Równania różniczkowe 1R

23 kwietnia 2023 r.

G. KARCH & SZ. CYGAN & M. TADEJ

Jest tylko 10 rodzajów ludzi na świecie:
ci, którzy rozumieją układ dwójkowy,
i ci, którzy go nie rozumieją.

Autor nieznany

Stabilność w sensie Lapunowa

Zadanie 1. Ustal, czy rozwiązania stacjonarne równania $x' = -x(1-x)$ są stabilne czy niestabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 2. Zbadaj stabilność rozwiązań zagadnienia początkowego:

a) $y' = 1 + t - y, \quad y(0) = 0;$ b) $y' = 2t(y+1), \quad y(0) = 0.$

Zadanie 3. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania równania $y' = y^2$ z warunkiem początkowym $x(0) \geq 0$ są niestabilne, natomiast rozwiązania z warunkiem początkowym $x(0) < 0$ są stabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 4. Udowodnij, że stabilność rozwiązań dowolnego rozwiązania $y(t)$ niejednorodnego układu równań liniowych $y' = Ay + f(t)$ jest równoważna stabilności rozwiązania stacjonarnego $y \equiv 0$ równania jednorodnego $y' = Ay$.

Punkty stacjonarne układów na płaszczyźnie

Zadanie 5. Nie obliczając wartości własnych poniższej macierzy udowodnij, że każde rozwiązanie układu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zbiega do zera gdy $t \to \infty$.

WSKAZÓWKA: Udowodnij, że proste $y = 3x$ oraz $x = 3y$ dzielą płaszczyznę fazową na cztery obszary, w których pochodne x' i y' mają ustalony znak.

Zadanie 6. Naszkicuj portrety fazowe następujących układów równań różniczkowych:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Zadanie 7. Zbadaj charakter punktów stacjonarnych układów równań:

a) $x' = y + 3x^2, \quad y' = x - 3y^2;$ c) $x' = e^{x+y} - 1, \quad y' = \sin(x+y);$

b) $x' = y + \cos y - 1, \quad y' = -\sin x + x^3;$ d) $x' = -xy^4, \quad y' = x^4 y.$

(Czy punkt jest węzłem, ogniskiem, środkiem? Czy jest stabilny?)

Zadanie 8. Określ, dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie zerowe jest stabilne

a) $x' = ax - 2y + x^2, \quad y' = x + y + xy;$ b) $\dot{x} = ax + y + x^2, \quad y' = x + by + y^2.$

Stabilność rozwiązań w sensie Lapunowa

Niech będzie dane równanie

$$x' = f(x),$$

gdzie $f : Q \to \mathbb{R}^m$ oraz $Q \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym zawierającym początek układu współrzędnych. Zakładamy, że f jest klasy C^1 oraz spełnia warunek $f(0) = 0$.

Fakt 1. Jeżeli chcemy badaść przy pomocy powyższego twierdzenia stabilność rozwiązania $\bar{x}(t)$ innego niż tożsamościowo równe zeru, to wówczas w równaniu należy dokonaść podstawienia $x(t) = z(t) - \bar{x}(t)$. Wówczas funkcja $z(t)$ spełnia równanie różniczkowe $z' = f(z - \bar{x}) + \bar{x}'$. Zauważmy, że $\bar{z} \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego nowego równania i wystarczy badaść jego stabilność.

Stabilność rozwiązań układu równań liniowych

Twierdzenie 2.
Rozważamy układ liniowy o stałych współczynnikach $\bar{x} = A\bar{x}$.

- a) Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemną część rzeczywistą, to rozwiązane $\tilde{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne. Dodatkowo, istnieją dodatnie stałe Ki α takie, że każde rozwiązanie $\bar{x} = \bar{x}(t)$ tego układu spełnia oszacowanie $\|\bar{x}(t)\| \le Ke^{-\alpha t}\|x(0)\|$.
- b) Jeżeli co najmniej jedna wartość własna macierzy A ma dodatnią część rzeczywistą, to rozwiązanie $\tilde{x}(t) \equiv 0$ jest niestabilne.

Linearyzacja układu równań różniczkowych

Twierdzenie 3. Rozważamy układ równań różniczkowych

$$\bar{x} = A\bar{x} + g(\bar{x}),$$

gdzie macierz A jest macierzą kwadratową o stałych współczynnikach, natomiast $g = g(\bar{x}) = g(x_1, ..., x_n)$ jest funkcją klasy C^1 taką, że $g(0) = 0$ oraz $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$.

- a) Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemną część rzeczywistła, to rozwiązane $\tilde{x}(t) \equiv 0$ układu jest asymptotycznie stabilne. Dodatkowo, istnieją dodatnie stałe K i α takie, że każde rozwiązanie $\bar{x} = \bar{x}(t)$ układu z dostatecznie małym warunkiem początkowym $\|x(0)\|$ spełnia oszacowanie $\|\bar{x}(t)\| \le Ke^{-\alpha t}\|x(0)\|$.
- b) Jeżeli co najmniej jedna wartość własna macierzy A ma dodatnią część rzeczywistą, to rozwiązanie $\tilde{x}(t) \equiv 0$ układu () jest niestabilne.

Punkt a) dowodzi się przy pomocy równoważnego sformułowania całkowego

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(\bar{x}(s))\, ds.$$

Kluczową rolę odgrywa tutaj oszacowanie rozwiązań układu równań liniowych zawarte w twierdzeniu poprzednim. Dowód punktu b) został pominięty ma wykładzie.

Linearyzacją nieliniowego układu $\bar{x}' = f(\bar{x})$ w pukcie równowagi $\bar{x} \equiv 0$ nazywamy układ równań liniowych $\bar{x}' = A\bar{x}$, gdzie macierz $A = Df(0)$.