

*"Do not worry about your difficulties in mathematics,
I assure you that mine are greater."*

Albert Einstein

Równania w postaci różniczek zupełnych

Zadanie 1. Rozwiąż równania

a) $2ty \, dt + (t^2 - y^2) \, dy = 0,$

c) $(t - y \cos \frac{y}{t}) \, dt + t \cos \frac{y}{t} \, dy = 0.$

b) $e^{-y} \, dt - (2y + te^{-y}) \, dy = 0,$

Zadanie 2. W podanych równaniach dobierz stałą a lub funkcję $f(t)$ tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

a) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0,$

b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0,$

c) $y^2 \sin t + yf(t)y' = 0.$

Zadanie 3. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $fy' + t^2 + y = 0$ jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 4. Scałkuj równania metodą czynnika całkującego:

a) $\left(\frac{t}{y} + 1\right) \, dt + \left(\frac{t}{y} - 1\right) \, dy = 0,$

c) $(y + t^2) \, dy + (t - ty) \, dt = 0,$

b) $(t^2 + y) \, dt - t \, dy = 0,$

d) $ty^2 \, dt - (t^2y - t) \, dy = 0.$

Zadanie 5. Uzasadnij, że równanie $M(t) + N(y)y' = 0$ o zmiennych rozdzielonych jest zupełne. Uzasadnij, że równanie liniowe niejednorodne $y' + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź jego czynnik całkujący.

Zadanie 6. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}$, $\mu_2(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ są czynnikami całkującymi równania

$$y \, dx - x \, dy = 0.$$

Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.

Zadanie 7. Wykaż, że krzywe całkowe równania

$$\left[2t(t^2 - aty + y^2) - x^2\sqrt{t^2 + y^2}\right] \, dt + y \left[2(t^2 - aty + y^2) + t\sqrt{t^2 + y^2}\right] \, dy = 0,$$

gdzie $|a| < 2$, są krzywymi zamkniętymi.

WSKAZÓWKA: Wprowadź zmienne biegunowe.