Algebra przemienna

notatki

March 14, 2023

Dygresja, która ma się przydać na zajęciach 15.03

Jak mamy pierścień R i na nim mamy $\mathrm{Spec}(R)$, to bierzemy element $f \in R$

$$\widehat{f}(\mathfrak{p}) := [f]_{\mathfrak{p}} \in R/\mathfrak{p}$$

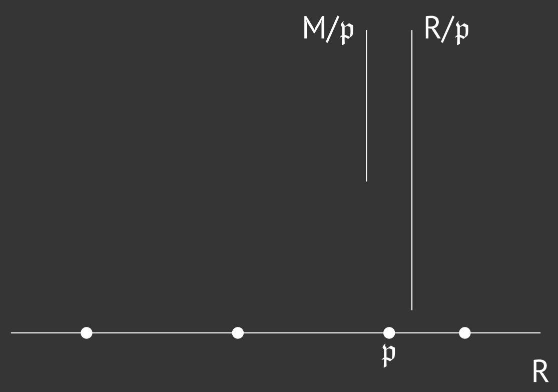
i to ma przypominać wiązkę wektorową. Ewaluacja funkcji w punkcie.

Można też powiedzieć, że dla dowolnego ideału $\mathfrak{a}$ mamy $f(\mathfrak{a}) = [f]_{\mathfrak{a}} \in R/\mathfrak{a}$, ale ten ideał $\mathfrak{a}$ daje $V(\mathfrak{a})$ i to wygląda tak, jakbyśmy jaką funkcję na spektrum chcieli obciąć do $V(\mathfrak{a})$.

Jeśli M jest R modułem, to konstrukcję wyżej możemy powtórzyć. To znaczy jeśli $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym i jeśli weźmiemy

$$M \otimes_R R/\mathfrak{p}$$

to to jest naturalny $R/\mathfrak{p}$ moduł.



Ponoć nie będą nam Boole potrzebne i Januszkiewicz uważa, że to jest szczególnie nudne.

Niech X będzie przestrzenią zwartą. Weźmy zbiór wszystkich ciągłych funkcji z X w pierścień $\mathbb{Z}_2$ $[F(X, \mathbb{Z}_2]$. Czy są fajne własności? $f \circ f = f$ i $f + f = 0$, czyli to jest pierścień Boole'a.

Jakie ten pierścień ma ideały? Wszystkie ideały pierwsze są maksymalne (to jakieś zadanie było). Jeśli weźmiemy spójny podzbiór X, to wtedy $F(X, \mathbb{Z}_2)$ musi być stały w pewnym miejscu. Czyli $\mathrm{Spec}(F)$ to zbiór składowych spójnych X.

Weźmy wszystkie funkcje ciągłe w $\mathbb{Z}_2$ i zamieńmy te funkcje na jedną, solidną funkcję w $\mathbb{Z}_2^R$. Taka funkcja to nie jest włożenie, ale idzie na $\mathrm{Im}(X) \subseteq \mathbb{Z}_2^R$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left=2, "\psi_1"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\psi_2"'] & \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_2^R \arrow[d, phantom, "\cup\!\mathsf{I}"] \\ & \mathrm{Im}(X) \end{tikzcd} \qquad F(X, \mathbb{Z}_2) = F(\mathrm{Im}\phi, \mathbb{Z}_2)$$

$$\phi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))$$

Czyli $\mathrm{Spec}(F(X, \mathbb{Z}_2)) = \mathrm{Im}\phi$.

ZADANIE 23

(i)

Otwarte są z definicji, a dla domkniętości mówimy, że $V(f) \sqcup V(1 - f) = X$.

(ii)

$$X_{f_1} \cup \ldots \cup X_{f_n} = \left(\bigcap V(f_i)\right)^c = V(f_1, \ldots, f_n)^c = V(f)^c = X_f$$

(iii)

Wskazówka to rozwiązuje.

(iv)

Kwasi-zwartość mamy, bo każde spektrum takie jest, więc pozostaje Hausdorff.

Bierzemy dwa punkty ze spektrum $p_1, p_2 \in \mathrm{Spec}(A)$. Ideały pierwsze są maksymalne, czyli mamy $f \in p_1 \setminus p_2$ i na odwrót, czyli $g \in p_2 \setminus p_1$. Weźmy

$$p_1 \in V(f) = \{\mathfrak{p} \;:\; f \in \mathfrak{p}\} \not\ni p_2.$$

I to jest zbiór otwarto domknięty, czyli jego dopełnienie jest otwartym otoczeniem p_2.

ZADANIE 24

80% tego zadania to definicje, a potem jest część tego zadania gdzie przestajemy definiować i zaczynamy to robić.

ZADANIE 25.

Że bijekcja $f \mapsto V(f)$ zachowuje operacje mnogościowe $\cup, \cap$.

Generalnie zadanie jest nudne, ale fajnym wyzwaniem jest rozróżnic algebraicznie $(\frac{1}{n}, 0)$ i $(0, \frac{1}{n} + \frac{1}{m})$.

ZADANIE 26

Jest zrobione w tych zadaniach i cała zabawa została nam zabrana.

ZADANIE 27

Prawdopodobnie chodzi o to, że jeden zbiór może mieć bardzo dużo definiujących równań.

Jak mam wielomiany $(f_1, \dots, f_k)$ $f \in K[x_1, \dots, x_m]$. Zbiór $\mathrm{Zer}(f_1, \dots, f_k)$ to jest zbiór tych punktów K^m takich, że f ewaluwane w nich daje 0. To daje ideał I(Zer), czyli wszystkie funkcje g takie, że $g(z) = 0$ dla $z \in \mathrm{Zer}$ (czyli to co na algebrze 2R).

I to nawet chyba jest tak, że $I(\mathrm{Zer}) \supseteq \sqrt{\langle f_1, \dots, f_k \rangle}$. Tutaj jest równość i to jest kwestia geometrii algebraicznej.

P(X) to jest jedna z dwoch rzeczy:

1. $k[x_1, \dots, x_m]/\langle f_1, \dots, f_k \rangle$
2. $k[x_1, \dots, x_m]/I(\mathrm{Zer})$

P(X) to funkcje wielomianowe na Zer. (1) = (2).

Jest jeszcze mała uwaga, że klasy abstrakcji $[x_1], [x_2], \dots, [x_m]$ generują P(X) jak k-algebrę.

Co się stanie, jeśli weźmiemy $\mathfrak{m} \subseteq P(X)$? Jeśli mamy $x \in \mathrm{Zer}$, to mamy $\mathfrak{m}_x < P(X)$. Jeśli weźmiemy punkt, w którym wszystkie f znikają, to dostajemy homomorfizm ewaluacji, którego jądro to $\ker(ev_x)$.

Oni mówią, że odwzorowanie $\mathrm{Zer} \ni x \mapsto \mathfrak{m}_x$ jest iniekcją. Jeśli $x = [a_1, \dots, a_m]$ i $y = [b_1, \dots, b_m]$ i one są różne na którejś współrzędnej, to chcemy znaleźć funkcję, która w x znika, a w y nie znika i odwrotnie.

Suriektywnośc tego odworowania natomiast jest tym samym co równość $I(\mathrm{Zer}) = \sqrt{\langle f_1, \dots, f_k \rangle}$. To jest etap, na którym potrzebujemy algebraicznej domkniętości k.

ZADANIE 28

Czytanie ze zrozumieniem.

Praca domowa: przegooglować Jacobian Conjecture.

Wiemy co to są odwzorowania $k^m \to k^n$. Jeżeli n to jest 1, to są wielomiany. Teraz chcemy o $k^m \supseteq V \to W \subseteq k^n$ i taki odwzorowanie jest affiniczne, jeśli znajdę fajne $k^m \to k^n$. Jeśli funkcja znika na W, to chcę, żeby ona po przeprowadzeniu z powrotem znikała na V. Te strzałki $k^m \to k^n$ to n wielomianów m zmiennych.

I w sumie to tutaj zgubiłam uwagę.

COŚ O FUNKTORACH POCHODNYCH

Mamy moduł M i możemy założyć, że jest on skończenie generowany i jest on Noetherowski. Jeśli tak jest, to on ma rezorwenta, a ten rezorwenta ma jadro:

$0 \longleftarrow M \longleftarrow R^{k_1} \longleftarrow R^{k_2} \longleftarrow R^{k_3} \longleftarrow \dots$ <- dokładna rezolwenta wolna

Powiedzmy, że mamy jakiś funktor, to wtedy

$0 \longleftarrow F(M) \longleftarrow F(R^{k_1}) \longleftarrow F(R^{k_2}) \longleftarrow \dots$ <- kompleks zależny od rezolwenty

Coś, co nie zależy od rezolwenty to jest funktor pochodny i to, czy to są homologie czy nie to nie jest ważne, ważne żeby było rezolwenty w to nie involve.

Popatrzmy na konretne funktory. Weźmy sobie k-moduł M, na który działa grupa G. Innymi słowy, mamy $G \to \mathrm{Aut}_k(M)$, czyli k[G]. Jak już coś takiego mamy, to możemy przypisać $M \xrightarrow{\phi} M_G$, gdzie M_G to jest największy taki obiekt, że G działa na niego trywialnie. i $\phi(gm) = g\phi(m) = \phi(m)$

Szukamy jądra w M, które przez ϕ przejdzie na zero: $m - gm = 0$ dla wszystkich g. Czyli bierzemy podmoduł $(m - gm)$ i koniec:

$$M_G = M/\langle m - mg\rangle$$

Ta konstrukcja nazywa się **koniezmiennikami**.

Jest też inna konstrukcja, która nazywa się niezmiennikami. Bierzemy M i szukamy modułu

$$M^G \xrightarrow{\phi} M$$

takiego, że G działa trywialnie.

$$M^G = (\mathrm{Im}\phi) = \{m \ : \ gm = m\}$$

Czyli tutaj mamy niezmienniki i to jest istotnie dualne do koniezmienników.

Teraz chcemy zrobić funktory pochodne, pytanie jak?

Chcemy wybudować rezolwentę w kategorii k-G-modułów (jak to się pisze xd)

$$H^0 * G, M) = M^G$$

$$H_0(G, M) = M_G$$

i pierwszy funktor pochodny

$$H'(G, M)$$

homologie G o współczynnikach w M.

$H^0(G, M)$ jest dwufunktorialny, czyli z jednej strony mówi coś o G, a z drugiej mówi coś o M.

N, M sa skończenie generowane

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f"] & R^N \arrow[l] \arrow[d] & \ker \arrow[l] \arrow[d, "\text{no tak}"] \\
M & R^n \oplus R^m \arrow[l] & \ker \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

⋆⋆⋆⋆ I ŻYLI DŁUGO I SZCZEŚLIWIE I WSZYSTKO IM KOMUTOWAŁO ⋆⋆⋆⋆