RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 3

1. W urnie znajduje się 20 kul białych i 5 czarnych. Losujemy po jednej kuli aż do momentu, gdy wylosujemy czarną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy k losowań, jeżeli a) losujemy bez zwracania b) losujemy ze zwracaniem?

2. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów. Również nie-dyslektyk może popełnić co najmniej 6 błędów i dzieje się to z prawdopodobieństwem 0,1. Jasiu popełnił 6 błędów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

3. Ola i Michał grają w pokera. Michał ma silną rękę i zaczął od 5 dolarów. Prawdopodobieństwo, że Ola ma silniejsze karty wynosi $0,1$. Gdyby Ola miała mocniejsze/ słabsze karty podbiłaby stawkę z prawdopodobieństwem $0,9/0,1$. Ola podbiła stawkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że ma lepsze karty?

4. Mamy dwie urny i 50 kul. Połowa z kul jest biała, a połowa czarna. Jak rozłożyć kule do urn, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana kula z losowej urny jest biała (tzn. najpierw losujemy urnę, a potem z wybranej urny losujemy kulę)?

5. Przypuśćmy, że $1/20$ wszystkich kości do gry jest sfałszowana i zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo trzy kostki i rzucamy nimi. Oblicz
a) prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 18 oczek;
b) prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kostka była sfałszowana, jeżeli wyrzuciliśmy 18 oczek;

6. W zabawę w 'głuchy telefon' gra n osób: $L_1, \ldots, L_n$. Pierwsza osoba L_1 otrzymuje informację w postaci 'tak' lub 'nie' i przekazuje ją L_2. Osoba L_2 przekazują ją dalej, z prawdopodobieństwem p taką samą, a z prawdopodobieństwem $1-p$ przeciwną, itd. Każdy uczestnik przekazuje kolejnemu informację, którą uzyskał w prawdopodobieństwem p i przeciwną z prawdopodobieństwem $1-p$. Oblicz prawdopodobieństwo q_n, że osoba L_n otrzyma prawidłową informację. Oblicz $\lim_n q_n$.

7*. Podczas zawodów na skoczni Letalnica startowało 30 skoczków. W uwagi na mocny wiatr długości skoków oddawanych przez kolejnych skoczków były zupełnie losowe. W rezultacie ostateczna kolejność była również w pełni losowa. Niech B_k będzie zdarzeniem, że k-ty skoczek uzyskał lepszy wynik od swoich wszystkich poprzedników.

a) Udowodnij, że zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ są niezależne.
b) Oblicz $\mathbb{P}[B_k]$.
c) Czy zdarzenia { skoczek 1 wygrał ze skoczkiem 30 } oraz { skoczek 2 wygrał ze skoczkiem 29 } są niezależne?

8. Uzasadnij, że jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to również σ-ciała generowane przez te zbiory są niezależne.

9*. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że istnieje n niezależnych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$ i takich, że $\mathbb{P}[B_i] \in (0,1)$. Z ilu co najmniej elementów musi się składać Ω?

10*. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że Ω jest zbiorem dyskretnym (skończonym lub przeliczalnym). Pokaż, że nie istnieje rodzina niezależnych zdarzeń $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takich, że $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$ dla każdego n.

11. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$ i niech

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$$

będzie nieskończonym rozwinięciem dwójkowym liczby $\omega \in [0,1]$. Udowodnij, że zbiory

$$A_n = \{\omega : \omega_n = 0\}$$

są niezależne.