Algebra 2R, lista 1

Zadania domowe studenci wybierają sami, 3 zadania z każdej listy (każdy podpunkt zadania z listy liczy się jako osobne zadanie domowe, w zadaniu domowym nie może być dwóch podpunktów tego samego zadania z listy). Wyjątkowo w przypadku listy 1 dwa zadania domowe są już przydzielone, studenci wybierają dodatkowo trzecie zadanie domowe.

1. D Udowodnić, że $\mathbb{C} = \mathbb{R}[z]$ dla każdej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2. Załóżmy, że $K \subset L$ są ciałami oraz $a, b \in L$. Dla funkcji wymiernej $f(X) \in K(X)$ definiujemy $f(a)$ jako $g(a)/h(a)$, gdzie $g, h \in K[X]$, $f = g/h$ i $h(a) \neq 0$, pod warunkiem, że takie g, h istnieją. W przeciwnym razie $f(a)$ jest nieokreślone. Dowieść, że
(a) jeśli $f(X) \in K(X)$ i $f(a)$ jest okre/slone, to $f(a)$ jest określone jednoznacznie (nie zależy od wyboru wielomianów g, h),
(b) $K(a) = \{f(a) : f \in K(X) \text{ i } f(a) \text{ jest określone}\}$,
(c) $K(a, b) = (K(a))(b)$.

3. Załóżmy, że $K \subset L$ jest rozszerzeniem ciał oraz $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ są stopnia 1.
(a)D Udowodnić, że jeśli układ równań $f_1 = \cdots = f_m = 0$ ma rozwiązanie w L, to ma rozwiązanie w K. (wsk: skorzystać z algebry liniowej).
(b) Czy K zawiera rozwiązanie ogólne tego układu, nad K ?

4. Udowodnić szczegółowo poprawność defincji h w uwadze 1.2.

5. Które z następujących rozwiązań równania $X_1^2 - X_2^3 = 0$ w ciele funkcji wymiernych $\mathbb{C}(X)$ są ogólne nad ciałem $\mathbb{Q}$?
(a) $(1, 1)$, (b) $(\sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{4})$, (c) $(1, \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$,
(d) (X^3, X^2), (e) $(\frac{X^3}{(X-1)^3}, \frac{X^2}{(X-1)^2})$.
wsk: w (d) trzeba trochę popracować na wielomianach, w (e) rozważyć pewne automorfizmy.

6. Załóżmy, że $f \in K[X]$ jest nierozkładalny stopnia $n > 0$, char $K = 0$, L jest ciałem rozkładu wielomianu f nad K. Dowieść, że ciało L ma przynajmniej n różnych automorfizmów.

7. Załóżmy, że $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ jest rosnącym ciągiem ciał. Sprawdzić szczegółowo, że $\bigcup_n K_n$ też jest ciałem zawierającym $K_1, K_2, K_3, \ldots$ jako podciała.

8. Udowodnić, że zbiór $\{\sqrt{p} : p \text{ liczba pierwsza}\}$ jest liniowo niezależny nad ciałem $\mathbb{Q}$.

Zaliczenie ćwiczeń następuje na podstawie zadań domowych i aktywności na ćwiczeniach.

1. Zadania domowe. Z każdej listy zadań student przysyła w module "zadania" w zespole w MS Teams rozwiązania trzech wybranych podpunktów, przy czym nie wolno wybierać więcej niż jednego podpunktu jednego zadania oraz zadań oznaczonych minusem. Na pierwszej liście wyjątkowo literą D oznaczone są dwa obowiązkowe zadania domowe. Student wybiera dodatkowo jedno zadanie lub jego podpunkt z tej listy. W kolejnych listach nie będzie już zaznaczonych obowiązkowych zadań domowych - studenci będą mogli swobodnie wybierać trzy zadania domowe. Przy ocenie zadania domowego brana pod uwagę jest nie tylko poprawność, lecz również staranność rozwiązania.

2. Aktywność na ćwiczeniach. Student deklaruje rozwiązania zadań zaznaczając plusem rozwiązane zadania w tabelce w plikach w kanale ogólnym w zespole w MS Teams, w określonym terminie (zazwyczaj dwa dni przed ćwiczeniami), po dopisaniu swojego nazwiska do listy w tej tabelce. Dzień przed ćwiczeniami (rano) prowadzący ćwiczenia zaznacza literą R dla każdego studenta z listy te zadeklarowane zadania, prezentacje rozwiązań których student powinien przygotować na ćwiczenia.

Uwagi.

1. Niektóre listy zadań będą omawiane na więcej niż jednych ćwiczeniach.

2. 26 lutego 2021 zamiast ćwiczeń odbędzie się wykład, wyjątkowo w godzinach 8:00 - 9:30 (bez przerwy). Pierwsze ćwiczenia odbędą się więc 5 marca, w godzinach 8:15 - 10:00.

Zaliczenie przedmiotu następuje na podstawie zaliczenia ćwiczeń oraz egzaminu pisemnego w sesji egzaminacyjnej. Do egzaminu dopuszczeni są tylko studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia.