## ZADANIE 1.

*Udowodnić wzór włączeń i wyłączeń*

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]$$

Indukcja po n. Jeżeli mamy tylko $A_1, A_2$, to

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$$

Teraz załóżmy, że wzorek działa dla dowolnego ciągu długości n i weźmy ciąg długości $(n + 1)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}] &= \mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup (A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n))] = \\
&= \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1} \setminus ((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1})] = \\
&= \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[A_{n+1} \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)] = \\
&= \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[(A_{n+1} \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_{n+1} \cap A_n)] = \\
&= \sum_{i\leq n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \ldots (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] + \\
&- \left(\sum_{i\leq n} \mathbb{P}[A_{n+1} \cap A_i] - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}[(A_{n+1} \cap A_i) \cap (A_{n+1} \cap A_j)] + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left[\bigcap_{i\leq n} (A_{n+1} \cap A_i)\right]\right) \\
&= \sum_{i\leq n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i<j\leq n+1} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \ldots + (-1)^{n+2}\mathbb{P}\left[\bigcap_{i\leq n+1} A_i\right]
\end{aligned}$$

## ZADANIE 2.

(Nierówności Boole'a) *Udowodnij nierówności* [te na niebiesko]

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i\leq n} A_i\right] \leq \sum_{i\leq n} \mathbb{P}[A_i]$$

Może tutaj też indukcją? Dla $A_1, A_2$ jest to dość oczywiste, bo

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \leq \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2]$$

gdyż $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \geq 0$.

To teraz załóżmy, że śmiga dla dowolnego ciągu n zbiorów i weźmy ciąg $(n + 1)$-elementowy.

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i\leq n+1} A_i\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i\leq n} A_i \cup A_{n+1}\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i\leq n} A_i\right] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}\left[A_{n+1} \cap \bigcap_{i\leq n} A_i\right] \leq$$

$$\leq \mathbb{P}[A_{n+1}] + \mathbb{P}\left[\bigcup_{i\leq n} A_i\right] \leq$$

$$\leq \mathbb{P}[A_{n+1}] + \sum_{i\leq n} \mathbb{P}[A_i] =$$

$$= \sum_{i\leq n+1} \mathbb{P}[A_i]$$

Pierwsza nierówność tak samo jak wcześniej, a druga nierówność z założenia indukcyjnego.

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i\leq n} A_i\right] \geq 1 - \sum_{i\leq n} \mathbb{P}[A_i^c]$$

To śmiga na podstawie poprzedniej nierówności:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap A_i\right] = \mathbb{P}\left[\left(\bigcup A_i\right)^c\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup A_i\right] \geq 1 - \sum \mathbb{P}[A_i]$$

## ZADANIE 3.

*Pokaż, że jeżeli* $\mathbb{P}[A_i] = 1$ *dla* $i \geq 1$, *to* $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = 1$

Rozważmy ciąg $B_n$ taki, że $B_n = \bigcap_{i\leq n} A_i$. Jak wygląda prawdopodobieństwo takiego osła?

$$\mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i\leq n} A_i\right] \geq 1 - \sum_{i\leq n} \mathbb{P}[A_i^c] = 1 - \sum_{i\leq n}[1 - \mathbb{P}[A_i]] = 1 - \sum_{i\leq n} 0 = 1$$

Skoro $\mathbb{P}[B_n] \geq 1$, to musi być równe 1.

Skorzystamy teraz z twierdzenia o ciągłości, które mówi, że dla zstępującego ciągu $B_n$ (jakim on jest, bo to widać) mamy

$$\mathbb{P}\left[\bigcap B_n\right] = \lim \mathbb{P}[B_n] = 1$$

a ponieważ

$$\bigcap B_n = \bigcap \bigcap_{i\leq n} A_i = \bigcap A_n$$

to śmiga.

## ZADANIE 4.

*Rzucamy symetryczną kostką do gry do chwili otrzymania szóstki. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie podzielna przez 6?*

Dziwne to zadanko. $\Omega$ to ciągi liczb $1, 2, \ldots, 5$ które na końcu mają 6. Nas interesuje ich długość. Może zróbmy tak, że rzucamy $6n$ razy kostką i zapisujemy kolejne wyniki. Zdarzenia sprzyjające to rzuty, w których 6 pojawia się po raz pierwszy na pozycji podzielnej przez 6?

To będzie ciąg rzeczy wstępujących. Dla $n = 1$ prawdopodobieństwo to po prostu

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^5}{6^6}.$$

Dka $n = 2$ jest już troszkę ciężej, ale prawdopodobieństwo to

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \frac{1}{6},$$

czyli wyrzuci 6 w 6 ruchu lub wyrzuci 6 w 12 ruchu. Uogólnić to można do

$$p_n = \sum_{i \leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} \sum_{i \leq n} \left(\frac{5}{6}\right)^{6i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^6}{6^6} \cdot \frac{(5/6)^{6n} - 1}{(5/6)^6 - 1} = \frac{5^5 \cdot ((5/6)^{6n} - 1)}{5^6 - 1}$$

Nie chce mi się liczyć, ale na oko to jest jakieś

$$\frac{5^5}{5^6 - 1}$$

## ZADANIE 5.

*Na odcinku* $[0, 1]$ *umieszczono losowo punkty* $L$ *i* $M$. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że:*

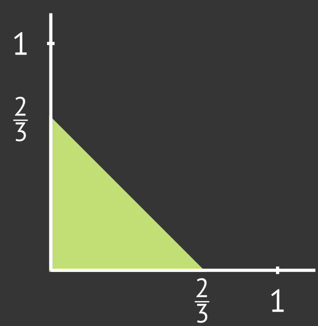
*a) środek odcinka* $LM$ *należy do* $[0, \frac{1}{3}]$

Żeby ich środek był w $[0, \frac{1}{3}]$, to ich średnia arytmetyczna musi być mniejsza niż $\frac{1}{3}$, czyli

$$\frac{x + y}{2} \leq \frac{1}{3}$$

$$x + y \leq \frac{2}{3}$$

No i coś takiego na płaszczyźnie to jest trójkącik

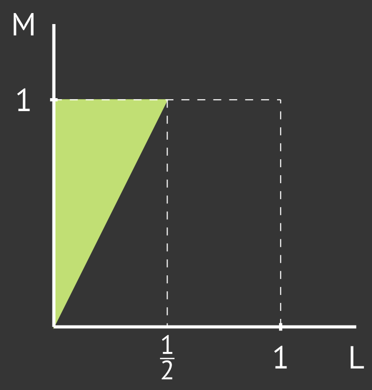


Czyli szukane prawdopodobieństwo to pole tego trójkącika, a więc $\frac{2}{9}$.

> *b) z $L$ jest bliżej do $M$ niż do zera.*

Czyli $|L - M| > L$, znowu ładnie to się zaprezentuje w dwóch wymiarach. Po co oni dali zadanie o prostej, które się robi płaszczyzną?

Dla $L \geq M$ mam $|L - M| = L - M > L$, czyli $0 > M$ co tak średnio śmiga. Dla $L < M$ mam z kolei $|L - M| = M - L > L$, czyli $M > 2L$




Czyli tutaj prawdopodobieństwo to $\frac{1}{4}$.

## ZADANIE 6.

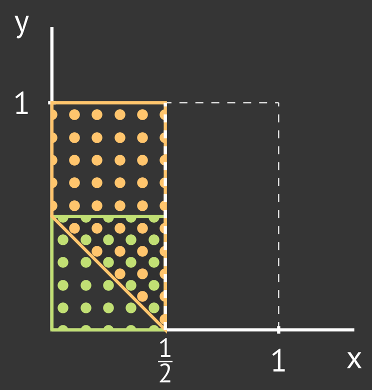
*Z przedziału* $[0, 1]$ *wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków można skonstruować trójkąt.*

Zamiast rozważać położenie punktów od 0, rozważę długości odcinków przez nich tworzonych. Moje odcinki mają długość $x, y, 1 - y - x$, gdzie $x < \frac{1}{2}$, bo nie ważne jaka będzie kolejność rzucania punktów, zawsze mogę ten krótszy odcinek wyróżnić bez tracenia niczego. Czyli działam na $\Omega = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

Potrzebuję, żeby $x, y$ spełniały następujące warunki na raz:

1. $x + y > 1 - y - x$, czyli $2x + 2y > 1$, $y > \frac{1}{2} - x$
2. $x + 1 - x - y > y$, czyli $1 > 2y$, $\frac{1}{2} > y$
3. $y + 1 - x - y > x$, czyli $1 > 2x$, $\frac{1}{2} > x$ <– ten jest już spełniony.

ROZRYSUJMY TO!




Czyli to gdzie oba warunki są spełnione to ten trójkącik w środku o polu $\frac{1}{8}$, ale ponieważ pole całości wynosi $\frac{1}{2}$, to dostajemy

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

## ZADANIE 7.

*Wybrano losowy punkt* $(x, y)$ *z kwadratu* $[0, 1]^2$. *Oblicz prawdopodobieństwo, że*

*a)* $x$ *jest liczbą wymierną.*

To po prostu miara $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

*b) obie liczby* $x$ *i* $y$ *są niewymierne.*

$A^c$ to co najmniej jedna liczba jest wymierna. Czyli mam $A^c$ = x wymierny + y wymierny + oba wymierne. Oba wymierne mają prawdopodobieństwo 0, tak samo to, że x jest wymierny i że y jest wymierny też ma prawdopodobieństwo 0, czyli $A^c$ wydaje się mieć prawdopodobieństwo 0, a więc $\mathbb{P}[A] = 1$?

*c) spełniona jest nierówność* $x^2 + y^2 < 1$

Czyli punkt ma wylądować w środku ćwiartki koła o promieniu 1, a więc $\mathbb{P}[A] = \frac{\pi}{4}$.

*d) spełniona jest równość* $x^2 + y^2 = 1$.

No to też jest miary zero? Bo ograniczam od góry przez koło o promieniu $1+\varepsilon$ i od dołu przez $1-\varepsilon$. Miara to ich różnica i jest dowolnie mała.

## ZADANIE 8.

*W kwadracie* $[0,1]^2$ *wybrano losowo dwa punkty* $A$ *i* $B$. *Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Oblicz prawdopodobieństwo, że*

*a) odcinek* $AB$ *przecina przekątną łączącą wierzchołki* $(0,0)$ *i* $(1,1)$

To ten, wybieram A w dolnym trójkącie, to będzie $\frac{1}{2}$ i każę B być w górnym, to też jest $\frac{1}{2}$. Jest symetryczne, więc całość to dwa razy $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

*b) odległość punktu* $A$ *od* $(1,1)$ *jest mniejsza niż* $1$, *a odległość punktu* $B$ *od* $(1,1)$ *jest większa niż* $1$

Czy to będzie wybieram A, jakie jest prawdopodobieństwo, że A będzie w środku ćwiartki koła jednostkowego. Potem wybieram B, jakie jest prawdopodobieństwo, że B nie będzie w środku tej ćwiartki. Mnożę i ta da? Czyli

$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

*c) oba punkty leżą pod parabolą* $y=-x(x-1)$

To akurat to jest chyba pole pod parabolą do kwadratu?

$$\int_0^1 x(1-x)dx = \int_0^1 x - \int_0^1 x^2 dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

czyli całość to $\frac{1}{4}$.

## ZADANIE 9.

*Igłę o długości* $l$ *rzucono na podłogę z desek o szerokości* $a \geq l$. *Znajdź prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski.*

Zgaduję, że tutaj będą zdarzenia wstępujące i rozważam n desek, ale mi się bardzo nie chce.

## ZADANIE 10.

*Niech* $(\Omega, \mathscr{F})$ *będzie przestrzenią mierzalna. Uzasadnij, że* $\sigma$*-ciało* $\mathscr{F}$ *nie może być nieskończoną przeliczalną rodziną zbiorów.*

A to akurat robiłam jako pracę domową na MiC XD.

Mogę wziąć sobie dowolny $A_1 \in \mathscr{F}$. Zdefiniujmy teraz $\mathscr{F}_1$ jako tylko te zbiory z $\sigma$-algebry, które są zawarte w $A_1^c$. Wyciągnijmy nowy zbiór $A_2 \in \mathscr{F}_1$. Od razu widzimy, że zawsze $A_2 \cap A_1 = \emptyset$. Możemy tak lecieć dalej, zwężając za każdym razem sigma algebrę do dopełnienia $A_n$ i brać $A_{n+1}$ z tego zwężenia, zawsze zbiory będą parami rozłączne, bo schodzimy coraz to niżej. Ładnie to można narysować.

MÓJ NA SZYBKO DOWODZIK:

Weźmy $\Omega$ o mocy $\omega$.

Cały dowód to skonstruowanie sobie ciągu rozłącznych zbiorów, ich różne sumy zawsze będą różne, a tych sum możemy wybrać na $2^\omega$, czyli $\mathscr{F}$ jest nieprzeliczalne.

To lecimy. Weźmy sobie dowolny ciąg $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \ldots \in \Omega$ oraz $\mathbb{P}[A_1] < 1$. Możemy tak zrobić, choćby dlatego, że biorą kolejno sumę coraz to większej liczby singletonów dostaję nowego pyśka. Zdefiniujmy teraz ciąg $B_1 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq A_2 \setminus A_1$ i ogólniej

$$B_n \subseteq A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

No i teraz $B_n$ są rozłączne.

## ZADANIE 11.

*Oznaczmy przez* $\mathscr{B}_0$ *ciało składające sie ze skończonych sum rozłącznych przedziałów* $(a, b]$ *zawartych w odcinku* $(0, 1]$. *Określmy na* $\mathscr{B}_0$ *funkcję* $P$ *taką, że* $P(A) = 1$ *lub* $0$, *w zależności od tego, czy zbiór* $A$ *zawiera przedział postaci* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ *dla pewnego* $\varepsilon > 0$, *czy też nie. Pokaż, że* $P$ *jest miarą addytywną, ale nie przeliczalnie addytywną.*

Skończoną addytywność śmignie się za chwilę, najpierw uwalmy przeliczalną addytywność.

Rozważmy ciąg zbiorów zdefiniowany:

$$A_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}]$$

Oczywiście $A = \bigcup A_n = (\frac{1}{2}, 1)$, czyli $P(A) = 1$. Czy one są już rozłączne? Ej no są XD

$$A_i \cap A_{i+1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i}] \cap (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}}] = \emptyset$$

Dla dowolnego n $P(A_n) = 0$, bo nie zawiera odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$, ale już suma go zabiera, więc nie jest to funkcja przeliczalnie addytywna.

W sumie skończona addytywność jest widoczna od razu. Weźmy dowolny skończony ciąg rozłącznych pyśków.