Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

mysio pysio kurwa zbysio

–

Konsultacje: środy 9-10, 13-14, pokój 907.

Klasówki: 13.04, 1.06 w skali od 0 do 100, potrzeba zdobyć minimum 101 punktów.

Egzamin: poniedziałek 26.06 godz. 10:00-14:00

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Miara i całka v.2.0

1.1. Podstawowe definicje

Krzywa Gaussa to krzywa zadana wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Zdarzenie elementarne $[\omega]$ to sposób kodowania jednego wyniku w naszym eksperymencie. **Przestrzeń zdarzeń elementarnych** $[\Omega]$ to zbiór wszystkich wyników losowych. Rodzinę $\mathscr{F}$ podzbiorów Ω nazywamy σ-ciałem, jeśli:

$\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$

$\hookrightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$

$A \in \mathscr{F}$ nazywamy **zdarzeniem**, a parę $(\Omega, \mathscr{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykłady:

1. Dla rzutu symetryczną monetą możliwe wyniki to orzeł (O) i reszka (R). Wtedy $\Omega = \{O, R\}$, natomiast $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$

2. Jeżeli będziemy rzucać kostką, to $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, natomiast $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$. Zdarzenia możemy próbować opisywać matematycznie, a możemy opisać je po ludzku, czyli $\mathscr{F} \ni A$ = *wypadła parzysta liczba oczek* = $\{2, 4, 6\}$. Cały trick, żeby zacząć o tym wszystkim myśleć w ramach teorii miary to zacząć myśleć, że my przyporządkowujemy prawdopodobieństwo zdarzeniom postaci bardziej matematycznej.

3. Jeśli będziemy wykonywać n rzutów kostką, to $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \ \omega_k \in [6]\} = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$, czyli to po prostu n-ta potęga rzutu pojedynczego. Zdarzenie to na przykład B = *suma oczek jest parzysta* = $\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \ \omega_1 +,, + \omega_n$ parzysta$\}$

1.2. Przestrzeń probabilistyczna

Niech $(\Omega, \mathscr{F})$ będzie przestrzenią mierzalną.Wtedy funkcja

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$$

jest nazywana **prawdopodobieństwem na** Ω, jeżeli:

$\hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$, czyli prawdopodobieństwo wszystkiego wynosi 1,

$\hookrightarrow$ Jeżeli $A_1, .A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathbb{P}(A_k)$, czyli prawdopodobieństwo, że zachodzi którekolwiek ze zdarzeń (suma mnogościowa) jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych wydarzeń.

Trójkę $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykłady:

1. [*Prawdopodobieństwo klasyczne*] Niech Ω będzie zbiorem skończonym, setF = 2^{Ω} i każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest jednakowo prawdopodobne. To oznacza, że $[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|}$, bo inaczej drugi warunek nie zostanie spełniony. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

2. Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy? Spróbujmy zapisać to bardzo formalnie.

$\Omega = \{O, R\}^3$,

$\mathscr{F} = 2^{\Omega}$,

$A =$ *orzeł wypadł dokładnie dwa razy* $= \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$.

Jeżeli każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, czyli moneta jest symetryczna, to

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

Tutaj zauważmy, że gdyby moneta nie była symetryczna, to ten opis sytuacji nie jest już prawdziwy i potrzebna byłaby inna konstrukcja $\mathbb{P}$.

3. Niech Ω będzie przeliczalna. Rozważmy ciąg $p_1, p_2, \dots$ z przedziału $[0, 1]$ taki, że $\sum p_k = 1$. Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, to możemy ustalić, że $\mathbb{P}[\{\omega_k\}] = p_k$. Wtedy dla $A \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Możemy o tym wszystkim myśleć nie jako o prawdopodobieństwie, a jako o masie.

Twierdzenie: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$ zachodzą:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to $\mathbb{P}[\bigcup A_k] = \sum \mathbb{P}(A_k)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Jeżeli $A \subseteq B$, to $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ (w szczególności $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$)
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. $\mathbb{P}(\bigcup A_k) \leq \sum \mathbb{P}(A_k)$

Dowód: ćwiczenia

i śmiga

Zasada włączeń i wyłączeń: Dla $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$ mamy

$$\mathbb{P}\left[\bigcup A_k\right] = \sum \mathbb{P}[A_k] - \sum \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \sum \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j \cap A_k\right] - \dots (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n]$$

Dowód: ćwiczniea

i śmiga

Twierdzenie o ciągłości: Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $A_1, \dots \in \mathscr{F}$.

1. Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (są wstępujące), to dla $A = \bigcup A_k$

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

2. Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (są zstępujące), to wtedy dla $B = \bigcap A_k$

$$\mathbb{P}[B] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Dowód:

1. Rozważmy zdarzenia B_n dane przez

$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

wtedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

i tak samo dla sumy skończonej, czyli

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n.$$

Wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\bigcup B_k\right] = \sum \mathbb{P}[B_k] = \lim \sum^{N} \mathbb{P}[B_k] = \lim \mathbb{P}\left[\bigcup B_N\right] = \lim \mathbb{P}[A_N]$$

2. Rozważmy teraz ciąg $C_k = A_k^c$ spełniające

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$$

Dodatkowo,

$$\bigcup C_k = \bigcup A_k^c = \left(\bigcap A_k\right)^c = B^c$$

Mamy

$$\mathbb{P}[B] = 1 - \mathbb{P}\left[B^c\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup C_k\right] = 1 - \lim \mathbb{P}[C_n] = 1 - \lim(1 - \mathbb{P}[A_n]) = \lim \mathbb{P}[A_n]$$

i śmiga

Przykład:

1. Rozważmy kule o numerach 1, 2, 3, ... Wrzucamy te kule stopniowo do urny. O godzinie 12:59 wrzucamy kule o numerach 1, 2, ..., 10. Pół minuty później chcemy wyciągnąć zgodnie z jednym z trzech wariantów:

a) kulę o numerze 1,

b) kulę o numerze 10,

c) losujemy kulę,

po czym dorzucamy kule o numerach 11, 12, ..., 20. Po kolejnej $\frac{1}{4}$ minuty wyciągamy

a) kulę o numerze 2,

b) kulę o numerze 20,

c) losowo wybraną kulę i znowu dorzucamy kule 21, 22, 30.

Tak robimy przez minutę. Pytanie jest o to, *ile jest kul w urnie o godzinie* 13 : 00?

a) 0

b) ∞

c) Rozważmy kulę o numerze 1. A_n = *kula 1 jest w urnie po* n *losowaniach*. Zauważmy, że jeżeli kula była po (n + 1) losowaniu, to musiała w niej też byc po n losowaniach. Czyli $A_{n+1} \subseteq A_n$. W takim razie mamy zdarzenia zstępujące i możemy napisać

$$A = \bigcap A_n = \textit{ kula 1 jest w urnie o godzinie 13:00}$$

$$\mathbb{P}[A] = \lim \mathbb{P}[A_n].$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}[A_n] = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \ldots \frac{9n}{9n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1} = \prod \left(1 - \frac{1}{9k+1}\right) \leq \prod e^{-\frac{1}{9k+1}} = e^{-\sum \frac{1}{9k+1}},$$

bo $1 - x \leq e^{-x}$. Teraz zauważmy, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+1} = \infty$$

jest rozbieżny, czyli

$$e^{-\sum \frac{1}{9k+1}} \to 0$$

a skoro prawdopodobieństwo A_n było ograniczone przez to od góry, to

$$\mathbb{P}[A] = \lim \mathbb{P}[A_k] = 0.$$

2. Romeo i Julia umówili się na spotkanie w nocy o północy. Każde z nich może się spóźnić co najwyżej godzinę. Pierwsza osoba, która przyjdzie czeka co najwyżej 15 minut na tę drugą. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do spotkania wogóle dojdzie?* Będziemy liczyć czas w sposób ciągły.

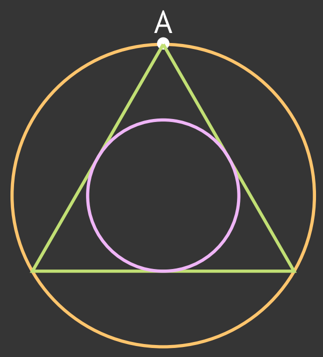
Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, gdzie x będzie odpowiadać czasowi przyjścia Romeo, a y - kiedy przyszła Julia. Wtedy $\mathscr{F} = \mathrm{Bor}([0,1]^2)$, a $\mathbb{P}$ to 2-wymiarowa miara Lesbegue'a. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \textit{ dojdzie do spotkania } = \{(x,y) \ : \ |x-y| \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\mathbb{P}[A] = \lambda_2(A) = 1 - \mathbb{P}\left[A^c\right] = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

3. Wybieramy jednostajnie liczbę z przedziału $[0,1]$. Wtedy $\mathbb{P}$ to miara Lesbegue'a, inaczej ten wybór nie będzie jednostajny.

4. [*Paradoks Bertranda*] Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa AB w okręgu jest dłuższa niż bok równobocznego trójkąta wpisanego?


A

2. Prawdopodobieństwo warunkowe

Dalsza część wykładu będzie raczej oderwana od tego co się dzieje tutaj.

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech A, B będą zdarzeniami takimi, że $\mathbb{P}[B] > 0$. Wówczas **prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A względem B nazywamy wartość

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Jeśli ustalimy zbiór B, to miara $\mathbb{P}[\bullet|B]$ jest miarą probabilistyczną.

Przykład:

1. Wybieramy losową rodzinę z dwójką dzieci. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to dwóch chłopców, jeżeli

a). starsze dziecko jest chłopcem.

Mamy $\Omega = \{(d, d), (d, c), (c, c), (c, d)\}$ przypadki, kiedy starsze dziecko to chłopiec:

$$B = \{(d, c), (c, c)\}$$

i podzbiór tego, gdy oboje są chłopcami to $A = \{(c, c)\}$. Czyli

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{2}$$

b). jedno z tych dzieci to chłopak.

Omega jest taka sama jak wcześniej, zmienia nam się definicja zbioru B:

$$B = \{(c, d), (d, c), (c, c)\}$$

A jest nadal singletonem. Ogółem mamy

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}$$

Mówimy, że rodzina zbiorów $\{B_k\}_{k=1}^n$ (dopuszczamy $n = \infty$) jest **rozbiciem zbioru Ω**, jeśli $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$ (suma rozłączna).

2.1. Prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie: [wzór na *prawdopodobieństwo całkowite*] Niech $\{B_k\}_{k=1}^n$ będzie rozbiciem Ω takim, że $\mathbb{P}[B_k] > 0$ dla każdego k. Wówczas dla każdego $A \in \mathscr{F}$ zachodzi:

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_k]\, \mathbb{P}[B_k]$$

Dowód:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[A \cap \left[\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right]\right] = \mathbb{P}\left[\bigsqcup_{k \le n} [A \cap B_k]\right] = \sum_{k \le n} \mathbb{P}[A \cap B_k] = \sum_{k \le n} \mathbb{P}[A|B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]$$

i śmiga

Przykład: W loterii fantowej mamy 3 rodzaje losów:

$\hookrightarrow$ W - wygrana, wyciągany z prawdopodobieństwem p

$\hookrightarrow$ P - przegrana - z prawdopodobieństwem q

$\hookrightarrow$ D - graj dalej - z prawdopodobieństwem r

gdzie $p + q + r = 1$. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

Niech Z będzie zdarzeniem, które mówi, że wygraliśmy. Chcemy obliczyć $\mathbb{P}[Z]$. W, P, D to rozbicie przestrzeni Ω. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[Z|W] \cdot \mathbb{P}[W] + \mathbb{P}[Z|P] \cdot \mathbb{P}[P] + \mathbb{P}[Z|D] \cdot \mathbb{P}[D] = \\ &= 1 \cdot p + 0 \cdot q + \mathbb{P}[Z] \cdot r \\ \mathbb{P}[Z] &= \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\end{aligned}$$

2.2. Wzór Bayesa

Twierdzenie: [*wzór Bayesa*] załóżmy, że mamy rozbicie Ω $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ to znaczy, $\mathbb{P}[B_k] > 0$. Weźmy dowolne zdarzenie A takie, że $\mathbb{P}[A] > 0$. Wówczas dla każdego j zachodzi

$$\mathbb{P}\left[B_j|A\right] = \frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\sum_{k\leq n}\mathbb{P}[A|B_k]\,\mathbb{P}[B_k]}$$

Dowód: Użycie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$\frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\sum_{k\leq n}\mathbb{P}[A|B_k]\,\mathbb{P}[B_k]} = \frac{\mathbb{P}\left[A|B_j\right]\cdot\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}\left[A\cap B_j\right]}{\mathbb{P}\left[B_j\right]}\cdot\frac{\mathbb{P}\left[B_j\right]}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}\left[B_j|A\right]$$

i śmiga

Przykład:

1. Mamy 100 monet i 99 z nich jest uczciwych, a jedna jest fałszywa (orły po dwóch stronach). Losujemy monetę i wypadło 10 orłów. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy fałszywą monetę.

Niech B_1 oznacza, że wylosowaliśmy monetę uczciwą, a B_2 - że fałszywą. Wtedy zdarzeniem A będzie wyrzucenie 10 orłów. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B_2|A] &= \frac{\mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A|B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} = \frac{1\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{99}{100} + \frac{1}{100}} = \\ &= \frac{1024}{1123} \approx 91\%\end{aligned}$$

2. U pacjenta przeprowadzono test na rzadką chorobę. Wiadomo, że na tę chorobę choruje 1 osoba na 1000. Test jest "mocny", to znaczy jeżeli osoba jest chora, to test wskazuje na chorobę z prawdopodobieństwem $\frac{99}{100}$. Jeżeli natomiast osoba jest zdrowa, to test nie wskazuje na chorobę z prawdopodobieństwem $\frac{95}{100}$. Test wskazał na chorobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory.

Mamy trzy zdarzenia:

Z - pacjent jest zdrowy,

C - pacjent jest chory,

T - test wyszedł pozytywny.

Używamy wzoru Bayesa, żeby obliczyć

$$\mathbb{P}[C|T] = \frac{\mathbb{P}[T|C]\,\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[T|Z]\,\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[T|C]\,\mathbb{P}[C]} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.95 \cdot 0.999 + 0.99 \cdot 0.001} = \frac{99}{5094} \approx 2\%$$

3. Niezależność

Niech $A, B \in \mathscr{F}$ będą dwoma zdarzeniami. Co miałoby oznaczać, że A jest niezależne od B? Wiedza o zdarzeniu A nic nie wnosi do wiedzy na temat zdarzenia B, czyli:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cap B]$$

Będziemy chcieli budować przestrzeń, w której możemy wykonywać nieskończone eksperymenty, np. przestrzeń, która opisuje nam nieskończone ciągi rzutami monetą. Oczywiście, będziemy zaczynać od przypadków skończonych i przechodzić granicą dalej.

3.1. Niezależność zdarzeń

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mówimy, że zdarzenia A i B są **niezależne**, jeżeli

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B].$$

Przykład: Rzucamy dwukrotnie kostką. A to zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła liczba nieparzysta, a B - że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6. Wtedy Ω to wszystkie pary liczb $1, \ldots, 6$, $\mathscr{F}$ to wszystkie podzbiory Ω. Wiemy, że $\mathbb{P}[(i, j)] = \frac{1}{36}$ bez względu na i, j.

$$A = \{(1,1), (1,2), \ldots, (3,1), (3,2), \ldots, (5,6)\}$$

$$B = \{(1,5), (1,6), \ldots, (6,6)\}$$

$$A \cap B = \{(1,5), (1,6), (3,5), \ldots, (5,5), (5,6)\}$$

mamy $\mathbb{P}[A] = \frac{18}{36}$, $\mathbb{P}[B] = \frac{12}{36}$ i $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{36}$, czyli zdarzenia są niezależne.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n < \infty$ są **niezależne**, jeżeli dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right] = \mathbb{P}\left[A_{i_1}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left[A_{i_k}\right].$$

Tych warunków do sprawdzenia jest $2^n - n - 1$.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są **parami niezależne**, jeżeli dla każdych $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] = \mathbb{P}[A_i]\,\mathbb{P}\left[A_j\right].$$

Tych warunków jest $\binom{n}{2}$. Warunek niezależności ciągu A_i jest mocniejszy niż warunek w ciągu parami niezależnym. [PRZYKŁAD ZE SKRYPTU]

Niech $\{A_i\}_{i \in I}$, gdzie I jest dowolnym zbiorem indeksującym, będzie rodziną zdarzeń z $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Mówimy, że te zdarzenia są **niezależne**, jeżeli dla każdego skończonego podzbioru indeksów $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ zdarzenia $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ są niezależne. Czyli *niezależność nieskończonej liczby zdarzeń sprowadza się do niezależności na skończonym przypadku*.

3.2. Niezależność σ-ciał

Niech $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ będą σ-ciałami zawartymi w $\mathscr{F}$, gdzie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że te σ-ciała są **niezależne**, jeśli dla dowolnych $A_1 \in \mathscr{F}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}_n$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2]\ldots\mathbb{P}[A_n],$$

czyli σ-ciała są niezależne, jeżeli ich elementy są niezależne. [ĆWICZENIE na przemyślenie].

Przykład: Rzucamy dwa razy kostką. $\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}$ są nam już znane. Chcemy pokazać dwa σ-ciała, które są od siebie niezależne. Wprowadzamy:

$$\mathscr{F}_1 = \{A \times \{1, \ldots, 6\} \ : \ A \subseteq \{1, \ldots, 6\}\}$$

czyli tutaj mamy tylko pierwszy rzut kostką,

$$\mathscr{F}_2 = \{\{1, \ldots, 6\} \times B \ : \ B \subseteq \{1, \ldots, 6\}\}$$

czyli mamy informację tylko o drugim rzucie kostką. Takie σ-ciała są niezależne.

Chcemy sprawdzić, że

$$\mathbb{P}[A \times \{1, \ldots, 6\} \cap \{1, \ldots, 6\} \times B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B].$$

Prawą stronę liczymy z jednostajności miary:

$$\mathbb{P}[A] = 6 \cdot \frac{|A|}{36} = \frac{|A|}{6}$$

$$\mathbb{P}[B] = 6 \cdot \frac{|B|}{36} = \frac{|B|}{6}$$

Lewą stroną też nie jest ciężko policzyć:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \times B] = \frac{|A||B|}{36}.$$

Czyli

$$\text{LHS} = \mathbb{P}[A \cap B] = \frac{|A||B|}{36} = \frac{|A|}{6} \cdot \frac{|B|}{6} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] = \text{RHS}$$

Dowolna **rodzina σ-ciał** $\{F\}_{i \in I}$ z przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ jest **niezależna**, jeżeli dowolny jej skończony podzbiór jest niezależny.

Lemat: Jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to σ-ciała $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$ przez nie generowane też są niezależne. [Branie dopełnień zachowuje niezależności].

Dowód: Ćwiczenie.

Wniosek: Jeżeli zdarzenia są niezależne, to wtedy

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - \mathbb{P}\left[A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c\right] = 1 - \prod_{i \le n} \mathbb{P}\left[A_i^c\right] = 1 - \prod_{i \le n}(1 - \mathbb{P}[A_i])$$

Problem: Mamy zadany ciąg n doświadczeń. Wynik i-tego doświadczenia opisany jest przestrzenią probabilistyczną $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mathbb{P}_i)$. Jak skonstruować jedną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, która modeluje przeprowadzenie tych doświadczeń w sposób niezależny?

Definiujemy

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n,$$

bo chcemy na i-tym miejscu wyniki i-tego doświadcznia:

$$\mathscr{F}_i' = \{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n \ : \ A \in \mathscr{F}_i\},$$

czyli na i-tym miejscu bierzemy zbiór, a na całej reszcie współrzędnych bierzemy całość. Czyli $\mathscr{F}_i'$ jest swego rodzaju kopią $\mathscr{F}$ rzuconą na więcej współrzędnych. Zdefiniujmy

$$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{F}_1', \ldots, \mathscr{F}_n')$$

czyli najmniejsze σ-ciało które zawiera wszystkie te rzuty $\mathscr{F}_i'$.$\mathscr{F}$ zawiera w szczególności zbiory postaci $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Problem pojawia się, kiedy próbujemy konstruować miarę $\mathbb{P}$ która działa na całości. To znaczy, spełnia

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n] = \mathbb{P}[A_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \cap \ldots \cap \Omega_1 \times \ldots \times A_n] = \prod \mathbb{P}[A_i].$$

Z teorii miary, wiemy, że takie $\mathbb{P}$ istnieje i jest jedyne. Takie $\mathbb{P}[P]$ jest miarą produktową i oznaczamy je

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$$

3.3. Nieskończone doświadczenia niezależne

Wykonano n niezależnych doświadczeń. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p, a porażki: $(1-p)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskano dokładnie k sukcesów. Definiujemy $\Omega_i = \{0,1\}$, $\mathscr{F}_i = 2^{\Omega_i}$ i $\mathbb{P}[\{1\}] = p$, a $\mathbb{P}[\{0\}] = 1-p$. Możemy to zapisać w jednym wzorku:

$$\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = p^{\omega_1}(1-\mathbb{P}[])^{1-\omega_i}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_n$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$$

Mamy $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ i chcemy policzyć $\mathbb{P}[\omega]$

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i}(1-p)^{1-\omega_i} = p^{\sum \omega_i}(1-p)^{n-\sum \omega_i}$$

Niech A_k będzie zdarzeniem, że zaszło dokładnie k sukcesów.

$$\mathbb{P}[A_k] = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in A_k} p^k(1-p)^{n-k} = |A_k| p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Chcemy rozważać przestrzenie probabilistyczne, które mieszczą nieskończenie wiele wyników niezależnych doświadczeń.

Twierdzenie Kołmogorowa: załóżmy, że dany jest ciąg miar $\mathbb{P}_i$, gdzie $i \in \mathbb{N}$. na $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n))$ spełniających dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{n+1}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n].$$

Wówczas istnieje jedyna miara probabilistyczną na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ generowana przez skończenie wymiarowe prostokąty taka, że

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n]$$

Przykład:

Chcemy skonstruować przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, na której zdefiniowany jest nieskończony ciąg niezależnych założeń A_i taka, że $\mathbb{P}[A_i] = \frac{1}{2}$.

Z zadania 10 z listy 3 wiemy, że Ω nie może być zbiorem przeliczalnym.

Weźmy $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \mathrm{Leb})$. Dla każdego elementu $\omega \in \Omega$ tej przestrzeni (czyli każdej liczby) rozważmy rozważmy rozwinięcie binarne liczby ω, czyli

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n} = (0, \omega_1, \omega_2, \ldots),$$

ale są liczby, które mają dwa takie rozwinięcia, np $\frac{1}{2}$. W takim przypadku wybieramy rozwinięcie nieskończone, czyli nieskładający się z samych zer od pewnego momentu.

Niech $A_i = \{\omega \in [0,1] \ : \ \omega_i = 0\}$, one wyglądają mniej więcej tak:

$$A_1 = [0, \frac{1}{2})$$

$$A_1 = [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$

MOŻNA ZROBIĆ SOBIE RYSUNECZEK

Zadanie: te zbiory są niezależne. Ponadto, $\mathbb{P}[A_i] = \frac{1}{2}$. Taka przestrzeń pozwala nam definiować nieskończone rzuty monetą.

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dany jest ciąg zdarzeń $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

↪ **Granicą górną ciągu zdarzeń** A_n nazywamy zdarzenie $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

↪ **Granicą dolną ciągu zdarzeń** A_n nazywamy zdarzenie $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Przykład:

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią na której zdefiniowano nieskończony ciąg rzutów kostką. Wtedy A_n - w n-tym ruchu wypadła 6. Czym jest $\limsup A_n$? jest to zdarzenie "wypadło nieskończenie wiele 6".

Lemat Boule-Cantalliego. W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dane są zdarzenia $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$. Wtedy

↪ 1. Jeżeli $\sum \mathbb{P}[A_n] < \infty$, to wtedy

$$\mathbb{P}[\limsup A_n] = \mathbb{P}[A_n \text{ i.o.}] = 0.$$

↪ 2. Jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_2$ są niezależne oraz $\sum \mathbb{P}[A_i] = \infty$, to prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P}[A_n \text{ i.o.}] = 1$$

Dowód:

1. Ustalmy $M \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[A_n \text{ i.o.}] = \mathbb{P}\left[\bigcap \bigcup A_n\right] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{m=M}^{\infty} A_m\right] \leq$$

$$= \leq \sum_{m=M}^{\infty} \mathbb{P}[A_m] \xrightarrow{M\to\infty} 0$$

2. Wystarczy pokazać, że

$$0 = \mathbb{P}\left[(\limsup A_n)^c\right] = \mathbb{P}\left[\left(\bigcap\bigcup A_m\right)^c\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup\bigcap A_m^c\right]$$

czyli chcemy

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ \mathbb{P}\left[\bigcap_{m=M}^{\infty} A_m^c\right] = 0$$

Skorzystamy z nierówności

$$1 - x \leq e^{-x}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\bigcap A_m^c\right] &= \lim \mathbb{P}\left[\bigcap_{m=M}^{k} A_m^c\right] = \lim_k \prod_{m=M}^{k} \mathbb{P}\left[A_m^c\right] = \\ &= \lim_k \prod (1 - \mathbb{P}\left[A_m\right]) \leq \lim_k \prod e^{-\mathbb{P}[A_n]} = \\ &= \lim_k e^{-\sum \mathbb{P}[A_m]} = e^{-\lim_k \sum \mathbb{P}[A_n]} = e^{-\infty} = 0\end{aligned}$$

Przykład:

1. Rzucamy nieskończenie wiele razy kostką i te rzuty są niezależne. A_n mówi, że w n-tym rzucie wypadło 6. Mamy $\mathbb{P}\left[A_i\right] = \frac{1}{6}$. Dalej $\sum \mathbb{P}\left[A_i\right] = \sum \frac{1}{6} = \infty$, a więc z lematu Borela-Cantalliego

$$\mathbb{P}\left[\text{"wypadło nieskończenie wiele razy"}\right] = 1.$$

2. Uzasadnij, że jeżeli będziemy rzucać kostką odpoweidnio długo, to z prawdopodobieństwem 1 otrzymamy ciąg 10 kolejnych 1, a następnie bezposrednio po nim ciąg 10 kolejnych 6.

Niech A_n to będzie zdarzeniem, że n-ty rzut jest początkiem tego ciągu.

$$\mathbb{P}\left[A_i\right] = 6^{-20}$$

$$\sum \mathbb{P}\left[A_i\right] = \sum 6^{-20} = \infty$$

Problem pojawia się na kroku niezależności A_n. Rozpatrzmy zdarzenia $\overline{A_n} = A_{20n}$, czyli po prostu robimy bardzo duże spacje między tymi ciągami i wtedy te zdarzenia już są niezależne. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są identyczne, więc z lematu B-C. prawdopodobieństwo, że

$$\mathbb{P}\left[\limsup \overline{A_n}\right] = 1 \leq \mathbb{P}\left[\limsup A_n\right]$$

4. Zmienne losowe

Niech $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. **Zmienna losowa** jest to funkcja mierzalna $X : \Omega \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ rozważamy z σ-ciałem zbiorów borelowskich). To znaczy $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

Przykład:

- $\hookrightarrow$ suma wyników 5 rzutów kostką
- $\hookrightarrow$ aktualny limit akcji

Uwaga:

1. Jeżeli zbiór Ω jest przeliczalny i $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$, to każda funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.
2. X jest zmienną losową

Twierdzenie: Jeżeli $X_1, X_2 \ldots$ są zmiennymi losowymi, to

1. $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2 \ldots$ są zmiennymi losowymi
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową
3. $\inf X_n$, $\sup X_n$, $\liminf X_m$, $\limsup X_n$ są zmiennymi losowymi.

Mówimy, że miara μ na $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ zdefiniowana wzorem

$$\mu(B) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(B)\right] = \mathbb{P}\left[\{\omega \ : \ X(\omega) \in B\}\right] = \mathbb{P}\left[X \in B\right]$$

jest **rozkładem zmiennej losowej** X. Zauważmy, że $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zdefiniowaną następująco:

$$F(t) = \mathbb{P}\left[X \leq t\right] = \mu(-\infty, t]$$

Przykład

1. Rzut monetą, $\Omega = (O, R)$, $X(O) = 1$ i $X(R) = 0$. Jeżeli $t < 0$, to $F(t) = 0$. Jeżeli $t = 0$, to $F(t) = \frac{1}{2}$:

$$F(t) = \mathbb{P}\left[X \leq 0\right] = \mathbb{P}\left[X \leq 0\right] = \frac{1}{2}$$

dla $t \in (0, 1)$ mamy $F(t) = \frac{1}{2}$ tak jak wyżej, a da $t \geq 1$ jest $F(t) = 1$, bo wyżej niż 1 już nie wejdziemy.

2. Rzut kostką

ZDJĘCIA!!!

3. Odcinek $([0, 1], \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \mathrm{Leb})$, $X(\omega) = \omega$.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 1 \\ \lambda([0, t]) = t & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Dystrybuanty nie są ciągłe, ale są prawostronnie ciągłe, a z lewej strony istnieją granice.

Twierdzenie: Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej. Wtedy

1. F jest niemalejąca
2. $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ i $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$

3. F jest prawostronnie ciągła.

4. Dla dowolnego t istnieje lewa granica w t taka, że

$$F(t-) = \lim_{s\to t^-} F(s) = \mathbb{P}[X < t]$$

5. F jest nieciągła w punkcie t tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}[X = t] > 0$. Wówczas $\mathbb{P}[X = t] = F(t) - F(t-)$

Dowód:

1. Jeżeli $s < t$, to $(-\infty, s] \subseteq (-\infty t]$, czyli $F(s) = \mu((-\infty, s]) \leq \mu((-\infty, t]) = F(t)$

2. Weźmy dowolny ciąg $t_n \to -\infty$ malejący, wtedy

$$(-\infty, t_{n+1}) \subseteq (-\infty, t_n],$$

w szczególności

$$B_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} (-\infty, t_n]$$

jest zstępująca i $\bigcap B_k = \emptyset$. Zatem z lematu o ciągłości miary:

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\bigcap B_n) = 0$$

3. Niech $t_n \downarrow t$, wtedy rodzina zbiorów $(-\infty, t_n]$ jest zstępująca.

$$\bigcap (-\infty, t_n] = (-\infty, t]$$

Z lematu o ciągłości miary:

$$\lim F(t_n) = \lim \mu((-\infty, t_n]) = \mu(-\infty, t] = F(t)$$

Pozostałe podpunkty pozostawione jako ćwiczenie.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ spełnia własności (1), (2), (3), to jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Dowód: Dowód pokarzemy dla F, które są odwracalne.

Musimy znaleźć $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ oraz zmienną losową X_n z Ω taką, że F jest dystrybuantą X_n.

Weźmy $([0, 1], Bor([0, 1]), Leb)$. Niech

$$X(\omega) = F^{-1}(\omega).$$

1. Trzeba pokazać, że to jest faktycznie zmienną losową, to znaczy, że F jest mierzalne [ćwiczenie].

2. F jest dystrybuantą, czyli warunki (4) i (5).

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \mathbb{P}[X(\omega) \leq t] = \mathbb{P}\left[F^{-1}(\omega) \leq t\right] = \mathbb{P}[\omega \leq F(t)] = F(t)$$

Definicja 4.1. Niech $\mathscr{K}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów zbioru Ω. Wtedy $\mathscr{K}$ nazywamy **π-układem**, jeżeli $(\forall\, A, B \in \mathscr{K})\ A \cap B \in \mathscr{K}$.

Definicja 4.2. Niepustą rodzinę $\mathscr{L}$ nazywamy **λ-układem**, jeżeli

- $\Omega \in \mathscr{L}$

- $A, B \in \mathscr{L}, A \subseteq B$ to $B \setminus A \in \mathscr{L}$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów z $\mathscr{L}$, to $\bigcup A_n \in \mathscr{L}$

Lemat 4.3. Jeżeli $\mathscr{L}$ jest λ-układem zawierającym π-układ $\mathscr{K}$, to $\mathscr{L}$ zawiera σ-ciało generowane przez $\mathscr{K}$.

Dowód:

1. Jeżeli $\mathscr{L}$ jest jednocześnie λ-układem i π-układem, to $\mathscr{L}$ jest σ-ciałem.
   - Jeżeli $A, B \in \mathscr{L}$, to $A \cup B \in \mathscr{L}$, bo
   $$A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B) = \left[A^c \setminus \underbrace{(B \setminus A \cap B)}_{\substack{\in \mathscr{L} \\ \text{bo } A\cap B \subseteq B}} \right]^c$$
   - Przez indukcję pokazujemy, że $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{L}$, to $\bigcup\limits_{i\leq n} A_i \in \mathscr{L}$
   - Pozostaje pokazać, że $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{L}$ jeżeli $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{L}$. Nazywamy $B_k = \bigcup\limits_{i\leq k} A_k$, ciąg B_k jest wstępujący więc z definicji λ-układu jest w $\mathscr{L}$.
2. Niech $\mathscr{L}_0$ będzie przekrojem wszystkich λ-układów zawierających $\mathscr{K}$. Łatwo zobaczyć, że $\mathscr{L}_0$ jest λ-układem. Chcemy pokazać, że $\mathscr{L}_0$ jest π-układem, bo wtedy λ_0 jest σ-ciałem zawierającym $\mathscr{K}$.

   W szczególności musi zawierać σ-ciało generowane przez $\mathscr{K}$.
   - Ustalmy $A \in K$ i niech
   $$K_1^A = \{B \subseteq \Omega \ : \ A \cap B \in \mathscr{L}_0\}$$
   - Zauważmy, że $K \subseteq K_1^A$, bo $K \subseteq \mathscr{L}_0$. Ponadto K_1^A jest λ-układem.
   - $\Omega \in K_1^A$, bo $\Omega \cap A = A \in K \subseteq \mathscr{L}_0$
   - Niech $B_1, B_2 \in K_1^A$ i $B_1 \subseteq B_2$. Wtedy $(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A) \in \mathscr{L}_0$, bo $\mathscr{L}_0$ jest λ-układem.
   - Stąd $B_2 \setminus B_1 \in K_1^A$
   - Niech $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie wstępującym ciągiem elementów z K_1^A.
   $$A \cap \bigcup B_n = \bigcup (B_n \cap A) \in \mathscr{L}_0$$
   bo przekroje też są wstępujące, stąd $B_n \cap A$ jest wstępującym ciągiem z $\mathscr{L}_0$

   Mamy więc, że K_1^A jest λ-układem, zatem $\mathscr{L}_0 \subseteq K_1^A$. Pokazaliśmy, że $(\forall\ B \in \mathscr{L}_0)\ A \cap B \in \mathscr{L}_0$.
3. A wyżej był dowolny. W takim razie pokazaliśmy, że
   $$(\forall\ A \in K)(\forall\ B \in \mathscr{L}_0)\ A \cap B \in \mathscr{L}_0$$
   Ustalmy $B \in \mathscr{L}_0$ taki, że

UKRAŚĆ NOTATKI ZE SKRYPTU, BO NIE CHCE MI SIĘ TERAZ PISAĆ

4.1. KONIEC TEORII MIARY NA DZISIAJ

Twierdzenie 4.4. Dystrybuanta zmiennej losowej X jednoznacznie wyznacza jej rozkład. To znaczy, jeśli dwie zmienne losowe mają różny rozkład, to mają też różne dystrybuanty.

Dowód: Załóżmy nie wprost, że mamy dwie zmienne losowe: X o rozkładzie μ_X i dystrybuantę F oraz Y o rozkładzie μ_Y i tej samej dystrybuancie.

Skorzystamy z twierdzenia Dynkina, czyli musimy wskazać π-układ i λ-układ. Niech $\mathscr{K}$ będzie rodziną zbiorów postaci $(-\infty, t]$. Łatwo zobaczyć, że tak zdefiniowane $\mathscr{K}$ jest π-układem.

Niech $\mathscr{L}$ będzie rodziną zbiorów A takich, że $\mu_X(A) = \mu_Y(A)$. Czyli $\mathscr{L}$ jest λ-układem.

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy, że $\mu_X(-\infty, t] = F(t)$. Zatem $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}$, czyli z twierdzenia Dynkina $\sigma(\mathscr{K}) = Bor(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, czyli ta równość $\mu_X(A) = \mu_Y(A)$ zachodzi dla wszystkich zbiorów borelowskich A.

4.2. PRZYKŁADY DYSKRETNE

Definicja 4.5. Zmienna losowa X o rozkładzie μ ma **rozkład dyskretny**, jeżeli istnieje przeliczalny zbiór S taki, że $\mu(S) = 1$. Wtedy

$$S = \{x \;:\; \mu(\{x\}) > 0\}$$

nazywamy zbiorem atomów

PRZYKŁAD:

1. $\mu = \delta_a, a \in \mathbb{R}$ i $\mu(\{a\}) = 1$
2. Rzut kostką
3. Rozkład dwumianowy (rozkład Bernoulliego, liczba sukcesów w n doświadczeniach). Ten rozkład ma dwa parametry: liczbę doświadczeń i prawdopodobieństwo sukcesu. Oznaczamy $Bin(n, p)$. Zmienna losowa ma rozkład $Bin(n, p)$ [ozn. $X \sim Bin(n, p)$], jeżeli
$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$
4. Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$ [ozn. $Poiss(\lambda)$]. X ma taki rozkład, jeżeli
$$\mathbb{P}[X = k] = \lambda^k k! e^{-\lambda}$$
5. Ogólnie to mamy pewien rozkład $S = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ i wagi $\{p_1, \ldots, p_n, \ldots, \}$ takie, że $\sum p_i = 1$ i możemy patrzeć na to tak, że x_i to jest atom, a p_i to jest jego waga.

4.3. Rozkłady absolutnie ciągłe

Definicja 4.6. Zmienna losowa X o rozkłądzie μ ma rozkład **absolutnie ciągły** względem miary Lesbegue'a, jeżeli istnieje gęstość, t.j. funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ taka, że dla każdego zbioru Borelowskiego $B \in Bor(\mathbb{R})$ $\mu(B) = \int_B f(x)dx$

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$
- $F(t) = \mu(-\infty, t] = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
- f ciągła $\implies F'(t) = f(t)$

- każda funkcja f, która jest nieujemna, mierzalna i $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ definiuje rozkład pewnej zmiennej losowej.

Przykład:

- Rozkład jednostajny na $[0, 1]$, $X \sim U([0, 1])$
- Rozkład wykłądniczy z parametrem $\lambda > 0$. $X \sim Exp(\lambda)$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!\!\!\not\, _{[0,\infty)}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \end{cases}$$

- Rozkład Gaussa (normalny) $X \sim N(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Ogólnie: Każdą miarę probabilistyczną μ na $\mathbb{R}$ można przedstawić wpostaci

$$\mu = \mu_{sing} + \mu_{abs},$$

gdize μ_{abs} jest absolutnie ciągła względem miary Lesbegue'a, a μ_{sing} jest singularna (tzn. żyje tam, gdzie miara Lesbegue'a jest zerem).

5. Wielowymiarowe zmienne losowe

Definicja 5.1. Mamy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Zmienna losowa o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest to funkcja mierzalna $X : \Omega \to (\mathbb{R}^d, Bor(\mathbb{R}^d))$.

Przykład: Losujemy z talii 5 kart.

AAAAAAAAAAA

Definicja 5.2. Rozkładem d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy miarę probabilistyczną μ na $\mathbb{R}^d$

$$\mu(B) = \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega \ : \ X(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}\left[X^d(B)\right]$$

Wtedy $(\mathbb{R}^d, Bor(\mathbb{R}^d), \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 5.3. Dystrybuanta d-wymiarowej zmiennej losowej $X = (x_1, ..., x_n)$ to funkcja $F : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ taka, że

$$F(t_1, ..., t_n) = \mathbb{P}[X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, ..., X_d \le t_d]$$