G. KARCH & SZ. CYGAN & M. TADEJ

"Mając dwadzieścia lat, myślałem tylko o kochaniu.
Potem kochałem już tylko myśleć. "

Albert Einstein

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Zadanie 1. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego:

a) $y' = -y \quad y(0) = 1$, b) $y' = 2yt \quad y(0) = 1$, c) $y' = -y^2 \quad y(0) = 0$.

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego $x' = x^2$, $x(0) = 1$ na odcinku $[0, 2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$. Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.

Zadanie 3. Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y(0) = 0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t$, $y(0) = 0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 5. Niech $y(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$y(t) \leq L \int_{t_0}^{t} y(s)\, ds$$

na odcinku $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Udowodnij, że $y(t) = 0$ dla $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ (łatwiejsza wersja lematu Gronwalla). WSKAZÓWKA: Pokaż indukcyjnie, że $y(t) \leqslant c(L^n/n!)(t - t_0)^n$.

Zadanie 6. Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1 + y)$, $y(0) = -1$.

Zadanie 7. Zbadaj istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $y' = f(y, t)$ i $y(0) = 0$, gdzie

$$f(y,t) = \begin{cases} -1 & t \leq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 1 & t > 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Zadanie 8. Udowodnij, że równanie $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in C^1$, nie może mieć rozwiązań okresowych różnych od stałych.

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Zadanie 9. Udowodnij, że $\mathbb{R}^n$ z normami

a) euklidesową

b) taksówkową

są przestrzeniami Banacha.

Zadanie 10. Udowodnij, że zbiór

$$C^1([a,b]) = \{u \in C([a,b]) \ : \ u' \in C([a,b])\}$$

z normą $\|u\|_{1,\infty} = \max\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |u'(x)|$ jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 11. Ustal, dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, operator $F : C([a,b]) \to C([a,b])$ zadany wzorem

$$F(u)(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Zadanie 12. Znajdź $b > 0$ oraz domknięty podzbiór przestrzeni $C([0,b])$, na którym operator F zadany wzorem

$$F(u)(x) = 1 + \int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Zadanie 13. Zaproponuj warunki, dla których równanie

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

gdzie $u_0 \in C(\mathbb{R})$, ma jednoznaczne rozwiązanie $u \in C(\mathbb{R})$.

Zadanie 14. Dane są funkcje $u_0 \in C([0,1])$ oraz $K \in C([0,1] \times [0,1])$. Udowodnij, że jeżeli wartość $\|u_0\|_\infty$ jest dostatecznie mała, to równanie

$$u(x) = u_0(x) + \int_0^1 K(x,y)u^2(y)\,\mathrm{d}y$$

ma rozwiązanie w zbiorze $C([0,1])$.

Twierdzenie Peano

Zadanie 15. Udowodnić, że zagadnienie

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań na odcinku $[0,1]$.

Zadanie 16. Zbadaj ilość rozwiązań zagadnienia w zależności od wartości parametru a:

a) $y' = y^a, \;\; y(0) = 0,$

b) $y' = y\,|\log y|^a, \;\; x(0) = 0.$

Zadanie 17. Załóżmy, że zagadnienie

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

gdzie $f(t, y)$ jest funkcją ciągłą, na dwa różne rozwiązania na odcinku $[0, \alpha]$. Udowodnić, że zagadnienie to ma nieskończenie wiele rozwiązań na tym odcinku.

Zadanie 18. Załóżmy, że funkcja $f(y)$ jest ciągła. Wykazać, że wszystkie rozwiązania równania $y' = f(y)$ są monotoniczne.

Zadanie 19. Udowodnić, że jeżeli φ jest ciągła, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ dla $u > 0$ oraz istnieje $\varphi'(0)$, to całka

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)}$$

jest rozbieżna.

Zadanie 20. Badamy zagadnienie $y' = f(y),\ y(t_0) = y_0$, dla funkcji ciągłej $f = f(y)$. Udowodnij następujące fakty.

(a) Jeżeli $f = f(y)$ nie równa się zeru na przedziale (a, b), to zagadnienie ma dokładnie jedno rozwiązanie w pasie $a < y < b$ dane wzorem uwikłanym

$$t = t_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{f(s)}.$$

(b) Niech teraz $f(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a, b)$. Udowodnij, że jeśli całka $\int_{y_0}^{c} \frac{ds}{f(s)}$ jest rozbieżna, to przez każdy punkt pasa między prostymi $y = a$ i $y = b$ przechodzi jedna i tylko jedna krzywa całkowa. Dodatkowo, prosta $y = c$, która sama jest krzywą całkową, jest asymptotą wszystkich krzywych całkowych.

(c) Przy założeniu jak w (b), zbadaj zachowanie się krzywych całkowych równania $y' = f(y)$ jeżeli całka $\int_{y_0}^{c} \frac{ds}{f(s)}$ jest zbieżna.

Powtórzenie materiału z wykładu: Iteracje Picarda.

Twierdzenie 1. Funkcja $y = y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

wtedy i tylko wtedy gdy $y = y(t)$ jest rozwiązaniem równania całkowego

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Iteracje Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego () to ciąg funkcji $y_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, zdefiniowanych następująco

$$y_0(t) \equiv y_0, \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds.$$

Przykład. Ciąg iteracji Picarda dla zagadnienia $\frac{dy}{dt} = y,\ y(0) = 1$ ma postać $y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!}$.

Na wykładzie rozważano zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Sformułowano i udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. (Picarda-Lindelöfa) Załóżmy, że funkcje $f(t,y)$ i $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ są ciągłe w prostokącie

$$R = \{(t,y)\ :\ t_0 \le t \le t_0 + a,\ |y - y_0| \le b\}.$$

Obliczmy $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$ oraz $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.
Wtedy zagadnienie początkowe $\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t)$ na odcinku $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. Podobny wynik jest prawdziwy dla $t < t_0$.

Najważniejsze fakty z dowodu:

- Najpierw dowodzi się, że ciąg iteracji Picarda $y_n(t)$ zbiega jednostajnie do pewnej funkcji $y(t)$.
- Następnie przechodząc do granicy otrzymujemy, że funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania całkowego równoważnego zagadnieniu ().
- Aby udowodnić jednoznaczność rozwiązań postępujemy następująco. Zakładamy (nie wprost), że mamy dwa rozwiązania $y(t)$ i $\bar{y}(t)$ zagadnienia (). Definiujemy funkcję $w(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ i dowodzimy, że spełnia ona nierówność

  $$|w(t)| \le L \int_{t_0}^{t} |w(s)|\, ds$$

  dla pewnej stałej L. Aby udowodnić, że $w(t) \equiv 0$ na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$ stosujemy lemat Gronwalla.

Twierdzenie 3. (Lemat Gronwalla) Załóżmy, że funkcja $u(t)$ jest nieujemna na przedziale $[t_0, T]$ i spełnia na tym przedziale nierówność całkową

$$u(t) \le a + b \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds$$

dla wszyskich $t \in [t_0, T]$ i pewnych stałych $a \ge 0$ i $b > 0$. Wtedy zachodzi oszacowanie $u(t) \le a e^{b(t-t_0)}$.

Uwaga. W dowodzie jednoznaczności rozwiązań zagadnienia () stosujemy to twierdzenie z $a = 0$.