Lista 4

Równania różniczkowe 1R

Exercise 1. *Załóżmy, że funkcja $f = f(t,y)$ jest klasy C^1 na zbiorze $t_0 \leq t < \infty$, $-\infty < y < \infty$ oraz spełnia dodatkowe oszacowanie $|f(t,y)| \leq K$ na całym tym zbiorze dla pewnej stałej $K > 0$. Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia*

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

istnieje dla wszystkich $t \geq t_0$.

Z zajęć:

Z Picarda mamy istnienie rozwiązania na (β, α) i założmy nie wprost, że $\alpha < \infty$. Wtedy mamy $\beta < T_1 < T_2 < \alpha$ i z twierdzenia o wartości średniej:

$$|y(T_2) - y(T_1)| = x'(c)|T_2 - T_1| \leq K|T_2 - T_1|.$$

Rozważmy ciąg Cauchy'ego $\{T_n\}$ taki, że $|y(T_n) - x(T_m)| \leq K|T_n - T_m|$. Czyli $\{x(T_n)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jesteśmy w przestrzeni Banacha, więc jest on zbieżny. Niech $\lim_{n\to\infty} x(T_n) = x_1$. To samo dla T_n: $\lim_{n\to\infty} T_n = t_1$.

Rozważmy nowe zagadnienie $x' = f(t,y)$ i warunek początkowy to $x(t_1) = x_1$. I powtarzamy procedurę.

Z Picarda cośtam cośtam mam jakiś przedział $[t_0, \alpha_1]$ że jest określone, potem $[\alpha_1, \alpha_2]$ etc. Granicyje i dostaję przedział $[t_0, \alpha)$ na którym jest dobrze określone. Moja teza, to że $y(\alpha)$ isnieje i wynosi

$$y_\alpha = y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} f(s,y)ds,$$

bo ta całeczka faktycznie istnieje:

$$|y(\alpha)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} f(s,y(s))ds \right| \leq |y_0| + \int_{t_0}^{\alpha} |f(s,y)|ds \leq y_0 + \int_{t_0}^{\alpha} Kds = y_0 + K(\alpha - t_0) < \infty$$

sprawdźmy, czy $\lim y(t)$ = moja wartość.

$$\lim_{t\to\alpha} [y(t) - y_\alpha] = \lim \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y)ds - y_0 - \int_{t_0}^{\alpha} f(s,y)ds \right] = \lim \int_{t_0}^{t} f(s,y)ds - \lim \int_{t_0}^{t} -y_\alpha = 0$$

Czyli śmiga.

Exercise 2. *Udowodnij, że poniższe równania uzupełnione warunkiem początkowym $y(0) = 1$ mają rozwiązanie dla wszystkich $t \geq 0$.*

a) $y' = t^3 - y^3$

Tutaj pochodna jest ograniczone jest od góry przez t, a od dołu przez -1,

(b) $x' = tx + e^{-x}$

Exercise 3. *Uzasadnij, że zagadnienie $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej proste.*

Znaczy bo to jest $y = \tan t + c$ XD

Alternatywnie, nie ma górnego ograniczenia na $|y(t)|$, bo to sobie roooośnie więc nie wyśmignie z tego $\lim |y(t)|$.

Exercise 4. Izokliny, nie chce mi się aktualnie

Exercise 5. Używając metody Eulera z krokiem $h = 0.1$ wyznacz przybliżoną wartość rozwiązania dla $t = 1$. Oszacuj błąd jako popełniamy. Następnie znajdź rozwiązanie podanego zagadnienia i porównaj otrzymaną wartość z wartością rzeczywistą.

(a)