RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 6

1. Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x, y) = C(x+y)$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź wartość C. Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = C \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$.
a) Wyznaczyć C.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X/Y.
d) Czy zmienne X i Y są niezależne?
e) Czy X/Y i Y są niezależne?

3. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, których rozkład jest zadany gęstością $2x \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że a) $X + Y < 1/2$, b) $XY < 1/2$, c) $|X - Y| < 1/2$, d) $X^2 + Y^2 \leq 1/2$.

4. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znajdź rozkład $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Czy X_n i Y są niezależne?

5. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Pokaż, że jeżeli X nie ma atomów, to $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

6. Zmienne X i Y są niezależne. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, a Y ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}[Y = -1] = 1/3$, $\mathbb{P}[Y = 2] = 2/3$.
a) Oblicz $\mathbb{P}[3X < Y]$.
b) Wyznacz rozkład zmiennej XY.

7. Pokaż, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ o gęstościach $f_1, \ldots, f_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n).$$

8. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy niezależnie w sposób jednostajny liczby $X_1, X_2, \ldots$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1, ciąg $\{X_n\}$ jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

9. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze z parametrami λ i μ odpowiednio. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X + Y$.

10. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne X/Y oraz $X + Y$ są niezależne.

11. Zmienne losowe $X_1, .., X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami λ_i. Pokaż, że $X_1 + .. + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + .. + \lambda_n$.

12. Załóżmy, że X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$. Oblicz rozkład zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

13. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje nieskończenie wiele indeksów n takich, że

$$|X_{2n} - X_{2n+1}| \leq \frac{1}{n}.$$

14. Niech $\{X_i\}_{i=1,\ldots,5}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych
a) Czy zmienne losowe $X_1 + X_2$ oraz $X_3 + X_4 X_5$ są niezależne?
b) Czy zmienne losowe X_1, $X_1 X_2$ są niezależne?