Rozmaitości różniczkowalne

elo

–

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Wstęp

Zanim podany dokładną definicję, możemy rozważyć kilka przykładów rozmaitości różniczkowalnych:

$\hookrightarrow$ powierzchnia, domknięta lub nie,

$\hookrightarrow$ przestrzeniach opisanych (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,

$\hookrightarrow$ podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywalne równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^1$ w $\mathbb{C}^3$).

Cały wykład będzie wstępnym słownikiem wokół pojęcia rozmaitości różniczkowalnej.

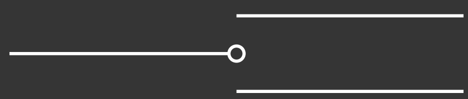
1.1. Rozmaitości topologiczne

Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa,
2. ma przeliczalną bazę,
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Konsekwencje Hausdorffowości:

$\hookrightarrow$ Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

$\hookrightarrow$ Pewne własności otoczeń punktów są zachowywane. To znaczy, dla dowolnego zwartego podzbioru otoczenia punktu $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $K \subseteq U$ jego odpowiednik $\overline{K} = \phi^{-1}(K) \subseteq \overline{U} \subseteq M$ jest domknięty i zwarty w M. [ćwiczenia]

Konsekwencje przeliczalności bazy:

$\hookrightarrow$ Spełniany jest warunek Lindelöfa: każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćwiczenia]

$\hookrightarrow$ Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

które są po domknięciu w M zwarte. Czyli możemy ją wyczerpać za pomocą zbiorów, które są małe.

$\hookrightarrow$ Parazwartość, czyli każde zwarte pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.

$\hookrightarrow$ Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

$\hookrightarrow$ Twierdzenie Brouwer'a: dla $n \neq m$ niepusty otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie jest homeomorficzny z jakimkolwiek otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^m$.

$\hookrightarrow$ Czyli liczba n w definicji jest jednoznaczna dla danej rozmaitości. Określamy **wymiar rozmaitości** $\dim M = n$.

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ), gdzie U to otwarty podzbiór w M, a ϕ to homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Mapa to jest jakiś homeomorfizm między rozmaitością a pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy zbiorem mapowym. **Przez lokalną euklidesowość wiemy, że pokrywają one całą rozmaitość.**

Parę (U, ϕ) nazywamy też **lokalnymi współrzędnymi** na M albo *lokalną parametryzacją* M.

Fakt: Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n-rozmaitością $\iff$ posiada rodzinę map n-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały X.

Przykład: Rozważmy $S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, \ldots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$

RYSUNEK DLA S^3

Określmy odwzorowania $\phi_i^{\pm} \ : \ U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^{\pm}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^{\pm}} = \phi_i^{\pm}(U_i^{\pm}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \overline{U_i^{\pm}}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^{\pm})^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

1.3. Rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle one znaczą to samo.

Dla funkcji $f \ : \ M \to \mathbb{R}$ chcemy określić, co znaczy, że f *jest różniczkowalna*? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

$\hookrightarrow$ Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. Teraz $f \circ \phi^{-1}$ jest funkcją zależącą od n zmiennych rzeczywistych.

$\hookrightarrow$ Chciałoby się powiedzieć, że funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M, ten fragment wyrażony w tej mapie $f \circ \phi^{-1}$ jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.

$\hookrightarrow$ odwzorowanie przejścia między dwoma mapami

Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

$\hookrightarrow$ $U \cap V = \emptyset$, albo

$\hookrightarrow$ $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli (U, ϕ) i (V, ψ) są zgodne, to $f \circ \phi^{-1} \restriction (\phi(U \cap V))$ jest gładkie $\iff$

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie *dyfeomorfizmami*.

Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) \quad : \quad i \; = \; 1, 2, \ldots, n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+)$, $i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n \; : \; x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \ldots, x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \ldots x_n)$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \ldots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ na M.

Uściślenie: Często $(M, \mathscr{A}_1)$ i $(M, \mathscr{A}_2)$ będące rozmaitościami gładkimi określają tę samą rozmaitość.

Niech $\mathscr{A}$ będzie gładkim atlasem na M.

1. Mapa (U, ϕ) jest **zgodna z atlasem** $\mathscr{A}$, jeśli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}$.
2. Dwa **atlasy** $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ **na** M **są zgodne**, jeśli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}_2$.

Twierdzenie: relacja atlasów jest relacją równoważności.

Dowód: Ćwiczenia.

Konwencja jest wtedy taka, że zgodne atlasy zadają tą samą strukturę gładką na M.

Zgodne atlasy można zsumować do jednego większego atlasu.

$\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym** na M, jeśli każda mapa na M zgodna z $\mathscr{A}$ należy do $\mathscr{A}$.

Fakt Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M. Zaś ten atlas maksymalny to zbiór wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$.

Rozmaitość gładką równoważnie definiuje się jako parę $(M, \mathscr{A})$, gdzie M to rozmaitość topologiczna, zaś $\mathscr{A}$ to pewien atlas maksymalny.

1.4. Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest **gładka względem atlasu** $\mathscr{A}$ na M, jeśli

$$(\forall\ (U, \phi) \in \mathscr{A})\ f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R} \text{ jest gładka.}$$

To znaczy po wyrażeniu w dowolnej mapie atlasu jest nadal funkcją gładką.

Fakt:

1. Jeśli $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathscr{A}$, zaś (U, ϕ) jest zgodna z $\mathscr{A}$, to wówczas funkcja f wyrażona w tej nowej mapie (czyli $f \circ \phi^{-1}$) też jest gładka.

2. Jeśli $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ są zgodnymi atlasami, wówczas taka funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathscr{A}_1$ $\iff$ jest gładka względem $\mathscr{A}_2$ $\iff$ jest gładka względem atlasu maksymalnego $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ zawierającego $\mathscr{A}_1$ (oraz $\mathscr{A}$).

Niech M będzie gładką rozmaitością. Wówczas $f : M \to \mathbb{R}$ **jest gładka** jeśli f jest gładka względem każdego (dowolnego) atlasu $\mathscr{A}$ wyznaczającego na M daną gładką strukturę.

Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k-zgodne**, jeśli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k.

C^k-atlas to atlas składający się z map, które są C^k-zgodne. Taki atlas określa strukturę C^k-rozmaitości na M. Jest to coś słabszego niż struktura rozmaitości gładkiej.

C^0 tutaj to jest rozmaitość topologiczna, a C^∞ to często jest rozmaitość gładka.

Na C^k-rozmaitości nie da się sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.

Rozmaitość analityczna [C^ω] to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).

Rozmaitość zespolona ma mapy jako funkcje w $\mathbb{C}^n$ zamiast w $\mathbb{R}^n$

Rozmaitość konformena - zachowuje kąty.

kawałkami liniowe

Dychotomia pomiędzy sytuacją C^0 a sytuacją C^k dla $k > 0$:

$\hookrightarrow$ Z każdego maksymalnego atlasu C^k-rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. A zatem, każda C^k-rozmaitość posiada C^k-zgodną strukturę C^∞-rozmaitości.

$\hookrightarrow$ Istnieją C^0-rozmaitości niedopuszczające żadnej struktury gładkiej.

Definiowanie rozmaitości gładkiej za pomocą samego atlasu (bez odwołań do topologii).

Lemat: Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X i dla każdego α mamy $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ różnowartościowe (n jest ustalone dla całego X). Ta trójka obiektów ma spełniać następujące warunki:

1. Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$

2. Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$

3. Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest odwzorowaniem gładkim. Są to dyfeomorfizmy (gładkie i odwracalne).

4. Przeliczalnie wiele spośród zbiorów U_α pokrywa całe X.

5. Dla dowolnych punktów $p, q \in X$, $p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha)$, $V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}[V_p]$, $q \in \phi_\beta^{-1}[V_q]$ oraz $\phi_\alpha^{-1}[V_p] \cap \phi_\beta^{-1}[V_q] = \emptyset$. Czyli możemy rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$.

Wówczas na X istnieje struktura rozmaitości topologicznej dla której U_α są otwarte. Ponadto rodzina (U_α, ϕ_α) tworzy gładki atlas na X.

Szkic dowodu: Topologię produkujemy jako bazę topologii na X bierzemy przeciwobrazy przez poszczególne ϕ_α otwartych podzbiorów w zbiorach $\phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lokalna n-euklidesowość X względem takiej topologii jest oczywista. Nietrudno jest też wybrać mniejszą bazę przeliczalną [ćwiczenia]. Hausdorffowość tak określonej topologii wynika z warunku 5.

Przykład: Niech $\mathscr{L}$ będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Nie ma na tym zbiorze wygodnej do opisania topologii, ale możemy skorzystać z lematu wyżej.

Zacznijmy od opisania podzbiorów

$$U_h = \{\text{proste niepionowe}\}$$

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

Jeśli $U_h \ni L$, to wtedy $L = \{y = ax + b\}$ i wtedy ϕ_h będzie przypisywać takiej prostej parę (a, b). Jeśli zaś $U_v \ni L$, to wtedy $L = \{x = yc + d\}$ i wtedy ϕ_v przypisze jej (c, d). To, że $\phi_h(U_h)$ i $\phi_v(U_v)$ są różnowartościowe widać. Przyjrzyjmy się teraz przekrojowi naszych zbiorków:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste niepoziomie i niepionowe}\} = \{y = ax + b \ : \ a \neq 0\} = \{x = cd + d \ : \ c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \neq 0\}$$