Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Wstęp

Zanim podany dokładną definicję, możemy rozważyć kilka przykładów rozmaitości różniczkowalnych:

$\hookrightarrow$ powierzchnia, domknięta lub nie,

$\hookrightarrow$ przestrzeniach opisanych (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,

$\hookrightarrow$ podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywalne równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^1$ w $\mathbb{C}^3$).

Cały wykład będzie wstępnym słownikiem wokół pojęcia rozmaitości różniczkowalnej.

1.1. Rozmaitości topologiczne

Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

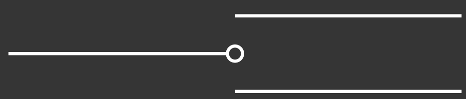
1. jest Hausdorffa,

2. ma przeliczalną bazę,

3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Konsekwencje Hausdorffowości:

$\hookrightarrow$ Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

$\hookrightarrow$ Pewne własności otoczeń punktów są zachowywane. To znaczy, dla dowolnego zwartego podzbioru otoczenia punktu $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $K \subseteq U$ jego odpowiednik $\overline{K} = \phi^{-1}(K) \subseteq \overline{U} \subseteq M$ jest domknięty i zwarty w M. [ćwiczenia]

Konsekwencje przeliczalności bazy:

$\hookrightarrow$ Spełniany jest warunek Lindelöfa: każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćwiczenia]

$\hookrightarrow$ Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

które są po domknięciu w M zwarte. Czyli możemy ją wyczerpać za pomocą zbiorów, które są małe.

$\hookrightarrow$ Parazwartość, czyli każde zwarte pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.

$\hookrightarrow$ Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

$\hookrightarrow$ Twierdzenie Brouwer'a: dla $n \neq m$ niepusty otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie jest homeomorficzny z jakimkolwiek otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^m$.

$\hookrightarrow$ Czyli liczba n w definicji jest jednoznaczna dla danej rozmaitości. Określamy **wymiar rozmaitości** $\dim M = n$.

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ), gdzie U to otwarty podzbiór w M, a ϕ to homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Mapa to jest jakiś homeomorfizm między rozmaitością a pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy zbiorem mapowym. **Przez lokalną euklidesowość wiemy, że pokrywają one całą rozmaitość.**

Parę (U, ϕ) nazywamy też **lokalnymi współrzędnymi** na M albo *lokalną parametryzacją* M.

Fakt: Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n-rozmaitością $\iff$ posiada rodzinę map n-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały X.

Przykład: Rozważmy $S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, \ldots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \; : \; x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{x \in S^n \; : \; x_i < 0\}$$

RYSUNEK DLA S^3

Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \; : \; U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; : \; \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

1.3. Rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle one znaczą to samo.

Dla funkcji $f \; : \; M \to \mathbb{R}$ chcemy określić, co znaczy, że f *jest różniczkowalna*? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

$\hookrightarrow$ Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. Teraz $f \circ \phi^{-1}$ jest funkcją zależącą od n zmiennych rzeczywistych.

$\hookrightarrow$ Chciałoby się powiedzieć, że funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M, ten fragment wyrażony w tej mapie $f \circ \phi^{-1}$ jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.

$\hookrightarrow$ odwzorowanie przejścia między dwoma mapami

Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $\hookrightarrow$ $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\hookrightarrow$ $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli (U, ϕ) i (V, ψ) są zgodne, to $f \circ \phi^{-1} \restriction (\phi(U \cap V))$ jest gładkie $\iff$

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie *dyfeomorfizmami*.

Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$.