

Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis treści

1	Definicja rozmaitości	3
1.1	Rozmaitości topologiczne	3
1.2	Mapy, lokalne współrzędne	4
1.3	Własności rozmaitości topologicznych	5
2	Rozmaitości gładkie	6
2.1	Atlas rozmaitości	6
2.2	Rozmaitość gładka	7
3	Pomocnik idiotów:	8

1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzymy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzeń opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory \mathbb{R}^n lub \mathbb{C}^n zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w \mathbb{C}^3).

1.1. Rozmaitości topologiczne

Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n -rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest **lokalnie euklidesowa** wymiaru n , czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n .

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



nie jest rozmaitością topologiczną.

- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\bar{K} \subseteq \bar{U}$ jest zwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , to $K = \phi^{-1}[\bar{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

które są po domknięciu zawarte w M .

- **Parazwartość**, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
 - Rodzina \mathcal{X} podzbiorów M jest **lokalnie skończona** [locally finite], jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną wieloma elementami \mathcal{X} .
 - Jeśli mamy pokrycie M zbiorami \mathcal{U} i bierzemy drugie pokrycie \mathcal{V} takie, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ znajdziemy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to \mathcal{U} jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem**
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n .

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- **Twierdzenie Brouwer'a:** niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.

- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n . Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.2. Każdy otwarty podzbiór n -rozmaitości topologicznej jest n -rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Definicja 1.3. Parę (U, ϕ) , gdzie U jest otwartym podzbiorem M , a ϕ to homeomorfizm

$$\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M . Zbiór U taki jak wyżej nazywamy **zbiorem mapowym** [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli (U, ϕ) jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest **wyśrodkowana na p** [centered at p].

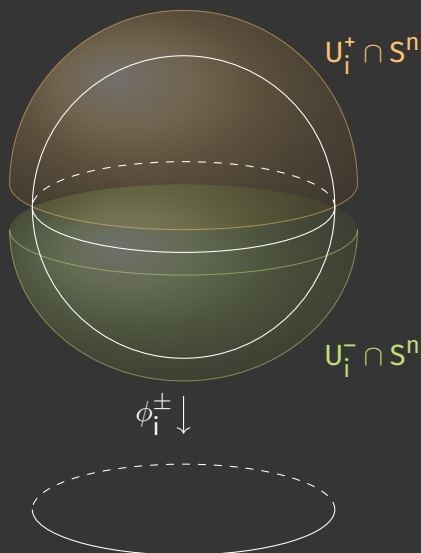
Fakt 1.4. Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n -rozmaitością \iff posiada rodzinę map n -wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają całą X .

Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczną topologią. Z racji, że \mathbb{R}^{n+1} jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całą S^n . Dla $i = 1, \dots, n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\bar{U}_i^\pm = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum x_j^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \bar{U}_i^\pm$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami \mathbb{R}^n .

PRZYKŁADY Z LEE

1.3. Własności rozmaitości topologicznych

Przypomnijmy najpierw kilka definicji z topologii i je poszerzmy. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- **spójna**, gdy nie można jej rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, otwartych i niepustych podzbiorów,
- **drogowo spójna**, gdy każde dwa punkty można połączyć ciągłą ścieżką,
- **lokalnie drogowo spójna**, gdy ma bazę zbiorów spójnych drogowo.

Uwaga 1.5. Jeśli przestrzeń M jest rozmaitością topologiczną, to

1. M jest lokalnie spójna drogowo,
2. M jest spójna \iff jest drogowo spójna,
3. spójne składowe M są takie same jak drogowe spójne składowe,
4. M ma przeliczalnie wiele składowych, każda będąca otwartym podbiorem M (a więc i spójną rozmaitością)

Dowód. Punkt (1) jest prostą konsekwencją tego, że otwarte kule są spójne łukowo w \mathbb{R}^n [ćwiczenia]. Punkty (2) i (3) wynikają w prosty sposób z (1). Punkt (4) jest powodowany punktami poprzednimi i tym, że baza M jest przeliczalna. ☕

Przestrzeń topologiczna X jest **lokalnie zwarta**, jeżeli każdy punkt ma bazę otoczeń których domknięcia są zwarte.

Uwaga 1.6. Każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie zwarta.

Dowód. Zadanie na liście 1. ☕

Przestrzeń zawierająca wszystkie homotopijne pętle zaczepione w $q \in X$ jest nazywana **fundamentalną grupą** X w q . Elementem neutralnym tej grupy jest funkcja stała $c_q(s) = q$. Dla rozmaitości topologicznych **fundamentalne grupy** są przeliczalne.

2. Rozmaitości gładkie

Na wykładzie nie będą nas zbytnio interesować rzeczy różniczkowalne tylko skończenie wiele razy. Z tego też powodu lekkie niuanse między słowami gładkie a różniczkowalne będą często pomijalne, a słowa te staną się izomorficzne. Teraz postaramy się określić, co to znaczy, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna?

2.1. Atlas rozmaitości

Pojęcie różniczkowalności funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy określać za pomocą map:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak $f \circ \phi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$. W ten sposób dostajemy funkcję wyrażoną w zmiennych rzeczywistych.
- W pierwszym instynkcie możemy chcieć powiedzieć, że $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy taka jest. Niestety, map może być bardzo dużo i może się okazać, że żadna funkcja nie jest gładka.
- **Odwzorowanie przejścia** między dwoma mapami $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ to funkcje $\phi_1 \phi_2^{-1}$ i $\phi_2 \phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

Definicja 2.1. Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są **zgodne** (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1 \phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ i $\psi \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Definicja 2.2. Mając dane dwie rozmaitości, M i N , mówimy, że funkcja $f : M \rightarrow N$ jest **dyfeomorfizmem**, jeżeli

- jest różniczkowalna
- jest bijekcją
- funkcja odwrotna f^{-1} też jest różniczkowalna

Definicja 2.3. Gładkim atlasem \mathcal{A} na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, 2, \dots, n+1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{(\phi_j^+)^{-1}} & (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \\ & & \downarrow \phi_i^+ \\ & & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n) \end{array}$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

2.2. Rozmaitość gładka

Definicja 2.4. Rozmaitość gładka to para (M, \mathcal{A}) złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu \mathcal{A} opisanego na M .

3. Pomocnik idiotów:

Skorowidz definicji

1.1	Definicja: <i>rozmaitość topologiczna</i>	3
1.3	Definicja: <i>mapa</i>	4
2.1	Definicja: <i>zgodność map</i>	6
2.2	Definicja: <i>dyfeomorfizm</i>	6
2.3	Definicja: <i>atlas gładki</i>	6
2.4	Definicja: <i>rozmaitość gładka</i>	7

Twierdzonekowa zabawa

1.2	Uwaga: <i>podzbiory to też rozmaitości</i>	4
1.4	Fakt: <i>n-rozmaitość \iff rodzina map pokrywających</i>	4
1.5	Uwaga: <i>spójność rozmaitości topologicznych</i>	5
1.6	Uwaga: <i>rozmaitości są lokalnie zwarte</i>	5