ZADANIE 1.

Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:

(a) $x(t) = \tan t$, $x' = 1 + x^2$ //YUP

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = x'$$

(b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, $tx' + x = \cos t$ //YUP

$$x'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

$$tx' + x = \frac{t\cos t - \sin t}{t} + \frac{\sin t}{t} = \frac{t\cos t}{t} = \cos t$$

ZADANIE 2.

Znaleźć rozwiązania ogólne (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C*) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych* C*:*

(a) $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$e^{-y}dy = e^x dx$$

$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$

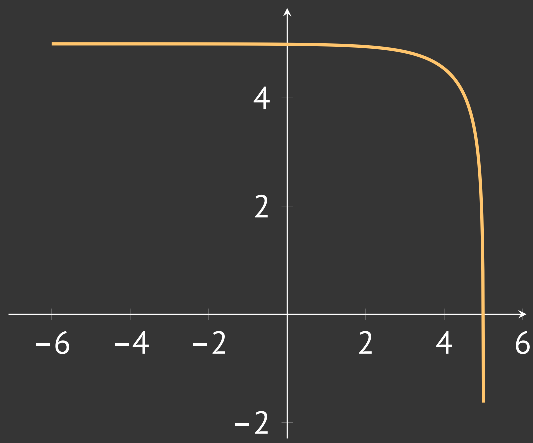
$$-e^{-y} = e^x + c$$

$$e^{-y} = c - e^x$$

$$\ln(e^{-y}) = \ln(c - e^x)$$

$$y = -\ln(c - e^x)$$

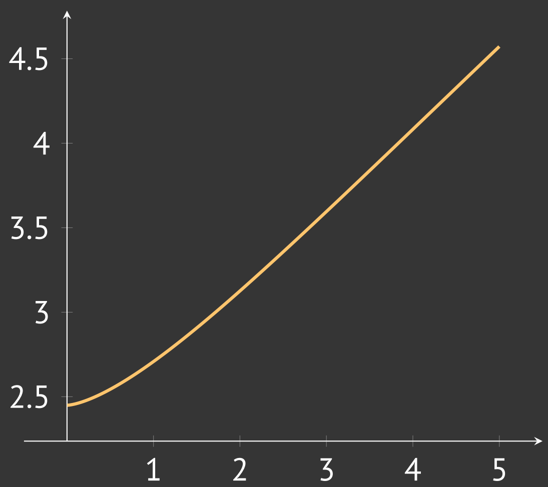
Niech $c = e^m$ dla pewnego m, bo wiadomo, że aby ta funkcja była gdziekolwiek określona, to $(c - e^x > 0)$ na pewnym przedziale, czyli $c > 0$. Rozważmy teraz dwa przypadki: $x < 0$ i $x \geq 0$. Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja będzie coraz bardziej zbliżać się do wartości m, bo e^x będzie dążyć do 0, ale nigdy go nie osiągnie. Dla $x \in [0, m)$ funkcja będzie maleć z $\lim_{x\to m} \ln(c - e^x) = -\infty$. Czyli wykres wygląda tak dla $m = 5$: (i tutaj użyję sobie paczuszki do rysowania grafów bo czemu nie XD)



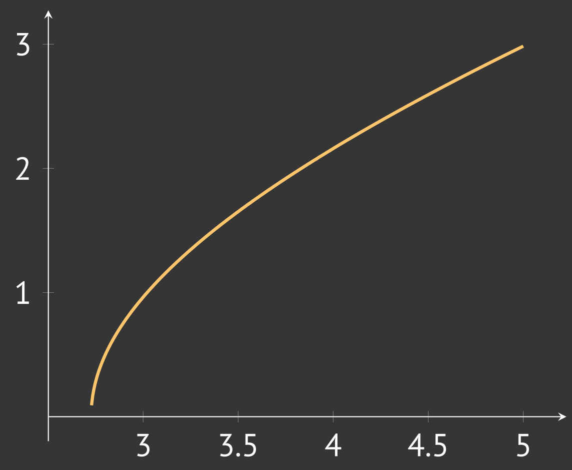
(b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{y}$$
$$ydy = \sqrt{x}dx$$
$$\int ydy = \int \sqrt{x}dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c}$$

W tym przypadku możemy mieć dodatnie i ujemne c, ale x musi być liczbą dodatnią, inaczej $x^{\frac{3}{2}}$ nie istnieje. Dla dodatniego c wiemy, że wartość w $x = 0$ będzie wynosić $\sqrt{c}$. Wtedy mamy funkcję wyglądającą jak:



Natomiast dla $c < 0$ wiemy, że będziemy ruszać gdzie graf się "zaczyna". To znaczy dla $x < \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ funkcja jest nieokreślona, a dla $x \geq \frac{3}{4}c^{\frac{2}{3}}$ wygląda troszkę jak funkcja pierwiastka 4-tego stopnia z x^3?



(c) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$2y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + c$$
$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$

Dla $c < 0$ to jakaś potężna okejka, a dla $c \geq 0$ to se leeeeci w górę. Już mi się nie chce rozrysowywać.

ZADANIE 4.

Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ *oznacza temperaturę czajnika w chwili* t. *Zakładamy, że* $S(0) = 100^oC$ *w temperaturze otoczenia* 20^oC. *Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła* 60^oC. *Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę* 25^oC*?*

Wiemy, że pochodna funkcji temperatury od czasu jest wprost proporcjonalna do różnicy w temperaturze:

$$\frac{dS}{dt} = a(S - 20).$$

Rozwiążmy to równanie

$$\frac{dS}{dt} = a(20 - S(t))$$
$$\frac{dS}{20 - S(t)} = adt$$
$$\int \frac{dS}{20 - S(t)} = \int adt$$
$$-\ln|20 - S(t)| = at + c$$
$$|20 - S(t)| = e^{-at-c}$$

Tutaj ciało stygnie, więc $S(t) > 20$, czyli

$$|20 - S(t)| = S(t) - 20.$$

Z treści zadania wiemy, że S(0) = 100, co po podstawieniu da nam wartość c:

$$\begin{aligned} 100 - 20 &= e^{-c} \\ 80 &= e^{-c} \\ \ln 80 &= -c \\ c &= -\ln 80 \end{aligned}$$

Dalej, podstawiając S(10) = 60 możemy poznać wartość a:

$$\begin{aligned} 60 - 20 &= e^{-10a+\ln 80} \\ 40 &= e^{-10a} \cdot 80 \\ \frac{1}{2} &= e^{-10a} \\ \ln\frac{1}{2} &= -10a \\ a &= \ln 2^{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Dostajemy wzór:

$$S(t) = 20 + e^{-t\ln 2^{\frac{1}{10}}+\ln 80}$$

po ilu minutach będziemy mieli temperaturę 25°C? Jeszu nie wiem i nie chce tego zmieniać tbh.

$$\begin{aligned} 25 - 20 &= e^{-ta-c} \\ \ln 5 &= -ta - c \\ \ln 5 + \ln 80 &= -ta \\ 10\ln 400 &= t\ln 2 \\ 10\ln 20^2 &= t\ln 2 \\ \ln 20^{20} &= t\ln 2 \end{aligned}$$

ZADANIE 5.

Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób. Założmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób, przy założeniu, że:

1. *Plotka rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki.*
2. *Plotka rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:* $y' = ke^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.

Wersja 1:

Będziemy modelować y(t), czyli ilość osób, które plotkę już usłyszały w zależności od czasu t. Wiemy, że prędkość rozprzestrzeniania się plotki, to znaczy y', jest wprost proporcjonalna do y(1000 − y). Rozwiążmy to cudeńko

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ay(1000 - y)\\
\frac{dy}{y(1000 - y)} &= adt\\
\int \frac{dy}{y(1000 - y)} &= \int adt\\
\frac{\ln y - \ln(1000 - y)}{1000} &= at + c\\
\ln \frac{y}{1000 - y} &= at + c\\
\frac{y}{1000 - y} &= e^{at+c}\\
y &= (1000 - y)e^{at+c}\\
y(1 + e^{at+c}) &= 1000e^{at+c}\\
y &= \frac{1000e^{at+c}}{1 + e^{at+c}}\\
y &= \frac{1000}{e^{-at-c} + 1}
\end{aligned}
$$

To teraz będzie podstawianko-sranko. Gdy $t = 0$ mamy $y = 5$, czyli

$$
\begin{aligned}
5 &= \frac{1000}{e^{-c} + 1}\\
e^{-c} + 1 &= 200\\
e^{-c} &= 199\\
-c &= \ln 1999\\
c &= -\ln 199
\end{aligned}
$$

natomiast, gdy $t = 1$, to $y = 10$, czyli

$$
\begin{aligned}
10 &= \frac{1000}{e^{-a+\ln 199} + 1}\\
e^{-a} \cdot 199 + 1 &= 100\\
e^{-a} &= \frac{99}{199}\\
-a &= \ln \frac{99}{199}\\
a &= \ln \frac{199}{99}
\end{aligned}
$$

Teraz chce rozwiązać

$$850 = \frac{1000}{e^{t \ln \frac{99}{199} + \ln 199} + 1}$$

$$199 \cdot \left(\frac{99}{199}\right)^t = \frac{1000}{850} - 1$$

$$\frac{99^t}{199^{t-1}} = \frac{3}{17}$$

$$99^t \cdot 17 = 3 \cdot 199^{t-1}$$

$$\ln(99^t \cdot 17) = \ln(3 \cdot 199^{t-1})$$

$$t \ln 99 + \ln 17 = \ln 3 + (t-1) \ln 199$$

$$t(\ln 99 - \ln 199) = \ln \frac{3}{199 \cdot 17}$$

$$t \ln \frac{99}{199} = \ln \frac{3}{199 \cdot 17}$$

Wersja 2:

Teraz chcemy rozwiązać równanie już nam dane:

$$\frac{dy}{dx} = ke^{-(73/520)t}$$

$$dy = ke^{-(73/520)t}dt$$

$$\int dy = \int ke^{-(73/520)t}dt$$

$$y = -\frac{520}{73}ke^{-(75/520)t} + c$$

To lecimy z podstawianiem:

$$\begin{cases} 5 = -\frac{520}{73}k + c \\ 10 = -\frac{520}{73}ke^{-73/520} + c \end{cases}$$

$$5 = -\frac{520}{73}k + \frac{520}{73}ke^{\frac{-73}{520}}$$

$$365 = k(520e^{-73/520} - 520)$$

$$\frac{365}{520e^{-73/520} - 520} = k$$

ZADANIE 6.

Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona 32.6^{o}C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła 31.4^{o}C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^{o}C. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo - Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut od miejsca morderstwa. Czy alibi jest niepodważalne?

Z prawa Newtona wiemy, że zmiana temperatury jest wprost proporcjonalna do różnicy między ciałem a jego otoczeniem, czyli z zadania 4 kradnę

$$\frac{dS}{dt} = a(S - 21)$$

$$\frac{dS}{S-21} = adt$$
$$\int \frac{dS}{S-21} = \int adt$$
$$-\ln|S-21| = at + c$$
$$|S-21| = e^{at+c}$$

To lecimy z podstawianiem. Chyba będzie mi najwygodniej mieć punkt $t = 0$ wtedy kiedy lekarz pomierzył temperaturę?

$$32.6 - 21 = 11.6 = e^{c}$$
$$\ln 11.6 = c$$

Czyli kiedy po godzinie usuwano ciało mamy:

$$31.4 - 21 = 10.4 = 11.6e^{60a}$$
$$\frac{10.4}{11.6} = 0.8966 = e^{60a}$$
$$\frac{\ln 0.8966}{60} = -0.00182 = a$$

Jaką temperaturę oczekujemy o 19:30? Czyli 50 min przed pierwszym pomiarem

$$11.6e^{-0.00182(-50)} + 21 = 33.705$$

Kiedy ziomeczek miał $36^{o}C$?

$$36 = 21 + 11.6e^{-0.00182t}$$
$$\frac{15}{11.6} = 1.2931 = e^{-0.00182t}$$
$$-\frac{\ln 1.2931}{0.00182} = 141.232 = t$$

Czyli około 2h 21 min przed pomiarem, czyli około godziny 18. Więc jeśli od razu uciekł to niezbyt?