ZADANIE 1.

Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

(a) $x(t) = \tan t$, $x' = 1 + x^2$ //YUP

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = x'$$

(b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$ //YUP

$$x'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$
$$tx' + x = \frac{t\cos t - \sin t}{t} + \frac{\sin t}{t} = \frac{t\cos t}{t} = \cos t$$

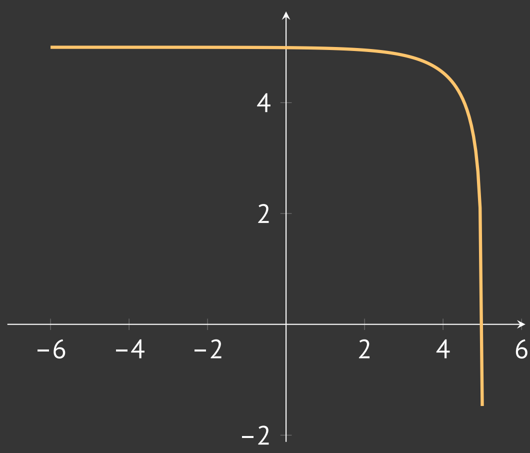
ZADANIE 2.

Znaleźć rozwiązania ogólne (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:

(a) $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$
$$e^{-y}dy = e^x dx$$
$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$
$$-e^{-y} = e^x + c$$
$$e^{-y} = c - e^x$$
$$\ln(e^{-y}) = \ln(c - e^x)$$
$$y = -\ln(c - e^x)$$

Niech $c = e^m$ dla pewnego m, bo wiadomo, że aby ta funkcja była gdziekolwiek określona, to $(c - e^x > 0)$ na pewnym przedziale, czyli $c > 0$. Rozważmy teraz dwa przypadki: $x < 0$ i $x \geq 0$. Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja będzie coraz bardziej zbliżać się do wartości m, bo e^x będzie dążyć do 0, ale nigdy go nie osiągnie. Dla $x \in [0, m)$ funkcja będzie maleć z $\lim_{x\to m} \ln(c - e^x) = -\infty$. Czyli wykres wygląda tak dla $m = 5$: (i tutaj użyję sobie paczuszki do rysowania grafów bo czemu nie XD)



(b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{y}$$

$$ydy = \sqrt{x}dx$$

$$\int ydy = \int \sqrt{x}dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$y = \sqrt{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c}$$

kurwa zajebiste to.