Równania różniczkowe 1R

dupupupupupuuuu

Lato 2023

Spis rzeczy niezbyt mądrych

1. Wstęp do rowziązywania równań

Przykład: *Procent składany*: mamy $x_0 = 1000$ zł złożone w banku i oprocentowanie to jest $r = 8\%$ w skali roku. Pytamy, ile będziemy mieli po roku na naszym rachunku? $x_1 = 1008$. To się nazywa *kapitalizacja odsetek* i ogólny wzór to

$$x_n = x_{n-1} + r \cdot x_{n-1}$$

i możemy to napisać jawnym wzorem

$$x_n = x_0 \cdot (1 + r)^n$$

i to jest już jakiś model.

Teraz rozważmy przypadek ciągły tego. Zmieniamy znaczenie oznaczenia x_n na stan rachunku w n-tym miesiącu. Model będzie ten sam, tylko $x_n = x_0 \cdot (1 + \frac{r}{12})^n$.

To teraz rozdrabniamy jeszcze bardziej i stan w chwili t to:

$$x(t + h) = x(t) + r \cdot hx(t)$$

i równoważna postać to

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} = rx(t)$$

a ponieważ lewa strona przy $h \to 0$ dąży do pochodnej x, to mamy

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)$$

To się nazywa *prawem Malthusa*.

Przykład: przyrost naturalny. Jeśli przez r oznaczymy przyrost naturalny w Polsce, to mamy $r < 0$. Wzór jest taki sam jak dla procentu składanego.

Dzisiejszy wykład ma nam powiedzieć, jak znajdować rozwiązanie.

1.1. Równania liniowe jednorodne

Równanie liniowe jednorodne to równanie postaci

$$y' = a(t)y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$. Szukanie rozwiązania tego równania (czyli tak zwanego *zagadnienia Cauchy'ego*) to:

$$y' - a(t)y = 0$$

i teraz jeśli przemnożę całe t równanie przez

$$e^{-\int_0^t a(s)ds},$$

co nazywamy czynnikiem całkującym, i teraz jak napiszemy:

$$y'e^{-\int_0^t a(s)ds} - a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}y = 0$$

i to co dostaliśmy to jest pochodna funkcji

$$\left[e^{-\int_0^t a(s)ds}y\right]' = 0$$

czyli mamy

$$ye^{-\int_0^t a(s)ds} = c$$

$$y = ce^{\int_0^t a(s)ds}$$

Twierdzenie: dla każdej $a \in C(\mathbb{R})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Dowód: Istnienie jest jasne, bo $y(t)$ jest dane jawny wzorem

$$y(t) = y_0 e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Przy dowodzie jednoznaczności chcemy pokazać, że jest to dokładnie jedno rozwiązanie. Mamy dwie opcje dowodu:

I. Wszystkie krotki wyprowadzania jak wyżej są równoważne, to znaczy y spełnia $y' - a(t) - y = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy y spełnia $y'e^{-\int_0^t a(s)ds} - a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}y = 0$ i tak dalej.

II. Dowód nie wprost, czyli załóżmy, że mamy dwa rozwiązania $y(t)$ oraz $\overline{y}(t)$. Wtedy

$$w(t) = y(t) - \overline{y}(t)$$

spełnia:

$$w' = a(t)y - a(t)\overline{y} = a(t)(y - \overline{y}) = a(t)w$$

$$w(0) = y(0) - \overline{y}(0)$$

Funkcja $w \in C^1(\mathbb{R})$ spełnia:

$$w' = aw$$

$$w(0) = 0$$

Pokazać, że $w(t) \equiv 0$

Mnożymy równanie $w' = aw$ przez $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ i dostajemy:

$$w'e^{-\int_0^t a(s)ds} - awe^{-\int_0^t a(s)ds} = 0$$

$$\left[we^{-\int_0^t a(s)ds}\right]' = 0$$

$$we^{-\int_0^t a(s)ds} = c$$

$$w = ce^{-\int_0^t a(s)ds}$$

ale ponieważ $w(0) = 0$, to $w(0) = 0 = c$ i mamy, że $w \equiv 0$.

1.2. Równania liniowe niejednorodne

Twierdzenie: dla dowolnej funkcji ciągłej $a, f \in C(\mathbb{R})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $y \in C^1(\mathbb{R})$ zagadnienia

$$\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

czyli **równania liniowego niejednorodne**.

Dowód:

Istnienie pokażemy przez konstrukcję rozwiązania. Mnożymy przez czynnik całkujący, czyli $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ i dostajemy

$$\left[ye^{-\int_0^t a(s)ds}\right]' = f(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

i całkujemy obie strony od 0 do t. Jeszcze przed tym zmienimy sobie oznaczenie w równaniu powyżej: $t \to \tau$. Koniec końców, dostaniemy:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[ye^{-\int_0^\tau a(s)ds}\right]' dz &= \int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds} d\tau \\ ye^{-\int_0^t a(s)ds} - y_0 e^{-\int_0^t a(s)ds} &= \int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds} d\tau \\ y = y_0 + e^{\int_0^t a(s)ds} &\int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds} \end{aligned}$$

Jednoznaczność możemy pokazać podobnie jak w poprzednim przykładzie.

1.3. Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie o zmiennych rozdzielonych to równanie postaci

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}.$$

Równanie liniowe jednorodne to szczególny przypadek równania o zmiennych rozdzielonych dla $g(t) = a(t)$ i $f(y) = \frac{1}{y}$. Takie równania są przyjemne, bo łatwo jest je zwinąć do postaci pochodna = 0:

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}$$

$$y'f(y) = g(t)$$

i niech $f = F'$ oraz $g = G'$. Wtedy

$$[F(y(t))]' = G'(t)$$

czyli

$$[F(y(t))]' - G'(t) = 0$$

$$F(y(t)) - G(t) = c$$

Możemy też podejść do tego problemu *metodą inżynieryjną*, czyli $y' = \frac{dy}{dx}$ jest traktowane jako ułamek i mamy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

$$f(y)dy = g(t)dt$$

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt$$

Twierdzenie: Zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = \frac{g(t)}{f(y)} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

gdzie $g(t)$ jest ciągłe w otoczeniu t_0. Natomiast $f(y)$ i $\frac{1}{f(y)}$ są ciągłe w otoczeniu y_0. To równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $y \in C^1$ w otoczeniu (t_0, y_0).

Dowód: To jest tak naprawdę to co już napisaliśmy, ale nieco bardziej precyzyjnie.

Ponieważ $\frac{1}{f(y)}$ jest ciągłe w otoczeniu y_0, więc $f(y) \neq 0$ w tym otoczeniu. Załóżmy, że $f(y) > 0$ na otoczeniu y_0. Zatem mamy równoważnie

$$f(y)\frac{dy}{dy} = g(t).$$

Niech $F' = f$ z dokładnością do stałej. Czyli wtedy

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = g(t)$$

i całkujemy obie strony od t_0 do t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}F(y(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

$$F(y(t)) - F(y_0) = G(t) - G(t_0)$$

Ponieważ $F' = f > 0$ w otoczeniu y_0, to F jest ściśle rosnąca, więc jest odwracalna. Zatem w otoczeniu (t_0, y_0) mamy

$$y(t) = F^{-1}(F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds)$$

Przykłady, dlaczego ważne jest to, że jesteśmy w małym otoczeniu (t_0, y_0) a nie globalnie:

1. $y = y^{\frac{1}{3}}$ i $y(0) = 0$. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązania to $y \equiv 0$, ale jeśli zaczniemy dłużej nad tym siedzieć, to mamy, że $y(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$. Inne rozwiązanie to $y(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$. Problemem jest fakt, że w otoczeniu punktu $(0, 0)$ funkcja ma być ciągła - nie jest spełnione założenie. Przez to, możemy pokazać, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

2. $y = y^2$ i $y(0) = 1$. Nadal działamy na równaniu o zmiennych rozdzielonych. Założenie o ciągłości jest prawdziwe. Twierdzenie mówi, że w otoczeniu punktu $(0, 1)$ mamy dokładnie jedno rozwiązanie, które wynosi

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

1.4. Równania zupełne

Równania zupełne to równania postaci

$$M(t, y(t)) + N(t, y(t))\frac{dy}{dt} = 0,$$

gdzie M, N są klasy C^1, dla których istnieje funkcja $\psi(t, y)$ klasy C^1 taka, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, y) = M(t, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(t, y) = N(t, y)$$

Dla równań zupełnych mamy:

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(t, y(t))\frac{dy(t)}{dt} =$$
$$= \frac{d}{dt}(\psi(t, y(t))) = 0$$

Przykład: Rozważmy funkcję

$$3y + e^t + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$$

Chcę znaleźć funkcję $\psi(t, y(t))$ taką, że

$$\frac{\partial\psi(t, y(t))}{\partial t} = 3y + e^t$$
$$\frac{\partial\psi(t, y(t))}{\partial y} = 3t + \cos y$$

czyli obie strony możemy sobie przecałkować

$$\psi(t, y(t)) = \int [3y + e^t]dt = 3ty + e^t + c(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[3ty + e^t + c(y)] = 3t + c'(y) = \frac{\partial\psi(t, y(y)}{\partial y)} = 3t + \cos y$$
$$3t + e^t + c'(y) = 3t + \cos y$$
$$c'(y) = \cos y$$
$$c(y) = \sin y + c$$

Zatem

$$3y(t) + e^t + (3t + \cos y(t))y'(t) = (3ty(t) + e^t + \sin y(t) + c)' = 0$$

Twierdzenie: rozważamy równanie

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

gdzie M, N są klasy C^1 w otoczeniu (t_0, y_0). Równanie to jest zupełne w pewnym otoczeniu (t_0, y_0) $\iff$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ w otoczeniu (t_0, y_0).

Dowód:

$\implies$ Zupełność oznacza, że dla pewnej $\psi(t, y)$ mamy, że

$$\frac{\partial\psi(t, y)}{\partial t} = M(t, y)$$

oraz

$$\frac{\partial\psi(t, y)}{\partial y} = N(t, y).$$

Różniczkując pierwsze wyrażenie po y oraz drugie po t dostajemy:

$$\frac{\partial^2\psi(t, y)}{\partial t\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}M(t, y)$$

$$\frac{\partial^2\psi(t,y)}{\partial y\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)dy$$

i z symetryczności drugiej pochodnej mamy równość z twierdzenia.

$\Longleftarrow$ Podajemy funkcję ϕ:

$$\phi(t,y) = \int_{t_0}^{t} M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(t,z)dz$$

w otoczeniu (t_0, y_0).

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y_0) + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial t}M(t,z)dz = M(t,y_0) + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial y}M(t,z)dz =$$
$$= M(t,y_0) + M(t,y) - M(t,y_0) = M(t,y)$$

Pokazanie, że $\frac{\partial}{\partial y} = N(t,y)$ jest pokazywane analogicznie.

Przykład: Równanie liniowe jednorodne $y' = a(t)y$ nie jest zupełne. Możemy spróbować zapisać je w postaci z M i N:

$$-a(t)y + 1\cdot y'(t) = 0$$

Wtedy $M(t,y) = -a(t)y$ i $N(t,y) = 1$. Mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = -a(t) \neq 0 = \frac{\partial}{\partial y}N(t,y).$$

Ale już równanie

$$-a(t)ye^{-\int_0^t a(s)ds} + e^{-\int_0^t a(s)ds}y' = 0$$

jest zupełne, mimo że równania są równoważne. Zmieniliśmy tylko postać równania, ale jest sens jest taki sam.

2. Twierdzenie Picarda-Lindelöfa

Patrzymy na zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (☕)$$

Twierdzenie Picarda-Lindelöfa (ale był też Cauchy, Peano i.in.): Zakładamy, że $f(t, y)$ jest ciągła oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ też jest ciągła w otoczeniu (t_0, y_0). Wówczas istnieje $h > 0$ takie, że zagadnienie (☕) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y \in C^1([t_0, t_0 + h])$.

2.1. Początek dowodu

Cały dzisiejszy wykład będzie poświęcony na dowodzenie tego twierdzenia.

Przykład:

1. Równanie liniowe

$$y' = a(t)y + b(t) = f(t, y)$$

i $y(t_0) = y_0$. Tydzień temu pokazaliśmy, że takie równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2. Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}$$

i $y(t_0) = y_0$. Tutaj pokazywaliśmy, że mamy dokładnie jedno rozwiązanie dla $t \in [t_0, t_0 + h]$, czyli w pewnym otoczeniu (t_0, y_0) przy założeniach, że funkcje f, g są ciągłe i $f(t_0) \neq 0$.

Zaczynamy dowód od przeformułowania problemu:

Lemat: Funkcja $y \in C^1([t_0, t_0 + h])$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego $\iff$ y jest rozwiązaniem równania całkowego

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Dowód: $\Longrightarrow$

Całkujemy nasze rozwiązanie

$$y' = f(t, y)$$
$$\int_{t_0}^{t} y' ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$
$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$\Longleftarrow$

Różniczkujemy równanie całkowe

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$
$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right)$$
$$y' = 0 + f(t, y(t))$$

i śmiga

2.2. Konstrukcja rozwiązania

Twierdzenie: zbiór $X = C[a,b]$ z normą

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

jest przestrzenią Banacha.

Dowód:

1. X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ (oczywiste),
2. $\|\cdot\|_\infty$ jest normą (oczywiste),
3. X jest przestrzenią zupełną, równoważnie: każdy szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$$

jest zbieżny jednostajnie $\iff$ jest bezwzględnie zbieżny (szereg norm jest zbieżny). Tutaj odwołujemy się do analizy i że coś takiego robiliśmy.

i śmiga

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym: Niech $Z \subseteq C[a,b]$ będzie domknięty na zbieżność jednostajną. Zakładamy, że przekształcenie

$$\mathscr{F} : C[a,b] \to C[a,b]$$

ma własności:

1. $\mathscr{F}[Z] = Z$
2. $\mathscr{F}$ jest kontrakcją, to znaczy że istnieje $k \in (0,1)$ taka, że dla każdego $u, v \in Z$

$$\|\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(v)\| \leq k\|u - v\|$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno $u \in Z$ takie, że $\mathscr{F}(u) = u$.

Dowód: Bierzemy dowolne $u_0 \in Z$ i definiujemy ciąg:

$$u_{n+1} = \mathscr{F}(u_n).$$

1. $(\forall\ n)\ u_n \in Z$ - to z pierwszego założenia o $\mathscr{F}$.
2. u_n jest zbieżny jednostajnie.

Zauważmy, że

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1}\right) + u_0$$

[*suma teleskopowa*]. Pokażemy indukcyjnie, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - u_{k-1}\| < \infty.$$

Dla $n = 1$ jest trywialne, ale popatrzmy jeszcze na $\|u_2 - u_1\|$

$$\|u_2 - u_1\| \overset{\text{def}}{=} \|\mathscr{F}(u_0) - \mathscr{F}(u_1)\| \leq k\|u_0 - u_1\|$$

ogólniej:

$$\|u_k - u_{k-1}\| = \|\mathscr{F}(u_{k-1}) - \mathscr{F}(u_{k-2})\| \leq l\|u_{k-1} - u_{k-2}\| \leq \ldots \leq l^{k-1}\|u_1 - u_0\|$$

Czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - u_{k-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} l^{k-1}\|u_1 - u_0\|,$$

a to jest zbieżne, bo $l \in (0, 1)$. Zatem u_n zbiega jednostajnie do $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k-1}) + u_0$.

2.3. Zastosowania Twierdzenia Banacha

Mamy równanie

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

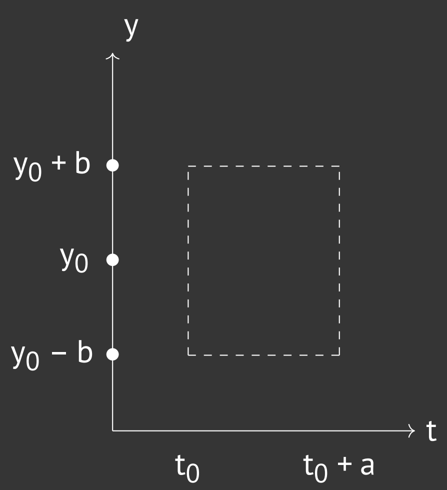
chcemy znaleźć rozwiązanie tego równania.

Niech $X = C[t_0, t_0 + h]$. Jak wygląda $\mathscr{F}$?

$$\mathscr{F}(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Definiujemy $Z \subseteq C[t_0, t_0 + h]$. Weźmy dowolne $a, b > 0$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$R = \{(t, y) \ : \ t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ |y - y_0| \leq b\}$$



$$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$$

$$L = \max_{(t,y)} |\frac{\partial}{\partial y(t,y)|}$$

Weźmy dowolne h spełniające

$$0 < h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$$

Niech

$$Z = \{f \in C[t_0, t_0 + h] \ : \ (\forall \ t \in [t_0, t_0 + h]) \ |y(t) - y_0| \leq M(t - t_0)\}$$

Objaśnienie trzeba dopisać, bo nie słuchałam

Pokażemy, że Z spełnia założenia w twierdzeniu Banacha:

1. Z jest domknięty na zbieżność jednostajną
2. $\mathscr{F}(Z) \subseteq Z$ i niech $y \in Z$. Szacujemy

$$|\mathscr{F}(y)(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right|,$$

ale na tym przedziale $(s, y(s)) \in R$, więc

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))|ds \leq \int_{t_0}^{t} M(t - t_0)ds$$

3. Kontrakcja: $y, \overline{y} \in Z$. Szacujemy

$$|\mathscr{F}(y)(t) - \mathscr{F}(\overline{y})(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, \overline{y}(s))ds\right| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, \overline{y}(s))|ds$$

Teraz dla każdego $s \in [t_0, t]$ stosujemy twierdzenie o wartości średniej:

$$|f(s, y(s)) - f(s, \overline{y}(s))| = |\frac{\partial}{\partial s} f(s, \theta)||y(s) - \overline{y}(s)|$$

dla pewnego $(s, \theta) \in R$.

Zatem

$$|\mathscr{F}(y)(t) - \mathscr{F}(\overline{y})(t_0)|(t - t_0) \leq Lh||y - \overline{y}||$$

a ponieważ $Lh < 1$, to mamy $l = LH$ jak z założenia twierdzenia o punkcie stałym.

2.4. Twierdzenie Picarda-Lindelöfa

Ten sposób rozwiązywania równań nazywa się często iteracjami Picarda.

Założenia:

- $\hookrightarrow$ f i $\frac{\partial}{\partial y} f$ są ciągle w otoczeniu (t_0, y_0)
- $\hookrightarrow$ $a, b > 0$ są dowolne
- $\hookrightarrow$ $R = \{(t, y) \ : \ t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ |y - y_0| \leq b\}$
- $\hookrightarrow$ $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$, $L = \max_{(t,y)} |\frac{\partial}{\partial y(t,y)|}$

$\hookrightarrow 0 < h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$

Teza:

Wtedy zagadnienie Cauchy'ego

$$y' = f(t, y(t))$$

ma rozwiązanie na $[t_0, t_0 + h]$.

Dlaczego nie napisaliśmy jeszcze, że jest dokładnie jedno rozwiązanie? Bo czasem może się trafić jakiś inny punkt stały poza Z.

Przykład:

Popatrzmy na $y' = y$ i $y(0) = 1$. Rozwiązanie jest nietrudno znaleźć, aly my chcemy spróbować skorzystać z twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

$$y(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} y(s)ds.$$

Definiujemy ciąg

$$y_0(t) = y_0$$

$$y_{n+1} = 1 + \int_{t_0}^{t} y_n(s)ds$$

Jeśli $y_0(t) = 1$, to

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)ds = 1 + \int_0^t (1 + t)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

indukcyjnie

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$$

to zbiega niemal jednostajnie do e^t.

Uwaga: Rozwiązanie (☕) istnieje na odcinku $[t_0, t_0 + h]$, gdzie h jest dowolne i spełnia

$$0 < h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$$

Założenie, że $h < \frac{1}{L}$ nie jest potrzebne, bo wtedy przedłużanie rozwiązań.

Przykład:

$$y' = t^2 + e^{-y^2}$$

$$y(0) = 0$$

Niech

$$R = \{(t, y) \ : \ 0 \leq t \leq 12 = a, \ |y| \leq 1 = b\}$$

Wtedy

$$M = \max_R |t^2 + e^{-y^2}| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

a więc

$$h < \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\} = \frac{1}{2}.$$

Z twierdzenia Picarda-Lindelöfa istnieje rozwiązanie na $[0, h]$, gdzie $h < \frac{1}{2}$.

2.5. Jednoznaczność rozwiązań

Lemat Greenwalla: Załóżmy, że $w \in C[t_0, t_0 + h]$ spełnia:

1. $w(x) \geq 0$

2.istnieje takie c, że $w(t) \leq c \int_{t_0}^{t} w(s)ds$ dla wszystkich $t \in [t_0, t_0 + h]$

Wówczas $w \equiv 0$.

Dowód: Dla każdego $\varepsilon > 0$ w spełnia:

$$w(t) \leq c \int_0^t w(s)ds + \varepsilon > 0$$

czyli

$$\frac{w(t)}{\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}} \leq c$$

$$\frac{d}{dt} \ln\left(\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}\right) = \frac{w(t)}{\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}} \leq c$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} \ln\left(\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}\right) \leq \int_{t_0}^{t} cds$$

$$\ln\left(\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}\right) - \ln\left(\int_{t_0}^{t_0} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}\right) = \ln\left(\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq c(t - t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} w(s)ds + \frac{\varepsilon}{c} \leq \frac{\varepsilon}{c} e^{c(t-t_0)}$$

ostatecznie

$$\frac{w(t)}{c} \leq c \int_{t_0}^{t} w(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{c} e^{c(t-t_0)} - \frac{\varepsilon}{c} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

i śmiga

Jednoznaczność rozwiązania:

Załóżmy, że mamy dwa rozwiązania $y, \overline{y}$ zagadnienia

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

oba spełniają

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{y}(s))ds.$$

Niech

$$w(t) = |y(t) - \overline{y}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, \overline{y}(s))|ds \leq L \int_{t_0}^{t} |y(s) - \overline{y}(s)|ds$$

i z Greenwalla mamy, że $w(t) = 0$.

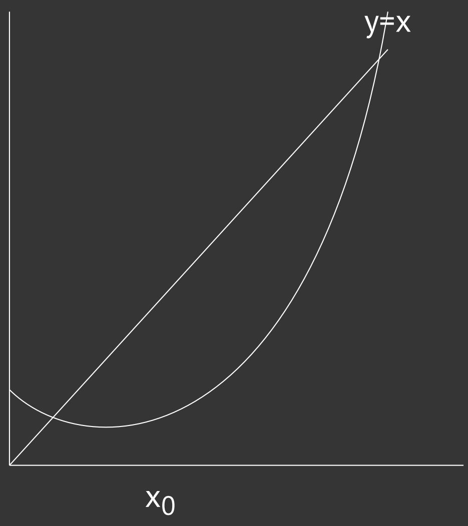
2.6. Luźniej o Twierdzeniu Banacha

Niech $X = \mathbb{R}$, które są przestrzenią Banacha. Chcemy rozwiązać

$$x = a + bx^2 = \mathscr{F}(x)$$

zastosujmy twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Trzeba by było znaleźć podzbiór, pokazać że jest zamknięty etc., ale możemy to sobie rozwiązać graficznie



$\mathscr{F}$ rzutuje nam coraz bliżej OY. Jest też drugi punkt stały, ten wyżej, do którego nie dojdziemy za pomocą Banacha.