RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 1

**1.** Udowodnij wzór włączeń i wyłączeń
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

**2.** (*Nierówności Boole'a*) Udowodnij nierówności
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i), \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i^c).$$

**3.** Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A_i)=1$ dla $i\ge 1$, to $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)=1$.

**4.** Rzucamy symetryczną kostką do gry chwili otrzymania szóstki. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie podzielna przez 6?

**5.** Na odcinku $[0,1]$ umieszczono losowo punkty $L$ i $M$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) środek odcinka $LM$ należy do $[0,1/3]$;
b) z $L$ jest bliżej do $M$ niż do zera.

**6.** Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków można skonstruować trójkąt.

**7.** Wybrano losowy punkt $(x,y)$ z kwadratu $[0,1]\times[0,1]$. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) $x$ jest liczbą wymierną;
b) obie liczby $x$ i $y$ są niewymierne;
c) spełniona jest nierówność $x^2+y^2<1$;
d) spełniona jest równość $x^2+y^2=1$.

**8.** W kwadracie $[0,1]\times[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty $A$ i $B$. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilityczną. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) odcinek $AB$ przecina przekątną łączącą wierzchołki $(0,0)$ i $(1,1)$;
b) odległość punktu $A$ od $(1,1)$ jest mniejsza niż 1, a odległość punktu $B$ od $(1,1)$ jest większa niż 1;
c) oba punkty leżą pod parabolą $y=-x(x-1)$.

**9.** Igłę o długości $l$ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a\ge l$. Znajdź prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski.

**10***. Niech $(\Omega,\mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Uzasadnij, że $\sigma$-ciało $\mathcal{F}$ nie może być nieskończoną przeliczalną rodziną zbiorów.

**11***. Oznaczmy przez $\mathcal{B}_0$ ciało składające się ze skończonych sum rozłącznych przedziałów $(a,b]$ zawartych w odcinku $(0,1]$. Określmy na $\mathcal{B}_0$ funkcję $P$ taką, że $P(A)=1$ lub 0 w zależności od tego, czy zbiór $A$ zawiera przedział postaci $(1/2,1/2+\varepsilon]$ dla pewnego $\varepsilon>0$, czy też nie. Pokaż, że $P$ jest miarą addytywną, ale nie przeliczalnie addytywną.

**12***. Na rodzinie wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ określamy miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_n$ wzorem
$$\mathbb{P}_n(A)=\frac{|\{m:\ 1\le m\le n, m\in A\}|}{n}.$$
Mówimy, że zbiór $A$ ma gęstość
$$D(A)=\lim_n \mathbb{P}_n(A)$$
jeżeli istnieje powyższa granica. Niech $\mathcal{D}$ oznacza rodzinę zbiorów posiadających gęstość.

a) Pokaż, że $D$ jest skończenie addytywna na $\mathcal{D}$, ale nie jest przeliczalnie addytywna.
b) Czy $\mathcal{D}$ jest $\sigma$-ciałem?
c) Wykaż, że jeżeli $x \in [0,1]$, to istnieje zbiór $A$ taki, że $D(A) = x$.

**13.** Niech $\Omega = \mathbb{R}$ i niech $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$ takich, że jeden ze zbiorów $A$ lub $A^c$ jest skończony. Ponadto zdefiniujmy

$$\mathbb{P}[A] = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } A \text{ jest skończony} \\ 1, & \text{jeżeli } A^c \text{ jest skończony.} \end{cases}$$

a) Czy $\mathcal{F}$ jest $\sigma$-ciałem?
b) Czy miara $\mathbb{P}$ jest skończenie addytywna?
c) Czy miara $\mathbb{P}$ jest przeliczalnie addytywna?

**14**$^*$. Niech $\Omega = \mathbb{R}$ i niech $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$ takich, że jeden ze zbiorów $A$ lub $A^c$ jest przeliczalny. Ponadto zdefiniujmy

$$\mathbb{P}[A] = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{jeżeli } A^c \text{ jest przeliczalny.} \end{cases}$$

Pokaż, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną.