RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 4

1*. Zapoznaj się z dowodem twierdzenia Kołmogorowa (dowód można znaleźć np. w rozdziale C.4 [JS]).

2. Ola poszła do kasyna mając 100 złotych. Postanowiła grać tak długo aż albo zbankrutuje, albo osiągnie 500 złotych. W każdej pojedynczej grze może wygrać 10zł z prawdopodobieństwem $1/3$, przegrać 10zł z prawdopodobieństwem $1/2$ lub utrzymać swój stan posiadania z prawdopdobieństwem $1/6$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 Ola skończy grę w skończonym czasie.

3. Losujemy niezależnie nieskończenie wiele punktów z koła o promieniu 1 i środku $(0, 0)$. Dla jakich wartości ε z prawdopodobieństwem 1 w kole o promieniu ε i środku $(0, 0)$ znajdzie się nieskończenie wiele punktów?

4. Zdarzenia A_1, A_2, .. są niezależne i $\mathbb{P}(A_n) = p_n \in (0, 1)$. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A_n wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

5*. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, w której orzeł wypada w prawdopodobieństwem $p \geq 1/2$. Niech A_n oznacza zdarzenie, że pomiędzy rzutem 2^n a 2^{n+1} otrzymano ciąg n kolejnych orłów. Pokaż, że zdarzenia A_n z prawdopodobieństwem 1 zachodzą nieskończenie wiele razy.

6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i niech $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ będzie rozbiciem Ω (tzn. zbiory te są rozłączne i ich sumą jest Ω). Niech $Z(\omega) = X_i(\omega)$ dla $\omega \in B_i$. Uzasadnij, że Z jest zmienną losową.

7. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz funkcja $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Uzasadnij, że jeżeli $X^{-1}(a, b) \in \mathcal{F}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, to X jest zmienną losową.

8. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i funkcji $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, która nie jest zmienną losową.

9. Pokaż, że jeżeli X jest zmienną losową, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczona zmienna losowa X_ε (tzn. $|X_\varepsilon| < M$ dla pewnej stałej M) taka, że

$$\mathbb{P}[X \neq X_\varepsilon] \leq \varepsilon.$$

10. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest mierzalna, to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową. Wywnioskuj, że $X_1 + X_2$ oraz $X_1 \cdot X_2$ są zmiennymi losowymi. Uzasadnij, że $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\liminf_n X_n$, $\limsup_n X_n$ są również zmiennymi losowymi.

11. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t^2 & \text{dla } 0 \leq t < 1/2 \\ 1/4 & \text{dla } 1/2 \leq t < 4 \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}[X = 5]$, $\mathbb{P}[X = 4]$, $\mathbb{P}[1/3 < X \leq 5]$, $\mathbb{P}[0 < X < 1]$.

12. Niech X będzie zmienną losową o ciągłej dystrybuancie F. Pokaż, że $Y = F(X)$ jest zmienną losową (tzn. że jest mierzalna) o rozkładzie $U([0, 1])$.

13. Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$. Znajdź dystrybuanty i rozkłady zmiennych losowych $Y = (U + 1)/2$, $Y = U^2$, $Y = 1/(U + 2)$, $Y = \log(U + 1)$, $Y = |U|$.

14. a) Niech X będzie zmienna losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1, 1]$. Oblicz $\mathbb{P}[X > 0]$, $\mathbb{P}[-1/2 < X < 2]$, $\mathbb{P}[2X^2 - 1 > 0]$, $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Q}]$.

b) Rozwiąż to samo zadanie, ale przy założeniu, że X jest liczbą losową z przedziału $[-1, 1]$ o rozkładzie zadanym gęstością $f(x) = 2|x|$.

c) Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej z pkt b).

15. Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie p. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania a) parzystej liczby sukcesów; b) liczby sukcesów podzielnej przez 3.

16. Punkt x nazywamy punktem skokowym rozkładu μ na $\mathbb{R}$, gdy $\mu(\{x\}) > 0$.

a) Pokaż, że rozkład prawdopodobieństwa μ może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skokowych.

b) Czy zbiór punktów nieciągłości może mieć punkt skupienia?

c) Czy zbiór punktów nieciągłosci może być gęsty w $\mathbb{R}$?

17*. Skonstruuj przestrzeń probabilistyczną na której można określić wynik nieskończenie wielu niezależnych rzutów niesymetryczną monetą, tzn. monetą, w której orzeł wypada w prawdopodobieństwem $p \in (0, 1/2)$.