Lista 6

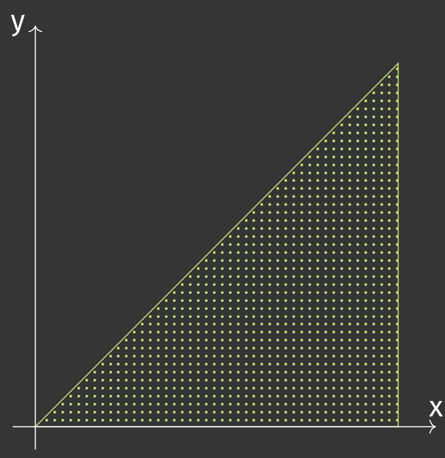
Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Weronika Jakimowicz

Zadanie 1. *Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x, y) = C(x + y)$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź wartość C. Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Mamy dane

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$



i w pierwszej kolejności pytamy o wartość zmiennej C. Wiemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1,$$

a ponieważ my żyjemy w świecie trójkąta pod $y = x$, to mamy:

$$1 = \int_0^1 \int_0^x C(x+y)dydx = C\int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2})dx = C(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$$

czyli z moich bardzo precyzyjnych kalkulacji wynika, że $C = 2$.

Teraz pora na rozkłady brzegowe.

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}\left[(X,Y) \in A \times \mathbb{R}\right] = \int_{A\times\mathbb{R}} f(x,y)dydx = \int_A \int_{\mathbb{R}} 2(x+y)dydx =$$
$$= \int_A \int_0^x 2(x+y)dydx = \int_A 3x^2 dx$$

$$\mathbb{P}[Y \in B] = \mathbb{P}\left[(X,Y) \in \mathbb{R} \times B\right] = \int_{\mathbb{R}\times B} f(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}} \int_B f(x,y)dydx = \int_B \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_B \int_y^1 2(x+y)dxdy = \int_B [1 + 2y - 3y^2]dy$$

Na pytanie, czy są to zmienne niezależne odpowiadamy patrząc na gęstości tych dwóch zmiennych losowych. Żeby były niezależne, musiałoby zachodzić

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Tutaj mamy

$$f_X(x)f_Y(y) = 3x^2(1 + 2y - 3y^2) \neq 2(x+y)$$

więc są bardzo zależne.

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Pokaż, że jeżeli X nie ma atomów, to $P(X = Y) = 0$.

Ponieważ X nie ma atomów, to zbiór $\{x : \mathbb{P}[X = x] > 0\} = \emptyset$.

Niech $\omega \in \Omega$ taki, że $X(\omega) = t = Y(\omega)$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Dla wygody, niech $T = \{t\}$. Ponieważ zdarzenia są niezależne, to:

$$\mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{P}[X \in T, Y \in T] = \mathbb{P}[X \in T]\mathbb{P}[Y \in T] = \mathbb{P}[X = t]\mathbb{P}[Y = t] = 0,$$

gdyż X jest bezatomowa.

Zadanie 7. okaż, że zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ o gęstościach $f_1, \dots, f_n$ są niezależne $\iff$ zmienna $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$