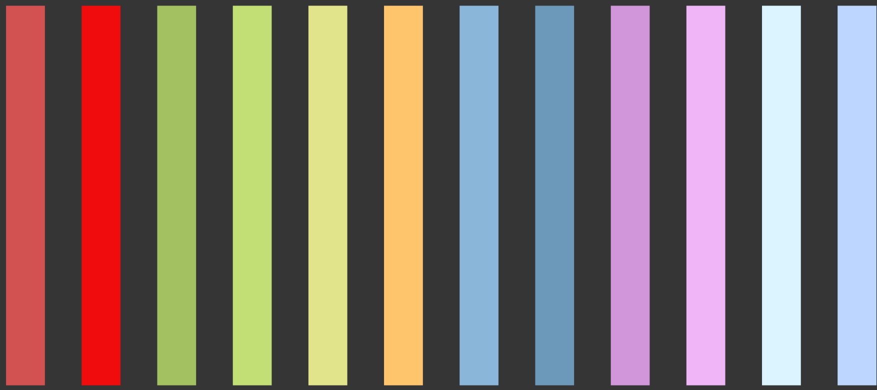

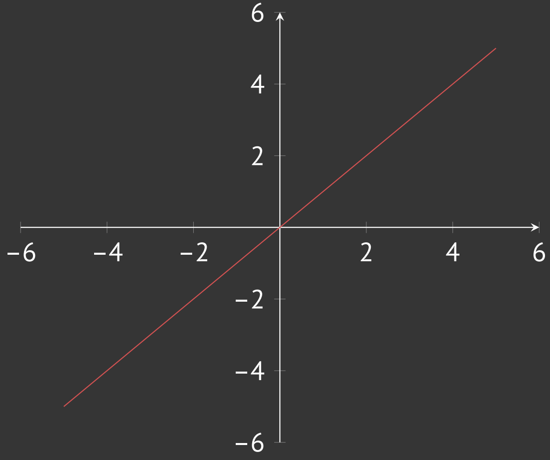

Każdą macierz A $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych taka, że $\mathrm{rank}(A) = n$, można zapisać jako $A = QR$, gdzie R jest macierzą górnotrójkątną, a Q ma kolumny ortogonalne. Ponieważ my będziemy rozważać macierze A będące reprezentacją jednoznacznych układów równań, to interesują nas tylko $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

> Zauważmy, że jeśli A ma niezerowy wyznacznik, to A nie może mieć liniowo zależnych kolumn. W takim razie, wektory $a_1, \ldots, a_n$ odpowiadające kolumnom A są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jako maksymalny możliwy układ wektorów liniowo niezależnych. Możemy na ich podstawie stworzyć bazę ortonormalną $u_1, \ldots, u_n$ przez proces Grama-Schmidta. Wtedy dla $k = 1, .., n$

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

Co więcej, dla dowolnego a_k z oryginalnej bazy możemy go zapisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów z bazy ortonormalnej:

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{i-1} [a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i]$$

a ponieważ $a_1, .., a_n$ były wektorami lnz, to dla $i > k$ $c_i = 0$. Niech r_k to będzie wektor zawierający współczynniki c_i dla wektora a_k:

$$r_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_k \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czyli mamy, że

$$a_k = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} r_k$$

i dalej

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{bmatrix}.$$

Zauważamy, że $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{bmatrix}$ to macierz górnotrójkątna, a Q to macierz ortogonalna.

1. Section test

1.1. Subsection test

Niech teraz A to **macierz główna rozważanego** układu równań, Q, R to macierze z jej rozkładu, X niech będzie *wektorem* wartości szukanych, a B niech będzie wektorem wyrazów wolnych. Wtedy

$$
\begin{aligned}
AX &= B \\
(QR)X &= B
\end{aligned}
$$

i ponieważ dla macierzy ortonormalnych mamy $Q^{-1} = Q^T$, to w prosty sposób możemy zamienić powyższy układ na

$$RX = Q^T B.$$

$$A \implies B$$

i śmiga