# Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

# Spis treści


**1 Definicja rozmaitości** **3**
- 1.1 Rozmaitości topologiczne . . . 3
- 1.2 Mapy, lokalne współrzędne . . . 4
- 1.3 Własności rozmaitości topologicznych . . . 5

**2 Rozmaitości gładkie** **6**
- 2.1 Atlas rozmaitości . . . 6
- 2.2 Zgodność map . . . 7
- 2.3 Atlas [maksymalny] . . . 7
- 2.4 Funkcje gładkie . . . 7

**3 Rozkłady jedności** **9**

**4 Pomocnik idiotów:** **10**

# 1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzmy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzenie opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w $\mathbb{C}^3$).

## 1.1. Rozmaitości topologiczne

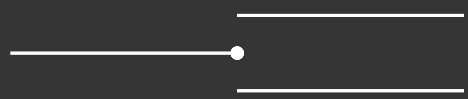
**Definicja 1.1.** Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

### Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń

  nie jest rozmaitością topologiczną.
- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, to $K = \phi^{-1}[\overline{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

### Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

  $$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

  które są po domknięciu zawarte w M.
- Parazwartość, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
  - Rodzina $\mathscr{X}$ podzbiorów M jest *lokalnie skończona* [locally finite], jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończenie wieloma elementami $\mathscr{X}$.
  - Jeśli mamy pokrycie M zbiorami $\mathscr{U}$ i bierzemy drugie pokrycie $\mathscr{V}$ takie, że dla każdego $V \in \mathscr{V}$ znajdziemy $U \in \mathscr{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to $\mathscr{U}$ jest pokryciem włożonym/rozdrobnieniem
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

### Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- Twierdzenie Brouwer'a: niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.

- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

**Uwaga 1.2.** *Każdy otwarty podzbiór* n*-rozmaitości topologicznej jest* n*-rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].*

## 1.2. Mapy, lokalne współrzędne

**Definicja 1.3.** Parę $(U, \phi)$, gdzie U jest otwartym podzbiorem M, a $\phi$ to homeomorfizm

$$\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M. Zbiór U taki jak wyżej nazywamy zbiorem mapowym [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli $(U, \phi)$ jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest *wyśrodkowana na* p [centered at p].

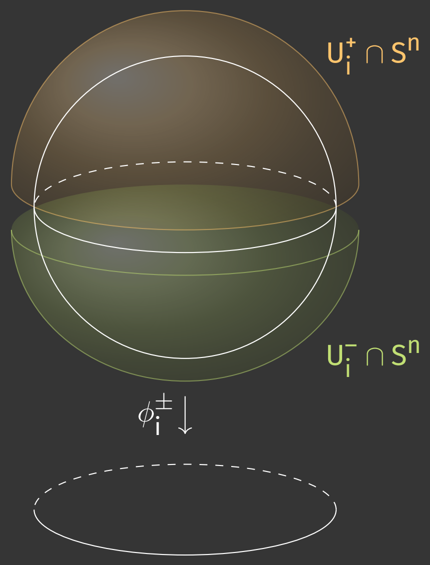
**Fakt 1.4.** *Hausdorffowska przestrzeń* X *o przeliczalnej bazie jest* n*-rozmaitością* $\iff$ *posiada rodzinę map* n*-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały* X*.*

**Przykład:**

Rozważmy $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to $S^n$ też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe $S^n$. Dla $i = 1, ..., n+1$ określmy otwarte podzbiory w $S^n$

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$




Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \ : \ U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

# PRZYKŁADY Z LEE

## 1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna $X$ jest

- spójna, gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- drogowo spójna, gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- lokalnie drogowo spójna, gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

**Uwaga 1.5.** *Jeśli przestrzeń $M$ jest rozmaitością topologiczną, to*

1. $M$ *jest lokalnie spójna drogowo,*
2. $M$ *jest spójna* $\iff$ *jest drogowo spójna,*
3. *spójne składowe* $M$ *są takie same jak dorogowe spójne składowe,*
4. $M$ *ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem* $M$ *(a więc i spójną rozmaitością)*

**Dowód.** Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w $\mathbb{R}^n$ [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza $M$ jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna $X$ jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

**Uwaga 1.6.** *Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.*

**Dowód.** Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w $q \in X$ jest nazywana fundamentalną grupą $X$ w $q$. Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała $c_q(s) = q$. Dla rozmaitości topologicznych *fundamentalne grupy* są przeliczalne.

# 2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, *co to znaczy, że funkcja* $f : M \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna?*

## 2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ będziemy określać za pomocą *map*:

- Funkcja f wyrażona w mapie $(U, \phi)$ to nic innego jak $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- **Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ to funkcje $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_2\phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

**Definicja 2.1.** Mapy $(U, \phi_1)$ oraz $(U, \phi_2)$ są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map $(U, \phi)$ i $(V, \psi)$ mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

**Definicja 2.2.** Mając dane dwie rozmaitości, M i N, mówimy, że funkcja $f : M \to N$ jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna $f^{-1}$ też jest różniczkowalna

**Definicja 2.3.** Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. 1. zbiory mapowe $U_\alpha$ pokrywają całe M
2. 2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

**Przykład:** Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) \ : \ i = 1, 2, ..., n + 1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, ..., x_n) & \xrightarrow{\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ...x_n) \\ & & \Big\downarrow \phi_i^+ \\ & & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ..., x_n) \end{array}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

## 2.2. Zgodność map

**Definicja 2.4.** Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości $M$ i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ opisanego na $M$.

**Definicja 2.5.** Niech $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ będą gładkimi atlasami na $M$. Mówimy, że mapa $(U, \phi)$ jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}$, jeżeli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}_1$. Dalej, mówimy, że atlas $\mathscr{A}_2$ jest zgodny z altasem $\mathscr{A}_1$, jeżeli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z każdą mapą z atlasu $\mathscr{A}_2$.

**Twierdzenie 2.6.** *Relacja zgodnośc atlasów jest relacją równoważności.*

**Dowód.** Ćwiczenia ☕

## 2.3. Atlas [maksymalny]

Zgodne atlasy określają tę samą strukturę gładką na $M$. W takim razie, wygodnym będzie móc zawerzeć wszystkie zgodne atlasy w czymś większym. Z pomocą przychodzi nam pojęcie atlasu maksymalnego.

**Definicja 2.7.** Atlas $\mathscr{A}$ jest **atlasem maksymalnym**, jeżeli każda mapa $(U, \phi)$ z nim zgodna jest w nim zawarta.

**Fakt 2.8.** *Każdy atlas $\mathscr{A}$ na $M$ zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na $M$, który jest zbiorem wszystkich map na $M$ zgodnych z $\mathscr{A}$.*

**Dowód.** Ćwiczenia. Korzystamy z lematu Zorna. ☕

W takim razie, równoważnie do pary $(M, \mathscr{A})$, gdzie $\mathscr{A}$ jest dowolnym zgodnym atlasem na $M$, możemy wymóc w definicji, aby $\mathscr{A}$ **był atlasem maksymalnym**.

## 2.4. Funkcje gładkie

**Definicja 2.9.** Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ określona na rozmaitości gładkiej $(M, \mathscr{A})$ jest gładka, jeżeli po wyrażeniu w każdej mapie z tego atlasu jest gładka:

$$(\forall\, (U, \phi) \in \mathscr{A}) \quad f \circ \phi^{-1} \text{ jest gładka}$$

**Fakt 2.10.** *Niech $(M, \mathscr{A})$ będzie rozmaitością gładką, a $f : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na $M$.*

1. *Jeżeli $(U, \phi)$ jest mapą zgodną z $\mathscr{A}$, to $f$ wyrażone w $(U, \phi)$, czyli $f \circ \phi^{-1}$ też jest funkcją gładką.*
2. *Niech $\mathscr{A}'$ będzie atlasem zgodnym z $\mathscr{A}$. Wówczas funkcja $f$ jest zgodna względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest gładka względem $\mathscr{A}'$ $\iff$ jest zgodna względem atlasu maksymalnego zawierającego oba te atlasy.*

Co więcej, możemy powiedzieć, że $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka $\iff$ jest gładka względem każdego atlasu $\mathscr{A}$ wyznaczającego na $M$ gładką strukturę. [Ćwiczenia]

**Definicja 2.11.**

- Dwie mapy $(U, \phi)$ i $(V, \psi)$ są **$C^k$-zgodne**, jeżeli $\phi\psi^{-1}$ oraz $\psi\phi^{-1}$ są funkcjami klasy $C^k$.
- **$C^k$-atlas** to atlas składający się z map, które są $C^k$-zgodne
  - Taki atlas określa strukturę $C^k$-rozmaitości na $M$
  - Jest to struktura słabsza niż struktura rozmaitości gdładkiej

$C^0$ zwykle oznacza rozmaitość topologiczną, a $C^\infty$ to rozmaitość gładka.

**Fakt 2.12.** *Na $C^k$ rozmaitości nie można sensownie określić funkcji klasy $C^m$ dla $m > k$.*

Rozmaitość można definiować na różne sposoby niewymagające użycia definicji i własności topologicznych, na przykład:

- **Rozmaitość analityczna** [$C^\omega$] to rozmaitość, dla której atlas składa się z map analitycznie zgodnych (czyli wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych).
- **Rozmaitość zespolona** ma mapy jako funkcje w $\mathbb{C}^n$ zamiast w $\mathbb{R}^n$
- Rozmaitość konforemna - zachowuje kąty
- Rozmaitość kawałkami liniowa

Istnieją rozmaitości topologiczne, które nie dopuszczają żadnej struktury gładkiej (pierwszym takim przykładem była zwarta 10-rozmaitość odkryta przez M. Kervaire). Z drugiej strony, z każdego maksymalnego atlasu $C^k$ rozmaitości można wybrać atlas złożony z map $C^\infty$-zgodnych, czyli na każdej $C^k$ istnieje struktura $C^\infty$ rozmaitości.

**Lemat 2.13.** *Niech $X$ będzie zbiorem (bez topologii). Niech $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów $X$ takich, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $\alpha$ istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ które jest różnowartościowe. Załóżmy, że takie $M, \{U_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}$ spełniają:*

1. *Dla każdego $\alpha$ $\phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$*
2. *Dla każdych $\alpha, \beta$ $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$*
3. *Gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to*
$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
   *jest gładkim dyfeomorfizmem (gładkie i odwracalne)*
4. *Przeliczalnie wiele spośród $U_\alpha$ pokrywa $X$*
5. *Dla dowolnych $p, q \in X, p \neq q$ istnieją $\alpha, \beta$ oraz otwarte podzbiory $V_p \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha), V_q \subseteq \phi_\beta(U_\beta)$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p), q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) \emptyset$, czyli możemy* rozdzielić dwa dowolne różne punkty za pomocą zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$.

*Wówczas na $X$ istnieje **struktura rozmaitości topologicznej na** $X$, dla której $U_\alpha$ są zbiorami otwartymi. Ponadtwo, $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ tworzy gładki atlas na $X$.*

**Dowód.** Prezentujemy szkic dowodu:

- Topologia jest produkowana jako przeciwobrazy przez poszczeglne $\phi_\alpha$
- Lokalna euklidesowość jest oczywista
- Mniejsza baza przeliczalna też śmignie [ćwiczenia]
- Hausdorffowość wynika z warunku 5.

**PRZYKŁAD** - linie na prostej, ale nie chce już dzisiaj

# 3. Rozkłady jedności

*Motywacja: jak sklejać funkcje?* W szczególności, jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem $M$ istnieje gładka funkcja $f : M \to \mathbb{R}^n$ taka, że:

$$\begin{aligned} f(p) &= 0 \quad & p \in \partial M \\ f(p) &> 0 \quad & p \in \mathrm{Int}(M)? \end{aligned}$$

**Definicja 3.1.** Rodzina $\{A_i\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej $X$ jest **lokalnie skończona**, jeżeli dla każdego $p \in X$ istnieje otwarte otoczenie $p \in U_p$ w $X$ takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu $\alpha$.

**Definicja 3.2.** Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ jej **nośnik** to

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}(\{x \in X \; : \; f(x) \neq 0\})$$

# 4. Pomocnik idiotów:

## Skorowidz definicji


1.1 Definicja: *rozmaitość topologiczna* . . . 3
1.3 Definicja: *mapa* . . . 4
2.1 Definicja: *zgodność map* . . . 6
2.2 Definicja: *dyfeomorfizm* . . . 6
2.3 Definicja: *atlas gładki* . . . 6
2.4 Definicja: *rozmaitość gładka* . . . 7
2.5 Definicja: *zgodność map, atlasów* 7
2.7 Definicja: *atlas maksymalny* . . . 7
2.9 Definicja: *gładkość względem atlasu* . . . 7
2.11 Definicja: *mapa $C^k$-zgodna, $C^k$-atlas* . . . 7
3.1 Definicja: *rodzina lokalnie skończona* . . . 9
3.2 Definicja: *nośnik funkcji* . . . 9


## Twierdzonkowa zabawa


1.2 Uwaga: *podzbiory to też rozmaitości* . . . 4
1.4 Fakt: n-*rozmaitość* $\iff$ *rodzina map pokrywających* . . . 4
1.5 Uwaga: *spójność rozmaitości topologicznych* . . . 5
1.6 Uwaga: *rozmaitości są lokalnie zwarte* . . . 5
2.6 Twierdzenie: *zgodność to relacja równoważności* . . . 7
2.8 Fakt: *każdy atlas jest zawarty w unikalnym atlasie maksymalnym* 7
2.10 Fakt . . . 7
2.12 Fakt: *nie można skakać $C^m \to C^k$* 8
2.13 Lemat: *rozmaitość gładka bez topologii* . . . 8