Wykład 11. Moduły c.d.

R: pierścień z $1 \neq 0$, M: R-moduł.

1) Układ $\{m_i\}_{i\in I} \subseteq M$ jest liniowo niezależny,

gdy $\forall \{r_i\}_{i\in I} \subseteq R \left(\underbrace{\sum_{i\in I} r_i m_i}_{} = 0 \Rightarrow (\forall i \in I)\, r_i = 0 \right)$

suma skończona

w przeciwnym razie: lin. zależny.

2) Zbiór $S \subseteq M$ jest liniowo niezależny, gdy układ $\{m_i\}_{i\in I} = S$ (bez powtórzeń) jest liniowo niezależny.

3) $B \subseteq M$ jest bazą R-modułu M, gdy:

(a) B: liniowo niezależny

(b) B generuje M jako R-moduł.

<u>Przykłady</u> 1. $\{0\}$ jest liniowo **zależny**, bo $\underset{R}{1} \cdot \underset{M}{0} = 0$.

- układ $\{m_0, m_0\}$ jest liniowo zależny.

2) $\mathbb{Q}$ jako $\mathbb{Z}$-moduł: $\{a, b\}$ liniowo zależny dla wszystkich $a \neq b \in \mathbb{Q}$

bo, bso $a, b \neq 0$,

$$a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{q},\quad n, q \in \mathbb{Z}^+,\ m, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow (np) \cdot a - (qm) \cdot b = mp - mp = 0.$$

- $\mathbb{Q}$ nie ma bazy jako $\mathbb{Z}$-moduł!

(Abstrakcyjna) suma prosta (koprodukt) rodziny modułów $\{M_i\}_{i\in I}$:

$$\bigsqcup_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i = \{f \in \prod_{i\in I} M_i : \{i : f(i) \neq 0\} \text{ skończony}\}$$

$$M_i \xrightarrow{f_i} \bigsqcup_{i\in I} M_i, \quad f_i(m_i) = \langle 0, \dots, \overset{i}{m_i}, \dots 0\rangle$$

Uwaga 11.1. Jeśli $\forall i \in I \; M_i \xrightarrow{g_i} M$, to $\exists! h : \bigsqcup_{i\in I} M_i \to M$

(własność uniwersalności)

$\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & M \\ \bigsqcup_{i\in I} M_i \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

D-d ćwiczenie

Uwaga 11.2. Zał., że $M = M_1 \oplus M_2$ dla $M_1, M_2 \subseteq M$ podmodułów

w starym sensie z algebry liniowej

Wtedy dla $g_i = id_{M_i} : M_i \to M$, $h : M_1 \sqcup M_2 \to M$ (z uwagi 11.1)

jest izomorfizmem modułów.

D-d Łatwy.

Def. 11.3. M jest <u>wolnym</u> R-modułem, gdy M ma bazę.

<u>Przykłady</u> 1) R jest wolnym R-modułem, baza: $\{1\}$.

$\mathbb{Q}$ nie jest wolnym $\mathbb{Z}$-modułem.

(2) M_i, $i \in I$: wolne R-moduły $\Rightarrow \bigsqcup_{i \in I} M_i$ wolny R-moduł.

<u>D-d</u> Niech $B_i \subseteq M_i$ baza (dla $i \in I$)

$$f_i : \underset{\underset{B_i}{\cup\!\!|}}{M_i} \xrightarrow{\cong} \underset{\underset{f_i(B_i)}{\cup\!\!|}}{f_i(M_i)} \subseteq \bigsqcup_{i \in I} M_i. \quad \bigcup_{i \in I} f_i(B_i) : \text{baza } \bigsqcup_{i \in I} M_i$$

Uwaga 11.4. Niech $A = \{a_i : i \in I\} \subseteq M$. NWSR:

1) A: baza M bezpośrednie,

2) $\forall m \in M \quad m = \sum_{i \in I} r_i a_i$, $r_i \in R$ (jednoznaczne przedstawienie)

3) $\forall N$ (R-moduły) $\forall g : A \longrightarrow N \quad \exists!\, g' : M \longrightarrow N$ R-liniowe, $g \subseteq g'$

<u>D-d</u> (1) $\Leftrightarrow$ (2): jak dla przestrzeni liniowych.

(2) $\Rightarrow$ (3): $g'(m) = \sum r_i g(a_i)$, g': homomorfizm R-modułów, jedyny!

$(3) \Rightarrow (1)$:

(a) A generuje M, bo: Niech $M' = \langle A \rangle \subseteq M$ podmoduł

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] & M/M' \\ & M \arrow[u, "0"'] \end{tikzcd}$$

$j : M \longrightarrow M/M'$ ilorazowe

$0 : M$ zerowe

$j|_A = 0|_A \equiv 0$, więc

z (3): (dla $N = M/M'$ i $g = 0|_A$) $j = 0$

$\Downarrow$

$M/M' = 0$ i $M' = M$

(b) A: liniowo niezależny:

Załóżmy, że $\sum r_i a_i = 0$, $r_{i_0} \neq 0$.

Niech $g : A \longrightarrow R$ t. że $g(a_i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq i_0 \\ 1, & \text{gdy } i = i_0 \end{cases}$

z (3) $\exists\, g' : M \longrightarrow R$, $g' \supseteq g$, R-liniowe

Ale: $g'(0) = g'(\sum r_i a_i) = r_{i_0} g'(a_{i_0}) = r_{i_0} \neq 0$ ↯.

Uwaga 11.5.

(1) $A = \{a_i : i \in I\}$ baza $M \Rightarrow$ (a) $Ra_i \subseteq M$ podmoduł (to zawsze)

i (b) $M = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$

(2) A : zbiór $\Rightarrow \exists$ R-moduł M o bazie A:

$$M = \bigsqcup_{a \in A} R_a, \quad R_a \cong R$$

$a \in A$ utożsamiamy z $\langle 0, \ldots \overset{a}{\check{1}} \ldots 0 \rangle$

<u>Przykłady</u> $\mathbb{Z}$-moduł wolny = wolna grupa abelowa.

Tw. 11.6. Jeśli R : pierścień przemienny, to każde dwie bazy R-modułu wolnego M są równoliczne

<u>D-d</u>. Niech $I \triangleleft R$ ideał maksymalny.

Niech

$M' := IM \subseteq M$,

IM = podmoduł generowany przez $\{im : i \in I, m \in M\}$

M/M' : moduł nad R/I:

- dla $(m+M') \in M/M'$ i $(r+I) \in R/I$:

$$\begin{cases} (r+I)\cdot(m+M') \overset{\text{def}}{=} rm + M' \\ + \text{ na } M/M' \text{ ilorazowe} \end{cases}$$

$\leftarrow$ definicja poprawna

Niech $B_1, B_2 \subset M$ bazy

$j : M/M'$: ilorazowe , $l : R \to R/I$ ilorazowe

$\Rightarrow j(B_1), j(B_2)$: bazy M/M' jako R/I - modułu.

(a) $m = \sum \overset{R}{\underset{\Downarrow}{}} r_i \cdot b_i^{\in B_1} \Rightarrow j(m) = \sum l(r_i)\, j(b_i)$,

<u>generowanie</u>

$$\text{bo : } j(r_i b_i) =$$

$$= r_i b_i + M' = (r_i + I)(b_i + M') =$$

$$= l(r_i) \cdot j(b_i),$$

(b) liniowa niezależność :

$$\sum l(r_i)\, j(b_i) = 0 \Rightarrow j\left(\sum r_i b_i\right) = 0$$

$\Rightarrow \sum r_i b_i \in IM$, tzn :

$$\| $$

$$\sum \underset{\substack{\in \\ I}}{r_j'} \underset{\substack{\in \\ M}}{m_j'} = \sum_{i,j} r_j' s_{ij} b_i = \sum_i \Big(\overbrace{\sum_j r_j' s_{ij}}^{\in I} \Big) b_i$$

$$\left(m_j' = \sum \overset{R}{\underset{\Downarrow}{}} s_{ij} b_i^{\in B_1} \right)$$

$\Downarrow$ B_1 : baza

$(\forall i \in I)\ r_i = \sum_j r_j' s_{ij} \in I$

$\Downarrow$

$(\forall i \in I)\ l(r_i) = 0$

wsc: $j(B_1)$ liniowo niezależny w M/M'
jako układ elementów.

stąd $\hat{j} : B_1 \xrightarrow{1-1} j(B_1)$, $B_1 \approx j(B_1)$.

Ale: R/I ciało, więc M/M': przestrzeń liniowa $/(R/I)$

stąd: $B_1 \approx j(B_1) \approx j(B_2) \approx B_2$.

Uwaga 11.7.
Każdy R-moduł M jest homomorficznym obrazem R-modułu wolnego.

D-d Niech $N = \bigsqcup_{m \in M} R_m$: R-moduł wolny o bazie M.

($N = \bigsqcup_{a \in A} R_a$, gdzie $A \subseteq M$ generuje M)
$\uparrow$
też dobry

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id} : M \arrow[dr, "na"] & \\
\cap & M \\
\exists! f : N \arrow[ur, "R\text{-liniowe}"'] &
\end{tikzcd}$$

Z Uwagi 11.4(3)

f: epi

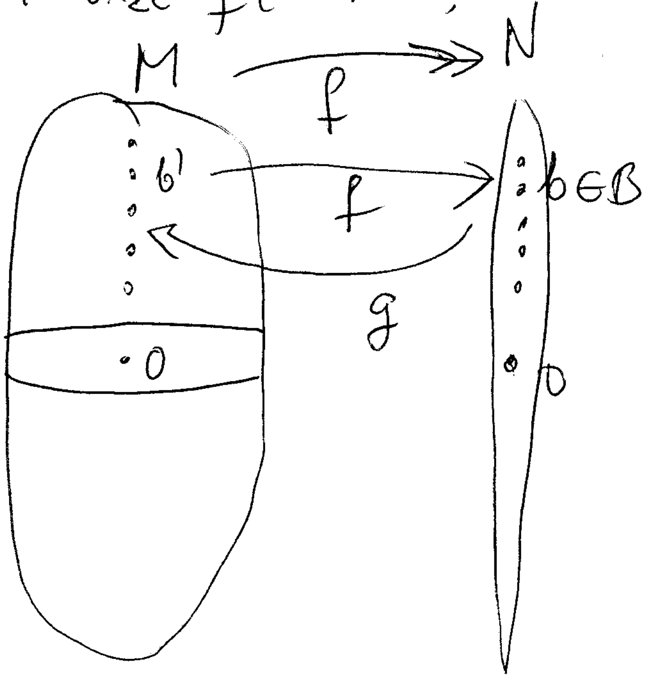
Fakt 11.8.
Zał, że M, N: R-moduły i N: wolny oraz $f : M \xrightarrow{epi} N$. Wtedy $M \cong \mathrm{Ker} f \oplus N$.

Wsp.: istnieje $N' \subseteq M$ podmoduł, $N' \cong N$ i $M = \mathrm{Ker} f \oplus N'$.

<u>D-d</u> Niech B : baza N.

Dla $b \in B$ niech $b' \in M$ t. że $f(b') = b$.

Niech $g : B \longrightarrow M$
$g(b) \stackrel{\text{def}}{=} b'$



Z Uwagi 11.4(3)

$\exists!_{g \subseteq g'} \; g' : N \longrightarrow M$
R-liniowe
(homomorfizm
R-modułów)

$$f \circ g' : N \longrightarrow N \quad \& \quad (f \circ g')|_A = id_A$$

z Uwagi 11.4 : $f \circ g' = id_N$.

Stąd: (a) g' jest 1-1

(b) $g'(N) \cong N$, $g'(N) \subset M$ podmoduł

(c) $M = \operatorname{Ker} f \oplus g'(N)$, bo:

$$\overset{\Psi}{m} = \underbrace{(m - (g'f)(m))}_{\substack{\Uparrow \\ \operatorname{Ker} f}} + \underbrace{(g'f)(m)}_{\substack{\Uparrow \\ g'(N)}},$$

bo: $f(g'f(m)) = (\underset{\substack{\| \\ id_N}}{fg'})(f(m)) = f(m)$, więc

$(m - (g'f)(m)) \in \operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker} f \cap g'(N) = \{0\}$, bo:

$N \ni m = g'(n)$.

$0 = f(m) = f(g'(n)) \underset{fg' = id_N}{=} n \Rightarrow m = g'(0) = 0$.

Def. 11.9:

(a) R-moduł N jest <u>projektywny</u>, gdy

$\forall M\ \forall f : M \xrightarrow{epi} N$ $\big(M = \operatorname{Ker} f \oplus M'$ dla pewnego $M' \subset M$ podmodułu$\big)$

<u>Przykład</u>

moduł wolny jest projektywny (patrz ~~…~~ zadania na c.d.)

Dualnie:

(b) R-moduł M jest <u>injektywny</u>, gdy

$\forall N\ \forall g : M \xrightarrow{mono} N$ $\big(N = \operatorname{Im}(g) \oplus N'$ dla pewnego $N' \subset N$ podmodułu$\big)$

(tzn: $g(M)$: składnik prosty N)

---

tzn: f rozszczepia się (splits)

tzn: $\exists g : N \underset{morfizm}{\longrightarrow} M$ $f \circ g = id_N$. (patrz zad. z listy)

Przykład. R: ciało $\Rightarrow$

każdy R-moduł jest projektywny i injektywny.

Def. 11.10 (R: p. przemienny z 1)

M: R-moduł cykliczny = generowany przez jeden element $a \in M$

tzn: $M = Ra$.

Przykład. $R = R1$: cykliczny jako R-moduł.

M: R-moduł, $a \in M \Rightarrow Ra \subset M$

podmoduł cykliczny

Uwaga 11.11. Zał, że M: R-moduł,

M: cykliczny $\Leftrightarrow M \cong R/I$ dla pewnego $I \triangleleft R$

jako R-moduł.

D-d. $\Leftarrow$ R/I generowany przez $1+I$.

$\Rightarrow$: $M = aR$

Zał, że

Niech $f: R \to M$ epimorfizm R-modułów.

$r \stackrel{f}{\longmapsto} r \cdot a$

$\mathrm{Ker}\, f = I \triangleleft R \quad R/I \cong M$.

~~Def. 11.12 (a) dla $a \in M$, $I_a = \{r \in R : ra = 0\}$~~

~~($I_a \triangleleft R$) torsja elementu a~~

~~(b) a torsyjny, gdy $I_a \neq \{0\}$ ($\Leftrightarrow \exists\, 0 \neq r \in R \; ra = 0$).~~

~~w przeciwnym razie: a: beztorsyjny.~~

Def. 11.12. (M: R-moduł).

(1) dla $a \in M$, $I_a = \{r \in R : ra = 0\} \triangleleft R$

<u>torsja elementu</u> a

(2) a <u>torsyjny</u>, gdy $I_a \neq \{0\}$ ($\Leftrightarrow \exists_{\substack{r \in R \\ r \neq 0}}\ ra = 0$)

w przeciwnym razie: <u>beztorsyjny</u>.

(3) M: <u>torsyjny</u>, gdy $\forall a \in M$ a torsyjny.

M <u>beztorsyjny</u>, gdy $\forall a \in M \setminus \{0\}$ a beztorsyjny.

(4) $M_t = \{a \in M : a \text{ torsyjny}\}$ część torsyjna modułu M.

Uwaga ~~Tw~~. 11.13.

Zał., że R: dziedzina. Wtedy

(1) M_t podmoduł M (2) M/M_t beztorsyjny.

<u>D-d</u>. (1) Łatwe.

(2) Zał., że $m + M_t \in M/M_t$: torsyjny, tzn.

$r(m + M_t) = 0 + M_t$ dla pewnego $r \in R$, $r \neq 0$.

$\Downarrow$

$rm \in M_t$, więc

$r'(rm) = 0$ dla pewnego $r' \in R$, $r' \neq 0$

R: dziedzina $\Rightarrow r'r \neq 0$ i $(r'r)m = 0$, więc $m \in M_t$ i

$m + M_t = M_t = 0 + M_t$.

<u>Przykłady</u>: ~~Gr~~ grupy abelowe torsyjne/beztorsyjne (jako $\mathbb{Z}$-moduły)

$\boxed{R:\text{ przemienny}}$ → Moduły skończenie generowane

TW 11.14. Niech M, N : R-moduły oraz $f: M \xrightarrow{epi} N$

$M' = \operatorname{Ker} f$, $N \cong M/M'$.

(1) N, M': skończenie generowane $\Rightarrow$ M skończenie generowany

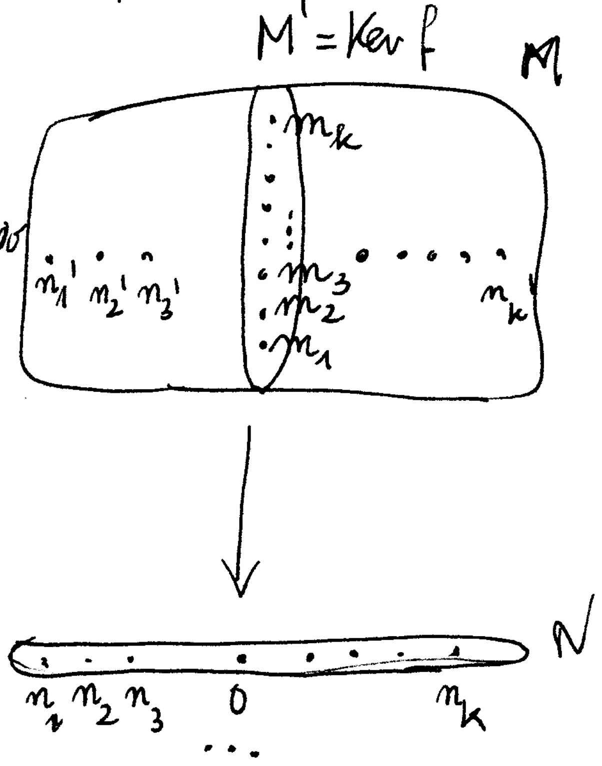
(2) M skończenie generowany $\Rightarrow$ N skończenie generowany.

D-d.

(2) Łatwe : $\underset{\text{zb. generatorów}}{A \subseteq M} \Longrightarrow f[A]$ generuje N.

(1) Niech $\{n_1, \dots, n_k\} \subseteq N$

$\{m_1, \dots, m_l\} \subseteq M'$ zbiory generatorów



Niech $n_1', \dots, n_k' \in M$ t.że $f(n_i') = n_i$

• $\{n_1', \dots, n_k', m_1, \dots, m_l\}$

generuje M, bo:

Niech $x \in M$. $f(x) \in N$, więc

$f(x) = \sum \underset{R}{r_i} n_i$, Niech $\underset{M}{x'} = \sum r_i n_i'$

$f(x') \underset{f(n_i') = n_i}{=} \sum r_i n_i = f(x) \Rightarrow f(x - x') = 0$ i

$x - x' \in M' = \operatorname{Ker} f$

$M' \ni x - x'$, więc $x - x' = \sum \underset{\in R}{r_j'} m_j$

stąd $x = x' + (x - x') = \sum r_i n_i' + \sum r_j' m_j$.

Wniosek 11.15. Zał, że R: pierścień przemienny. NWSR:

(1) R: noetherowski

(2) Jeśli M: skończenie generowany R-moduł i $\underset{\text{podmoduł}}{N \subset M}$,

to N też skończenie generowany.

<u>D-d</u> (2) ⟹ (1): Niech $I \trianglelefteq R$. Wtedy I: podmoduł R

$R = R \cdot 1$ skończenie generowany (cykliczny!),

więc z (2): I: skończenie generowany (jako podmoduł)
⇓
jako ideał.

(1) ⟹ (2)

M: skończenie generowany, ~~Indukcja względem l~~

przez $\{m_1, \dots, m_l\}$.

Niech $W = Rm_1 \oplus \dots \oplus Rm_l$: R-moduł wolny o bazie $\{m_1, \dots, m_l\}$

Niech $\varphi: W \xrightarrow{\text{epi}} M$

t.że $\varphi(m_i) = m_i$

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \cup\! | & & \cup\! | \\ N' = \varphi^{-1}[N] & & N \end{array}$$

podmoduł.

~~$l = 1$. $W \cong R$ (jako R-moduł)~~

Wystarczy pokazać, że N' jest skończenie generowany.

Indukcja względem l.

1. $l=1$. Wtedy $W \cong R$. Niech $\varphi : W \xrightarrow{\cong} R$

oraz $N'' = \varphi[N']$: podmoduł R

$\Updownarrow$ ideał w R $\overset{\text{Tw}(1)}{\Longrightarrow}$ $\varphi[N']$: skończenie generowany jako ideał $\equiv$ jako R-moduł

N' skończenie generowany $\Longleftarrow$

2. <u>krok indukcyjny</u>. $\boxed{l>1}$ ~~$l \Rightarrow l+1$~~. Zał., że teza zachodzi dla wszystkich $l'<l$.

Niech $\pi : W \longrightarrow R$ rzut na l-tą współrzędną (ostatnią)

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & R \\ \cup & & \cup \\ \pi|_{N'} : N' & \longrightarrow & \pi[N'] \end{array}$$

podmoduł $=$ ideał

$\Downarrow (1)$

$\pi[N']$ skończenie generowany

$\cdot$ $\mathrm{Ker}(\pi|_{N'}) \subseteq$

$\subseteq \underbrace{R\times\ldots\times R}_{l-1} \times \{0\} \cong$

$\cong \underbrace{R\times\ldots\times R}_{l-1}$ (jako R-moduł), więc

$\mathrm{Ker}(\pi|_{N'})$: skończenie generowany (z zał. indukcyjnego).

Z tw. 11.14(1) : N': skończenie generowany.

R: pierścień przemienny z 1.

M_1, M_2, N: R-moduły.

Produkt tensorowy modułów

iloczyn tensorowy.

Def. 11.16. $f: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ jest R-dwuliniowe,

gdy f jest R-liniowe na każdej współrzędnej.

tzn: $f(m_1 + m_1', m_2) = f(m_1, m_2) + f(m_1', m_2)$

$f(rm_1, m_2) = r f(m_1, m_2)$ $\quad r \in R$

$m_1, m_1' \in M_1$

$m_2, m_2' \in M_2$.

Uwaga 11.17.

Zazwyczaj takie f nie jest R-liniowe:

$$f(m_1 + m_1', m_2 + m_2') = f(m_1, m_2 + m_2') + f(m_1', m_2 + m_2') =$$

$$= f(m_1, m_2) + f(m_1, m_2') + f(m_1', m_2) + f(m_1', m_2'$$

zazwyczaj $\neq f(m_1, m_2) + f(m_1', m_2')$

Zazwyczaj również $\mathrm{Im} f = \cancel{f[M_1]} = f[M_1 \times M_2] \subseteq N$

nie jest podmodułem...

Ale! generuje podmoduł $[\mathrm{Im} f] \subseteq N$.

Zadanie Znaleźć $f : M_1 \times M_2 \xrightarrow{\text{2-liniowe}} \text{coś}$

t. że "coś" to R-moduł generowany przez $\mathrm{Im} f$ i to "coś" jest jak najwęższe.

Konstrukcja

Niech X : R-moduł wolny o bazie $\{\langle m_1, m_2\rangle : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$

$$\begin{tikzcd} M_1 \times M_2 \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, dashed, "f = j \circ f_0"'] & X \arrow[d, "j"] \\ & X/L \end{tikzcd}$$

$f_0(m_1, m_2) = \langle m_1, m_2 \rangle$

f_0 nie jest 2-liniowe!

Trzeba utożsamić w X pewne elementy, by stało się 2-liniowe, tzn:

Znaleźć najmniejszy podmoduł $L \subseteq X$ t. że $f = j \circ f_0$: R-2-liniowe.

Fakt 12.1.

$f : M_1 \times M_2 \longrightarrow X/L$: R-dwuliniowe $\iff$

Dla wszystkich $m_1, m_1' \in M_1$, $m_2, m_2' \in M_2$ i $r \in R$

$$\begin{cases} (1) \ \langle m_1 + m_1', m_2 \rangle - [\langle m_1, m_2 \rangle + \langle m_1', m_2 \rangle] \in L \\ (2) \ r\langle m_1, m_2 \rangle - \langle r m_1, m_2 \rangle \in L \\ + (1)', (2') : \text{odpowiednie warunki dla 2. współrzędnej.} \end{cases}$$

D-d Tatwy

Niech $L \subset X$: podmoduł generowany przez elementy postaci (1), (2), (1'), (2').

Wtedy $f: M_1 \times M_2 \longrightarrow X/L$: R-2-liniowe

Def. 12.2.

$M_1 \otimes M_2 = X/L$: produkt tensorowy modułów M_1 i M_2

$f: M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \otimes M_2$ 2-liniowe f oznaczamy przez $\otimes$

$f(m_1, m_2)$ oznaczamy przez $m_1 \otimes m_2$: iloczyn tensorowy elementów m_1 i m_2.

Podobnie: $M_1 \otimes \ldots \otimes M_k$: dla odwzorowań R-k-liniowych

$$f(m_1, \ldots, m_k) \overset{\text{ozn.}}{=} m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$$

$\underset{M_1 \otimes M_2}{\underset{\cap}{m_1 \otimes m_2}}$, $\underset{M_1 \otimes \ldots \otimes M_k}{\underset{\cap}{m_1 \otimes \ldots \otimes m_k}}$: "tensory proste", generują $M_1 \otimes M_2$ / $M_1 \otimes \ldots \otimes M_k$

Pozostałe elementy

$M_1 \otimes M_2$, $M_1 \otimes \ldots \otimes M_k$: "tensory złożone", R-liniowe kombinacje tensorów prostych.