

**Zadanie 15.** W sytuacji jak w zadaniu 14 pokaż, że każdy element  $M$  można przedstawić jako  $\mu_i(x_i)$  dla pewnego  $i \in I$  oraz  $x_i \in M_i$ .

Pokaż również, że jeżeli  $\mu_i(x_i) = 0$ , wtedy istnieje  $j \geq i$  takie, że  $\mu_{ij}(x_i) = 0$  w  $M_j$ .

Po pierwsze, weźmy sobie jakieś  $x \in M$ . Ono tak naprawdę siedzi w  $C$  ale bez  $D$  (bo  $M = C/D$ ), czyli  $x = \sum \mu_i(x_i)$ . Super. To teraz my wiemy, że  $i$  jest częściowo uporządkowane i że elementy  $C$  mają niezera na skończenie wielu miejscach, czyli musi istnieć jakieś  $j$  takie, że

$$x = \sum \mu_i(x_i) = \sum_{i \leq j} \mu_i(x_i).$$

Ale my mamy powiedzialne, że jeśli  $i \leq j$ , to  $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ , czyli

$$\sum_{i \leq j} \mu_i(x_i) = \sum_{i \leq j} \mu_j(\mu_{ij}(x_i)) = \mu_j \left[ \sum \mu_{ij}(x_i) \right],$$

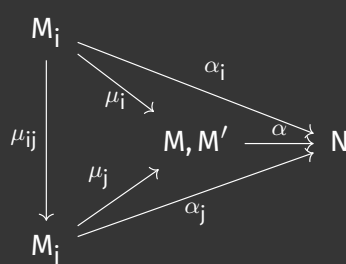
a przecież  $\sum_{i \leq j} \mu_{ij}(x_i) \in M_j$

Niech  $x_i$  takie, że  $\mu_i(x_i) = 0$ . Wtedy istnieje  $j \geq i$  takie, że  $0 = \mu_i(x_i) = \mu_j(\mu_{ij}(x_i))$ .

**Zadanie 16.** Pokaż, że prosta granica jest określona (z dokładnością do izomorfizmu) przez następującą własność. Niech  $N$  będzie  $A$ -modułem i niech dla każdego  $i \in I$   $\alpha_i : M_i \rightarrow N$  będzie homomorfizmem  $A$ -modułów takim, że  $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$  zawsze gdy  $i \leq j$ . Wtedy istnieje unikalny homomorfizm  $\alpha : M \rightarrow N$  taki, że  $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$  dla wszystkich  $i \in I$ .

TY DEBILU NIE TO POKAZYWAŁAŚ, ŻE JEST JEDYNE, TO M MAJĄ BYĆ JEDYNE A NIE  $\alpha$

Jedyność: Załóżmy, że dwie granice proste spełniają ten diagram:



Mamy  $\alpha_i = \mu_i \circ \alpha_i : M_i \rightarrow M'$  i  $\alpha'_i = \mu'_i \circ \alpha_i$ .

Chcemy wybrać szczególną rodzinę  $\alpha_i$ .

**Zadanie 17.** Niech  $(M_i)_{i \in I}$  będzie rodziną podmodułów  $A$ -modułu takich, że dla każdej pary indeksów  $i, j \in I$  istnieje  $k \in I$  takie, że  $M_i + M_j \in M_k$ . Zdefiniujemy  $i \leq j$  przez  $M_i \subseteq M_j$  i niech  $\mu_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  będzie włożeniem  $M_i$  w  $M_j$ . Pokaż, że

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i.$$

W szczególności, dowolny  $A$ -moduł jest prostą granicą skończenie generowanych podmodułów.

Najpierw to drugie pytanie. Niech  $S$  będzie zbiorem skończenie generowanych podmodułów  $M$ . Od razu widać, że jest to zbiór uporządkowany przez zawieranie. Niech  $x \in M$ . No raczej nie może być nieskończoną sumą generatorów, tylko musi być sumowany przez skończenie wiele ziomeczków, czyli jego generatory są w skończenie wielu  $M_i$ , czyli są w  $\bigcup M_i$ , czyli jest to  $\varinjlim M_i$  na mocy pierwszej części ćwiczenia.

To teraz powrót do pierwszej części zadanka. Wydaje mi się, że  $\bigcup M_i \subseteq \sum M_i$  jest dość proste.  $\sum M_i \subseteq \varinjlim M_i$  brzmi jak coś z definicji. Zostaje mi, że  $\varinjlim M_i \subseteq \bigcup M_i$ . To weźmy sobie dowolnego  $x \in M$ , wiem że istnieje  $x_i \in M_i$  takie, że  $\mu_i(x_i) = x$  no i to mi chyba kończy dowód? Bo  $\mu_i$  to tak naprawdę identyczność obcięta do  $M_i$ ?

**Zadanie 18.** Niech  $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{ij})$ ,  $\mathbb{N} = (N_i, \nu_{ij})$  będą skierowanymi systemami  $A$ -modułów nad tym samym skierowanym zbiorem. Niech  $M, N$  będą ich skierowanymi granicami i  $\mu_i : M_i \rightarrow M$ ,  $\nu_i : N_i \rightarrow N$  związanymi z nimi homomorfizmami.

Homomorfizm  $\phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  jest z definicji rodziną homomorfizmów  $A$ -modułów  $\phi_i : M_i \rightarrow N_i$  takich, że  $\phi_i \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \phi_i$  zawsze gdy  $i \leq j$ . Pokaż, że  $\phi$  definiuje unikalny homomorfizm  $\phi = \varinjlim \phi_i : M \rightarrow N$  taki, że  $\phi \circ \mu_i = \nu_i \circ \phi_i$  dla wszystkich  $i \in I$ .