

Własności \otimes

(7)
Alg 2R/12

Uwaga 12.3. $M_1, M_2 : R$ -moduły

Niech $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \otimes M_2 : f(m_1, m_2) = m_1 \otimes m_2$.

Wtedy $f : 2$ -liniowe (zostało oznaczone przez \otimes)

oraz $\mathbb{Z}(\forall N : R\text{-moduł})(\forall g : M_1 \times M_2 \xrightarrow{2\text{-liniowe}} N)$

$\exists! h : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow N$ R -liniowy t.j.

$$M_1 \times M_2 \xrightarrow{\otimes = f} M_1 \otimes M_2$$

$$\begin{array}{ccc} & \# & \\ g \searrow & & \nearrow h \\ & N & \end{array}$$

(*)

(warunek uniwersalności)

(tzn: $f = \otimes$: najmniej "zdegenerowane" odwzorowanie
(najogólniejsze)

2 -liniowe z $M_1 \times M_2$ w jakikolwiek R -moduł).

D-d

$$\begin{array}{ccc} & M_1 \otimes M_2 = X/L & \\ f \nearrow & \# & \nwarrow j : \text{dodawanie} \\ M_1 \times M_2 & \xrightarrow{f_0 = \text{id}} X \leftarrow R\text{-moduł wolny} & \\ & h \downarrow & \downarrow l : R\text{-homomorfizm t.j.} \\ & \# & \\ & N & \end{array}$$

o bazie $M_1 \times M_2$

$l(m_1, m_2) = g(m_1, m_2)$.

ten warunek wyznacza l , bo X : wolny.

$g = l \circ f_0$ dwuliniowe $\Rightarrow \underline{\text{Ker } l \supseteq L}$, bo:

$$g(m_1 + m_1', m_2) = g(m_1, m_2) + g(m_1', m_2) \quad (*)$$

$$l(\langle m_1 + m_1', m_2 \rangle) = l(\langle m_1, m_2 \rangle) + l(\langle m_1', m_2 \rangle)$$

$$l(\langle m_1 + m_1', m_2 \rangle - [\langle m_1, m_2 \rangle + \langle m_1', m_2 \rangle]) = 0$$

~~wiec~~ więc: $\in \text{Ker } l$

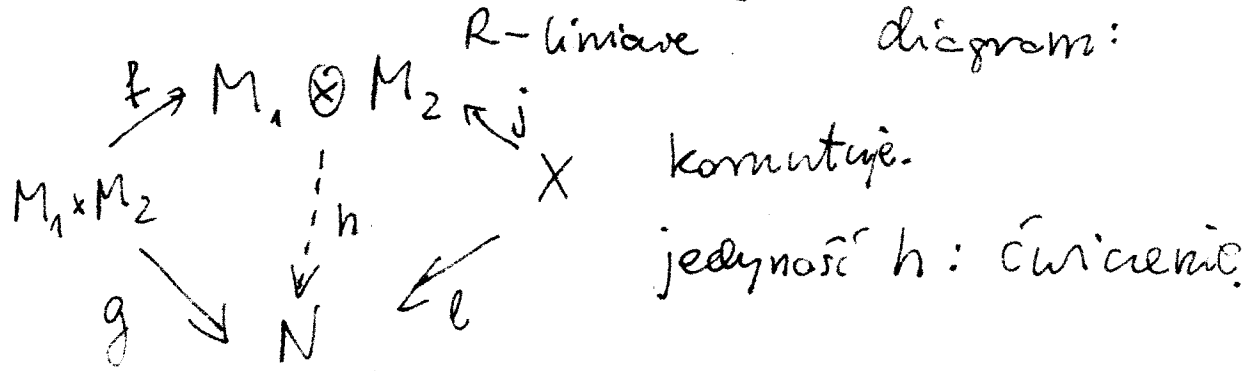
typowy generator L
jako R -podmodułu X

podobnie dla innych generatorów L ,

wsc: $\{\text{generatory } L\} \subseteq \text{Ker } l \Rightarrow L \subseteq \text{Ker } l$.
" $\text{Ker } j$

z tw. o faktoryzacji

R -homomorfizmów: $\exists! h: M_1 \otimes M_2 \rightarrow N$ t.je



Uwaga 12.4. Warunek $(*)$ w Wiedze 12.3

Wyznacza $M_1 \otimes M_2$ z dokładnością do \cong .

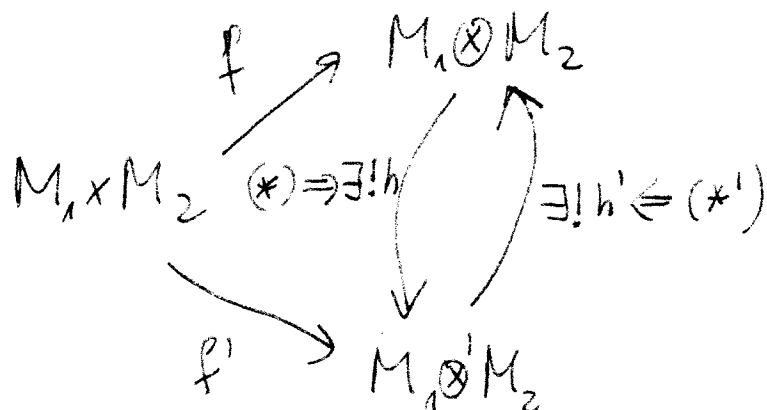
D-d. (kategoryjny struktury)

(9)
Alg2R/12

Zał, że $M_1 \times M_2 \xrightarrow{f'} M_1 \otimes M_2$ R -2-liniowe

spełniające warunki (*).

(w wersji dla $f': (*)'$)



$$h \circ h' = \text{id}_{M_1 \otimes M_2}$$

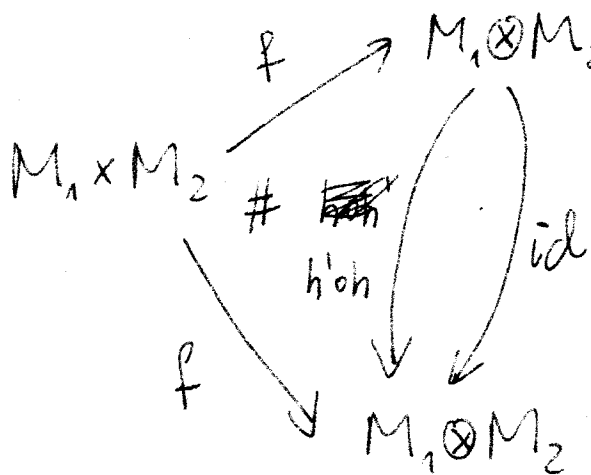
$$h' \circ h = \text{id}_{M_1 \otimes M_2}$$

up to \uparrow :

$\Rightarrow h$: izomorfizm

R -modułów

+ komutowanie
diagramu



~~z warunkiem~~

z jedyności h w $(*)$:

$$h' \circ h = \text{id}_{M_1 \otimes M_2}$$

Dlatego: $M_1 \otimes M_2$ ($M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$)

można definiować "abstrakcyjnie" przez kategoryjny

wanunek uniwersalności (*).