# Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 1. Zadanie 10.

*Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał w każdej z kieszeni po pudełku zapałek. Początkowo każde z nich zawierało* n *zapałek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapałki, sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapałkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie, gdy sięgał po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze* k *zapałek.*

---

Będziemy rozważać ciągi liter L i P, które to odpowiadają wyciąganiu zapałki odpowiednio z lewej lub prawej kieszeni. Ponieważ chcemy jedną kieszeń opróżnić całkowicie, a w drugiej zostawić dokładnie $k$ zapałek, to na pewno musimy dokonać $n + (n - k) = 2n - k$ ruchów. Dodatkowy ruch, czyli $2n - k + 1$ to sięgnięcie do opróżnionej w pewnym momencie wcześniej kieszeni.

Zacznijmy od policzenia sposobów, na które możemy opróżnić lewą kieszeń, a w prawej zostawić dokładnie $k$ zapałek. Sytuacja, gdy opróżniamy kieszeń prawą jest dokładnie symetryczna.

W istocie rzeczy nie interesuje nas, że teraz zawsze na końcu naszego ciągu długości $2n - k + 1$ musi stać L, a jedynie zastanawiamy się nad tym, co dzieje się na pierwszych $2n - k$ miejscach. Ustawmy najpierw $2n - k$ literek L w stały ciąg. Ponieważ ani nie mamy tylu zapałek w lewej kieszeni, ani też nie interesuje nas wyciąganie tylko z jednej kieszeni, chcemy zamienić część tych literek na literki P. Dokładniej, zamieniamy $n - k$ literek, co robimy na

$$\binom{2n-k}{n-k} = \binom{2n-k}{n}$$

sposobów. To jest część, do której doszliśmy na zajęciach.

Problem pojawił się, gdy zaczęliśmy liczyć moc zbioru $\Omega$, czyli liczby sposobów na wyciągniecie $2n - k$ zapałek ogółem. Mój wstępny pomysł to

$$|\Omega| = 2^{2n-k},$$

ale jest to zliczenie dokładnie wszystkich ciągów złożonych z L i P, bez względu na to, czy są one dozwolone. To znaczy, liczymy ciąg złożony tylko z literek P, a przecież nie może wyciągać więcej niż $n$ razy z prawej kieszeni, bo nic z pustego pudełka zapałek nie da się wyciągnąć.

Potrzebujemy więc policzyć ilość ciągów długości $2n - k$, w których każdy element pojawia się co najwyżej $n$ razy i co najmniej $n - k$ razy, bo np. wyciąganie tylko $n - k - 1$ zapałek z prawej kieszeni wymusi wyciągnięcie $n + 1$ zapałek z lewej, a tego nie możemy zrobić.

Zauważmy, że zbiór ciągów zawierających $n$ literek L i $n - k$ literek P jest rozłączny ze zbiorem ciągów, w których L pojawia się dokładnie $n - 1$ razy, a P - dokładnie $n - k + 1$ razy. Możemy więc zsumować ilość ciągów, gdzie L pojawia się dokładnie $n - i$ razy, a P dokładnie $n - k + i$ razy dla $i = 0, 1, \dots, k$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-k}{n-i}.$$

Tego, niestety, nie umiem sprowadzić do ładniejszej postaci. Wolfram również nie potrafi, to znaczy umie użyć hipergeometrycznej funkcji Gaussa, z którą nie miałam jeszcze przyjemności sie poznać.