Wykład 1

- Równania w pierścieniach przemiennych

układy równań.

Notacja: R, S: pierścienie przemienne z $1 \neq 0$
K, L: ciała

Niech $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n]$, $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Problem. Czy istnieje rozszerzenie pierścieni (z jednością) $R \subseteq S$ t. że układ U: $f_1(\bar{X}) = \dots = f_m(\bar{X}) = 0$ ma rozwiązanie w S?

Fakt 1.1. $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subseteq S$ (tzn. $a_i \in S$ dla $i = 1, \dots, n$) jest rozwiązaniem układu $U \iff g(\bar{a}) = 0$ dla każdego $g \in (f_1, \dots, f_m) \triangleleft R[\bar{X}]$

1°. $(f_1, \dots, f_m) \ni b \neq 0$, $b \in R$. Wtedy U: sprzeczny, nie ma rozwiązań w żadnym $S \supset R$

2°. $(f_1, \dots, f_m) \cap R = \{0\}$. Wtedy U: niesprzeczny, skonstruujemy pierścień $S \supset R$ i rozwiązanie $\bar{a} \subseteq S$ układu U.

Niech $S = R[\bar{X}]/(f_1, \ldots, f_m)$ oraz

$j : R[\bar{X}] \longrightarrow S$ ilorazowe.

(a) $j\restriction_R$: 1-1, bo $\operatorname{Ker}(j\restriction_R) = \operatorname{Ker} j \cap R =$

$= (f_1, \ldots, f_m) \cap R = \{0\}$

Dlatego $j\restriction_R : R \xrightarrow{\cong} j(R) \subset S$.

Utożsamiamy R z $j(R)$: $R \subset S$ rozszerzenie pierścieni.

(b) Niech $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (j(X_1), \ldots, j(X_n)) \subseteq S$

$\bar{a}$: rozwiązanie U w S, bo:

$\hat{f}_i(\bar{a}) = \hat{f}_i(j(X_1), \ldots, j(X_n)) = j(\hat{f}_i(X_1, \ldots, X_n)) =$

$= j(f_i) = 0$

w $R[\bar{X}]$ $\hat{f}_i(\bar{X}) = f_i$

Uwaga 1.2. skonstruowane rozwiązanie $\bar{a}$ układu U ma następującą własność uniwersalności:

(*) Jeśli $S' \supset R$: rozszerzenie pierścieni (z jedynką) i $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_n) \subset S'$: rozwiązanie U, to:

$\exists!\, h : R[\bar{a}] \to R[\bar{a}']$ $(h\restriction_R = id_R$ i $h(\bar{a}) = \bar{a}')$

homomorfizm pierścieni

tu: $R[\bar{a}]$ = podpierścień $\subseteq S$ generowany przez $R \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ #

$= \{f[\bar{a}] : f \in R[\bar{X}]\} \subseteq S$.

<u>D-d</u> Niech $I = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}') = 0\}$
Δ
$R[\bar{X}]$

- $(f_1, \dots, f_m) \subset I$

$$\begin{tikzcd}
R[\bar{X}] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"', "g \mapsto g(\bar{a}') \in S'"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & S = R[\bar{X}]/(f_1, \dots, f_m) = R[\bar{a}] \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\
S \supset R[\bar{a}'] &
\end{tikzcd}$$

Uwaga: jeśli $I = (f_1, \dots, f_m)$, to $h : R[\bar{a}] \xrightarrow{\cong} R[\bar{a}']$.

Def. 1.3. $S \supset R$: rozszerzenie pierścieni, $\bar{a} \in S^n$.

(a) $I(\bar{a}/R) = \{g \in R[\bar{X}] : g(\bar{a}) = 0\} \lhd R[\bar{X}]$
ideał $\bar{a}$ nad R,

(b) $\bar{a}$: rozwiązanie ogólne (generic) układu $U \iff I(\bar{a}/R) = (f_1, \dots, f_m)$.

Uwaga 1.4. W sytuacji z Def. 1.3, gdy U jest niesprzeczny, to:
$\bar{a}$ jest rozwiązaniem ogólnym U $\Leftrightarrow$ zachodzi warunek (*) z uwagi 1.2.

Ciała: $K \subset L$ rozszerzenie ciał.
$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{a} \subseteq L$

$I(\bar{a}/K) = \{g(\bar{X}) \in K[\bar{X}] : g(\bar{a}) = 0\} \lhd K[\bar{X}]$
ideał $\bar{a}$ nad K.

$K[\bar{a}] \stackrel{def}{=}$ podpierścień ciała L generowany przez $K \cup \{a_1, \dots, a_n\}$
$= \{g(\bar{a}) : g(\bar{X}) \in K[\bar{X}]\}$

$K(\bar{a}) \stackrel{def}{=}$ (podciało ciała L generowane przez $K \cup \bar{a}$) = ciało ułamków $K[\bar{a}]_0$
$= \{g(\bar{a}) : g \in K(\bar{X})$ i $g(\bar{a})$ określone$\}$

Uwaga 1.5. Zał., że $K \subset L_1$, $K \subset L_2$ rozszerzenia ciał, $\bar{a}_1 \subseteq L_1$, $\bar{a}_2 \subseteq L_2$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = n$. $\Leftrightarrow$:

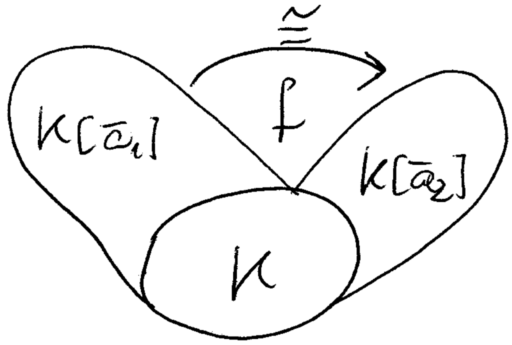
(1) $\exists f : K[\bar{a}_1] \xrightarrow{\cong} K[\bar{a}_2]$ $\left(f(\bar{a}_1) \underset{T}{=} \bar{a}_2 \text{ i } f|_K = id_K\right)$
wyraz po wyrazie

(2) $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$.

D-d. (1) $\Rightarrow$ (2) jasne, bo:

dla $g(\bar X)\in K[\bar X]$:

$$g(\bar a_1)=0 \text{ w } K[\bar a_1] \iff g(\overset{\bar a_2}{\overset{\shortparallel}{f(\bar a_1)}})=0 \text{ w } K[\bar a_2]$$



(2) $\Rightarrow$ (1):

Niech $\varphi_{\bar a_1}: K[\bar X] \xrightarrow{epi} K[\bar a_1]$ homomorfizm ewaluacji w $\bar a_1$

$\varphi_{\bar a_1}\restriction K = id_K$

$\varphi_{\bar a_1}(g(\bar X)) = g(\bar a_1)$.

$$\operatorname{Ker}\varphi_{\bar a_1} = I(\bar a_1/K) = I(\bar a_2/K) =: I$$

$\varphi_{\bar a_1}|K = id_K$

$$\begin{tikzcd}
 & K[\bar X] \arrow[dl, "\varphi_{\bar a_1}"'] \arrow[d, "j\ \text{ilorazowe}"] \arrow[dr, "\varphi_{\bar a_2}"] & \\
K[\bar a_1] & K[\bar X]/I \arrow[l, dashed, "\cong", "f_1"'] \arrow[r, dashed, "\cong", "f_2"'] & K[\bar a_2] \\
\bar a_1 & \bar X/I \arrow[l] \arrow[r] & \bar a_2.
\end{tikzcd}$$

$f = f\circ f_1^{-1}$ dobre.

Uwaga: Niech $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} K[\bar X]$. $I=(f_1,\dots,f_m)$ dla pewnych $f_i\in K[\bar X]$ i pewnego m (noetherowskość).

Wtedy istnieje rozszerzenie pierścieni $S\supset K$ oraz $\bar a\in S^n$: rozwiązanie ogólne układu $f_1=\dots=f_m=0$,

$I(\bar a/K)=I$.

Tw. 1.6. Niech $I \underset{\neq}{\lhd} K[\bar{X}]$, wtedy istnieje ciało $L \supset K$ oraz $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \subset L$ t. że $f(\bar{a}) = 0$ dla każdego $f \in I$.

D-d. Niech $\underset{\substack{\cup \\ I}}{\mathfrak{M}} \lhd K[\bar{X}]$ maksymalny.

$L := K[\bar{X}]/\mathfrak{M}$ ciało.

$j : K[\bar{X}] \longrightarrow L$ ilorazowe.

$\mathfrak{M} \cap K = \{0\}$, więc $j\restriction_K$: 1-1.

$j\restriction_K : K \xrightarrow{\cong} j[K] \subset L$.
podciało

Utożsamiamy $K = j[K]$.

Niech $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, gdzie $a_i = j(X_i)$, $i = 1, \dots, n$.

$g(\bar{a}) = 0$ dla każdego $g(\bar{X}) \in \underset{\substack{\cup \\ I}}{\mathfrak{M}}$.

Wn. 1.7. Niech $f \in K[X]$, $\deg f > 0$.
Wtedy $\exists \underbrace{L \supset K}_{\text{rozszerzenie ciał}}$ f ma pierwiastek w L.

Przykład 1. $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = X - 2$. $I = (f) \lhd \mathbb{Q}[X]$ ideał maksymalny, bo f: pierwszy (nierozkładalny)

f ma rozwiązanie (ogólne) w ciele $L = \mathbb{Q}[X]/I$, ale $L \cong \mathbb{Q}$.

Przykład 2,

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[z]$ dla każdej $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Def. $K \subset L_1$, $K \subset L_2$ rozszerzenia ciał.

$L_1 \cong_K L_2 \overset{def}{\iff} \exists f : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ $f\restriction_K = id_K$.

L_1 i L_2 są izomorficzne nad K

Fakt 1.8 (1) Zał., że $f \in K[X]$ nierozkładalny,

$L_1 = K(a_1)$, $L_2 = K(a_2)$, $f(a_i) = 0$ w L_i $(i=1,2)$.

Wtedy $L_1 \cong_K L_2$.

(2) Ogólniej: zał., że $\varphi : K_1 \cong K_2$, $f_1 \in K_1[X]$, $f_2 \in K_2[X]$

~~Wtedy istnieje~~ $\cancel{\varphi}$

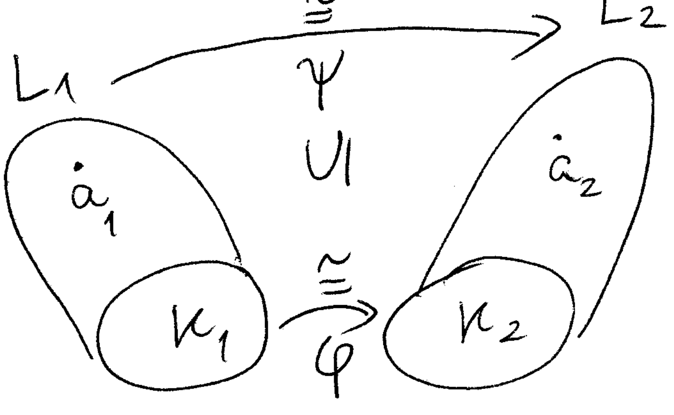
$L_1 = K_1(a_1)$, $L_2 = K_2(a_2)$,

gdzie a_i: pierwiastek f_i.

$\varphi(f_1) = f_2$
f_i: nierozkładalny nad K_i

Wtedy $\exists \psi : L_1 \cong L_2$ t.że $\psi(a_1) = a_2$.

$\psi \supseteq \varphi$



D-d (1)

$I(a_1/K) = (f) = I(a_2/K)$

$\Downarrow$ 1,5

$K(a_1) \cong_K K(a_2)$

(2)

$$\begin{tikzcd}
K_1[X] \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] \arrow[d] & K_2[X] \\
K_1[X]/(f_1) \arrow[r, "\cong", "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "\cong"', "h_1"] & K_2[X]/(f_2) \arrow[d, "\cong"', "h_2"] \\
L_1 = K_1(a_1) \arrow[r, "\cong", "\psi"'] & L_2 = K_2(a_2) \\
K_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\varphi"'] & K_2 \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}
\qquad \psi\restriction_{K_1} = \varphi$$

$f \neq 0$

Def. Ciało $L \supset K$ jest ciałem rozkładu nad K wielomianu $f \in K[X]$ $\iff$

(1) f rozkłada się w $L[X]$ na czynniki liniowe

(2) $L = K(a_1, \ldots, a_n)$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$: wszystkie pierwiastki f w L.

<u>Przykład</u> $\deg f = 0 \Rightarrow$ nie istnieje ciało rozkładu f nad K.

Wn. 2.1. (1) $f \in K[X]$, $\deg f > 0 \Rightarrow$ istnieje L : ciało rozkładu f nad K.

(2) Ciało to jest jedyne z dokładnością do $\cong_K$.

<u>D-d</u> (1) Indukcja względem $\deg f > 0$.

1. $\deg f = 1 \Rightarrow L = K$ dobre.

2. $\deg f > 1$ i teza zachodzi dla wielomianów stopnia $< \deg f$ i wszystkich ciał K'.

Wn. 1.7 $\rightsquigarrow$ niech $\exists$. $K' = K(a_0)$

$\uparrow$ ciało $\quad\quad$ $\uparrow$ pierwiastek f w K'.

$$f = (X - a_0) f_1, \quad f_1 \in K'[X], \ 0 < \deg f_1 = \deg f - 1 < \deg f$$

z zał. ind. istnieje

$L = K'(a_1, \ldots, a_r)$ ciało rozkładu f_1 nad K'.

Wtedy $L = K(a_0, a_1, \ldots, a_r)$: ciało rozkładu f nad K.

(2) Wersja ogólniejsza:

(*)

$\varphi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2 \quad f_i \in K_i[X], \deg f_i > 0$

$\varphi(f_1) = f_2$

$L_i \supseteq K_i$

$\uparrow$ ciało rozkładu f_i nad K_i.

<u>Wtedy</u> $\exists \ \varphi \subseteq \psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$

D-d (*): indukcja wzgl. $\deg f_1$.

(a) $\deg f_1 = 1 \Rightarrow L_1 = K_1, \ L_2 = K_2, \ \psi = \varphi$.

(b) $\deg f_1 > 1$ i dla niższych stopni jest OK.

$f_1 = f_1' \cdot g_1$ $\qquad f_2 = f_2' \cdot g_2$, $\quad f_i', g_i \in K_i[X]$

$\varphi(f_1') = f_2'$, $\varphi(g_1) = g_2$, $\qquad$ nierozkładalny,

Niech $a_1 \in L_1$ pierwiastek g_1
$a_2 \in L_2$ — " — g_2

z Faktu 1.8(2): $\exists\, \underset{\varphi \subseteq}{\psi_0} : \underbrace{K_1(a_1)}_{= K_1'} \xrightarrow{\cong} \underbrace{K_2(a_2)}_{= K_2'}$, $\psi_0(a_1) = a_2$

L_i: ciało rozkładu f_i' nad K_i'

$$\begin{array}{ccc} K_1' & & K_2' \\ \cap\!\mid & & \cap\!\mid \\ L_1 & \xrightarrow{\cong} & L_2 \end{array}$$

z zał. indukc. $\rightarrow \exists\, \underset{\psi_0 \subseteq}{\psi_1} : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$

Wn. 2.2. Jeśli $f_i \in K_i[X]$ nierozkładalny ($i = 1, 2$), $\varphi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$ i $\varphi(f_1) = f_2$, L_1, L_2: ciała rozkładu f_1 i f_2 odpowiednio nad K_1, K_2, $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, pierwiastki f_1, f_2

to $\exists\, \underset{\varphi \subseteq}{\psi} : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ $\quad \psi(a_1) = a_2$.