RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 7

1. Monika wybrała się do kasyna w Las Vegas mając przy sobie 255$. Jako cel postawiła sobie wygranie 1 dolara i wyjście z kasyna z kwotą 256$. Podczas tej wizyty obstawiała kolory. Wszystkie pola poza 0 i 00 są czerwone lub czarne (po 18 pól). Poprawne wskazanie koloru (z prawdopodobieństwem $18/38$) podwaja zaryzykowaną kwotę. Monika zastosowała następującą strategię: postanowiła, że będzie grać kolejno o 1$, 2$, 4$, 8$, 16$, 32$, 64$, 128$. Jeżeli w jednej z gier wygra, zabiera nagrodę i opuszcza kasyno z 256 dolarami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jej się powiodło. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej.

2. Oblicz $\mathbb{E}X$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie: a) Poiss(λ), b) Exp(λ), c) Geom(p).

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U[0,1]$. Obliczyć $\mathbb{E}Y$ jeżeli a) $Y = e^X$, b) $Y = \cos^2(\pi X)$.

4. Zmienna losowa ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{1}{5}x^4 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}[1/(1+X^5)]$.

5. Każdy bok i każdą przekątną $2n$-kąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, a kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów prostokątnych o wierzchołkach będących wierzchołkami $2n$-kąta. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

6. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X będzie liczbą czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Obliczyć $\mathbb{E}X$ i $\mathrm{Var}X$.

7. Niech X i Y będą ograniczonymi zmiennymi losowymi (tzn. istnieje M takie, że $\mathbb{P}(|X| < M) = \mathbb{P}(|Y| < M) = 1$) takimi, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$. Pokaż, że X i Y mają ten sam rozkład. **Wskazówka:** uzasadnij, że $\mu_X = \mu_Y$, jeżeli $\mu_X(f) = \mu_Y(f)$ dla dowolnej funkcji ciagłej na $[-M, M]$; następnie zastanów się dla jakich funkcji potrafisz udowodnić tę równość.

8. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny skoncentrowany na liczbach całkowitych nieujemnych, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

9. Wykaż, że jeżeli $X \geq 0$ oraz $\mathbb{E}X < \infty$, to
$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt,$$
gdzie F oznacza dystrybuantę X. Wywnioskuj, że jeżeli $p > 0$, to
$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

10. Oblicz $\mathrm{Var}X$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie: a) Poiss(λ), b) Exp(λ), c) Geom(p).

11. W urnie jest $b \geq 1$ kul białych i $c \geq 1$ czarnych. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$, jeśli X jest liczbą wylosowanych kul białych podczas:
a) losowania bez zwracania n kul ($n \leq b$ i $n \leq c$);
b) losowania bez zwracania tak długo, aż wylosujemy kulę czarną.

12. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów w taki sposób, że żadne trzy nie są współliniowe. Każda para punktów została połączona odcinkiem z prawdopodobieństwem p. Niech X oznacza liczbę powstałych trójkątów. Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.