# Rozmaite cierpienia

# Spis treści

# 1. Wektory styczne

**Oznaczenia z analizy matematycznej:**

- dla gładkiej funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ takiej, że $f = (f_1, ..., f_n)$ i dla $t \in (a,b)$ pochodną nazywamy wektor

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ ... \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

- dla gładkiego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $p \in U$ oznaczamy macierz pierwszych pochodnych cząstkowych w punkcie p przez $D_p f$. Dokładniej, jeśli $f = (f_1, ..., f_m)$ i $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ są wszystkie gładkie, to

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

  Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p).

## 1.1. Przestrzeń styczna - definicja kinematyczna

Przestrzeń styczną będziemy definiować przez styczność krzywych gładkich.

J.M. Lee definiuje przestrzeń styczną przy pomocy derywacji oraz przedstawia możliwość użycia m.in. kiełków funkcji gładkich

Niech M będzie gładką rozmaitością. **Krzywą gładką** na M nazywamy gładkie odwzorowanie $c : (a,b) \to M$. O krzywej gładkiej c takiej, że $c(t_0) = p$ mówimy, że jest *zbazowana w p* . Zbiór par $(c, t_0)$ krzywych zbazowanych w p oznaczamy $C_p M$.

**Definicja 1.1.** Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p. Krzywe $(c_1, t_1)$ i $(c_2, t_2)$ zbazowane w p są do siebie styczne w mapie $(U, \phi)$ jeśli $(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$.

**Lemat 1.2.** *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ *są styczne w mapie* $(U, \phi)$ *wokół* p*, to są też styczne w dowolnej innej mapie* $(W, \psi)$ *wokół* p *(zgodnej z* $(U, \phi)$*).*

**Dowód.**

$$\begin{aligned}(\psi \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)(t_1)]' = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \circ [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)(t_2)]' \\ &= (\psi \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

☕

**Definicja 1.3.** Krzywe $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, jeżeli są styczne w pewnej (równoważnie każdej) mapie wokół p.

Relacja styczności krzywych jest relacją równoważności na $C_p M$, bo jest zwrotnia, symetryczna i przechodnia ($(\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_2)'(t_2)$ i $(\phi \circ c_2)'(t_2) = (\phi \circ c_3)'(t_3) \implies (\phi \circ c_1)'(t_1) = (\phi \circ c_3)'(t_3)$).

**Definicja 1.4.** **Przestrzenią styczną** do M w punkcie p nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji styczności krzywych zbazowanych w p

$$T_p M := C_p M / stycznosc$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_p M$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$. Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie p.

## 1.2. Struktura wektorowa przestrzeni $T_pM$

Dla mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy dwa odwzorowania:

$$\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad \phi_p^*([c, t_0]) = (\phi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_{\phi,p} : \mathbb{R}^n \to T_pM \qquad \lambda_{\phi,p}(v) = [c_v, 0]$$

gdzie $c_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$.

Odwzorowanie $\phi_p^*$ jest dobrze określone z definicji $T_pM$ (wszystkie krzywe z jednej klasy abstrakcji mają tę samą pochodną w jednej mapie).

**Lemat 1.5.** *$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^* = \mathrm{id}_{T_pM}$, czyli $\phi_p^*$ i $\lambda_{\phi,p}$ są one wzajemnie jednoznacze i do siebie odwrotne.*

**Dowód.** Niech $v \in \mathbb{R}^n$, wtedy

$$\phi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \phi_p^*([c_v, 0]) = (\phi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + t \cdot v)) =$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi(p) + tv) = v \qquad \checkmark$$

Niech $[c, t_0] \in T_pM$

$$\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\phi,p}((\phi \circ c)'(t_0)) = [c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$$

gdzie $c_{(\phi\circ c)'(t_0)}(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(t_0))$. W mapie $\phi$ zachodzi więc:

$$(\phi \circ c_{(\phi\circ c)(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} [\phi(p) + t \cdot (\phi \circ c)'(t_0)] = (\phi \circ c)'(t_0)$$

W takim razie $(c, t_0)$ i $(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0)$ są krzywymi stycznymi i mamy $[c, t_0] = [(c_{(\phi\circ c)'(t_0)}, 0]$ i w takim razie $\lambda_{\phi,p} \circ \phi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$ $\checkmark$.

☕

**Fakt 1.6.** *Na przestrzeni stycznej $T_pM$ istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania $\phi_p^*$ oraz $\lambda_{\phi,p}$ dla wszystkich map $\phi$ wokół $p$ są liniowymi izomorfizmami.*

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary następująco:

- dla $X, Y \in T_pM$: $X + Y := \lambda_{\phi,p}(\phi_p^*(X) + \phi_p^*(Y))$ (suma w środku jest sumą w $\mathbb{R}^n$)
- dla $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot X := \lambda_{\phi,p}(a \cdot \phi_p^*(X))$ (mnożenie przez skalar w $\mathbb{R}^n$).

**Dowód.** Struktura przestrzeni wektorowej musi być przeniesiona z $\mathbb{R}^n$ przez $\lambda_{\phi,p}$. Wystarczy więc uzasadnić, że dla różnych map $\phi, \psi$ wokół $p$ przeniesione z $\mathbb{R}^n$ na $T_pM$ struktury liniowe pokrywają się, to znaczy złożenie odwzorowań

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{\psi_p^* = \lambda_{\psi,p}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe.

$$\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}(v) = \psi_p^*([c_v, 0]) = (\psi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \psi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv) =$$
$$= D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})[\frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi(p) + tv)] = D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v)$$

Przekształcenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\phi,p}$ pokrywa się z działaniem macierzy $D_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})$, a więc jest liniowe.

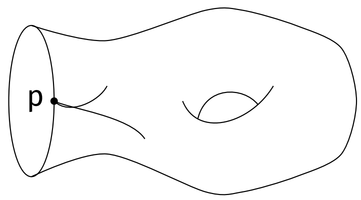
☕

O odwzorowaniu $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ można myśleć jak o "mapie" dla $T_pM$ stowarzyszonej z mapą $\phi$ otoczenia punktu p. W tej mapie działania na wektorach z $T_pM$ sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w $\mathbb{R}^n$.

**Przykład:**

- Dla $M = \mathbb{R}^n$ mamy wyróżnioną mapę $\phi : M = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi = id_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p \in M$ mapa ta, poprzez $\phi_p^* = (id_{\mathbb{R}^n})^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.
- Analogiczna sytuacja zachodzi z $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru i $p \in U$, gdzie inkluzja $i : U \to \mathbb{R}^n$ jest traktowana jako mapa.

Dla rozmaitości M z brzegiem i $p \in \partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c : [t_0, b) \to M$ oraz $c : (a, t_0[ \to M$ takie, że $c(t_0) = p$ oraz pary $(c, t_0)$ jako elementy $C_pM$. Inaczej dla niektórych "kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory. Styczność na $T_pM$ określa się potem w sposób analogiczny jak dla rozmaitości bez brzegu.



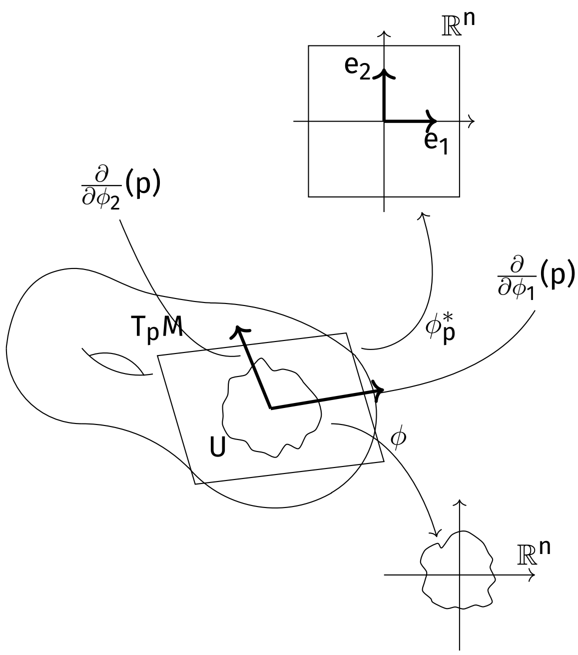

Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $U \subseteq \mathbb{R}^n$) w punkcie p odpowiadające wektorom bazowym $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Tworzą one bazę $T_p\mathbb{R}^n$ ($T_pU$), zaś dowolny wektor z $T_p\mathbb{R}^n$ ($T_pU$) ma postać $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. [0cm]

Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami

Analogicznie, dla dowolnej rozmaitości M i $p \in M$ oraz mapy $\phi$ wokół p przeciwobraz przez $\phi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$ wersorów $e_1, ..., e_n$ oznaczamy:

$$(\phi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p).$$

Elementy te tworzą bazę $T_pM$ i dowolny wektor z $T_pM$ ma postać $\sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)$.




## 1.3. Różniczka

Rozważmy funkcję gładką $f : M \to N$ i $p \in M, f(p) = q \in N$. Dla krzywej zbalansowanej $(c, t_0) \in C_pM$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_qN$.

**Lemat 1.7.** *Jeżeli* $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne, to* $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_qN$ *też są styczne*

**Dowód.** Niech $\phi$ będzie mapą wokół p, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, zaś $\psi$ mapą wokół q, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ c_1)'(t_1) &= [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_1)'(t_1)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_2)'(t_2)] = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_2)]'(t_2) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(t_2)\end{aligned}$$

Zatem krzywe $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ są styczne. ☕

**Definicja 1.8.** **Różniczką** f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$.

Odwzorowanie różniczkowe jest dobrze określone na mocy Lematu 1.7.

**Lemat 1.9.** $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *jest odwzorowaniem liniowym.*

**Dowód.** Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\phi,p}} T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\psi^*_{f(p)}} \mathbb{R}^n$$

jest liniowe (analogicznie jak przy dowodzie 1.6).

$$\begin{aligned}\psi_{f(p)} \circ df_p \circ \lambda_{\phi,p}(v) &= \psi^*_{f(p)} \circ df_p([c_v, 0]) = \psi^*_{f(p)}([f \circ c_v, 0]) = \\ &= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_v)]'(0) = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot [(\phi \circ c_v)'(0)] = \\ &= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})[v]\end{aligned}$$

jest to przekształcenie zadane macierzą, a więc liniowe. ☕

Dla gładkiej funkcji $f : M \to N$ odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ wyznaczyliśmy w mapach $\phi$ wokół p i $\psi$ wokół f(p) jako

$$\psi^*_{f(p)} df_p \lambda_{\phi,p}(p) = D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1})(v).$$

Stąd, odwzorowanie $df_p$ w bazach $\{\frac{\partial}{\partial \phi_i}(p)\}$ w $T_pM$ i $\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(p)\}$ w $T_{f(p)}N$ zapisuje się macierzą

$$D_{\phi(p)}(\psi f \phi^{-1}) = \left( \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \right)_{ij}$$

$$df_p \left[ \sum a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(p) \right] = \sum_i \left[ \sum_j \frac{\partial(\psi f \phi^{-1})}{\partial x_j}(\phi(p)) \cdot a_j \right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(f(p))$$

**Przykłady:**

1. Niech $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie między dwiema rozmaitościami. Wówczas różniczka $d\phi_p : \underbrace{T_pU}_{=T_pM} \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$

# Spis twierdzeń