

# Algebra 2R

a voyage into the unknown

koteczek

~

# Spis rzeczy niezbyt mądrych

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Teoria równań algebraicznych</b>                            | <b>4</b>  |
| 1.1 Rozwiązanie układów równań . . . . .                       | 4         |
| 1.2 Rozszerzanie ciał . . . . .                                | 6         |
| <b>Ciała skończone i pierwiastki z jedności</b>                | <b>10</b> |
| 2.1 Algebraiczne domknięcie ciała . . . . .                    | 11        |
| <b>Ciała proste, pierwiastki z jedności</b>                    | <b>13</b> |
| 3.1 Ciała proste . . . . .                                     | 13        |
| 3.2 Pierwiastki z jedności . . . . .                           | 13        |
| 3.3 Ciała skończone . . . . .                                  | 15        |
| <b>Rozszerzenia ciał</b>                                       | <b>17</b> |
| 4.1 Wymiar przestrzeni liniowej . . . . .                      | 17        |
| <b>Coś</b>   | <b>22</b> |
| 5.1 Wielomian rozkładu koła [cyclotomic polynomials] . . . . . | 22        |
| <b>Teoria Galois</b>   | <b>27</b> |



# Wykład 1: Teoria równań algebraicznych

Przez  $R, S$  będziemy oznaczać pierścienie przemienne z  $1 \neq 0$ , natomiast  $K, L$  będziemy rezerwować dla oznaczeń ciał.

## 1.1 Rozwiązywanie układów równań

Rozważmy funkcje  $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n]$ . Dla wygody będziemy oznaczać krotki przez  $\bar{X}$ , czyli  $R[X_1, \dots, X_n] = R[\bar{X}]$ . Pojawia się problem: *czy istnieje rozszerzenie pierścieni z jednością  $R \subseteq S$  takie, że układ  $U : f_1(\bar{X}) = \dots = f_m(\bar{X}) = 0$  ma rozwiązanie w pierścieniu  $S$ ?*

**Fakt 1.1.**  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq S$ , gdzie  $S$  jest rozszerzeniem pierścienia  $R$ , jest rozwiązaniem układu równań  $U \iff g(\bar{a}) = 0$  dla każdego wielomianu  $g \in (f_1, \dots, f_m) \triangleleft R[\bar{X}]$ .

**Dowód:**

$\Leftarrow$  Implikacja jest dość trywialna, jeśli każdy wielomian z  $(f_1, \dots, f_m)$ , czyli wytworzony za pomocą sumy i produktu wielomianów  $f_1, \dots, f_m$  zeruje się na  $\bar{a}$ , to musi zerować się też na każdym z tych wielomianów.

$\Rightarrow$  Rozważamy dwa przypadki:

1.  $(f_1, \dots, f_m) \ni b \neq 0$  i  $b \in R$ .

To znaczy w  $(f_1, \dots, f_m)$  mamy pewien niezerowy wyraz wolny. Wtedy mamy wielomian  $g \in (f_1, \dots, f_m)$  taki, że  $g(\bar{a}) \neq 0$ . Ale przecież  $g$  jest kombinacją wielomianów  $f_1, \dots, f_m$ , która na  $\bar{a}$  przyjmuje wartość 0. W takim razie dostajemy układ sprzeczny i przypadek jest do odrzucenia.

2.  $(f_1, \dots, f_m) \cap R = \{0\}$ . (nie ma wyrazów wolnych różnych od 0)

Teraz wiemy, że układ  $U$  jest niesprzeczny, a więc możemy skonstruować pierścień z 1  $S$  będący rozszerzeniem  $R$  [ $S \supseteq R$ ] oraz rozwiązanie  $\bar{a} \subseteq S$  spełniające nasz układ równań.

Niech  $S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m)$  i rozważmy

$$j : R[\bar{X}] \rightarrow S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m)$$

nazywane **przekształceniem ilorazowym**. Po pierwsze, zauważmy, że  $j \upharpoonright R$  jest 1 – 1, bo

$$\ker(j \upharpoonright R) = \ker(j) \cap R = (f_1, \dots, f_m) \cap R = \{0\}$$

i dlatego

$$j \upharpoonright R : R \xrightarrow{\cong} j[R] \subseteq S.$$

Z uwagi na ten izomorfizm, będziemy utożsamiać  $R, j[R]$ . W takim razie,  $S$  jest rozszerzeniem pierścienia  $R$ . Czyli mamy rozszerzenie pierścienia  $R$ .

Niech

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) = (j(X_1), \dots, j(X_n)) \subseteq S,$$

czyli jako potencjalne rozwiązanie rozważamy zbiór obrazów wielomianów stopnia 1 przez wcześniej zdefiniowaną funkcję  $j : R[\bar{X}] \rightarrow S$ . Tak zdefiniowane  $\bar{a}$  jest rozwiązaniem układu  $U$  w pierścieniu  $S$ , bo dla funkcji wielomianowej (czyli zapisywalnej jako wielomian)  $\hat{f}_i \in (f_1, \dots, f_m)$  mamy

$$\hat{f}_i(\bar{a}) = \hat{f}_i(j(X_1), \dots, j(X_n)) = j(\hat{f}_i(X_1, \dots, X_n)) = j(f_i) = 0.$$

**TUTAJ TRZEBA POUZASADNIAĆ KILKA RÓWNOŚCI, ALE MOŻE NIE BĘDĘ TEGO ROBIŁA NA AISD**

**Uwaga 1.2.** Skonstruowane powyżej rozwiązanie  $\bar{a}$  układu  $U$  ma następującą własność uniwersalności:

(☕) Jeżeli  $S' \supseteq R$  jest rozszerzeniem pierścienia z 1 i  $\bar{a}' = (a'_1, \dots, a'_m) \subseteq S'$  jest rozwiązaniem  $U$  w  $S'$ , to istnieje jedyny homomorfizm

$$h : R[\bar{a}] \rightarrow R[\bar{a}']$$

taki, że  $h \upharpoonright R$  jest identycznością na  $R$  i  $h(\bar{a}) = \bar{a}'$ . Wszystkie rozwiązania układów są homomorficzne.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\subseteq} & R[\bar{a}] \subseteq S \\ \downarrow \subseteq & \searrow h & \\ R[\bar{a}'] \subseteq S' & & \end{array}$$

Tutaj  $R[\bar{a}] \subseteq S$  jest **podpierścieniem generowanym przez  $R \cup \{\bar{a}\}$** , czyli zbiór:

$$R[\bar{a}] = \{f(\bar{a}) : f(\bar{X}) \in R[\bar{X}]\} \subseteq S$$

**Dowód:** Niech  $I = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}') = 0\} \subseteq S'$ . Oczywiście mamy, że  $I \triangleleft R[\bar{X}]$ , a więc

$$(f_1, \dots, f_m) \subseteq I.$$

Z twierdzenia o faktoryzacji wie

$$\begin{array}{ccc} R[\bar{X}] & \xrightarrow{j} & S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m) \\ \downarrow \phi & \nearrow (\exists ! h) h(\bar{a}) = \bar{a}' & \\ S' \supseteq R[\bar{a}'] & & \end{array}$$

Homomorfizm  $\phi : R[\bar{X}] \rightarrow R[\bar{a}']$  określamy wzorem

$$\phi(w) = w(\bar{a}),$$

a homomorfizm  $j$  jest jak wyżej odwzorowaniem ilorazowym. Widzimy, że

$$I = \ker(\phi)$$

$$\ker(j) = (f_1, \dots, f_m).$$

Z twierdzenia o homomorfizmie pierścieni dostajemy jedyny homomorfizm

$$h : R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m) \rightarrow R[\bar{a}]$$

taki, że  $h(\bar{a}) = \bar{a}'$ .

**Uwaga 1.3.** Jeśli  $I = (f_1, \dots, f_m)$ , to  $h : R[\bar{a}] \xrightarrow[\cong]{R} [\bar{a}']$ .

Wtedy mamy  $\ker \phi = \ker j$ , czyli  $\ker(h \circ j) = \ker \phi = \ker j$ , no a z tego wynika, że  $\ker h$  jest trywialne, czyli  $h$  jest apimorfizmem (1-1). Z drugiej strony,  $\text{Im } \phi = \text{Im}(h \circ j)$ , a  $\phi$  jest epimorfizmem ("na"), więc również  $h$  musi być "na".

Założmy, że  $S \supseteq R$  jest rozszerzeniem pierścienia oraz  $\bar{a} \in S^n$ . Wtedy:

1. ideał  $\bar{a}$  nad  $R$  definiujemy jako

$$I(\bar{a}/R) = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}) = 0\}$$

2.  $\bar{a}$  nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** układu  $U$ , jeśli ideał

$$I(\bar{a}/R) = (f_1, \dots, f_m).$$

**Uwaga 1.4.** W sytuacji jak z definicji wyżej, gdy  $U$  jest układem niesprzecznym, wtedy  $\bar{a}$  jest rozwiązaniem ogólnym układu  $U \iff$  zachodzi warunek (☕).

**Dowód:** Ćwiczenia.

## 1.2 Rozszerzanie ciał

Dla  $K \subseteq L$  ciał i  $\bar{a} \subseteq L$  definiujemy **ideał  $\bar{a}$  nad  $K$**  jako:

$$I(\bar{a}/L) := \{f(X_1, \dots, X_n) \in K[\bar{X}] : f(\bar{a}) = 0\},$$

to znaczy generujemy ideał w wielomianach nad  $K$  zawierający wszystkie wielomiany (niekoniecznie tylko jednej zmiennej) zerujące się w  $\bar{a}$ .

**Przykład:**

Dla  $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}, n = 1, a_1 = \sqrt{2}$  mamy

$$I(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) = \{f(x^2 - 2) : f \in \mathbb{Q}[X]\} = (x^2 - 2) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$$

Dalej, definiujemy

$$K[\bar{a}] := \{f(\bar{a}) : f \in K[\bar{X}]\}$$

czyli **podpierścień  $L$  generowany przez  $K \cup \{\bar{a}\}$**  oraz  $K(\bar{a})$ , czyli **podciało  $L$**  generowane przez  $K \cup \{\bar{a}\}$ :

$$K(\bar{a}) := \{f(\bar{a}) : f \in K(X_1, \dots, X_n) \text{ i } f(\bar{a}) \text{ dobrze określone}\}.$$

Tutaj  $K(X_1, \dots, X_n)$  to *ciało ułamków pierścienia*  $K[\bar{a}]$  w ciele  $L$  (czyli najmniejsze ciało, że pierścień może być w nim zanurzony). Czasami oznaczamy to przez  $K[\bar{a}]_0$ .

**Uwaga 1.5.** Niech  $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$  będą ciałami. Wybieramy  $\bar{a}_1 \in L_1$  i  $\bar{a}_2 \in L_2$ ,  $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = n$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. istnieje izomorfizm  $\phi : K[\bar{a}_1] \rightarrow K[\bar{a}_2]$  taki, że  $\phi \upharpoonright K = \text{id}_K$  oraz  $\phi(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$ .
2.  $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$ .

**Dowód:**

1  $\implies$  2

Implikacja jest jasna, bo dla  $g(\bar{X}) \in K[\bar{X}]$ , bo  $g(\bar{a}_1) = 0$  w  $K[\bar{a}_1] \iff g(f(\bar{a}_1)) = 0$ , a  $f(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$ .



1  $\Leftarrow$  2

Zwróćmy uwagę na odwzorowanie ewaluacji  $\bar{a}_1$

$$\phi_{\bar{a}_1} : K[\bar{X}] \xrightarrow{\text{"na"}} K[a_1]$$

zadane wzorem

$$\phi(w(\bar{X})) = w(\bar{a}_1).$$

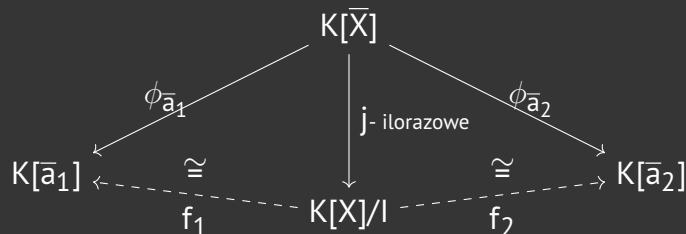
Mamy

$$\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = I(\bar{a}_1/K).$$

Tak samo dla  $\bar{a}_2$  możemy określić analogicznie odwzorowanie ewaluacyjne  $\phi_{\bar{a}_2} : K[\bar{X}] \rightarrow K[\bar{a}_2]$ . Wtedy

$$I(\bar{a}_2/K) = \ker(\phi_{\bar{a}_2}),$$

ale ponieważ  $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$ , to  $\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = \ker(\phi_{\bar{a}_2})$ . Oznaczmy  $I = I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$ . Widzimy, że  $\phi_{\bar{a}_i} \upharpoonright K = \text{id}_K$ .



Niech  $f = f_2 f_1^{-1} : K[\bar{a}_1] \rightarrow K[\bar{a}_2]$  jest funkcją spełniającą warunki punktu 1.

**MOŻE TUTAJ ŁADNIE SPRAWDZIĆ ŻE NAPRAWDĘ JEST TO DOBRZE SPEŁNIAJĄCA WARUNKI FUNKCJA?**

**Uwaga.** Niech  $I \triangleleft K[\bar{X}]$  *noetherowskiego* pierścienia  $K[\bar{X}]$ . Niech  $I = (f_1, \dots, f_m)$  dla pewnych  $f_i \in K[\bar{X}]$ . Wtedy istnieje rozszerzenie pierścienia  $S \supseteq K$  oraz  $\bar{a} \subseteq S$  - rozwiązanie ogólne układu  $f_1(\bar{X}) = \dots = f_m(\bar{X}) = 0$  takie, że  $I(\bar{a}/K) = I$ .

**Dowód:** Uwaga 1.4.

**Twierdzenie 1.6.** Niech  $I \triangleleft K[\bar{X}]$ . Wtedy istnieje ciało  $L \supseteq K$  oraz  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq L$  takie, że  $f(\bar{a}) = 0$  dla każdego  $f \in I$ .

**Dowód:** Niech  $I \subseteq M \triangleleft K[\bar{X}]$  będzie ideałem maksymalnym. Niech  $L = K[\bar{X}]/M$  i określmy przekształcenie ilorazowe

$$j : K[\bar{X}]/M \rightarrow L = K[\bar{X}]/M.$$

Ponieważ  $M \cap K = \{0\}$  (bo inaczej w ideale byłby wielomian odwracalny), to  $j \upharpoonright K : K \rightarrow L$  jest funkcją  $1 \mapsto 1$ , czyli

$$j \upharpoonright K : K \xrightarrow{1 \mapsto 1} j[K] \subseteq L.$$

Możemy utożsamić  $K$  z  $j[K]$ , czyli  $K \subseteq L$ . Niech  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  takie, że dla każdego  $i \in [n]$

$$a_i = j(X_i) \in L.$$

Wtedy  $g(\bar{a}) = 0$  dla każdego  $g(\bar{X}) \in M \supseteq I$  (bo inaczej mielibyśmy wyrazy wolne).

**Wniosek 1.7.** Niech  $f \in K[X]$  stopnia  $> 0$ . Wtedy istnieje ciało  $L \supseteq K$  rozszerzające ciało  $K$  takie, że  $f$  ma pierwiastek w ciele  $L$ .

### Przykłady:

1. Rozpatrzmy ciało  $K = \mathbb{Q}$  i  $f(X) = X - 2$ . Wtedy  $I = (f) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$  jest ideałem maksymalnym, bo jest on pierwszy (w tym wypadku nierozkładalny). Równanie  $f = 0$  ma rozwiązanie ogólne w pierścieniu ilorazowym

$$\mathbb{Q}[X]/I \cong \mathbb{Q}.$$

Czyli nie zawsze musimy rozszerzać ciało do czegoś nowego.

2.  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[z]$  dla każdego  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , co jest na liście zadań.

Założmy, że  $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$  są rozszerzeniami ciała. Wtedy mówimy, że  $L_1$  jest izomorficzne z  $L_2$  nad  $K$  [ $L_1 \cong_K L_2$ ]  $\iff$  istnieje izomorfizm  $f : L_1 \rightarrow L_2$  taki, że  $f|_K = \text{id}_K$ .

### Fakt 1.8.

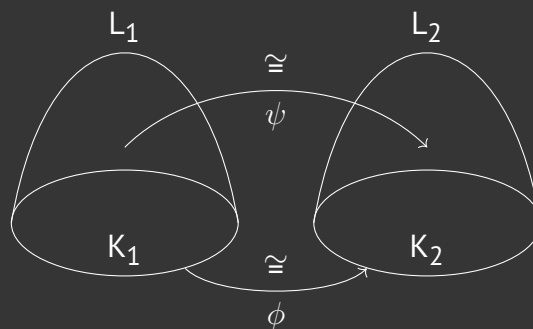
1. Założmy, że  $f(X) \in K[X]$  jest nierozkładalny. Niech  $L_1 = K(a_1), L_2 = K(a_2)$  i  $f(a_i) = 0$  w  $L_i$ . Wtedy  $L_1 \cong_K L_2$ .

2. Ogólniej: założmy, że  $\phi : K_1 \rightarrow K_2$  jest izomorfizmem i  $f_1 \in K_1[X], f_2 \in K_2[X], \phi(f_1) = f_2, f_i$  jest nierozkładalne. Dodatkowo założmy, że  $L_1 = K_1(a_1)$  i  $L_2 = K_2(a_2)$ , gdzie  $f_i(a_i) = 0$  w  $L_i$ . Wtedy istnieje izomorfizm  $\psi \in \phi : L_1 \rightarrow L_2$  taki, że  $\psi(a_1) = a_2$ .

### Dowód:

1.  $I(a_1/K) = (f) = I(a_2/K)$ , stąd na mocy 1.5 mamy  $K(a_1) \cong_K K(a_2)$ . Po dowodzie przypadku 2. możemy uzasadniać, że jest to szczególny przypadek tego ogólniejszego stwierdzenia właśnie.

2. Zaczniemy od rozrysowania tej sytuacji:



Izomorfizm  $\phi : K_1[X] \xrightarrow[\cong]{K_2} [X]$  indukuje nam przekształcenie

$$K_1[X]/(f_1) \xrightarrow[\phi]{\cong} K_2[X]/(f_2),$$

bo  $\phi(f_1) = f_2$ . Wiemy, że  $f_i$  jest nierozkładalne, czyli

$$I(a_i/K_i) = (f_i) \triangleleft K_i[X]$$

jest ideałem maksymalnym. Mamy

$$L_i = K_i(a_i) = K_i[a_i] \cong K[X]/I(a_i/K_i).$$



$$\begin{array}{ccc}
 K_1[X] & \xrightarrow[\phi]{\cong} & K_2[X] \\
 & \downarrow & \\
 K_1[X]/(f_1) & \xrightarrow[\phi]{\cong} & K_2[X]/(f_2) \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\
 L_1 = K_1(a_1) & \xrightarrow[\psi]{\cong} & L_2 = K_2(a_2) \\
 \cup & & \cup \\
 K_1 & \xrightarrow[\phi]{} & K_2
 \end{array}$$

## Wykład 2: Ciała skończone i pierwiastki z jednośc

Ciało  $L \supseteq K$  nazywamy **ciałem rozkładu nad  $K$**  wielomianu  $f \in K[X]$ , gdy spełnione są warunki:

1.  $f$  rozkłada się w pierścieniu  $L[X]$  na czynniki liniowe (stopnia 1)
2. Ciało  $L$  jest rozszerzeniem ciała  $K$  o elementy  $a_1, \dots, a_n$ , gdzie  $a_1, \dots, a_n$  to wszystkie pierwiastki  $f$  w  $L$ .

**Przykład:** Jeżeli  $\deg(f) = 0$ , to nie istnieje ciało rozkładu  $f$ .

**Wniosek 2.1.** Załóżmy, że  $f \in K[X]$  jest wielomianem stopnia  $> 0$ . Wtedy

1. istnieje  $L$ : ciało rozkładu  $f$  nad  $K$ ,
2. to ciało jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu nad  $K$ .

**Dowód:**

1. Dowód przez indukcję względem stopnia  $f$

Jako przypadek bazowy rozważmy  $f$  takie, że  $\deg(f) = 1$ . Wtedy  $L = K$  i wszystko wniosek jest spełniony.

Założmy teraz, że stopień wielomianu  $f$  jest  $> 1$  i też zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia  $< \deg(f)$  i wszystkich ciał  $K'$ . Teraz z 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie ciała  $L \supseteq K$  takie, że  $f$  ma pierwiastek w  $L$ . Nazwijmy ten pierwiastek  $a_0$  i niech

$$K' = K(a_0).$$

Ponieważ  $K'[X]$  wielomian  $f$  ma pierwiastek  $a_0$ , to możemy zapisać

$$f = (x - a_0)f_1$$

dla pewnego  $f_1 \in K'[X]$  i  $\deg(f_1) < \deg(f)$ . Z założenia indukcyjnego dla  $f_a$  istnieje  $L' = K'(a_1, \dots, a_r)$  - ciało rozkładu wielomianu  $f_1$  nad  $K'$ . Wtedy

$$L = K(a_0, \dots, a_r)$$

jest ciałem rozkładu  $f$  nad  $K$ .

2. Udowodnimy wersję ogólniejszą:

(🐉) Jeśli  $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$  jest izomorfizmem nad ciałem i  $f_i \in K_i[X]$  jest wielomianem stopnia  $> 0$ ,  $\phi(f_1) = f_2$ , to wtedy istnieje  $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$  izomorfizm nad ciałami rozkładu  $f_i$  w  $K_i$  rozszerzający izomorfizm  $\phi$  (to znaczy  $\phi \subseteq \psi$ ).

Wykorzystamy indukcję po  $\deg(f)$ . W przypadku bazowym mamy  $\deg(f) = 1$ , czyli  $L_1 = K_1, L_2 = K_2$  i  $\phi = \psi$ .

Teraz niech  $\deg(f) > 1$  i załóżmy, że dla wszystkich ciał  $K'$  oraz wielomianów stopnia  $< \deg(f)$  jest to prawdą. Niech

$$f_i = f'_i \cdot g_i,$$

gdzie  $f'_i, g_i \in K_i[X]$  i  $g_i$  jest wielomianem nierozkładalnym w  $K$ . Wiemy już, że istnieje  $a_i \in L_i$  będące pierwiastkiem wielomianu  $g_i$ .

Z faktu 1.8:(2), wiemy, że istnieje wtedy izomorfizm

$$\psi_0 : K_1(a_1) \xrightarrow{\cong} K_2(a_2)$$

taki, że  $\psi_0(a_1) = a_2$  i  $\phi \subseteq \psi_0$ .

$$\begin{array}{ccc} K_1(a_1) & \xrightarrow[\exists \psi_0]{\cong} & K_2(a_2) \\ \parallel & & \parallel \\ K'_1 & & K'_2 \\ \cap & & \cap \\ L_1 & \xrightarrow[\exists \psi_1]{\cong} & L_2 \end{array}$$

Z założenia wiemy, że  $L_i$  to ciało rozkładu  $f'_i$  nad  $K_i$ . W takim razie z założenia indukcyjnego istnieje izomorfizm

$$\psi_1 : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$$

taki, że  $\psi \subseteq \psi_0$  i to już jest koniec.

**Wniosek 2.2.** Jeśli  $f_1 \in K_1[X]$  i  $f_2 \in K_2[X]$  są nierozkładalnymi wielomianami,  $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$  izomorfizmem i  $\phi(f_1) = f_2$ , a  $L_1, L_2$  to ciała rozkładu  $f_1, f_2$  odpowiednio nad  $K_1$  i  $K_2$ ,  $a_i \in L_i$  to pierwiastek  $f_i$ , to wtedy istnieje  $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$  takie, że  $\psi(a_1) = a_2$ .

**Dowód:** Wynika z dowodu stwierdzenia .

## 2.1 Algebraiczne domknięcie ciała

Ciało  $L$  jest **algebraicznie domknięte**  $\iff$  dla każdego  $f \in L[X]$  o stopniu  $> 0$  istnieje pierwiastek  $f$  w  $L$ . To znaczy każdy wielomian rozkłada się na czynniki liniowe nad  $L$ .

**Przykład:**

- $\hookrightarrow \mathbb{C}$  jest algebraicznie domknięte.
- $\hookrightarrow \mathbb{R}$  nie jest algebraicznie domknięte, gdyż  $x^2 + 1$  nie ma pierwiastka rzeczywistego.
- $\hookrightarrow \mathbb{Q}[i]$  nie jest algebraicznie domknięte, bo  $x^2 - 2$  nie ma pierwiastka.

**Twierdzenie 2.3.** Każde ciało  $K$  zawiera się w pewnym ciele algebraicznie domkniętym.

**Dowód:**

Jak mamy wielomian nad ciałem, to istnieje rozszerzenie ciała do tego wielomianu. I dalej leci kombinatoryka.

**Lemat:** Dla każdego ciała  $K$  istnieje  $L \supseteq K$  takie, że  $(\forall f \in K[X])$  stopnia  $> 0$ ,  $f$  ma pierwiastek w  $L$ .

Rozważmy dobry porządek na zbiorze wielomianów z  $K[X]$  stopnia  $> 0$

$$\{f \in K[X] : \deg(f) > 0\} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Tutaj  $\alpha, \kappa$  to liczby porządkowe, niekoniecznie skończone. Skonstruujmy rosnący ciąg rozszerzeń ciał  $\{K_\alpha : \alpha < \kappa\}$  taki, że

- $\hookrightarrow K \subseteq K_\alpha \subseteq K_\beta$  dla  $\alpha < \beta < \kappa$
- $\hookrightarrow f_\alpha$  ma pierwiastek w  $K_{\alpha+1}$ .

Dowód przez indukcję pozaskończoną. Dla  $K_0 = K$ .

Założmy, że  $\alpha < \kappa$  i mamy  $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$  spełniając warunki powyżej. Niech  $K' = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$ . Musimy pokazać, że  $K'$  jest ciałem.

1.  $\alpha$  to liczba graniczna. Definiujemy  $K' = \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$  jako zbiór.

Musimy określić działania w  $K'$ . Niech  $x, y \in K'$ , wtedy istnieje  $\beta < \alpha$  takie, że  $x, y \in K_\beta$ . Czyli  $x + y \in K_\beta \subseteq K'$  i  $xy \in K_\beta \subseteq K'$ . W takim razie  $K'$  jest rozszerzeniem ciała  $K_\beta$ .

Teraz definiujemy  $K_\alpha = K'$  i otrzymujemy pożądane rozszerzenie ciała.

2.  $\alpha = \beta + 1$  to następnik, wtedy  $K' = K_\beta$ .

Wielomian  $f_\alpha$  jest wielomianem nad  $K \subseteq K'$ . Z wniosku 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie  $K_\alpha \supseteq K$  takie, że  $f_\alpha$  ma pierwiastek w  $K_\alpha$ .

L definiujemy jako sumę po wyżej udowodnionej konstrukcji:

$$L = \bigcup_{\alpha < \kappa} K_\alpha$$

i to ciało spełnia nasz lemat.

Wracamy teraz do dowodu twierdzenia 2.3 i niech  $(L_n, n < \omega)$  będzie rosnącym ciągiem ciał takim, że

$$\hookrightarrow L_0 = K$$

$$\hookrightarrow L_{n+1} \supseteq L_n, \text{ gdzie } L_{n+1} \text{ dane jest przez lemat, to znaczy } (\forall f \in L_n[X]) f \text{ ma pierwiastek w } L_{n+1}.$$

Niech

$$L_\infty = \bigcup_{n < \omega} L_n \supseteq K.$$

Jest to ciało, ponieważ suma rosnącego ciągu ciał jest ciałem. Dalej mamy, że jest to ciało algebraicznie domknięte, gdy dowolny  $f \in L_\infty[X]$  ma stopień skończony  $> 0$ , czyli istnieje  $n$  takie, że  $f \in L_n[X]$ . A więc  $f$  ma wszystkie pierwiastki w  $L_{n+1} \subseteq L_\infty$ .

# Wykład 3: Ciała proste, pierwiastki z jedności

## 3.1 Ciała proste

**Uwaga 3.0.** Załóżmy, że mamy ciała  $K \subseteq L$ . Wtedy

$$\hookrightarrow \text{char}(K) = \text{char}(L)$$

$$\hookrightarrow 0_K = 0_L \text{ oraz } 1_K = 1_L$$

$$\hookrightarrow K^* = K \setminus \{0\} \subseteq L^* = L \setminus \{0\} \text{ oraz dla } x \in K \text{ } -x \text{ w } K \text{ jest równe } -x \text{ w } L.$$

$K$  jest **ciałem prostym** wtedy i tylko wtedy, gdy  $K$  nie zawiera żadnego właściwego podciała.

**Przykład:**

$$\hookrightarrow \mathbb{Q}, \text{ gdzie } \text{char}(\mathbb{Q}) = 0 \text{ to ciało proste nieskończone.}$$

$$\hookrightarrow \text{Ciałem prostym skończonym jest na przykład } \mathbb{Z}_p \text{ dla liczby pierwszej } p, \text{ wtedy } \text{char}(\mathbb{Z}_p) = p.$$

**Uwaga 3.1.**

1. Każde ciało zawiera jedyne podciało proste
2. Z dokładnością do  $\cong \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$  to wszystkie ciała proste.

**Przykład:** Załóżmy, że  $K$  jest skończone. Wtedy  $K^*$  też jest skończone rzędu  $|K^*| = n < \infty$ . Później dowiemy się, że  $|K| = p^k$ , a więc  $|K^*| = p^k - 1$ . Wiemy, że dla każdego  $x \in K^*$  zachodzi  $x^n = 1$ .

## 3.2 Pierwiastki z jedności

Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z  $1 \neq 0$ . Mamy następujące definicje:

$$1. a \in R \text{ jest } \textbf{pierwiastkiem z 1} \text{ stopnia } n > 0 \iff a^n = 1$$

$$2. \mu_n(R) = \{a \in R : a^n = 1\} \text{ jest } \textbf{grupą pierwiastków z 1} \text{ stopnia } n$$

$$3. \mu(R) = \{a \in R : (\exists n) a^n = 1\} = \bigcup_{n>0} \mu_n(R) \text{ jest } \textbf{grupą pierwiastków z 1}$$

$$4. a \text{ jest } \textbf{pierwiastkiem pierwotnym} \text{ [primitive root] stopnia } n \text{ z } 1 \iff a \in \mu_n(R) \text{ oraz dla każdego } k < n \text{ } a \notin \mu_k(R).$$

**Uwaga 3.2.**

1.  $\mu_n(R) \triangleleft R^*$  jest grupą jednostek pierścienia
2.  $\mu(R) \triangleleft R^*$
3.  $\mu(R)$  jest **torsyjną grupą abelową** (każdy element jest pierwiastkiem z 1).

**Przykłady**

$$1. \mu(\mathbb{C}) = \bigcup_{n>0} \mu_n(\mathbb{C}) \leq (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot) \triangleleft \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ jest nieskończona.}$$

$$2. \mu(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Q}, +) / (\mathbb{Z}, +), \text{ bo } f : \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{homo}]{\text{"na"}} \mu(\mathbb{C}) \text{ taki, że } f(w) = \cos(w2\pi) + i \sin(w2\pi) \text{ ma jądro } \ker(f) = \mathbb{Z}.$$

$$3. \mu(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$$

$$4. \mu_n(K) = \{\text{zera wielomianu } x^n - 1\}. \text{ Ten wielomian będziemy oznaczali } w_n(x) = x^n - 1.$$

### Uwaga 3.3.

1. Jeśli  $\text{char}(K) = 0$ , to  $w_n(x) = x^n - 1$  ma tylko pierwiastki jednokrotne w  $K$  [simple roots]
2. Jeśli  $\text{char}(K) = p > 0$  i  $n = p^l n_1$  takie, że  $p \nmid n_1$ , to wszystkie pierwiastki  $w_n(x) = x^n - 1$  mają krotność  $p^l$  w  $K$ .

#### Dowód:

1. Niech  $a \in K$  takie, że  $w_n(a) = 0$ . Z twierdzenia Bezouta mamy, że

$$w_n(x) = x^n - 1 = x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = (x - a)v_n(x),$$

gdzie  $v_n(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ .

Z tego, że  $\text{char}(K) = 0$  wynika, że  $v_n(a) = na^{n-1} \neq 0$ , skąd wynika, że  $a$  jest jednokrotnym pierwiastkiem  $w_n(x)$ .

2. Jesteśmy w ciele  $K$  o  $\text{char}(K) = p$ . Niech  $n = p^l n_1$ . Rozważmy wielomian

$$w_n(X) = X^n - 1 = (X^{n_1})^{p^l} - 1^{p^l} = (X^{n_1} - 1)^{p^l} = w_{n_1}(X)^{p^l}.$$

Czyli  $\mu_n(K) = \mu_{n_1}(K)$ . Załóżmy, że  $a \in K$  to pierwiastek wielomianu  $w_n(X)$ . Wtedy  $a$  jest też pierwiastkiem wielomianu  $w_{n_1}$  w ciele  $K$ . Wtedy

$$w_{n_1}(X) = (X - a)v_{n_1}(X),$$

$v_{n_1}$  jak w przypadku wyżej. Wówczas

$$v_{n_1}(a) = n_1 a^{n_1-1} \neq 0,$$

bo  $p \nmid n_1$ . Jeśli  $a$  jest 1-krotnym pierwiastkiem  $w_{n_1}(X)$ , to jest on  $p^l$ -krotnym pierwiastkiem  $w_n(X)$ .

**Twierdzenie 3.4.** Niech  $G < \mu(K)$  i  $G$  jest podgrupą skończoną o  $|G| = n$ . Wtedy

1.  $G = \mu_n(K)$
2.  $G$  jest cykliczna
3. Jeśli  $\text{char}(K) = p > 0$ , to  $p \nmid n$ .

#### Dowód

1. Jeśli  $|G| = n$ , to dla każdego  $x \in G$  mamy  $x^n = 1$ . Z tego wynika, że  $G \subseteq \mu_n(K)$ , ale  $|\mu_n(K)| \leq n$ , czyli  $G = \mu_n(K)$ .

2. Chcemy pokazać, że dla wielomianu  $w_n(X)$  mamy  $n$  różnych pierwiastków. Wystarczy pokazać, że istnieje  $x \in G$  taki, że  $\text{ord}(x) = n$ .

Założmy nie wprost, że dla każdego  $x \in G$   $\text{ord}(x) < n$ . Niech

$$k = \max\{\text{ord}(x) : x \in G\}.$$

Niech  $x_0 \in G$  takie, że  $\text{ord}(x_0) = k$ . Wtedy

$$(\forall y \in G) \text{ord}(y) \mid k.$$

Gdyby tak nie było, to istniałby  $y \in G$ ,  $\text{ord}(y) \nmid k$ . Czyli istnieje liczba pierwsza  $p$  taka, że  $l$  jest podzielne przez wyższą potęgę  $p$  niż  $k$ . To oznacza, że  $l = p^\alpha l'$  i  $k = p^\beta k'$ , gdzie  $p \nmid l'$  i  $\alpha > \beta$ .

Rozważmy  $y' = y^l$ . Skoro  $y$  ma rząd  $l$ , to  $\text{ord}(y') = p^\alpha$ , a dla  $x'_0 = x_0^{p^\beta}$  mamy  $\text{ord}(x') = k'$ . Wobec tego  $\text{ord}(x'_0 y') = p^\alpha \cdot k'$ , ale to jest większe od  $k$  i dostajemy sprzeczność.

3. Wiemy, że wszystkie pierwiastki  $w_n = x^n - 1$  są jednokrotne, bo jest ich w tym przypadku dokładnie  $n$  (z poprzedniego punktu). Z uwagi 3.3, że jeśli  $n = p^l n_1$ , to pierwiastki wielomianu  $w_n(x)$  mają krotność  $p^l$ . Ale w tym przypadku pierwiastki mają krotność jeden, czyli  $p^l = 1$  i  $n = 1 \cdot n_1$ , gdzie  $p \nmid n_1$ .

**Wniosek 3.5.** Jeśli  $a \in \mu_n(K)$  jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia  $n > 1$ , to  $a$  generuje  $\mu_n(K)$ .

**Dowód:**

$\mu_n(K) \supseteq \langle a \rangle = \mu_k(K)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ . Ale ponieważ  $a$  było pierwiastkiem pierwotnym z 1, to musimy mieć  $n = k$ .

### 3.3 Ciała skończone

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $K$  będzie ciałem skończonym. Wtedy

1.  $\text{char}(K) = p \implies |K| = p^n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$
2. Dla każdego  $n > 0$  istnieje dokładnie jedno ciało  $K$  takie, że  $|K| = p^n$  z dokładnością do izomorfizmu.

Ciało mocy  $p^n$  będziemy oznaczać  $F(p^n)$ .

**Dowód:**

1. Skoro  $\text{char}(K) = p$ , to  $\mathbb{Z}_p \subseteq K$  jest najmniejszym podciałem prostym ciała  $K$ . W takim razie,  $K$  jest skończoną przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_p$ . Jeśli  $n = \dim_{\mathbb{Z}_p}(K)$ , to  $K$  jest izomorficzne z  $\mathbb{Z}_p^n$ , jako przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{Z}_p$ . W takim razie  $|K| = p^n$ .

2.

*Istnienie:*

Niech  $n > 0$ . Rozważmy

$$w_{p^n-1}(x) = x^{p^n-1} \in \mathbb{Z}_p[X].$$

Niech  $L \supseteq \mathbb{Z}_p$  będzie ciałem rozkładu wielomianu  $w_{p^n-1}$ , a  $K = \{0\} \cup \{\text{pierwiastki } w_{p^n-1}\}$ . Wtedy

$$|K| = 1 + p^n - 1 = p^n,$$

czyli mamy potencjalne ciało rzędu  $p^n$ . Wystarczy więc pokazać, że  $K$  jest ciałem.

Niech  $f : L \xrightarrow{1-1} L$  będzie funkcją Frobeniusa  $x \mapsto x^p$ . Teraz niech  $f^n = f \circ \dots \circ f$ ,  $f^n(x) = x^{p^n}$ . Jest to monomorfizm, bo składamy ze sobą  $n$  takich samych funkcji  $1-1$ . Dla  $a \in L$  mamy

$$(a^{p^n-1} = 1 \vee a = 0) \iff a \in K.$$

Co więcej,  $a^{p^n-1} = 1 \iff a^{p^n} = a \iff f^n(a) = a$ , czyli  $K = \{a \in L : f^n(a) = a\}$  jest zbiorem punktów stałych morfizmu  $f^n$ , czyli jest ciałem, czego dowód jest pozostawiony na ćwiczenia.

*Jedyność  $K$ :*

Ciało  $K$  stworzone jak wyżej jest ciałem rozkładu  $w_{p^n-1}(x)$  nad  $\mathbb{Z}_p$ .



Założmy nie wprost, że  $K'$  to inne ciało mocy  $p^n$ . Bez straty ogólności  $\mathbb{Z}_p \subseteq K'$ . Niech  $x \in K'$ . wiemy, że  $x = 0$  lub  $x^{p^n-1} = 1$ . W takim razie  $w_{p^n-1}$  rozkłada się nad  $K'$  na czynniki liniowe. Zatem  $K'$  jest również ciałem rozkładu  $w_{p^n-1}$  nad  $\mathbb{Z}_p$ .

Z wniosku 2.1.(2) mamy, że dwa ciała rozkładu nad jednym wielomianem są izomorficzne i  $K \cong K'$  nad  $\mathbb{Z}_p$  i mamy sprzeczność.

# Wykład 4: Rozszerzenia ciał

**Definicja 4.1.** Niech  $K \subseteq L$  będą ciałami i  $a \in L \setminus K$ .

- $\hookrightarrow$  Jeżeli  $a$  jest algebraiczny nad  $K$ , to istnieje  $f \in K[X]$  stopnia  $> 0$  i  $f(a) = 0$
- $\hookrightarrow a$  jest przestępny nad  $K$  [transcendental]  $\iff a$  nie jest algebraiczny.
- $\hookrightarrow$  Rozszerzenie  $L \supseteq K$  jest algebraiczne  $\iff$  dla każdego  $a \in L$   $a$  jest algebraiczny nad  $K$ .
- $\hookrightarrow$  Rozszerzenie jest przestępne  $\iff$  nie jest algebraiczne.
- $\hookrightarrow$  Niech  $a \in \mathbb{C}$ . Wtedy  $a$  jest algebraiczna, gdy  $a$  jest algebraiczna nad  $\mathbb{Q}$ .

**Przykłady:**

1. W  $\mathbb{C}$  na  $i$  jest pierwiastkiem algebraicznym wielomianu  $x^2 + 1$ , a  $\sqrt[n]{d}$  jest pierwiastkiem  $x^n - d$ .
2. Ciało  $F(p^n)$  ma charakterystykę  $p$  i  $F(p) \subseteq F(p^n)$  jest rozszerzeniem ciał, które jest algebraiczne. Dla dowolnego  $a \in F(p^n)$  to jest ono pierwiastkiem wielomianu  $X^{p^n} - X$ , czyli  $a$  jest algebraiczne nad  $F(p)$ .
3. Pierwiastki przestępne to na przykład  $e, \pi, E^\pi$ , aczkolwiek nie jesteśmy pewni tego ostatniego [doczytać w S. Lang, Algebra].
4. Rozważamy  $K \subseteq L = K(X)$ , czyli pierścień ułamków. Weźmy  $x \in K(X)$  - przestępny nad  $K$ . Załóżmy, że istnieje wielomian  $f \in K[X]$  różny od 0. I założmy, że  $0 = \widehat{f}(X)$  to funkcja wielomianowa.

$$0 = \widehat{f}(X) = f \neq 0$$

i jest to sprzeczność.

**Uwaga 4.2.** Niech  $a$  jak wyżej. Wtedy  $a$  jest algebraiczny nad  $K \iff I(a/K) \neq \{0\}$  jako ideał  $K[X]$ .

## 4.1 Wymiar przestrzeni liniowej

Niech  $K \subseteq L$  będzie rozszerzeniem ciała  $K$ . Wtedy  $L$  jest **przestrzenią liniową nad  $K$** . Definiujemy stopień rozszerzenia [coś innego jak indeks przy grupach]

$$[L : K] := \dim_K(L)$$

jako **wymiar przestrzeni liniowej** nad  $K$ .

**Uwaga 4.3.** Niech  $a \in L \setminus K$ . Następujące warunki są równoważne:

1.  $a$  jest algebraiczny nad  $K$
2.  $K[a] = K(a)$ , to znaczy  $K[a]$  jest ciałem (usuwanie niewymierności z mianownika)
3.  $[K(a) : K] = \dim_K(a) < \infty$

**Dowód:**

$$1 \implies 2$$

Wystarczy pokazać, że  $K[a]$  jest ciałem. Rozważamy  $I(a/K) \triangleleft K[X]$ . Wiemy, że  $K[X]$  jest PID, więc potrzebujemy, aby  $I(a/K)$  było ideałem pierwszym.

$$f \cdot g \in I(a/K) \iff 0 = \widehat{f \cdot g}(a)$$

gdzie daszek oznacza homomorfizm ewaluacji, który jest również homomorfizmem w punkcie. Czyli

$$\widehat{f \cdot g}(a) = \widehat{f}(a)\widehat{g}(a) = 0 \iff \widehat{f}(a) = 0 \vee \widehat{g}(a) = 0.$$

Czyli  $I(a/K)$  jest ideałem pierwszym w pierścieniu PID, więc jest ideałem maksymalnym. Mamy więc, że

$$K[a]/I(a/K)$$

jest ciałem, więc jest izomorficzne z  $K(a)$ , bo  $K[a]$  to najmniejszy pierścień generowany przez  $K \cup \{a\}$  (tutaj pierścień), a  $K(a)$  to najmniejsze ciało generowane przez  $K \cup \{a\}$ .

2  $\implies$  3

Założmy, że  $a \neq 0$ . Wtedy  $a^{-1} \in K[a]$ , czyli istnieje wielomian  $f \in K[X]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x^i, \quad b_n \neq 0$$

taki, że  $a^{-1} = f(a)$ . Wobec tego mamy

$$1 = f(a) \cdot a$$

$$0 = f(a)a - 1 = b_n a^{n+1} + b_{n-1} a^n + \dots + b_0 a - 1,$$

stąd mamy, że

$$a^{n+1} = -\frac{1}{b_n}(b_{n-1}a^n + \dots + b_0 a - 1) \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$$

jest w domknięciu liniowym  $(1, a, \dots, a^n)$ . Indukcyjnie pokazujemy, że

$$(\forall m \geq 0) a^m \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n).$$

1.  $m = 0, \dots, n+1$  bo one są już w  $\text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$ .

2. Zakładamy teraz, że dla  $m$  mamy

$$a^m = \sum_{i=0}^n c_i a^i$$

i pokazujemy dla  $m+1$ .

$$a^{m+1} = a \cdot a^m = a \sum_{i=0}^n c_i a^i = \sum_{i=0}^n c_i a^{i+1} \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n),$$

bo  $a^{n+1} \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$ .

Czyli

$$K[a] = K(a) = \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n),$$

co daje, że  $[K(a) : K] \leq n < \infty$ .

3  $\implies$  1

$[K(a) : K] < \infty$ , z czego wynika, że

$$\{1, a, \dots, a^n, \dots\} = \{a^t : t \in \mathbb{N}\} \subseteq K(a)$$

jest zbiorem liniowo zależnym. Z liniowej zależności wiemy, że

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists b_{n-1}, \dots, b_0) a^n = b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0.$$

Stąd dla  $f \in K[X]$  zadanego wzorem

$$f(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 - x^n$$

mamy  $f(a) = 0$ , zatem  $a$  jest algebraiczny nad  $K$ .

**Definicja 4.4.** Niech  $a \in L \supseteq K$  będzie algebraicznym pierwiastkiem nad  $K$ ,  $I(a/K) = \{w \in K[X] : w(a) = 0\} = (f)$ ,  $f \neq 0$ ,  $f \in K[X]$ ,  $f$  unormowany (ang. monic)

$\Leftrightarrow f$  jest nazywany wielomianem **minimalnym**  $a$  nad  $K$  (wyznaczony jednoznacznie)

$\Leftrightarrow$  **stopień**  $a$  nad  $K$  jest definiowany jako  $\deg(f)$ .

**Uwaga 4.5.** Załóżmy, że  $I(a/K) = (f)$  i  $f$  jest unormowany. Wówczas:

1.  $f$  jest unormowanym wielomianem minimalnego stopnia takim, że  $f(a) = 0$
2.  $\deg(f) = [K(a) : K]$ , czyli stopień tego wielomianu jest równy stopniu przestrzeni liniowej  $K(a)$  nad  $K$ .

**Dowód:**

1. Oczywiście **DOWODZIK, ZE IRREDUCIBLE JEST MINIMAL**

2. Niech  $n = \deg(f)$ ,

$$f(x) = x^n + \sum_{k < n} b_k x^k$$

Z tego, że  $f(a) = 0$  mamy, że

$$a^n = - \sum_{k < n} b_k a^k \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{n-1}) \subseteq L.$$

Czyli  $K(a) = \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{n-1})$  i wystarczy zobaczyć, że  $\{1, \dots, a^{n-1}\}$  jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku dla pewnego  $0 < r < n$   $a^r \in \text{Lin}_K(1, a, \dots, a^{r-1})$ , czyli istnieje wielomian taki, że  $a$  jest jego pierwiastkiem, a stopień jest nie większy niż  $r < n$  i to daje sprzeczność.

Czyli  $\text{Lin}_K(1, a, \dots, a^n)$  jest bazą  $K(a)$  nad  $K$  i koniec.

**Przykład:**

1.  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ , wtedy  $f(x) = x^2 - 2$  jest wielomianem minimalnym  $\sqrt{2}$  nad  $\mathbb{Q}$  i stopień  $\sqrt{2}$  nad  $\mathbb{Q}$  jest równy 2.
2.  $\pi \in \mathbb{R}$  nie ma stopnia, bo  $\pi$  nie jest liczbą algebraiczną nad  $\mathbb{Q}$
3.  $\sqrt[7]{7 + \sqrt[3]{3}} - \sqrt[6]{6} \in \mathbb{R}$ , czy jest to algebraiczne nad  $\mathbb{Q}$ ? Tak i ma stopień 126.

Jeśli  $K \subseteq L \ni a$  jest algebraiczny, to  $\deg(a/K) = n$ , to

$$K(a) = K[a] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i : b_i \in K \right\}$$

**Fakt 4.6.** Niech  $K \subseteq L \subseteq M$  będą rozszerzeniami ciał. Wtedy

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$$

**Dowód:**

Niech  $\{e_i : i \in I\}$  będzie bazą  $L$  nad  $K$ , a  $\{f_j : j \in J\}$  będzie bazą  $M$  nad  $L$ . Stąd  $|I| = [L : K]$  i  $|J| = [M : L]$ .

Chcemy za pomocą tych dwóch zbiorów zrobić bazę  $M$  nad  $K$ . Rozważmy zbiór

$$X = \{e_i \cdot f_j : i \in I, j \in J\}.$$

Musimy pokazać, że

1.  $X$  jest liniowo niezależny
2.  $X$  jest bazą  $M$  nad  $K$
3.  $|X| = |I| \cdot |J|$

Czyli  $X$  jest bazą  $M$  nad  $K$  (1.,2.) i ma odpowiednią moc (3.).

1. Załóżmy nie wprost, że  $X$  nie jest l.n.z., czyli istnieją  $k_{ij} \in K$  takie, że

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} k_{ij} e_i f_j = 0,$$

ale  $\sum_i k_{ij} e_i = l_j$  są elementami  $L$ , czyli

$$\sum_{j \in J} l_j f_j = 0$$

więc  $f_j$  są liniowo zależne, a przecież były bazowe, w takim razie

$$0 = l_j = \sum_{i \in I} k_{ij} e_i,$$

$e_i \neq 0$ , czyli  $k_{ij} = 0$  i koniec.

2.  $X$  generuje  $M$  nad  $K$ , bo dla  $m \in M$  mam

$$m = \sum l_j f_j = \sum \left( \sum a_{ij} e_i \right) f_j = \sum \sum a_{ij} e_i f_j = \sum \sum k_{ij} e_i f_j$$

3. Załóżmy, nie wprost, że dla  $i \neq i'$  i  $j \neq j'$  i  $e_i f_j = e_{i'} f_{j'}$ . Czyli

$$e_i f_j - e_{i'} f_{j'} = 0,$$

czyli  $f_j, f_{j'}$  są liniowo zależne nad  $L$ , czyli mamy, że  $f_j = f_{j'}$  i

$$0 = e_i f_j - e_{i'} f_j = (e_i - e_{i'}) f_j \implies e_i - e_{i'} = 0 \implies i = i'$$

Z tego wynika, że  $[M : K] = |X| = |I||J| = [L : K][M : L]$ .

**Wniosek 4.7.** Niech  $K \subseteq L$  będzie rozszerzeniem skończonego ciała. Niech

$$K_{\text{alg}}(L) = \{a \in L : a \text{ jest algebraiczny nad } K\}.$$

Okazuje się, że  $K_{\text{alg}}$  jest podciałem.

**Dowód:**

Weźmy  $a, b \in K_{\text{alg}}$ . Wiemy, że  $[K(a) : K]$  i  $[K(b) : K]$  są skończone. Mamy, że

$$K \subseteq K(a) \subseteq K(a, b)$$

Z faktu 4.6 wiemy, że

$$[K(a, b) : K] = [K(a, b) : K(a)] \cdot [K(a) : K]$$

czyli również  $K(a, b)$  jest skończone. Zatem dla  $x \in K(a, b)$  mamy

$$[K(x) : K] \leq [K(a, b) : K]$$

też jest skończone, zatem  $x$  jest algebraiczny nad  $K$ .

Dla  $x \in K(a, b)$  mamy  $[K(x) : K] \leq [K(a) : K]$ , czyli również jest skończone. W takim razie,  $x$  jest algebraiczny nad  $K$  i należy do  $K_{\text{alg}}$ .

## Definicja 4.8.

1.  $K_{\text{alg}}(L)$  nazywamy **algebraicznym domknięciem**  $K$  w  $L$ .
2.  $K$  jest **relatywnie algebraicznie domknięte** w  $L \iff K_{\text{alg}}(L) = K$ .

### Przykłady:

1.  $\mathbb{Q}_{\text{alg}}(\mathbb{C}) := \hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\text{alg}}$  jest to tak zwane **ciało liczb algebraicznych**.  $\hat{\mathbb{Q}}$  jest przeliczalne, bo  $\mathbb{Q}[x]$  jest przeliczalne, więc jest mnóstwo liczb **przestępnych** (zespolonych, które nie są algebraiczne, ale nie potrafimy żadnej wskazać).
2.  $K$  jest algebraicznie domknięte w  $K(X)$
3.  $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$ , bo  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$  jest ciałem

$$L = \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}]}_{\subseteq \mathbb{C}} = \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt{3}]}_{\substack{\text{ciało} \\ \sqrt[3]{2}\text{alg.w}}} \mathbb{Q} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} : a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})\}$$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in L \implies \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}} \in L$$

## Wykład 5: Coś

**Wniosek 5.1.** Niech  $K \subseteq L \subseteq M$  będą rozszerzeniami ciał.  $K \subseteq M$  jest algebraiczne  $\iff K \subseteq L$  i  $L \subseteq M$  są algebraiczne

**Dowód:**

$\implies$  OK

$\impliedby$

Weźmy dowolny  $m \in M$ .  $L \subseteq M$  jest algebraiczny, co oznacza  $f(m) = 0$ , gdzie  $f \in L[X]$

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \neq 0$$

W takim razie  $m$  jest algebraiczne nad ciałem  $K(a_0, \dots, a_n)$ . Ale teraz

$$[K(m) : K] \leq [K(a_0, \dots, a_n, m) : K] \stackrel{\text{fakt:4.6}}{=} [K(a_0, \dots, a_n, m) : K(a_0, \dots, a_n)] [K(a_0, \dots, a_n) : K] < \infty$$

bo  $m$  jest algebraiczny nad  $K(\bar{a})$ . Czyli

$$[K(m) : K] < \infty$$

więc  $m$  jest algebraiczny nad  $K$  (fakt 4.3).

**Wniosek 5.2.**  $K_{\text{alg}}(L)$  jest relatywnie algebraicznie domknięty w  $L$ . To znaczy  $(K_{\text{alg}}(L))_{\text{alg}}(L) = K_{\text{alg}}(L)$ .

**Dowód:**

Ćwiczenia.

### 5.1 Wielomian rozkładu koła [cyclotomic polynomials]

Rozważamy wielomian

$$w_m(x) = x^m - 1$$

dla  $m \in \mathbb{N}$ . Wiemy, że

$\hookrightarrow$  pierwiastki  $w_m$  w  $\mathbb{C}$  są jednokrotne

$\hookrightarrow \mu_m(\mathbb{C})$  jest grupą cykliczną

$\hookrightarrow a \in \mu_m(\mathbb{C})$  jest generatorem  $\mu_m(\mathbb{C}) = \{a^i : 0 \leq i \leq m\} \cong (\mathbb{Z}_m, +)$

$\hookrightarrow a^k$  generuje  $\mu_m(\mathbb{C}) \iff \text{NWD}(k, m) = 1$

**Funkcja Eulera:**

$$\phi(m) = |\{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k < m, \text{NWD}(k, m) = 1\}|$$

$\mu_m(\mathbb{C})$  ma  $\phi(m)$  generatorów.

Niech

$$\{k \in \mathbb{N} : 0 < k < m, \text{NWD}(k, m) = 1\} = \{m_1, \dots, m_{\phi(m)}\}$$

i zdefiniujmy

$$F_m(x) := (x - a^{m_1}) \dots (x - a^{m_{\phi(m)}}) \in \mathbb{C}[X]$$

$F_m$  to  $m$ -ty wielomian cyklotomiczny.



### Uwaga 5.3.

$$1. w_m(x) = x^m - 1 = F_m(x) \cdot v_m(x) = F_m(x) \cdot \prod_{\substack{d < m \\ d|m}} F_d(x)$$

$$2. F_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$$

#### Dowód:

1. Wiemy, że wielomian  $w_m$  ma  $m$  pierwiastków na płaszczyźnie Gaussa, więc jest iloczynem dwumianów  $x - b$ ,  $b \in \mu_m(\mathbb{C})$ , czyli

$$\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \alpha^d - 1 \quad d = \text{ord}(\alpha), d|m$$

Wtedy  $\alpha$  jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia  $d$ . Wobec tego

$$F_d(x) = \prod_{\substack{\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \\ \text{ord}(\alpha)=d}} (x - \alpha) \implies (\text{teza})$$

2. Dowód przez indukcję względem  $m$ . Dla  $m = 1$  mamy  $F_m(x) = x - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ .

Teraz zakładamy, że dla wszystkich  $0 < d < m$  jest  $F_d(x) \in \mathbb{Z}[X]$ . Z punktu (1) wiemy, że

$$x^m - 1 = w_m(x) = F_m(x)v_m(x)$$

z założenia indukcyjnego  $v_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$ , bo jest iloczynem  $\prod_{\substack{\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \\ \text{ord}(\alpha)=d}} (x - \alpha)$

$w_m(x)$  w  $\mathbb{Z}[X]$  jest podzielny przez  $v_m$  i dostajemy:

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot L(x)$$

ale w  $\mathbb{C}[X] \supseteq \mathbb{Z}[X]$  było

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot F_m(x),$$

czyli  $F_m = L \in \mathbb{Z}[X]$ .

**Uwaga 5.4.** [*Lemat Gaussa*]  $F_m(x)$  jest wielomianem nierozkładalnym w  $\mathbb{Q}[X]$  (równoważnie w  $\mathbb{Z}[X]$ ).

#### Dowód:

Po pierwsze zauważmy, że  $F_m$  jest nierozkładalny w  $\mathbb{Q}[X] \iff$  nierozkładalny w  $\mathbb{Z}[X]$ .

Założmy nie wprost, że

$$F_m(x) = G_1(x) \cdot G_2(x)$$

dla  $G_1, G_2 \in \mathbb{Z}[X]$ . Możemy założyć, że  $G_1(x)$  jest dalej nierozkładalny w  $\mathbb{Z}[X]$  oraz  $0 < \deg(G_1) < \deg(F_m) = \phi(m)$

---

**Lemat:** Istnieje  $\varepsilon'$ -pierwiastek  $G_1$  oraz liczba pierwsza  $p$  taka, że  $p \nmid m$  i  $G_1(b) = G_2(b^p) = 0$ .

**Dowód lematu:**

Niech  $\varepsilon$  będzie jakimś pierwiastkiem  $G_1$ , a  $\tau$  będzie jakimś pierwiastkiem  $G_2$ . W takim razie

$$\tau, \varepsilon \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \tau = \varepsilon^l$$

dla pewnego  $l$  takiego, że  $\text{NWD}(l, m) = 1$ .

Niech  $l = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$  będzie rozkładem na liczby pierwsze. Wtedy mamy ciąg różnych liczb

$$\text{pierwiastek } G_1 = \varepsilon, \varepsilon^{p_1}, \varepsilon^{p_1 p_2}, \dots, \varepsilon^{p_1 \dots p_s} = \tau \text{ pierwiastek } G_2$$

które są pierwiastkami pierwotnymi stopnia  $m$ . Z tego wynika, że każda z tych liczb jest pierwiastkiem  $G_1$  lub  $G_2$ , czyli istnieje taka pozycja  $i$ , że

$$G_1(\varepsilon^{p_1 \dots p_i}) = 0,$$

$$G_2(\varepsilon^{p_1 \dots p_{i+1}}) = 0$$

wtedy  $\varepsilon' := \varepsilon^{p_1 \dots p_i}$  oraz  $p = p_{i+1}$  i lemat jest spełniony.

Wimy już, że  $G_1(\varepsilon) = 0$  i  $G_1 \in \mathbb{Z}[X]$  jest wielomianem nierozkładalnym. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą z lematu. Rozważmy

$$G_3(x) = G_2(x^p).$$

Wtedy  $G_2(\varepsilon^p) = G_3(\varepsilon) = 0$ , ale stąd wynika, że  $G_1(x)$  dzieli  $G_3(x)$ . Niech więc

$$G_3(x) = G_1(x)H(x) \in \mathbb{Z}[X].$$

Rozważmy homomorfizm

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =$$

i indukowany przez niego epimorfizm pierścieni

$$\bar{f} : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p[X].$$

Z założenia  $F_m = G_1 G_2$  mamy, że

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

a z rozumowania powyżej ( $G_3 = G_1 H$ )

$$\bar{f}(G_3) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H)$$

ale

$$\bar{f}(G_3(x)) = \bar{f}(G_2(x^p)) = \bar{f}(G_2(x))^p,$$

bo współczynniki  $\bar{f}(G_2(x^p))$  są w  $\mathbb{Z}_p$ , a  $(\sum c_i x^i)^p = \sum c_i x^{pi}$ , bo  $c_i^{kp} = c_i^k$  dla  $c_i \in \mathbb{Z}_p$ .

Stąd wiemy, że

$$\bar{f}(G_2(x))^p = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H).$$

Pierścień  $\mathbb{Z}_p[X]$  jest UFD, więc  $\bar{f}(G_1)$  i  $\bar{f}(G_2)$  mają wspólny dzielnik w  $\mathbb{Z}_p[X]$ , stopnia co najmniej 1. Zatem z

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

$$\bar{f}(F_m) | \bar{f}(w_m) = x^m - 1.$$

Zatem w pewnym rozszerzeniu  $L \supseteq \mathbb{Z}_p$   $w_m$  ma pierwiastek wielokrotny co daje sprzeczność.

**TUTAJ BYŁ KONIEC**

**Wniosek 5.5.** Jeżeli  $b \in \mathbb{C}$  jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia  $m$ , to  $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = \phi(m)$ .

**Dowód:**  $F_m(x)$  jest wielomianem minimalnym dla  $b$  nad  $\mathbb{Q}$ . Mamy, że  $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = \deg F_m = \phi(m)$ .

**Lemat 5.6.** [twierdzenie Liouville'a o aproksymacji diofantycznej]: Jeżeli  $a \in \mathbb{R}$  jest liczbą algebraiczną stopnia  $N > 1$ , to istnieje  $c \in \mathbb{R}_+$  takie, że dla każdego  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  zachodzi

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^N}$$

**Definicja 5.7.** Ciało  $L \supseteq K$  jest **algebraicznym domknięciem**  $K$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

1.  $L$  jest algebraicznie domknięte
2.  $L \supseteq K$  jest rozszerzeniem algebraicznym, to znaczy dla każdego  $a \in L$   $a$  jest pierwiastkiem algebraicznym nad  $K$

Takie  $L$  oznaczamy przez  $\hat{K}$ .

**Wniosek 5.8.** Dla każdego  $K$  istnieje algebraiczne domknięcie  $\hat{K}$ .

**Dowód:** Rozważmy  $K_\infty \supseteq K$  - ciało algebraicznie domknięte (twierdzenie z początku wykładu). Pokażemy, że

$$\hat{K} = K_{\text{alg}}(K_\infty) = \{a \in K_\infty : a \text{ algebraiczny nad } K\}$$

1.  $\hat{K}$  jest algebraicznie domknięte:

Jeżeli  $f \in \hat{K}[X]$ , to  $f$  ma pierwiastek w  $K$ , ale  $\hat{K} \subseteq K_\infty$ , to znaczy, że  $a \in \hat{K}$  jest algebraiczne nad  $K$ .

2.  $K \subseteq \hat{K}$  jest rozszerzeniem algebraicznym:

$K \subseteq \hat{K} = K_{\text{alg}}(K_\infty)$  z definicji jest rozszerzeniem algebraicznym.

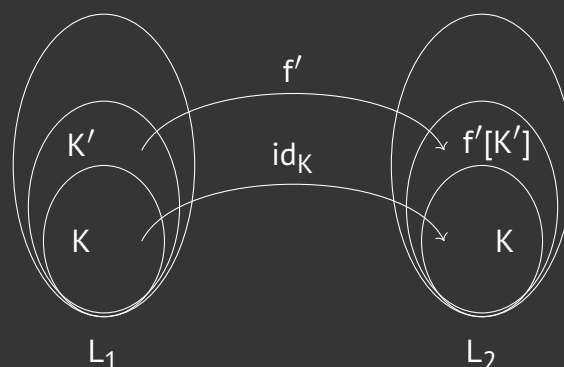
**Twierdzenie 5.9.**  $\hat{K}$  jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu nad  $K$ .

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{(\exists! f) f|_K = \text{id}_K} & L_2 \\ & \cong & \\ & \nwarrow \cup & \nearrow \cup \\ & K & \end{array}$$

**Dowód:**

Niech

$$\mathcal{K} = \{(k', f') : K \subseteq K' \subseteq L_1, f' : K' \xrightarrow{1-1} L_2, f'|_K = \text{id}_K\}$$



W  $\mathfrak{K}$  definiujemy relację porządku w naturalny sposób, to znaczy

$$(K', f') \leq (K'', f'') \iff K' \subseteq K'' \wedge f' \upharpoonright K' = f''.$$

Wtedy  $(\mathfrak{K}, \leq)$  jest zbiorem częściowo uporządkowanym i niepustym (bo jest  $(K, \text{id}_K) \in \mathfrak{K}$ ). Ponadto każdy wstępujący łańcuch  $(\mathfrak{K}, \leq)$  ma ograniczenie górne. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w tej rodzinie istnieje element maksymalny, nazwijmy go  $(K_1, f_1)$ . Pokażemy, że  $K_1 = L_1$ .

Założmy nie wprost, że istnieje  $a \in L_1 \setminus K_1$ . Niech  $w(x) \in K_1[X]$  będzie wielomianem minimalnym elementu  $a$  nad  $K_1$ . Niech

$$K_2 = f_1[K_1]$$

$$v(x) = f_1(a_0) + f_1(a_1)x + \dots + f_1(a_n)x^n \in K_2[X].$$

$v(x)$  też jest nierozkładalny nad  $K_2$ , bo  $w(x)$  był nierozkładalny nad  $K_1$ . Niech  $b \in L_2$  będzie pierwiastkiem wielomianu  $v$ .

Zauważmy, że  $K_1(a) = K_1[a]$ , bo  $w(x)$  jest nierozkładalny nad  $K_1$ , ale

$$K_1[a] \simeq K_1[X]/(w) \simeq K_2[X]/(v) \simeq K_2[b] \simeq K_2(b).$$

Czyli  $K_1(a) \simeq K_2(b)$  i  $f_2 : K_1(a) \xrightarrow{\cong} K_2(b)$  jest izomorfizmem rozszerzającym  $f_1$ . Wtedy mamy  $(K_1, f_1) \leq (K_1(a), f_2)$ , co daje sprzeczność z maksymalnością  $(K_1, f_1)$ . Zatem  $L_1 = K_2$ .

Niech  $K_2 = f[K_1] = f[L_1]$ . Pokażemy nie wprost, że  $K_2 = L_2$ . Założmy, że istnieje  $a \in L_2 \setminus K_2$ . Niech  $w(x) \in K_2[X]$  wielomian minimalny dla  $a$  nad  $K_2$ . Wtedy  $w(x)$  nie ma pierwiastka w  $K_2$ , ale  $K_2 = f_1[L_1]$  jest algebraicznie domknięte, bo  $L_1$  jest algebraicznie domknięte, co daje sprzeczność.

**Wniosek 5.10.** Jeśli  $K \cong L$ , to  $\widehat{K} \cong \widehat{L}$ . Dokładniej, jeżeli  $f_0 L K \rightarrow L$  jest izomorfizmem ciał, to istnieje izomorfizm  $f : \widehat{K} \rightarrow \widehat{L}$  taki, że  $f \upharpoonright K = f_0$ .

**Wniosek 5.11.** Jeśli  $K \subseteq L$  jest algebraicznym rozszerzeniem ciał, to istnieje monomorfizm  $f : L \rightarrow \widehat{K}$  taki, że  $f \upharpoonright K = \text{id}_K$ .

**Dowód:** Mamy dane  $K \subseteq L \subseteq \widehat{L}$  rozszerzenia algebraiczne, zatem rozszerzenie  $K \subseteq \widehat{L}$  jest algebraiczne. Stąd  $\widehat{L}$  jest algebraicznym domknięciem  $K$ . Z twierdzenia 5.9 istnieje izomorfizm  $g : \widehat{L} \rightarrow \widehat{K}$  taki, że  $g \upharpoonright K = \text{id}_K$ . Wtedy  $f = g \upharpoonright L$  jest szukany monomorfizm.

## Wykład 6: Teoria Galois

**Definicja 6.1.** Niech  $K$  będzie ciałem,  $\widehat{K}$  jego algebraicznym domknięciem. Niech  $K \subseteq L$  będzie rozszerzeniem algebraicznym ciał. **Grupą Galois** rozszerzenia  $K \subseteq L$  nazywamy

$$\text{Gal}(L/K) = \{f \in \text{Aut}(L) : f \upharpoonright K = \text{id}_K\} = \text{Aut}(L/K)$$

ze składaniem jako działaniem. Jest to jednocześnie podgrupa wszystkich automorfizmów.

**Przykład:**

1. Niech  $K$  będzie ciałem prostym ( $\cong \mathbb{Q}$  lub  $\mathbb{Z}_p$ ). Wtedy  $\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}(L)$ , bo

$\hookrightarrow$  Niech  $\text{char}(K) = \text{char}(L) = p > 0$  i niech  $f \in \text{Aut}(L)$ . Wtedy  $f(1) = 1$ ,  $f(\underbrace{1 + \dots + 1}_k) = \underbrace{1 + \dots + 1}_k$ , a ponieważ  $K = \{\underbrace{1 + \dots + 1}_k : k \in \{1, \dots, p\}\}$ , zatem  $f \upharpoonright K = \text{id}_K$ , czyli  $f \in \text{Gal}(L/K)$ .

$\hookrightarrow$  Niech  $\text{char}(K) = \text{char}(L) = 0$ , wtedy  $K \cong \mathbb{Q}$ . Niech  $f \in \text{Aut}(L)$ . Wtedy  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , a dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$   $f(\underbrace{1 + \dots + 1}_k) = \underbrace{1 + \dots + 1}_k$ , stąd dostajemy, że  $f(n) = n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ , a z własności  $\mathbb{Q}$  dostajemy, że  $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$ , zatem  $f \upharpoonright K = \text{id}_K$ .

2.  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ .

# Skorowidz twierdzonek

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Fakt . . . . .   | 4  |
| 1.2  | Uwaga . . . . .  | 5  |
| 1.3  | Uwaga . . . . .  | 5  |
| 1.4  | Uwaga . . . . .  | 6  |
| 1.5  | Uwaga . . . . .  | 6  |
| 1.6  | Twierdzenie . . . . .  | 7  |
| 1.7  | Wniosek . . . . .  | 7  |
| 1.8  | Fakt . . . . .   | 8  |
| 2.1  | Wniosek . . . . .  | 10 |
| 2.2  | Wniosek . . . . .  | 11 |
| 2.3  | Twierdzenie . . . . .  | 11 |
| 3.1  | Uwaga . . . . .  | 13 |
| 3.2  | Uwaga . . . . .  | 13 |
| 3.3  | Uwaga . . . . .  | 14 |
| 3.4  | Twierdzenie . . . . .  | 14 |
| 3.5  | Wniosek . . . . .  | 15 |
| 3.6  | Twierdzenie . . . . .  | 15 |
| 4.1  | Definicja . . . . .  | 17 |
| 4.2  | Uwaga . . . . .  | 17 |
| 4.3  | Uwaga . . . . .  | 17 |
| 4.4  | Definicja: <i>wielomian minimalny, stopień pierwiastka</i> . . . . .                 | 19 |
| 4.5  | Uwaga: $I(a/K) = (f) \implies \deg(f) = [K(a) : K]$ . . . . .                        | 19 |
| 4.6  | Fakt: $\dim_K(M) = \dim_L(M) \cdot \dim_K(L)$ . . . . .                              | 19 |
| 4.7  | Wniosek: $K_{\text{alg}}$ - <i>podciałem</i> . . . . .                               | 20 |
| 4.8  | Definicja: <i>(relatywne) algebraiczne domknięcie</i> . . . . .                      | 21 |
| 5.1  | Wniosek: <i>algebraiczne rozszerzenia ciał</i> . . . . .                             | 22 |
| 5.2  | Wniosek: $(K_{\text{alg}}(L))_{\text{alg}}(L) = K_{\text{alg}}(L)$ . . . . .         | 22 |
| 5.3  | Uwaga: $F_m \in \mathbb{Z}[X]$ . . . . .   | 23 |
| 5.4  | Uwaga: <i>lemat Gaussa</i> : $F_m$ <i>nierozkładalny w</i> $\mathbb{Q}$ . . . . .    | 23 |
| 5.5  | Wniosek: <i>pierwiastek pierwotny a</i> $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(b))$ . . . . . | 25 |
| 5.6  | Lemat: <i>twierdzenie Liouville'a o aproksymacji diofantycznej</i> . . . . .         | 25 |
| 5.7  | Definicja: <i>algebraiczne domknięcie</i> . . . . .                                  | 25 |
| 5.8  | Wniosek: <i>istnieje algebraiczne domknięcie</i> . . . . .                           | 25 |
| 5.9  | Twierdzenie: <i>jedyność domknięcia algebraicznego</i> . . . . .                     | 25 |
| 5.10 | Wniosek: $K \cong L \implies \hat{K} \cong \hat{L}$ . . . . .                        | 26 |
| 5.11 | Wniosek: <i>algebraiczne rozszerzenie</i> $1 - 1 \rightarrow \hat{K}$ . . . . .      | 26 |
| 6.1  | Definicja: <i>Grupa Galois</i> . . . . .   | 27 |