Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 5

Weronika Jakimowicz

Exercise 1. Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?

NIE, ale σ-ciało jest zawsze λ-układem.

Popatrzmy sobie na przestrzeń rzucania dwa razy monetą. Niech $A = \{(O, O), (O, R)\}$, a $\mathfrak{L}$ będzie zbiorem zdarzeń niezależnych od A (zamkniętość na sumy i różnice już troszkę była na poprzednich listach, więc nie rozpisuję). Poniższe zbiory są na przykład w takim $\mathfrak{L}$:

$$\{(O, O), (R, R)\} \quad \{(O, O), (R, O)\}.$$

Gdyby $\mathfrak{L}$ było σ-ciałem, to suma powyższych zdarzeń, czyli $\{(O, O), (R, R), (R, O)\}$, należałaby do $\mathfrak{L}$. Tak ewidentnie nie jest, bo $\mathbb{P}$ przekroju wynosi $\frac{1}{4}$, a iloczyn $\mathbb{P}$ to $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

Exercise 2. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina

$$\mathfrak{L} = \{A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \;:\; \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$$

jest λ-układem.

- $\mathbb{R} \in \mathfrak{L}$ jest dość oczywista, bo $\mu_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}] = 1 = \mathbb{P}[Y \in \mathbb{R}] = \mu_Y(\mathbb{R})$.
- $A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathfrak{L}$

  Teraz bierzemy $A, B \in \mathfrak{L}$, czyli $\mu_X(A) = \mu_Y(A)$ i $\mu_X(B) = \mu_Y(B)$ i BSO $A \subseteq B$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mu_X(B \setminus A) &= \mathbb{P}\left[X \in B \setminus A\right] = \mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[X \in A] = \\ &= \mathbb{P}[Y \in B] - \mathbb{P}[Y \in A] = \mathbb{P}\left[Y \in B \setminus A\right] = \mu_Y(B \setminus A)\end{aligned}$$

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies \bigcup A_i \in \mathfrak{L}$

$$\mu_X(\bigcup A_i) = \mathbb{P}\left[X \in \bigcup A_i\right] = \lim_N \mathbb{P}\left[X \in \bigcup_1^N A_i\right] = \lim_N \mathbb{P}[X \in A_N] =$$
$$\lim_N \mathbb{P}[Y \in A_N] = \lim_N \mathbb{P}\left[Y \in \bigcup_1^N A_i\right] = \mathbb{P}\left[Y \in \bigcup A_i\right] = \mu_Y(\bigcup A_i)$$

Exercise 3. Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$ oraz ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

To samo, co powiedzieć, że $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$.

Exercise 4. Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ (zbiór A nazywamy symetrycznym, jeżeli $A = -A$).

Zauważamy, że zbiory $[-t, t]$ generują zbiór zbiorów symetrycznych i dalsza część zadania wynika z jednoznaczności generowania miary przez zbiory generujące σ-ciało.

Exercise 5. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p. Niech X będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

Czyli szukam prawdopodobieństwa, że pierwszy sukces będzie w k-tym doświadczeniu.

$$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Exercise 6. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedyńczego sukcesu wynosi $p_n = \frac{\lambda}{n}, \lambda > 0$. W ciągu jednej sekundy wykonujemy n doświadczeń. Niech X_n będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X_n. Zbadaj zachowanie tego rozkładu, gdy $n \to \infty$.

Tutaj rozkład jest prawie taki sam jak wcześniej, tzn. prawdopodobieństwo, że w k-tej sekundzie mamy sukces wynosi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_n = k] &= (1 - p_n)^{k-1} \cdot p_n \cdot \sum_{t=1}^{n} 1 - p_n)^t = \\
&= \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n(k-1)} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^t \frac{\lambda}{n} = \\
&= \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n(k-1)} \frac{1 - (1 - \lambda/n)^n}{\frac{\lambda}{n}} \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n(k-1)} \cdot \frac{\lambda}{n}$$

Exercise 7. Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \mathbb{P}[X > s]$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ w przypadku rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym bezatomowym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$

Rozkład geometryczny to

$$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$$

Mi jest potrzebne prawdopodobieństwo, ze pierwsze zwycięstwo będzie powyżej $t + s$, jeżeli pierwsze zwycięstwo jest powyżej t?

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t + s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{(1 - p)^{t+s-1}}{(1 - p)^{t-1}} = (1 - p)^s = \mathbb{P}[X > s]$$

Analogicznie dla rozkładu wykładniczego $\mathbb{P}[X > k] = \int_k^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k}$:

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t + s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Przed udowodnieniem, że są to jedyne rozkłady z amnezją, przyjżyjmy się co konkretnie mówi mi warunek z zadania:

$$\mathbb{P}\left[X > t + s | X \geq t\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s]}{\mathbb{P}[X \geq t]} = \mathbb{P}[X > s]$$

czyli

$$\mathbb{P}[X > t + s] = \mathbb{P}[X > s]\,\mathbb{P}[X > t].$$

Zacznijmy od rozkładu geometrycznego, tzn. $t, s \in \mathbb{N}$. Będę chciała potęgować, co się stanie, gdy $t = s$. Popatrzmy, co się wtedy dzieje:

$$\mathbb{P}[X > t + t] = \mathbb{P}[X > t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 2t + t] = \mathbb{P}[X > 2t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^3$$

i indukcyjnie,

$$\mathbb{P}\left[X > (n + 1)t\right] = \mathbb{P}[X > nt + n] = \mathbb{P}[X > nt]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^{n+1}.$$

W takim razie:

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t \cdot 1] = \mathbb{P}[X > 1]^t.$$

Dalej, wiemy, że albo $\mathbb{P}[X > t]$ albo $\mathbb{P}[X \leq t]$, czyli

$$\mathbb{P}[X > t] + \mathbb{P}[X \leq t] = 1$$

a z kolei $\mathbb{P}[X \leq t]$ to $\mathbb{P}[X = t]$ lub $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$. Czyli

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - \mathbb{P}[X \leq t - 1].$$

Z kolei $\mathbb{P}[X \leq t - 1]$ mogę rozpisać korzystając z

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}\left[X > (t - 1) + 1\right] = \mathbb{P}\left[X > (t - 1)\right]\mathbb{P}[X > 1]$$

$$\mathbb{P}\left[X > (t - 1)\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t - 1] = 1 - \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

Czyli dostaję, że

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - 1 + \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

nazwijmy $p = \mathbb{P}[X = 1]$, wtedy

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] = 1 - p.$$

Ostatecznie:

$$\mathbb{P}[X = t] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{1 - p} - \mathbb{P}[X > t] = \frac{(1 - p)^t}{1 - p} - (1 - p)^t = (1 - p)^{t-1}(1 - (1 - p)) = p(1 - p)^{t-1}$$

a to jest już nasz znajomy rozkład geometryczny.

Rozważam teraz rozkład eksponencjalny, który tym na przykład różni od geometrycznego, że przyjmuje argumenty nienaturalne. Zwykle jeśli mamy dane argumenty naturalne to chcemy przejść do wymiernych i dalej do rzeczywistych, to korzystamy najpierw z ułamków, a potem z granic ciągów tychże ułamków. Spróbujmy więc jakoś uzyskać $\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]$, wtedy zmieniając p, q będę miała wszystkie liczby wymierne

$$\mathbb{P}[X > p] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{2}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]$$

i podobnie jak wcześniej

$$\mathbb{P}[X > 1]^p = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-1)}{q} + \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-2)}{q}\right]\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]^q$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{q}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right].$$

W tym przypadku bardzo ciężko będzie mi przechodzić do równości, ale mogę za to powiedzieć, że dla każdej liczby niewymiernej x znajdę ciąg liczb wymiernych taki, że $x = \lim q_n$. Jeśli będziemy teraz brać ten ciąg podchodzący od dołu, to dostaniemy ciąg wstępujących prawdopodobonieństw, bo $X > q_n \implies X > q_{n+1}$ gdy $q_{n+1} > q_n$. Czyli będziemy mogli przejść z prawą stroną do granicy i dostać

$$\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X > 1]^x$$

nazwijmy teraz $\mathbb{P}[X > 1] = e^{-\lambda}$, żeby otrzymać

$$\mathbb{P}[X > x] = \left(e^{-\lambda}\right)^x = e^{\ln(e^{-\lambda})^x} = e^{x \ln e^{-\lambda}} = e^{-x\lambda}$$

co jest dokładnie postacią rozkładu geometrycznego.