

ZADANIE 1.

Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

(a) $x(t) = \tan t$, $x' = 1 + x^2$ //YUP

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = x'$$

(b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$ //YUP

$$x'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$
$$tx' + x = \frac{t \cos t - \sin t}{t} + \frac{\sin t}{t} = \frac{t \cos t}{t} = \cos t$$

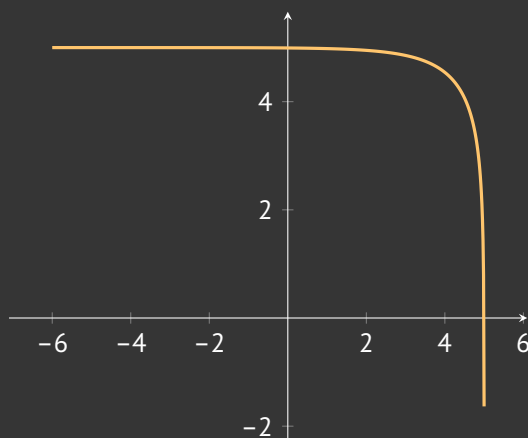
ZADANIE 2.

Znaleźć rozwiązania ogólne (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:

(a) $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$
$$e^{-y} dy = e^x dx$$
$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$
$$-e^{-y} = e^x + c$$
$$e^{-y} = c - e^x$$
$$\ln(e^{-y}) = \ln(c - e^x)$$
$$y = -\ln(c - e^x)$$

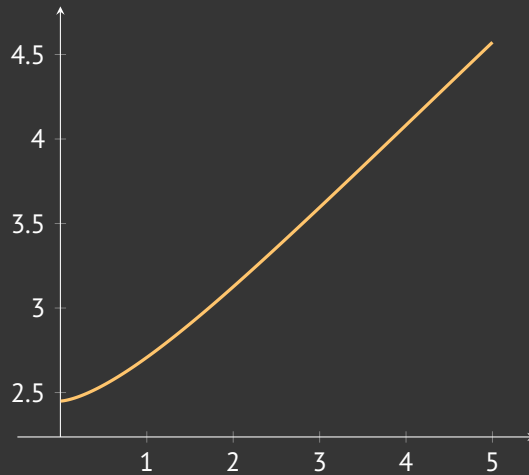
Niech $c = e^m$ dla pewnego m , bo wiadomo, że aby ta funkcja była gdziekolwiek określona, to $(c - e^x > 0)$ na pewnym przedziale, czyli $c > 0$. Rozważmy teraz dwa przypadki: $x < 0$ i $x \geq 0$. Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja będzie coraz bardziej zbliżać się do wartości m , bo e^x będzie dążyć do 0, ale nigdy go nie osiągnie. Dla $x \in [0, m)$ funkcja będzie maleć z $\lim_{x \rightarrow m} \ln(c - e^x) = -\infty$. Czyli wykres wygląda tak dla $m = 5$: (i tutaj użyję sobie paczuszki do rysowania grafów bo czemu nie XD)



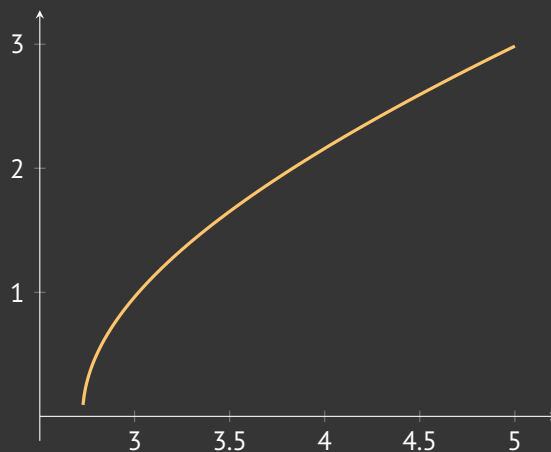
(b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{x}}{y} \\ y dy &= \sqrt{x} dx \\ \int y dy &= \int \sqrt{x} dx \\ \frac{1}{2} y^2 &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \\ y &= \pm \sqrt{\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c}\end{aligned}$$

W tym przypadku możemy mieć dodatnie i ujemne c , ale x musi być liczbą dodatnią, inaczej $x^{\frac{3}{2}}$ nie istnieje. Dla dodatniego c wiemy, że wartość w $x = 0$ będzie wynosić \sqrt{c} . Wtedy mamy funkcję wyglądającą jak:



Natomiast dla $c < 0$ wiemy, że będziemy ruszać gdzie graf się "zaczyna". To znaczy dla $x < \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ funkcja jest nieokreślona, a dla $x \geq \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ wygląda troszkę jak funkcja pierwiastka 4-tego stopnia z x^3 ?



(c) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{\sqrt{y}} &= \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ \int y^{-\frac{1}{2}} dy &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= 2x^{\frac{1}{2}} + c \\ y &= x + 2c\sqrt{x} + c^2\end{aligned}$$

Dla $c < 0$ jakaś potężna okejka, a dla $c \geq 0$ to se leeeeci w górę. Już mi się nie chce rozrysowywać.

ZADANIE 4.

Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ oznacza temperaturę czajnika w chwili t . Zakładamy, że $S(0) = 100^\circ\text{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C . Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła 60°C . Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę 25°C ?

Wiemy, że pochodna funkcji temperatury od czasu jest wprost proporcjonalna do różnicy w temperaturze:

$$\frac{dS}{dt} = a(S - 20).$$

Rozwiążmy to równanie

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= a(20 - S(t)) \\ \frac{dS}{20 - S(t)} &= a dt \\ \int \frac{dS}{20 - S(t)} &= \int a dt \\ -\ln |20 - S(t)| &= at + c \\ |20 - S(t)| &= e^{-at-c}\end{aligned}$$

Tutaj ciało stygnie, więc $S(t) > 20$, czyli

$$|20 - S(t)| = S(t) - 20.$$

Z treści zadania wiemy, że $S(0) = 100$, co po podstawieniu da nam wartość c :

$$\begin{aligned}100 - 20 &= e^{-c} \\ 80 &= e^{-c} \\ \ln 80 &= -c \\ c &= -\ln 80\end{aligned}$$

Dalej, podstawiając $S(10) = 60$ możemy poznać wartość a :

$$\begin{aligned}60 - 20 &= e^{-10a + \ln 80} \\ 40 &= e^{-10a} \cdot 80 \\ \frac{1}{2} &= e^{-10a} \\ \ln \frac{1}{2} &= -10a \\ a &= \ln 2 \cdot \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Dostajemy wzór:

$$S(t) = 20 + e^{-t \ln 2 \cdot \frac{1}{10} + \ln 80}$$

po ilu minutach będziemy mieli temperaturę 25°C ? Jeszu nie wiem i nie chce tego zmieniać tbh.

$$\begin{aligned}25 - 20 &= e^{-ta - c} \\ \ln 5 &= -ta - c \\ \ln 5 + \ln 80 &= -ta \\ 10 \ln 400 &= t \ln 2 \\ 10 \ln 20^2 &= t \ln 2 \\ \ln 20^{20} &= t \ln 2\end{aligned}$$

ZADANIE 5.

Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzeniła plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób, przy założeniu, że:

1. Plotka rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki.

2. Plotka rozprzestrzenia się według prawa Gompertza: $y' = ke^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.

Wersja 1:

Będziemy modelować $y(t)$, czyli ilość osób, które plotkę już usłyszały w zależności od czasu t . Wiemy, że prędkość rozprzestrzeniania się plotki, to znaczy y' , jest wprost proporcjonalna do $y(1000 - y)$. Rozwiążmy to cudeńko

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= ay(1000 - y) \\ \frac{dy}{y(1000 - y)} &= adt \\ \int \frac{dy}{y(1000 - y)} &= \int adt \\ \frac{\ln y - \ln(1000 - y)}{1000} &= at + c \\ \ln \frac{y}{1000 - y} &= at + c \\ \frac{y}{1000 - y} &= e^{at+c} \\ y &= (1000 - y)e^{at+c} \\ y(1 + e^{at+c}) &= 1000e^{at+c} \\ y &= \frac{1000e^{at+c}}{1 + e^{at+c}} \\ y &= \frac{1000}{e^{-at-c} + 1}\end{aligned}$$

To teraz będzie podstawianko-sranko. Gdy $t = 0$ mamy $y = 5$, czyli

$$\begin{aligned}5 &= \frac{1000}{e^{-c} + 1} \\ e^{-c} + 1 &= 200 \\ e^{-c} &= 199 \\ -c &= \ln 199 \\ c &= -\ln 199\end{aligned}$$

natomiast, gdy $t = 1$, to $y = 10$, czyli

$$\begin{aligned}10 &= \frac{1000}{e^{-a+\ln 199} + 1} \\ e^{-a} \cdot 199 + 1 &= 100 \\ e^{-a} &= \frac{99}{199} \\ -a &= \ln \frac{99}{199} \\ a &= \ln \frac{199}{99}\end{aligned}$$

Teraz chce rozwiązać

$$\begin{aligned}850 &= \frac{1000}{e^{t \ln \frac{99}{199} + \ln 199} + 1} \\199 \cdot \left(\frac{99}{199}\right)^t &= \frac{1000}{850} - 1 \\ \frac{99^t}{199^{t-1}} &= \frac{3}{17} \\99^t \cdot 17 &= 3 \cdot 199^{t-1} \\\ln(99^t \cdot 17) &= \ln(3 \cdot 199^{t-1}) \\t \ln 99 + \ln 17 &= \ln 3 + (t-1) \ln 199 \\t(\ln 99 - \ln 199) &= \ln \frac{3}{199 \cdot 17} \\t \ln \frac{99}{199} &= \ln \frac{3}{199 \cdot 17}\end{aligned}$$

Wersja 2:

Teraz chcemy rozwiązać równanie już nam dane:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ke^{-(73/520)t} \\dy &= ke^{-(73/520)t} dt \\\int dy &= \int ke^{-(73/520)t} dt \\y &= -\frac{520}{73} ke^{-(73/520)t} + c\end{aligned}$$

To lecimy z podstawianiem:

$$\begin{aligned}\begin{cases} 5 = -\frac{520}{73}k + c \\ 10 = -\frac{520}{73}ke^{-73/520} + c \end{cases} \\5 &= -\frac{520}{73}k + \frac{520}{73}ke^{-\frac{73}{520}} \\365 &= k(520e^{-73/520} - 520) \\\frac{365}{520e^{-73/520} - 520} &= k\end{aligned}$$

ZADANIE 6.

Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała de-nata. Wynosiła ona 32.6°C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła 31.4°C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo - Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut od miejsca morderstwa. Czy alibi jest niepodważalne?

Z prawa Newtona wiemy, że zmiana temperatury jest wprost proporcjonalna do różnicy między ciałem a jego otoczeniem, czyli z zadania 4 kradnę

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= a(S - 21) \\\frac{dS}{S - 21} &= adt \\\int \frac{dS}{S - 21} &= \int adt \\-\ln|S - 21| &= at + c \\|S - 21| &= e^{at+c}\end{aligned}$$

To lecimy z podstawianiem. Chyba będzie mi najwygodniej mieć punkt $t = 0$ wtedy kiedy lekarz pomierzył temperaturę?

$$32.6 - 21 = 11.6 = e^c$$

$$\ln 11.6 = c$$

Czyli kiedy po godzinie usuwano ciało mamy:

$$31.4 - 21 = 10.4 = 11.6e^{60a}$$

$$\frac{10.4}{11.6} = 0.8966 = e^{60a}$$

$$\frac{\ln 0.8966}{60} = -0.00182 = a$$

Jaką temperaturę oczekujemy o 19:30? Czyli 50 min przed pierwszym pomiarem

$$11.6e^{-0.00182(-50)} + 21 = 33.705$$

Kiedy ziomeczek miał 36°C ?

$$36 = 21 + 11.6e^{-0.00182t}$$

$$\frac{15}{11.6} = 1.2931 = e^{-0.00182t}$$

$$-\frac{\ln 1.2931}{0.00182} = 141.232 = t$$

Czyli około 2h 21 min przed pomiarem, czyli około godziny 18. Więc jeśli od razu uciekł to niezbyt?