

Rozmaite cierpienia

Spis treści

1	Definiowanie rozmaitości	3
1.1	Rozmaitość topologiczna	3
1.2	Mapy, współrzędne lokalne	4
1.3	Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)	6
1.4	Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej	10
1.5	Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu	10
1.6	Rozmaitość gładka z brzegiem	12
2	Rozkład jedności	15
2.1	Lokalnie skończone rozdrobnienie	15
2.2	Twierdzenie o rozkładzie jedności	17
3	Wektory styczne	19
3.1	Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna	19
3.2	Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$	20
3.3	Różniczka	21

1. Definiowanie rozmaitości

1.1. Rozmaitość topologiczna

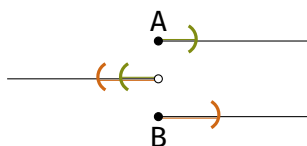
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n -wymiarową rozmaitością (n -rozmaitością) topologiczną, jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n , tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest posiadanie przez każdy punkt $p \in M$ otoczenia U takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$. [ćwiczenia]

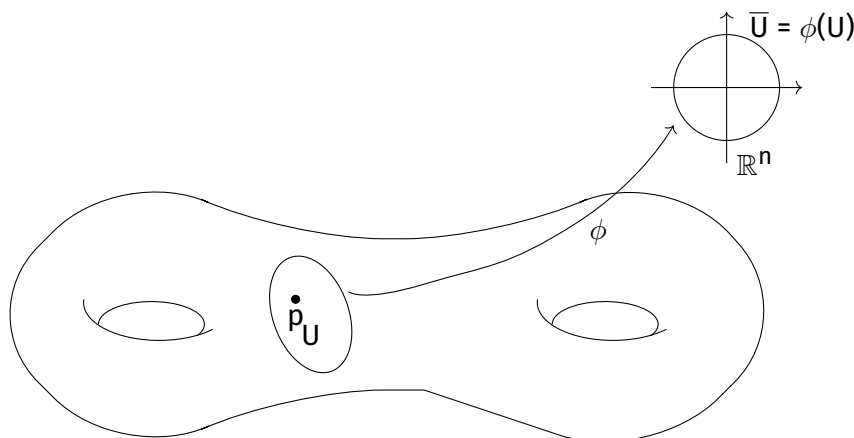
Hausdorffowość

Dzięki warunkowi Hausdorffowości wykluczone są np. patologie pokroju



gdzie punktów A i B nie da się rozdzielić za pomocą rozłącznych zbiorów otwartych.

Ogólniej, warunek ten mówi, że lokalnie topologiczne własności z \mathbb{R}^n przenoszą się na M przez homeomorfizmy, np dla podzbioru $U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$:



Dodatkowo, dla dowolnego zwanego $\bar{K} \subseteq \bar{U}$ jego odpowiednik na M , czyli $K = \phi^{-1}(\bar{K}) \subseteq U$, jest domknięty i zwarty [ćwiczenia]. Jeśli zaś \bar{K} jest zbiorem domknięty w \bar{U} , ale niezwanym, to nie zawsze K jest domknięty w M . Weźmy np. $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \mathbb{R}^n$ i zbiór domknięty $\bar{K} = \mathbb{R}^n$ (cała przestrzeń jest jednocześnie domknięta i otwarta). Wtedy $K = \phi^{-1}(\bar{K}) = U$ jest otwartym podzbiorem M mimo, że \bar{K} jest otwarte.

Skończone podzbiory rozmaitości będącej przestrzenią Hausdorffa są zawsze domknięte i co ważne, granice ciągów na rozmaitościach topologicznych są jednoznacznie określone.

Przeliczalna baza

Warunek przeliczalnej bazy został wprowadzony, by rozmaitości nie były "zbyt duże". Nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii \mathbb{R}^n nie może być rozmaitością. Warunek ten implikuje, że każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia], co jest nazywane **warunkiem Lindelöfa**.

Przeliczalność bazy implikuje również, że każda rozmaitość topologiczna jest wstępującą sumą zbiorów otwartych

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots,$$

które po domknięciu są nadal zawarte w niej. Pozwala ona również na włożenie M do \mathbb{R}^n dla odpowiednio dużego n . Czyli na przykład S^2 , sfera, ma naturalne włożenie w \mathbb{R}^3 pomimo lokalnej euklidesowości z \mathbb{R}^2 .

Rodzina \mathcal{X} podzbiorów M jest **lokalnie skończona**, jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie, które przecina się co najwyżej ze skończoną liczbą zbiorów z \mathcal{X} . Jeżeli M ma dwa pokrycia: \mathcal{U} i \mathcal{V} takie, że dla każdego $V \in \mathcal{V}$ znajdziemy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $V \subseteq U$, to \mathcal{V} jest **pokryciem włożonym/rozdrobnieniem** \mathcal{U} . Dzięki przeliczalności bazy M , każda rozmaitość jest **parazwarta**, czyli zawiera lokalnie skończone rozdrobnienie.

Lokalna euklidesowość

Twierdzenie 1.2. Twierdzenie Brouwer'a Dla $m \neq n$ otwarty podzbiór \mathbb{R}^n nie może być homeomorficzny z żadnym otwartym podzbiorem \mathbb{R}^m .

Z twierdzenia wyżej wynika, że liczba n jest przypisana do M jednoznacznie i nazywa się **wymiarem** M ($\dim(M) = n$). Jeśli wymiar rozmaitości M wynosi n , to nazywamy ją czasem **n -rozmaitością**.

Inne własności rozmaitości topologicznych:

- Każda rozmaitość ma przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów homeomorficznych z kulami w \mathbb{R}^n , których domknięcia są zbiorami zwartymi.
- Każda rozmaitość jest lokalnie spójna, tzn. ma bazę otwartych zbiorów łukowo spójnych.
- Rozmaitość jest spójna \iff jest łukowo spójna. Składowe spójności M są równe składowym łukowej spójności M .
- Każda rozmaitość jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie).

1.2. Mapy, współrzędne lokalne

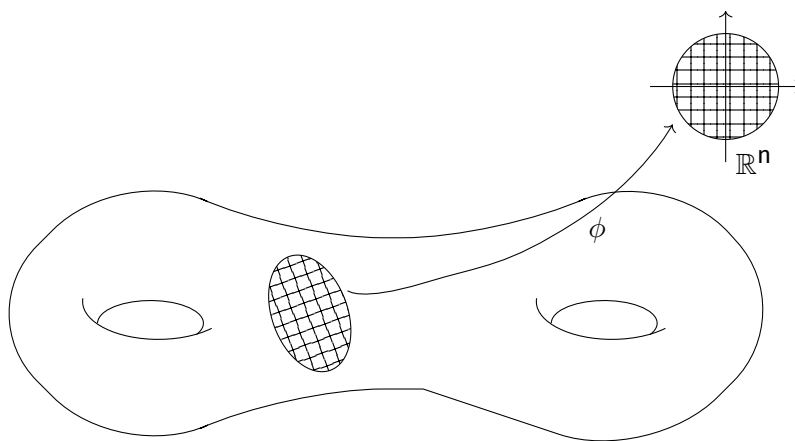
Definicja 1.3. Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, ϕ) , gdzie U jest otwartym podzbiorem M , zaś $\phi : U \rightarrow \bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w \mathbb{R}^n . Zbiór U nazywamy wtedy **zbiorem mapowym**.

Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie euklidesowa, to M jest pokrywana zbiorami mapowymi.

Dla mapy (U, ϕ) takiej, że $p \in U$ i $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ mówimy, że jest **mapą wokół p** .

Mapy nazywa się też czasem **lokalnymi współrzędnymi** na M lub **lokalną parametryzacją** M .

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n . Wygodnie jest go jednak móc użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.



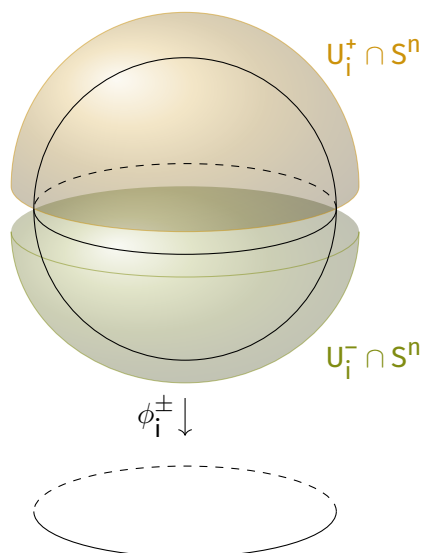
Przykłady:

1. Każdy otwarty podzbiór n -rozmaitości topologicznej jest n -rozmaitością [ćwiczenia].
2. **Wykresy ciągłych funkcji:** Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą. Wykresem f nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

Oznaczmy przez $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ projekcję na \mathbb{R}^n , tzn. $\pi_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy funkcja $\phi : \Gamma(f) \rightarrow U$ będąca obcięciem π_1 do $\Gamma(f)$. Ponieważ ϕ jest obcięciem funkcji ciągłej, to samo również jest ciągłe. W dodatku, funkcja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(f)$ dana przez $\phi^{-1}(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$, jest ciągłą funkcją odwrotną do ϕ . W takim razie, ϕ jest homeomorfizmem między U a $\Gamma(f)$ i wykres funkcji ciągłych jest lokalnie euklidesowy. Jako podzbiór $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też przestrzenią Hausdorffa oraz ma przeliczalną bazę. W takim razie, wykres ciągłej funkcji jest rozmaitością topologiczną.

3. Sfery S^n są n -rozmaitościami, które wkładają się w \mathbb{R}^{n+1} ($S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$).



Rozważmy rodzinę par $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) : i = 1, \dots, n+1\}$ na S^n zdefiniowanych jako:

$$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Zbiory U_i^\pm pokrywają całe S^n , gdyż każdy punkt posiada co najmniej jedną niezerową współrzędną, a funkcje ϕ_i^\pm są ciągłe jako obcięcia rzutów \mathbb{R}^{n+1} na \mathbb{R}^n . Obrazem zbioru U_i^\pm przez ϕ_i^\pm jest zbiór

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i^2 < 1\}$$

czyli otwarta kula w \mathbb{R}^n .

Odwzorowania ϕ_i^\pm są bijekcjami o odwzorowaniach odwrotnych:

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum x_i^2}, x_i, \dots, x_n)$$

które są ciągłe. W takim razie ϕ_i^\pm są homeomorfizmami między otwartymi podzbiórmi S^n a otwartymi podzbiórmi \mathbb{R}^n .

Pokazaliśmy lokalną euklidesowość S^n , natomiast bycie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie S^n dziedziczy z \mathbb{R}^{n+1} .

4. Produkt kartezjański dwóch (lub k) rozmaitości topologicznych rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].
5. n-torus jest przestrzenią produktową $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ i n-rozmaitością topologiczną. \mathbb{T}^2 nazywamy po prostu torusem.

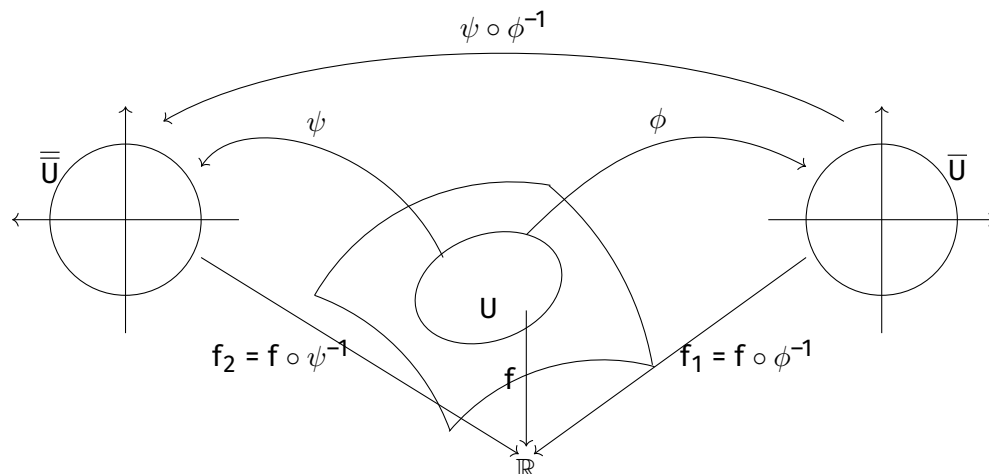
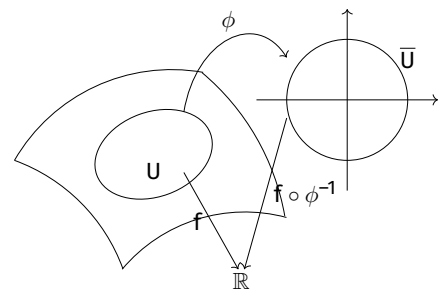
1.3. Rozmaitości gładkie (różniczkowalne)

Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać jej różniczkowalność za pomocą map (U, ϕ) na M .

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **wyrażona w mapie** (U, ϕ) to złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 1.4. Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest **gładka**, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

W tej definicji pojawia się pewien problem: dla jednej mapy (U, ϕ) f może być gładka, ale jeśli przejdziemy z obrazu mapy (U, ψ) to może się okazać, że $f_2 = f_1 \circ \psi \circ \phi^{-1}$ nie jest gładka:

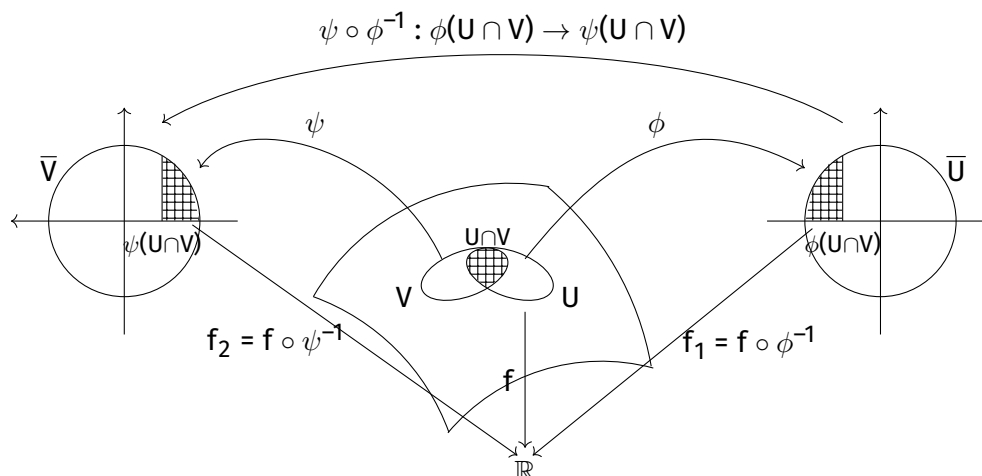


Dlatego chcemy móc założyć, że $\phi \circ \psi^{-1}$ jest przekształceniem gładkim.

Definicja 1.5. Mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ nazywamy (gładko) **zgodnymi**, gdy $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi.

Odwzorowania $\phi\psi^{-1}$ nazywamy **odwzorowaniami przejścia** z jednej mapy do drugiej. Jeśli $\phi\psi^{-1}$ i $\psi\phi^{-1}$ są gładkie, to są one wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowania nazywamy **dyfeomorfizmami** pomiędzy otwartymi podzbiórmi \mathbb{R}^n . Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian, czyli wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych, jest dla dyfeomorfizmów niezerowy [ćwiczenia].

W ogólnym przypadku, gdy $U \cap V \neq \emptyset$, rysunek wygląda:



Mapy (U, ϕ) i (V, ψ) nazywamy zgodnymi, jeśli:

- $U \cap V = \emptyset$
- odwzorowania przejścia

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

oraz

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

są gładkie (\iff są dyfeomorfizmami podzbiórów $\phi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$).

Definicja 1.6. Gładkim atlasem \mathcal{A} na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ takich, że:

- $\{U_\alpha\}$ pokrywają całe M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykłady:

1. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}$ na sferze S^n jest atlasem gładkim na S^n . Dla przykładu zbadamy zgodność map (U_i^+, ϕ_i^+) i (U_j^+, ϕ_j^+) dla $i < j$.

Popatrzmy jak wyglądają interesujące nas zbiory:

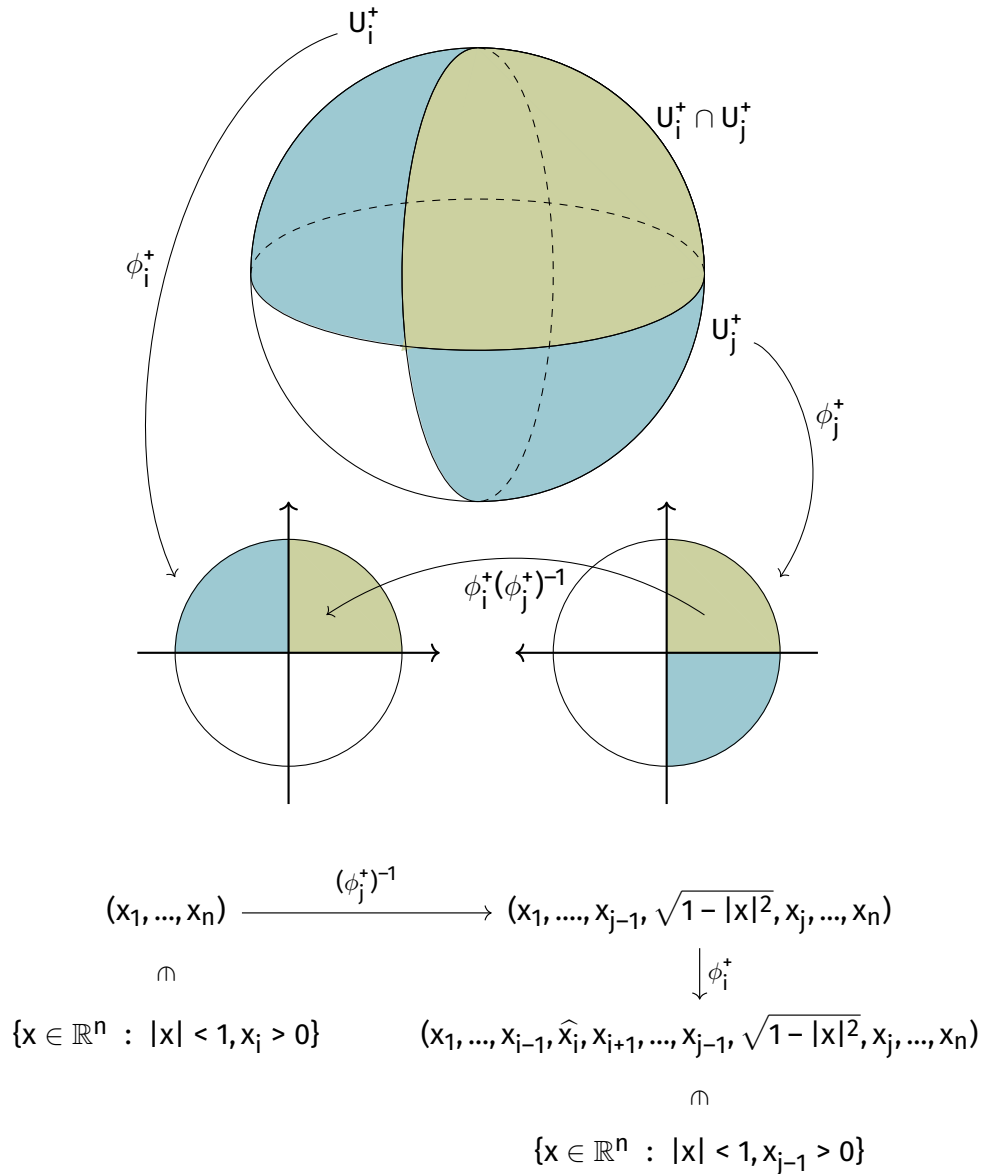
$$U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$$

$$\phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$

bo usuwamy i -tą współrzędną i numery poprzednich współrzędnych spadają o 1 w dół,

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_i > 0\}$$

bo w tym przypadku usunęliśmy współrzędną na prawo od i , więc jej położenie nie zmienia się.



Czyli odwzorowanie przejścia jest zadane wzorem:

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

i widać, że jest ono gładkie. Pozostałe rachunki przechodzą analogicznie.

- Jeśli V jest przestrzenią liniową wymiaru $n < \infty$ nad \mathbb{R} , to dowolna norma określona na V zadaje metrykę, która pozwala określić na V topologię (identyczną dla równoważnych norm). Z taką topologią V jest n -rozmaitością z naturalnie zdefiniowaną strukturą.

Niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą V . Rozważmy izomorfizm $E : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ zadany przez

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x^i e_i.$$

Funkcja ta w kontekście topologicznym jest homeomorfizmem, więc (V, E^{-1}) jest mapą na V .

Jeśli $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ jest inną bazą na V , to mamy homeomorfizm

$$\bar{E}(x) = \sum x^i \bar{e}_i$$

Istnieje wtedy pewna odwracalna macierz (A_i^j) taka, że

$$e_i = \sum A_i^j \bar{e}_j$$

dla każdego i .

Stąd odwzorowanie przejścia między tymi dwoma mapami jest zadane przez $\bar{E}^{-1} \circ E(x) = \bar{x}$, gdzie $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ jest zadane przez

$$\sum_{j \leq n} \bar{x}^j \bar{e}_j = \sum_{i \leq n} x^i e_i = \sum_{i, j \leq n} x^i A_i^j \bar{e}_j \implies \bar{x}^j = \sum_{i \leq n} A_i^j x^i$$

W takim razie jakakolwiek mapa wysyłająca x na \bar{x} jest odwracalna i liniowa \implies jest dyfeomorfizmem. Stąd dowolne dwie mapy (V, E) są gładko zgodne i ich rodzina definiuje na V standardową gładką strukturę.

Definicja 1.7. Rozmaitością gładką nazywamy parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaitością topologiczną, zaś \mathcal{A} jest pewnym atlasem gładkim na M .

Zdarza się, że różne atlasy na tej samej rozmaitości topologicznej M mogą zadawać tę samą rozmaitość gładką. Na przykład dla $M = \mathbb{R}^n$ istnieje atlas zawierający jedną mapę $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ oraz atlas $\{(B_x(r), \text{id}_{B_x(r)}) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, który jest tak naprawdę "rozdrobnieniem" pierwszego atlasu.

Definicja 1.8. Niech \mathcal{A} będzie gładkim atlasem na M .

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z \mathcal{A} , jeśli jest zgodna z każdą mapą $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na M są zgodne, jeśli każda mapa z \mathcal{A}_1 jest zgodna z \mathcal{A}_2 .

Warto zaznaczyć, że zgodność atlasów jest relacją zwrotną i przechodnią [ćwiczenia]. Zgodne atlasy zadają tę samą strukturę rozmaitości gładkiej na topologicznej rozmaitości M . Wszystkie zgodne atlasy należą do jednego większego atlasu, co było przyczyną powstania definicji atlasu maksymalnego.

Definicja 1.9. \mathcal{A} jest **atlasem maksymalnym** na rozmaitości M , jeśli każda mapa zgodna z \mathcal{A} należy do \mathcal{A} .

Każdy atlas \mathcal{A} na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z \mathcal{A} [ćwiczenia]. Dodatkowo, zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym. Wtedy można definiować rozmaitość gładką jako parę (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest rozmaitością topologiczną, a \mathcal{A} jest pewnym gładkim atlasem maksymalnym.

Dopowiedzenie o funkcjach gładkich

Funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu \mathcal{A} na M , jeśli dla każdej mapy $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.

Fakt 1.10.

- Jeśli $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem \mathcal{A} , zaś (U, ϕ) jest mapą zgodną z \mathcal{A} , to $f \circ \phi^{-1}$ jest gładka.
- Jeśli \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 są zgodnymi atlasami, to $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathcal{A} \iff f$ jest gładka względem $\mathcal{A}_2 \iff f$ jest gładka względem atlasu maksymalnego \mathcal{A}_{\max} zawierającego \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 .

Dowód. Ćwiczenia**1.4. Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej**

Mówimy, że mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ są **C^k -zgodne** jeśli $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (posiadają pochodne cząstkowe rzędów $\leq k$). C^k -atlas to z kolei rodzina C^k -zgodnych map, która określa strukturę C^k -rozmaitości na M . Struktura C^k -rozmaitości jest słabsza niż rozmaitości gładkiej i nie da się na niej zdefiniować map klasy C^m dla $m > k$.

C^0 rozmaitość to określenie na rozmaitość topologiczną, a C^∞ -rozmaitość jest tym samym co rozmaitość gładka.

Dychotomia C^0 i C^k dla $k > 0$ aka dykresja

Z każdego maksymalnego atlasu C^1 -rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞ -zgodnych. Zatem, każda C^1 -rozmaitość posiada C^1 -zgodną strukturę C^∞ -rozmaitości [Whitney, 1940]. Istnieją jednak C^0 -rozmaitości, które nie dopuszczają żadnej zgodnej struktury gładkiej [Quinn '82, Friedmann '82].

- Na rozmaitości analitycznej mapy są analitycznie zgodne $[C^\omega]$. Mapy są analitycznie zgodne, gdy wyrażają się za pomocą szeregów potęgowych.
- Rozmaitość zespolona ma mapy będące funkcjami w \mathbb{C}^n zamiast \mathbb{R}^n .
- W rozmaitości konforemnej mapy zachowują kąty między punktami.
- Istnieją też rozmaitości kawałkami liniowe (PL)...

1.5. Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 1.11. Niech X będzie zbiorem (bez zadanej topologii) i $\{U_\alpha\}$ będzie kolekcją podzbiorów w X taką, że dla każdego α istnieje $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ różniczkowalne takie, że

1. dla każdego α $\phi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty
2. dla dowolnych α, β $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w \mathbb{R}^n .
3. jeśli $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie (a nawet dyfeomorficzne, bo odwzorowanie odwrotne $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ też jest gładkie)
4. przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X
5. dla każdego $p, q \in X$, jeśli $p \neq q$, to istnieją α, β oraz otwarte $V_p \subseteq \overline{U_\alpha}$ i $V_q \subseteq \overline{U_\beta}$ takie, że $p \in \phi_\alpha^{-1}(V_p)$, $q \in \phi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\phi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \phi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ (oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).

Wówczas na X istnieje jedyna struktura rozmaitości topologicznej, dla której zbiory U_α są otwarte. Ponadto rodzina $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tworzy wtedy gładki atlas na X .

Dowód. A dokładniej szkic dowodu.

Określimy topologię na X przy pomocy przeciwbrazów przez ϕ_α otwartych podzbiorów $\bar{U}_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sprawdzenie, że jest to bazą topologii jest ćwiczeniem. Dzięki temu zbadanie lokalnej euklidesowości jest trywialne.

Dzięki warunkowi 4 nietrudno jest wybrać wtedy bazę przeliczalną [ćwiczenie], a warunek Hausdorffowości wynika z 5. ☕

Przykłady:

1. \mathcal{L} jest zbiorem prostych na płaszczyźnie. Na takim zbiorze nie ma dogodnej topologii, którą można by od razu wykorzystać. Zdefiniujmy zbiory:

$$U_v = \{\text{proste niepoziome}\}$$

$$U_h = \{\text{proste nie pionowe}\}$$

oraz funkcje ϕ_h, ϕ_v :

$$U_h \ni L = \{y = ax + b\} \xrightarrow{\phi_h} (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$U_v \ni L = \{x = cy + d\} \xrightarrow{\phi_v} (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Obie te funkcje są różnowartościowe i ich obrazy to \mathbb{R}^2 , czyli warunek 1 jest spełniony. Ponieważ jest ich tylko 2 sztuki i pokrywają całość X , to również 4. został spełniony. Sprawdźmy teraz 2:

$$U_h \cap U_v = \{\text{proste nie pionowe i niepoziome}\} = \{y = ax + b : a \neq 0\} = \{x = cy + d : c \neq 0\}$$

$$\phi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$$

$$\phi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) : c \neq 0\}$$

są otwarte, więc 2 jest spełniona. Teraz kolej na 3.

Weźmy prostą $L = \{x = cy + d\} = \{y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\} \in U_h \cap U_v$.

$$\left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\phi_h} L \xrightarrow{\phi_v} (c, d)$$

Zatem $\phi_h \phi_v^{-1}(c, d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$ jest gładkie (podobnie $\phi_v \phi_h^{-1}$).

Warunek 5. jest łatwy do sprawdzenia [ćwiczenie].

Z tą naturalną (mimo wszystko) topologią \mathcal{L} jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania \mathcal{L} nie wystarcza jedna mapa.

O notacjach:

- W dalszej części rozważań będziemy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subseteq M$ z obrazem przez mapę, czyli $\bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych (x_1, \dots, x_n) z \bar{U} przez ϕ^{-1} na $U \subseteq M$.
- Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć, że $p = (0, \dots, 0)$ w mapie, czyli możemy założyć, że (U, ϕ) jest mapą o początku w p .
- Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte (jest to mapa zgodna z atlasem). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy, iż mapa wokół p ma zbiór mapowy tak mały, jak nam akurat potrzeba, np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subseteq M$ niezawierającym p .

1.6. Rozmaitość gładka z brzegiem

Rzeczywistą półprzestrzeń oznaczamy

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

jej brzegiem nazywamy

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

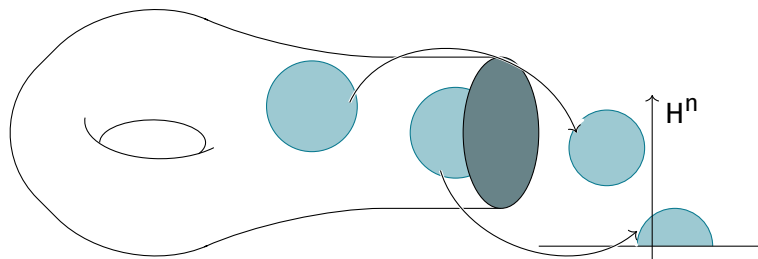
a wnętrzem:

$$\text{int}(H^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Dla $U \subseteq H^n$ oznaczmy $\partial U = U \cap \partial H$ oraz $\text{int}(U) = U \cap \text{int}(H^n)$, czyli definicja brzegu i wnętrza jest nieco inna niż na topologii. Użyjemy H^n oraz definicji jej brzegu i wnętrza, by zdefiniować rozmaitość gładką z brzegiem.

Dla $U \subseteq H^n$ otwartego i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mówimy, że f jest **gładka**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego, $U \subseteq \hat{U}$. Pochodne cząstkowe funkcji f są dobrze określone na $\text{int}(U)$, a ponieważ są ciągłe, to są również dobrze określone na ∂U (tzn. nie zależą od wyboru rozszerzenia \hat{f}). Z analizy matematycznej wiemy, że rozszerzenia \hat{f} istnieje \iff wszystkie pochodne cząstkowe f w $\text{int}(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U .

Definicja 1.12. M jest **gładką rozmaitością z brzegiem**, jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $U_\alpha \subseteq M$ i $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^n$ i $\overline{U_\alpha} = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest otwarty w H^n , gdzie odwzorowania przejścia są gładkie (tzn. $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ są dyfeomorfizmami pomiędzy otwartymi podzbiorami w H^n).



Fakt 1.13. Jeśli w pewnej mapie (U_α, ϕ_α) , $\phi_\alpha(p) \in \partial H^n$, to w każdej innej mapie (U_β, ϕ_β) zawierającej p $\phi_\beta(p) \in \partial H^n$.

Dowód. Wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością Jacobianu odwzorowań przejścia.

Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie twardego twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obrazu - analogicznego twierdzenia o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji. ☕

Definicja 1.14. **Brzegiem** n -rozmaitości M z brzegiem nazywamy zbiór

$$\partial M = \{p \in M : \text{w pewnej (każdej) mapie } p \in (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ zachodzi } \phi(p) \in \partial H^n\}$$

wnętrze M nazywa się

$$\text{int}(M) = \{p \in M : (\exists (U_\alpha, \phi_\alpha)) \phi_\alpha(p) \in \text{int}(H^n)\}$$

Fakt 1.15. Wnętrze $\text{int}(M)$ n -rozmaitości gładkiej M jest n -rozmaitością bez brzegu.

Dowód. Jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$, gdzie

$$U'_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\text{int}(\overline{U_\alpha})) = U_\alpha \cap \text{int}(M), \quad \phi'_\alpha = \phi_\alpha \upharpoonright U'_\alpha$$

Odwzorowania przejścia $\phi'_\alpha(\phi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\phi_\alpha\phi_\beta^{-1}$, więc są gładkie. ☕

Przykłady:

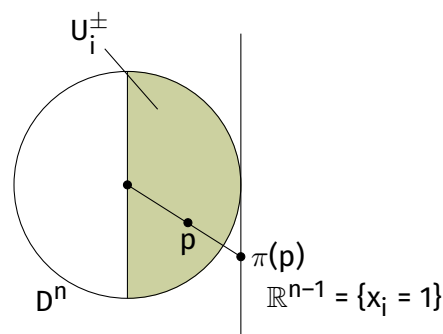
1. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ jest n -rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Dowód. Skonstruujemy mapy, pomijając sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa (U_0, ϕ_0) :

$$U_0 = \{x : |x| < 1\}, \quad \phi_0 : U_0 \rightarrow H^n, \quad \phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 2)$$

Mapy (U_i^\pm, ϕ_i^\pm)



$$U_i^+ = \{x \in D^n : x_i > 0\}$$

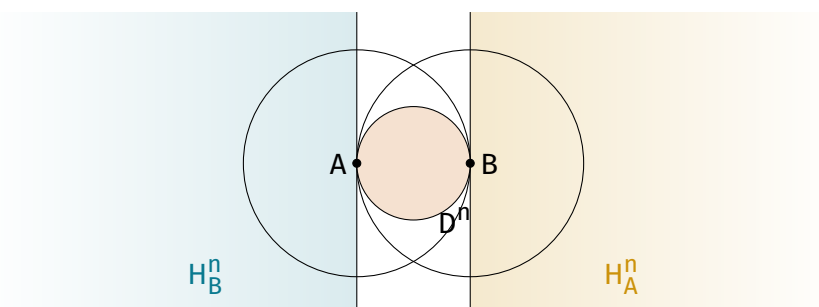
$$U_i^- = \{x \in D^n : x_i < 0\}$$

$$\phi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \underbrace{1 - \sum x_i^2}_{1-r^2} \right)$$

$$\phi_i^\pm(p) = (\pi(p), 1 - r^2) \in H^n$$



2. Inny atlas na D^n , składający się tylko z dwóch map:



Niech A i B będą punktami styczności dwóch prostych równoległych do dysku D^n . Rozważmy zbiory

$$U_A = D^n \setminus \{A\}$$

$$U_B = D^n \setminus \{B\}$$

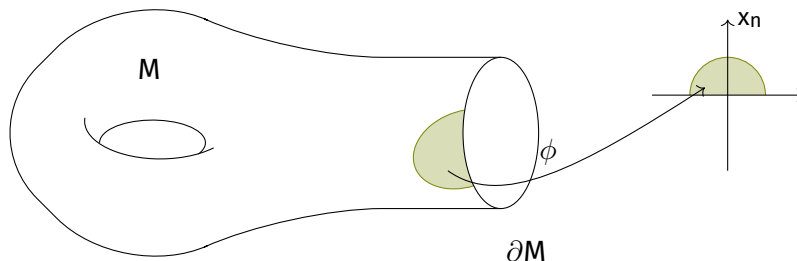
oraz odwzorowania $\phi_A : U_A \rightarrow H_A^n$ i $\phi_B : U_B \rightarrow H_B^n$ będące inwersjami dysku względem sfer S^n o środkach w A i B oraz promieniu 2.

3. Tutaj warto zaznaczyć, że jeśli $n = 0$, to wtedy $\partial M = \emptyset$ i M jest 0-rozmaitością. W dodatku, zbiór rozmaitości gładkich z brzegiem można rozumieć jakoby zawierał zbiór rozmaitości topologicznych, gdyż $\partial M = \emptyset \iff M$ jest rozmaitością topologiczną.

2. Rozkład jedności

Rozważmy rozmaitość z brzegiem M . Chcielibyśmy mieć narzędzie, które pozwoli nam tworzyć gładkie funkcje $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(p) = 0$ gdy $p \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla dowolnego $p \in \text{Int}(M)$.

Bardziej ogólnie, możemy chcieć dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq M$ znaleźć funkcję, która dla $p \in D$ jest równa zero, a na $M \setminus D$ ma wartości ściśle dodatnie.



Lokalnie, na zbiorze mapowym (U_α, ϕ) możemy funkcję spełniającą wymagania wyżej zadać przy pomocy funkcji wychodzącej z $\overline{U_\alpha} = \phi(U_\alpha)$

$$f_\alpha : \overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_n,$$

gdyż ostatnia współrzędna punktów z ∂M jest zawsze zerowa (gdyż są one w ∂H^n). Stąd w prosty sposób dostajemy funkcję:

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \phi$$

która lokalnie spełnia nasze wymagania. Nie możemy jednak w prosty sposób przełożyć lokalne f_α na funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1. Lokalnie skończone rozdrobnienie

Przypomnijmy definicje, które będą przydatne przy rozkładach jedności:

Definicja 2.1. Pokrycie $\{A_\alpha\}$ podzbiórów przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończone**, jeśli dla każdego $p \in X$ istnieje otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenia wielu α .

Definicja 2.2. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi nazywamy **rozdrobnieniem pokrycia** $\{U_\alpha\}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α .

Warto nadmienić, że relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Będziemy oznaczać ją przez $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$.

$$\{W_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\} \implies \{W_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$$

Definicja 2.3. Przestrzeń topologiczna X jest **parazwarta**, jeśli każde jej pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

Warto przypomnieć, że każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta. Dowód tego lematu wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość, czyli istnienie dla każdego punktu otoczeń prezwartych (po domknięciu zwartych). Własność ta została udowodniona na ćwiczeniach.

Dowód: patrz Lee strona 36-37

Uwaga 2.4. Rozdrobnienie wynikające z parazwarcia rozmaitości topologicznych można z góry uznać za składające się z prezwartych zbiorów mapowych.

Dowód. Niech $\{U_\alpha\}$ będzie pokryciem M . Łatwo jest znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych. Wystarczy obraz każdego U_α w \mathbb{R}^n pokryć

zbiorami prezwartymi i wrócić z nimi na M . Z faktu, że rozmaitości są parazwarte dostajemy lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które z przechodności \prec jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Dodatkowo, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ , które były mapowe i prezwarte, więc i V_β taki jest. ☕

Uwaga 2.5. Niech $\{A_\alpha\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną parazwartych podzbiorów rozmaitości M . Wtedy dla każdego A_{α_0} podrodzina

$$\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$$

jest skończona.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest nieskończona. Możemy w takim razie wybrać z niej ciąg A_{α_i} oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w pewnym $p \in \text{cl}(A_{\alpha_0})$.

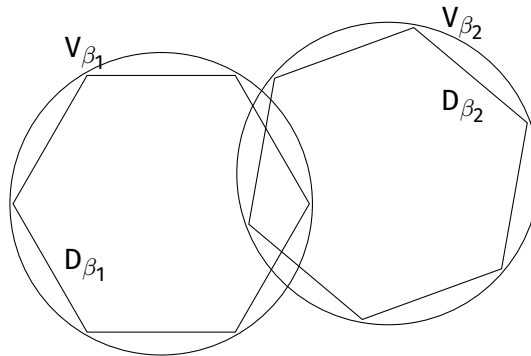
Ponieważ p jest punktem skupienia x_i , to dowolne otwarte otoczenie U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele elementów x_i . W takim razie U_p przecina się z nieskończenie wieloma zbiorami A_α . Jest to sprzeczne z lokalną skończonością $\{A_\alpha\}$. ☕

W uwadze 2.4 pokazaliśmy mapowość i prezwartość zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$ wynikającego z parazwarcia rozmaitości topologicznych. Możemy teraz dodatkowo zapewnić sobie istnienie interesujących nas zbiorów zwartych:

Uwaga 2.6. Niech $\{V_\beta\}$ będzie lokalnie skończonym rozdrobnieniem pokrycia M składającym się ze zbiorów mapowych. Wtedy dla każdego β istnieje zwarty zbiór $D_\beta \subseteq V_\beta$ taki, że

$$\bigcup D_\beta = M$$

to znaczy możemy wybrać "rozdrobnienie" przy pomocy zwartych zbiorów, które nadal pokrywa M .



Dowód. Ponieważ V_β są zbiorami mapowymi, to o każdym z nich możemy myśleć jak o otwartym podzbiore w \mathbb{R}^n poprzez utożsamienie go z otwartym zbiorem $\overline{V_\beta} = \phi_\beta(V_\beta)$ dla mapy (V_β, ϕ_β) .

Każdy V_{β_0} jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów $V_{\beta_0,k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, które są otwarte i ich zwarte domknięcia zawierają się w V_{β_0} : $\text{cl}(V_{\beta_0,k}) \subseteq V_{\beta_0}$. Możemy np. wybierać $V_{\beta_0,k} = B(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} : d(x, V_{\beta_0}^c) > \frac{1}{k}\}$, tzn. przekroje kul otwartych w \mathbb{R}^n o środku w $x_0 \in V_{\beta_0}$ i promieniu k ze zbiorami tych $x \in V_{\beta_0}$, które są odległe od dopełnienia V_{β_0} o co najmniej $\frac{1}{k}$.

Niech teraz $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ będą zbiorami z $\{V_\beta\}$ niepusto krojącymi V_{β_0} . Jest ich skończenie na mocy 2.5. Wówczas $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ wraz z wcześniej stworzonymi $V_{\beta_0,k}$ jest

pokryciem zwartego zbioru $\text{cl}(V_{\beta_0})$. Możemy więc z niego wybrać skończone podpokrycie postaci: $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}, \dots, V_{\beta_0, k_0}$. Oznacza to, że zastępując w $\{V_{\beta}\}$ zbiór V_{β_0} przez zbiór V_{β_0, k_0} dostajemy nowe pokrycie M z $\text{cl}(V_{\beta_0, k_0} \subseteq V_{\beta_0}$. Powtarzamy to induktywnie dla wszystkich V_{β} i wybieramy pokrycie

$$D_{\beta} = \text{cl}(V_{\beta, k}),$$

które spełnia wymagania z uwagi.



Z uwag udowodnionych wyżej wynika więc, że dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_{\beta}\}$ rozmaitości topologicznej M istnieje

- lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_{\beta}\}$ składające się ze zbiorów mapowych i parazwartych oraz
- rodzina $\{D_{\beta}\}$ zwartych podzbiorów $D_{\beta} \subseteq V_{\beta}$, która dalej pokrywa M .

To samo dotyczy też rozmaitości z brzegiem.

2.2. Twierdzenie o rozkładzie jedności

Definicja 2.7. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ określamy jej **nośnik** jako:

$$\text{supp}(f) := \text{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

Fakt 2.8. [z \mathbb{R}^n] Dla dowolnego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_+$ oraz dowolnego zwartego $D \subseteq \Omega$ istnieje gładka funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $f \geq 0$
2. $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$
3. $f(x) > 0$ dla $x \in D$

Twierdzenie 2.9. [O rozkładzie jedności] Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_{\alpha}\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_i\}$ gładkich funkcji $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że

1. $f_i \geq 0$
2. dla każdego i nośnik $\text{supp}(f_i)$ zawiera się w pewnym U_{α}
3. nośniki $\{\text{supp}(f_i)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M
4. dla każdego $x \in M$ $\sum f_i(x) = 1$ [suma ta jest skończona wokół każdego x dzięki 3.]

Dowód. Niech $\{V_j\} \prec \{U_{\alpha}\}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym przewartymi zbiorami mapowymi. Niech $D_j \subseteq V_j$ będą zbiorami zwartymi, które dalej pokrywają M (na mocy 2.6). Dzięki faktowi z \mathbb{R}^n 2.8 wiemy, że dla każdego j istnieje gładka funkcja $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

1. $h \geq 0$
2. $\text{supp}(h_j) \subseteq V_j$
3. $h_j(x) > 0$ dla $x \in D_j$

Niech teraz $h(x) = \sum_j h_j(x)$. Jest to dobrze określona definicja, gdyż $\text{supp}(h_j)$ tworzą rodzinę lokalnie skończoną (bo $\{V_j\}$ taka jest). Z lokalnej skończoności nośników wynika, że h jest gładka na M .

Dostajemy też $h(x) > 0$, bo D_j pokrywają całe M , a więc dla każdego $x \in M$ istnieje i takie, że $x \in D_i$, a więc $h_i(x) > 0$.

Określmy $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)}$. Wiemy, że $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka na M , $\text{supp}(f_j) = \text{supp}(h_j) \subseteq V_j$, więc rodzina $\{\text{supp}(f_j)\}$ jest lokalnie skończona i każdy $\text{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α . Wreszcie mamy

$$\sum f_j(x) = \sum \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum h_j(x)}{\sum h_j(x)} = 1$$

dla każdego $x \in M$.



Definicja 2.10. Rodzina funkcji $\{f_j\}$ jak w dowodzie twierdzenia wyżej jest nazywana **rozkładem jedności** wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

3. Wektory styczne

Oznaczenia z analizy matematycznej:

- dla gładkiej funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, \dots, f_n)$ i dla $t \in (a, b)$ pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \\ \dots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

3.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a, b) \rightarrow M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest **zbazowana w p** . Zbiór par (c, t_0) krzywych zbazowanych w p oznaczamy $C_p M$.

J.M. Lee definiuje przestrzeń styczną przy pomocy derywacji oraz przedstawia możliwość użycia m.in. kielków funkcji gładkich

Definicja 3.1. Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p . Krzywe (c_1, t_1) i (c_2, t_2) zbazowane w p są do siebie styczne w mapie (U, ϕ) jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 3.2. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne w mapie (U, ϕ) wokół p , to są też styczne w dowolnej innej mapie (W, ψ) wokół p (zgodnej z (U, ϕ)).

Dowód.

$$\begin{aligned} (\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' = \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$



Definicja 3.3. Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p .

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na $C_p M$, bo jest zwrotna, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

Definicja 3.4. Przestrzeń styczną do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_p M := C_p M / \text{stycznosc}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_p M$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p .

3.2. Struktura wektorowa przestrzeni $T_p M$

Odwzorowanie ϕ_p^* jest dobrze określone z definicji $T_p M$ (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

Dla mapy $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\begin{aligned}\phi_p^* : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^n & \phi_p^*([c, t_0]) &= (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n \\ \lambda_{\phi, p} : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_p M & \lambda_{\phi, p}(v) &= [c_v, 0]\end{aligned}$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Lemat 3.5. $\phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^* = \text{id}_{T_p M}$, czyli ϕ_p^* i $\lambda_{\phi, p}$ są one wzajemnie jednoznaczne i do siebie odwrotne.

Dowód. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\begin{aligned}\phi_p^* \circ \lambda_{\phi, p}(v) &= \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\phi(p) + tv) = v\end{aligned} \quad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_p M$

$$\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi, p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi \circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie ϕ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi \circ c)'(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie (c, t_0) i $(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi \circ c)'(t_0)}, 0)]$ i w takim razie $\lambda_{\phi, p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$ \checkmark . ☕

Fakt 3.6. Na przestrzeni stycznej $T_p M$ istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania ϕ_p^* oraz $\lambda_{\phi, p}$ dla wszystkich map ϕ wokół p są liniowymi izomorfizmami.

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_p M$: $X + Y := \lambda_{\phi, p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w \mathbb{R}^n)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi, p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w \mathbb{R}^n).

Dowód. Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z \mathbb{R}^n przez $\lambda_{\phi, p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map ϕ, ψ wokół p przeniesione z \mathbb{R}^n na $T_p M$ struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi, p}} T_p M \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi, p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\begin{aligned}\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})\left[\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(p) + tv)\right] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v)\end{aligned}$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.



O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla $T_p M$ stowarzyszonej z mapą ϕ otoczenia punktu p . W tej mapie działania na wektorach z $T_p M$ sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w \mathbb{R}^n .

Przykład:

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (\text{id}_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p \mathbb{R}^n$ z \mathbb{R}^n .
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \rightarrow M$ oraz $c : (a, t_0] \rightarrow M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary (c, t_0) jako elementy $C_p M$. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na $T_p M$ określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, $\frac{\partial}{\partial x_2}(p)$, ..., $\frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p \mathbb{R}^n$ ($T_p U$), zaś dowolny wektor z $T_p \mathbb{R}^n$ ($T_p U$) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy ϕ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wersorów e_1, \dots, e_n oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

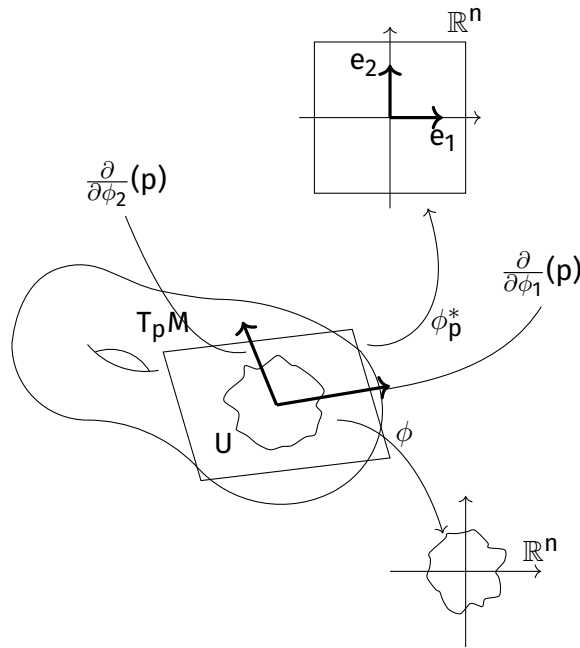
Elementy te tworzą bazę $T_p M$ i dowolny wektor z $T_p M$ ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.

3.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \rightarrow N$ i $p \in M$, $f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_p M$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_q N$.

Lemat 3.7. Jeżeli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, to $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_q N$ też są styczne

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami



Dowód. Niech ϕ będzie mapą wokół p , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q ,
 $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2) \end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

Definicja 3.8. Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 3.7.

Lemat 3.9. $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_p M \xrightarrow{df_p} T_{f(p)} N \xrightarrow{\psi_{f(p)}^*} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 3.6).

$$\begin{aligned} \psi_{f(p)} \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi_{f(p)}^* \circ df_p([c_v, 0]) = \psi_{f(p)}^*([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v] \end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \rightarrow N$ odwzorowanie $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ wyznaczyliśmy w mapach ϕ wokół p i ψ wokół $f(p)$ jako

$$\psi_{f(p)}^* df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie df_p w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w $T_p M$ i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)} N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left(\frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

Przykłady:

- Niech $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ jest wówina odwzorowaniu "mapowemu" $\phi_p^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dowód. Niech $[c, t_0] \in T_p M$, wtedy

$$d\phi_p([c, t_0]) = [\phi \circ c, t_0] \in T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

Mapę $(id_{\mathbb{R}^n})_{\phi(p)}^* : T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kanonicznie utożsamiliśmy z $id_{\mathbb{R}^n}$, stąd też

$$d\phi_p([c, t_0]) = (id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ c)'(t_0) = (\phi \circ c)'(t_0),$$

a z kolei

$$\phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

z definicji tego odwzorowania. ☕

- Dla gładkiej krzywej $c : (a, b) \rightarrow M$ oraz $t_0 \in (a, b)$, różniczka $dc_{t_0} : T_{t_0}(a, b) \rightarrow T_{c(t_0)} M$ jest jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a, b)$ przekształca na wersor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)} M$.
- Rozważmy gładką funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i $p \in M$. Różniczka $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonalem liniowym na $T_p M$.

Definicja 3.10. Dla funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ możemy wybrać wektor styczny $X = [c, t_0] \in T_p M$ i zdefiniować **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora X :

$$Xf = df_p(X) = df_p([c, t_0]) = (f \circ c)'(t_0).$$

Pochodna kierunkowa ma następujące własności:

- $X(f + g) = Xf + Xg$
- $X(f \cdot g) = g(p) \cdot Xf + f(p) \cdot Xg$ (*reguła Leibniza*)

Dowód.

$$\begin{aligned} X(f \cdot g) &= [(f \cdot g) \circ c]'(t_0) = [(f \circ c) \cdot (g \circ c)]'(t_0) = \\ &= (f \circ c)'(t_0) \cdot (g \circ c)(t_0) + (f \circ c)(t_0) \cdot (g \circ c)'(t_0) = \\ &= Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg \end{aligned}$$



- dla $a \in \mathbb{R}$ $(aX)f = a(Xf)$
- jeśli $X, Y \in T_p M$, to $(X + Y)f = Xf + Yf$

Dowód.

$$(X + Y)f = df_p(X + Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$$



Stąd oznaczenie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, które ma charakter operatorowy związany z działaniem tego wektora na funkcjach f_n

$\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$ jest to i-ta pochodna cząstkowa f w mapie ϕ w punkcie p

Przykłady:

- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p \mathbb{R}^n$ i mamy gładką funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, to wówczas $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.
- Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \in T_p M$ i $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to oznaczamy

$$Xf = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) =: \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p)$$

- Podobnie jak wyżej, jeśli $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$, to

$$Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial \phi_i}(p) = \sum a_i \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Spis twierdzeń

1.1	Definicja: przestrzeń topologiczna	3
1.2	Twierdzenie: twierdzenie brouwer'a	4
1.3	Definicja: mapa	4
1.4	Definicja: funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka	6
1.5	Definicja: zgodność map	7
1.6	Definicja: atlas gładki	7
1.7	Definicja: rozmaitość gładka	9
1.8	Definicja: zgodność atlasów, mapy z atlasem	9
1.9	Definicja: atlas maksymalny	9
1.10	Fakt: gładkość względem atlasu	10
1.11	Lemat	10
1.12	Definicja: rozmaitość z brzegiem	12
1.13	Fakt: raz w brzegu, zawsze w brzegu	12
1.14	Definicja: brzeg, wnętrze	12
1.15	Fakt	13
2.1	Definicja: pokrycie lokalnie skończone	15
2.2	Definicja: rozdrobnienie	15
2.3	Definicja: przestrzeń parazwarta	15
2.4	Uwaga	15
2.5	Uwaga	16
2.6	Uwaga	16
2.7	Definicja: nośnik funkcji	17
2.8	Fakt	17
2.9	Twierdzenie: o rozkładzie jedności	17
2.10	Definicja: rozkład jedności	18
3.1	Definicja: styczność krzywych w mapie	19
3.2	Lemat: styczność w jednej mapie \iff styczność w każdej mapie	19
3.3	Definicja: styczność krzywych	19
3.4	Definicja: przestrzeń styczna	19
3.5	Lemat	20
3.6	Fakt: struktura przestrzeni wektorowej na przestrzeni stycznej	20
3.7	Lemat: krzywe styczne po przejściu przez $f:M \rightarrow N$ są nadal styczne	21
3.8	Definicja: różniczka	22
3.9	Lemat: df jest odwzorowaniem liniowym	22
3.10	Definicja: pochodna kierunkowa	23