

“Wszystkie zjawiska natury są tylko matematycznymi konsekwencjami niewielkiej liczby niewzruszonych praw.”

Pierre Simon de Laplace (1749–1827)

Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

a) $x(t) = \operatorname{tg} t$, $x' = 1 + x^2$, b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie różniczkowe na funkcję $y = y(x)$ postaci

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

nazywa się *równaniem o zmiennych rozdzielonych*. Oznaczmy przez F i G funkcje pierwotne: $F' = f$ i $G' = g$ (Uwaga: funkcje F i G są wyznaczone z dokładnością do stałej). Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$f(y)y' = g(x) \quad \text{czyli} \quad F(y)' = g(x) \quad \text{czyli} \quad F(y)' = G'(x).$$

Całkując równanie po prawej stronie dostajemy *równanie algebraiczne* na funkcję $y(x)$: $F(y) = G(x)$. Istnieje praktyczny ("inżynierski") sposób zapisywania powyższego rozumowania. Równanie $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$ przekształcamy formalnie do postaci $f(y) dy = g(x) dx$, a następnie dopisujemy całki:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx \quad \text{czyli} \quad F(y) = G(x).$$

Zadanie 2. Znaleźć *rozwiązania ogólne* (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C :

a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \sqrt{x}/y$, c) $y' = \sqrt{y}/x$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania następujących równań spełniających podany dodatkowy *warunek początkowy*: a) $y' = 2$, $y(0) = 2$, b) $y' = y/x$, $y(1) = 5$, c) $y' = -y^2 e^x$, $y(0) = 1/2$.

Zastosowania równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 4. Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ oznacza temperaturę czajnika w chwili t . Zakładamy, że $S(0) = 100^\circ\text{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C . Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła 60°C . Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę 25°C ?

Zadanie 5. Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzeniła plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotkę dowiedziało się 850 osób, przy założeniu że:

- Plotka rozprzestrzeniła się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę, oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki.
- Plotka rozprzestrzeniła się według prawa Gompertza: $y' = kye^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.

Zadanie 6. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^\circ\text{C}$. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^\circ\text{C}$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C . Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamięscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 7. (Ciąg dalszy zadania poprzedniego). Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^\circ\text{C}$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?