

# Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

## Lista 10

**Exercise 1.** Pokaż, że jeśli  $0 < p < q$ , to

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Dowód taki, jak wiele dowodów na analizie funkcjonalnej.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &= \mathbb{E}|X \cdot 1|^p \leq \left[ \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} \left[ \mathbb{E}1^{\frac{q}{q-p}} \right]^{\frac{q-p}{q}} = [\mathbb{E}|X|^q]^{\frac{p}{q}} \\ &[\mathbb{E}|X|^p]^{\frac{1}{p}} \leq [\mathbb{E}|X|^q]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

\* wynika z nierówności Höldera dla  $\frac{q}{p}$  i  $\frac{q}{q-p}$ . Wszystko śmiga, bo  $\mathbb{E}$  to tak naprawdę całkowanie względem miary  $\mathbb{P}$   $[\mathbb{E}|X|^p]$ , więc np.  $\mathbb{E}1 = \int 1 d\mathbb{P} [\mathbb{E}|X|^p] = 1$  bo prawdopodobieństwo całości to dokładnie 1.

**Exercise 2.** (Reguła n sigma) Pokaż, że jeśli  $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ , to

$$\mathbb{P} [|X - \mathbb{E}X| > n\sigma] \leq \frac{1}{n^2}$$

Nierówność Czebyszewa:

$$\mathbb{P} [|X - \mu| > \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X - \mu|))}{f(\lambda)}.$$

Niech  $\lambda = n\sigma$  i  $f(x) = x^2$ . Podstawiając do wzoru wyżej:

$$\mathbb{P} [|X - \mu| > n\sigma] \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mu|^2}{n^2\sigma^2} = \frac{\text{Var}(X)}{n^2\sigma^2} = \frac{1}{n^2}$$

**Exercise 3.** Sprawdzić, że zdarzenie  $\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = a\}$  należy do  $\mathcal{F}_\infty$ .

