

## ZADANIE 1.

Uzasadnij, że jeśli w definicji rozmaitości topologicznej warunek lokalnej euklidesowości zastąpimy którymkolwiek z następujących warunków:

(a) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą w  $\mathbb{R}^n$ ,

(b) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z całą przestrzenią  $\mathbb{R}^n$

to otrzymamy definicję równoważną.

To, że (a)  $\iff$  (b) wynika z tego, że otwarta kula jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}^n$ . Pokażemy więc, że  
Lokalnie euklidesowa  $\iff$  każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą.

$\implies$

Ustalmy dowolne  $x \in M$ . Niech  $x \in U \subseteq M$  będzie otwartym otoczeniem  $x$  w  $M$  takim, że  $U \cong \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  z definicji podanej na wykładzie. Nazwijmy ten homeomorfizm  $\phi : U \rightarrow \bar{U}$ . Wiemy, że istnieje  $r > 0$  takie, że  $B_r(\phi(x)) \subseteq \bar{U}$ . Co więcej,  $\phi^{-1}[B_r(\phi(x))]$  jest otwartym podzbiorem  $M$ , bo  $\phi$  to homeomorfizm i przeciwobraz zbioru otwartego jest przezeń otwarty. Czyli  $M \supseteq \phi^{-1}[B_r(\phi(x))] \ni x$  jest otwartym podzbiorem  $M$  zawierającym  $x$  i homeomorficznym z otwartą kulą w  $\mathbb{R}^n$ .

$\impliedby$

Otwarta kula jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ , więc mamy homeomorfizm między pewnym otwartym otoczeniem  $x \in U \subseteq M$  a otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ .

## ZADANIE 2.

Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości topologicznej jest rozmaitością topologiczną.

Niech  $M$  będzie rozmaitością topologiczną, a  $M' \subseteq M$  jej otwartym podzbiorem.

1. Hausdorffowość:

$x, y \in M' \implies x, y \in M$ , czyli istnieją  $U, V \subseteq M$  otwarte podzbiory  $M$  takie, że  $x \in U, y \in V$  oraz  $U \cap V = \emptyset$ . Ponieważ  $M'$  jest otwarty, to istnieją otwarte  $x \in U'$  i  $y \in V'$  zawarte w  $M'$ . Skończony przekrój zbiorów otwartych, więc  $x \in U' \cap U$  i  $y \in V' \cap V$  są rozłącznymi zbiorami otwartymi w  $M'$ .

2. Przeliczalna baza:

Niech  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  będzie przeliczalną bazą  $M$ . Wtedy  $\{U_i \cap M'\}_{i \in \mathbb{N}}$  jest przeliczalną rodziną zbiorów otwartych w  $M'$  (przecięcie dwóch otwartych jest otwarte). Ponieważ otwarty zbiór w  $M'$  jest również otwarty w  $M$ , to mogliśmy go wysumować za pomocą  $U_i$ , czyli w szczególności możemy go wysumować z  $U_i \cap M'$ , bo sam jest i tak zawarty z  $M'$ .

3. Lokalna Hausdorffowość:

Weźmy dowolny  $x \in M' \subseteq M$ . Ponieważ  $M$  było rozmaitością topologiczną, to dla pewnego otwartego otoczenia  $x \in U \subseteq M$  mieliśmy homeomorfizm  $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Znowu,  $U \cap M'$  jest zbiorem otwartym, a więc  $\phi \upharpoonright (U \cap M')$  jest homeomorfizmem z otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  (bo  $U \cap M'$  przechodzi na coś otwartego).

## ZADANIE 3.

Uzasadnij, że jeśli rozmaitość  $M$  jest spójna, to jest też drogowo spójna, tzn. każde dwa punkty  $p, q \in M$  można połączyć ciągłą krzywą  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  (taką, że  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ ). Wskazówka: dla ustalonego punktu  $p$  rozważ zbiór tych punktów  $q$ , które można połączyć z  $p$  krzywą ciągłą.

Spójna  $\implies$  jedyne zbiory otwarto-domknięte to  $\emptyset$  i  $M$ .

Ustalmy dowolne  $p \in M$ . Niech  $\Sigma_p$  będzie zbiorem tych punktów  $q \in M$ , które można połączyć z  $p$  krzywą ciągłą.

1.  $\Sigma_p$  jest zbiorem otwartym:

Niech  $q \in \Sigma_p$  i  $\gamma$  będzie krzywą taką, że  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ . Pokażemy, że możemy na nim opisać zbiór otwarty. Niech  $U \subseteq M$  będzie otwartym otoczeniem  $q$ , a  $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  będzie homeomorfizmem wynikającej z lokalnej euklidesowości  $M$ . Weźmy teraz dowolny  $y \in U$  i pokażemy, że wówczas istnieje krzywa z  $p$  do  $y$ .

Wiemy, że  $\mathbb{R}^n$  jest przestrzenią łukowo spójną, niech więc  $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie krzywą ciągłą taką, że  $\mu(0) = \phi(q)$  i  $\mu(1) = \phi(y)$ . Rozważmy teraz krzywą

$$\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$$
$$\gamma'(a) = \begin{cases} \gamma(2a) & a \leq \frac{1}{2} \\ \phi^{-1}[\mu(2a - 1)] & a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mamy  $\gamma'(0) = p$  i  $\gamma'(1) = \phi^{-1}[\mu(1)] = \phi^{-1}[\phi(y)] = y$ , czyli  $y \in \Sigma_p$

2.  $\Sigma_p$  jest zbiorem domkniętym:

Równoważnie,  $M \setminus \Sigma_p$  jest zbiorem otwartym. Jeśli  $M \setminus \Sigma_p$  nie byłoby otwarte, to dla pewnego  $x \notin \Sigma_p$  mielibyśmy otoczenie  $z y \in \Sigma_p$  i argument podobny jak wyżej: punkty są w jednym otoczeniu homeomorficznym z  $\mathbb{R}^n$ , więc możemy skonstruować krzywą z  $p$  przez  $y$  do  $x$ , więc  $x \in \Sigma_p$  i mamy sprzeczność.

## ZADANIE 4.

*Udowodnij, że jeśli  $(U, \phi)$  jest mapą na rozmaitości  $M$ , zaś  $K$  jest zwartym podzbiorem  $\phi(U)$ , to zbiór  $\phi^{-1}(K)$  jest domknięty i zwarty w  $M$ . Pokaż też, że jeśli  $K$  jest domknięty w  $\phi(U)$ , to  $\phi^{-1}(K)$  nie musi być domknięty w  $M$ .*

Jeśli  $K$  jest zwartym podzbiorem  $\phi(U)$ , to z każdego pokrycia  $K$  możemy wybrać podpokrycie skończone. Popatrzmy na zbiór  $\phi^{-1}(K)$ . Możemy go pokryć zbiorami otwartymi  $\{V_i\}_{i \in I}$ . Czyli  $\phi(V_i)$  pokrywają  $K$ , a więc możemy wybrać ciąg  $i_1, \dots, i_n \subseteq I$  taki, że  $K = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \phi(V_{i_k})$ . W takim razie,

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} V_{i_k}$$

pokrywają  $\phi^{-1}(K)$ . Czyli  $\phi^{-1}(K)$  jest zwarty.

To drugie to jakiś kontrprzykład, ale mi się nie chce.

## ZADANIE 5.

*Pokaż, że jeśli przestrzeń topologiczna ma przeliczalną bazę, to z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać przeliczalne podpokrycie.*

## ZADANIE 6.

Korzystając z zadań 4 i 5 uzasadnij, że każda rozmaitość jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w  $\mathbb{R}^n$ , których domknięcia w  $M$  są homeomorficzne z domkniętymi kulami w  $\mathbb{R}^n$ .

Niech  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  będzie rodziną map z  $M$ . Na mocy zadania 5 możemy wybrać ciąg  $i_1, \dots, i_n, \dots \subseteq I$  taki, że

$$M = \bigcup_{1 \leq k} U_k.$$

Popatrzmy teraz, co się dzieje w środku jednej takiej mapy. To jest ustalmy dowolne  $i$  z wcześniej wybranego ciągu  $i_1, \dots, i_n, \dots$

Niech  $\overline{U_i} = \phi(U_i)$ . Jest to zbiór otwarty w  $\mathbb{R}^n$ , czyli na dowolnym  $x \in \overline{U_i}$  możemy opisać kulę  $B_r(x)$  o promieniu  $r > 0$ . Teraz, jeśli weźmiemy  $B_{r/2}(x)$ , to możemy taką kulę domknąć nie wychodząc z  $\overline{U_i}$  (choćby dlatego, że to domknięcie dalej będzie się zawierało w  $B_r(x)$ ). Teraz zbiór  $F = \text{cl}(B_{r/2}(x))$  jest zwarty w  $\mathbb{R}^n$ , czyli na mocy zadania 4. mamy, że  $\phi^{-1}(F)$  jest domknięty w  $M$ .

Mamy więc, że w każdej mapie  $(U_i, \phi_i)$  możemy pokryć zbiorami otwartymi homeomorficznymi z kulami w  $\mathbb{R}^n$  i o domknięciach homeomorficznych z domkniętymi kulami w  $\mathbb{R}^n$ . Wystarczy teraz dla każdego  $(U_i, \phi_i)$  wybrać przeliczalnie wiele takich zbiorów otwartych, co możemy zrobić z ośrodkowością  $\mathbb{R}^n$ .

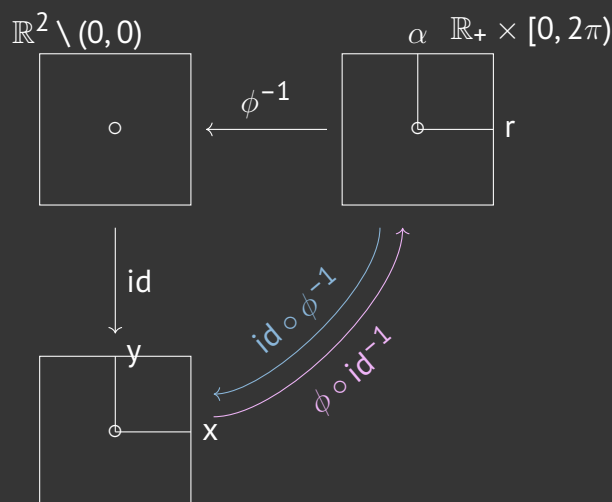
## ZADANIE 7.

Uzasadnij, że lokalnie wokół każdego punktu  $(x, y) \neq (0, 0)$  współrzędne biegunowe na  $\mathbb{R}^2$  są zgodne ze współrzędnymi kartezjańskimi.

Po pierwsze, co rozumiemy przez współrzędne? To są odwzorowania w  $\mathbb{R}^2$ , parametryzacje naszej rozmaitości. W tym przypadku kartezjańskie współrzędne to będzie dla nas tak naprawdę funkcja  $\text{id}$ . Popatrzmy też na  $\phi$ , czyli przejście ze współrzędnych biegunowych do współrzędnych kartezjańskich zadane wzorem:

$$\phi(\alpha, r) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Aby obie te współrzędne były zgodne, potrzebujemy, żeby kolorowe strzałki były funkcjami gładkimi (bo jest to odpowiedni  $\text{id} \circ \phi^{-1}$  i  $\phi \circ \text{id}^{-1}$ ).



Ciągłość funkcji  $\phi \circ \text{id}^{-1}$  jest jasna ze wzoru na  $\phi$ . Wystarczy teraz pokazać, że  $\phi^{-1}$  jest gładkie. Wiemy, że jeśli Jakobian funkcji nie zeruje się w pewnym punkcie, to na jego otoczeniu funkcja jest

odwracalna i ta odwrotność też będzie gładka, bo  $\phi_1$  takie było.

$$D_{\phi}(\alpha, r) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{bmatrix} = r > 0.$$

Z zadania tego możemy wyciągnąć wniosek, że mapami możemy zadać więcej niż jedną strukturę na rozmaitości.

## ZADANIE 8.

*Pokaż, że współrzędne geograficzne na sferze  $S^2$  (określone na dopełnieniu biegunów i jednego z południków) są zgodne ze standardową strukturą na  $S^2$ . Wskazówka: skorzystaj z parametryzacji równania sfery z użyciem współrzędnych geograficznych.*

Czy współrzędne geograficzne to to samo co współrzędne sferyczne?

To zadanie wygląda syfnie jakoś, idę dalej

## ZADANIE 9.

*Uzasadnić, że zgodność atlasów jest relacją symetryczną i przechodnią.*

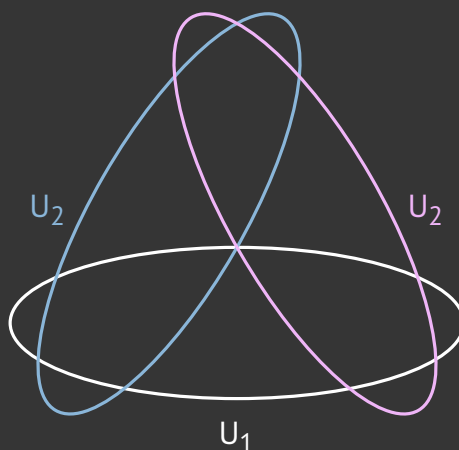
Niech  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  będą atlasami na rozmaitości  $M$ .

### Symetryczność:

Pokazanie symetryczności relacji zgodności atlasów sprowadza się do wzięcia dwóch map:  $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}_1$  i  $(U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}_2$  i stwierdzeniu, że jeśli  $(U_1, \phi_1)$  jest zgodna z  $(U_2, \phi_2)$  (czyli po porównaniu wszystkich  $\mathcal{A}_1$  zgodny z  $\mathcal{A}_2$ ), to  $\phi_1\phi_2^{-1}$  oraz  $\phi_2\phi_1^{-1}$  są gładkie. No ale to samo, jeśli przestawimy indeksy, czyli  $(U_2, \phi_2)$  jest zgodne z  $(U_1, \phi_1)$  ( $\mathcal{A}_2$  jest zgodny z  $\mathcal{A}_1$ ).

### Przechodność:

Tutaj kusiłoby wziąć dowolne trzy mapy:  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  i  $(U_3, \phi_3)$  odpowiednio z  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  i powiedzieć, że śmiga, ale w taki sposób ignorujemy dziedziny poszczególnych  $\phi_i$ . To znaczy, może zajść coś takiego:



I wtedy dziedziny np  $\phi_1\phi_2^{-1}$  i  $\phi_1\phi_3^{-1}$  są rozłączne.

## ZADANIE 10.

*Uzasadnij, że każdy atlas  $\mathcal{A}$  na rozmaitości  $M$  zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym (złożonym ze wszystkich map na  $M$  zgodnych z  $\mathcal{A}$ ).*