ZADANIE 1.

Uzasadnij, że jeśli w definicji rozmaitości topologicznej warunek lokalnej euklidesowości zastąpimy którymkolwiek z następujących warunków:

(a) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$*,*

(b) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z całą przestrzenią $\mathbb{R}^n$

to otrzymamy definicję równoważną.

To, że (a) $\iff$ (b) wynika z tego, że otwarta kula jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Pokażemy więc, że

Lokalnie euklidesowa $\iff$ *każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą.*

$\implies$

Ustalmy dowolne $x \in M$. Niech $x \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem x w M takim, że $U \cong \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ z definicji podanej na wykładzie. Nazwijmy ten homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U}$. Wiemy, że istnieje $r > 0$ takie, że $B_r(\phi(x)) \subseteq \overline{U}$. Co więcej, $\phi^{-1}[B_r(\phi(x))]$ jest otwartym podzbiorem M, bo ϕ to homeomorfizm i przeciwobraz zbioru otwartego jest przezeń otwarty. Czyli $M \supseteq \phi^{-1}[B_r(\phi(x))] \ni x$ jest otwartym podzbiorem M zawierającym x i homeomorficznym z otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$.

$\impliedby$

Otwarta kula jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, więc mamy homeomorfizm między pewnym otwartym otoczeniem $x \in U \subseteq M$ a otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

ZADANIE 2.

Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości topologicznej jest rozmaitością topologiczną.

Niech M będzie rozmaitością topologiczną, a $M' \subseteq M$ jej otwartym podzbiorem.

1. Hausdorffowość:

$x, y \in M' \implies x, y \in M$, czyli istnieją $U, V \subseteq M$ otwarte podzbiory M takie, że $x \in U, y \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Ponieważ M' jest otwarty, to istnieją otwarte $x \in U'$ i $y \in V'$ zawarte w M'. Skończony przekrój zbiorów otwartych, więc $x \in U' \cap U$ i $y \in V' \cap V$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w M'.

2. Przeliczalna baza:

Niech $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie przeliczalną bazą M. Wtedy $\{U_i \cap M'\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów otwartych w M' (przecięcie dwóch otwartych jest otwarte). Ponieważ otwarty zbiór w M' jest również otwarty w M, to mogliśmy go wysumować za pomocą U_i, czyli w szczególności możemy go wysumować z $U_i \cap M'$, bo sam jest i tak zawarty z M'.

3. Lokalna Hausdorffowość:

Weźmy dowolny $x \in M' \subseteq M$. Ponieważ M było rozmaitością topologiczną, to dla pewnego otwartego otoczenia $x \in U \subseteq M$ mieliśmy homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Znowu, $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym, a więc $\phi \restriction (U \cap M')$ jest homeomorfizmem z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ (bo $U \cap M'$ przechodzi na coś otwartego).

ZADANIE 3.

Uzasadnij, że jeśli rozmaitość M *jest spójna, to jest też drogowo spójna, tzn. każde dwa punkty* $p, q \in M$ *można połączyć ciągłą krzywą* $\gamma : [0, 1] \to M$ *(taką, że* $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$*). Wskazówka: dla ustalonego punktu* p *rozważ zbiór tych punktów* q*, które można połączyć z* p *krzywą ciągłą.*

Spójna $\implies$ jedyne zbiory otwarto-domknięte to $\emptyset$ i M.

Ustalmy dowolne $p \in M$. Niech Σ_p będzie zbiorem tych punktów $q \in M$, które można połączyć z p krzywą ciągłą.

1. Σ_p jest zbiorem otwartym:

Niech $q \in \Sigma_p$ i γ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Pokażemy, że możemy na nim opisać zbiór otwarty. Niech $q \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem q, a $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie homeomorfizmem wynikającej z lokalnej euklidesowości M. Weźmy teraz dowolny $y \in U$ i pokażemy, że wówczas istnieje krzywa z p do y.

Wiemy, że $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią łukowo spójną, niech więc $\mu : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą ciągłą taką, że $\mu(0) = \phi(q)$ i $\mu(1) = \phi(y)$. Rozważmy teraz krzywą

$$\gamma' : [0, 1] \to M$$

$$\gamma'(a) = \begin{cases} \gamma(2a) & a \leq \frac{1}{2} \\ \phi^{-1}[\mu(2a - 1)] \end{cases}$$

Mamy $\gamma'(0) = p$ i $\gamma'(1) = \phi^{-1}[\mu(1)] = \phi^{-1}[\phi(y)] = y$, czyli $y \in \Sigma_p$

2. Σ_p jest zbiorem domkniętym:

Równoważnie, $M \setminus \Sigma_p$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $M \setminus \Sigma_p$ nie byłoby otwarte, to dla pewnego $x \notin \Sigma_p$ mielibyśmy otoczenie z $y \in \Sigma_p$ i argument podobny jak wyżej: punkty są w jednym otoczeniu homeomorficznym z $\mathbb{R}^n$, więc możemy skonstruować krzywą z p przez y do x, więc $x \in \Sigma_p$ i mamy sprzeczność.

ZADANIE 4.

Udowodnij, że jeśli (U, ϕ) *jest mapą na rozmaitości* M, *zaś* K *jest zwartym podzbiorem* $\phi(U)$, *to zbiór* $\phi^{-1}(K)$ *jest domknięty i zwarty w* M. *Pokaż też, że jeśli* K *jest domknięty w* $\phi(U)$, *to* $\phi^{-1}(K)$ *nie musi być domknięty w* M.