Lista 7

Zadanie 1. *Monika wybrała się do kasyna w Las Vegas mając przy sobie 255\$. Jako cel postawiła sobie wygranie 1 dolara i wyjście z kasyna z kwotą 256\$. Podczas tej wizyty obstawiała kolory. Wszystkie pola poza 0 i 00 są czerwone lub czarne (po 18 pól). Poprawne wskazanie koloru (z prawdopodobieństwem $\frac{18}{38}$ podwaja zaryzykowaną kwotę. Monika zastosowała następującą strategię: postanowiła, że będzie grać kolejno o 1\$, 2\$, 4\$, 8\$, 16\$, 32\$, 64\$, 128\$. Jeżeli w jednej z gier wygra, zabiera nagrodę i opuszcza kasyno z 256\$ dolarami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jej się powiodło. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej.*

Chyba nie rozumiem tej gry.

Zadanie 2. *Oblicz $\mathbb{E}X$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie*

(a) Poiss(λ)

(b) Exp(λ)

(c) Geom(p)

To jest po prostu liczenie całki lub sumy?

(a) Poiss(λ)

$$\sum_{k>0} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k>0} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k>0} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

bo ta suma to wzór Taylora.

(b) Exp(λ)

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ v = -e^{-\lambda x} & dv = \lambda e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

(c) Geom(p)

$$\sum x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k>0} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k>0} k \cdot (1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Zadanie 3. *Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U[0,1]$. Obliczyc $\mathbb{E}Y$ jeżeli*

a) $Y = e^X$

b) $Y = \cos^2(\pi X)$

a) $Y = e^X$

Chcę poznać f_Y, czyli liczę dystrybuantę i różniczkuję:

$$F_y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}\left[e^X \leq t\right] = \mathbb{P}[X \leq \ln t] = \int_0^{\ln t} 1 \, dx = \ln t$$

czyli $f_Y(t) = \frac{1}{t}$. Wartości Y są z przedziału $[e^0, e^1]$:

$$\mathbb{E}Y = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y} \, dy = e - 1$$

b) $Y = \cos^2(\pi X)$

Zgaduję, że to tak samo jak wcześniej:

$$F_y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}\left[\cos^2(\pi X) \leq t\right] = \mathbb{P}\left[\cos(\pi X) \in [-|t|, |t|]\right] =$$
$$= \mathbb{P}\left[X \in [- \right].$$

TUTAJ MI SIĘ ODECHCIAŁO

Zadanie 4. *Zmienna losowa* X *ma rozkład jednostajny* $U[0,1]$. *Obliczyć* $\mathbb{E}X, \mathbb{E}[1/(1+X^5)]$.

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[1/(1+X^5)] = \int_0^1$$