Lista 5

Rachunek Prawdopodobieństwa

Weronika Jakimowicz

23.03.2023

Eksperymentowałam z LaTeXem i plik trzeba pobrać, żeby zobaczyć ukryte rozwiązania. Po kliknięciu na "Odkrycie rozwiązania" powinno się pojawić spisane rozumowanie.

Zadanie 1. *Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?*

Odkrycie rozwiązania

Zadanie 2. *Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina*

$$\mathfrak{L} = \{A \in \text{Bor}(\mathbb{R}) \ : \ \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$$

jest λ-układem.

Zadanie 3. *Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$ oraz ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t*

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

Odkrycie bardzo wymachanego rozwiązania

Z wykładu Miara i Całka wiemy, że $\mathrm{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, czyli każdy zbiór z $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ zapisuje się jako $A \times B$ dla $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

Co więcej wiem, że $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, s] \ : \ s \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[t, \infty) \ : \ t \in \mathbb{R}\})$, czyli

$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{(-\infty, s] \times [t, \infty)\})$$

Nasza miara ν zachowuje się jak miara produktowa na zbiorze generujących σ-ciało $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$, czyli zachowuje się tak na całym $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ i to kończy dowód?

Zadanie 4. *Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnego $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.*

Odkrycie bardzo wymachanego rozwiązania

Zadanie 5. *Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p. Niech X będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Odkrycie bardzo wymachanego rozwiązania

Zadanie 6. *Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi $p_n = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$. W ciągu jednej sekundy wykonujemy n doświadczeń. Niech X_n będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X_n. Zbadaj zachowanie tego rozkładu, gdy $n \to \infty$.*

Odkrycie bardzo wymachanego rozwiązania

Zadanie 7. *Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to*

$$\mathbb{P}\left[X > t + s \middle| X > t\right] = \mathbb{P}[X > s]$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ dla rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym bezatomowym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$.

Odkrycie rozwiązania

Rozkład geometryczny to

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p$$

Mi jest potrzebne prawdopodobieństwo, ze pierwsze zwycięstwo będzie powyżej $t+s$, jeżeli pierwsze zwycięstwo jest powyżej t?

$$\mathbb{P}\left[X > t+s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t+s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{(1-p)^{t+s-1}}{(1-p)^{t-1}} = (1-p)^s = \mathbb{P}[X > s]$$

Analogicznie dla rozkładu wykładniczego $\mathbb{P}[X > k] = \int_k^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k}$:

$$\mathbb{P}\left[X > t+s | X > t\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X > t+s \text{ i } X > t\right]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Przed udowodnieniem, że są to jedyne rozkłady z amnezją, przyjżyjmy się co konkretnie mówi mi warunek z zadania:

$$\mathbb{P}\left[X > t+s | X \geq t\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t+s]}{\mathbb{P}[X \geq t]} = \mathbb{P}[X > s]$$

czyli

$$\mathbb{P}[X > t+s] = \mathbb{P}[X > s]\,\mathbb{P}[X > t].$$

Zacznijmy od rozkładu geometrycznego, tzn. $t, s \in \mathbb{N}$. Będę chciała potęgować, co się stanie, gdy $t = s$. Popatrzmy, co się wtedy dzieje:

$$\mathbb{P}[X > t+t] = \mathbb{P}[X > t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 2t+t] = \mathbb{P}[X > 2t]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^2\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^3$$

i indukcyjnie,

$$\mathbb{P}\left[X > (n+1)t\right] = \mathbb{P}[X > nt+n] = \mathbb{P}[X > nt]\,\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t]^{n+1}.$$

W takim razie:

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}[X > t \cdot 1] = \mathbb{P}[X > 1]^t.$$

Dalej, wiemy, że albo $\mathbb{P}[X > t]$ albo $\mathbb{P}[X \leq t]$, czyli

$$\mathbb{P}[X > t] + \mathbb{P}[X \leq t] = 1$$

a z kolei $\mathbb{P}[X \leq t]$ to $\mathbb{P}[X = t]$ lub $\mathbb{P}[X \leq t-1]$. Czyli

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - \mathbb{P}[X \leq t-1].$$

Z kolei $\mathbb{P}[X \leq t-1]$ mogę rozpisać korzystając z

$$\mathbb{P}[X > t] = \mathbb{P}\left[X > (t-1)+1\right] = \mathbb{P}\left[X > (t-1)\right]\mathbb{P}[X > 1]$$

$$\mathbb{P}\left[X > (t-1)\right] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t-1] = 1 - \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

Czyli dostaję, że

$$\mathbb{P}[X = t] = 1 - \mathbb{P}[X > t] - 1 + \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > 1]}$$

nazwijmy $p = \mathbb{P}[X = 1]$, wtedy

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] = 1 - p.$$

Ostatecznie:

$$\mathbb{P}[X = t] = \frac{\mathbb{P}[X > t]}{1-p} - \mathbb{P}[X > t] = \frac{(1-p)^t}{1-p} - (1-p)^t = (1-p)^{t-1}(1-(1-p)) = p(1-p)^{t-1}$$

a to jest już nasz znajomy rozkład geometryczny.

Rozważam teraz rozkład eksponencjalny, który tym na przykład różni od geometrycznego, że przyjmuje argumenty nienaturalne. Zwykle jeśli mamy dane argumenty naturalne to chcemy przejść do wymiernych i dalej do rzeczywistych, to korzystamy najpierw z ułamków, a potem z granic ciągów tychże ułamków. Spróbujmy więc jakoś uzyskać $\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]$, wtedy zmieniając p, q będę miała wszystkie liczby wymierne

$$\mathbb{P}[X > p] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]^2$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{2}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{2}\right]$$

i podobnie jak wcześniej

$$\mathbb{P}[X > 1]^p = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-1)}{q} + \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p(q-2)}{q}\right]\mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right] = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right]^q$$

$$\mathbb{P}[X > 1]^{\frac{p}{q}} = \mathbb{P}\left[X > \frac{p}{q}\right].$$

W tym przypadku bardzo ciężko będzie mi przechodzić do równości, ale mogę za to powiedzieć, że dla każdej liczby niewymiernej x znajdę ciąg liczb wymiernych taki, że $x = \lim q_n$. Jeśli będziemy teraz brać ten ciąg podchodzący od dołu, to dostaniemy ciąg wstępujących prawdopodobonieństw, bo $X > q_n \implies X > q_{n+1}$ gdy $q_{n+1} > q_n$. Czyli będziemy mogli przejść z prawą stroną do granicy i dostać

$$\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X > 1]^x$$

nazwijmy teraz $\mathbb{P}[X > 1] = e^{-\lambda}$, żeby otrzymać

$$\mathbb{P}[X > x] = \left(e^{-\lambda}\right)^x = e^{\ln(e^{-\lambda})^x} = e^{x \ln e^{-\lambda}} = e^{-x\lambda}$$

co jest dokładnie postacią rozkładu geometrycznego.

Zadanie 8. (Twierdzenie Poissona) *Niech* $p_{k,n}$ *będzie prawdopodobieństwem zajścia dokładnie* k *sukcesów w* n *próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie pojedynczego sukcesu* p_n*. Dla każdego ustalonego* $k \in \mathbb{N}$ *wyznacz*

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n}, \text{ jeśli } \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

Odkrycie rozwiązania

Druga część