ZADANIE 1.

Uzasadnij, że jeśli w definicji rozmaitości topologicznej warunek lokalnej euklidesowości zastąpimy którymkolwiek z następujących warunków:

(a) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$,

(b) każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z całą przestrzenią $\mathbb{R}^n$

to otrzymamy definicję równoważną.

To, że (a) $\iff$ (b) wynika z tego, że otwarta kula jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Pokażemy więc, że

Lokalnie euklidesowa $\iff$ *każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą.*

$\implies$

Ustalmy dowolne $x \in M$. Niech $x \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem x w M takim, że $U \cong \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ z definicji podanej na wykładzie. Nazwijmy ten homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U}$. Wiemy, że istnieje $r > 0$ takie, że $B_r(\phi(x)) \subseteq \overline{U}$. Co więcej, $\phi^{-1}[B_r(\phi(x))]$ jest otwartym podzbiorem M, bo ϕ to homeomorfizm i przeciwobraz zbioru otwartego jest przezeń otwarty. Czyli $M \supseteq \phi^{-1}[B_r(\phi(x))] \ni x$ jest otwartym podzbiorem M zawierającym x i homeomorficznym z otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$.

$\impliedby$

Otwarta kula jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, więc mamy homeomorfizm między pewnym otwartym otoczeniem $x \in U \subseteq M$ a otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

ZADANIE 2.

Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości topologicznej jest rozmaitością topologiczną.

Niech M będzie rozmaitością topologiczną, a $M' \subseteq M$ jej otwartym podzbiorem.

1. Hausdorffowość:

$x, y \in M' \implies x, y \in M$, czyli istnieją $U, V \subseteq M$ otwarte podzbiory M takie, że $x \in U, y \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Ponieważ M' jest otwarty, to istnieją otwarte $x \in U'$ i $y \in V'$ zawarte w M'. Skończony przekrój zbiorów otwartych, więc $x \in U' \cap U$ i $y \in V' \cap V$ są rozłącznymi zbiorami otwartymi w M'.

2. Przeliczalna baza:

Niech $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie przeliczalną bazą M. Wtedy $\{U_i \cap M'\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów otwartych w M' (przecięcie dwóch otwartych jest otwarte). Ponieważ otwarty zbiór w M' jest również otwarty w M, to mogliśmy go wysumować za pomocą U_i, czyli w szczególności możemy go wysumować z $U_i \cap M'$, bo sam jest i tak zawarty z M'.

3. Lokalna Hausdorffowość:

Weźmy dowolny $x \in M' \subseteq M$. Ponieważ M było rozmaitością topologiczną, to dla pewnego otwartego otoczenia $x \in U \subseteq M$ mieliśmy homeomorfizm $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Znowu, $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym, a więc $\phi \restriction (U \cap M')$ jest homeomorfizmem z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ (bo $U \cap M'$ przechodzi na coś otwartego).

ZADANIE 3.

Uzasadnij, że jeśli rozmaitość M *jest spójna, to jest też drogowo spójna, tzn. każde dwa punkty* $p, q \in M$ *można połączyć ciągłą krzywą* $\gamma : [0, 1] \to M$ *(taką, że* $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$*). Wskazówka: dla ustalonego punktu* p *rozważ zbiór tych punktów* q*, które można połączyć z* p *krzywą ciągłą.*

Spójna $\implies$ jedyne zbiory otwarto-domknięte to $\emptyset$ i M.

Ustalmy dowolne $p \in M$. Niech Σ_p będzie zbiorem tych punktów $q \in M$, które można połączyć z p krzywą ciągłą.

1. Σ_p jest zbiorem otwartym:

Niech $q \in \Sigma_p$ i γ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Pokażemy, że możemy na nim opisać zbiór otwarty. Niech $q \in U \subseteq M$ będzie otwartym otoczeniem q, a $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie homeomorfizmem wynikającej z lokalnej euklidesowości M. Weźmy teraz dowolny $y \in U$ i pokażemy, że wówczas istnieje krzywa z p do y.

Wiemy, że $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią łukowo spójną, niech więc $\mu : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą ciągłą taką, że $\mu(0) = \phi(q)$ i $\mu(1) = \phi(y)$. Rozważmy teraz krzywą

$$\gamma' : [0,1] \to M$$

$$\gamma'(a) = \begin{cases} \gamma(2a) & a \leq \frac{1}{2} \\ \phi^{-1}[\mu(2a-1)] \end{cases}$$

Mamy $\gamma'(0) = p$ i $\gamma'(1) = \phi^{-1}[\mu(1)] = \phi^{-1}[\phi(y)] = y$, czyli $y \in \Sigma_p$

2. Σ_p jest zbiorem domkniętym:

Równoważnie, $M \setminus \Sigma_p$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $M \setminus \Sigma_p$ nie byłoby otwarte, to dla pewnego $x \notin \Sigma_p$ mielibyśmy otoczenie z $y \in \Sigma_p$ i argument podobny jak wyżej: punkty są w jednym otoczeniu homeomorficznym z $\mathbb{R}^n$, więc możemy skonstruować krzywą z p przez y do x, więc $x \in \Sigma_p$ i mamy sprzeczność.

ZADANIE 4.

Udowodnij, że jeśli (U, ϕ) jest mapą na rozmaitości M, zaś K jest zwartym podzbiorem $\phi(U)$, to zbiór $\phi^{-1}(K)$ jest domknięty i zwarty w M. Pokaż też, że jeśli K jest domknięty w $\phi(U)$, to $\phi^{-1}(K)$ nie musi być domknięty w M.

Jeśli K jest zwartym podzbiorem $\phi(U)$, to z każdego pokrycia K możemy wybrać podpokrycie skończone. Popatrzmy na zbiór $\phi^{-1}(K)$. Możemy go pokryć zbiorami otwartymi $\{V_i\}_{i \in I}$. Czyli $\phi(V_i)$ pokrywają K, a więc możemy wybrać ciąg $i_1, \ldots, i_n \subseteq I$ taki, że $K = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \phi(V_k)$. W takim razie,

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} V_i$$

pokrywają $\phi^{-1}(K)$. Czyli $\phi^{-1}(K)$ jest zwarty.

To drugie to jakiś kontrprzykład, ale mi się nie chce.

ZADANIE 5.

Pokaż, że jeśli przestrzeń topologiczna ma przeliczalną bazę, to z każdego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać przeliczalne podpokrycie.

ZADANIE 6.

Korzystając z zadań 4 i 5 uzasadnij, że każda rozmaitość jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w $\mathbb{R}^n$, których domknięcia w M są homeomorficzne z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$.

Niech $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ będzie rodziną map z M. Na mocy zadania 5 możemy wybrać ciąg $i_1, \ldots, i_n, \ldots \subseteq I$ taki, że

$$M = \bigcup_{1 \leq k} U_k.$$

Popatrzmy teraz, co się dzieje w środku jednej takiej mapy. To jest ustalmy dowolne i z wcześniej wybranego ciągu $i_1, \ldots, i_n, \ldots$.

Niech $\overline{U_i} = \phi(U_i)$. Jest to zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$, czyli na dowolnym $x \in \overline{U_i}$ możemy opisać kulę $B_r(x)$ o promieniu $r > 0$. Teraz, jeśli weźmiemy $B_{r/2}(x)$, to możemy taką kulę domknąć nie wychodząc z $\overline{U_i}$ (chociażby dlatego, że to domknięcie dalej będzie się zawierało w $B_r(x)$). Teraz zbiór $F = cl(B_{r/2}(x))$ jest zwarty w $\mathbb{R}^n$, czyli na mocy zadania 4. mamy, że $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty w M.

Mamy więc, że w każdej mapie (U_i, ϕ_i) możemy pokryć zbiorami otwartymi homeomorficznymi z kulami w $\mathbb{R}^n$ i o domknięciach homeomorficznych z domkniętymi kulami w $\mathbb{R}^n$. Wystarczy teraz dla każdego (U_i, ϕ_i) wybrać przeliczalnie wiele takich zbiorów otwartych, co możemy zrobić z ośrodkowości $\mathbb{R}^n$.

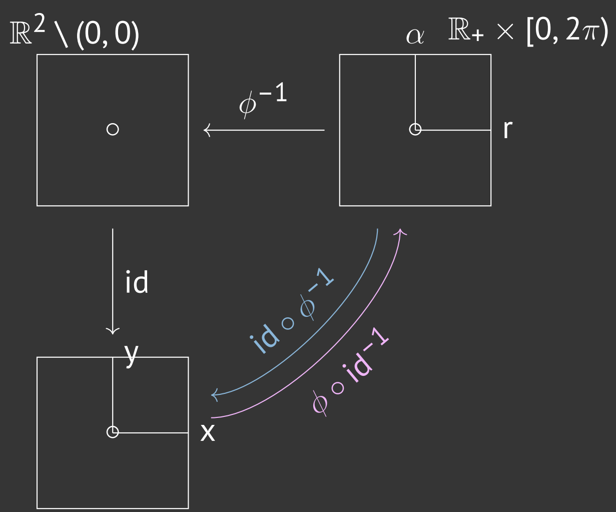
ZADANIE 7.

Uzasadnij, że lokalnie wokół każdego punktu $(x, y) \neq (0, 0)$ *współrzędne biegunowe na* $\mathbb{R}^2$ *są zgodne ze współrzędnymi kartezjańskimi.*

Po pierwsze, co rozumiemy przez współrzędne? To są odwzorowania w $\mathbb{R}^2$, parametryzacje naszej rozmaitości. W tym przypadku kartezjańskie współrzędne to będzie dla nas tak naprawdę funkcja id. Popatrzymy też na ϕ, czyli przejście ze współrzędnych biegunowych do współrzędnych kartezjańskich zadane wzorem:

$$\phi(\alpha, r) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Aby obie te współrzędne były zgodne, potrzebujemy, żeby kolorowe strzałki były funkcjami gładkimi (bo jest to odpowiedni $id \circ \phi^{-1}$ i $\phi \circ id^{-1}$).



Ciągłość funkcji $\phi \circ id^{-1}$ jest jasna ze wzoru na ϕ. Wystarczy teraz pokazać, że ϕ^{-1} jest gładkie. Wiemy, że jeśli Jakobian funkcji nie zeruje się w pewnym punkcie, to na jego otoczeniu funkcja jest odwracalna i ta odwrotność też będzie gładka, bo ϕ_1 takie było.

$$D_\phi(\alpha, r) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{bmatrix} = r > 0.$$

Z zadania tego możemy wyciągnąć wniosek, że mapami możemy zadać więcej niż jedną strukturę na rozmaitości.

ZADANIE 8.

Pokaż, że współrzędne geograficzne na sferze S^2 (określone na dopełnieniu biegunów i jednego z południków) są zgodne ze standardową strukturą na S^2. Wskazówka: skorzystaj z parametryzacji równania sfery z użyciem współrzędnych geograficznych.

Czy współrzędne geograficzne to to samo co współrzędne sferyczne?

To zadanie wygląda syfnie jakoś, idę dalej

ZADANIE 9.

Uzasadnić, że zgodność atlasów jest relacją symetryczną i przechodnią.

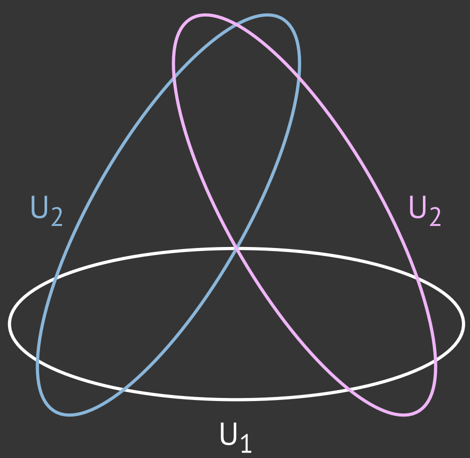
Niech $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ będą atlasami na rozmaitości M.

Symetryczność:

Pokazanie symetryczności relacji zgodności atlasów sprowadza się do wzięcia dwóch map: $(U_1, \phi_1) \in \mathscr{A}_1$ i $(U_2, \phi_2) \in \mathscr{A}_2$ i stwierdzeniu, że jeśli (U_1, ϕ_1) jest zgodna z (U_2, ϕ_2) (czyli po porównaniu wszystkich $\mathscr{A}_1$ zgodny z $\mathscr{A}_2$), to $\phi_1\phi_2^{-1}$ oraz $\phi_2\phi_1^{-1}$ są gładkie. No ale to samo, jeśli przestawimy indeksy, czyli (U_2, ϕ_2) jest zgodne z (U_1, ϕ_1) ($\mathscr{A}_2$ jest zgodny z $\mathscr{A}_1$).

Przechodniość:

Tutaj kusiłoby wziąć dowolne trzy mapy: (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) i (U_3, ϕ_3) odpowiednio z $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ i powiedzieć, że śmiga, ale w taki sposób ignorujemy dziedziny poszczególnych ϕ_i. To znaczy, może zajść coś takiego:



I wtedy dziedziny np $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_1\phi_3^{-1}$ są rozłączne.

ZADANIE 10.

Uzasadnij, że każdy atlas $\mathscr{A}$ na rozmaitości M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym (złożonym ze wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$).

Z poprzedniego zadania wiemy, że relacja zgodności atlasów $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze wszystkich atlasów danej rozmaitości i klasami równoważności są wszystkie atlasy zgodne z reprezentantem. Chcę pokazać, że dla każdej klasy istnieje atlas, który zawiera wszystkie pozostałe.

Niech $\mathscr{A}$ będzie atlasem na M i popatrzmy na $[\mathscr{A}] = \Sigma$, czyli wszystkie atlasy z nim zgodne. Postuluję, że zbiór

$$A = \bigcup_{b \in \Sigma} b$$

jest atlasem maksymalnym z Σ zawierającym $\mathscr{A}$.

To, że $\mathscr{A} \subseteq A$ jest oczywiste: $\mathscr{A}$ pojawia się jako element sumy którą jest A. To, że A jest atlasem też jest jasne: każdy atlas z sumy pokrywa nam całe M, a ponieważ wszystkie atlasy z Σ są zgodne, to mamy, że jeśli wszystkie wsadzimy w jeden worek, to też dostaniemy atlas złożony z map zgodnych.

A jest jedynym atlasem maksymalnym, bo wyjęcie z niego jakiejkolwiek mapy (czyli wyjęcie atlasów, które ją zawierają), będzie równoznaczne z niezawieraniem przez A wszystkich zgodnych map.

ZADANIE 11.

Uzasadnij, że produkt $M \times N$ rozmaitości topologicznych jest rozmaitością topologiczną. Zakładając, że M i N są rozmaitościami gładkimi, opisz naturalny atlas definiujący strukturę gładką na produkcie (i sprawdź, że mapy są gładko zgodne).

1. Hausdorffowość

Trywialne, bo jeśli mam dwa punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_i \in M, y_i \in N$, to mam jakieś zbiory otwarte $x_i \in U_i, y_i \in V_i$ takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Mam, że $U_i \times V_i$ jest zbiorem otwartym i

$$(x_i, y_i) \in U_i \times V_i$$

$$U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = \emptyset.$$

2. Ma przeliczalną bazę

Odmawiam. Trywialne.

3. Lokalna euklidesowość

Weźmy punkcik $(x, y) \in M \times N$. Wiem, że $x \in M$ ma otoczenie $x \in U$ takie, że $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem. Tak samo dla $y \in N$ jest $\psi : V \to \overline{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Rozważmy teraz odwzorowanie $\heartsuit : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$ dane wzorem:

$$\heartsuit(a, b) = \begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(b) \end{pmatrix}$$

to znaczy pierwsze n współrzędnych jest zarezerwowanych dla współrzędnych $\phi(a)$, a później do samego dołu mamy $\psi(b)$.

Ciągłość $\heartsuit$ jest trywialna. Wiem, że ϕ, ψ mają ciągłe funkcje odwrotne, jak to jest z $\heartsuit$?

$$\heartsuit^{-1}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}) = (\phi^{-1}(a_1, \dots, a_n), \psi^{-1}(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}))$$

wygląda jak dobrze zdefiniowana, ciągła funkcja odwrotna. Hence $\heartsuit$ jest homeomorfizmem.

Szukanie atlasu

Niech $\mathscr{M}$ będzie atlasem na M, a $\mathscr{N}$ będzie atlasem na N. Twierdzę, że na $M \times N$ mogę opisać atlas

$$\mathscr{A} = \{(U \times V, \phi \times \psi) \ : \ (U, \phi) \in \mathscr{M}, (V, \psi) \in \mathscr{N}\},$$

gdzie $\phi \times \psi$ to funkcja jak ♡ wyżej.

ONI TUTAJ JAKIEŚ JAKOBIANY SZUKAJA

$$D(\phi_1\phi_2^{-1} \times \psi_1\psi_2^{-1}) = \begin{bmatrix} D(\phi_1\phi_2^{-1} & 0 \\ 0 & D\psi_1\psi_2^{-1}) \end{bmatrix}$$

ZADANIE 12.

Znajdź gładki atlas na $\mathbb{R}^1$ niezgodny ze standardowym. Zrób to samo dla S^1.

Mamy $\mathbb{R}^1$ jako potęgę rozmaitość i $\mathbb{R}$ jako jej model. Funkcja z $\phi_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ będzie mapą taką, że dla $x \in \mathbb{R}^1$ $\phi_1(x) = \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$. Nie jest to zgodne, bo dla $\phi_2 = id$ mapy nie są zgodne.

Warto sobie sprawdzić, że $\sqrt[3]{x}$ jest dyfeomorfizmem.

Całkiem ściśle wypadałoby jeszcze pokazać, że ta mapa sama w sobie zadaje atlas, ale nam się nie chce.

Dla S^1 chcemy ten kawałek nieróżniczkowalny mapy $\sqrt[3]{x}$ wkleić w S^1. Bierzemy wykres funkcji biegunowych dla S^1.

ZADANIE 13.

Uzasadnij, że dla $k \geq 1$ nie istnieje c^k-dyfeomorfizm pomiędzy otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ gdy $n \neq m$. Pozwoli to określić pojęcie wymiaru gładkiej rozmaitości w sposób niezależny od topologicznego (znacznie trudniejszego) twierdzenia o nieistnieniu homeomorfizmu pomiędzy otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Pokażemy, że nie istnieje C^1 dyfeomorfizm $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ dla $n \neq m$.

Ponieważ dyfeomorfizm musi mieć odwrotność, to $f^{-1} : \Omega \to O$. Możemy założyć, że $m < n$. Pokażemy, że funkcja C^1 i "na" nie jest $1-1$. Weźmy $x \in O$, wtedy wiemy, że $\ker(Df(x)) \geq 1$, bo jeśli mamy operator liniowy $T : V \to W$ i $\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\mathrm{Im} T)$.

Zdefiniujmy $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ i $F(x) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_m)$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, że jeśli F jest bijekcją na otoczeniu x, to dla małego h

$$f(x_1, \ldots, f_m, x_{m+1})$$

Rozwiązanie dużo prostsze: $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$, czyli stosując chain rule

$$Did_{\mathbb{R}^n} = D(f^{-1} \circ f) = Df^{-1} \cdot Df$$

stąd $m \geq n$

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^m}$$

a tutaj $n \geq m$.

ZADANIE 15.

Niech M będzie rozmaitością gładką, $p \in M$ ustalonym punktem zaś $f : M \to \mathbb{R}$ funkcją rzeczywistą na M. Uzasadnij, że jednokrotna różniczkowalność funkcji $f \circ \phi^{-1}$ w punkcie $\phi(p)$ nie zależy od wyboru mapy (U, ϕ) zawierającej p (tzn. takiej, że $p \in U$). Oznacza to, że jednokrotna różniczkowalność w punkcie jest dobrze określonym pojęciem dla funkcji rzeczywistych na rozmaitości gładkiej.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\phi_1^{-1}(\phi_1(p)+h) - f\phi_1^{-1}(p)}{h} = c \text{ istnieje}$$

Rysuneczek się przydałby i powiedzieć, że złożenie funkcji gładkich jest różniczkowalne.

ZADANIE 17.

Mówimy, że funkcja wielu zmiennych ma w pewnym punkcie pochodną zerową, gdy odpowiedni funkcjonał liniowy przybliżający funkcję na otoczeniu tego punktu zadany przez pochodne cząstkowe jest zerowy. Pokaż, że zerowość i niezerowość pochodnej funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $p \in M$ *nie zależy od wyboru mapy. Pokaż też, że w każdym punkcie* p *rozmaitości* M*, w którym funkcja gładka* $f : M \to \mathbb{R}$ *osiąga ekstremum lokalne, pochodna tej funkcji jest zerowa.*

Weźmy sobie dowolny punkt $p \in M$ i niech $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ będą dwoma mapami zawierającymi p. Niech f' będzie funkcjonałem liniowym zawierającym pochodne cząstkowe f.

ZADANIE 20.

Pokaż, że brzeg ∂M *jest domknięty w* M.

$$\partial M = \{p \in M \;:\; (\forall\, (U_\alpha, \phi_\alpha))\; \phi_\alpha(p) \in \partial H^n\}$$

Może odwrotnie? Pokażę, że $\mathrm{Int}(M) = M \setminus \partial M$ jest otwarte?

Definicja Int(M) to jest, że każdy punkt z Int(M) przechodzi na punkt w $\mathrm{Int}(H^n)$, czyli na górną półpłaszczyznę $\mathbb{R}^n$. Ale to jest zbiór otwarty, to znaczy dla $p \in \mathrm{Int}(M)$ $\phi(p)$ ma otwarte otoczenie, czyli z faktu, że ϕ jest homeomorfizmem, p musi mieć otwarte otoczenie $p \in U_p \subseteq M$. Czyli każdy punkt z Int(M) ma otwarte otoczenie. Dlaczego to tnie się pusto z ∂M? Bo dowolny inny punkt z U_p też jest homeomorficzne z czymś z $\mathrm{Int}(H^n)$ (obcięcie homeo.), więc należy do Int(M) a nie do brzegu.