1$ na M i $\psi \equiv 1$ w A oraz $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq U$.

4. Pomocnik idiotów:

Skorowidz definicji

Twierdzonkowa zabawa