ZADANIE 9.

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że istnieje n niezależnych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$ i takich, że $\mathbb{P}[B_i] \in (0, 1)$. Z ilu co najmniej elementów musi się składać Ω?

ZADANIE 10.

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że Ω jest zbiorem dyskretnym (skończonym lub przeliczalnym). Pokaż, że nie istnieje rodzina niezależnych zdarzeń $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ taka, że $\mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{2}$ dla każdego n.

Lemat: W przestrzeni probabilistycznej dyskretnej $(\exists\ \omega \in \Omega)\ \mathbb{P}[\omega] > 0$ a nawet więcej, $(\forall\ A \subseteq \Omega, \mathbb{P}[A] > 0)(\exists\ \omega \in A)\ \mathbb{P}[A]$.

Dowód jest oczywisty: jeśli taka ω by nie istniała, to

$$1 = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\omega] = \sum_{\omega \in \Omega} 0 = 0,$$

bo Ω jest co najwyżej przeliczalną sumą zbiorów $\{\omega\}$ i są one rozłączne dla różnych elementów Ω. Tak samo powtarzamy dla A - jest ono co najwyżej przeliczalną sumą $\{\omega\}$.

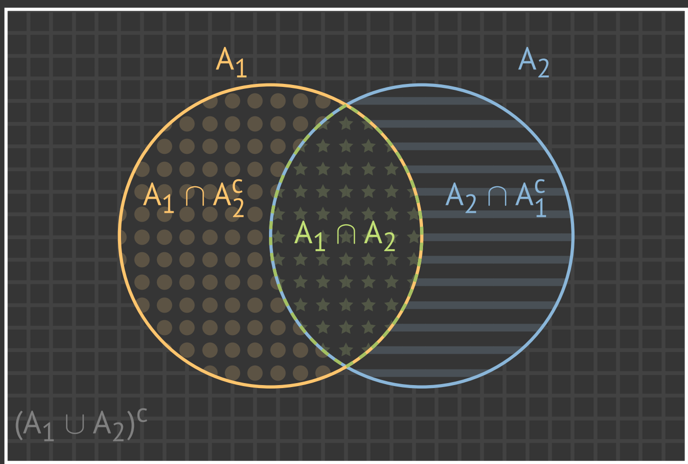
Pomysł jest taki, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ pokażę, że $\mathbb{P}[\omega] < 2^{-n}$, czyli jest równe zero, co jest sprzeczne z dyskretnością Ω.

Lemacik: dla każdego n $A_1, \ldots, A_n$ ciąg zbiorów

$$A_1^{c_1} \cap A_2^{c_2} \cap \ldots \cap A_n^{c_n},$$

gdzie c_i koduje czy bierzemy zbiór A_i czy jego dopełnienie, pokrywa całe Ω.

1. $n = 2$, widać na obrazku:



2. Załóżmy, że ciąg $A_1^{c_1} \cap \ldots \cap A_n^{c_n}$ pokrywa całe Ω. Dokładamy kolejny zbiór, A.

Weźmy dowolne ω. Wiemy, że istnieje ciąg $c_1, \ldots, c_n$, że $\omega \in A_1^{c_1} \cap \ldots . \cap A_n^{c_n}$. Co więcej, $\omega \in A$ lub $\omega \in A^c$. Możemy więc powiedzieć, że $\omega \in A^{c_{n+1}}$. skoro $\omega \in A_1^{c_1} \cap \ldots \cap A_n^{c_n}$ i $\omega \in A^{c_{n+1}}$, to

$$\omega \in A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}^{c_{n+1}}$$

Lemaciuś: Dla dowolnego ciągu jak wyżej

$$\mathbb{P}\left[A_1^{c_1}\cap\ldots\cap A_n^{c_n}\right] = \frac{1}{2^n}$$

1. $n = 2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1\cap A_2] &= \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2] = \frac{1}{4}\\
\mathbb{P}\left[A_1\cap A_2^c\right] &= \mathbb{P}[A_1\setminus A_2] = \mathbb{P}[A_1] - \mathbb{P}[A_1\cap A_2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\\
\mathbb{P}\left[A_1^c\cap A_2\right] &= \mathbb{P}[A_2\setminus A_1] = \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1\cap A_2] = \frac{1}{4}\\
\mathbb{P}\left[A_1^c\cap A_2^c\right] &= \mathbb{P}\left[(A_1\cup A_2)^c\right] = 1 - \mathbb{P}[A_1\cup A_2] = 1 - (\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1\cap A_2]) =\\
&= 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. Załóżmy, że $\mathbb{P}\left[A_1^{c_1}\cap\ldots\cap A_n^{c_n}\right] = 2^{-n}$. Niech teraz A będzie kolejnym zbiorem (lub jego dopełnieniem). Poprzestawiajmy indeksy tak, żeby rozważany ciąg miał postać

$$A_1\cap\ldots\cap A_m\cap A_{m+1}^c\cap\ldots\cap A_n^c,$$

którą piszę się zdecydowanie przyjemniej, a jest równoważny. Dla $m = n$ mamy to z faktu, że $A, A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, dla $m = n-1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[A\cap A_1^c\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right] &= \mathbb{P}[(A\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)\setminus A_1] = \mathbb{P}[A\cap\ldots\cap A_n] - \mathbb{P}[A_1\cap A\cap A_2\cap\ldots\cap A_n] =\\
&= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2-1}{2^{n+1}} = 2^{-n-1}
\end{aligned}$$

Czyli zostaje nam sprawdzić tezę dla $m < n-1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[A\cap A_1\cap\ldots\cap A_m\cap A_{m+1}^c\cap\ldots\cap A_n^c\right] &= \mathbb{P}\left[(A\cap A_1\cap\ldots\cap A_m)\cap(A_{m+1}\cup\ldots\cup A_n)^c\right] =\\
&= \mathbb{P}[(A\cap A_1\cap\ldots\cap A_m)\setminus(A_{m+1}\cup\ldots\cup A_n)] =\\
&= \mathbb{P}[A\cap A_1\cap\ldots\cap A_m] - \mathbb{P}[(A\cap A_1\cap\ldots\cap A_m)\cap(A_{m+1}\cup\ldots\cup A_n)] =\\
&= \mathbb{P}[A]\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}[A_i] - \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=m+1}^{n}(A\cap\ldots\cap A_m)\cap A_i\right] = (\text{☕})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bigcup A\cap\ldots\cap A_m\cap A_i\right] &= \sum\mathbb{P}[A\cap\ldots\cap A_m\cap A_i] - \sum\sum\mathbb{P}\left[A\cap\ldots\cap A_m\cap A_i\cap A_j\right] + \ldots +\\
&+ (-1)^{n-m}\mathbb{P}[A\cap A_1\cap\ldots\cap A_n] =\\
&= \sum 2^{-m-2} - \sum\sum 2^{-m-3} + \ldots + (-1)^{n-m}2^{-n-1} =\\
&= 2^{-m-2}\binom{n-m}{1} - \binom{n-m}{2}2^{-m-3} + \ldots + (-1)^{n-m+1}2^{-n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{☕}) &= 2^{-m-1} - 2^{-m-2}\binom{n-m}{1} + \binom{n-m}{2}2^{-m-3} + \ldots + (-1)^{n-m}2^{-n-1} =\\
&= 2^{-m-1}(1-2^{-1})^{n-m} = 2^{-m-1}2^{-n+m} = 2^{-n-1}
\end{aligned}$$

Lemacik mówił, że każdy $\omega \in \Omega$ musi wpaść w

$$A = A_1^{c_1} \cap \ldots \cap A_n^{c_n},$$

natomiast Lemaciuś powiedział, że

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})\ \mathbb{P}[A] < 2^{-n}$$

czyli $(\forall\ \varepsilon > 0)\ \mathbb{P}[\omega] < \varepsilon \implies \mathbb{P}[\omega] = 0$.

Całkowicie pomijam na chwilę obecną przypadek skończony.

i śmiga