Wykład 14: Moduły nad PID (np. $\mathbb{Z}$)

R: PID: dziedzina ideałów głównych, $1 \neq 0$.

M: R-moduł wolny $\Rightarrow \dim_R(M)$ dobrze określony.

Tw. 14.1. (R: PID) Podmoduł modułu wolnego F jest wolny wymiaru $\leq \dim F$.

<u>D-d</u>. Niech F: moduł wolny o bazie $\{b_1, \ldots, b_n\}$,

$\overset{\cup\!\mid}{M}$: podmoduł.

Dla $l \leq n$ niech $M_l = M \cap \bigoplus_{i=1}^{l} Rb_i$, dla $l=0$ $M_l = \{0\}$

dla $l = n$: $M_l = M$.

(*) dla każdego $l \leq n$, M_l ma wymiar $\leq l$.

<u>d-d</u> indukcja względem l.

(a) $l = 1$: $M_1 \subseteq Rb_1 \underset{\text{jako moduł}}{\cong} R$. bso $M_1 \neq \{0\}$.

Po utożsamieniu Rb_1 z R: $M_1 \underset{\text{ideał}}{\lhd} R$, więc
(R: PID)

$M_1 = Ra$ główny. $\{a_1\}$: baza M_1, bo:

- generuje: jasne
- a_1: lin. niezależny, bo R: dziedzina:

$\cancel{a = ra_1}$ $0 = r\underset{\neq 0}{a_1} \Rightarrow r = 0$.

(b) krok indukcyjny $l \longmapsto l+1$

Al 28/14

$$\pi_{l+1} : M_{l+1} \longrightarrow Rb_{l+1} \cong R$$ rzut na ~~...~~ $(l+1)$-szą współrzędną

$$M_{l+1} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{l+1} Rb_i \cong R^{l+1}$$

$Rb_{l+1} \cong R$ ← utożsamiamy

$\pi_{l+1}[M] \lhd R$

podmoduł, więc $\lhd$

1°. $\pi_{l+1} \equiv 0 \Rightarrow M_{l+1} = \operatorname{Ker} \pi_{l+1} = M_l$ wolny rangi $\leq l$ z zał. indukc.

2°. $\pi_{l+1} \not\equiv 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(\pi_{l+1}) = Ra_{l+1}$: wolny podobnie jak w (a).

$$\pi_{l+1} : M_{l+1} \twoheadrightarrow Ra_{l+1} \;\left(\begin{matrix}\Delta \\ R\end{matrix}\right)$$

wolny $\Rightarrow$ projektywny Fakt 11.8

~~więc~~:

$$M_{l+1} = \underbrace{\operatorname{Ker} \pi_{l+1}}_{= M_l} \oplus \underbrace{N}_{\cong Ra_{l+1}}$$

N: wolny

M_l: wolny z zał. indukcyjnego rangi $\leq l$

$\gg M_{l+1}$ wolny rangi $\leq l+1$

(c) Przypadek ogólny

[dim F : nieskończony]:

ta sama indukcja (pozaskończona).

Wn. 14.2 (R: PID)
Podmoduł N modułu skończenie generowanego M jest skończenie generowany. Jeśli M ma zbiór ~~DLA~~ generatorów mocy n, to N ma zbiór generatorów mocy $\leq n$.

D-d Zał, że M generowany przez $a_1, \dots, a_n$.

$$f: R^n \twoheadrightarrow M \quad \text{epimorfizm}$$

$$\begin{array}{ccc} R^n & & M \\ \cup\!\! | & & \cup \end{array} \qquad f(r_1, \dots, r_n) = r_1a_1 + \dots + r_na_n$$

$$f[\overbrace{f^{-1}[N]}] = N$$

R^n: wolny, baza standardowa $e_1, \dots, e_n$

$f^{-1}[N]$ wolny rangi $\leq n$

$\Downarrow$

N generowany przez $\leq n$ elementów.

TW. 14.3. (R: PID) Zał, że M: moduł skończ. generowany. Wtedy:

(1) M: beztorsyjny $\Rightarrow$ M wolny.

(2) $M = \underbrace{M_t}_{\text{część torsyjna}} \oplus F$ dla pewnego podmodułu wolnego $F \subset M$.

D-d (1) Niech $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ zbiór generatorów
$\cup\!\! |$
$\{b_1, \dots, b_k\}$ maksymalny liniowo niezależny.

Rozważmy x_i $(i = 1,\dots,n)$

Układ $\langle x_i, b_1,\dots,b_k\rangle$: liniowo zależny,

więc: $a_i x_i + r_1 b_1 + \dots + r_k b_k = 0$ dla pewnych

$$\underbrace{a_i, r_1,\dots,r_k}_{\text{nie wszystkie } =0} \in R$$

$b_1,\dots,b_k$: lin. niezależne

$\Downarrow$

$a_i \neq 0$ i $a_i x_i \in N$

Niech $N = Rb_1+\dots+Rb_k$ $\leftarrow$ wolny, bo $\{b_1,\dots,b_k\}$: lin. niezależny.

Niech $a = a_1\cdot\ldots\cdot a_n \neq 0$ $(R : \text{PID})$.

Stąd $a x_i \in N$ dla $i=1,\dots,n$.

~~Niech $f: M \to N$ dane przez $f(x) = a\cdot x$~~

(*) $\forall x\in M \quad ax\in N$

bo: dla $x\in M$ $\quad x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$

więc $ax = \sum r_i \underbrace{a x_i}_{N} \in N$.

Niech $f: M \to N$

dane przez $f(x) = ax$.

- f : 1-1, bo M: beztorsyjny.
- $M \cong f[M] \subset N \Rightarrow f[M]$ wolny.

podmoduł modułu wolnego

(2) Niech $j : M \longrightarrow \underbrace{M/M_t}$ ilorazowe

beztorsyjny + skończenie generowany

$\Downarrow$ (1)

wolny

$\Downarrow$ Fakt 11.8

projektywny.

Stąd: $M = \underbrace{M_t}_{\substack{\| \\ \ker j}} \oplus \underset{\substack{\wr\| \\ M/M_t \text{ : wolny}}}{F}$.

Def. Niech $p \in R$: nierozkładalny ($\Rightarrow$ pierwszy, bo R : PID)

M : R-moduł

(1) m : p-torsyjny $\Leftrightarrow$ $\underset{\text{torsja } m, \ \triangleleft R}{I_m = \{r \in R : rm = 0\}} = (p^k)$ dla pewnego $k \geq 0$

(p^k : "rząd" m)

(2) $M_p = \{m \in M : m : p\text{-torsyjny lub } m = 0\}$

p-prymarna ~~część~~ składowa M, podmoduł M.

~~p-prymarny podmoduł~~

(3) M jest <u>p-prymarny</u>, gdy $M = M_p$.

[tzn: $\forall m \in M \ \exists k \geq 0 \ p^k m = 0$]

Tw. 14.4. (R PID) M: R-moduł.

(1) $M_p \subset M_t$ podmoduł, zwany p-prymarną składową M.

(2) $M_t = \bigoplus_{i \in I} M_{p_i}$, gdzie $\{p_i : i \in I\}$ wszystkie elementy pierwsze R (z dokładnością do stowarzyszenia).

<u>D-d</u> Ten sam, co dla grup abelowych.

<u>Przykład</u> $M = R/(p^k) \ni 1 + (p^k)$

moduł cykliczny, p-~~torsyjny~~ prymarny

i k: minimalne takie, że $p^k M = 0$.

Uwaga. M: moduł cykliczny p-prymarny $\Rightarrow$

$M \cong R/(p^k)$ dla pewnego k

d-d: ćw.

Tw. 14.5. M: skończenie generowany moduł p-prymarny $\Rightarrow M = \bigoplus \{$moduły cykliczne$\}$.

<u>D-d</u> Indukcja względem n: minimalna liczba generatorów M.

(a) $n = 0, 1$: OK.

(b) krok indukcyjny $n-1 \mapsto n$:

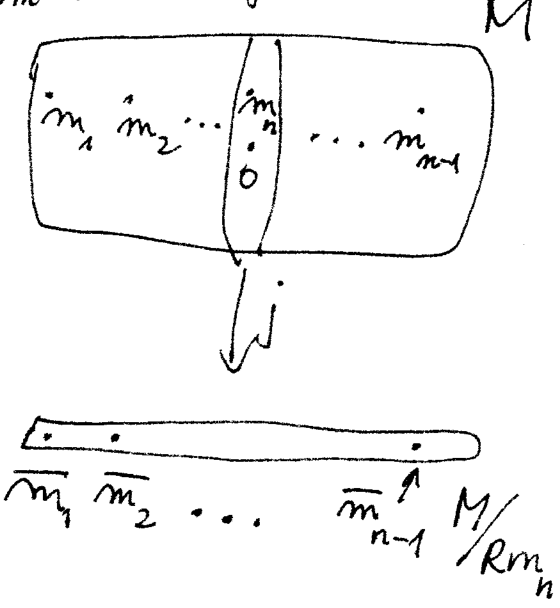
Zał, że $\underset{\{m_1,\ldots,m_n\}}{\underset{\cup\!|}{M}}$: p-prymarny, generowany przez $\{m_1,\ldots,m_n\}$.

$\forall i \ \exists \underset{\text{minimalne}}{r_i} > 0 \quad p^{r_i} m_i = 0.$

$\Downarrow$

$\exists \underset{\max\{r_i \,:\, i=1,\ldots,n\}}{\underset{\shortparallel}{r}} > 0 \quad \forall m \in M \quad p^r m = 0.$

bso $p^{r-1} \cdot m_n \neq 0$. (tzn: $r = r_n$). $\operatorname{Ker} j = Rm_n$



Niech $j : M \xrightarrow[\text{ilorazowe}]{} M/Rm_n$ ilorazowe.

dla $\overset{M}{\overset{\in}{x}}$, $j(x)$ oznaczamy przez $\overline{x}$.

$\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{n-1}$ generują M/Rm_n,

więc z zał. indukc. $M/Rm_n = \oplus(\text{cykliczne})$.

(*) $M = \underset{\underset{M/Rm_n}{\shortparallel\wr}}{M'} \oplus Rm_n$, (tzn: j się rozszczepia)

$M/Rm_n = R\underset{\neq 0}{\overline{e}_1} \oplus \ldots \oplus R\underset{\neq 0}{\overline{e}_\ell}$ dla pewnych $e_1, \ldots, e_\ell \in M$

Niech $r_i > 0$

minimalne takie, że $p^{r_i}\overline{e}_i = 0$ (p^{r_i}: "rząd" $\overline{e}_i$)

(jak w grupach abelowych!)

Wtedy dla $0 \leq t < r_i$ $p^{t_i} \overline{e_i} \neq 0$,

więc $p^{t_i} e_i = 0$.

Pokażemy, że modyfikując e_i (przy zachowaniu $\overline{e_i}$) możemy założyć, że:

(*) $p^{r_i} e_i = 0$:

$p^r e_i = 0 \Rightarrow r_i \leq r$. $p^{r_i} e_i \in Rm_n$, (bo $j(p^{r_i} e_i) = 0$)

$\Downarrow$

$p^{r_i} e_i = a \cdot m_n$ dla pewnego $a \in R$

$p^{r - r_i} \cdot (p^{r_i} e_i) = 0 \Longrightarrow p^{r-r_i}(a m_n) = 0$

Niech $a = p^l a_1$, gdzie $NWD(p, a_1) = 1$.

$\Downarrow$

$p^{r-r_i} \cdot p^l \cdot a_1 \cdot m_n = 0$

$\Leftarrow$

$p^{r - r_i + l} a_1 \in I_{m_n} = (p^r)$

$\Downarrow$ $p \nmid a_1$

$r \leq r - r_i + l$

$\Downarrow$

$\underline{r_i \leq l}$

Stąd $p^{r_i} e_i = a \cdot m_n = p^l a_1 m_n = p^{r_i} a' m_n$, $a' = p^{l - r_i} a_1$

$\Rightarrow p^{r_i} (\underbrace{e_i - a' m_n}) = 0$

- w tej samej warstwie Rm_n, co e_i
- $\underline{\text{nowe } e_i}$. koniec dowodu (*).

Niech $M' \subset M$ generowany przez $\{e_1, \ldots, e_l\}$

- $j' : M' \longrightarrow M/Rm_n$ jest "na", bo $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_l\}$ generuje M/Rm_n.

  ~~itowato~~ $j' = j|_{M'}$

- $\ker j' \cap M' = \{0\}$, bo: Zał, że $j(a_1 e_1 + \ldots + a_l e_l) = 0$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \bar{e}_1 + \ldots + a_l \bar{e}_l = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \bar{e}_1 = \ldots = a_l \bar{e}_l = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p^{r_i} \mid a_i \text{ dla } i = 1, \ldots, l.$$

$$\Downarrow$$

$$a_i e_i = 0 \;\; i \;\; a_1 e_1 + \ldots + a_l e_l = 0.$$

$\Downarrow$ $j' : 1\text{-}1$

$M/Rm_n = \bigoplus_{i=1}^{l} R\bar{e}_i$

p^{r_i} : "rząd" $\bar{e}_i$

$p^{r_i} e_i = 0$

- $j' : M' \xrightarrow{\cong} M/Rm_n$ i $M = M' \oplus \underbrace{Rm_n}_{\text{cykliczne}}$

  więc $M' = \bigoplus\{\text{cykliczne}\}$ $\Downarrow$ $M = \bigoplus(\text{cykliczne})$.

Wn. 14.6. (R: PID)

Zał. że M: skończ. generowany R-moduł, p-prymarny.

Wtedy $M \cong R/(p^{k_1}) \oplus R/(p^{k_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{k_l})$

dla pewnych $1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_l$. Ponadto ciąg $k_1, \ldots, k_l$ jest wyznaczony jednoznacznie.

D-d. $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_\ell$, $M_i \cong R/(p^{k_i})$, $k_i > 0$.
cykliczne, p-prymarne

bso $1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_\ell$.

Jednoznaczność: indukcja względem ℓ.

Załóżmy, że

$M \cong R/(p^{k'_1}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{k'_{\ell'}})$ dla pewnych ~~$1 \le k'_1 \le \ldots \le k'_{\ell'}$~~

bso $k_1 \le k'_1$.

PID

Lemat 1 N : R-moduł $\Rightarrow$ N/pN : $\underbrace{R/(p)}_{\text{ciało}}$-moduł

przestrzeń liniowa

Lemat 2

$$\underbrace{p^i(R/(p^k))}_{N} \Big/ \underbrace{p^{i+1}(R/(p^k))}_{pN} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \geq k \\ \underbrace{p^i R/(p^{i+1})}, & \text{gdy } i < k \end{cases}$$

przestrzeń liniowa / $R/(p)$
dim = 1.

Zał., że $k_i < k_{i+1}$.

$p^{k_i} M = p^{k_i}(M_{i+1} \oplus \ldots \oplus M_\ell)$

$p^{k_i - 1} M = p^{k_i - 1}(M_{j+1} \oplus \ldots \oplus M_i \oplus M_{i+1} \oplus \ldots \oplus M_\ell)$,

gdzie $k_j < k_{j+1} = \ldots = k_i < k_{i+1} = k_{i+2} = \ldots = k_t < k_{t+1} = k_{t+2} = \ldots$
$(j < i)$

$p^{k_i-1}M / p^{k_i}M =$ p. liniowa / $R/(p)$ wymiaru: $\ell - j$.

$$= p^{k_i-1}M_{j+1}/p^{k_i}M_{j+1} \oplus p^{k_i-1}M_{j+2}/p^{k_i}M_{j+2} \oplus \ldots \oplus p^{k_i-1}M_\ell/p^{k_i}M_\ell$$

i $\dim_{R/(p)} \left(p^{k_i-1} M_{j+1} / p^{k_i} M_{j+1} \right) = \ldots = \dim \left(p^{k_i-1} M_l / p^{k_i} M_l \right) = 1.$

Wymiary $\dim_{R/(p)} p^{k-1}M / p^k M$, $k = 1, \ldots, k_l$

pozwalają odczytać $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_l$.

<u>Def.</u> R-moduł M jest nierozkładalny $\Leftrightarrow$

Jeśli $M = M_1 \oplus M_2$, to $M_1 = \{0\}$ lub $M_2 = \{0\}$.

<u>Uwaga</u> (R: PID) Moduł cykliczny M jest nierozkładalny $\Leftrightarrow$

M jest beztorsyjny lub p-prymarny
(= wolny)

<u>D-d</u> Ćwiczenie.

TW. 14.6. (R: PID). M : R-moduł skończ. generowany

$\Longrightarrow$ ~~$M \cong \bigoplus_i$~~ $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i : nierozkładalne.

Ponadto I jest skończony, M_i są cykliczne i wyznaczone jednoznacznie z dokł. do $\cong$ i permutacji I.

<u>D-d</u>. $M = F \oplus M_t$ ← tw. 14.3, 14.4, 14.5, 14.6

F wolny, $M_t = \bigoplus_{p \text{ pierwsze}} M_p$, $M_p \cong R/(p^{k_1}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{k_l})$

$k_1 \leq \ldots \leq k_l$

$M = \bigoplus$ (nierozkładalne) $F = R \oplus \ldots \oplus R$

Jednoznaczność rozkładu:

nierozkładalne

$$\text{Zał, że } M = \underbrace{M_1\oplus\dots\oplus M_r}_{\text{beztorsyjne}} \oplus \underbrace{M_{r+1}\oplus\dots\oplus M_{r+s}}_{\text{torsyjne}}$$

$$\begin{array}{ccc} M_1\oplus\dots\oplus M_r & & M_{r+1}\oplus\dots\oplus M_{r+s} \\ \cong & & \cong \\ \underbrace{R\oplus\dots\oplus R}_{\text{wolny}} & & M_t \end{array}$$

więc $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i \cong M/M_t \cong F$: wolny, $\dim F = r$

Każdy M_{r+i} : cykliczny, torsyjny, nierozkładalny

$\Rightarrow$ p-prymarny dla pewnego pierwszego $p\in R$

$$(M_t)_p = \bigoplus\{M_{r+i} : M_{r+i} : p\text{-prymarny}\}$$

$$\begin{array}{l} \parallel \\ M_p \cong R/(p^{k_1})\oplus\dots\oplus R/(p^{k_l}),\ k_1\le\dots\le k_l \end{array}$$

tu jednoznaczność składników z dokładnością do $\cong$ dostajemy z wniosku ~~14~~ potw. 14.5.