

# Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Definicja rozmaitości</b>	<b>3</b>
1.1	Rozmaitości topologiczne . . . . .	3
1.2	Mapy, lokalne współrzędne . . . . .	4
1.3	Własności rozmaitości topologicznych . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Rozmaitości gładkie</b>	<b>6</b>
2.1	Atlas rozmaitości . . . . .	6
2.2	Zgodność map . . . . .	7
2.3	Atlas [maksymalny] . . . . .	7
2.4	Funkcje gładkie . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Pomocnik idiotów:</b>	<b>8</b>

# 1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzymy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzeń opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory  $\mathbb{R}^n$  lub  $\mathbb{C}^n$  zapisywane równaniami algebraicznymi (np.  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$  w  $\mathbb{C}^3$ ).

## 1.1. Rozmaitości topologiczne

**Definicja 1.1.** Przestrzeń topologiczna  $M$  jest  $n$ -wymiarową **rozmaitością topologiczną** [ $n$ -rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest **lokalnie euklidesowa** wymiaru  $n$ , czyli każdy punkt  $z$   $M$  posiada otwarte otoczenie w  $M$  homeomorficzne z otwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^n$ .

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu  $p \in U \subseteq M$  takiego, że istnieje homeomorfizm  $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$  [ćwiczenia].

**Konsekwencje Hausdorffowości:**

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

- Dla dowolnego punktu  $p \in U \subseteq M$  i homeomorfizmu  $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ , jeśli  $\bar{K} \subseteq \bar{U}$  jest zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ , to  $K = \phi^{-1}[\bar{K}] \subseteq M$  jest domknięty i zawarty w  $M$  [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

**Konsekwencje przeliczalności bazy:**

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które są po domknięciu zawarte w  $M$ .

- **Parazwartość**, czyli każde pokrycie  $M$  posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
  - Rodzina  $\mathcal{X}$  podzbiorów  $M$  jest **lokalnie skończona** [locally finite], jeżeli każdy punkt  $p \in M$  ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną wieloma elementami  $\mathcal{X}$ .
  - Jeśli mamy pokrycie  $M$  zbiorami  $\mathcal{U}$  i bierzemy drugie pokrycie  $\mathcal{V}$  takie, że dla każdego  $V \in \mathcal{V}$  znajdziemy  $U \in \mathcal{U}$  takie, że  $V \subseteq U$ , to  $\mathcal{U}$  jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem**
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w  $\mathbb{R}^n$  dla odpowiednio dużego  $n$ .

**Konsekwencje lokalnej euklidesowości:**

- **Twierdzenie Brouwer'a:** niepusta  $n$  wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną  $m$  wymiarową rozmaitością gdy  $m \neq n$ .

- Liczba  $n$  w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako  $\dim M = n$ .

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego  $n$ . Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość  $M$  nie jest przez nas wymagana.

**Uwaga 1.2.** Każdy otwarty podzbiór  $n$ -rozmaitości topologicznej jest  $n$ -rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].

## 1.2. Mapy, lokalne współrzędne

**Definicja 1.3.** Parę  $(U, \phi)$ , gdzie  $U$  jest otwartym podzbiorem  $M$ , a  $\phi$  to homeomorfizm

$$\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości  $M$ . Zbiór  $U$  taki jak wyżej nazywamy **zbiorem mapowym** [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli  $(U, \phi)$  jest mapą i dla  $p \in M$  mamy  $\phi(p) = 0$ , to mówimy, że mapa jest **wyśrodkowana na  $p$**  [centered at  $p$ ].

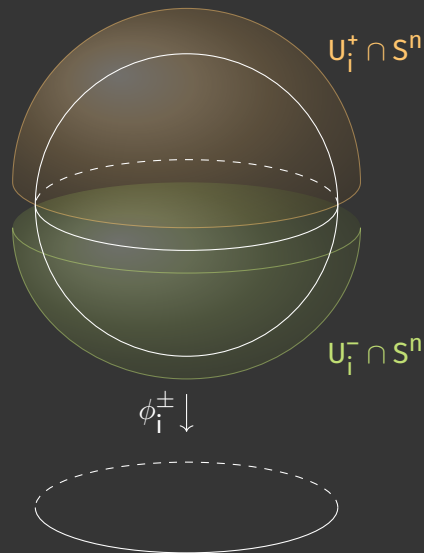
**Fakt 1.4.** Hausdorffowska przestrzeń  $X$  o przeliczalnej bazie jest  $n$ -rozmaitością  $\iff$  posiada rodzinę map  $n$ -wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają całą  $X$ .

**Przykład:**

Rozważmy  $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  z dziedziczną topologią. Z racji, że  $\mathbb{R}^{n+1}$  jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to  $S^n$  też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całą  $S^n$ . Dla  $i = 1, \dots, n+1$  określmy otwarte podzbiory w  $S^n$

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania  $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\bar{U}_i^\pm = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_j^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie  $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \bar{U}_i^\pm$  jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami  $\mathbb{R}^n$ .

## PRZYKŁADY Z LEE

### 1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna  $X$  jest

- **spójna**, gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- **drogowo spójna**, gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- **lokalnie drogowo spójna**, gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

**Uwaga 1.5.** Jeśli przestrzeń  $M$  jest rozmaitością topologiczną, to

1.  $M$  jest lokalnie spójna drogowo,
2.  $M$  jest spójna  $\iff$  jest drogowo spójna,
3. spójne składowe  $M$  są takie same jak drogowe spójne składowe,
4.  $M$  ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem  $M$  (a więc i spójną rozmaitością)

**Dowód.** Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w  $\mathbb{R}^n$  [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza  $M$  jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna  $X$  jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

**Uwaga 1.6.** Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.

**Dowód.** Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w  $q \in X$  jest nazywana **fundamentalną grupą**  $X$  w  $q$ . Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała  $c_q(s) = q$ . Dla rozmaitości topologicznych **fundamentalne grupy** są przeliczalne.

## 2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, co to znaczy, że funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna?

### 2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  będziemy określać za pomocą map:

- Funkcja  $f$  wyrażona w mapie  $(U, \phi)$  to nic innego jak  $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami  $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  to funkcje  $\phi_1 \phi_2^{-1}$  i  $\phi_2 \phi_1^{-1}$  określone na  $U_1 \cap U_2$ .

**Definicja 2.1.** Mapy  $(U, \phi_1)$  oraz  $(U, \phi_2)$  są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia  $\phi_1 \phi_2^{-1}$  jest gładkie. Dla map  $(U, \phi)$  i  $(V, \psi)$  mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$ , albo
- $\phi \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  i  $\psi \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  są gładkie.

**Definicja 2.2.** Mając dane dwie rozmaitości,  $M$  i  $N$ , mówimy, że funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna  $f^{-1}$  też jest różniczkowalna

**Definicja 2.3.** Gładkim atlasem  $\mathcal{A}$  na topologicznej rozmaitości  $M$  nazywamy dowolny taki zbiór map  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  taki, że:

- zbiory mapowe  $U_\alpha$  pokrywają całe  $M$
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

**Przykład:** Rodzina map  $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$  jak wcześniej na sferze  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek:  $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$ . Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{\phi_j^+} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\ & & \downarrow \phi_i^+ \\ & & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \end{array}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

## 2.2. Zgodność map

**Definicja 2.4.** Rozmaitość gładka to para  $(M, \mathcal{A})$  złożona z rozmaitości  $M$  i gładkiego atlasu  $\mathcal{A}$  opisanego na  $M$ .

**Definicja 2.5.** Niech  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  będą gładkimi atlasami na  $M$ . Mówimy, że mapa  $(U, \phi)$  jest zgodna z atlasem  $\mathcal{A}$ , jeżeli jest zgodna z każdą mapą z  $\mathcal{A}_1$ . Dalej, mówimy, że atlas  $\mathcal{A}_2$  jest zgodny z atlasem  $\mathcal{A}_1$ , jeżeli każda mapa z  $\mathcal{A}_1$  jest zgodna z każdą mapą z atlasu  $\mathcal{A}_2$ .

**Twierdzenie 2.6.** Relacja zgodność atlasów jest relacją równoważności.

**Dowód.** Ćwiczenia



## 2.3. Atlas [maksymalny]

Zgodne atlasy określają tę samą strukturę gładką na  $M$ . W takim razie, wygodnym będzie móc zawrzeć wszystkie zgodne atlasy w czymś większym. Z pomocą przychodzi nam pojęcie atlasu maksymalnego.

**Definicja 2.7.** Atlas  $\mathcal{A}$  jest atlasem maksymalnym, jeżeli każda mapa  $(U, \phi)$  z nim zgodna jest w nim zawarta.

**Fakt 2.8.** Każdy atlas  $\mathcal{A}$  na  $M$  zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na  $M$ , który jest zbiorem wszystkich map na  $M$  zgodnych z  $\mathcal{A}$ .

**Dowód.** Ćwiczenia. Korzystamy z lematu Zorna.



W takim razie, równoważnie do pary  $(M, \mathcal{A})$ , gdzie  $\mathcal{A}$  jest dowolnym zgodnym atlasem na  $M$ , możemy wymóc w definicji, aby  $\mathcal{A}$  był atlasem maksymalnym.

## 2.4. Funkcje gładkie

**Definicja 2.9.** Funkcja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  określona na rozmaitości gładkiej  $(M, \mathcal{A})$  jest gładka, jeżeli po wyrażeniu w każdej mapie z tego atlasu jest gładka:

$$(\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}) \quad f \circ \phi^{-1} \text{ jest gładka}$$

**Fakt 2.10.** Niech  $(M, \mathcal{A})$  będzie rozmaitością gładką, a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją gładką na  $M$ .

1. Jeżeli  $(U, \phi)$  jest mapą zgodną z  $\mathcal{A}$ , to  $f$  wyrażone w  $(U, \phi)$ , czyli  $f \circ \phi^{-1}$  też jest funkcją gładką.

### 3. Pomocnik idiotów:

#### Skorowidz definicji

1.1	Definicja: <i>rozmaitość topologiczna</i> . . . . .	3
1.3	Definicja: <i>mapa</i> . . . . .	4
2.1	Definicja: <i>zgodność map</i> . . . . .	6
2.2	Definicja: <i>dyfeomorfizm</i> . . . . .	6
2.3	Definicja: <i>atlas gładki</i> . . . . .	6
2.4	Definicja: <i>rozmaitość gładka</i> . . . . .	7
2.5	Definicja: <i>zgodność map, atlasów</i> . . . . .	7
2.7	Definicja: <i>atlas maksymalny</i> . . . . .	7
2.9	Definicja: <i>gładkość względem atlasu</i> . . . . .	7

#### Twierdzonekowa zabawa

1.2	Uwaga: <i>podzbiory to też rozmaitości</i> . . . . .	4
1.4	Fakt: <i>n-rozmaitość <math>\iff</math> rodzina map pokrywających</i> . . . . .	4
1.5	Uwaga: <i>spójność rozmaitości topologicznych</i> . . . . .	5
1.6	Uwaga: <i>rozmaitości są lokalnie zwarte</i> . . . . .	5
2.6	Twierdzenie: <i>zgodność to relacja równoważności</i> . . . . .	7
2.8	Fakt: <i>każdy atlas jest zawarty w unikalnym atlasie maksymalnym</i> . . . . .	7
2.10	Fakt . . . . .	7