ZADANIE 1.

Dla ciągłych funkcji rzeczywistych $f, g : M \to \mathbb{R}$ na rozmaitości gładkiej M, oraz dla $\varepsilon > 0$ mówimy, że g jest ε-aproskymacją f, jeśli $\|f - g\| < \varepsilon$ (tzn. dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$).

(a) *Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ każda ciągła funkcja $F : M \to \mathbb{R}$ posiada gładką ε-aproksymację.*

(b) *Rozszerz ten wynik do sytuacji, gdy $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ jest dowolną ciągłą dodatnią funkcją rzeczywistą, zaś ε-aproksymacja funkcji f to dowolna taka funkcja g, że dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$.*

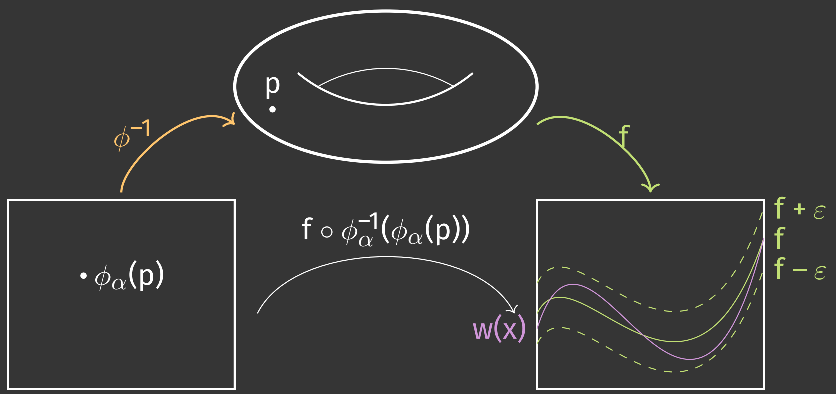
(c) *Niech $D \subseteq M$ będzie dowolnym domkniętym podzbiorem. Dla dowolnego ε jak w punkcie (b) uzasadnij, że dowolna funkcja ciągła $f : M \to \mathbb{R}$, która jest gładka na pewnym otwartym otoczeniu zbioru D, posiada gładką ε-aproksymację $g : M \to \mathbb{R}$ taką, że $g \restriction D = f \restriction D$.*

(a)

Daną mam ciągłą funkcję $F : M \to \mathbb{R}$. Wiem, że każdą funkcję mogę dowolnie dokładnie aproksymować za pomocą wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Weźmy sobie jakiś atlas na M zawierający mapy (U_α, ϕ_α). Wiem, że skoro f było ciągłe, a ϕ nic nie psuje, to pewnie i $f \circ \phi^{-1}$ jest ciągłe. Czyli w ten sposób dostaję funkcję $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i na tym już chyba umiem pracować jakoś po ludzku.

Ten obrazek średnio cokolwiek daje, ale zrobiłam go i nie zamierzam usuwać, bo wygląda zajebiście.



Chyba mogę znaleźć sobie wielomian $w \in \mathbb{R}[X^n]$ taki, że siedzi w kulce nałożonej na f w przestrzeni funkcji ciągłych. Ewentualnie mogę powiedzieć, że w to jest po prostu gładka funkcja blisko f określona na $\phi_\alpha(U_\alpha)$, bo chyba funkcje gładkie są gęste w zbiorze funkcji ciągłych czy jakoś tak. Teraz chcę sobie produkować $g = w(\phi(p))$, ale wtedy to nie wyśmignie się chyba tak od razu?

Może wyprodukujmy sobie rozkład jedności ψ_α taki, że $\psi_\alpha \equiv 0$ poza U_α i dowolny punkt $p \in M$ jest $\psi_\alpha(p) > 0$ dla skończenie wielu α. No i jeszcze ten $\sum \psi_\alpha(p) = 1$ dla każdego $p \in M$. Czyli mam pysia będącego rozkładem jedności. Czyli mogę go chyba użyć do wytworzenia w końcu tego g? Bo jak ψ_α jest gładkie, to ten

$$g(p) = \sum w(\phi_\alpha(p))\psi_\alpha(p)$$

jest nadal gładkie? Znaczy tutaj jest nieścisłość, bo powinnam pisać, że tak jest dla $p \in U_\alpha$, a jeśli $p \notin U_\alpha$, to po prostu 0, ale to i tak na jedno wychodzi, bo wtedy $\psi_\alpha(p)$ się zeruje. No i jakaś suma skończenie lokalnych gładkich funkcji bla bla bla bla bla

Teraz muszę się upewnić, że to faktycznie jest ograniczeniem moim?

$$\begin{aligned}\|f(x) - g(x)\| &= \left\|f(x) - \sum w(\phi_\alpha(x))\psi_\alpha(x)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\sum(\psi_\alpha(x))[f(x) - w(\phi_\alpha(x))]\right\| < \\ &< \left|\sum(\psi_\alpha(x))\varepsilon\right| = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

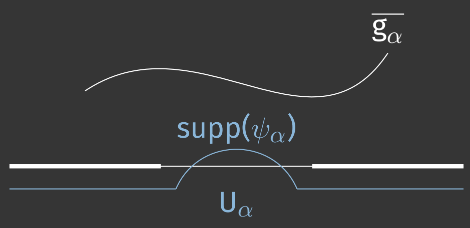
(b)

Teraz zamiast ładnej kulki mam troszkę brzydszą kulkę bo $\{w \;:\; f(x) - \varepsilon(x) < w(x) < f(x) + \varepsilon(x)\}$, ale nadal mogę znaleźć jakieś gładkie w i postąpić analogicznie jak wyżej.

Mamy $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ - atlas złożony z prezwartych $\overline{U_\alpha}$. Niech $\{\psi_\alpha\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w U_α. Ustalmy α. Wtedy $\varepsilon \circ \phi_\alpha^{-1}$ przyjmuje na $\overline{\phi_\alpha(U_\alpha)}$ minimum $m_\alpha > 0$. Istnieje gładka $g_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ takie, że $\|F \restriction U_\alpha - g_\alpha\| < m_\alpha$. Niech

$$\overline{g_\alpha}(p) = \begin{cases} g_\alpha(p) & \in U_\alpha \\ 0 & p \notin U_\alpha \end{cases},$$

wtedy $m_\alpha \circ \psi_\alpha(p) \leq \varepsilon(p)$. Niech $G = \sum_\alpha \psi_\alpha \overline{g_\alpha}$.



$$\begin{aligned}G(p) &\leq \sum \psi_\alpha(F(p) + \varepsilon(p)) = F(p) + \varepsilon(p) \\ G(p) &\geq \sum \psi_\alpha(f(p) - \varepsilon(p)) = F(p) - \varepsilon(p)\end{aligned}$$

(c)

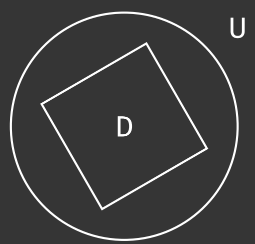
Czyli robię jakieś bump function? Czyli biorę sobie atlas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ taki, że $U_1 = M \setminus D$, a U_2 jest otwartym podzbiorem zawierającym $D \subseteq U_2$. Niech wtedy ψ_1, ψ_2 będzie gładkim rozkładem jedności takim, że $\psi_1 \equiv 0$ na D. Wtedy ϕ_2 na D się nie zeruje, a sumuje do 1, a na okolicy D musi stopniowo schodzić do 0, czyli wyśmignie. To teraz wystarczy znaleźć funkcję, która na $f(\phi_2(D))$ jest identyczna, a na pozostałej części troszkę odbiega, ale to też się da zrobić, taka funkcja to może być w i wtedy

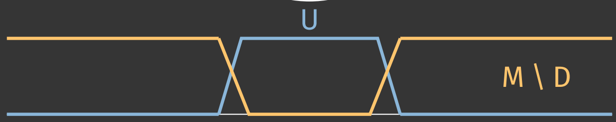
$$g(x) = \begin{cases} w(\phi_2(x)) & x \in D \\ \sum w(\phi_\alpha(x))\psi_\alpha(x) & \text{wpp} \end{cases}$$

Niech $\{\psi_1, \psi_2\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U, M \setminus D\}$, gdzie U jest otoczeniem otwartym D, na którym f jest gładka. Niech

$$G = f \circ \phi_1 + g \circ \phi_2,$$

gdzie g to jest ε-aproksymacja f z punktu (b).





ZADANIE 2.

Dla niezwartej rozmaitości gładkiej M skonstruuj gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego naturalnego n przeciwobraz $f^{-1}([-n, n])$ jest zwartym podzbiorem w M. Funkcje o tej własności nazywają się funkcjami właściwymi. Wskazówka: wykorzystaj zadanie 6 z listy 1: uzasadnij też najpierw następujący fakt pomocniczy: istnieje ciąg otwartych zbiorów V_i takich, że $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = M$, oraz dla każdego i domknięcie $cl(V_i)$ w M jest zwarte i zawarte w V_{i+1}.

Zadanie 6 w liście 1 mówi, że każda rozmaitość M jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia w M sa homeomorficzne z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$.

Myślę, że wystarczy wziąć ten ciąg jak z faktu pomocniczego i troszkę go podciąć tak, żeby był homeomorficzny z otwartymi kulami. To już robiliśmy. Potem wiem, że domknięcie otwartej kuli jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$, czyli jego przeciwobraz przez funkcje z atlasu też jest zbiorem zwartym. Mogę więc funkcją f skalować promień na kolejne liczby naturalne, a odległość od kuli i położenie w odpowiedniej półkuli skalować na cały taki odcinek. Taki mam chwilowo pomysł.

To może teraz uzasadnienie faktu pomocniczego? Niech $\bigcup U_i = M$ będzie przeliczalnym pokryciem M. To suniemy z tworzeniem ciągu V_i? Niech $V_0 = U_0$. Czy mogę powiedzieć, że jeśli zrobię $V_1 = U_1 \cup cl(V_0)$ to jeśli rzucę to na $\mathbb{R}^n$ i znajdę tam otwarty podzbiór niebędący całym obrazem M, który to zawiera, to jestem w domu? Raczej tak. Czyli takie coś powtarzam dla każdego i i jestem w domu.

Robimy zadanie 3 w inny sposób XD

Istnieją V_i - otwarte prezwarte takie, że $cl(V_i) \subseteq V_{i+1}$ i $\bigcup^{\uparrow} V_i = M$. Z zadania 6 z poprzedniej listy wiemy, że istnieją B_k takie, że $M = \bigcup B_k$ i $B_k \cong B(0, 1)$, wtedy $cl(B_k) \cong cl(B(0, 1))$.

Możemy więc robić, żeby

$$B \cong B(0, 1) = \bigcup^{\uparrow} B(0, 1 - \frac{1}{s})$$

To teraz niech $B_k = \bigcup^{\uparrow} B_{k,s}$ i wtedy mamy to z domknięciem. Teraz możemy zdefiniować V_i jako:

$$V_i = \bigcup_{k=1}^{i} \bigcup_{s=1}^{i}{}^{\uparrow} B_{k,i} = \bigcup_{k=1}^{i} B_{k,i}$$

Wtedy

$$cl(V_i) = \bigcup cl(B_{k,i}) \subseteq \bigcup B_{k,i+1} \subseteq V_{i+1}$$

Będziemy mieli pary $\{V_{i+1}, M \setminus cl(V_i)\}$, czyli to jest takie dwuelementowe pokrycie rozmaitości. Teraz chcemy funkcję, która jest 1 na $cl(V_{i+1})$, a zerem na tym drugim. Rozważmy rozkład jedności $\{\psi_1, 1 - \psi_i\}$ taki, że $\psi_i(M \setminus V_{i+1}) \equiv 1$ i $\psi_i(V_i) \equiv 0$.

Niech $f(x) = \sum \psi_i(x)$. Wystarczy pokazać, że jest to funkcja właściwa. Support to dopełnienie $cl(V_i)$ i dla dużych i będzie zerem? Nieee wiem, chce spać.

Jeśli $x \in V_i$, to $f(x) \leq i - 1$. Z drugiej strony, jeśli $x \in M \setminus V_i$, to $f(x) \geq i$.

Teraz potrzebujemy, żeby $f^{-1}[-n, n]$ było zwarte. Jak to się ma dla $f^{-1}[0, n]$? jest on zawarty w $cl(V_{n+1})$

ZADANIE 3.

Niech $\mathscr{U}$ będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami prezwartymi i niech $\{f_j\}$ będzie gładkim rozkładem jedności wpisanym w $\mathscr{U}$. Uzasadnij, że funkcja $h = \sum j \circ f_j$ jest gładką funkcją właściwą o dodatnich wartościach. Uzasadnij, że funkcja ta, jak każda rzeczywista funkcja właściwa ograniczona od dołu, posiada globalne minimum (czyli taki punkt $p \in M$ że dla każdego $x \in M$ zachodzi $f(x) \geq f(p)$.

Mamy funkcję $h = \sum j \circ f_j$. Jest gładka i tnie się niepusto tylko ze skończenie wieloma zbiorami z pokrycia. Chcemy pokazać, że to jest ograniczone od dołu. Jest właściwa, bo wiemy, że poza sumą zbiorów $U_1, \ldots, U_n$ to jest suma większa niż n. Zbiory te są prezwarte, suma skończenie wielu zbiorów prezwartych jest prezwarty. Czyli

$$h^{-1}[-n, n] \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i.$$

Mamy pokazać, że istnieje minimum, czyli cośtam gdzie cośtam jest realizowane.

Weźmy sobie punkt p taki, że $n \leq h(p) < n + 1$. Teraz chcemy dzielić sobie rozmaitość na sumę od $U_1, \ldots, U_{n+1}$ i na resztę. I teraz na dopełnienu sumy $U_1, \ldots, U_{n+1}$ na pewno nie znajdę minimum, bo na tym dopełnieniu ta suma jest większa niż $n + 1$. Ni cholery nie zrozumiałam.

ZADANIE 4.

Dla rozmaitości M z brzegiem skonstruuj taką gładką funkcję $f : M \to [0, \infty)$ taką, że $\partial M = f^{-1}(0)$ oraz rząd f w dowolnym punkcie brzegowym wynosi 1.

Rząd funkcji

Idea: Ustalmy rozkład jedności dla zbiorów mapowych $\{h_i\}$. Nie rozumiem tego, co szachu mówi.

$$f(\underset{\in M}{x}) = \sum g_j(\psi_j(x)) \cdot h_j(x)$$

Teraz wypadałoby sprawdzić, że $h_j(x)$ śmiga. Skoro cośtam zeruje się na brzegu, to ma rząd 1. Teraz trzeba policzyć pochodną. Kurwa zgubiłam się. Ale to, że rząd jest co najwyżej 1 to też wynika z tego, że idziemy w $\mathbb{R}$. Teraz chcemy liczyć pochodną i policzyć, że się nie zeruje.

Pochodna to będzie suma pochodnych czyli będą kontrybucje z różnych map. Teraz musimy wziąc jedną konkretną mapę i policzyć jej pochodną i pokazać, że ta pochodna jest dodatnia, czyli i cała suma też będzie sumą dodatnich i będzie dodatnia.

Ustalmy dowolne $p \in \partial M$. Zauwazmy, że f(p) jest skończenie wielu obrazów i skupmy się na jednym, nazwijmy go indeksem β.

$$g_\beta(\psi_\beta(p)) \circ h_\beta(p) = \xi(p)$$

i chcemy pokazać, że $\partial\xi(p) > 0$

DUUUŻO DZIWNYCH RZECZY

Trzeba udwodonić lemacik, że $f : M \to \mathbb{R}$ i nie wiem co sie dzieje hyhy

Idea jest taka, że patrzymy na pochodną funkcji $D(f \circ \psi^{-1})$ to gradient. To jest macierz $1 \times n$. Wiemy, że jest to coś dodatniego i potem coś. AAAAA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA

Ten lemat to w sumie trzeba zmienic, ale to i tak zdjęcia zrobię