Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 5

Weronika Jakimowicz

Exercise 1. Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?

NIE, ale σ-ciało jest zawsze λ-układem.

Popatrzmy sobie na przestrzeń rzucania dwa razy monetą. Niech $A = \{(O, O), (O, R)\}$, a $\mathfrak{L}$ będzie zbiorem zdarzeń niezależnych od A (zamkniętość na sumy i różnice już troszkę była na poprzednich listach, więc nie rozpisuję). Poniższe zbiory są na przykład w takim $\mathfrak{L}$:

$$\{(O, O), (R, R)\} \quad \{(O, O), (R, O)\}.$$

Gdyby $\mathfrak{L}$ było σ-ciałem, to suma powyższych zdarzeń, czyli $\{(O, O), (R, R), (R, O)\}$, należałaby do $\mathfrak{L}$. Tak ewidentnie nie jest, bo $\mathbb{P}$ przekroju wynosi $\frac{1}{4}$, a iloczyn $\mathbb{P}$ to $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

Exercise 2. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina

$$\mathfrak{L} = \{A \in Bor(\mathbb{R}) \ : \ \mu_X(A) = \mu_Y(A)\}$$

jest λ-układem.

- $\mathbb{R} \in \mathfrak{L}$ jest dość oczywista, bo $\mu_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}] = 1 = \mathbb{P}[Y \in \mathbb{R}] = \mu_Y(\mathbb{R})$.
- $A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathfrak{L}$

  Teraz bierzemy $A, B \in \mathfrak{L}$, czyli $\mu_X(A) = \mu_Y(A)$ i $\mu_X(B) = \mu_Y(B)$ i BSO $A \subseteq B$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mu_X(B \setminus A) = \mathbb{P}\left[X \in B \setminus A\right] &= \mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[X \in A] = \\ &= \mathbb{P}[Y \in B] - \mathbb{P}[Y \in A] = \mathbb{P}\left[Y \in B \setminus A\right] = \mu_Y(B \setminus A)\end{aligned}$$

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \implies \bigcup A_i \in \mathfrak{L}$

$$\mu_X(\bigcup A_i) = \mathbb{P}\left[X \in \bigcup A_i\right] = \lim_N \mathbb{P}\left[X \in \bigcup_1^N A_i\right] = \lim_N \mathbb{P}[X \in A_N] =$$

$$\lim_N \mathbb{P}[Y \in A_N] = \lim_N \mathbb{P}\left[Y \in \bigcup_1^N A_i\right] = \mathbb{P}\left[Y \in \bigcup A_i\right] = \mu_Y(\bigcup A_i)$$