Algebra 2R, lista 6.

Zadanie domowe: jak zwykle (zadania oznaczone minusem nie mogą być zadaniami domowymi, nie mogą też być deklarowane).

1. Udowodnić, że w definicji rozszerzenia ciał przez pierwiastniki możemy założyć, że $L_k \subseteq L_0$ jest Galois[1].

2. – Załóżmy, że G jest grupą oraz $H \lhd G$. Udowodnić, że jeśli H i G/H są rozwiązalne, to G jest rozwiązalna.

3. Znaleźć $a \in L$ takie, że $L = \mathbb{Q}(a)$, gdzie L jest ciałem rozkładu nad $\mathbb{Q}$ wielomianu:
   (a) $X^3 - 3$,
   (b) $(X^3 - 3)(X^2 - 2)$.

4. Znaleźć $a \in L$ takie, że $L = K(a)$, gdzie
   (a) $K = \mathbb{Q}$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $X^4 - 2$ nad K
   (b) $K = \mathbb{Q}(i)$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $X^4 - 2$ nad K

5. Niech $K = F_p(X^p, Y^p)$ i $L = F_p(X, Y)$. Udowodnić, że nie istnieje $a \in L$ taki, że $L = K(a)$.

6. Wyznaczyć $G(L/K)$ gdy:
   (a) $K = \mathbb{C}(X^4), L = \mathbb{C}(X)$,
   (b) $K = \mathbb{Q}$ i $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$

7. Wyznaczyć $G(L/K)$ gdy:
   (a) $K = \mathbb{Q}$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ nad K,
   (b) $K = \mathbb{Q}$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $(X^3 - 3)(X^3 - 2)$ nad K.
   Uwaga: w tym i poprzednim zadaniu "wyznaczyć $G(L/K)$" oznacza: opisać strukturę algebraiczną tej grupy.

8. Znaleźć (poprzez wskazanie ich generatora nad $\mathbb{Q}$) wszystkie ciała pośrednie
   (a) między $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$
   (b) między $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

---

[1] Bso $L_0 \subseteq \widehat{L_k}$. Niech L' będzie normalnym domknięciem L_0 nad L_k, w $\widehat{L_k}$. Wtedy L' jest złożeniem ciał $f_0[L_0], \ldots, f_m[L_0]$ dla pewnych skończenie wielu $f_0, \ldots, f_m \in Gal(\widehat{L_k}/L_k)$, gdzie $f_0 = id$. Używając ciał $f_i[L_j]$ (w odpowiedniej kolejności) wydłużyć ciąg $L_k \subset L_{k-1} \subset \ldots \subset L_0$ tak, by kończył się ciałem L'.