G. KARCH & SZ. CYGAN & M. TADEJ

"Trying to solve [differential] equations is a youthful aberration that you will soon grow out of." Stwierdzenie słynnego matematyka na wykładzie w Cambridge University.

Proste równania pierwszego rzędu

Zadanie 1. Rozwiąż równania o rozdzielonych zmiennych:

a) $\sqrt{y^2+1} = tyy'$, b) $ty' + y = y^2$, c) $\sqrt{2y-1} = y'$.

Zadanie 2. Rozwiąż równania liniowe:

a) $y' + y\cos t = 0$, c) $y' + t^2 y = t^2$, e) $y' + y = te^t$.

b) $y' + t^2 y = 1$, d) $y' + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2}$,

Zadanie 3. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe:

$$y' + \sqrt{1+t^2}\,y = 0,\ y(0) = \sqrt{5}; \qquad y' + ty = 1 + t,\ y(3/2) = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź funkcję $f = f(t)$ w równaniu $fy' + t^2 + y = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 5. Pokaż, że zagadnienie $y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.

Zadanie 6. Pokaż, że równanie $ty' + ay = f(t)$, gdzie $a > 0$, $\lim_{t\to 0} f(t) = b$, ma jedyne rozwiązanie ograniczone dla $t \to 0$. Zbadaj przypadek $a < 0$.

Zadanie 7. Zakładamy, że f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$. Pokaż, że równanie $y' + y = f(t)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t)$ ograniczone **na całym na** $\mathbb{R}$. Pokaż, że jeżeli założymy, że f jest funkcją okresową, to rozwiązanie y też jest funkcją okresową.

Zadanie 8. Pokaż, że każda krzywa całkowa równania $x' = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}$ ma poziome asymptoty.

Zadanie 9. Równanie postaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(\frac{y}{t})$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy *równaniem jednorodnym*. Pokaż, że równanie tego typu sprowadza się przez zamianę zmiennych $v(t) = \frac{y(t)}{t}$ do równania $t(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) + v = f(v)$. Znajdź rozwiązanie ogólne. Rozwiąż równania:

a) $2y + t - ty' = 0$, b) $ty' = y - te^{y/t}$, c) $ty' = y\cos\left(\log\frac{y}{t}\right)$.

Zadanie 10. Równanie postaci $y' + a(t)y = b(t)x^m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, nazywamy *równaniem Bernoulliego*. Pokaż, że równanie tego typu sprowadza się przez zamianę zmiennych $z(t) = y(t)^{1-m}$ do równania liniowego. Znajdź rozwiązanie ogólne. Rozwiąż równania:

a) $ty' + y = y^2\log t$, b) $y' = ty + t^3y^2$.

Zadanie 11. Spadek kamienia pod wpływem siły grawitacji, z uwzględnieniem oporu powietrza, jest opisany równaniem

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2, \ k > 0.$$

Pokaż, że po długim czasie porusza się on z prędkością graniczną, tzn. $\lim_{t\to\infty} x'(t) = -(g/k)^{1/2}$.

Zadanie 12. Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili t można opisać równaniem Verhulsta

$$M'(t) = aM(t) - bM^2(t)$$

(dla populacji ludzkiej z dobrym przybliżeniem $a = 0,029$, $b = 2,941 \cdot 10^{-12}$). Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} M(t) = a/b$. Określ, dla jakiego t funkcja $M'(t)$ osiąga maksimum.

Równania w postaci różniczek zupełnych

Zadanie 13. Rozwiąż równania

a) $2ty \,\mathrm{d}t + (t^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$,

b) $e^{-y}\,\mathrm{d}t - (2y + te^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$,

c) $\left(t - y\cos\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}t + t\cos\frac{y}{t}\,\mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 14. W podanych równaniach dobierz stałą a lub funkcję $f(t)$ tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

a) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$, b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$, c) $y^2\sin t + yf(t)y' = 0$.

Zadanie 15. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $fy' + t^2 + y = 0$ jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 16. Scałkuj równania metodą czynnika całkującego:

a) $\left(\frac{t}{y} + 1\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{t}{y} - 1\right)\mathrm{d}y = 0$,

b) $(t^2 + y)\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}y = 0$,

c) $(y + t^2)\,\mathrm{d}y + (t - ty)\,\mathrm{d}t = 0$,

d) $ty^2\,\mathrm{d}t - (t^2y - t)\,\mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 17. Uzasadnij, że równanie $M(t) + N(y)y' = 0$ o zmiennych rozdzielonych jest zupełne. Uzasadnij, że równanie liniowe niejednorodne $y' + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź jego czynnik całkujący.

Zadanie 18. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x,y) = \frac{1}{xy}$, $\mu_2(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ są czynnikami całkującymi równania

$$y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.