Algebra 2R, lista 5.

Zadania domowe: zasady jak zwykle. Dodatkowo: nie wolno oddawać ani deklarować rozwiązań podpunktów oznaczonych minusem $(-)$. p oznacza zawsze charakterystykę ciała.

1. Załóżmy, że $char(K) = p > 0$, $K \subset L$ jest rozszerzeniem algebraicznym ciał oraz $a \in L \setminus K$. Udowodnić, że a^{p^l} jest rozdzielczy nad K dla pewnego $l \geqslant 0$.

2. Niech $K \subset L \subset M \subset \hat{K}$, $[M : K] < \infty$ i $a \in L$. Udowodnić, że
(a) $Tr_{M/K}(a) = [M : L] \cdot Tr_{L/K}(a)$, $N_{M/K}(a) = N_{L/K}(a)^{[M:L]}$,
(b)* $Tr_{M/K} = Tr_{L/K} \circ Tr_{M/L}$, $N_{M/K} = N_{L/K} \circ N_{M/L}$.

3. Załóżmy, że $a \in L$ jest algebraiczny nad K, $L = K[a]$ i $W(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ jest wielomianem minimalnym a nad K. Udowodnić (wprost z definicji), że
(a) $Tr_{L/K}(a) = a_{n-1}$, $N_{L/K}(a) = (-1)^n a_0$,
(b) $W(X) = (-1)^n\varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ to wielomian charakterystyczny przekształcenia K-liniowego $f_a : L \to L$.

4. (a) Udowodnić, że automorfizm Frobeniusa $Fr(x) = x^p$. jest generatorem grupy $G(F(p^n)/F(p))$.
(b) Dla $m|n$, $F(p) \subset F(p^m) \subset F(p^n)$. Niech $\Phi : G(F(p^n)/F(p)) \to G(F(p^m)/F(p))$ będzie obcięciem do $F(p^n)$. Wskazać generator grupy $Ker(\Phi) = G(F(p^n)/F(p^m))$.
(c)* Wskazać element $g \in G(\widehat{F(p)}/F(p))$, który nie jest potęgą automorfizmu Frobeniusa. Udowodnić, że $Aut(\widehat{F(p)})$ ma moc $2^{\aleph_0}$.

5. Załóżmy, że $K \subseteq L_1, L_2 \subseteq \hat{K}$ i $K \subseteq L_i$ są (skończonymi) rozszerzeniami Galois.
(a)– Udowodnić, że rozszerzenie $K \subseteq L_1 \cdot L_2$ jest Galois.
(b) Udowodnić, że jeśli $G(L_1/K)$ i $G(L_2/K)$ są abelowe, to $G(L_1L_2/K)$ też jest abelowa.
(c) Gdy $L_1 \cap L_2 = K$, udowodnić, że $G(L_1L_2/L_1) \cong G(L_2/K)$[1]
(d) Gdy $L_1 \cap L_2 = K$, udowodnić, że $G(L_1L_2/K) \cong G(L_1/K) \times G(L_2/K)$.

6. Udowodnić, że każda grupa skończona G jest izomorficzna z grupą Galois pewnego rozszerzenia Galois.[2]

7. (a) Załóżmy, że L jest skończonym rozszerzeniem ciała $\mathbb{Q}$, stopnia nieparzystego. Udowodnić, że L jest izomorficzne nad $\mathbb{Q}$ z podciałem ciała $\mathbb{R}$.
(b)– Udowodnić, że każde skończone rozszerzenie $L \supset \mathbb{R}$ ma stopień będący

[1]wsk: rozważyć obcięcie do L_2. Wykorzystać związek między rzędem grupy Galois i stopniem rozszerzenia Galois.
[2]wsk: Na mocy tw. Cayleya możemy założyć, że $G < S(\{X_1, \ldots, X_n\})$ dla pewnego n. Rozważyć ciało $K(X_1, \ldots, X_n)$.

potęgą 2.[3]
(c)– Udowodnić, że $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte.[4]

8. * Udowodnić, że każda skończona grupa abelowa jest grupą Galois pewnego rozszerzenia $\mathbb{Q}$ (otwarty jest problem, czy można pominąć założenie abelowości, tzw. Odwrotny Problem Galois - Inverse Galois Problem).[5]

9. – Załóżmy, że A jest strukturą algebraiczną, $H < Aut(A)$ i $f \in Aut(A)$. Niech $A^H = \{a \in A : \forall g \in H,\ g(a) = a\}$. Udowodnić szczegółowo, że $f(A^H) = A^{H^f}$, gdzie $H^f = fHf^{-1}$ jest sprzężeniem H względem f.

[3]wsk: bso $L \supset \mathbb{R}$ jest Galois. Rozważyć 2-podgrupę Sylova $H < G(L/R)$ oraz rozszerzenie $L^H \supset \mathbb{R}$.

[4]wsk: jeśli nie, to istnieje rozszerzenie Galois $L \supset \mathbb{C}$ stopnia 2^n. $G(L/K)$ jest nilpotentna (jako 2-grupa), zawiera więc podgrupę H indeksu 2. Rozważyć L^H.

[5]wsk: udowodnić, że każda skończona grupa abelowa jest homomorficznym obrazem pewnej grupy Z_n^*. W tym celu użyć (bez dowodu) twierdzenia Dedekinda, że w każdym ciągu arytmetycznym jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.