Algebra 2R, lista 2.

Zadanie domowe: Dowolne 3 zadania o numerach $\geqslant 3$. Każdy podpunkt liczy się jako odrębne zadanie. Z każdego zadania wolno oddac rozwiązanie $\leqslant 1$ podpunktu. Nie wolno oddawać rozwiązania podpunktu (b) w zad. 4. W rozwiązaniach wolno korzystać z zadań i podpunktów wcześniejszych, jak również z faktów podanych na wykładzie. Zadania oznaczane minusem nie sa omawiane na ćwiczeniach (chyba że studenci zechcą), nie należy ich też deklarować (nie dostaje się za nie nawet małych punktów).

1. – Załóżmy, że $f : K \to L$ jest niezerowym homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest $1-1$.

2. – (a) Załóżmy, że $char(K) = 0,\ f : Q \to K$,
$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n \cdot 1}{m \cdot 1}.$$
Udowodnić, że f jest poprawnie określone (nie zależy od przedstawienia liczby wymiernej w postaci ułamka $\frac{m}{n}$) i jest homomorfizmem ciał.
(b) Załóżmy, że $char(K) = p,\ f : Z_p \to K,\ f(n) = n \cdot 1$. Udowodnić, że f jest homomorfizmem.

3. Załóżmy, że $f : K \to K$ jest niezerowym endomorfizmem ciała K (np. funkcja Frobeniusa). Udowodnić, że $Fix(f) = \{x \in K : f(x) = x\}$ jest podciałem ciała K.

4. Załóżmy, że K jest ciałem skończonym, charakterystyki p.
(a) Udowodnić, że każdy wielomian nierozkładalny $f \in K[X]$ dzieli wielomian $W_n(X) = X^n - 1$ dla pewnego n niepodzielnego przez p. (wsk: udowodnić, że ciało rozkładu f jest skończone).
(b) Wywnioskować stąd (i z uwagi 3.3), że f w żadnym ciele $L \supseteq K$ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

5. (a) Udowodnić, że jeśli $K \subseteq L$ to ciała skończone, $|K| = p^m,\ |L| = p^n$, to $m|n$.
(b) Udowodnić, że każde ciało o p^n elementach zawiera dokładnie jedno podciało o p^m elementach, gdzie $m|n$.

6. Niech $F(p^n)$ będzie ciałem o p^n elementach. Z zad. 5 wynika, że
$$F(p) \subset F(p^2) \subset F(p^{3!}) \subset \cdots \subset F(p^{n!}) \subset \cdots$$
(po odpowiednich utożsamieniach ciał izomorficznych). Niech
$$F = \bigcup_{n>0} F(p^{n!}).$$
Udowodnić, że ciało F jest algebraicznie domknięte. (wsk: skorzystać z zadania 4).

7. Niech F oznacza ciało z zadania 6. Niech $f : F \to F$ będzie funkcją Frobeniusa (tzn. $f(x) = x^p$). Udowodnić, że f jest "na" (nazywa się wtedy automorfizmem Frobeniusa). Udowodnić, że $F(p^n) = Fix(f^n)$.

8. * W ciele F (z zad. 6) znaleźć $2^{\aleph_0}$ różnych podciał takich, że przekrój każdych dwóch jest skończony.

9. * Udowodnić, że różne podciała ciała F (z zad. 6) nie są izomorficzne. Czy ciało F ma nietrywialny automorfizm ?

10. – Sporządzić tabelki działań
(a) ciała 4-elementowego,
(b) ciała 8-elementowego.