

ZADANIE 18

Z psychologicznych powodów, czasem wygodniej jest oznaczać ideał pierwszy pierścienia A literami x, y jeśli myślimy o nich jako o punkcie $X = \text{Spec}(A)$. Kiedy myślimy o x jako o ideale pierwszym A , oznaczamy go przez p_x (oczywiście jest to ta sama rzecz). Pokaż, że

(i) zbiór $\{x\}$ jest domknięty w $\text{Spec}(A) \iff p_x$ jest maksymalny

\Leftarrow

Jeśli p_x jest ideałem maksymalnym, to $\{x\} = V(p_x)$, gdyż żaden inny ideał pierwszy nie zawiera p_x . My definiowaliśmy $V(E)$ jako zbiory domknięte, więc $\{x\}$ też taki jest.

\Rightarrow

Wiem, że $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Czyli jest przekrojem pewnej rodziny domkniętych zbiorów bazowych

$$\{x\} = \bigcap_{i \in I} V(E_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} (E_i)\right)$$

ale jeśli taka suma zawiera się w jednym, jedynym ideale pierwszym, to jest on maksymalny.

(ii) $\overline{\{x\}} = V(p_x)$

\subseteq

Jest raczej prostym zawieraniem: $\overline{\{x\}}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $\{x\}$, a $V(p_x)$ z pewnością to spełnia.

\supseteq

Po pierwsze zauważmy, że

$$V(p_x) = \bigcap_{E \subseteq p_x} V(E) = V\left(\bigcup_{E \subseteq p_x} V(E)\right),$$

bo to są wszystkie te ideały pierwsze, które zawierają jakiś podzbiór p_x , czyli obcinamy te mniejsze podzbiory p_x w trakcie brania przekroju.

Wiemy, że $\bigcap_{E \subseteq p_x} V(E)$ jest zbiorem domkniętym. Wiemy, że $x \in \bigcap V(E)$, czyli dostajemy, że $V(p_x)$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających x , czyli jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym x , czyli domknięciem x .

(iii) $y \in \overline{\{x\}} \iff p_x \subseteq p_y$

\Leftarrow

Niech $x, y \in X$ takie, że $p_x \subseteq p_y$. Wówczas, $x \in V(E) \implies y \in V(E)$. Ponieważ $\overline{\{x\}}$ jest przekrojem zbiorów $V(E_i)$, który zawiera x , to w szczególności każdy z tych zbiorów zawiera również y , stąd $y \in \overline{\{x\}}$.

\Rightarrow

Trywialne z (ii).

(iv) X jest T_0 -przestrzenią (jeśli x, y są rozróżnialnymi punktami X , to albo istnieje otoczenie x które nie zawiera y , albo istnieje otoczenie y , które nie zawiera x).

Weźmy dowolne punkty $x, y \in X$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $p_x \subseteq p_y$ (lub $p_y \subseteq p_x$, ale WLOG pierwsza wersja)

Wtedy $x \in X \setminus V(p_y)$, które jest zbiorem otwartym takim, że $y \notin X \setminus V(p_y)$.

2. $p_x \not\subseteq p_y$ i $p_y \not\subseteq p_x$

Wtedy $y \notin \overline{\{x\}}$ i $x \notin \overline{\{y\}}$. Czyli $y \in X \setminus \{x\}$ jest otwartym zbiorem zawierającym y ale niezawierającym x .

ZADANIE 19.

Przestrzeń topologiczna X jest nieredukowalna, jeśli $X \neq \emptyset$ i jeśli każda para niepustych otwartych podzbiorów X się przecina (równoważnie, każdy niepusty podzbiór otwarty jest gęsty w X). Pokaż, że $\text{Spec}(A)$ jest nieredukowalny \iff nilradykał A jest ideałem pierwszym.

\implies

Chcę mieć punkt, którego dopełnienie jest wszystkim.

\impliedby

Niech r będzie nilradykałem pierścienia A i niech r będzie ideałem pierwszym. Weźmy dowolne $a_1, a_2 \in A$ i rozpatrzmy $U_1 = V(a_1)^c$, $U_2 = V(a_2)^c$.

ZADANIE 20

Niech X będzie przestrzenią topologiczną

(i) Jeśli Y jest nieredukowalną podprzestrzenią X , wtedy domknięcie \bar{Y} w X jest nieredukowalne.

Założmy nie wprost, że \bar{Y} nie jest nieredukowalna. Wtedy istnieją $U, V \subseteq \bar{Y}$ takie, że $U \cap V = \emptyset$. Ale zbiór $U \cap Y$ jest albo pusty albo jest zbiorem otwartym w Y . Tak samo dla $V \cap Y$. To znaczy, że $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ co jest sprzeczne z nieredukowalnością Y .

(ii) Każda nieredukowalna podprzestrzeń X jest zawarta w pewnej nieredukowalnej podprzestrzeni X .

Niech S będzie zbiorem nieredukowalnych podprzestrzeni X . Rozważmy łańcuch

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$$

podprzestrzeni z S . Niech $Y = \bigcup Y_i$. Musimy pokazać, że $Y \in S$, czyli Y jest nieredukowalny.

Niech $U, V \subseteq Y$. Wtedy istnieje i takie, że $U, V \subseteq Y_i$. Ponieważ Y_i jest nieredukowalna, to $U \cap V \neq \emptyset$. W takim razie każde dwa zbiory otwarte z Y tną się niepusto, a więc Y jest nieredukowalne.

Wystarczy użyć lematu Zorna dla zbioru $S_A = \{Y \subseteq X : Y \text{ nieredukowalna i } A \subseteq Y\}$.

(iii) Maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie X są domknięte i pokrywają X . Nazywamy je składowe nieredukowalne X . Jakie są składowe nieredukowalne przestrzeni Hausdorffa?

Niech $M \subseteq X$ będzie maksymalną podprzestrzenią nieredukowalną X . Domkniętość M wynika wprost z (ii). Gdyby M nie było domknięte, to $M \subsetneq \bar{M}$, a \bar{M} też jest nieredukowalne i mamy sprzeczność z maksymalnością M .

Dlaczego pokrywają? Bo dla każdego $\{x\}$, $x \in X$ możemy rozpatrzyć zbiór wszystkich nieredukowalnych zbiorów takich, że $\{x\} \subseteq A$ i w ten sposób znajdziemy maksymalne zbiory nieredukowalne zawierające każdy element X , czyli pokrywające X .

W Hausdorffie możemy każde dwa punkty oddzielić dwoma rozłącznymi otwartymi otoczeniami, więc maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie to singletony. I to właśnie przypadek, który mnie natchnął do wytłumaczenia jak pokryć X .

(iv) Jeśli A jest pierścieniem i $X = \text{Spec}(A)$, wtedy składowe nieredukowalne X to zbiory domknięte $V(p)$, gdzie p to najmniejsza zbiory pierwsze A .

ZADANIE 21

Niech $\phi : A \rightarrow B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $X = \text{Spec}(A)$ i $Y = \text{Spec}(B)$. Jeśli $\mathfrak{q} \in Y$, to $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ jest ideałem pierwszym w A , w szczególności punktem X . Z tego powodu ϕ indukuje przekształcenie $\phi^* : Y \rightarrow X$. Pokaż, że

(i) Jeśli $\mathfrak{f} \in A$, wtedy $\phi^{*-1}(X_{\mathfrak{f}}) = Y_{\phi(\mathfrak{f})}$ i dlatego ϕ^* jest ciągłe.

$$\phi^{*-1}(X_{\mathfrak{f}}) = \{y \in Y : (\mathfrak{f}) \subsetneq \phi^*(y)\} = \{y \in Y : (\mathfrak{f}) \subsetneq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y : \phi(\mathfrak{f}) \subseteq y\} = Y_{\phi(\mathfrak{f})}$$

(ii) Jeśli \mathfrak{a} jest ideałem A , wtedy $\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$

\mathfrak{a}^e to rozszerzenie obrazu $\phi(\mathfrak{a})$ do ideału w B .

$$\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = \{y \in Y : \mathfrak{a} \subseteq \phi^*(y)\} = \{y \in Y : \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y : \phi(\mathfrak{a}) \subseteq y\} = V(\phi(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$$

Ta ostatnia równość z jakiegoś poprzedniego zadanka, bo wtedy mam, że $V(E) = V((E))$ i to jest to samo.

(iii) Jeśli \mathfrak{b} jest ideałem B , wtedy $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$

$$\begin{aligned} \phi^*(V(\mathfrak{b})) &= \{\phi^{-1}(y) : \mathfrak{b} \subseteq y \in Y\} = \{x \in X : \phi(x) = y \supseteq \mathfrak{b}\} = \\ &= \{x \in X : \mathfrak{b} \subseteq \phi(x)\}^* = \{x \in X : \phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq x\} = V(\phi^{-1}(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^c) \end{aligned}$$

(iv) Jeżeli ϕ jest suriekcją, wtedy ϕ^* jest homeomorfizmem z Y w zamknięty zbiór $V(\ker(\phi))$ X . (W szczególności $\text{Spec}(A)$ i $\text{Spec}(A/\mathfrak{R})$, gdzie \mathfrak{R} to nilradykał A , są naturalnie homeomorficzne.)

(v) Jeśli ϕ jest 1-1, to $\phi^*(Y)$ jest gęste w X . Dokładniej, $\phi^*(Y)$ jest gęste w $X \iff \ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R} \implies$

$$Y = V(0) = V(\phi(\ker(\phi)))$$

Z gęstości Y mam:

$$V(0) = V(\mathfrak{R}) = X = \overline{\phi^*(Y)} = \overline{\phi^*(V(\phi(\ker(\phi))))} = V(\phi^{-1}(\phi(\ker(\phi)))) = V(\ker(\phi))$$

A ponieważ \mathfrak{R} jest ideałem pierwszym, to $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R}$

\Leftarrow

Wiem, że $\ker(\phi) \subseteq \mathfrak{R}$. No to wtedy

$$V((\ker(\phi))) = X$$

No to wtedy

$$V(\phi(\ker(\phi))) = V((0)) = Y$$

$$\begin{aligned} \phi^*(Y) &= \phi^*(V(\phi(\ker(\phi)))) = \{\phi^{-1}(y) : \phi(\ker(\phi)) \subseteq y \in Y\} = \\ &= \{x \in X : \phi(\ker(\phi)) \subseteq \phi(x)\} = V(\ker(\phi)) = X \end{aligned}$$

(vi) Niech $\psi : B \rightarrow C$ będzie kolejnym homomorfizmem pierścieni. Wtedy $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$$

$$\text{Spec}(a) \xleftarrow{\phi^*} \text{Spec}(B) \xleftarrow{\psi^*} \text{Spec}(C)$$

$$\begin{aligned}
\phi^* \circ \psi^*(c) &= \phi^*(\psi^{-1}(c)) = \\
&= \phi^{-1}(\psi^{-1}(c)) = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}(c) = \\
&= (\psi \circ \phi)^{-1}(c) = (\phi \circ \phi)^*(c)
\end{aligned}$$

ZADANIE 22.

Niech $A = \prod_{i=1}^n A_i$ będzie produktem prostym pierścieni A_i . Pokaż, że $\text{Spec}(A)$ jest rozłączną sumą otwartych (i zamkniętych) podzbiorów X_i , gdzie X_i jest kanonicznie homeomorficzna z $\text{Spec}(A_i)$

To widać. Kanoniczny homeomorfizm to będzie identyczność na jednej współrzędnej i resztę wyrzucamy.

Teraz niech A będzie dowolnym pierścieniem. Pokaż, że następujące są równoważne:

(i) $X = \text{Spec}(A)$ jest niespójna

(ii) $A \cong A_1 \times A_2$ gdzie żaden z A_1, A_2 nie jest pierścieniem zerowym.

(iii) A zawiera idempotent $\neq 0, 1$

(i) \implies (ii)

Skoro X jest niespójna, to jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów $V(a), V(b)$. Mam też, że te zbiory są rozłączne, czyli

$$\emptyset = V(a) \cap V(b) = V(a \cup b)$$

ale $a \cup b \subseteq a + b$, które w tym wypadku wyszłoby (1) , bo

$$V(1) = \emptyset = V(a \cup b) \supseteq V(a + b)$$

Czyli mam tutaj a, b wzajemnie pierwsze, czyli $\phi : A \rightarrow A/a \times A/b$ jest izomorfizmem pierścieni.

(ii) \implies (iii)

$$\begin{aligned}
x &= (1, 0) \\
x^2 &= (1^2, 0^2)
\end{aligned}$$

(iii) \implies (i)

Jeśli przestrzeń jest niespójna, to $A \cup B = X$, ale jeśli weźmiemy dopełnienie, to mamy

$$\emptyset = X^c = (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$X = \emptyset^c = (A \cap B)^c = A^c \cap B^c,$$

czyli mogę równoważnie szukać dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych sumujących się do całości.

Mamy idempotent, chcemy pokazać, że wtedy da się rozdzielić A na sumę dwóch rozłącznych. Niech e będzie idempotentem i niech $e' = 1 - e$. Wtedy

$$e' + e = 1$$

$$e'e = (1 - e)e = e - e^2 = 0$$

$$X = V(0) = V(e'e) = V(e') \cup V(e)$$

$$\emptyset = V(1) = V(e' + e)$$

ZADANIE 23.

Niech A będzie pierścieniem booleowskim i niech $X = \text{Spec}(A)$

(i) Dla każdego $f \in A$ zbiór X_f jest otwarty i zamknięty w X .

To wynika z poprzedniego zadania punkt (i) i (iii)? Bo wtedy mamy nietrywialny idempotent, a więc X jest niespójne, więc wszystkie zbiory są otwarte i domknięte na raz? Ale spróbuję bez takiego odwołania się do poprzednich zadań?

To, że X_f jest otwarty to mamy z definicji. Sprawdźmy, dlaczego jest domknięty.

1. Każdy skończenie generowany ideał w A jest pierwszy, bo jeśli x, y generowały, to $x+y+xy$ generuje ten ideał, a każdy pierwszy jest maksymalny (bo quotient jest ciałem o dwóch elementach.)

Co mi to daje? To mi daje tyle, że $V(f)$ jest jednym punktem, a ja chce żeby był otwarty i domknięty na raz. Czyli muszę go wyzerować jakoś i wymaksować. Ale to w sumie jest tak jak wyżej, że zbiory otwarte to

$$V(x) \cap V(1-x) \subseteq V(x+1-x) = V(1) = \emptyset$$

czyli są otwarte i domknięte i tak samo zbiory otwarte, czyli sumy tych otwartych, to

$$V(x) \cup V(1-x) = V((x)(1-x)) = V(x-x^2) = V(0) = A$$

czyli tak samo.

(ii) Niech $f_1, \dots, f_n \in A$. Pokaż, że $X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n} = X_f$ dla pewnego $f \in A$.

$$X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n} = (V(f_1) \cap \dots \cap V(f_n))^c = V((f_1, \dots, f_n))^c = V(f)^c = X_f$$

(iii)???

(iv) X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa

Zwarty wychodzi z poprzedniego, a Hausdorffa, czyli chce dwa punkty oddzielić dwoma rozłącznymi zbiorami.

Zwartą, bo całego tak jak w (ii)?

Hausdorffa, czyli trzeba wziąć dwa punkty, $x, y \in X$. No to wiem, że aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa

ZADANIE 26.

Niech A będzie pierścieniem. Podprzestrzeń $\text{Spec}(A)$ zawierająca ideały maksymalne z A , razem z indukowaną topologią, jest nazywanamaksymalnym spektrum A i oznaczamy ją $\text{Max}(A)$. Dla dowolnego pierścienia przemiennego nie ma to ładnych funktorowych własności (zad. 21) $\text{Spec}(A)$, bo odwrotny obraz ideału maksymalnego przez homomorfizm pierścieni nie musi być maksymalny.

Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa i niech $C(X)$ oznacza pierścień wszystkich ciągłych liniowych funkcji rzeczywistych z X . Dla każdego $x \in X$ niech \mathfrak{m}_x będzie zbiorem wszystkich $f \in C(X)$ takich, że $f(x) = 0$. Ideał \mathfrak{m}_x jest maksymalny, ponieważ jest jądrem pewnego suriektywnego homomorfizmu $C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, który mapuje $f \rightarrow f(x)$. Jeśli \bar{X} będzie oznaczało $\text{Max}(C(X))$, mamy wtedy mapę $\mu : X \rightarrow \bar{X}$ $x \mapsto \mathfrak{m}_x$.

Pokażemy, że μ jest homeomorfizmem między X w \bar{X} .

(i) Niech \mathfrak{m} będzie ideałem maksymalnym $C(X)$ i niech $V = V(\mathfrak{m})$ będzie zbiorem zawierającym wszystkie wspólne zera funkcji z \mathfrak{m}

$$V = \{x \in X : (\forall f \in \mathfrak{m}) f(x) = 0\}$$

Założ, że V jest pusty. Wtedy dla każdego $x \in X$ istnieje $f_x \in \mathfrak{m}$ takie, że $f_x(x) \neq 0$. Ponieważ f_x jest ciągłe, istnieje otwarte otoczenie $x \in U_x \subseteq X$ na którym f_x nie znika. Ze zwartości mamy skończoną liczbę takich sąsiedztw, nazwijmy je U_{x_1}, \dots, U_{x_n} pokrywających X . Niech

$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$$

ponieważ f nie znika w żadnym punkcie X , f jest odwracalne. Ale to jest sprzeczne z $f \in \mathfrak{m}$, stąd V nie jest pusty.

Niech x będzie punktem V . Wtedy $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x \implies \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, bo \mathfrak{m} jest maksymalny. Stąd μ jest surjekcją.

Czy ja mam potwierdzić, że μ jest suriekcją? To znaczy no to widać?

Znaczy tak, jeśli coś jest nieodwracalne, to jest zawarte w pewnym ideale maksymalnym a więc przejdzie na coś z \bar{X} . Jeśli coś jest odwracalne, to nie jest zawarte w żadnym ideale maksymalnym

No to że jest na to widac no

ideały max przejdą na siebie i pokryją \bar{X}

(ii) Z lematu Urysowa (to jest jedyny nietrywialny fakt potrzebny w tym argumencie) ciągła funkcja rozdziela punkty X . Stąd $x \neq y \implies \mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ i μ jest iniekcją.

Niech $x, y \in X$ i niech $f \in C(X)$ będzie funkcją je rozdzielającą.

(iii) Niech $f \in C(X)$, niech

$$U_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

i niech

$$\overline{U_f} = \{\mathfrak{m} \in \bar{X} : f \notin \mathfrak{m}\}$$

Pokaż, że $\mu(U_f) = \overline{U_f}$. Zbiory otwarte $U + f$ (odpowiednio $\overline{U_f}$) tworzą bazę topologii X (odpowiednio \bar{X}) i z tego powodu μ jest homeomorfizmem. Więc X można odtworzyć z pierścienia funkcji $C(X)$