Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 8

Exercise 1. *Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\mathrm{Var}(X) = 3, \mathrm{Cov}(X, Y) = -1, \mathrm{Var}(Y) = 2$. Oblicz $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2x + Y)$.*

Twierdzenie 5.16: Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$ dla $i = 1, ..., n$, to $\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) + 2\sum_{k<l} \mathrm{Cov}(X_k, X_l)$

$$\mathrm{Var}(4X - 3Y) = \mathrm{Var}(4X) + \mathrm{Var}(-3Y) + 2\mathrm{Cov}(4X, -3Y)$$

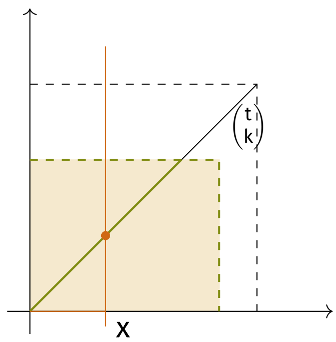
Twierdzenie 5.15(4): kowariacja jest operatorem dwuliniowym

$$16 \cdot \mathrm{Var}(X) + 9 \cdot \mathrm{Var}(Y) - 2 \cdot 4 \cdot 3\mathrm{Cov}(X, Y) = 48 + 9 + 24 = 81$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(2X - Y, 2X + Y) &= \mathrm{Cov}(2X, 2X + Y) - \mathrm{Cov}(Y, 2X + Y) = \\
&= \mathrm{Cov}(2X, 2X) + \mathrm{Cov}(2X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, 2X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = \\
&= 4 \cdot \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) - 2 \cdot \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Var}(Y) = \\
&= 12 - 2 = 10
\end{aligned}$$

Exercise 2. *Wyznacz dystrybuantę wektora losowego (X, Y) o rozkładzie jednostajnym na przekątnej kwadratu jednostkowego $[0, 1]^2$ łączącej punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Wyznacz rozkłady brzegowe, oblicz $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y), \mathrm{Cov}(X, Y), \mathrm{Var}(X + Y)$ oraz sprawdź, czy zmienne X i Y są niezależne.*

Długość tej prostej wynosi $\sqrt{2}$, więc gęstość to $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalej, wiem, że wartości, jakie może ten wektor przyjmować są postaci $\binom{a}{a}$, czyli



$$F(t, k) = \mathbb{P}[X \le t, Y \le k] = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a > 1 \\ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \text{wpp} \end{cases}$$

gdzie $a = \min(t, k)$.

Rozkłady brzegowe:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x, Y \in \mathbb{R}] = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

jak na rysunku. Analogicznie dla Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} y & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$$

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X = x] \cdot x\, dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[Y = y] \cdot y\, dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2 = \int_0^1 \left[x - \frac{1}{2}\right]^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 - \frac{1}{4} &= \\
= \int_0^1 \mathbb{P}[X = x, Y \in \mathbb{R}]\, x dx - \frac{1}{4} &= \\
= \int_0^1 \mathbb{P}[X = x, Y = x]\, x dx - \frac{1}{4} &= \\
= \int_0^1 x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{2}{12} + 2 \cdot 112 = \frac{1}{3}$$

Exercise 3. *d-wymiarowa zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m, A^{-1})$ o gęstości*

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det(A)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle A(x - m), (x - m)\rangle\right].$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$ jest macierzą kowariancji X.

X jest d-wymiarowe, czyli $X = (X_1, ..., X_d)$. Czyli

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_2 ..., \mathbb{E}X_d),$$

więc wystarczy pokazać, że dla każdego i $\mathbb{E}X_i = m_i$.

Zaczynamy od tego, że A musi być symetryczna i nieujemna, żeby potem mogła być macierzą kowariancji. Czyli w szczególności, A jest diagonalizowalna o wartościach własnych rzeczywistych. Niech więc

$$A = Q^T D Q,$$

Q jest ortogonormalna i $D = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$.

Policzmy najpierw rozkłady brzegowy tego zła:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_k &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} x_k g(x_1, \dots, x_d)\, dx_{1,\dots,k-1,k+1,\dots d} = \\
&= \int \dots \int \frac{\sqrt{\det(Q^T DQ)}}{(2\pi)^{d/2}} x_k \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Q^T DQ(x-m), (x-m)\rangle\right] = \\
&= \int \dots \int \frac{\sqrt{\det(Q)\det(D)\det(Q)}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle DQ(x-m), Q(x-m)\rangle\right] = \\
&= \begin{bmatrix} z = Q(x-m) \\ dz = \det Q dx \end{bmatrix} = \\
&= \int \frac{\det(Q)\sqrt{\det(D)}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Dz, z\rangle\right] \cdot (\det(Q))^{-1} dz = \\
&= \int \frac{\sqrt{\det(D)}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum \lambda_i z_i^2\right] dz = \\
&= \int \frac{\sqrt{\prod \lambda_i}}{(2\pi)^{d/2}} \prod \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_i z_i^2\right] dz = \\
&= \frac{\sqrt{\prod \lambda_i}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-1/2\lambda_k (x_k - m_k)^2} \int e^{-1/2\lambda_1 z_1^2} \int \dots \int e^{-1/2\lambda_d z_d^2}\, dz_{1,\dots,k-1,k+1,d} = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_k}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-1/2\lambda_k (x_k - m_k)^2}
\end{aligned}$$

bo całki się zwijają do $\int e^{-1/2\lambda_i z_i^2} dz_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}$ i tak jakby przy k-tej współrzędnej nie podstawiam

$$\mathbb{E}X_k = \int_{\mathbb{R}} x g_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\lambda_k (x-m_k)^2} dx =$$

Exercise 4. *Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, 1)$. Wykaż, że zmienne losowe $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ i $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$ są niezależne i obie mają rozkład $N(0, 1)$.*

Exercise 5. *Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, I)$, gdzie I jest macierzą identyczności. Sprawdź, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.*

Exercise 6. *Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą wzajemnie nieskorelowanymi zmiennymi losowymi takimi, że ich łączny rozkład jest normalny. Wykazać, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne.*

Exercise 7. *Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ oraz niech $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą ustalonymi wektorami. Pokaż, że zmienne losowe*

$$W = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j, \quad Z = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

są niezależne $\iff$ wektory a i b są prostopadłe. Opisz rozkłady W i Z.

Exercise 8. *Podaj przykład nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, które nie są niezależne.*

Exercise 9. *(**Transformata Boza=Müllera**) Pokaż, że jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$, to*

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y) \quad \text{i} \quad V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

są niezależne i mają rozkład $\mathrm{N}(0, 1)$.

Exercise 10. *Niech* $A_1, \ldots, A_{2021} \in \mathscr{F}$ *będą zbiorami o własności* $\mathbb{P}[A_i] \geq \frac{1}{2}$. *Wykaż, że istnieje* $\omega \in \Omega$ *taka, że* $\omega \in A_i$ *dla przynajmniej* 1011 *wartości* i.

Exercise 11. *Dane są dwa ciągi* $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ *zbieżne prawie wszędzie do zmiennych* X, Y. *Pokaż, że jeśli dla każdego* n *zmienne* X_n *i* Y_n *mają ten sam rozkład, to* X *i* Y *też mają ten sam rozkład.*