ZADANIE 2.

Ola poszła do kasyna mając 100 złotych. Postanowiła grać tak długo aż albo zbankrutuje, albo osiągnie 500 złotych. W każdej pojedynczej grze może wygrać 10 zł z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, przegrać 10 złotych z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ lub utrzymać swój stan posiadania z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 Ola skończy grę w skończonym czasie

Przedstawiam dwa rozwiązania: jedno zainspirowane nagłym wprowadzeniem przez prof. Buraczewskiego na wykładzie wędrówki po $\mathbb{Z}^2$ pijaka oraz drugie o wiele prostsze. W kolejności odwrotnej.

Prostsze rozwiązanie każe nam rozważać np. to, że Ola wygra 40 razy pod rząd. Nie obchodzi nas jaki jest teraz stan jej konta ani jaki był przed chwilą, po prostu szukamy prawdopodobieństwa, że 40 razy pod rząd trafi. Wynosi ono $\frac{1}{30^{40}}$ i szereg tych prawdopodobieństw jest rozbieżny. Korzystając więc z lematu Borelego-Cantalliego wiemy, że zdarzenia "Ola wygra 400 zł pod rząd zdarzają się nieskończenie wiele razy, czyli wcześniej czy później przekroczy ona próg 500 złotych i skończy grę.

Zadanie zrobimy jakbyśmy rozważali pijaka próbującego usilnie wrócić do domu na prostej drodze: każdy krok to początek nowej, wspaniałej przygody.

Jako, że przyrównamy fortunę Oli do pijaka, a jej odległość od 50 do odległości pijaka od ukochanej szklanki soku po ogórkach kiszonych, to oznaczymy przez A_i prawdopodobieństwo, że startując w punkcie i pijak dopadnie źródła domowych elektrolitów. Tutaj dokonam jeszcze podmianki, żeby było mi wygodniej: ponieważ fortuna Oli będzie skakać po wartościach z 0 na końcu (tzn. podzielnych przez 10), to każdy krok pijaka będzie krokiem długości 10. To znaczy Ola zdobywa banknoty 10zł i liczy ich ilość żeby zdecydować czy gra dalej czy nie, a nie dokładną wartość swojego portfela.

Problem z zadania startuje w i = 10 i wygrana będzie przybliżać nas do 50 - bar był 10 metrów od posterunku policji, a dom aż 50 metrów.

Liczy się, aby pijak dotarł gdzieś, gdzie ma wodę, więc $A_{50} = 1$ i $A_0 = 1$, bo czy to w domu, czy w więzieniu, jakieś elektrolity się znajdą.

Zastanówmy się jak opisać, że pijak startując w i-tym kroku dojdzie do domu? Możemy to zrobić korzystając z rekurencji. Jeżeli z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ ruszy się w stronę domu, to zrzucamy całą robotę na A_{i+1}, jeśli się oddali od domu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, to będziemy liczyć A_{i-1}, a pozostanie w miejscu z prawdopodobieńśtwem $\frac{1}{6}$, czyli dostajemy:

$$A_i = \frac{1}{3}A_{i+1} + \frac{1}{2}A_{i-1} + \frac{1}{6}A_i$$

$$3A_i = A_{i+1} + \frac{3}{2}A_{i-1} + \frac{1}{2}A_i$$

$$\frac{5}{2}A_i - \frac{3}{2}A_{i-1} = A_{i+1}$$

i to jest już rekurencja, którą w teorii potrafię rozwiązać, a w praktyce zrobi to za mnie wolframalpha:

$$A_i = c_1\left(\frac{3}{2}\right)^i + c_2$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ A_{50} = 1 = c_1 \frac{3^{50}}{2^{50}} + c_2 \end{cases}$$

To również rozwiązuje za mnie wolframalpha i mówi, że $c_1 = 0$ i $c_2 = 1$, czyli prawdopodobieństwo dojścia do elektrolitów (tudzież zakończenia gry) wynosi $A_{10} = 1$.

ZADANIE 3.

Losujemy niezależnie nieskończenie wiele punktów z koła o promieniu 1 i środku $(0, 0)$. Dla jakich wartości ε z prawdopodobieństwem 1 w kole o promieniu ε i środku $(0, 0)$ znajdzie się nieskończenie wiele punktów?

Zgaduję że dla $\varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, bo wtedy te koła to będzie przynajmniej połowa całości.

No boże no, to widać że dla tych na pewno śmignie.

A_n - w n-tym ruchu punkt wpada w moje koło. Prawdopodobieństwo wpadnięcia w kółko o promieniu ε wynosi ε^2. Coś pojebałam, albo to jest trywialne.

ZADANIE 4.

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są niezależne i $\mathbb{P}[A_n] = p_n \in (0, 1)$. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń $A_n \iff$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1} A_n\right] = 1 \iff \mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1} \bigcup_{n=m} A_n\right] = 1$$

$\Longleftarrow$ dość trywialne, bo

$$\bigcap \bigcup A_n \subseteq \bigcup A_n \implies 1 = \mathbb{P}\left[\bigcap \bigcup A_n\right] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup A_n\right] \leq 1$$

$\Longrightarrow$

$$1 = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{N} \mathbb{P}[A_n]\right] = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \prod_{n=1}^{N}(1 - \mathbb{P}[A_n])\right) \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty} 1 - \prod_{n=1}^{N} e^{-\mathbb{P}[A_n]} = \lim_{N\to\infty} 1 - e^{-\sum \mathbb{P}[A_n]}$$

$$1 = 1 - \lim e^{-\sum \mathbb{P}[A_n]} \implies 0 = \lim e^{-\sum \mathbb{P}[A_n]} \implies \lim \sum \mathbb{P}[A_n] = \infty$$

i tu już z twerdzenia B-C.

ZADANIE 5.

Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \geq \frac{1}{2}$. Niech A_n oznacza zdarzenie, że pomiędzy rzutem 2^n a 2^{n+1} otrzymano ciąg n kolejnych orłów. Pokaż, że zdarzenia A_n z prawdopodobieństwem 1 zachodzą nieskończenie wiele razy.

Rozwiązanie zaczerpnięte z porannej rozmowy z prof. Buraczewskim.

Znalezienie konkretnej formuły na prawdopodobieństwo, że między 2^n a 2^{n+1} wypadnie co najmniej n kolejnych orłów jest bardzo ciężkie. Możemy próbować szukać wzorku rekurencyjnego, ale jest to dość niemiłe zadanie. W takim razie spróbujemy to rozwiązać przybliżając prawdopodobieństwo zdarzenia A_n, że n kolejnych orłów wypadnie między 2^n a 2^{n+1} rzutem od dołu.

Podzielmy rzuty od 2^n do 2^{n+1} na $\lfloor \frac{2^n}{n} \rfloor$ odcinków o długości n rzutów, gdzie ogonek który nam nie pasuje do całości wyrzucamy. Prawdopodobieństwo, że na każdym jednym z tych odcinków wypadnie n kolejnych orłów wynosi p^n. Jeśli nazwiemy przez B_i prawdopodobieństwo, że na i-tym odcinku wypadnie n kolejnych orłów, to prawdopodobieństwo, że na całym odcinku między rzutem 2^n a 2^{n+1} liczy się:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\bigcup B_i\right] &= 1 - \prod \mathbb{P}[B_i] = 1 - \prod (1 - p^n) = \\ &= 1 - \left[1 - p^n\right]^{2^n n^{-1}}\end{aligned}$$

Popatrzmy na drugą część tej równości, żeby ją oszacować:

$$\ln\left[1 - p^n\right]^{2^n n^{-1}} = \frac{2^n}{n} \ln\left[1 - p^n\right] \leq \frac{2^n}{n} \ln e^{-p^n} = -\frac{2^n}{n} p^n$$

Czyli

$$1 - \left[1 - p^n\right]^{2^n n^{-1}} \geq 1 - e^{-\frac{2^n}{n} p^n}$$

Ale ponieważ $p \geq \frac{1}{2}$, to musimy rozważyć dwa przypadki:

1. $p = \frac{1}{2}$. Wtedy
$$2^n p^n = 2^n \cdot 2^{-n} = 1$$
czyli
$$1 - e^{-2^n p^n n^{-1}} = 1 - e^{-n^{-1}} = 1 - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \ldots \approx \frac{1}{n}$$
i z szacowania za pomocą szeregu Taylora prawdopodobieństwa, że ciągi n kolejnych orłów będą się pojawiać:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup B_i\right] \geq \sum \frac{1}{n} = \infty$$

2. $p > \frac{1}{2}$. Wtedy dla pewnego $\varepsilon > 0$
$$2^n p^n > (1 + \varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$
czyli
$$1 - e^{-2^n p^n n^{-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 - e^{-\infty} = 1$$
i mamy, że prawdopodobieństwo, że n orłów pod rząd się pojawi w n-tym kroku zbiega do 1, czyli
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup B_i\right] = \infty$$

Korzystając z lematu Boule-Canalliego wiemy, że ciąg n orłów między 2^n a 2^{n+1} pojawi się nieskończenie wiele razy.