ZADANIE 1.

Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

(a) $x(t) = \tan t$, $x' = 1 + x^2$ //YUP

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = x'$$

(b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$ //YUP

$$x'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$
$$tx' + x = \frac{t\cos t - \sin t}{t} + \frac{\sin t}{t} = \frac{t\cos t}{t} = \cos t$$

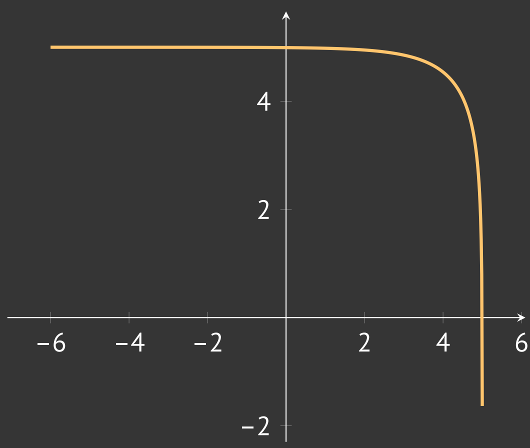
ZADANIE 2.

Znaleźć rozwiązania ogólne (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:

(a) $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$
$$e^{-y}dy = e^x dx$$
$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$
$$-e^{-y} = e^x + c$$
$$e^{-y} = c - e^x$$
$$\ln(e^{-y}) = \ln(c - e^x)$$
$$y = -\ln(c - e^x)$$

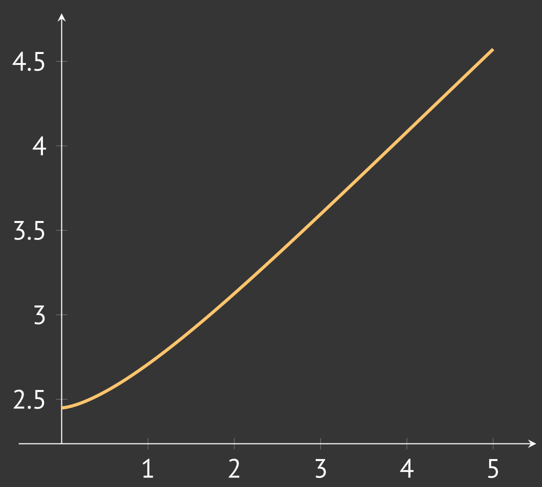
Niech $c = e^m$ dla pewnego m, bo wiadomo, że aby ta funkcja była gdziekolwiek określona, to $(c - e^x > 0)$ na pewnym przedziale, czyli $c > 0$. Rozważmy teraz dwa przypadki: $x < 0$ i $x \geq 0$. Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja będzie coraz bardziej zbliżać się do wartości m, bo e^x będzie dążyć do 0, ale nigdy go nie osiągnie. Dla $x \in [0, m)$ funkcja będzie maleć z $\lim_{x\to m} \ln(c - e^x) = -\infty$. Czyli wykres wygląda tak dla $m = 5$: (i tutaj użyję sobie paczuszki do rysowania grafów bo czemu nie XD)



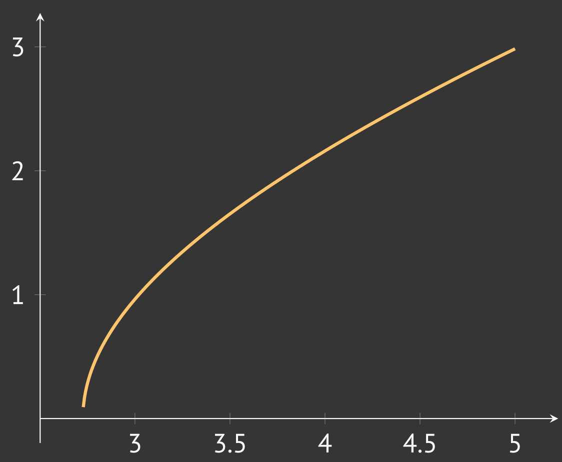
(b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{y}$$
$$ydy = \sqrt{x}dx$$
$$\int ydy = \int \sqrt{x}dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c}$$

W tym przypadku możemy mieć dodatnie i ujemne c, ale x musi być liczbą dodatnią, inaczej $x^{\frac{3}{2}}$ nie istnieje. Dla dodatniego c wiemy, że wartość w $x = 0$ będzie wynosić $\sqrt{c}$. Wtedy mamy funkcję wyglądającą jak:



Natomiast dla $c < 0$ wiemy, że będziemy ruszać gdzie graf się "zaczyna". To znaczy dla $x < \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ funkcja jest nieokreślona, a dla $x \geq \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ wygląda troszkę jak funkcja pierwiastka 4-tego stopnia z x^3?



(c) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$2y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + c$$
$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$

Dla $c < 0$ to jakaś potężna okejka, a dla $c \geq 0$ to se leeeeci w górę. Już mi się nie chce rozrysowywać.

ZADANIE 4.

Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ *oznacza temperaturę czajnika w chwili* t. *Zakładamy, że* $S(0) = 100^{o}C$ *w temperaturze otoczenia* $20^{o}C$. *Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła* $60^{o}C$. *Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę* $25^{o}C$*?*

Wiemy, że pochodna funkcji temperatury od czasu jest wprost proporcjonalna do różnicy w temperaturze:

$$\frac{dS}{dt} = a(S - 20).$$

Rozwiążmy to równanie

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= a(20 - S(t)) \\
\frac{dS}{20 - S(t)} &= adt \\
\int \frac{dS}{20 - S(t)} &= \int adt \\
-\ln|20 - S(t)| &= at + c \\
|20 - S(t)| &= e^{-at-c}
\end{aligned}$$

Tutaj ciało stygnie, więc $S(t) > 20$, czyli

$$|20 - S(t)| = S(t) - 20.$$

Z treści zadania wiemy, że $S(0) = 100$, co po podstawieniu da nam wartość c:

$$\begin{aligned}
100 - 20 &= e^{-c} \\
80 &= e^{-c} \\
\ln 80 &= -c \\
c &= -\ln 80
\end{aligned}$$

Dalej, podstawiając $S(10) = 60$ możemy poznać wartość a:

$$\begin{aligned}
60 - 20 &= e^{-10a+\ln 80} \\
40 &= e^{-10a} \cdot 80 \\
\frac{1}{2} &= e^{-10a} \\
\ln\frac{1}{2} &= -10a \\
a &= \ln 2^{\frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

Dostajemy wzór:

$$S(t) = 20 + e^{-t\ln 2^{\frac{1}{10}} + \ln 80}$$

po ilu minutach będziemy mieli temperaturę $25^{o}C$? Jeszu nie wiem i nie chce tego zmieniać tbh.

$$\begin{aligned}
25 - 20 &= e^{-ta-c} \\
\ln 5 &= -ta - c \\
\ln 5 + \ln 80 &= -ta \\
10\ln 400 &= t\ln 2 \\
10\ln 20^2 &= t\ln 2 \\
\ln 20^{20} &= t\ln 2
\end{aligned}$$

ZADANIE 5.

Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób. Załóżmy, że 5 *osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już* 10 *osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się* 850 *osób, przy założeniu, że:*

1. *Plotka rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki.*

2. *Plotka rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:* $y' = ke^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.

Wersja 1:

Będziemy modelować y(t), czyli ilość osób, które plotkę już usłyszały w zależności od czasu t. Wiemy, że prędkość rozprzestrzeniania się plotki, to znaczy y', jest wprost proporcjonalna do $y(1000 - y)$. Rozwiążmy to cudeńko

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ay(1000-y) \\
\frac{dy}{y(1000-y)} &= adt \\
\int \frac{dy}{y(1000-y)} &= \int adt \\
\frac{\ln y - \ln(1000-y)}{1000} &= at + c \\
\ln \frac{y}{1000-y} &= at + c \\
\frac{y}{1000-y} &= e^{at+c} \\
y &= (1000-y)e^{at+c} \\
y(1+e^{at+c}) &= 1000e^{at+c} \\
y &= \frac{1000e^{at+c}}{1+e^{at+c}} \\
y &= \frac{1000}{e^{-at-c}+1}
\end{aligned}
$$

To teraz będzie podstawianko-sranko. Gdy $t = 0$ mamy $y = 5$, czyli

$$
\begin{aligned}
5 &= \frac{1000}{e^{-c}+1} \\
e^{-c} + 1 &= 200 \\
e^{-c} &= 199 \\
-c &= \ln 1999 \\
c &= -\ln 199
\end{aligned}
$$

natomiast, gdy $t = 1$, to $y = 10$, czyli

$$
\begin{aligned}
10 &= \frac{1000}{e^{-a+\ln 199}+1} \\
e^{-a} \cdot 199 + 1 &= 100 \\
e^{-a} &= \frac{99}{199} \\
-a &= \ln \frac{99}{199} \\
a &= \ln \frac{199}{99}
\end{aligned}
$$

Teraz chce rozwiązać

$$850 = \frac{1000}{e^{t\ln\frac{99}{199}+\ln 199}+1}$$

$$199\cdot\left(\frac{99}{199}\right)^t = \frac{1000}{850}-1$$

$$\frac{99^t}{199^{t-1}} = \frac{3}{17}$$

$$99^t\cdot 17 = 3\cdot 199^{t-1}$$

$$\ln(99^t\cdot 17) = \ln(3\cdot 199^{t-1})$$

$$t\ln 99+\ln 17 = \ln 3+(t-1)\ln 199$$

$$t(\ln 99-\ln 199) = \ln\frac{3}{199\cdot 17}$$

$$t\ln\frac{99}{199} = \ln\frac{3}{199\cdot 17}$$

Wersja 2:

Teraz chcemy rozwiązać równanie już nam dane:

$$\frac{dy}{dx} = ke^{-(73/520)t}$$

$$dy = ke^{-(73/520)t}dt$$

$$\int dy = \int ke^{-(73/520)t}dt$$

$$y = -\frac{520}{73}ke^{-(75/520)t}+c$$

To lecimy z podstawianiem:

$$\begin{cases} 5 = -\frac{520}{73}k+c \\ 10 = -\frac{520}{73}ke^{-73/520}+c \end{cases}$$

$$5 = -\frac{520}{73}k+\frac{520}{73}ke^{\frac{-73}{520}}$$

$$365 = k(520e^{-73/520}-520)$$

$$\frac{365}{520e^{-73/520}-520} = k$$