

ZADANIE 1.

Pokaż, że $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ jeśli m, n są względnie pierwsze.

Założmy, że m, n są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkcy:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

ZADANIE 2.

Niech A będzie pierścieniem, α ideałem, a M A -modułem. Pokaż, że $(A/\alpha) \otimes_A M$ jest izomorficzne do $M/\alpha M$. [Stensoruj ciąg dokładny $0 \rightarrow \alpha \rightarrow A \rightarrow A/\alpha \rightarrow 0$ z M]

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\alpha \rightarrow A \rightarrow A/\alpha \rightarrow 0$$

i jakiś losowy A -moduł M , to

$$\alpha \otimes M \rightarrow A \otimes M \rightarrow A/\alpha \otimes M \rightarrow 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebicie, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm $\text{Coker}(f) = M/f(M') \cong M''$ (f to pierwsza funkcja, a myśki lecą $M' \rightarrow M \rightarrow M''$.)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja $\alpha \rightarrow A$? To jest identyczność na α lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\alpha \otimes M \cong (A \otimes M)/(\alpha \otimes M) \cong AM/\alpha M = M/\alpha M$$

ZADANIE 3.

Niech A będzie pierścieniem lokalnym, M, N skończenie generowanymi A -modułami. Udowodnij, że $M \otimes N = 0$ wtedy $M = 0$ lub $N = 0$.

[Niech \mathfrak{m} będzie ideałem maksymalnym, $k = A/\mathfrak{m}$ będzie residue field (to jest ciało zrobione przez wytenegowanie z tym tym). Niech $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że $M_k = 0 \implies M = 0$. Ale $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$ or $N_k = 0$, since M_k, N_k są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \xrightarrow{(*)} M_k \otimes_k N_k = 0 \xrightarrow{(\heartsuit)} M_k = 0 \vee N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$$(*) \quad k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) = 0$$

Jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to $(k \otimes_A M) \otimes_A N = 0$, czyli $k \otimes_A M$

A to to jest raczej proste, bo jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to tym bardziej $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$ a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$.

(♡) $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \vee N_k = 0$? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na N.

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAAAAA – zapytać jak się zmienia to nad czym tensorujemy

Chwila, bo $0 = k \otimes_A (M \otimes_A N) = (k \otimes_A M) \otimes_A N$

ZADANIE 4.

Niech M_i ($i \in I$) będzie dowolną rodziną A -modułów i niech M będzie ich sumą prostą. Pokaż, że M jest płaski \iff każdy M_i jest płaski

Mamy funktor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ i on jest na kategorii A -modułów i homomorfizmów. Jeśli T_N jest dokładny, czyli tensorowanie z N przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy N jest flat A -modułem.

\Leftarrow pójdzie chyba z faktu, że $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

\implies

Wiem, że jeśli mam ciąg dokładny

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$$

dla dowolnych N_i , to wtedy tensorowanie przez M zachowuje dokładność, tzn ciąg

$$0 \rightarrow N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M \rightarrow N_3 \otimes M \rightarrow 0$$

jest nadal dokładny.

Co by się stało, jeśli któraś współrzędna M nie jest flat? Wtedy mogłam N wybrać tak, żeby

$$0 \rightarrow N_1 \otimes M_i \rightarrow N_2 \otimes M_i \rightarrow N_3 \otimes M_i \rightarrow 0$$

nie było dokładne, czyli tutaj psuje się iniekcja

$$f_1 : N_1 \otimes M_i \rightarrow N_2 \otimes M_i$$

No dobra, ale ja mogę zapisać sobie

$$M = M_i \bigoplus_{j \neq i} M_j$$

i zrobić

$$F_1 : N_1 \otimes (M_i \bigoplus M_j) \rightarrow N_2 \otimes (M_i \bigoplus M_j)$$

czyli coś typu $n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto n_2 \otimes (m_i, m)$, ale mam też izomorfizmy

$$n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_1, m_i) \otimes (n_1, m)$$

$$n_2 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_2, m_i) \otimes (n_2, m)$$

no i tak jakby iniekcyjność F_1 jest psuta przez brak iniekcyjności w f_1 , czyli sprzeczność? Bo przecież $F_1 = f_1 \otimes F'$ dla jakiejś ładnej iniekcji F' .

ZADANIE 5.

Niech $A[X]$ będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem A . Pokaż, że $A[X]$ jest płaską A -algebrą.

No jak dla mnie to $A[X]$ to jest suma prosta $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A x^n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ i $A[X]$ to moduł wolny. Ah, no i teraz korzystam z tego, że $A \otimes M = M$ i śmiga.

ZADANIE 6.

Dla dowolnego A -modułu, niech $M[X]$ będzie oznaczało zbiór wszystkich wielomianów w x o współczynnikach z M , to znaczy wyrażenia formy

$$m_0 + m_1x + \dots + x_r x^r$$

Zdefiniuj iloczyn elementu $A[X]$ z elementem $M[X]$ w oczywisty sposób, pokaż że $M[X]$ jest $A[X]$ -modułem. Pokaż, że $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Jak to leciało dla A -modułu? $a, b \in A, x, y \in M$

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$1x = x$$

Czy ja chce brać sobie $w, v \in M[X]$ oraz $p, r \in A[X]$ i robić zwykłe mnożenie wielomianów? Chyba tak XD

$$\begin{aligned} p(w + v) &= \left(\sum p_i x^i \right) \left(\sum w_i x^i + \sum v_i x^i \right) = \left(\sum p_i x^i \right) \left(\sum (w_i + v_i) x^i \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j=k} p_i (w_j + v_j) x^k \right) = \sum \left(\sum p_i w_j x^k + \sum p_i v_j x^k \right) = \\ &= \sum \sum p_i w_j x^k + \sum \sum p_i v_j x^k = pw + pv \end{aligned}$$

I reszty sprawdzania to mi się nie chce.

Homomorfizm na

$$f : M[X] \rightarrow A[X] \otimes_A M$$

$$f\left(\sum m_j x^j\right) = \sum (x^j \otimes m_j)$$

jest 1 – 1, bo każdy wielomian jest unikalny ze względu na współczynniki przy kolejnych potęgach, bla bla bla. Widać. Nawet mi się nie chce tego pisać ładnie

To teraz w drugą stronę jest też dość prosty

$$g : A[X] \otimes_A M \rightarrow M[X]$$

$$g\left(\left(\sum a_i x^i\right) \otimes m\right) = \sum a_i m x^i$$

ZADANIE 7.

Niech \mathfrak{p} będzie ideałem pierwszym w A . Pokaż, że $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym w $A[X]$. Czy jeśli \mathfrak{m} jest ideałem pierwszym w A , to $\mathfrak{m}[X]$ jest ideałem maksymalnym w $A[X]$?

Z poprzedniego zadania wiem, że $\mathfrak{p}[X] \cong A[X] \otimes_A \mathfrak{p}$, bo każdy ideał jest A -modułem.

Czy mogę określić sobie homomorfizm (ewaluację w $x = 1$)

$$f : A[X] \rightarrow A$$

$$f(\sum a_i x^i) = \sum a_i$$

i wtedy $f^{-1}[p]$ jest całością $p[X]$ jest ideałem pierwszym jako przeciwobraz ideału pierwszego przez homomorfizm.

Alternatywnie

$$(A[X])/(p[X]) \cong (A/p)[X]$$

w pierwszym zadaniu z poprzedniego rozdziału pokazywaliśmy, że $f \in A[X]$ jest dzielnikiem zera $\iff af = 0$ dla pewnego $a \in A \setminus \{0\}$, czyli \iff w A są dzielniki zera. Ale w (A/p) dzielników zera nie ma, bo wszystkie są w p który to wyrzuciliśmy, więc śmiga.

ZADANIE 9.

TO WYPADAŁOBY ZROBIĆ, ALE NIEEE CHCEEE MIII SIEEEE

ZADANIE 10.

Niech A będzie pierścieniem i α ideałem zawartym w radykalne Jacobsona. Niech M będzie A -modułem, a N niech będzie skończenie generowanym A -modułem. Niech $u : M \rightarrow N$ będzie homomorfizmem. Pokaż, że jeżeli indukowany homomorfizm $\bar{u} : M/\alpha M \rightarrow N/\alpha N$ jest surjektywny, to również u taki jest.

Najpierw rysunek:

$$\begin{array}{ccccc} M/\alpha M & \xrightarrow{\bar{u}} & N/\alpha N & \longrightarrow & \text{Coker}(\bar{u}) = 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ M \otimes A/\alpha & \xrightarrow{u \otimes 1} & N \otimes A/\alpha & \longrightarrow & 0 = ??? = \text{Coker}(u) \otimes A/\alpha \end{array}$$

$$M \xrightarrow{u} N \longrightarrow \text{Coker}(u)$$

No i to jest tak, że to co jest w ??? jest izomorficzne z $\text{Coker}(\bar{u})$, bo no izomorfizm w dół mi nie popsuje $\text{Coker}(\bar{u})$, które było równe 0. Czyli $??? = 0$. Z drugiej strony, to co jest w ??? jest równe $\text{Coker}(u) \otimes A/\alpha$. Skoro N było skończenie generowane, to takie jest też $\text{Coker}(u)$, bo przecież wychodzi z N . Czyli mam, że

$$0 = \text{Coker}(u) \otimes A/\alpha \cong \text{Coker}(u)/\alpha \text{Coker}(u)$$

i z tego wynika, że $\text{Coker}(u) = \alpha \text{Coker}(u)$ i z lematu Nakayamy wiem, że $\text{Coker}(u) = 0$.

Nieskończenie generowany moduł, który nie spełnia lematu Nakayamy. Wyzwanie: znaleźć pierścień R , moduł M i ideał α taki, że $M = \alpha M$ i $M \neq 0$

Mam pierścień $k[x_1, \dots, x_n, \dots]$

ZADANIE 11.

Niech A będzie pierścieniem $\neq 0$. Pokaż, że $A^n \cong A^m \implies m = n$.

[Niech \mathfrak{m} będzie ideałem maksymalnym w A i niech $\phi : A^n \rightarrow A^m$ będzie izomorfizmem. Wtedy $1 \otimes \phi : (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n \rightarrow (A/\mathfrak{m}) \otimes A^m$ jest izomorfizmem pomiędzy przestrzeniami liniowymi wymiaru m i n nad ciałem $k = A/\mathfrak{m}$. Czyli $m = n$.]

- Jeżeli $\phi : A^m \rightarrow A^n$ jest surjekcją, to $m \geq n$
- Czy jeżeli $\phi : A^m \rightarrow A^n$ jest iniekcją, to $m \leq n$?

Mamy $A^m \cong A^n$ i $m \triangleleft A$.

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\cong} & A^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A/m)^n & \xrightarrow{\cong} & (A/m)^m \end{array}$$

i to niżej to jest przestrzeń liniowa, korzystamy z faktu dobrej określoności wymiaru takich przestrzeni.

Na surjekcję to działa, ale przy iniekcji niekoniecznie to się przenosi.

Zakładamy nie wprost, że $m > n$ i mamy strzałkę $\phi : A^m \rightarrow A^n$. Będziemy uzasadniać, że ona ma nietrywialne jądro.

$$\begin{array}{ccccc} A^m & \xrightarrow{\quad} & A^n & \hookrightarrow & A^m \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & \psi & & & \end{array}$$

Niech M będzie modułem z A^k . i $\psi \in \text{End}(A^m)$. Mamy, że dla $a_i \in A$

$$\psi^k + \dots + a_1 \psi^{k-1} + \dots + a_k \text{id}_{A^m} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{\quad} & A^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & M \end{array}$$

ZADANIE 12.

Niech M będzie skończenie generowanym A -modułem i $\phi : M \rightarrow A^n$ będzie surjektywnym homomorfizmem. Pokaż, że $\ker(\phi)$ jest skończenie generowany.

[Niech e_1, \dots, e_n będzie bazą A^n i wybierzmy $u_i \in M$ takie, że $\phi(u_i) = e_i$. Pokaż, że M jest sumą prostą $\ker(\phi)$ i podmodułów generowanych przez u_1, \dots, u_n .

Korzystamy ze wskazówki, czyli te u_i istnieją tak jak chcemy. Niech $m \in M$, wtedy

$$\phi(m) = \sum a_i e_i \implies m - \sum a_i u_i \in \ker(\phi)$$

Czyli $m \in M$ to jest suma czegoś z $\langle u_i \rangle$ i czegoś z $\ker(\phi)$.

Z tego wnioskujemy, że $\ker(\phi) \cong M / \langle u_i \rangle$ i my mówimy, że to jest skończenie generowane, bo jest suriekcją z M w to coś.

ZADANIE 13

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie homomorfizmem pierścieni i niech N będzie B -modułem. Patrzenie na N jako na A -moduł poprzez restrykcję skalarów daje nam B -moduł $N_B = B \otimes_A N$. Pokaż, że homomorfizm $g : N \rightarrow N_B$ taki, że $y \mapsto 1 \otimes y$ jest iniekcją i że $g(N)$ jest składnikiem sumy N_B (czyli $N_B = g(N) \oplus C$ dla pewnego C).

[Zdefiniuj $p : N_B \rightarrow N$ przez $p(b \otimes y) = by$ i pokaż, że $N_B = \text{Im}(g) \oplus \ker(p)$.]

To, że g jest iniekcją to raczej widać. Bo wpp.

$$g(y) = 1 \otimes y = 1 \otimes y' = g(y')$$

ale $y \neq y'$, czyli $1 \otimes y \neq 1 \otimes y'$.

Definiuję p tak jak mi każą. Po pierwsze, czym jest $\ker(p)$? Na pewno będzie się w tym zawierać $\ker(\phi)$ i jeszcze te b , dla których $by = 0$.

Weźmy sobie dowolny element $n \in N_B$, wtedy $n = b \otimes n'$.

Jeżeli $bn' \neq 0$

Jeżeli $bn' \neq 0$, to mogę powiedzieć, że to jest $b(1n') = bp(g(n'))$. Wpp. $b \otimes n' \in \ker(p)$.