Wykład 7.

Rozszerzenia Galois

$K \subset L \subset \hat{K}$.

Def. (1) Rozszerzenie algebraiczne ciał $K \subset L$ jest <u>rozszerzeniem Galois</u>, gdy $\forall a \in L \setminus K \ \exists f \in G(L/K) \ f(a) \neq a$

(2) Niech $G < Aut(L)$.

$L^G = \{a \in L : \forall f \in G \ f(a) = a\} = \bigcap_{f \in G} Fix(f)$.

ciało punktów stałych grupy G

<u>Uwaga.</u> ($K \subset L$ algebraiczne)

$K \subset L$ Galois $\Leftrightarrow K = L^{G(L/K)}$

<u>Przykład.</u> (1) $L = K(a)$, a/K algebraiczny

$W_a(X)$: wielomian minimalny a/K.

Niech $a = a_1, \ldots, a_k$: pierwiastki $W_a(X)$ w L.

$G(L/K) \ni f$ wyznaczony przez $f(a) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$,

dlatego tu: $|G(L/K)| \leq k$.

(2) $L \supset K$: ciało rozkładu wielomianu $W(X) \in K[X]$.

$L = K(a_1, \ldots, a_n)$ wszystkie pierwiastki W w L.

$G(L/K) \ni f$ wyznaczone przez $f\restriction_{\{a_1,\dots,a_n\}} \in Sym(\{a_1,\dots,a_n\})$

Dlatego tu: $G(L/K) \hookrightarrow Sym(\{a_1,\dots,a_n\})$

$$\begin{array}{ccc} G(L/K) & \hookrightarrow & Sym(\{a_1,\dots,a_n\}) \\ \Psi & & \\ f & \longmapsto & f\restriction_{\{a_1,\dots,a_n\}}. \end{array}$$

(3) $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ pierwiastek pierwotny stopnia $m \geq 1$.

$[\mathbb{Q}(\zeta_1) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$

$\zeta_1 \in \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\varphi(m)}\} \subseteq \mathbb{C}$: wszystkie pierwiastki pierwotne z 1 stopnia m w $\mathbb{C}$.

$G(\mathbb{Q}(\zeta_1)/\mathbb{Q}) \ni f$ wyznaczony przez $f(\zeta_1)$.

$f(\zeta_1)$ może być dowolnym ζ_i $(1 \leq i \leq \varphi(m))$.
(bo $\mathbb{Q}(\zeta_1) = \mathbb{Q}(\zeta_i)$)

$f(\zeta_1) = \zeta_1^{l_f}$ dla pewnego $0 < l_f < m$
t. że $(l_f, m) = 1$.

Dlatego

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{Q}(\zeta_1)/\mathbb{Q}) & \cong & \mathbb{Z}_m^* \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & l_f \end{array}$$

TW. 8.2. Zał, że $K \underset{alg}{\subset} L$. Wtedy

$K \subset L$: Galois $\Leftrightarrow$ $K \subset L$ rozdzielcze i normalne.

D-d bso $L \subset \hat{K}$.

$\Rightarrow$: ~~rozdzielczość~~; Niech $a \in L \setminus K$.

Niech $a = a_1, a_2, \dots, a_n \in L$: parami różne wszystkie pierwiastki wielomianu minimalnego $W_a(X) \in K[X]$.

Niech $V(X) = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n) \in L[X]$.

- $V(X) | W_a(X)$.
- $V(X)$ niezmienniczy względem $G(L/K)$
  [bo dla $f \in G(L/K)$, f permutuje $\{a_1, \dots, a_n\}$]

dlatego $V(X) \in L^{G(L/K)}[X] \underset{\uparrow}{=} K[X]$
$K \subset L$ Galois.

Stąd: $W_a | V$, więc $W_a = V$ rozdzielczy i rozkłada się nad L na czynniki liniowe.

Dlatego $K \subset L$: rozdzielcze i normalne.

$\Leftarrow$. Niech $a \in L \setminus K$; $W_a(X) \in K[X]$: minimalny dla a/K.

a rozdzielny $\Rightarrow$ niech $a' \in L$ inny pierwiastek $W_a(X)$. (bo $K \subset L$ normalne)
(bo $K \subset L$ rozdzielcze)

Istnieje $f\in G(\hat{K}/K)$ t. że $f(a)=a'\neq a$.

$K\subset L$ normalne $\Rightarrow f[L]=L$.

Stąd: $f|_L\in G(L/K)$ i $(f|_L)(a)\neq a$.

Wniosek 8.3 ($K\subset L\subset M\subset \hat{K}$).

$K\subset M$ Galois $\Rightarrow L\subset M$ Galois.

Tw. 8.4 (Artin) $\underset{\text{skończona}}{G<Aut(L)} \Rightarrow \underset{\text{Galois}}{L^G\subset L}$ i $[L:L^G]=$ $=|G|$.

D-d. $G\subseteq G(L/L^G)$, więc:

- $(\forall x\in L\setminus L^G)(\exists f\in G(L/L^G))\ f(x)\neq x$
- $L^G\subset L$: algebraiczne, bo:

$\Bigg]$ $L^G\subset L$ Galois

Niech $a\in L$. Niech $\{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{a_0}},\dots,a_l\}=Ga=\{g(a): a\in G\}\subseteq L$
G-orbita a.

Niech $W(X)=(X-a_0)\dots(X-a_l)\in L[X]$.

$\forall g\in G\ \ g(W)=W$, więc $W\in L^G[X]\Rightarrow a/L^G$ algebraiczny rozdzielczy
(bo g permutuje $\{a_0,\dots,a_l\}$)

$\deg W(X) \leq |G| \Rightarrow [L^G[a] : L^G] \leq |G|$

$(\forall a \in L)$

$\Downarrow$ $L^G \subset L$ rozdzielcze + tw. Abela

$$[L : L^G] \leq |G|.$$

tw. Abela $\Rightarrow$ $L = L^G(a)$ dla pewnego a.

Niech $W_a(X) \in L^G[X]$: wielomian minimalny a/L^G.

$\deg W_a(X) \leq |G|$.

$|G(L/L^G)| \overset{\uparrow}{=} \deg W_a(X) = [L : L^G] \leq |G|$

$L^G \subset L$ rozdzielcze, normalne

$\Downarrow$ $G \subseteq G(L/L^G)$

$G = G(L/L^G)$ i $[L : L^G] = |G|$.

Wn. 8.5. $K \subset L$: skończone rozszerzenie Galois $\Rightarrow$

$[L : K] = |G(L/K)|$.

<u>D-d</u>. Niech $G = G(L/K)$. Wtedy $K \overset{\text{bo } K \subset L \text{ Galois.}}{=} L^G$ i G skończona

z twierdzenia Artina : $[L : K] = [L : L^G] = |G|$.

$K \subset L$ algebraiczne

$\mathcal{L} = \{L' : K \subseteq \underset{\text{ciało}}{L'} \subseteq L\}$, $\mathcal{G} = \{H : H < G(L/K)\}$

$$\Gamma : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G} \qquad\qquad \Lambda : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{L}$$

$$L' \stackrel{\Gamma}{\longmapsto} G(L/L') < G(L/K) \qquad G \stackrel{\Lambda}{\longmapsto} K \subseteq L^G \subseteq L, \quad G < G(L/K)$$

TW. 8.6 (podstawowe twierdzenie teorii Galois).

Zał, że $K \subset L$: skończone rozszerzenie Galois.

Wtedy Γ : bijekcja i $\Lambda = \Gamma^{-1}$.

D-d $\mathcal{L} \ni L' \stackrel{\Gamma}{\longmapsto} G(L/L') \stackrel{\Lambda}{\longmapsto} L^{G(L/L')} \underset{\uparrow}{=} L'$: $\Lambda \circ \Gamma = id_{\mathcal{L}}$

bo $L' \subset L$ Galois (Wn. 8.3)

Wn. 8.3

$L^H \subset L$: Galois (~~Wn. 8, tw. Artina 8.5~~)

$$\mathcal{G} \ni H \stackrel{\Lambda}{\longmapsto} L^H \stackrel{\Gamma}{\longmapsto} G(L/L^H) \underset{\uparrow}{=} H : \Gamma \circ \Lambda = id_{\mathcal{G}}.$$

tw. Artina 8.4.

Wn. 8.9. Zał, że $K \subset L$: skończone, Galois.

Dla $H < G(L/K)$: $H \lhd G(L/K) \iff K \subset L^H$: normalne

$\quad\quad //\quad$ tzn. tu : Galois

Ponadto wtedy $G(L^H/K) \cong G(L/K)/H$.

$\Lambda(H)$

Ćw. Niech $K \subseteq L' \subseteq L \subseteq \hat{K}$ t. że $K \subseteq L$: normalne, skończone.

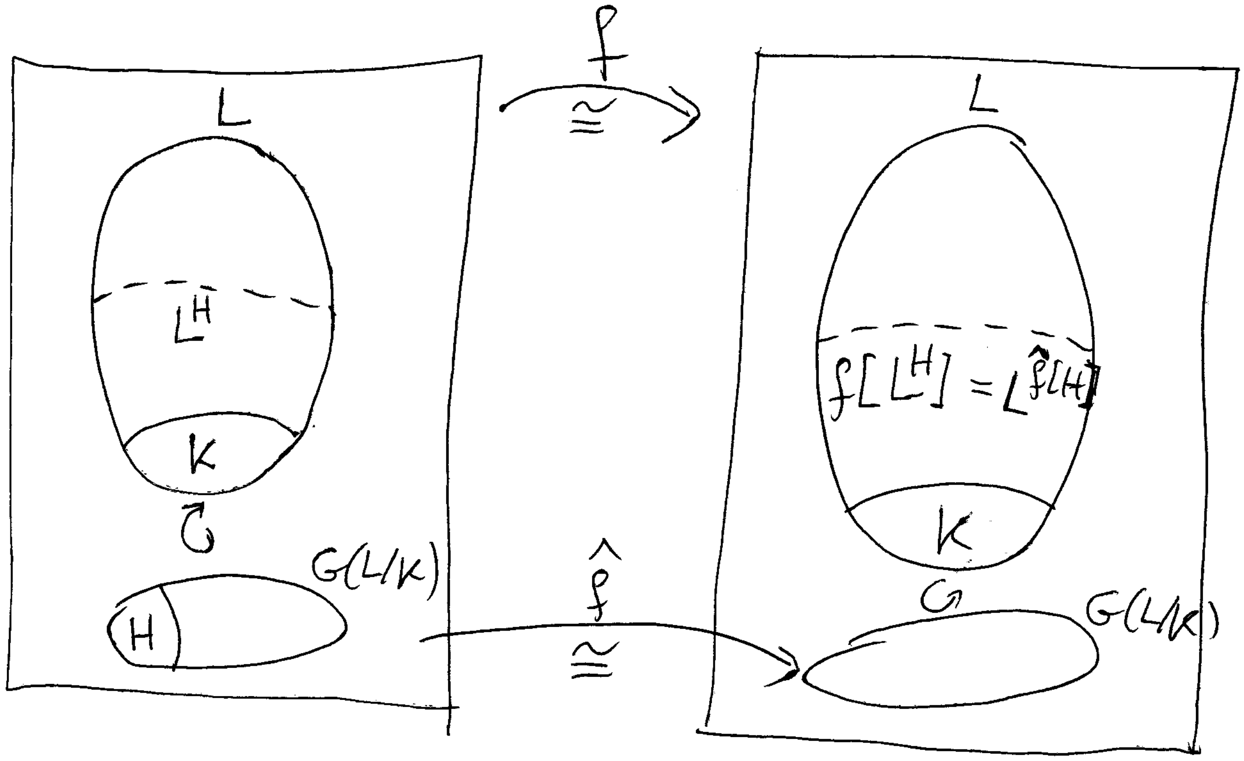
Wtedy $K \subseteq L'$: normalne $\iff \forall f \in G(L/K)\ f[L'] = L'$.

(bez skończoności też prawda)

D-d $\boxed{\text{rysunkowy}}$ ~~$\Rightarrow$: Cel: $K \subset L^H$: normalne.~~

~~Niech~~ Dla ~~$f \in G(\hat{K}/K)$.~~ $\Rightarrow$ $f|_L \in G(L/K)$.

| ~~$K \subset L$ normalne~~ Niech $f \in G(L/K)$



wyjaśnienia (opis rysunku):

- struktura 2-sortowa $(L, G(L/K), *)$

  L – struktura ciała; $G(L/K)$ – struktura grupy; $*$ – działanie $G(L/K)$ na L

$f : L \xrightarrow{\cong} L$ indukuje

$$\hat{f} : \mathrm{Aut}(L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(L) \ : \ \hat{f}(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}$$

$\vee \qquad \vee$ tzn: $\hat{f} = j_f \in \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}(L))$

$$\hat{f} : G(L/K) \xrightarrow{\cong} G(L/K), \text{ bo: } f|_K = id_K.$$

$$\hat{f} = j_f \in \mathrm{Inn}(G(L/K))$$

- $f \cup \hat{f} : (L, G(L/K), *) \xrightarrow{\cong} (L, G(L/K), *)$.

- $L^H = \bigcap_{g \in H} Fix(g) \Rightarrow f[L^H] = \bigcap_{g \in \hat{f}[H]} Fix(g) = L^{H^f} = L^{\hat{f}[H]}$, $\hat{f}[H] = H^f$

<u>D-d</u> ~~tw.~~ Wn. 8.9:

$$H \triangleleft G(L/K) \Leftrightarrow \forall f \in G(L/K)\ \hat{f}[H] = H$$

$$\Updownarrow \Gamma : \text{bijekcja}$$

$$L^{\hat{f}[H]} = L^H$$

$$\Updownarrow$$

$$f[L^H] = L^H$$

$$\Leftrightarrow K \subset L^H \text{ normalne.}$$

Zał., że $H \triangleleft G(L/K)$, tzn. $K \subset L^H$: Galois.

Wtedy $\varphi : G(L/K) \xrightarrow{epi} G(L^H/K)$ (φ: obcięcie do L_H).

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{ f \in G(L/K) : f\restriction_{L^H} = id_{L^H} \}$$
$$= G(L/L^H) = H,$$

tw. Artina 8.4

Dlatego $G(L^H/K) \cong G(L/K)/H$.