Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis treści

1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzmy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzenie opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w $\mathbb{C}^3$).

1.1. Rozmaitości topologiczne

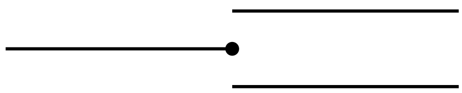
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń

  nie jest rozmaitością topologiczną.
- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, to $K = \phi^{-1}[\overline{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

  $$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

  które są po domknięciu zawarte w M.
- Parazwartość, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
  - Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona* [locally finite], jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończenie wieloma elementami $\mathscr{X}$.
  - Jeśli mamy pokrycie M zbiorami $\mathscr{U}$ i bierzemy drugie pokrycie $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{U}$ jest pokryciem włożonym/rozdrobnieniem
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- Twierdzenie Brouwer'a: niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.

- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.2. *Każdy otwarty podzbiór n-rozmaitości topologicznej jest n-rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].*

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Definicja 1.3. Parę (U, ϕ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, a ϕ to homeomorfizm

$$\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M. Zbiór U taki jak wyżej nazywamy zbiorem mapowym [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli (U, ϕ) jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest *wyśrodkowana na* p [centered at p].

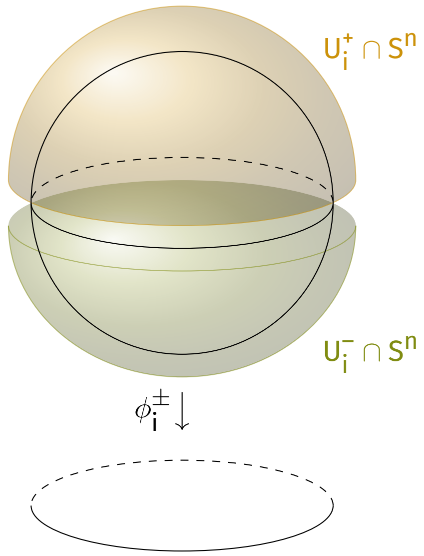
Fakt 1.4. *Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n-rozmaitością $\iff$ posiada rodzinę map n-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały X.*

Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, ..., n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \ : \ U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

PRZYKŁADY Z LEE

1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- spójna , gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- drogowo spójna , gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- lokalnie drogowo spójna , gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

Uwaga 1.5. *Jeśli przestrzeń* M *jest rozmaitością topologiczną, to*

1. M *jest lokalnie spójna drogowo,*
2. M *jest spójna* $\iff$ *jest drogowo spójna,*
3. *spójne składowe* M *są takie same jak dorogowe spójne składowe,*
4. M *ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem* M *(a więc i spójną rozmaitością)*

Dowód. Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w $\mathbb{R}^n$ [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza M jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna X jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

Uwaga 1.6. *Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.*

Dowód. Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w $q \in X$ jest nazywana fundamentalną grupą X w q. Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała $c_q(s) = q$. Dla rozmaitości topologicznych *fundamentalne grupy* są przeliczalne.

2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, *co to znaczy, że funkcja* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna?*

2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ będziemy określać za pomocą *map*:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- **Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ to funkcje $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_2\phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 2.1. Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Definicja 2.2. Mając dane dwie rozmaitości, M i N, mówimy, że funkcja $f : M \to N$ jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna f^{-1} też jest różniczkowalna

Definicja 2.3. Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. 1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. 2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) \ : \ i = 1, 2, ..., n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{tikzcd} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, ..., x_n) \arrow[r, "\phi_j^+)^{-1}"] & (x_1, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ...x_n) \arrow[d, "\phi_i^+"] \\ & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, ..., x_n) \end{tikzcd}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ..., x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

2.2. Zgodność map

Definicja 2.4. Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ opisanego na M.

Definicja 2.5. Niech $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ będą gładkimi atlasami na M. Mówimy, że mapa (U, ϕ) jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}$, jeżeli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}_1$. Dalej, mówimy, że atlas $\mathscr{A}_2$ jest zgodny z altasem $\mathscr{A}_1$, jeżeli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z każdą mapą z atlasu $\mathscr{A}_2$.

Twierdzenie 2.6. *Relacja zgodnosc atlasów jest relacją równoważności.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

2.3. Atlas [maksymalny]

Zgodne atlasy określają tę samą strukturę gładką na M. W takim razie, wygodnym będzie móc zawerzeć wszystkie zgodne atlasy w czymś większym. Z pomocą przychodzi nam pojęcie atlasu maksymalnego .

Definicja 2.7. Atlas $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym**, jeżeli każda mapa (U, ϕ) z nim zgodna jest w nim zawarta.

Fakt 2.8. *Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M, który jest zbiorem wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$.*

Dowód. Ćwiczenia. Korzystamy z lematu Zorna. ☕

W takim razie, równoważnie do pary $(M, \mathscr{A})$, gdzie $\mathscr{A}$ jest dowolnym zgodnym atlasem na M, możemy wymóc w definicji, aby $\mathscr{A}$ **był atlasem maksymalnym**.

2.4. Funkcje gładkie

Definicja 2.9. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ określona na rozmaitości gładkiej $(M, \mathscr{A})$ jest gładka, jeżeli po wyrażeniu w każdej mapie z tego atlasu jest gładka:

$$(\forall\ (U, \phi) \in \mathscr{A}) \quad f \circ \phi^{-1} \text{ jest gładka}$$

Fakt 2.10. *Niech $(M, \mathscr{A})$ będzie rozmaitością gładką, a $f : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na M.*

1. *Jeżeli (U, ϕ) jest mapą zgodną z $\mathscr{A}$, to f wyrażone w (U, ϕ), czyli $f \circ \phi^{-1}$ też jest funkcją gładką.*
2. *Niech $\mathscr{A}'$ będzie atlasem zgodnym z $\mathscr{A}$. Wówczas funkcja f jest zgodna względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest gładka względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest zgodna względem atlasu maksymalnego zawierającego oba te atlasy.*

Co więcej, możemy powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka $\iff$ jest gładka względem każdego atlasu $\mathscr{A}$ wyznaczającego na M gładką strukturę. [Ćwiczenia]

Definicja 2.11.

- Dwie mapy (U, ϕ) i (V, ψ) są **C^k-zgodne**, jeżeli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k.
- **C^k-atlas** to atlas składający się z map, które są C^k-zgodne
  - Taki atlas określa strukturę C^k-rozmaitości na M
  - Jest to struktura słabsza niż struktura rozmaitości gdładkiej

C^0 zwykle oznacza rozmaitość topologiczną, a C^∞ to rozmaitość gładka.

Fakt 2.12. *Na C^k rozmaitości nie można sensownie określić funkcji klasy C^m dla $m > k$.*

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych, na przykład:

- **Rozmaitość analityczna** [C^ω] to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- **Rozmaitość zespolona** ma mapy jako funkcje w $\mathbb{C}^n$ zamiast w $\mathbb{R}^n$
- Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty
- Rozmaitość kawałkami liniowa

Istnieją rozmaitości topologiczne, które nie dopuszczają żadnej struktury gładkiej (pierwszym takim przykładem była zwarta 10-rozmaitość odkryta przez M. Kervaire). Z drugiej strony, z każdego maksymalnego atlasu C^k rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych, czyli na każdej C^k istnieje struktura C^∞ rozmaitości.

Lemat 2.13. *Niech X będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów X takich, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ które jest różnowartościowe. Załóżmy, że takie $M, \{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}$ spełniają:*

1. *Dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$*
2. *Dla każdych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$*
3. *Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to*
$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
   jest gładkim dyfeomorfizmem (gładkie i odwracalne)
4. *Przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X*
5. *Dla dowolnych $p, q \in X, p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p), q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) \emptyset$, czyli możemy* rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$.

*Wówczas na X istnieje **struktura rozmaitości topologicznej na X**, dla której U_α są zbiorami otwartymi. Ponadtwo, (U_α, ϕ_α) tworzy gładki atlas na X.*

Dowód. Prezentujemy szkic dowodu:

- Topologia jest produkowana jako przeciwobrazy przez poszczeglne ϕ_α
- Lokalna euklidesowość jest oczywista
- Mniejsza baza przeliczalna też śmignie [ćwiczenia]
- Hausdorffowość wynika z warunku 5.

PRZYKŁAD - linie na prostej, ale nie chce już dzisiaj

3. Rozkłady jedności

Motywacja: jak sklejać funkcje? W szczególności, jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem M istnieje gładka funkcja $f : M \to \mathbb{R}^n$ taka, że:

$$\begin{aligned} f(p) = 0 \quad & p \in \partial M \\ f(p) > 0 \quad & p \in \mathrm{Int}(M)? \end{aligned}$$

3.1. Parazwartość i kumple

Definicja 3.1. Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona**, jeżeli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w X takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu α.

Definicja 3.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem** pokrycia $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α.

Relacja bycia rozdrobnieniem jest relacją przechodnią.

Definicja 3.3. Przestrzeń topologiczna jest **parazwarta**, jeśli każde pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Lemat 3.4. *Każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta.*

Dowód. Dowód pojawiamy, ale jest w Lee i ja popatrze kiedyś ☕

Uwaga 3.5. *W rozdrobnieniu o którym mowa w lemacie 3.4 można założyć, że składa się ze zbiorów mapowych i prezwartych [domknięcie jest zwarte].*

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie wyjściowym pokryciem M. Łatwo znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych [chyba lista 1]. Stosując lemat 3.4 do $\{U'_\gamma\}$ dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Ponadto, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ, więc jest mapowy i prezwarty. ☕

Uwaga 3.6. *Niech $\{A_\alpha\}$ będzie dowolną lokalnie skończoną rodziną podzbiorów prezwartych. Wówczas dla każdego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha \ : \ A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest skończona.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że rodzina ta jest nieskończona. Czyli możemy wybrać ciąg A_{α_i} z tej rodziny oraz punkt $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w zwartym $\mathrm{cl}(A_{\alpha_0}$ i oznaczmy go p. Dowolne otoczenie otwarte U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele x_i, więc przecina niepusto nieskończenie wiele A_{α_i}, co daje sprzeczność z lokalną skończonością $\{A_\alpha\}$. ☕

Uwaga 3.7. *Istnieją zwarte zbiory $D_\beta \subseteq M$ takie, że $\bigcup D_\beta = M$. To znaczy możemy pokryć M zbiorami zwartymi.*

Dowód. Wiemy już, że każdą rozmaitość możemy pokryć zbiorami prezwartymi. Niech więc V_β będzie takim pokryciem. O każdy zbiorze V_β możemy myśleć jak o otwartym podzbiorze w $\mathbb{R}^n$ poprzez utożsamienie go z $\phi_\beta(V_\beta)$, gdzie (V_β, ϕ_β) jest mapą.

Każde V_β jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów V_{β_k} otwartych, których zwarte domknięcią zawierają się w $V_{\beta_0} \supseteq \mathrm{cl}(V_{\beta_k})$. Niech CO TU SIĘ STAŁO Z INDEKSAMI OH BOOOOI ☕

Podsumowując, dla dowolnego pokrycia otwartego U_α rozmaitości topologicznej M istnieje lokalnie skończone rozdrobnienie V_β składające się ze zbiorów mapowych i prezwartych, oraz rodzina D_β zwartych podzbiorów $D_\beta \subseteq U_\beta$, która dalej jest pokryciem M.

To samo dotyczy się rozmaitości z brzegiem.

3.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

Definicja 3.8. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ jej **nośnik** to

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}(\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\})$$

Fakt 3.9. *Dla dowolnego otwartego* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *i dowolnego zwartego* $D \subseteq \Omega$ *istnieje gładka funkcja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *taka, że*

- $f \geq 0$
- $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$
- $f(x) > 0$

Twierdzenie 3.10. [Twierdzenie o rozkładzie jedności] *Dla każdego otwartego pokrycia* $\{U_\alpha\}$ *rozmaitości gładkiej* M *istnieje rodzina* $\{f_j\}_{j\in J}$ *gładkich funkcji* $f_j : M \to \mathbb{R}$ *takich, że*

- $f_j \geq 0$
- *każdy nośnik* $\mathrm{supp}(f_j)$ *zawiera się w pewnym* U_α *z pokrycia*
- *nośniki* $\{\mathrm{supp}(f_j)\}_{j\in J}$ *tworzą lokalnie skończoną rodzinę podzbiorów w* M.
- *dla każdego* $x \in M$ $\sum\limits_{j\in J} f_j(x) = 1$

Jest to ***rozkład jedności wpisany w pokrycie*** $\{U_\alpha\}$

Dowód. Dla ułatwienia sprawy pokażemy prawdziwość tego twierdzenia dla rozmaitości gładkich bez brzegu. Ale to dopiero w przyszłości, bo aktualnie mi się nie chc ☕

3.3. Zastosowania rozkładu jedności

Ogólnie, dzięki rozkładowi jedności możemy konstruować funkcje gładkie określone na całym M, *które spełniają pewne wymagania, z lokalnie określonych (w mapach) fragmentów takich funkcji.* Jest to narzędzie pozwalające nam sklejać funkcje i zachowywać ich gładkość/ciągłość. Za pomocą rozkładów jedności będziemy też mogli definiować inne obiekty na rozmaitościach, na przykład:

- pola wektorowe,
- metryki Riemanna,
- formy różniczkowe

Przykład: Niech F_1, F_2 to będą domknięte i rozłączne podzbiory rozmaitości gładkiej M. Wówczas możemy skonstruować funkcję gładką $f : M \to [0,1]$ taką, że $f \restriction F_1 \equiv 1$ i $f \restriction F_2 \equiv 0$. Niech U_1, U_2 będą pokryciem M takie, że $U_i = M \setminus F_i$. Niech $\{f_1, f_2\}$ będą rozkładem jedności wpisanym w $\{U_1, U_2\}$. Określmy funkcję $f : M \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{\mathrm{supp}(f_i)\subseteq U_2} f_i(x)$$

Dla $x \in F_1$ wszystkie nośniki $\mathrm{supp}(f_i)$ zawierające x znajdują się w U_2, czyli dla takich x $f(x) = \sum f_i(x) = 1$. Dla $x \in F_2$ z kolei, nośniki $\mathrm{supp}(f_i)$ zawierające x nie zawierają się w U_2, czyli nic w tej sumie nie ma, więc $f(x) = 0$.

Przykład: *Czy istnieje* $f : M \to \mathbb{R}$ *takie, że* $f \restriction \partial M \equiv 0$ *oraz* $f \restriction \mathrm{Int}(M) > 0$*?*

Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami mapowymi. Wtedy $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, jeżeli

- $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset \implies f_\alpha = \widehat{f}_\alpha \phi_\alpha$, gdzie $\widehat{f}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ i $\widehat{f}_\alpha(x_1, ..., x_n) = x_n$.
- $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset \implies f_\alpha = 1$

Niech $\{h_j\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego $j \in J$ wybieramy $\alpha(j)$ takie, że $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Definiujemy wtedy $h_j' = h_j \circ f_{\alpha(j)} : M \to \mathbb{R}$ takie, że Mamy, że $\mathrm{supp}(h_j') \subseteq \mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_{\alpha(j)}$. Definiujemy $f(x) = \sum h_j'(x)$. Z loklanej skończoności nośników h_j' jest dobrze określone i gładkie.

Dla $p \in \partial M$ mamy, że dla każdego j $h_j'(p) = p$, więc i $f(p) = 0$, natomiast dla $p \in \mathrm{Int}(M)$ dla pewnego j jest $h_j'(p) > 0$, a dla $k \neq j$ mamy $h_k'(p) \geq 0$, czyli $f(p) > 0$.

Przykład: Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest nazywana *bump function* dla domkniętego zbioru $A \subseteq M$ z nośnikiem otwartym w $U \subseteq M$, jeżeli $0 \leq f \leq 1$ na M, $f \equiv 1$ w A oraz $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.

Rozważmy pokrycie M zbiorami otwartymi $\{U, M \setminus D\}$. Niech

4. Różniczkowalność odwzorowań pomiędzy rozmaitościami

4.1. Podstawowe definicje

Definicja 4.1. Niech M, N będą gładkimi rozmaitościami i niech $f : M \to N$ będzie ciągłe. Niech $p \in M$ i $q = f(p)$.

1. Takie f jest **C^r-różniczkowalne** ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) w punkcie p, jeśli mapa (U, ϕ) wokół p i (V, ψ) wokół q złożenie
$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$
jest C^r-różniczkowalne w punkcie $\phi(p)$. Złożenie jak wyżej oznaczamy $\widehat{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ nazywamy wyrażeniem f w mapach $(U, \phi), (V, \psi)$ TUTAJ OBRAZEK

2. f jest **C^r na otoczeniu** p jeśli dla dowolnych $(U, \phi), (V, \psi)$ jak wyżej $\widehat{f}$ posiada ciągłe pochodne cząstkowe rzędu $\leq r$ na pewnym otwartym otoczeniu $\phi(p)$.

Fakt 4.2. *Jeżeli f wyrażona w mapach $(U, \phi), (V, \psi)$ jest C^r-różniczkowalna w punkcie $\phi(p)$, to wyrażona w dowolnych mapach $(U', \phi'), (V', \psi')$ gładko zgodnych z mapami poprzednimi jest C^r-różniczkowalna.*

Dowód. Niech $\widehat{f} = \psi f \phi^{-1}$, $\bar{f} = \psi' f(\phi')^{-1}$. Niech $\phi(\phi')^{-1} = \alpha$, $\psi'\psi^{-1} = \beta$ będą odwzorowaniami przejścia.

Zauważmy, że $\bar{f} = \beta\widehat{f}\alpha$, bo każdy umie rozpisać to sobie. Ponieważ wszystkie te funkcje są C^r lub gładkie, to i całość jest C^r. Oczywiście pomijamy dowodzenie, że wszystkie te złożenia są dobrze określone na odpowiednich wzorach. ☕

Definicja 4.3. Odwzorowanie $f : M\mathbb{N}$ to jest [wszędzie] C^r-różniczkowalne, jeżeli jest C^r różniczkowalne na otoczeniu każdego punktu $p \in M$.

Fakt 4.4. *f jest globalnie C^r-różniczkowalna $\iff$ dla dowolnych (U, ϕ) na M i (V, ψ) na N $\psi f \phi^{-1}$ jest różniczkowalne na całej swojej dziedzinie określoności.*

Dowód. Trywialne i pozostawiamy jako ćwiczenie. ☕

Uwaga 4.5. *C^r-różniczkowalność f wystarczy weryfikować tylko dla map z ustalonych atlasów na M i N, co wynika z faktu 4.4*

Fakt 4.6. *Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy gładkimi rozmaitościami jest gładkie.*

Dowód. Ustalmy, z czym tu mamy doczynienia. Niech $f : M \to N$ i $g : N \to P$ będą gładkimi odwzorowaniami między rozmaitościami. Niech $p \in M, q = f(p) \in N, s = g(q) = g(f(p)) \in P$. Niech $(U, \phi), (V, \psi), (W, \xi)$ będą mapami wokół p, q, s. Wiemy, że $\psi f \phi^{-1}$ i $\xi g \psi^{-1}$ są gładkie.

Zauważmy, ze na odpowiednio mniejszym otwartym otoczeniu punktu $\phi(p)$ zachodzi następująca równość odwzorowań. Mianowicie, jeśli wyrazimy to złożone odwzorowanie $g \circ f$ w mapach $(U, \phi), (W, \xi)$, to zachodzi równość:
$$\xi(f \circ g)\phi^{-1} = (\xi g \psi^{-1})(\psi f \phi^{-1})$$
i to jest w jakimś podzbiorze $\mathbb{R}^n$, więc jest gładkie i rzeczywiste. Stąd złożenie dwóch takich funkcji jest gładkie na pewnym otoczeniu otwartym p. Ale to zachodzi dla dowolnego punktu $p \in M$, skąd wynika globalna gładkość. ☕

Im dalej w las będziemy coraz bardziej leniwi i zamiast pisać dowody pokroju tego co wyżej, będziemy widzieć że to z definicji i nie pisać dowodów $\star\star\star$.

Fakt 4.7. *Dla gładkiego odwzorowania $f : M \to N$, rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych*
$$\left(\frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p))\right)_{i,j}$$
nie zależy od wyboru map $(U, \phi), (V, \psi)$ wokół p i $f(p)$.

Dowód. Ćwiczenia ☕

Definicja 4.8. Rzędem f w punkcie $p \in M$ nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie $\phi(p)$.

Rząd w p równy zero określamy też terminem, że pochodna f w p jest zerowa .

Definicja 4.9. Gładkie odwzorowanie $f : M \to N$ jest **dyffeomorfizmem**, jeśli jest bijekcją i odwzorowanie odwrotne jest także gładkie. Rozmaitości między którymi istnieje dyfeomorfizm nazywamy dyfeomorficznymi i traktujemy je jako jednakowe.

Fakt 4.10. *Dyfeomorficzne rozmaitości mają ten sam wymiar.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

Uwaga 4.11.

1. C^1 *vs* C^∞*: pojęcia dyfeomorfizmu można zmodyfikować do* C^r*-dyfeomorfizmu.*

   Wcześniej pokazaliśmy, że C^1*-rozmaitość posiada* C^1*-zgodną* C^∞ *strukturę. Jeśli dwie* C^∞*-rozmaitości są* C^1*-dyfeomorficzne, to są również* C^∞*-dyfeomorficzne. Stąd klasyfikacja* C^1*-rozmaitości (z dokładnością do* C^1*-dyfeomorfizmu) pokrywa się z klasyfikacją* C^∞*-dyfeomorfizmów.*

2. C^0 *vs* C^∞*:* C^0 *dyfeomorfizm to po prostu homeomorfizm.*

   Wiemy już, że istnieją C^0*-rozmaitości nieposiadające żadnej* C^∞*-struktury. Istnieją* C^0*-rozmaitości posiadające wiele (parami niedyfeomorficznych)* C^∞ *struktur.*

   Milnov pokazał, że istnieją S^n *dla* $n \geq 7$ *takie, że istnieją takie parami niedyfeomorficzne strutktury. Otóż można sobie z tym zjechać do jeszcze niższych wymiarów, mianowicie Freedman i niezaleznie Donadson, że na* $\mathbb{R}^4$ *mamy nieprzeliczalnie wiele parami niedyfeomorficznych gładkich struktur. Dla wymiaróww* ≤ 3 *pokazano, że tak nie można egzotykować.*

5. Dyskretne ilorazy rozmaitości gładkich przez grupy dyffeomorfizmów

Definicja 5.1. Grupa G dyfeomorfizmów rozmaitości M to dowolny niepusty zbiór dyfeomorfizmów $g : M \to M$, który jest zamknięty na operację składania i brania odwrotności. Elementem identycznym jest id_M, a odwrotne to dyfeomorfizmy odwrotne. Grupa G działa przez dyfeomorfizmy na rozmaitość M.

Definicja 5.2. Orbitą punktu $x \in M$ względem działania G na M nazywamy zbiór

$$G(x) = \{g(x) \ : \ g \in G\}$$

Rodzina wszystkich orbit tworzy **rozbicie rozmaitości** M na podzbiory.

Dwie orbity są albo całkiem rozłączne, albo pokrywają się.

Definicja 5.3. Zbiór orbit to M/G. M/G tak naprawdę oznacze przestrzeń ilorazową działania G na M, czyli przestrzeń topologiczną której elementami są orbity działania G na M, zaś topologia jest ilorazowa . To znaczy, że zbiór orbit jest otwarty w tym ilorazie $\iff$ suma tych orbit tworzy otwarty zbiór w M.

Na przykład, jeśli $U \subseteq M$ jest otwarty, to $G(U)/G := \{G(x) \ : \ x \in U\}$, to ten zbiór jest zbiorem otwarty w M/G. Co więcej, każdy otwarty zbiór w M/G ma postać $G(U)/G$ jak wyżej. Czyli jeśli $\mathscr{B}$ jest bazą na M, to wtedy

$$\{G(U)/G \ : \ U \in \mathscr{B}\}$$

jest bazą w M/G [ćwiczenia].

Wniosek 5.4. *Iloraz M/G zawsze posiada przeliczalną bazę na topologii.*

Przykład: Działanie grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ określone przez: dla $k \in \mathbb{Z}$ $k(x) = x + k$. Wtedy

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

(sklejamy odcinki długości 1).

Definicja 5.5. G działa na M nakrywająco , jeśli dla każdego $p \in M$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U \subseteq M$ takie, że rodzina obrazów $g(U)$ po $g \in G$ jest parami rozłączna $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ dla $g_1 \neq g_2$.

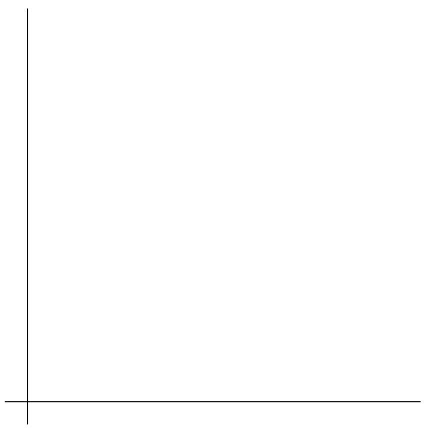
Dla U jak wyżej odwzorowanie $U \to G(U)/G$ zadane przez $x \mapsto G(x)$ jest homeomorfizmem. Z tego wynika, że dla działania nakrywającego rozmaitość M, *iloraz M/G jest przestrzenią lokalnie euklidesową* tego samego wymiaru co wymiar rozmaitości M.

Iloraz zadany przez działanie nakrywające niekoniecznie jest rozmaitością topologiczną:

Przykład: Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

jest nakrywające. Orbity wyglądają



Natomiast taka przestrzeń nie jest przestrzenią Hausdorffa.

Definicja 5.6. Działanie G na M przez dyfeomorfizmy jest

- **wolne**, gdy dla każdego $g \in G \setminus \{id\}$ i dla każdego $x \in M$ jest $g(x) \neq x$,
- **właściwie nieciągłe** [properly dicontinuous], gdy dla każdego zwartego $K \subseteq M$ zbiór $g \in G$, że $g(K) \cap K \neq \emptyset$ jest skończony.

5.1. Kilka szybkich własności

Definicja 5.7. Dla $x \in M$ stabilizator (podgrupa stabilizująca) to

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \ : \ g(x) = x\}.$$

Uwaga 5.8. *Działanie G jest wolne $\iff$ dla każdego $x \in M$ $\mathrm{Stab}(x) = \{id\}$.*

Przykład: Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2$ przez potęgi orotów o $\frac{\pi}{n}$ nie jest wolne, bo $(0,0)$ zostaje na swoim miejscu. Natomiast to samo działanie na $\mathbb{R}^2$ jest już wolne.

Fakt 5.9. *Działanie grupy G jest wolne $\iff$ dla każdego $x \in M$ odwzorowanie $G \to G(x)$ zadane przez $g \mapsto g(x)$ jest bijekcją.*

Fakt 5.10. *Gdy działanie G przez homeomorfizmy na lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej X jest właściwie nieciągłe, to wówczas każda orbita $G(x)$ jest dyskretnym podzbiorem X (każdy punkt z orbity posiada otoczenie otwarte $z \in U$ takie, że $U \cap G(x) = \{x\}$)*

Jeśli ponadto działanie to jest wolne, to jest ono nakrywające.

Fakt 5.11. *(ważny i trudny) Jeśli G działa przez homeomorfizmy na lokalnie zwartej przestrzeni X w sposób właściwie nieciągły, to iloraz X/G jest przestrzenią Hausdorffa.*

Uwaga: Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ nie jest właściwie nieciągłe.

Fakt 5.12. *Jeśli G działa na M^n przez dyfeomorfizmy w sposób wolny, włąściwie nieciągły, to iloraz M/G jest n-wymiarową rozmaitością topologiczną.*

Oznaczenie M^n mówi, że M jest rozmaitością n-wymiarową.

5.2. Gładki atlas na M/G

(☕) U jest otwarty i mapowy oraz dla każdych $g_1, g_2 \in G$ różnych $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

- Każdy $x \in M$ ma otoczenie U spełniające (☕), a stąd każda orbita $G(p) \in M/G$ ma otoczenie otwarte postaci $G(U)/G$ ze zbiorem U spełniającym (☕)
- Jeśli U spełnia (☕), to odwzorowanie $i_u \ : \ U \ \to \ G(U)/G$ $p \ \mapsto \ G(p)$ jest homeomorfizmem. Wtedy $\phi_G : G(U)/G \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ określone przez $\phi_G = \phi \circ i_U^{-1}$ jest kandydatem na mapę na M/G.

Niech $\mathscr{A}$ będzie atlasem na M. Rozważmy rodzinę

$$A_G := \{(G(U)/G, \phi_G) \ : \ U \text{ spełnia } (☕), \ (U, \phi) \in \mathscr{A}\}$$

- A_G jest gładko zgodny, więc jest gładkim atlasem na M/G
- odwzorowanie ilorazowe $q_G : M \to M/G$ zadane przez $q_G(x) = G(x) \in M/G$ jest gładkie

Definicja 5.13. $f : M \to N$ jest lokalnym dyfeomorfizmem, gdy każdy $x \in M$ posiada otwarte otoczenie $x \in U \subseteq M$ takie, że $f \restriction U : U \to f(U)$ jest dyfeomorfizmem na otwarty podzbiór $f(U)$.

W szczególności wymiary tych dwóch rozmaitości muszą się zgadzać.

Gładka zgodność map z atlasem. Niech $(G(U)/G, \phi_G)$ oraz $(G(V)/G, \psi_G)$ będą mapami zgodnymi z mapami (U, ϕ) oraz (V, ψ) na M. Wtedy

$$\phi_G = \phi \circ i_U^{-1}, \quad \psi_G = \psi \circ i_V^{-1}$$

i odwzorowanie przejścia to

$$\psi_G \circ \phi_G^{-1} : \phi_(G(U)/G \cap G(V)/G) \to \psi_G(G(U)/G \cap G(V)/G)$$

i zachodzi

$$\psi_G \psi_G^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ (\phi \circ i_u^{-1})^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ i_u \circ \phi^{-1}$$

Przyglądamy się przekształceniu

$$i_V^{-1} \circ i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \to V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

dla $y = i_V^{-1} \circ i_U(x)$ zachodzi $G(x) = i_U(x) = i_V(y) = G(y)$. Zatem $y = g_x(x)$ dla pewnego (jedynego, bo wolne) $g_x \in G$.

Wiemy też, że $i_V^{-1} i_U$ jest homeomorfizmem, więc w szczególności jest ciągłe. Z tej ciągłości wynika, że $x \mapsto g_x$ musi być stałe na komponentach spójności. Komponenty spójności $U \cap i_U^{-1}(G(V)/G)$ są otwarte w M. Na każdej z nich mamy $i_V^{-1} \circ i_U(x) = g(x)$ dla ustalonego $g \in G$ zależnego od komponentu.

Zatem $\psi_G \circ \phi_G^{-1}(x) = \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x)$ dla x z komponenty. Więc na tym zbiorze otwartym $\psi_G \circ \phi_G^{-1}$ jest gładkie.

Sprawdzamy własności q_G w mapach (U, ϕ) na M oraz $(G(U)/G, \phi_G)$ na M/G.

Przykłady:

1. $\mathbb{Z}^n$ na $\mathbb{R}^n$ przez przesunięcia: $(k_1, ..., k_n)(x_1, ..., x_n) = (x_1 + k_1, ..., x_n + k_n)$. Można sprawdzić, że jest to działanie wolne i właściwie nieciągłe. Iloraz $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ jest nazywane n-wymiarowym torusem i jest homeomorficzne z $S^1 \times ... \times S^1$.
2. $\mathbb{Z}$ na $S^1 \times \mathbb{R}$ (współrzędne θ na S^1, n na $\mathbb{R}$. $k \in \mathbb{Z}$ działa przez $k(\theta, t) = ((-1)^k\theta, t + k)$. To jest nic innego jak butelka Kleina.
3. $\mathbb{Z}$ działa na $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ przez $k(x, y) = ((-1)^k, y + k)$ [wstęga mobiusa z brzegiem]
4. $\mathrm{Conf}_n(M)$ - przestrzeń konfiguracyjna n-elementowych podzbiorów w rozmaitości M. Rozważmy $\underbrace{M \times M... \times M}_{\text{n razy}}$ i rozważmy uogólnioną przekątną

$$\Delta^n(M) = \{(x_1, ..., x_n) \ : \ x_i = x_j \text{ dla pewnego } i \neq j\}$$

   - nie wiem co się dzieje
   - grupa permutacji S_n działa na $(M \times ... \times M \setminus \Delta^n(M)$ przez

   $$\sigma(x_1, ..., x_n) = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

   i jest to działanie wolne, właściwie nieciągłe (bo S_n jest skonczona) i S_n działa w ten sposób przez dyfeomorfizmy

   Mapa w $\mathrm{Conf}_n(M)$ wokół punktu $p = (x_1, ..., x_n)$: rozważmy w M wszyskie parami rozłączne otoczenia U_i punktów x_i, zbiór

   $$U_1 \times ... \times U_n \subseteq M \times ... \times M \setminus (\Delta^n(M))$$

   jest naturalnym zbiorem mapowym.

   Nie wieeem co się dzieje, nie słuuucham

Uwaga 5.14. *Dla gładkiego odwzorowania*

$$f : M/G \to N$$

możemy rozważać jego "podniesieni" do odwzorowania

$$\overline{f} = f \circ g : M \to N$$

Odwzorowanie $\overline{f}$ *jest* G*-niezmiennicze: dla każdego* $g \in G$ *mamy*

$$\overline{f}(x) = \overline{(}g(x)).$$

Odwrotnie, mając G*-niezmiennicze gładkie* $\overline{h} : M \to N$ *możemy indukować z niego gładkie odwzorowanie z ilorazu* $h : M.G \to N$ *poprzez:*

$$h(p) = \overline{h}(p'),$$

gdzie $p' \in g^{-1}(p)$ *to dowolny punkt z tej* G*-orbity która jest punktem* p *w ilorazie.*

5.3. Klejenie rozmaitości

Otoczenie kołnierzowe

Twierdzenie 5.15. M*-gładka* n*-rozmaitość, a* B *to komponenta spójności brzegu* ∂M*. Wtedy istnieje dyfeomorficzne włożenie (czyli dyfeomorfizm na obraz)*

$$k : B \times [0, 1) \to M$$

na otwarte otoczenie U *komponenty* B *w* M*, taki, że*

$$k(x, 0) = x$$

dla $x \in B$

Definicja 5.16. $M_1, B_1 \subseteq \partial M$ oraz $M_2, B_2 \subseteq \partial M_2$ i $f : B_1 \to B_2$ jest dyfeomorfizmem (po cichutku: $\dim(M_1) = \dim(M_2), \dim(B_1) = \dim(B_2)$)

Definiujemy

$$M_1 \cup_f M_2 := M_1 \sqcup M_2 / \sim$$

gdzie relacja równoważności $\sim$ jest indukowana przez relację równoważności $x \sim f(x) \iff x \in B_1$

6. Przestrzeń styczna

Oznaczenia z analizy:

- dla $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ $f = (f_1, ..., f_n)$ **pochodną** w punkcie $t \in (a, b)$ nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ ... \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego $f : U \to \mathbb{R}^m$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $p \in U$ oznaczamy $D_p f$ jako macierz pochodnych cząstkowych f:

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix}$$

7. Pomocnik idiotów:

Skorowidz definicji

Twierdzonkowa zabawa