Lista Zadań Nr **13** **Równania różniczkowe 1R** *25 maja 2021 r.*

G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

Zadanie 1. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Zbadaj liczbę rozwiązań zagadnienia w zależności od l. [i]

Zadanie 2. Dla jakich wartości λ zagadnienie

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 3. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych:

a) $u_x = u_y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $u(0, y) = e^y + e^{-2y}$;

b) $u_t = u_{xx} + u$ dla $x \in (0, 1)$, $t > 0$ oraz $u(x, 0) = \sin \pi x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Zadanie 4. Znajdź szereg Fouriera funkcji

a) $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$, b) $f(x) = |x|$ na $(-1, 1)$, c) $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$.

Zadanie 5. Udowodnij następującą zasadę porównawczą dla równania ciepła:
Jeżeli u i v są dwoma rozwiązaniami takimi, że $u \leq v$ dla $t = 0$ oraz dla $x = 0$ i dla $x = \ell$, to wówczas $u \leq v$ dla wszystkich $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq \ell$.

Zadanie 6. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania ciepła $u_t = u_{xx}$ w prostokącie $(0, 1) \times (0, T)$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = f(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Podaj postać rozwiązania dla $f(x) = 4x(1 - x)$.
Wykaż, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne dla $t > 0$, wykorzystując zbieżność jednostajną odpowiednich szeregów pochodnych.

Zadanie 7. Rozważamy równanie ciepła w odcinku $(0, 1)$ z warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$ i warunkiem początkowym $u(x, 0) = 4x(1 - x)$.

a) Udowodnij, że $0 \leq u(x, t) \leq 1$ dla wszystkich $t > 0$ i $0 < x < 1$.

b) Udowodnij, że $u(x, t) = u(1 - x, t)$ dla wszystkich $t \geq 0$ i $0 \leq x \leq 1$.

c) Udowodnij, że $\int_0^1 u^2(x, t)\, \mathrm{d}x$ jest ściśle malejącą funkcją t.

Porównaj powyższe fakty z ogólnymi własnościami równania ciepła

Zadanie 8. Rozważamy równanie ciepła na odcinku $(0, \ell)$ z warunkami brzegowymi typu Robina, tzn.

$$\begin{cases} u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = 0, \\ u_x(\ell, t) + a_\ell u(\ell, t) = 0. \end{cases}$$

Udowodnij używając metody energetycznej, że jeżli $a_0 > 0$ i $a_\ell > 0$, to $\int_0^\ell u^2(x, t)\; dx$ maleje jako funkcja t.

Zadanie 9. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = f(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x, 0) = 0$.
WNIOSEK: brak jednoznaczności rozwiązań.