## ZADANIE 1.

*Pokaż, że $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ jeśli $m, n$ są względnie pierwsze.*

Załóżmy, że $m, n$ są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkciku:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

## ZADANIE 2.

*Niech $A$ będzie pierścieniem, $\mathfrak{a}$ ideałem, a $M$ $A$-modułem. Pokaż, że $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ jest izomorficzne do $M/\mathfrak{a}M$. [Stensoruj ciąg dokładny $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ z $M$*

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

i jakiś losowy $A$-moduł $M$, to

$$\mathfrak{a} \otimes M \to A \otimes M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebiście, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ na $M''$ ($f$ to pierwsza funkcja, a myśki lecą $M' \to M \to M''$.)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja $\mathfrak{a} \to A$? To jest identyczność na $\mathfrak{a}$ lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\mathfrak{a} \otimes M \cong (A \otimes M)/(\mathfrak{a} \otimes M) \cong AM/\mathfrak{a}M = M/\mathfrak{a}M$$

## ZADANIE 3.

*Niech $A$ będzie pierścieniem lokalnym, $M, N$ skończenie generowanymi $A$-modułami. Udowodnij, że $M \otimes N = 0$ wtedy $M = 0$ lub $N = 0$.*

*[Niech $\mathfrak{m}$ będzie ideałem maksymalnym, $k = A/\mathfrak{m}$ będzie residue filed (to jest ciało zrobione przez wytentegowanie z tym tym). Niech $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że $M_k = 0 \implies M = 0$. Ale $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$ or $N_k = 0$, since $M_k, N_k$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]*

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \overset{(\star)}{\implies} M_k \otimes_k N_k = 0 \overset{(\heartsuit)}{\implies} M_k = 0 \vee N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$(\star)$ $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) = 0$

Jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to $(k \otimes_A M) \otimes_A N) = 0$, czyli $k \otimes_A M$

A to to jest raczej proste, bo jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to tym bardziej $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$ a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$.

$(\heartsuit)$ $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \vee N_k = 0$? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na N.

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAAA – zapytać jak się zmienia to nad czym tensorujemy

Chwila, bo $0 = k \otimes_A (M \otimes_A N) = (k \otimes_A M) \otimes_A N$

## ZADANIE 4.

*Niech $M_i$ ($i \in I$) będzie dowolną rodziną A-modułów i niech M będzie ich sumą prostą. Pokaż, że M jest płaski $\iff$ każdy $M_i$ jest płaski*

Mamy funktor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ i on jest na kategorii A-modułów i homomorfizmów. Jeśli $T_N$ jest dokładny, czyli tensorowanie z N przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy N jest flat A-modułem.

$\Longleftarrow$ pójdzie chyba z faktu, że $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

$\Longrightarrow$

Wiem, że jeśli mam ciąg dokładny

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$

dla dowolnych $N_i$, to wtedy tensorowanie przez M zachowuje dokładność, tzn ciąg

$$0 \to N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M \to N_3 \otimes M \to 0$$

jest nadal dokładny.

Co by się stało, jeśli któraś współrzędna M nie jest flat? Wtedy mogłam N wybrać tak, żeby

$$0 \to N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i \to N_3 \otimes M_i \to 0$$

nie było dokładne, czyli tutaj psuje się iniekcja

$$f_1 : N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i$$

No dobra, ale ja mogę zapisać sobie

$$M = M_i \bigoplus_{j \neq i} M_j$$

i zrobić

$$F_1 : N_1 \otimes (M_i \bigoplus M_j) \to N_2 \otimes (M_i \bigoplus M_j)$$

czyli coś typu $n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto n_2 \otimes (m_i, m)$, ale mam też izomorfizmy

$$n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_1, m_i) \otimes (n_1, m)$$

$$n_2 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_2, m_i) \otimes (n_2, m)$$

no i tak jakby iniekcyjność $F_1$ jest psuta przez brak inikcyjności w $f_1$, czyli sprzeczność? Bo przecież $F_1 = f_1 \otimes F'$ dla jakiejś ładnej iniekcji $F'$.

## ZADANIE 5.

*Niech A[X] będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem A. Pokaż, że A[X] jest płaską A-algebrą.*

No jak dla mnie to A[X] to jest suma prosta $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Ax^n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ i A[X] to moduł wolny. Ah, no i teraz korzystam z tego, że $A \otimes M = M$ i śmiga.

## ZADANIE 6.

*Dla dowolnego A-moduły, niech M[X] będzie oznaczało zbiór wszystkich wielomianów w x o współczynnikach z M, to znaczy wyrażenia formy*

$$m_0 + m_1 x + \ldots + x_r x^r$$

Zdefiniuj iloczyn elementu A[X] z elementem M[X] w oczywisty sposób, pokaż że M[X] jest A[X]-modułem. Pokaż, że $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Jak to leciało dla A-modułu? $a, b \in A, x, y \in M$

$$a(x + y) = ax + ay$$
$$(a + b)x = ax + by$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1x = x$$

Czy ja chce brać sobie $w, v \in M[X]$ oraz $p, r \in A[X]$ i robić zwykłe mnożenie wielomianów? Chyba tak XD

$$p(w + v) = \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum w_i x^i + \sum v_i x^i\right) = \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum (w_i + v_i) x^i\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k} p_i(w_j + v_j)x^k\right) = \sum\left(\sum p_i w_j x^k + \sum p_i v_j x^k\right) =$$
$$= \sum\sum p_i w_j x^k + \sum\sum p_i v_j x^k = pw + pv$$

I reszty sprawdzania to mi się nie chce.

Homomorfizm na

$$f : M[X] \to A[X] \otimes_A M$$
$$f(\sum m_j x^j) = \sum (x^j \otimes m_j)$$

jest $1 - 1$, bo każdy wielomian jest unikalny ze względu na współczynniki przy kolejnych potęgach, bla bla bla. Widać. Nawet mi się nie chce tego pisać ładnie

To teraz w drugą stronę jest też dość prosty

$$g : A[X] \otimes_A M \to M[X]$$
$$g(\left(\sum a_i x^i\right) \otimes m) = \sum a_i m x^i$$

## ZADANIE 7.

*Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem pierwszym w A. Pokaż, że $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym w $A[X]$. Czy jeśli $\mathfrak{m}$ jest ideałem pierwszym w A, to $\mathfrak{m}[X]$ jest ideałem maksymalnym w $A[X]$?*

Z poprzedniego zadania wiem, że $\mathfrak{p}[X] \cong A[X] \otimes_A \mathfrak{p}$, bo każdy ideał jest A-modułem.

Czy mogę określić sobie homomorfizm (ewualuację w $x = 1$)

$$f : A[X] \to A$$
$$f(\sum a_i x^i) = \sum a_i$$

i wtedy $f^{-1}[\mathfrak{p}]$ jest całością $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym jako przeciwobraz ideału pierwszego przez homomorfizm.

Alternatywnie

$$(A[X])/(\mathfrak{p}[X]) \cong (A/\mathfrak{p})[X]$$

w pierwszym zadaniu z poprzedniego rozdziału pokazywaliśmy, że $f \in A[X]$ jest dzielnikiem zera $\iff$ $af = 0$ dla pewnego $a \in A \setminus \{0\}$, czyli $\iff$ w A są dzielniki zera. Ale w $(A/\mathfrak{p})$ dzielników zera nie ma, bo wszystkie są w $\mathfrak{p}$ który to wyrzuciliśmy, więc śmiga.

## ZADANIE 9.

*TO WYPADAŁOBY ZROBIĆ, ALE NIEEE CHCEEE MIII SIEEEE*

## ZADANIE 10.

*Niech $A$ będzie pierścieniem i $\mathfrak{a}$ ideałem zawartym w radykalne Jacobsona. Niech $M$ będzie $A$-modułem, a $N$ niech będzie skończenie generowanym $A$-modułem. Niech $u : M \to N$ będzie homomorfizmem. Pokaż, że jeżeli indukowany homomorfizm $\bar{\cdot} M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ jest surjektywny, to również $u$ taki jest.*

Najpierw rysuneczek:

$$\begin{tikzcd}
M/\mathfrak{a}M \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "\cong"] & N/\mathfrak{a}N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Coker}(\bar{u}) = 0 \arrow[d, "\cong"] \\
M \otimes A/\mathfrak{a} \arrow[r, "u\otimes 1"] & N \otimes A/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0 = ??? = \mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a}
\end{tikzcd}$$

$$M \xrightarrow{u} N \longrightarrow \mathrm{Coker}(u)$$

No i to jest tak, że to co jest w ??? jest izomorficzne z $\mathrm{Coker}(\bar{u})$, bo no izomorfizm w dół mi nie popsuje $\mathrm{Coker}(\bar{u})$, które było równe 0. Czyli ??? = 0. Z drugiej strony, to co jest w ??? jest równe $\mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a}$. Skoro $N$ było skończenie generowane, to takie jest też $\mathrm{Coker}(u)$, bo przecież wychodzi z $N$. Czyli mam, że

$$0 = \mathrm{Coker}(u) \otimes A/\mathfrak{a} \cong \mathrm{Coker}(u)/\mathfrak{a}\mathrm{Coker}(u)$$

i z tego wynika, że $\mathrm{Coker}(u) = \mathfrak{a}\mathrm{Coker}(u)$ i z lematu Nakayamy wiem, że $\mathrm{Coker}(u) = 0$.

*Nieskończenie generowany moduł, który nie spełnia lematu Nakayamy. Wyzwanie: znaleźć pierścień $R$, moduł $M$ i ideał $\mathfrak{a}$ taki, że $M = \mathfrak{a}M$ i $M \neq 0$*

Mam pierścień $k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$

## ZADANIE 11.

*Niech $A$ będzie pierścieniem $\neq 0$. Pokaż, że $A^n \cong A^m \implies m = n$.*

*[Niech $\mathfrak{m}$ będzie ideałem maksymalnym w $A$ i niech $\phi : A^n \to A^m$ będzie izomorfizmem. Wtedy $1 \otimes \phi : (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n \to (A/\mathfrak{m}) \otimes A^m$ jest izomorfizmem pomiędzy przestrzeniami liniowymi wymiaru $m$ i $n$ nad ciałem $k = A/\mathfrak{m}$. Czyli $m - n$.]*

- *Jeżeli $\phi : A^m \to A^n$ jest surjekcją, to $m \geq n$*
- *Czy jeżeli $\phi : A^m \to A^n$ jest iniekcją, to $m \leq n$?*

Mamy $A^m \cong A^n$ i $\mathfrak{m} \triangleleft A$.

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & A^m \arrow[d] \\
(A/\mathfrak{m})^n \arrow[r, "\cong"] & (A/\mathfrak{m})^m
\end{tikzcd}$$

i to niżej to jest przestrzeń liniowa, korzystamy z fakty dobrej określonowości wymiaru takich przestrzeni.

Na surjekcję to działa, ale przy iniekcji niekoniecznie to się przenosi.

Zakładamy nie wprost, że $m > n$ i mamy strzałkę $\phi : A^m \to A^n$. Będziemy uzasadniać, że ona ma nietrywialne jądro.

$$\begin{tikzcd}
A^m \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & A^n \arrow[r, hook] & A^m
\end{tikzcd}$$

Niech $M$ będzie modułem z $A^k$. i $\psi \in \mathrm{End}(A^m)$. Mamy, że dla $a_i \in A$

$$\psi^k + \ldots + a_1\psi^{k-1} + \ldots + a_k \mathrm{id}_{a^m} = 0$$

$$\begin{tikzcd} A^k \arrow[r] \arrow[d] & A^k \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

## ZADANIE 12.

*Niech $M$ będzie skończenie generowanym $A$-modułem i $\phi : M]toA^n$ będzie surjektywnym homomorfizmem. Pokaż, że $\ker(\phi)$ jest skończenie generowany.*

*[Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie bazą $A^n$ i wybierzmy $u_i \in M$ takie, że $\phi(u_i) = e_i$. Pokaż, że $M$ jest sumą prostą $\ker(\phi)$ i podmodułów generowanych przez $u_1, \ldots, u_n$.*

Korzystamy ze wskazówki, czyli te $u_i$ istnieją tak jak chcemy. Niech $m \in M$, wtedy

$$\phi(m) = \sum a_i e_i \implies m - \sum a_i u_i \in \ker(\phi)$$

Czyli $m \in M$ to jest suma czegoś z $\langle u_i \rangle$ i czegoś z $\ker(\phi)$.

Z tego wnioskujemy, że $\ker(\phi) \cong M/\langle u_i \rangle$ i my mówimy, że to jest skończenie generowane, bo jest suriekcja z $M$ w to cóś.

## ZADANIE 13

*Niech $f : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni i niech $N$ będzie $B$-modułem. Patrzenie na $N$ jako na $A$-moduł poprzez restrykcję skalarów daje nam $B$-moduł $N_B = B \otimes_A N$. Pokaż, że homomorfizm $g : N \to N_B$ taki, że $y \mapsto 1 \otimes y$ jest iniekcją i że $g(N)$ jest składnikiem sumy $N_B$ (czyli $N_B = g(N) \oplus C$ dla pewnego $C$).*

*[Zdefiniuje $p : N_B \to N$ przez $p(b \otimes y) = by$ i pokaż, że $N_B = \mathrm{Im}(g) \oplus \ker(p)$.]*

To, że $g$ jest iniekcją to raczej widać. Bo wpp.

$$g(y) = 1 \otimes y = 1 \otimes y' = g(y')$$

ale $y \neq y'$, czyli $1 \otimes y \neq 1 \otimes y'$.

Chyba mam pokazać, że $\ker(p)$ i $\mathrm{Im}(g)$ są rozłączne i coś z $N$ jest albo w ker albo w Im. Ale to chyba widać.

Niech $b \otimes n \in N_B$. Wtedy mamy dwie opcje:

- $bn = 0$, wtedy $b \otimes n \in \ker(p)$
- $bn \neq 0$, wtedy $b \otimes n = 1 \otimes bn \in \mathrm{Im}(g)$.

Wypadałoby też pokazać, że $p$ jest liniowe, ale sobie pominiemy.

Wiemy, że $g \circ p = id$ i chcemy, by $\ker(g) = 0$

## ZADANIE 14

*Częściowo uporządkowany zbiór $I$ jest skierowany, jeżeli dla każdej pary $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ takie, że $i \leq k \wedge j \leq k$.*

*Niech $A$ będzie pierścieniem, $I$ będzie skierowanym zbiorem i niech $\{M_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną $A$ modułów indeksowanych przez $I$. Dla każdej pary $i, j \in I$ takiej, że $i \leq j$ niech $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ będzie $A$-homomorfizmem i załóżmy, że poniższe aksjomaty są spełnione:*

- *$\mu_{ii}$ jest identycznością na $M_i$*
- *$\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ zawsze gdy $i \leq j \leq k$.*

*Wtedy moduł $M_i$ i homomorfizmy $\mu_{ij}$ są skierowanym systemem $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{ij})$ nad zbiorem skierowanym $I$.*

*Skonstruujemy A-moduł M nazywany skierowaną granicą skierowanego systemu $\mathbb{M}$. Niech C będzie sumą prostą $M_i$ i zidentyfikuj każdy moduł $M_i$ z jego kanonicznym obrazem w C. Niech D będzie podmodułem C generowanym przez wszystkie elementy postaci $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ dla $i \leq j$ i $x_i \in M_i$. Niech $M = C/D$ i $\mu : C \to M$ będzie projekcją, $\mu_i$ oznacza restrykcję $\mu$ do $M_i$.*

*Moduł M, albo bardziej dokładnie, para składająca się z M i rodziny homomorfizmów $\mu_i : M_i \to M$ jest nazywana skierowaną granicą skierowanego systemu $\mathbb{M}$ i piszemy $\varinjlim M_i$. Z tej konstrukcji jasno wynika, że $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ gdy tylko $i \leq j$.*

No konstrukcja, coś tutaj mam zrobić sama?

## ZADANIE 15.

*W sytuacji jak w zadaniu 14, pokaż, że każdy element M może być zapisany w formie $\mu_i(x_i)$ dla pewnego $i \in I$ i pewnego $x_i \in M_i$.*

*Pokaż, że jeśli $\mu_i(x_i) = 0$, wtedy istnieje $j \geq i$ takie, że $\mu_{ij}(x_i) = 0$ w $M_j$.*

Widzę to. Teraz pokazać.

Weźmy element $x \in M$. Wtedy $x = \sum x_i + D$ dla $x_i \in M_i$. Ale mamy zbiór uporządkowany, czyli istnieje j takie, że $\sum x_i + D = \sum_{i \leq j} x_i + D$. To mogę sobie wszystko rzucić na $M_j$, to znaczy zrobić

$$y_j = \sum \mu_{ij}(x_i) \in M_j.$$

Wtedy

$$\sum_{i \leq j} x_i - \sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i) = \sum_{i \leq j} (x_i - \mu_{ij}(x_i)) \in D$$

Czyli $\sum_{i \leq j} x_i = \sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i)$ w środku $C/D = M$, czyli

$$x = y_j + D = \mu_j(y_j)$$

Jeżeli $\mu_i(x_i) = 0$, to $x_i \in D$? A to znaczy, że $x_i - \mu_{ij}(x_i) = x_i$ dla pewnego j, czyli $\mu_{ij}(x_i) = 0$?

## ZADANIE 16.

*Pokaż, że skierowana granica jest wyznaczona (z dokładnością do izomorfizmu) przez następującą własność. Niech N będzie A-modułem i dla każdego $i \in I$ niech $\alpha_i : M_i \to N$ będzie homomorfizmem A-modułów takim, że $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ kiedy $i \leq j$. Wtedy istnieje jedyny homomorfizm $\alpha : M \to N$ taki, że $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ dla wszystkich $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
M_i \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\mu_{ij}"'] & & N \\
& M_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

To, że taka istnieje to widać z diagramu. Teraz co, gdyby były dwie takie strzałki? $\alpha'$ i $\alpha$? Wtedy

$$\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$$

$$\alpha_i = \alpha' \circ \mu_i$$

a z drugiej strony

$$\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij} = (\alpha \circ \mu_j) \circ \mu_{ij}$$

$$\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij} = (\alpha' \circ \mu_j) \circ \mu_{ij}$$

## ZADANIE 17.

**Exercise 1.** *Niech* $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{ij}), \mathbb{N} = (N_i, \nu_{ij})$ *będą skierowanymi układami* $A$ *modułów nad tym samym skierowanym zbiorem. Niech* $M, N$ *będą skierowaną granicą i* $\mu_i$