Lista 6

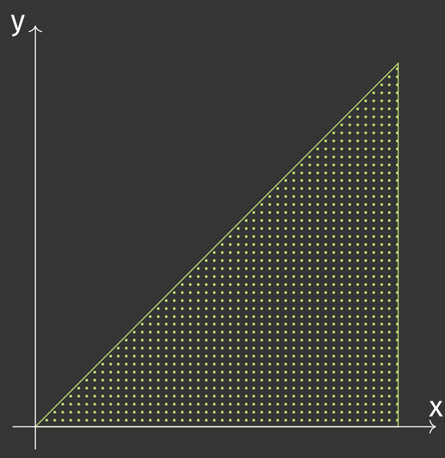
Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. *Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x, y) = C(x + y)$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź wartość C. Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Mamy dane

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$



i w pierwszej kolejności pytamy o wartość zmiennej C. Wiemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1,$$

a ponieważ my żyjemy w świecie trójkąta pod $y = x$, to mamy:

$$1 = \int_0^1 \int_0^x C(x+y)dydx = C\int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2})dx = C(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$$

czyli z moich bardzo precyzyjnych kalkulacji wynika, że $C = 2$.

Teraz pora na rozkłady brzegowe.

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}\left[(X,Y) \in A \times \mathbb{R}\right] = \int_{A\times\mathbb{R}} f(x,y)dydx = \int_A \int_{\mathbb{R}} 2(x+y)dydx =$$
$$= \int_A \int_0^x 2(x+y)dydx = \int_A 3x^2 dx$$

$$\mathbb{P}[Y \in B] = \mathbb{P}\left[(X,Y) \in \mathbb{R} \times B\right] = \int_{\mathbb{R}\times B} f(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}} \int_B f(x,y)dydx = \int_B \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_B \int_y^1 2(x+y)dxdy = \int_B [1 + 2y - 3y^2]dy$$

Na pytanie, czy są to zmienne niezależne odpowiadamy patrząc na gęstości tych dwóch zmiennych losowych. Żeby były niezależne, musiałoby zachodzić

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Tutaj mamy

$$f_X(x)f_Y(y) = 3x^2(1 + 2y - 3y^2) \neq 2(x+y)$$

więc są bardzo zależne.

Zadanie 4. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znajdź rozkład $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Czy X_n i Y są niezależne?

Mają rozkład wykładniczy, więc funkcja gęstości X_i to:

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

jeśli $t \geq 0$, wpp. mamy 0.

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Pokaż, że jeżeli X nie ma atomów, to P(X = Y) = 0.

Ponieważ X nie ma atomów, to zbiór $\{x : \mathbb{P}[X = x] > 0\} = \emptyset$.

Niech $\omega \in \Omega$ taki, że $X(\omega) = t = Y(\omega)$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Dla wygody, niech $T = \{t\}$. Ponieważ zdarzenia są niezależne, to:

$$\mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{P}[X \in T, Y \in T] = \mathbb{P}[X \in T]\mathbb{P}[Y \in T] = \mathbb{P}[X = t]\mathbb{P}[Y = t] = 0,$$

gdyż X jest bezatomowa.

Zadanie 7. Pokaż, że zmienne losowe $X_1, ..., X_n$ o gęstościach $f_1, ..., f_n$ są niezależne $\iff$ zmienna $X = (X_1, ..., X_n)$ ma gęstość

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n)$$

$$\text{Niezależne} \iff f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n)$$

$\implies$

Nirch $T_i \subseteq \mathbb{R}$, wtedy z niezależności zmiennych mamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 \in T_1, ..., X_n \in T_n] &= \int_{T_1} ... \int_{T_n} f(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_n = \\ &= \int_{T_1} f_1(x_1)dx_1 ... \int_{T_n} f_n(x_n)dx_n = \mathbb{P}[X_1 \in T_1]...\mathbb{P}[X_n \in T_n]\end{aligned}$$

rozpisując krok po kroku:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 \in T_1]...\mathbb{P}[X_n \in T_n] &= \int_{T_1} f_1(x_1)dx_1 ... \int_{T_n} f_n(x_n)dx_n = \int_{T_1} f_1(x_1) \int_{T_2} f_2(x_2)dx_2 dx_1 ... \int_{T_n} f_n(x_n)dx = \\ &= \int_{T_1}\int_{T_2} f_1(x_1)f_2(x_2)dx_2dx_1 ... \int_{T_n} f_n(x_n)dx_n = ... = \int_{T_1} ... \int_{T_n} f_1(x_1)...f_n(x_n)dx_1...dx_n = \\ &= \int_{T_1} ... \int_{T_n} f(x_1, ...x_n)dx_1...dx_n = \mathbb{P}\left[X_1 \int T_1, ..., X_n \in T_n\right]\end{aligned}$$

Ponieważ dzieje się tak dla dowolnych T_i, to funkcje pod całką muszą się równać (prawie wszędzie?). Czyli

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n).$$

$\impliedby$

Wychodzimy z tego, że

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n).$$

Wybierając dowolne $T_i \subseteq \mathbb{R}$ i całkując obie strony dostajemy:

$$\begin{aligned}\int_{T_1} ... \int_{T_n} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n &= \int_{T_1} ... \int_{T_n} f_1(x_1)...f_n(x_n)dx_1...dx_n = \\ &= \int_{T_1} ... \int_{T_{n-1}} f_1(x_1)...f_{n-1}(x_{n-1})dx_1...dx_n \int_{T_n} f_n(x_n)dx_n = ... \\ &= \int_{T_1} f_1(x_1)dx_1 ... \int_{T_n} f_n(x_n)dx_n\end{aligned}$$

Prawa strona równania to iloczyn $\mathbb{P}[X_1 \in T_1]...\mathbb{P}[X_n \in T_n]$, a lewa to $\mathbb{P}[X_1 \in T_1, ..., X_n \in T_n]$ i znowu dzieje się tak bez względu na wybór T_i, czyli mamy równość i zmienne są niezależne.

Zadanie 8. Z odcinka $[0,1]$ losujemy niezależnie w sposób jednostajny liczby $X_1, X_2, \ldots$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg $\{X_n\}$ jest gęsty w odcinku $[0,1]$.

Weźmy sobie dowolną kulę na odcinku $[0,1]$ o promieniu r i środku x: $B_r(x)$. Prawdopodobieństwo, że ani jedna ze zmiennych w nią trafi wynosi $1-2r$ (tutaj $r \leq \frac{1}{2}$). Losujemy niezależnie, więc zmienne są niezależne. Jeśli rozważymy pierwsze n zmiennych, to prawdopodobieństwo, że ani jedna z nich wpadnie w $B_r(x)$ wynosi:

$$\mathbb{P}\left[X_1 \in B_r(x)^c, X_2 \in B_r(x)^c, \ldots X_n \in B_r(x)^c\right] = \mathbb{P}\left[X_1 \in B_r(x)^c\right] \ldots \mathbb{P}\left[X_n \in B_r(x)^c\right] = (1-2r)^n$$

Chcemy użyć lematu Borela-Cantelliego, więc sprawdzamy sumę:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1-2r)^n = \frac{1}{1-(1-2r)} = \frac{1}{2r} < \infty$$

czyli z prawdopodobieństwem 1 skończenie wiele zmiennych nie trafi do $B_r(x)$, czyli nieskończenie wiele z nich do $B_r(x)$ trafi. Tak się dzieje dla każdej kuli, więc z prawdopodobieństwem 1 przetniemy dowolną kulę - tworzy się gęsty podzbiór $[0,1]$.

Zadanie 9. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze z parametrami λ i μ odpowiednio. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X+Y$.

Co wiemy? Że gęstość X to $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ gdy $t \geq 0$, a gęstość Y to $f_Y(t) = \mu e^{-\mu t}$ gdy $t \geq 0$. Dalej, wiem że

$$f(t_x, t_y) = f_X(t_x) f_Y(t_y)$$

a poszukuję $\mathbb{P}[X+Y=t]$

Skrypt mówi, że sploty is the way (ale miałam nawet ten sam pomysł!). Nie mogę puścić całki aż do ∞, bo wtedy mi się zeruje e^{t-s} dla $s > t$. Czyli:

$$\mathbb{P}[X+Y=t] = \int_0^t \mathbb{P}[X=a, Y=t-a]\, da,$$

a w mowie skryptowej:

$$\mathbb{P}[X+Y=t] = f_x \star f_y(t) = \int_0^t f_x(t-s) f_y(s) ds = \lambda\mu \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} e^{-\mu s} ds =$$
$$= \lambda\mu e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s - \mu s} ds = \lambda\mu e^{-\lambda t} \int_0^t e^{s(\lambda-\mu)} ds = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}[e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}]$$