ZADANIE 1.

Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ *umieszczono* 8 *nierozróżnialnych wież, w taki sposób, aby żadne dwie się nie biły. Na ile sposobów można to zrobić? Jak zmieni się wynik, gdy wieże będą rozróżnialne?*

Miejsce pierwszej wieży wybieram na n^2 sposobów. Drugi musi siąść tak naprawdę na planszy $(n-1) \times (n-1)$, czyli jego pole wybieram na $(n-1)^2$ sposobów. Koniec końców dostajemy

$$\binom{n}{8}^2 \cdot (8!)^2.$$

Jeżeli wieże sa rozróżnialne, to tak jakbyśmy najpierw układali nierozróżnialne wierze, a potem przyporządkowali ich ciągowi 8 różnych kolorów na

$$\binom{n}{8}^2 \cdot (8!)^3.$$

ZADANIE 2.

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przez gracza podczas gry w pokera: pary, dwóch par, trójki, fulla, karety, koloru, pokera? Przypomnijmy, że talia składa się z 24 *kart, a gracz dostaje* 5 *kart.*

Wszystkich układów jest $\binom{24}{5} = 42504$.

Para:

Pierwszą kartę wybieramy na 24 sposoby. Drugą chcemy wziąć do pary, więc na 3 sposobów i dzielimy na 2 bo kolejność. Dalej wybieramy cokolwiek, co nie jest tą figurą. Czyli mamy po kolei $20, 16, 12$ i dzielimy na $3!$.

Dwie pary:

Pierwsza idzie na 24 sposoby, druga na 3, trzecia na 20, czwarta też ma być do pary, czyli 3 sposoby i ostatnia jest na 16. Całość dzielimy na 4, bo kolejność tych dwóch par mnie nie obchodzi.

Trójka:

Pierwsza kartka leci na 24 sposobów, druga na 3, trzecia na 2, dzielimy przez $3!$, bo kolejność. Czwarta ma być na 20 i ostatnia na 16 i dzielimy je na 2, bo kolejność.

Full:

Full to jest taka para i trójka w jednej rączce. Czyli pierwsza karta na 24, potem na 3 i 2. Jeszcze dzielimy na $3!$, bo kolejność nas nie interesuje. Czwarta leci na 20 i dobieramy do pary na 3, po czym dzielimy przez kolejność, czyli 2.

Kareta:

Kareta to cztery z jednej figury i jedna losowa, czyli liczy się przyjemnie. Wybieramy figurę na 6 sposobów i potem pozostaje dobrać ostatnią kartę na 20 sposobów, czyli mamy $6 \cdot 20$.

Kolor:

Jak sama nazwa wskazuje, kolor to wszystkie pięć tego samego koloru. Wybieramy kolor na 4 sposoby i jedną z kart która nie wejdzie nam do koloru na 6 sposobów. Tylko teraz wliczamy pokery i musimy je wyjebać na 8 sposobów, czyli zostaje 16.

Poker:

Pięć kolejnych w jednym kolorze. Wybieramy kolor na 4 i mamy albo poker z 9 albo z Asem, czyli jest ich 8.

ZADANIE 3.

Na ile sposobów można ustawić 7 *krzeseł białych i* 3 *czerwone przy okrągłym stole?*

Dobra, to wklejamy 3 elementy do kółeczka 7 elementów. Czyli mam 7 miejsc i wybieram na $\binom{7}{3}$ miejsca gdzie wrzucam te czerwone. Potem dziele na 10, bo mogłam zacząć liczyć od losowego miejsca. Zajebiście.

ZADANIE 4.

Ile jest różnych rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$*. A jeżeli założymy ponadto, że* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$.

Ta pierwsza część jest trywialna, bo wstawiamy zera między ciąg 1. Spróbujmy nierówności.

Rekurencja w zależności od x_5?

ZADANIE 5.

W klasie jest 15 uczniów. Na każdej lekcji odpytywany jest losowo jeden z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 16 lekcji zostanie przepytany każdy z nich.

Najpierw układamy ciąg 15 uczniów na 15! sposobów. Wybieramy na 15 sposobów Janka, którego trzeba ujebać, i wkładamy go w jedno miejsce między tymi lekcjami na 16 sposobów. Pamiętamy o kolejności, bo nie ważne czy ujebiemy go przy pierwszym odpytywaniu, czy na drugim. Czyli mamy

$$15! \cdot 8 \cdot 15$$

sposobów żeby odpytać wszystkich. Prawdopodobieństwo, że to się stanie wynosi

$$\frac{15! \cdot 8 \cdot 15}{15^{16}}$$

ZADANIE 6.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy znajdują się koło siebie.

Ilość sposobów na ułożenie wszystkich czterech asów obok siebie to 4!. Teraz mamy 48 kart do potasowania na 48! i chcemy włożyć je na jedno z 49 miejsc, czyli mamy

$$4! \cdot 48! \cdot 49$$

sposobów. Więc prawdopodobieństwo to

$$\frac{4! \cdot 48! \cdot 49}{52!} = \frac{4!}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

ZADANIE 7.

Przez Los Angeles przebiega 5*-pasmowa autostrada. Typowy kierowca co minutę zmienia losowa pas. Oblicz prawdopodobieństwo, że po* 4 *minutach będzie z powrotem na początkowym pasie (zakładając, że w międzyczasie się nie rozbije).*

Ile jest szans, że po 3 minutach będzie na pasie obok? Bo stąd połowa będzie odpowiadać, a połowa oddali się o dwa od pasu startowego. Jeżeli startuje na pasie środkowym, to ma 4 sposoby. W przedostatnim mamy o jeden mniej, czyli 3, a w krańcowym mamy 2 sposoby. Sytuacja w tych dwóch nieśrodkowych jest symetryczna, czyli ostatecznie mamy 14 sposobów, żeby po 3 minutach być na pasie obok. Chwilowo dalej nie liczę.

ZADANIE 8.

Na przyjęciu jest n *osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkasz tam osobę, która obchodzi urodziny tego samego dnia co Ty? Dla jakich* n *to prawdopodobieństwo było większe niż* $\frac{1}{2}$*?*

Czy luty 29 istnieje?

Każda osoba ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{365}$, osób jest n, czyli mamy $\frac{n}{365}$?

ZADANIE 9.

W Totolotku losuje się 6 *z* 49 *liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie nie będą dwoma kolejnymi liczbami naturalnymi?*

Zacznijmy od ciągu 49 jedynek. Chcemy tam włożyć 6 zer jako końcówki sumowania liczb. Pierwsze normalnie byśmy włożyli na 49 miejsc, ale musimy zostawić troszkę miejsca na końcu, bo najwyższa pierwsza to 39, czyli jak obetniemy sobie do tego to mi śmignie. Super. Tutaj już wkładam losowo, czyli na $\binom{39}{6}$ sposobów i po prostu dodaje te dwójki zawsze. I śmiga.

Coś spartaczyłam XD

ZADANIE 10.

Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał po pudełku zapałek. Początkowo każde z nich zawierało n *zapałek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapałki sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapałkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie gdy sięgnął po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze* k *zapałek.*

Czyli ile jest sposobów, żeby z jednej wyjął dokładnie n, a z drugiej dokładnie $(n-k)$? No to wkładam $(n-k)$ jedynek między n zer. Mogę to zrobić na $\binom{n+1}{n-k}$ sposobów. Teraz mamy symetrycznie lewą i prawą, czyli mnożę razy 2. No to mam $2\cdot\binom{n+1}{n-k}$ sposobów. No a ogółem to są ciągi o $2n-k$ elementach i ich chuji jest 2^{2n-k}. I przez to dziele.

ZADANIE 11.

Podczas imprezy mikołajkowej wszystkie n *prezentów pozbawiono karteczek z imieniem adresata i losowo rozdano uczestnikom. Niech* p_k *oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie* k *osób dostanie własny prezent. Oblicz* p_k *oraz* $\lim_{n\to\infty} p_k$.

To są nieporządki.

Rozdać n prezentów możemy na n! sposobów, natomiast rozdać tak, żeby dokładnie k trafiło tam gdzie trzeba to jest nieporządek na $(n-k)$ elementach, czyli

$$!(n-k) = (n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

W takim razie prawdopodobieństwo wynosi

$$p_k = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Jak to wygląda przy $n\to\infty$?

$$\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \le \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{2^i} = \frac{2(1-(1/2)^{n-k})}{3n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} \to 0$$

ZADANIE 12.

Grupa składająca się z $2n$ *pań i* $2n$ *panów została podzielona na dwie równoliczne grupy. Znajdź prawdopodobieństwo, że każda z tych grup składa się z takiej samej liczby pań i panów. Przybliż to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.*

Ogółem dwie równoliczne grupy tworzymy wybierając spośród 4n osób 2n reprezentantów pierwszej grupy. Czyli mamy $\binom{4n}{2n}$ możliwości. Grupy składające się z takiej samej liczby pań i panów to grupy mające po n każdej płci. Czyli wybieramy panie na $\binom{2n}{n}$ sposobów i panów na $\binom{2n}{n}$. Prawdopodobieństwo wynosi to

$$\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{(2n)!(2n)!}{(4n)!}\cdot\frac{(2n)!(2n)!}{(4n)!} \approx \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}2\pi n}\cdot\frac{(2n)^{4n}4\pi n}{(4n)^{4n}\sqrt{8\pi n}}\cdot\frac{(2n)^{4n}4\pi n}{(4n)^{4n}\sqrt{8\pi n}} = 2^{-6n}\sqrt{\pi n}$$