Algebra Przemienna

why am I doing this

koteczek

~

Contents

Pomoce dydaktyczne:

playlista z losowymi wykladami

1. Wstęp

1.1. Gradacje, filtracje

Są pierścienie i ideały, St_K to struktura pierścienia, dalej na środku mamy przykład pierścienia.

Są pierścienie, które są zgradowane i są pierścienie, które są zfiltrowane. Czemu nas to interesuje? bo mamy ciąg liczb. Stanley jest zgradowany.

Jak jest zgradowany, to ma ciąg wymiarów. Jakie są wymiary stopni gradacji?

Liczymy $\sum_{i=0}^{\infty} \dim R_i \cdot t^i$ dla punktu i dwóch punktów. Jeżeli K to $\frac{1}{1-t}$, dla połączonych dwóch punktów to $\left(\frac{1}{1-t}\right)^2$, a dla dwóch niepołączonych punktów $\frac{2}{1-t} - 1$.

Topologia <3

Pierwszy rodzaj pierścieni pojawiających się w topologii to twory oznaczane

$$H^{\cdot}(X, R),$$

gdzie R to pierścień, a X to przestrzeń topologiczna. To jest chwilowo blackbox i my potem to wytłumaczymy. To coś jest zgradowane.

Taki pierścień to na przykład $R[X]/x^2 = 0$.To jest pierścień wielomianów jednej zmiennej. Teraz dla dwóch zmiennych $R[X, Y] : /X^2 = 0 = y^2, xy = -yx$. Pierwsze odpowiada okręgowi $[S^1]$, a drugie odpowiada torusowi $[T^2]$. Czyli torusowi przypisujemy taki pierścień, o to mniej więcej tutaj chodzi.

Te obiekty, o których algebra przemienna chce mówić to są zgradowane przemienne obiekty. Czyli $R = \otimes R_i$, a potem przemienność ma być taka, że $r_i r_j = (-1)^{\alpha ij} r_j r_i$. Możemy na przykład mieć $\alpha = 1$.

Pierścienie grupowe: k[G], gdzie k jest być może ciałem, a G jest grupą. I teraz jeżeli G jest nieprzemienne, to to jest bardzo nieprzemienne. Teoria reprezentacji zajmuje się badaniem takich pysi. W topologii jak mamy przestrzeń X, to nad nią wisi $\overline{X}$ razem z działaniem grupy G takie, że $\overline{X}/G = X$ i to się nazywa pokryciem uniwersalnym. Iloraz jest X i to działa nakrywająco, to znaczy każda orbita G to jest zawsze otoczenie punktu który wybraliśmy. Zawsze możemy rozłożyć to jakoś trudne słowo, triangulacja. To co działa początkowo na $\overline{X}$, to działą teraz na traingulacji XDDD. $C_k(\overline{X})$ to formalne kombinacje liniowe o współczynnikach w k[G] k-sympleksów. Operatory brzegów. Mam wrażenie, że to akurat jest jakaś losowa baja o trójkącikach.

2. Pierścienie i ideały

Szybkie powtórzenie notacji i podstawowych definicji, z małym dodatkiem ponad algebrę 1r.

2.1. Pierścienie i homomorfizmy pierścieni

Pierścień A to zbiór z dwoma binarnymi operacjami (dodawanie i mnożenie) takimi, że

1. A jest abelową grupą względem dodawania,
2. mnożenie jest łączne i rozłączne względem dodawania,
3. dla nas dodatkowo mnożenie jest przemienne,
4. i ma element neutralny.

Czyli rozważamy tylko *pierścienie przemienne z jednością*. Warto zaznaczyć, że nie wykluczamy że $1 = 0$, ale wtedy A ma tylko jeden element i jest pierścieniem zerowym, oznaczanym przez 0.

Homomorfizm pierścieni to funkcja f z pierścienia A w pierścień B taka, że

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(xy) = f(x)f(y)$,
3. $f(1) = 1$.

2.2. Ideały, pierścienie ilorazowe

Ideał I pierścienia A to podzbiór A taki, że jest podgrupą względem dodawania i taki, że $AI \subseteq I$. Grupa ilorazowa A/I zachowuje mnożenie zdefiniowane w I, co sprawia, że jest pierścieniem, nazywanym **pierścieniem ilorazowym** [lub *residue-class ring*]. Elementami A/I są warstwy I w A, a funkcja $\phi : A \to A/I$ taka, że $\phi(x) = x + I$ jest surjiektywnym homomorfizmem.

Twierdzenie: Istnieje funkcja $1-1$ zachowująca porządek zależności pomiędzy ideałami $I \subseteq J \lhd A$ oraz ideałami $J' \lhd A/I$ zadana przez $J = \phi^{-1}(J')$.

Dowód: Jeśli $f : A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni, to jądro f jest ideałem I w A oraz obraz f jest podpierścieniem $C \subseteq B$. f indukuje izomorfizm pierścieni $A/I \cong C$.

i śmiga

W dalszej części możemy stosować oznaczenie $x \equiv y \mod I$ żeby powiedzieć, że $x - y \in I$.

2.3. Dzielniki zera, elementy nilpotentne i odwracalne

Dzielnik zera pierścienia A to element x taki, że istnieje dla niego $y \neq 0$ takie, że $xy = 0$. Pierścień, który nie posiada dzielników zera różnych od 0 jest nazywany **dziedziną całkowitą** [*integral domain*].

Element $x \in A$ jest **nilpotentny**, jeżeli istnieje $n > 0$ takie, że $x^n = 0$. Element nilpotenty jest zawsze dzielnikiem zera, ale odwrotna zależność nie zawsze zachodzi.

Element odwracalny $x \in A$ to element "dzielący zero", czyli istnieje unikalne $y \in A$ takie, że $xy = 1$. Zwykle oznaczamy $y = x^{-1}$. Wszystkie elementy odwracalne pierścienia A tworzą **grupę multiplikatywną** [*multiplicative group*], która jest abelową.

Wielokrotności ax elementu $x \in A$ tworzą **ideał główny** [*principal ideal*] pierścienia A, co oznaczamy przez (x). Jeżeli x jest odwracalny, to $(x) = A = (1)$. Ideał generowany przez 0 jest zwykle oznaczany $(0) = 0$.

Ciało to pierścień A w którym $1 \neq 0$ i każdy niezerowy dzielnik zera jest odwracalny. Każde ciało jest domeną całkowitą.

Twierdzenie: Niech A będzie pierścieniem, wtedy poniższe są równoważne:

I A jest ciałem,

II jedyne ideały w A są 0 lub (1),

III każdy homomorfizm z A w niezerowy pierścień B jest iniekcyjną.

Dowód:

$I \implies II$: Niech $I \neq 0$ będzie ideałem w A. Wtedy I zawiera niezerowy element x, który jest odwracalny. W takim razie $(x) \subseteq I$, a ponieważ $(x) = (1)$, to $I = (1)$.

$II \implies III$: Niech $\phi : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Wtedy $\ker(\phi)$ jest ideałem różnym od (1), czyli $\ker(\phi)$ musi byc zerem, a więc jest funkcją $1-1$.

$III \implies I$: Niech x będzie elementem A, który nie jest odwracalny. WTedy $(x) \neq (1)$, czyli $B = A/(x)$ nie jest pierścieniem zerowym. Niech $\phi : A \to B$ będzie naturalnym homomorfizmem A w B z jądrem (x). Przez hipotezę ϕ jest $1-1$, czyli $(x) = 0$, więc $x = 0$.

2.4. Ideały główne i maksymalne

Ideał $I \lhd A$ jest ideałem głównym, jeżeli $I \neq (1)$ oraz $xy \in I \implies x \in I$ albo $y \in I$.