Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Lista 10

Exercise 1. *Pokaż, że jeśli* $0 < p < q$, *to*

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Dowód taki, jak wiele dowodów na analizie funkcjonalnej.

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}|X \cdot 1|^p \overset{\star}{\leq} \left[\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \left[\mathbb{E}1^{\frac{q}{q-p}}\right]^{\frac{q-p}{q}} = \left[\mathbb{E}|X|^q\right]^{\frac{p}{q}}$$

$$\left[\mathbb{E}|X|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\mathbb{E}|X|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$\star$ wynika z nierówności Höldera dla $\frac{q}{p}$ i $\frac{q}{q-p}$. Wszystko śmiga, bo $\mathbb{E}$ to tak naprawdę całkowanie względem miary $\mathbb{P}\left[|X|^p\right]$, więc np. $\mathbb{E}1 = \int 1 \, d\mathbb{P}\left[|X|^p\right] = 1$ bo prawdopodobieństwo całości to dokładnie 1.

Exercise 2. (Reguła n sigm) *Pokaż, że jeśli* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, *to*

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}X| > n\sigma\right] \leq \frac{1}{n^2}$$

Nierówność Czebyszewa:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| > \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X - \mu|))}{f(\lambda)}.$$

Niech $\lambda = n\sigma$ i $f(x) = x^2$. Podstawiając do wzoru wyżej:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mu| > n\sigma\right] \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mu|^2}{n^2\sigma^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n^2\sigma^2} = \frac{1}{n^2}$$

Exercise 3. *Sprawdzić, że zdarzenie* $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}$ *należy do* F_∞.

Chyba wystarczy zauważyć, że dla dowolnego i oraz ciągu $Y_j = X_{i+j-1}$ zachodzi $\lim Y_j = \lim X_j = a$ oraz ciąg $Y_j \subseteq F_{i,\infty}$. Stąd $(\forall\ i)\ \{\lim X_n = a\} \in F_{i,\infty} \implies \{\lim X_n = a\} \in \bigcap F_{i,\infty} = F_\infty$.

Exercise 5. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum X_n$, jeśli $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

(a) $\mathbb{P}\left[X_n = 2^{-n}\right] = \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{2}$

(b) $\mathbb{P}\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{n \log n}$

(a) $\mathbb{P}\left[X_n = 2^{-n}\right] = \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{2}$

Tutaj kolejne wyrazy to albo $\frac{1}{2^n}$, albo 0, więc

$$\sum X_n \leq \sum 2^{-n} = 2$$

co jest bardzo skończone.

(b) $\mathbb{P}\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{n \log n}$

Zakładam, że dla $n = 1$ zachodzi $\mathbb{P}\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = 1$, bo $\log n = \infty$.

Ponieważ $\sum_{n=1}^{2137} X_n < \infty$ (sumujemy skończenie wiele skończonych wyrazów), to wystarczy pokazać, że $\sum_{n=2137}^{\infty} X_n < \infty$. Czyli dla twierdzenia Kołmogorowa liczę:

$$\sum_{n=2137}^{\infty} \mathbb{E}X_i = \sum \frac{1}{n^2 \log n} \leq \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum_{n=2137}^{\infty} \mathrm{Var}X_i = \sum[\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2] = \sum \mathbb{E}(X^2) - \sum(\mathbb{E}X)^2 \leq \sum \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n \log n} - \sum \frac{1}{n^4} < \infty$$

W takim razie na mocy twierdzenia Kołmogorowa, $\sum X_n$ zbiega prawie na pewno.

Exercise 6. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład jednostajny $U[-n, n]$. Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg $\sum \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie wszędzie?

$$\mathbb{E}X_n = \int_{-n}^{n} x \cdot \frac{1}{2n}\, dx = \frac{1}{2n} \cdot 0$$

czyli $\sum \mathbb{E}X_n = 0 < \infty$

$$\mathrm{Var}X_n = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 = \int x \cdot \mathbb{P}\left[X_n^2 = x\right] dx = \int x \cdot \mathbb{P}\left[X_n = \sqrt{x}\right] dx = \int_0^{n^2} x \cdot \frac{1}{2n}\, dx = \frac{n^3}{4}$$

Czyli normalnie ten szereg jest rozbieżny, ale możemy rozważać za to zmienne $Y_n = \frac{X_n}{n^p}$ o rozkładzie jednostajnym na $[-n^{1-p}, n^{1-p}]$. Wtedy $\mathbb{E}Y_n$ pozostaje zerem, bo nadal mamy całkę po symetrycznym przedziale z nieparzystej funkcji, ale wariacja się zmienia:

$$\mathrm{Var}\, Y_n = \mathrm{Var}(n^{-p}X_n) = n^{-2p}\mathrm{Var}(X_n) = n^{-2p} \cdot \frac{n^3}{4} = \frac{n^3}{4n^{2p}}$$

Chcemy, aby

$$\sum \frac{n^3}{4n^{2p}} < \infty,$$

co jest prawdą na pewno dla $p > 2$ $[2p - 3 > 1]$. Dla $0 < p < 2$ mamy szereg ograniczony od dołu przez szereg harmoniczny, a on jest bardzo niezbieżny.

Exercise 7. Niech $\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \frac{1}{n^3}$, $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{2}{n^3}$. Pokaż, że $\sum X_n$ jest zbieżny p.p. chociaż $\sum \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

Ustalmy dowolne $c > 0$ jak w twierdzeniu Kołmogorowa o 3 szeregach. Zauważmy, że jeśli $n > c$, to $\mathbb{E}X_n^{(c)} = 0$, bo jedyną wartością jaką może $X_n^{(c)}$ przyjąć jest 0 (przez obcięcie). W takim razie, wariacja $X_n^{(c)}$ też jest równa zerem. Czyli seregi $\sum \mathbb{E}X_n^{(c)}$ i $\sum \mathrm{Var}(X_n^{(c)})$ mają skończenie wiele niezerowych wyrazów, więc są zbieżne.

Pozostaje roztłumaczyć $\sum \mathbb{P}\left[|X_n| > c\right]$, który dla odmiany ma niezerowe wyrazy tylko dla $n > c$. Weźmy takie n i zauważmy, że $\mathbb{P}\left[|X_n| > c\right] = \frac{2}{n^3}$, czyli

$$\sum \mathbb{P}\left[|X_n| > c\right] = \sum \frac{2}{n^3} < \infty,$$

więc na mocy twierdzenia Kołmogorowa o 3 szeregach mamy $\sum X_n < \infty$ p.n.

Exercise 10. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum X_n$ jeśli $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbb{P}[X_n = a_n] = \mathbb{P}[X_n = -a_n] = \frac{1}{2}$$

dla pewnego ciągu $\{a_n\}$.

Jeśli $\sum |a_n| < \infty$ to $\sum X_n \leq \sum |X_n| = \sum |a_n| < \infty$.