Algebra 2R, lista 7.

Zadania oznaczone minusem to ćwiczenia, których nie deklarujemy i nie wybieramy do zadania domowego.

1. Załóżmy, że $A, B \subseteq U$, gdzie U jest pewnym ciałem algebraicznie domkniętym, zaś K jest podciałem U.
   (a)– Udowodnić, że jeśli $A \subset B$ jest algebraicznie niezależny nad K, to zawiera się w pewnej bazie przestępnej zbioru B, nad K. (dla uproszczenia można założyć, że zbiór B jest skończony)
   (b)– Udowodnić, że jeśli A jest bazą przestępną zbioru B nad K, to jest też bazą przestępną zbioru $acl_K(B)$ nad K.
   (c) Udowodnić, że każde dwie dwie bazy przestępne zbioru B nad K są równoliczne (dla uproszczenia wolno założyć, że jedna z tych baz jest skończona).
   (d)– Udowodnić szczegółowo, że jeśli $\{a_i, i \in I\} \subset U$ jest algebraicznie niezależny and K, to $K(a_i, i \in I)$ jest izomorficzne (nad K) z ciałem funkcji wymiernych $K(X_i, i \in I)$.

2. (a) Udowodnić, że rozszerzenie $K \subset K(X, Y)$ jest czysto przestępne.
   (b)– Udowodnić, że rozszerzenie $K \subset K(X_i, i \in I)$ jest czysto przestępne.

3. Udowodnić, że zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset U$ jest algebraicznie niezależny nad $K \iff$ nie istnieje niezerowy wielomian $W(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ taki, że $W(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

4. * Niech U będzie algebraicznym domknięciem ciała $\mathbb{Q}(X, Y, Z)$. Znaleźć wewnątrz U algebraicznie domknięte ciała K i L wymiaru przestępnego 2 (nad $\mathbb{Q}$) takie, że $K \cap L = \hat{\mathbb{Q}}$. (uwaga: znaczy to, że operator algebraicznego domknięcia nie spełnia prawa modularności, w przeciwieństwie do operatora liniowego domknięcia w przestrzeniach liniowych).

5. (a) Udowodnić, że $trdeg(\mathbb{C}) = 2^{\aleph_0}$ oraz ciało $\mathbb{C}$ ma $2^{2^{\aleph_0}}$ automorfizmów. (wsk.[1])
   (b)– Załóżmy, że ciała K i L są tej samej charakterystyki, algebraicznie domknięte i mają ten sam wymiar przestępny. Udowodnić, że ciała te są izomorficzne.

6. Załóżmy, że $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ są algebraicznie niezależne (nad $\mathbb{Q}$). Udowodnić, że wielomian
$$W(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$
   jest nierozkładalny nad ciałem $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

7. * Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ są algebraicznie niezależne. Udowodnić, że $a^2 + b + c, b^2c, ab + ac^2$ też są algebraicznie niezależne. (Wsk.[2])

[1]skorzystać ze skończonego charakteru acl.

[2]Myśleć geometrycznie, jak w przestrzeni liniowej. Niech $u = a^2 + b + c, v = b^2c, w = ab + ac^2$. Wystarczy udowodnić, że $a, b, c \in acl(u, v, w)$. Przedstawić c i a jako wyrażenia wymierne zależne od u, v, w, b. Następnie wskazać wielomian o współczynnikach będących wyrażeniami wymiernymi zależnymi od u, v, w, którego pierwiastkiem jest b.

8. – Załóżmy, że M jest R-modułem. Udowodnić, że:
(a) zbiór $I = \{r \in R : \forall m \in M,\ rm = 0\}$ jest obustronnym ideałem w R.
(b) gdy R jest przemienny, dla $r \in R$ zbiór $M_r = \{m \in M : rm = 0\}$ jest podmodułem M.

9. Niech G będzie grupą abelową.
(a)– Udowodnić, że $End(G, +) = End_{\mathbb{Z}}(G)$ (w tym drugim przypadku chodzi o pierścień endomorfizmów G jako $\mathbb{Z}$-modułu).
(b) Które grupy abelowe G są $\mathbb{Z}$-modułami prostymi ? Znaleźć ich pierścienie endomorfizmów (są to ciala na mocy tw. Wedderburne'a).
(c) Które grupy abelowe G są $\mathbb{Z}_n$-modułami prostymi ? Znaleźć ich pierścienie endomorfizmów.
(d) Opisać pierścień $End(\mathbb{Q}, +)$. Czy jest to pierścień z dzieleniem ? Czy $\mathbb{Q}$ jest $\mathbb{Z}$-modułem prostym ?

10. Udowodnić, że każda niezerowa przestrzeń liniowa V nad ciałem K jest $End_K(V)$-modułem prostym. Znaleźć pierścień endomorfizmów tego modułu.

11. Załóżmy, że M jest R-modułem. Wówczas M jest też R'-modułem, gdzie $R' = End_R(M)$ (tego nie trzeba dowodzić). Dla $r \in R$ definiujemy $f_r : M \to M$ przez $f_r(m) = rm$. Udowodnić, że $f_r \in End_{R'}(M)$.