ZADANIE 18

Z psychologicznych powodów, czasem wygodniej jest oznaczać ideał pierwszy pierścienia A literami x, y jeśli myślimy o nich jako o punkcie $X = \text{Spec}(A)$. Kiedy myślimy o x jako o ideale pierwszym A, oznaczamy go przez $\mathfrak{p}_x$ (oczywiście jest to ta sama rzecz). Pokaż, że

(i) zbiór $\{x\}$ jest domknięty w $\text{Spec}(A) \iff \mathfrak{p}_x$ jest maksymalny

$\Longleftarrow$

Jeśli $\mathfrak{p}_x$ jest ideałem maksymalnym, to $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$, gdyż żaden inny ideał pierwszy nie zawiera $\mathfrak{p}_x$. My definiowaliśmy $V(E)$ jako zbiory domknięte, więc $\{x\}$ też taki jest.

$\Longrightarrow$

Wiem, że $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Czyli jest przekrojem pewnej rodziny domkniętych zbiorów bazowych

$$\{x\} = \bigcap_{i \in I} V(E_i) = V\Big(\bigcup_{i \in I}(E_i)\Big)$$

ale jeśli taka suma zawiera się w jednym, jedynym ideale pierwszym, to jest on maksymalny.

(ii) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$

$\subseteq$

Jest raczej prostym zawieraniem: $\overline{\{x\}}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $\{x\}$, a $V(\mathfrak{p}_x)$ z pewnością to spełnia.

$\supseteq$

Po pierwsze zauważmy, że

$$V(\mathfrak{p}_x) = \bigcap_{E \subseteq \mathfrak{p}_x} V(E) = V\Big(\bigcup_{E \subseteq \mathfrak{p}_x} V(E)\Big),$$

bo to są wszystkie te ideały pierwsze, które zawierają jakiś podzbiór $\mathfrak{p}_x$, czyli obcinamy te mniejsze podzbiory $\mathfrak{p}_x$ w trakcie brania przekroju.

Wiemy, że $\bigcap_{E \subseteq \mathfrak{p}_x} V(E)$ jest zbiorem domkniętym. Wiemy, że $x \in \bigcap V(E)$, czyli dostajemy, że $V(\mathfrak{p}_x)$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających x, czyli jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym x, czyli domknięciem x.

(iii) $y \in \overline{\{x\}} \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$

$\Longleftarrow$

Niech $x, y \in X$ takie, że $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$. Wówczas, $x \in V(E) \implies y \in V(E)$. Ponieważ $\overline{\{x\}}$ jest przekrojem zbiorów $V(E_i)$, który zawiera x, to w szczególności każdy z tych zbiorów zawiera również y, stąd $y \in \overline{\{x\}}$.

$\Longrightarrow$

Trywialne z *(ii)*.

(iv) X jest T_0-przestrzenią (jeśli x, y są rozróżnialnymi punktami X, to albo istnieje otoczenie x które nie zawiera y, albo istnieje otocznie y, które nie zawiera x).

Weźmy dowolne punkty $x, y \in X$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ (lub $\mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$, ale WLOG pierwsza wersja)

Wtedy $x \in X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$, które jest zbiorem otwartym takim, że $y \notin X \setminus V(\mathfrak{p}_y)$.

2. $\mathfrak{p}_x \not\subseteq \mathfrak{p}_y$ i $\mathfrak{p}_y \not\subseteq \mathfrak{p}_x$

Wtedy $y \notin \overline{\{x\}}$ i $x \notin \overline{\{y\}}$. Czyli $y \in X \setminus \{x\}$ jest otwartym zbiorem zawierającym y ale niezawierającym x.

ZADANIE 19.

Przestrzeń topologiczna X jest nieredukowalna, jeśli $X \neq \emptyset$ i jeśli każda para niepustych otwartych podzbiorów X się przecina (równoważnie, każdy niepusty podzbiór otwarty jest gęsty w X). Pokaż, że $\mathrm{Spec}(A)$ jest nieredukowalny $\iff$ nilradykał A jest ideałem pierwszym.

$\Longrightarrow$

Chcę mieć punkt, którego dopełnienie jest wszystkim.

$\Longleftarrow$

Niech r będzie nilradykałem pierścienia A i niech r będzie ideałem pierwszym. Weźmy dowolne $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \triangleleft A$ i rozpatrzmy $U_1 = V(\mathfrak{a}_1)^c, U_2 = V(\mathfrak{a}_2)^c$.

ZADANIE 20

Niech X będzie przestrzenią topologiczną

(i) Jeśli Y jest nieredukowalną podprzestrzenią X, wtedy domknięcie $\overline{Y}$ w X jest nieredukowalne.

Załóżmy nie wprost, że $\overline{Y}$ nie jest nieredukowalna. Wtedy istnieją $U, V \subseteq \overline{Y}$ takie, że $U \cap V = \emptyset$. Ale zbiór $U \cap Y$ jest albo pusty albo jest zbiorem otwartym w Y. Tak samo dla $V \cap Y$. To znaczy, że $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ co jest sprzeczne z nieredukowalnością Y.

(ii) Każda nieredukowalna podprzestrzeń X jest zawarta w pewnej nieredukowalnej podprzestrzeni X.

Niech S będzie zbiorem nieredukowalnych podprzestrzeni X. Rozważmy łańcuch

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$$

podprzestrzeni z S. Niech $Y = \bigcup Y_i$. Musimy pokazać, że $Y \in S$, czyli Y jest nieredukowalny.

Niech $U, V \subseteq Y$. Wtedy istnieje i takie, że $U, V \subseteq Y_i$. Ponieważ Y_i jest nieredukowalna, to $U \cap V \neq \emptyset$. W takim razie każde dwa zbiory otwarte z Y tną się niepusto, a więc Y jest nieredukowalne.

Wystarczy użyć lematu Zorna dla zbioru $S_A = \{Y \subseteq X \ : \ Y \text{ nieredukowalna i } A \subseteq Y\}$.

(iii) Maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie X są domknięte i pokrywają X. Nazywamy je składowe nieredukowalne X. Jakie są składowe nieredukowalne przestrzeni Hausdorffa?

Niech $M \subseteq X$ będzie maksymalną podprzestrzenią nieredukowalną X. Domkniętość M wynika wprost z (ii). Gdyby M nie było domknięte, to $M \subsetneq \overline{M}$, a $\overline{M}$ też jest nieredukowalne i mamy sprzeczność z maksymalnością M.

Dlaczego pokrywają? Bo dla każdego $\{x\}$, $x \in X$ możemy rozpatrzeć zbiór wszystkich nieredukowalnych zbiorów takich, że $\{x\} \subseteq A$ i w ten sposób znajdziemy maksymalne zbiory nieredukowalne zawierające każdy element X, czyli pokrywające X.

W Hausdorffie możemy każde dwa punkty oddzielić dwoma rozłącznymi otwartymi otoczeniami, więc maksymalne nieredukowalne podprzestrzenie to singletony. I to właśnie przypadek, który mnie natchnął do wytłumaczenia jak pokryć X.

(iv) Jeśli A jest pierścieniem i $X = \mathrm{Spec}(A)$, wtedy składowe nieredukowalne X to zbiory domknięte $V(\mathfrak{p})$, gdzie $\mathfrak{p}$ to najmniejsza zbiory pierwsze A.

ZADANIE 21

Niech $\phi : A \to B$ *będzie homomorfizmem pierścieni. Niech* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *i* $Y = \mathrm{Spec}(B)$. *Jeśli* $\mathfrak{q} \in Y$*, to* $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ *jest ideałem pierwszym w* A*, w szczególności punktem* X*. Z tego powodu* ϕ *indukuje przekształcenie* $\phi^* : Y \to X$*. Pokaż, że*

(i) Jeśli $f \in A$*, wtedy* $\phi^{*-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$ *i dlatego* ϕ^* *jest ciągłe.*

$$\phi^{*-1}(X_f) = \{y \in Y \ : \ (f) \subsetneq \phi^*(y)\} = \{y \in Y \ : \ (f) \subsetneq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y \ : \ \phi(f) \subseteq y\} = Y_{\phi(f)}$$

(ii) Jeśli $\mathfrak{a}$ *jest ideałem* A*, wtedy* $\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$

$\mathfrak{a}^e$ to rozszerzenie obrazy $\phi(\mathfrak{a})$ do ideału w B.

$$\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = \{y \in Y \ : \ \mathfrak{a} \subseteq \phi^*(y)\} = \{y \in Y \ : \ \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(y)\} = \{y \in Y \ : \ \phi(\mathfrak{a}) \subseteq y\} = V(\phi(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$$

Ta ostatnia równość z jakiegoś poprzedniego zadanka, bo wtedy mam, że $V(E) = V((E))$ i to jest to samo.