Lista 4

Równania różniczkowe 1R

Exercise 1. *Załóżmy, że funkcja* $f = f(t, y)$ *jest klasy* C^1 *na zbiorze* $t_0 \leq t < \infty$, $-\infty < y < \infty$ *oraz spełnia dodatkowe oszacowanie* $|f(t, y)| \leq K$ *na całym tym zbiorze dla pewnej stałej* $K > 0$. *Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

istnieje dla wszystkich $t \geq t_0$.

Z zajęć:

Z Picarda mamy istnienie rozwiązania na (β, α) i załóżmy nie wprost, że $\alpha < \infty$. Wtedy mamy $\beta < T_1 < T_2 < \alpha$ i z twierdzenia o wartości średniej:

$$|y(T_2) - y(T_1)| = x'(c)|T_2 - T_1| \leq K|T_2 - T_1|.$$

Rozważmy ciąg Cauchy'ego $\{T_n\}$ taki, że $|y(T_n) - x(T_m)| \leq K|T_n - T_m|$. Czyli $\{x(T_n)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jesteśmy w przestrzeni Banacha, więc jest on zbieżny. Niech $\lim_{n\to\infty} x(T_n) = x_1$. To samo dla T_n: $\lim_{n\to\infty} T_n = t_1$.

Rozważmy nowe zagadnienie $x' = f(t, y)$ i warunek początkowy to $x(t_1) = x_1$. I powtarzamy procedurę.

Z Picarda cośtam cośtam mam jakiś przedział $[t_0, \alpha_1]$ że jest określone, potem $[\alpha_1, \alpha_2]$ etc. Granicyje i dostaję przedział $[t_0, \alpha)$ na którym jest dobrze określone. Moja teza, to że $y(\alpha)$ isnieje i wynosi

$$y_\alpha = y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} f(s, y)ds,$$

bo ta całeczka faktycznie istnieje:

$$|y(\alpha)| = \left|y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} f(s, y(s))ds\right| \leq |y_0| + \int_{t_0}^{\alpha} |f(s, y)|ds \leq y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} Kds = y_0 + K(\alpha - t_0) < \infty$$

sprawdźmy, czy $\lim y(t) =$ moja wartość.

$$\lim_{t\to\alpha} [y(t) - y_\alpha] = \lim \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y)ds - y_0 - \int_{t_0}^{\alpha} f(s, y)ds\right] = \lim \int_{t_0}^{t} f(s, y)ds - \lim \int_{t_0}^{t} -y_\alpha = 0$$

Czyli śmiga.

Exercise 2. *Udowodnij, że poniższe równania uzupełnione warunkiem początkowym* $y(0) = 1$ *mają rozwiązanie dla wszystkich* $t \geq 0$.

a) $y' = t^3 - y^3$

Tutaj pochodna jest ograniczone jest od góry przez t, a od dołu przez –1,

(b) $x' = tx + e^{-x}$

Exercise 3. *Uzasadnij, że zagadnienie* $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ *nie ma rozwiązania określonego na całej proste.*

Znaczy bo to jest $y = \tan t + c$ XD

Alternatywnie, nie ma górnego ograniczenia na $|y(t)|$, bo to sobie roooośnie więc nie wyśmignie z tego $\lim |y(t)|$.