RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 5

1. Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?

2. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina

$$\mathcal{L} = \big\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \mu_X(A) = \mu_Y(A) \big\}.$$

jest λ-układem.

3*. Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$ oraz ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

4. Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (zbiór A nazywamy symetrycznym jeżeli $A = -A$).

5. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p. Niech X będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

6. Wykonujemy niezależnie ciąg identycznych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi $p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$. W ciagu jednej sekundy wykonujemy n doświadczeń. Niech X_n będzie momentem otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X_n. Zbadaj zachowanie tego rozkładu, gdy $n \to \infty$.

7. Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ w przypadku rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym bezatomowym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$.

8. (*Twierdzenie Poissona*) Niech $p_{k,n}$ będzie prawdopodobieństwem zajścia dokładnie k sukcesów w n próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie pojedynczego sukcesu p_n. Dla każdego ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\lim_{n \to \infty} p_{k,n} \ , \qquad \text{jeśli} \quad \lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda > 0 \ .$$

9. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Niech $Y = e^X$, $Z = X^2$. Wyznacz dystrybuanty i gęstości zmiennych losowych X i Y.

10. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

Udowodnij, że $1/X$ ma ten sam rozkład, co X.

11. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^d$. Wskaż przestrzeń probabilityczną oraz d-wymiarową zmienną losową, której rozkład jest miarą μ.

12. Mówimy, że zmienna losowa X jest niezdegenerowana, tzn. $\mathbb{P}[X = a] < 1$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie zmienne losowe X oraz liczby rzeczywiste b, c takie, że X ma taki sam rozkład jak

$bX + c$.

13. Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

(1) Sprawdź, że f jest rzeczywiście gęstością.
(2) Oblicz $\mathbb{P}[1/2 \leq X \leq 3/4, 1/4 \leq Y \leq 1/2]$.
(3) Znajdź rozkłady brzegowe X i Y. Czy są one absolutnie ciągłe? Jeżeli tak, to oblicz ich gęstosci.

14. Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} Cye^{-xy} & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

(1) Oblicz wartość stałej C.
(2) Oblicz $\mathbb{P}[1/2 \leq X \leq 3/4, 1/4 \leq Y \leq 1/2]$.
(3) Znajdź rozkłady brzegowe X i Y. Czy są one absolutnie ciągłe? Jeżeli tak, to oblicz ich gęstosci.