ZADANIE 1.

Pokaż, że $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ *jeśli* m, n *są względnie pierwsze.*

Załóżmy, że m, n są względnie pierwsze, czyli z równości Bezout'a:

$$am + bn = 1$$

teraz popatrzmy na dowolny element produkciku:

$$x \otimes y = (xy) \otimes (am + bn) = (xy) \otimes (am) + (xy) \otimes (bn) = (amx) \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 \otimes y + (xy) \otimes 0 = 0 + 0 = 0$$

Czyli każdy element jest 0, więc całość też jest 0.

ZADANIE 2.

Niech A *będzie pierścieniem,* $\mathfrak{a}$ *ideałem, a* M A*-modułem. Pokaż, że* $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ *jest izomorficzne do* $M/\mathfrak{a}M$.
[Stensoruj ciąg dokładny $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ *z* M

To jest tak, że jak miałam sobie

$$\mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

i jakiś losowy A-moduł M, to

$$\mathfrak{a} \otimes M \to A \otimes M \to A/\mathfrak{a} \otimes M \to 0$$

też jest ciągiem dokładnym!

Zajebiście, to teraz jak te pyśki szły? Pierwszy jest iniekcją, drugi jest suriekcją i ten drugi indukuje izomorfizm $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ na M'' (f to pierwsza funkcja, a myśki lecą $M' \to M \to M''$.)

Czyli co? Jak wygląda ta iniekcja $\mathfrak{a} \to A$? To jest identyczność na $\mathfrak{a}$ lol.

Jak na razie mam, że

$$A/\mathfrak{a} \otimes M \cong (A \otimes M)/(\mathfrak{a} \otimes M) \cong AM/\mathfrak{a}M = M/\mathfrak{a}M$$

ZADANIE 3.

Niech A *będzie pierścieniem lokalnym,* M, N *skończenie generowanymi* A*-modułami. Udowodnij, że* $M \otimes N = 0$ *wtedy* $M = 0$ *lub* $N = 0$.

[Niech $\mathfrak{m}$ *będzie ideałem maksymalnym,* $k = A/\mathfrak{m}$ *będzie residue filed (to jest ciało zrobione przez wytentegowanie z tym tym). Niech* $M_k = k \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ *na mocy zadania 2. Z lematu Nakayamy mamy, że* $M_k = 0 \implies M = 0$. *Ale* $M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \implies M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0$ *or* $N_k = 0$, *since* M_k, N_k *są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem.]*

Czyli co, ja mam uzasadnić po prostu przejścia w tym łańcuszku?

$$M \otimes_A N = 0 \implies (M \otimes_A N)_k = 0 \overset{(\star)}{\implies} M_k \otimes_k N_k = 0 \overset{(\heartsuit)}{\implies} M_k = 0 \vee N_k = 0$$

Bo cała reszta wydaje się mieć sens?

$(\star)$ $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0 \implies (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) = 0$

Jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to $(k \otimes_A M) \otimes_A N) = 0$, czyli $k \otimes_A M$

A to to jest raczej proste, bo jeśli $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$, to tym bardziej $k \otimes_k (k \otimes_A (M \otimes_A N)) = 0$ a jak się poprzestawia, bo to raczej jest izomorficzne, chyba że nagle świat staną na głowie, to dostaję $k \otimes_A M \otimes_k k \otimes_A N$.

($\heartsuit$) $M_k \otimes_k N_k = 0 \implies M_k = 0 \lor N_k = 0$? Nie no, to jest raczej oczywiste z tego ten ten na N.

POKOPAŁAM TE RÓWNOŚCI I CO JEST CZYM AAAAAAAAAA – zapytać jak się zmienia to nad czym tensorujemy

Chwila, bo $0 = k \otimes_A (M \otimes_A N) = (k \otimes_A M) \otimes_A N$

ZADANIE 4.

Niech M_i $(i \in I)$ będzie dowolną rodziną A-modułów i niech M będzie ich sumą prostą. Pokaż, że M jest płaski $\iff$ każdy M_i jest płaski

Mamy funktor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ i on jest na kategorii A-modułów i homomorfizmów. Jeśli T_N jest dokładny, czyli tensorowanie z N przekształca wszystkie ciągi dokładne na ciągi dokładne, wtedy N jest flat A-modułem.

$\Longleftarrow$ pójdzie chyba z faktu, że $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

$\Longrightarrow$

Wiem, że jeśli mam ciąg dokładny

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$

dla dowolnych N_i, to wtedy tensorowanie przez M zachowuje dokładność, tzn ciąg

$$0 \to N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M \to N_3 \otimes M \to 0$$

jest nadal dokładny.

Co by się stało, jeśli któraś współrzędna M nie jest flat? Wtedy mogłam N wybrać tak, żeby

$$0 \to N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i \to N_3 \otimes M_i \to 0$$

nie było dokładne, czyli tutaj psuje się iniekcja

$$f_1 : N_1 \otimes M_i \to N_2 \otimes M_i$$

No dobra, ale ja mogę zapisać sobie

$$M = M_i \bigoplus_{j \neq i} M_j$$

i zrobić

$$F_1 : N_1 \otimes (M_i \bigoplus M_j) \to N_2 \otimes (M_i \bigoplus M_j)$$

czyli coś typu $n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto n_2 \otimes (m_i, m)$, ale mam też izomorfizmy

$$n_1 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_1, m_i) \otimes (n_1, m)$$

$$n_2 \otimes (m_i, m) \mapsto (n_2, m_i) \otimes (n_2, m)$$

no i tak jakby iniekcyjność F_1 jest psuta przez brak inikcyjności w f_1, czyli sprzeczność? Bo przecież $F_1 = f_1 \otimes F'$ dla jakiejś ładnej iniekcji F'.

ZADANIE 5.

Niech $A[X]$ będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad pierścieniem A. Pokaż, że $A[X]$ jest płaską A-algebrą.

No jak dla mnie to $A[X]$ to jest suma prosta $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Ax^n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ i $A[X]$ to moduł wolny. Ah, no i teraz korzystam z tego, że $A \otimes M = M$ i śmiga.

ZADANIE 6.

Dla dowolnego A-moduły, niech M[X] będzie oznaczało zbiór wszystkich wielomianów w x o współczynnikach z M, to znaczy wyrażenia formy

$$m_0 + m_1 x + \ldots + x_r x^r$$

Zdefiniuj iloczyn elementu A[X] z elementem M[X] w oczywisty sposób, pokaż że M[X] jest A[X]-modułem. Pokaż, że $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Jak to leciało dla A-modułu? $a, b \in A, x, y \in M$

$$a(x+y) = ax + ay$$
$$(a+b)x = ax + by$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1x = x$$

Czy ja chce brać sobie $w, v \in M[X]$ oraz $p, r \in A[X]$ i robić zwykłe mnożenie wielomianów? Chyba tak XD

$$\begin{aligned} p(w+v) &= \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum w_i x^i + \sum v_i x^i\right) = \left(\sum p_i x^i\right)\left(\sum (w_i + v_i) x^i\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k} p_i(w_j + v_j)x^k\right) = \sum\left(\sum p_i w_j x^k + \sum p_i v_j x^k\right) = \\ &= \sum\sum p_i w_j x^k + \sum\sum p_i v_j x^k = pw + pv \end{aligned}$$

I reszty sprawdzania to mi się nie chce.

Homomorfizm na

$$f : M[X] \to A[X] \otimes_A M$$
$$f(\sum m_j x^j) = \sum (x^j \otimes m_j)$$

jest $1-1$, bo każdy wielomian jest unikalny ze względu na współczynniki przy kolejnych potęgach, bla bla bla. Widać. Nawet mi się nie chce tego pisać ładnie

To teraz w drugą stronę jest też dość prosty

$$g : A[X] \otimes_A M \to M[X]$$
$$g(\left(\sum a_i x^i\right) \otimes m) = \sum a_i m x^i$$

ZADANIE 7.

Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem pierwszym w A. Pokaż, że $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym w A[X]. Czy jeśli $\mathfrak{m}$ jest ideałem pierwszym w A, to $\mathfrak{m}[X]$ jest ideałem maksymalnym w A[X]?

Z poprzedniego zadania wiem, że $\mathfrak{p}[X] \cong A[X] \otimes_A \mathfrak{p}$, bo każdy ideał jest A-modułem.

Czy mogę określić sobie homomorfizm (ewualuację w $x = 1$)

$$f : A[X] \to A$$

$$f(\sum a_i x^i) = \sum a_i$$

i wtedy $f^{-1}[\mathfrak{p}]$ jest całością $\mathfrak{p}[X]$ jest ideałem pierwszym jako przeciwobraz ideału pierwszego przez homomorfizm.

Alternatywnie

$$(A[X])/(\mathfrak{p}[X]) \cong (A/\mathfrak{p})[X]$$

w pierwszym zadaniu z poprzedniego rozdziału pokazywaliśmy, że $f \in A[X]$ jest dzielnikiem zera $\iff$ $af = 0$ dla pewnego $a \in A \setminus \{0\}$, czyli $\iff$ w A są dzielniki zera. Ale w $(A/\mathfrak{p})$ dzielników zera nie ma, bo wszystkie są w $\mathfrak{p}$ który to wyrzuciliśmy, więc śmiga.