Algebra 2R

a voyage into the unknown

koteczek

∼

Spis treści

Wykład 1: Teoria równań algebraicznych

Przez R, S będziemy oznaczać pierścienie przemienne z $1 \neq 0$, natomiast K, L będziemy rezerwować dla oznaczeń ciał.

1.1 Rozwiązywanie układów równań

Rozważmy funkcje $f_1, ..., f_m \in R[X_1, ..., X_n]$. Dla wygody będziemy oznaczać krotki przez $\overline{X}$, czyli $R[X_1, ..., X_n] = R[\overline{X}]$. Pojawia się problem: *czy istnieje rozszerzenie pierścieni z jednością* $R \subseteq S$ *takie, że układ* $U : f_1(\overline{X}) = ... = f_m(\overline{X}) = 0$ *ma rozwiązanie w pierścieniu* S*?*

Fakt 1.1. $\overline{a} = (a_1, ..., a_n) \subseteq S$, *gdzie* S *jest rozszerzeniem pierścienia* R, *jest* *rozwiązaniem układu równań* $U \iff g(\overline{a}) = 0$ *dla każdego wielomianu* $g \in (f_1, ..., f_m) \lhd R[X]$.

Dowód. $\Longleftarrow$ Implikacja jest dość trywialna, jeśli każdy wielomian z $(f_1, ..., f_m)$, czyli wytworzony za pomocą sumy i produktu wielomianów $f_1, ..., f_m$ zeruje się na $\overline{a}$, to musi zerować się też na każdym z tych wielomianów.

$\Longrightarrow$ Rozważamy dwa przypadki:

1. $(f_1, ..., f_m) \ni b \neq 0$ i $b \in R$.

   To znaczy w $(f_1, ..., f_m)$ mamy pewien niezerowy wyraz wolny. Wtedy mamy wielomian $g \in (f_1, ..., f_m)$ taki, że $g(\overline{a}) \neq 0$. Ale przecież g jest kombinacką wielomianów $f_1, ..., f_m$, która na $\overline{a}$ przyjmują wartość 0. W takim razie dostajemy układ sprzeczny i przypadek jest do odrzucenia.

2. 2. $(f_1, ..., f_m) \cap R = \{0\}$. (nie ma wyrazów wolnych różnych od 0)

   Teraz wiemy, że układ U jest niesprzeczny, a więc możemy skonstruować pierścień z 1 S będący rozszerzeniem R $[S \supseteq R]$ oraz rozwiązanie $\overline{a} \subseteq S$ spełniające nasz układ równań.

   Niech $S = R[\overline{X}]/(f_1, ..., f_m)$ i rozważmy

   $$j : R[\overline{X}] \to S = R[\overline{X}]/(f_1, ..., f_m)$$

   nazywane przekształceniem ilorazowym . Po pierwsze, zauważmy, że $j \restriction R$ jest $1-1$, bo

   $$\ker(j \restriction R) = \ker(j) \cap R = (f_1, ..., f_m) \cap R = \{0\}$$

   i dlatego

   $$j \restriction R : R \xrightarrow{\cong} j[R] \subseteq S.$$

   Z uwagi na ten izomorfizm, będziemy utożsamiać $R, j[R]$. W takim razie, S jest rozszerzeniem pierścienia R. Czyli mamy rozszerzenie pierścienia R.

   Niech
   $$\overline{a} = (a_1, ..., a_m) = (j(X_1), ..., j(X_n)) \subseteq S,$$
   czyli jako potencjalne rozwiązanie rozważamy zbiór obrazów wielomianów stopnia 1 przez wcześniej zdefiniowaną funkcję $j : R[\overline{X}] \to S$. Tak zdefiniowane $\overline{a}$ jest rozwiązaniem układu U w pierścieniu S, bo dla funkcji wielomianowej (czyli zapisywalnej jako wielomian) $\widehat{f_i} \in (f_1, ..., f_m)$ mamy
   $$\widehat{f_i}(\overline{a}) = \widehat{f_i}(j(X_1), ..., j(X_m)) = j(\widehat{f_i}(X_1, ..., X_m)) = j(f_i) = 0.$$

TUTAJ TRZEBA POUZASADNIAĆ KILKA RÓWNOŚCI, ALE MOŻE NIE BĘDĘ TEGO ROBIŁA NA AISD

Uwaga 1.2. *Skonstruowane powyżej rozwiązanie* $\overline{a}$ *układu* U *ma następującą własność uniwersalności:*

(☞) Jeżeli $S' \supseteq R$ *jest rozszerzeniem pierścienia z 1 i* $\overline{a}' = (a'_1, ..., a'_m) \subseteq S$ *jest rozwiązaniem* U *w* S', *to istnieje jedyny homomorfizm*

$$h : R[\overline{a}] \to R[\overline{a}']$$

taki, że $h \restriction R$ *jest identycznością na* R *i* $h(\overline{a}) = \overline{a}'$. *Wszystkie rozwiązania układów są homomorficzne.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\subseteq"'] & R[\bar{a}] \subseteq S \arrow[dl, "h"] \\ R[\bar{a}'] \subseteq S' & \end{tikzcd}$$

Tutaj $R[\bar{a}] \subseteq S$ **jest podpierścieniem generowanym przez** $R \cup \{\bar{a}\}$, czyli zbiór:

$$R[\bar{a}] = \{f(\bar{a}) \ : \ f(\bar{X}) \in R[\bar{X}]\} \subseteq S$$

Dowód. Niech $I = \{g \in R[\bar{X}] \ : \ g(\bar{a}') = 0\} \subseteq S'$. Oczywiście mamy, że $I \triangleleft R[\bar{X}]$, a więc

$$(f_1, ..., f_m) \subseteq I.$$

Z twierdzenia o faktoryzacji wie

$$\begin{tikzcd} R[\bar{X}] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi"'] & S = R[\bar{X}]/(f_1, ..., f_m) \arrow[dl, dashed, "(\exists\, !h)\ h(\bar{a}) = \bar{a}'"] \\ S' \supseteq R[\bar{a}'] & \end{tikzcd}$$

Homomorfizm $\phi : R[\bar{X}] \to R[\bar{a}']$ określamy wzorem

$$\phi(w) = w(\bar{a}),$$

a homomorfizm j jest jak wyżej odwzorowaniem ilorazowym. Widzimy, że

$$I = \ker(\phi)$$

$$\ker(j) = (f_1, ..., f_m).$$

Z twierdzenia o homomorfizmie pierścieni dostajemy jedyny homomorfizm

$$h : R[X]/(f_1, ..., f_m) \to R[\bar{a}]$$

taki, że $h(\bar{a}) = \bar{a}'$. ☕

Uwaga 1.3. *Jeśli* $I = (f_1, ..., f_m)$*, to* $h : R[\bar{a}] \xrightarrow{\cong} R[\bar{a}']$.

Wtedy mamy $\ker \phi = \ker j$, czyli $\ker(h \circ j) = \ker \phi = \ker j$, no a z tego wynika, że $\ker h$ jest trywialne, czyli h jest apimorfizmem (1-1). Z drugiej strony, $\mathrm{Im}\phi = \mathrm{Im}(h \circ j)$, a ϕ jest epimorfizmem ("na"), więc również h musi być "na".

Załóżmy, że $S \supseteq R$ jest rozszerzeniem pierścienia oraz $\bar{a} \in S^n$. Wtedy:

1. ideał $\bar{a}$ nad R definiujemy jako

$$I(\bar{a}/R) = \{g \in R[\bar{X}] \ : \ g(\bar{a}) = 0\}$$

2. $\bar{a}$ nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** układu U, jeśli ideał

$$I(\bar{a}/R) = (f_1, ..., f_m).$$

Uwaga 1.4. *W sytuacji jak z definicji wyżej, gdy U jest układem niesprzecznym, wtedy $\bar{a}$ jest rozwiązaniem ogólnym układu U $\iff$ zachodzi warunek* (☝) .

Dowód. Ćwiczenia. ☕

1.2 Rozszerzanie ciał

Dla $K \subseteq L$ ciał i $\bar{a} \subseteq L$ definiujemy **ideał** $\bar{a}$ **nad** K jako:

$$I(\bar{a}/L) := \{f(X_1, ..., X_n) \in K[\bar{X}] : f(\bar{a}) = 0\},$$

to znaczy generujemy ideał w wielomianach nad K zawierający wszystkie wielomiany (niekoniecznie tylko jednej zmiennej) zerujące się w $\bar{a}$.

Przykład:

Dla $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}, n = 1, a_1 = \sqrt{2}$ mamy

$$I(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) = \{f(x^2 - 2) \ : \ f \in \mathbb{Q}[X]\} = (x^2 - 2) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$$

Dalej, definiujemy

$$K[\bar{a}] := \{f(\bar{a}) \ : \ f \in K[X]\}$$

czyli **podpierścień** L **generowany przez** $K \cup \{\bar{a}\}$ oraz $K(\bar{a})$**, czyli podciało** L generowane przez $K \cup \{\bar{a}\}$:

$$K(\bar{a}) := \{f(\bar{a}) \ : \ f \in K(X_1, ..., X_n) \text{ i } f(\bar{a}) \text{ dobrze określone}\}.$$

Tutaj $K(X_1, ..., X_n)$ to ciało ułamków pierścienia $K[\bar{a}]$ w ciele L (czyli najmniejsze ciało, że pierścień może być w nim zanurzony). Czasami oznaczamy to przez $K[\bar{a}]_0$.

Uwaga 1.5. *Niech $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$ będą ciałami. Wybieramy $\bar{a}_1 \in L_1$ i $\bar{a}_2 \in L_2$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *istnieje izomorfizm $\phi : K[\bar{a}_1] \to K[\bar{a}_2]$ taki, że $\phi \restriction K = id_K$ oraz $\phi(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$.*
2. $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$.

Dowód. $1 \implies 2$

Implikacja jest jasna, bo dla $g(\bar{X}) \in K[\bar{X}]$, bo $g(\bar{a}_1) = 0$ w $K[\bar{a}_1] \iff g(f(\bar{a}_1)) = 0$, a $f(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$.

$1 \impliedby 2$

Zwróćmy uwagę na odwzorowanie ewaluacji $\bar{a}_1$

$$\phi_{\bar{a}_1} : K[\bar{X}] \xrightarrow{\text{"na"}} K[a_1]$$

zadane wzorem

$$\phi(w(\bar{X})) = w(\bar{a}_1).$$

Mamy

$$\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = I(\bar{a}_1/K).$$

Tak samo dla $\bar{a}_2$ możemy określić analogicznie odwzorowanie ewaluacyjne $\phi_{\bar{a}_2} : K[\bar{X}] \to K[\bar{a}_2]$. Wtedy

$$I(\bar{a}_2/K) = \ker(\phi_{\bar{a}_2}),$$

ale ponieważ $I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$, to $\ker(\phi_{\bar{a}_1}) = \ker(\phi_{\bar{a}_2})$. Oznaczmy $I = I(\bar{a}_1/K) = I(\bar{a}_2/K)$. Widzimy, że $\phi_{\bar{a}_i} \restriction K = id_k$.

$$\begin{tikzcd}
& K[\bar{X}] \arrow[dl, "\phi_{\bar{a}_1}"'] \arrow[d, "j\text{- ilorazowe}"] \arrow[dr, "\phi_{\bar{a}_2}"] & \\
K[\bar{a}_1] & K[X]/I \arrow[l, dashed, "\cong", "f_1"'] \arrow[r, dashed, "\cong"', "f_2"] & K[\bar{a}_2]
\end{tikzcd}$$

Niech $f = f_2 f_1^{-1} : K[\bar{a}_1] \to K[\bar{a}_2]$ jest funkcją spełniającą warunki punktu 1.

MOŻE TUTAJ ŁADNIE SPRAWDZIĆ ŻE NAPRAWDĘ JEST TO DOBRZE SPEŁNIAJĄCA WARUNKI FUNKCJA?

Uwaga. *Niech $I \triangleleft K[\bar{X}]$ noetherowskiego pierścienia $K[\bar{X}]$. Niech $I = (f_1, ..., f_m)$ dla pewnych $f_i \in K[\bar{X}]$. Wtedy istnieje rozszerzenie pierścienia $S \supseteq K$ oraz $\bar{a} \subseteq S$ - rozwiązanie ogólne układu $f_1(\bar{X}) = ... = f_m(\bar{X}) = 0$ takie, że $I(\bar{a}/K) = I$.*

Dowód. Uwaga 1.4.

Twierdzenie 1.6. *Niech $I \triangleleft K[\bar{X}]$. Wtedy istnieje ciało $L \supseteq K$ oraz $\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \subseteq L$ takie, że $f(\bar{a}) = 0$ dla każdego $f \in I$.*

Dowód. Niech $I \subseteq M \triangleleft K[\bar{X}]$ będzie ideałem maksymalnym. Niech $L = K[\bar{X}]/M$ i określmy przekształcenie ilorazowe

$$j : K[\bar{X}]/M \to L = K[\bar{X}]/M.$$

Ponieważ $M \cap K = \{0\}$ (bo inaczej w ideale byłby wielomian odwracalny), to $j \restriction K : K \to L$ jest funkcją $1-1$, czyli

$$j \restriction K : K \xrightarrow{1-1} j[K] \subseteq L.$$

Możemy utożsamić K z $j[K]$, czyli $K \subseteq L$. Niech $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ takie, że dla każdego $i \in [n]$

$$a_i = j(X_i) \in L.$$

Wtedy $g(\bar{a}) = 0$ dla każdego $g(\bar{X}) \in M \supseteq I$ (bo inaczej mielibyśmy wyrazy wolne).

Wniosek 1.7. *Niech $f \in K[X]$ stopnia > 0. Wtedy istnieje ciało $L \supseteq K$ rozszerzające ciało K takie, że f ma pierwiastek w ciele L.*

Przykłady:

1. 1. Rozpatrzmy ciało $K = \mathbb{Q}$ i $f(X) = X - 2$. Wtedy $I = (f) \triangleleft \mathbb{Q}[X]$ jest ideałem maksymalnym, bo jest on pierwszy (w tym wypadku nierozkładalny). Równanie $f = 0$ ma rozwiązanie ogólne w pierścieniu ilorazowym
$$\mathbb{Q}[X]/I \cong \mathbb{Q}.$$
Czyli nie zawsze musimy rozszerzać ciało do czegoś nowego.
2. 2. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[z]$ dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, co jest na liście zadań.

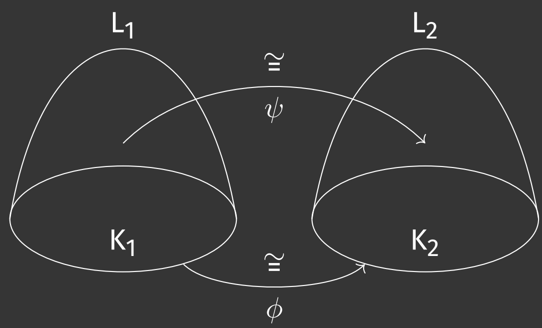
Załóżmy, że $K \subseteq L_1, K \subseteq L_2$ są rozszerzeniami ciała. Wtedy mówimy, że L_1 **jest izomorficzne z** L_2 **nad** K [$L_1 \cong_K L_2$] $\iff$ istnieje izomorfizm $f : L_1 \to L_2$ taki, że $f \restriction K = id_K$.

Fakt 1.8.

1. *Załóżmy, że $f(X) \in K[X]$ jest nierozkładalny. Niech $L_1 = K(a_1)$, $L_2 = K(a_2)$ i $f(a_i) = 0$ w L_i. Wtedy $L_1 \cong_K L_2$.*
2. *Ogólniej: załóżmy, że $\phi : K_1 \to K_2$ jest izomorfizmem i $f_1 \in K_1[X], f_2 \in K_2[X]$, $\phi(f_1) = f_2$, f_i jest nierozkładalne. Dodatkowo załóżmy, że $L_1 = K_1(a_1)$ i $L_2 = K_2(a_2)$, gdzie $f_i(a_i) = 0$ w L_i. Wtedy istnieje izomorfizm $\phi \in \psi : L_1 \to L_2$ taki, że $\psi(a_1) = a_2$.*

Dowód.

1. 1. $I(a_1/K) = (f) = I(a_2/K)$, stąd na mocy 1.5 mamy $K(a_1) \cong_K K(a_2)$. Po dowodzie przypadku 2. możemy uzasadniać, że jest to szczególny przypadek tego ogólniejszego stwierdzenia właśnie.
2. 2. Zacznijmy od rozrysowania tej sytuacji:



Izomorfizm $\phi : K_1[X] \xrightarrow{\cong} K_2[X]$ indukuje nam przekształcenie

$$K_1[X]/(f_1) \xrightarrow[\phi]{\cong} K_2[X]/(f_2),$$

bo $\phi(f_1) = f_2$. Wiemy, że f_i jest nierozkładalne, czyli

$$I(a_i/K_i) = (f_i) \triangleleft K_i[X]$$

jest ideałem maksymalnym. Mamy

$$L_i = K_i(a_i) = K_i[a_i] \cong K[X]/I(a_i/K_i).$$

$$\begin{tikzcd}
K_1[X] \arrow[rr, "\cong", "\phi"'] & & K_2[X] \\
& {} \arrow[d] & \\
& {} & \\
K_1[X]/(f_1) \arrow[rr, "\cong", "\phi"'] \arrow[d, "\cong"', "h_1"] & & K_2[X]/(f_2) \arrow[d, "\cong"', "h_2"] \\
L_1 = K_1(a_1) \arrow[rr, "\cong", "\psi"'] & & L_2 = K_2(a_2) \\
K_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "\phi"'] & & K_2 \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

Wykład 2: Ciała skończone i pierwiastki z jedności

Ciało $L \supseteq K$ nazywamy **ciałem rozkładu nad K** wielomianu $f \in K[X]$, gdy spełnione są warunki:

1. f rozkłada się w pierścieniu $L[X]$ na czynniki liniowe (stopnia 1)

2. Ciało L jest rozszerzeniem ciała K o elementy $a_1, ..., a_n$, gdzie $a_1, ..., a_n$ to wszystkie pierwiastki f w L.

Przykład: Jeżeli $\deg(f) = 0$, to nie istnieje ciało rozkładu f.

Wniosek 2.1. *Załóżmy, że $f \in K[X]$ jest wielomianem stopnia > 0. Wtedy*

1. istnieje L: ciało rozkładu f nad K,

2. to ciało jest jedyne z dokładnością do izomorfizmy nad K.

Dowód.

1. Dowód przez indukcje względem stopnia f

   Jako przypadek bazowy rozważmy f takie, że $\deg(f) = 1$. Wtedy $L = K$ i wszystko wniosek jest spełniony.

   Załóżmy teraz, że stopień wielomianu f jest > 1 i tez zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia $< \deg(f)$ i wszystkich ciał K'. Teraz z 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie ciała $L \supseteq K$ takie, że f ma pierwiastek w L. Nazwijmy ten pierwiastek a_0 i niech

   $$K' = K(a_0).$$

   Ponieważ $K'[X]$ wielomian f ma pierwiastek a_0, to możemy zapisać

   $$f = (x - a_0)f_1$$

   dla pewnego $f_1 \in K'[X]$ i $\deg(f_1) < \deg(f)$. Z założenia indukcyjnego dla f_a istnieje $L' = K'(a_1, ..., a_r)$ - ciało rozkładu wielomianu f_1 nad K'. Wtedy

   $$L = K(a_0, ..., a_r)$$

   jest ciałem rozkładu f nad K.

2. Udowodnimy wersję ogólniejszą:

   (🦇) *Jeśli $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$ jest izomorfizmem nad ciałem i $f_i \in K_i[X]$ jest wielomianem stopnia > 0, $\phi(f_1) = f_2$, to wtedy istnieje $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ izomorfizm nad ciałami rozkładu f_i w K_i rozszerzający izomorfizm ϕ (to znaczy $\phi \subseteq \psi$).*

   Wykorzystamy indukcję po $\deg(f)$. W przypadku bazowym mamy $\deg(f) = 1$, czyli $L_1 = K_1, L_2 = K_2$ i $\phi = \psi$.

   Teraz niech $\deg(f) > 1$ i załóżmy, że dla wszystkich ciał K' oraz wielomianów stopnia $< \deg(f)$ jest to prawdą. Niech

   $$f_i = f_i' \cdot g_i,$$

   gdzie $f_i', g_i \in K_i[X]$ i g_i jest wielomianem nierozkładalnym w K. Wiemy już, że istnieje $a_i \in L_i$ będące pierwiastkiem wielomianu g_i.

   Z faktu 1.8:(2), wiemy, że istnieje wtedy izomorfizm

   $$\psi_0 : K_1(a_1) \xrightarrow{\cong} K_2(a_2)$$

   taki, że $\psi_0(a_1) = a_2$ i $\phi \subseteq \psi_0$.

$$\begin{array}{ccc} K_1(a_1) & \xrightarrow[\exists\,\psi_0]{\cong} & K_2(a_2)\\ \shortparallel & & \shortparallel \\ K_1' & & K_2' \\ \cap\!| & & \cap\!| \\ L_1 & \xrightarrow[\exists\,\psi_1]{\cong} & L_2 \end{array}$$

Z założenia wiemy, że L_i to ciało rozkładu f_i' nad K_i. W takim razie z założenia indukcyjnego istnieje izomorfizm

$$\psi_1 : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$$

taki, że $\psi \subseteq \psi_0$ i to już jest koniec. ☕

Wniosek 2.2. *Jeśli $f_1 \in K_1[X]$ i $f_2 \in K_2[X]$ są nierozkładalnymi wielomianami, $\phi : K_1 \xrightarrow{\cong} K_2$ izomorfizmem i $\phi(f_1) = f_2$, a L_1, L_2 to ciała rozkładu f_1, f_2 odpowiednio nad K_1 i K_2, $a_i \in L_i$ to pierwiastek f_i, to wtedy istnieje $\psi : L_1 \xrightarrow{\cong} L_2$ takie, że $\psi(a_1) = a_2$.*

Dowód. Wynika z dowodu stwierdzenia (🦇). ☕

2.1 Algebraiczne domknięcie ciała

Ciało L jest **algebraicznie domknięte** $\iff$ dla każdego $f \in L[X]$ o stopniu > 0 istnieje pierwiastek f w L. To znaczy każdy wielomian rozkłada się na czynniki liniowe nad L.

Przykład:

- $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte.
- $\mathbb{R}$ nie jest algebraicznie domknięte, gdyż $x^2 + 1$ nie ma pierwiastka rzeczywistego.
- $\mathbb{Q}[i]$ nie jest algebraicznie domknięte, bo $x^2 - 2$ nie ma pierwiastka.

Twierdzenie 2.3. *Każde ciało K zawiera się w pewnym ciele algebraicznie domkniętym.*

Dowód. Jak mamy wielomian nad ciałem, to istnieje rozszerzenie ciała do tego wielomianu. I dalej leci kombinatoryka.

Lemat: Dla każdego ciała K istnieje $L \supseteq K$ takie, że $(\forall\, f \in K[X])$ stopnia > 0, f ma pierwiastek w L.

Rozważmy dobry porządek na zbiorze wielomianów z K[X] stopnia > 0

$$\{f \in K[X] \ : \ \deg(f) > 0\} = \{f_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}.$$

Tutaj α, κ to liczby porządkowe, niekoniecznie skończone. Skonstruujmy rosnący ciąg rozszerzeń ciał $\{K_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ taki, że

- $K \subseteq K_\alpha \subseteq K_\beta$ dla $\alpha < \beta < \kappa$
- f_α ma pierwiastek w $K_{\alpha+1}$.

Dowód przez indukcję pozaskończoną. Dla $K_0 = K$.

Załóżmy, że $\alpha < \kappa$ i mamy $\{K_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$ spełniają warunki powyżej. Niech $K' = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$. Musimy pokazać, że K' jest ciałem.

1. 1. α to liczba graniczna. Definiujemy $K' = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ jako zbiór.

   Musimy określić działania w K'. Niech $x, y \in K'$, wtedy istnieje $\beta < \alpha$ takie, że $x, y \in K_\beta$. Czyli $x + y \in K_\beta \subseteq K'$ i $xy \in K_\beta \subseteq K'$. W takim razie K' jest rozszerzeniem ciała K_β.

   Teraz definiujemy $K_\alpha = K'$ i otrzymujemy pożądane rozszerzenie ciała.

2. 2. $\alpha = \beta + 1$ to następnik, wtedy $K' = K_\beta$.

   Wielomian f_α jest wielomianem nad $K \subseteq K'$. Z wniosku 1.7 wiemy, że istnieje rozszerzenie $K_\alpha \supseteq K$ takie, że f_α ma pierwiastek w K_α.

   L definiujemy jako sumę po wyżej udowodnionej konstrukcji:

$$L = \bigcup_{\alpha<\kappa}^{\uparrow} K_\alpha$$

   i to ciało spełnia nasz lemat.

Wracamy teraz do dowodu twierdzenia 2.3 i niech $(L_n, n < \omega)$ będzie rosnącym ciągiem ciał takim, że

- $L_0 = K$
- $L_{n+1} \supseteq L_n$, gdzie L_{n+1} dane jest przez lemat, to znaczy $(\forall\ f \in L_n[X])$ f ma pierwiastek w L_{n+1}.

Niech

$$L_\infty = \bigcup_{n<\omega}^{\uparrow} L_n \supseteq K.$$

Jest to ciało, ponieważ suma rosnącego ciągu ciał jest ciałem. Dalej mamy, że jest to ciało algebraicznie domknięte, gdy dowolny $f \in L_\infty[X]$ ma stopień skończony > 0, czyli istnieje n takie, że $f \in L_n[X]$. A więc f ma wszystkie pierwiastki w $L_{n+1} \subseteq L_\infty$. ☕

Wykład 3: Ciała proste, pierwiastki z jedności

3.1 Ciała proste

Uwaga 3.0. *Załóżmy, że mamy ciała $K \subseteq L$. Wtedy*

- $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(L)$
- $0_K = 0_L$ *oraz* $1_K = 1_L$
- $K^* = K \setminus \{0\} < L^* = L \setminus \{0\}$ oraz dla $x \in K$ $-x$ w K jest równe $-x$ w L.

K jest **ciałem prostym** wtedy i tylko wtedy, gdy K nie zawierza żadnego właściwego podciała.

Przykład:

- $\mathbb{Q}$, gdzie $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ to ciało proste nieskończone.
- Ciałem prostym skończonym jest na przykład $\mathbb{Z}_p$ dla liczby pierwszej p, wtedy $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_p) = p$.

Uwaga 3.1.

1. *Każde ciało zawiera jedyne podciało proste*
2. *Z dokładnościa do* $\cong$ $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$ *to wszystkie ciała proste.*

Przykład: Załóżmy, że K jest skończone. Wtedy K^* też jest skończone rzędu $|K^*| = n < \infty$. Później dowiemy się, że $|K| = p^k$, a więc $|K^*| = p^k - 1$. Wiemy, że dla każdego $x \in K^*$ zachodzi $x^n = 1$.

3.2 Pierwiastki z jedności

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z $1 \neq 0$. Mamy następujące definicje:

1. $a \in R$ jest **pierwiastkiem z 1** stopnia $n > 0 \iff a^n = 1$
2. $\mu_n(R) = \{a \in R \ : \ a^n = 1\}$ jest **grupą pierwiastków z 1** stopnia n
3. $\mu(R) = \{a \in R \ : \ (\exists\, n)\ a^n = 1\} = \bigcup\limits_{n>0} \mu_n(R)$ jest **grupą pierwiastków z 1**
4. a jest **pierwiastkiem pierwotnym** [primitive root] stopnia n z 1 $\iff$ $a \in \mu_n(R)$ oraz dla każdego $k < n$ $a \notin \mu_k(R)$.

Uwaga 3.2.

1. $\mu_n(R) \lhd R^*$ *jest grupą jednostek pierścienia*
2. $\mu(R) \lhd R^*$
3. $\mu(R)$ *jest* *torsyjną grupą abelową* *(każdy element jest pierwiastkiem z 1).*

Przykłady

1. $\mu(\mathbb{C}) = \bigcup\limits_{n>0} \mu_n(\mathbb{C}) \lneq (\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}, \cdot) < \mathbb{C}^* = C \setminus \{0\}$ jest nieskończona.
2. $\mu(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$, bo $f : \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{homo}]{\text{"na"}} \mu(\mathbb{C})$ taki, że $f(w) = \cos(w2\pi) + i\sin(w2\pi)$ ma jądro $\ker(f) = \mathbb{Z}$.
3. $\mu(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$
4. $\mu_n(K) = \{$zera wielomianu $x^n - 1\}$. Ten wielomian będziemy oznaczali $w_n(x) = x^n - 1$.

Uwaga 3.3.

1. *Jeśli* $\mathrm{char}(K) = 0$, *to* $w_n(x) = x^n - 1$ *ma tylko pierwiastki jednokrotne w* K *[simple roots]*
2. *Jeśli* $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *i* $n = p^l n_1$ *takie, że* $p \nmid n_1$, *to wszystkie pierwiastki* $w_n(x) = x^n - 1$ *mają krotność* p^l *w* K.

Dowód:

1. Niech $a \in K$ takie, że $w_n(a) = 0$. Z twierdzenia Bezouta mamy, że

$$w_n(x) = x^n - 1 = x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = (x-a)v_n(x),$$

gdzie $v_n(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$.

Z tego, że $\mathrm{char}(K) = 0$ wynika, że $v_n(a) = na^{n-1} \neq 0$, skąd wynika, że a jest jednokrotnym pierwiastkiem $w_n(x)$.

2. Jesteśmy w ciele K o $\mathrm{char}(K) = p$. Niech $n = p^l n_1$. Rozważmy wielomian

$$w_n(X) = X^n - 1 = (X^{n_1})^{p^l} - 1^{p^l} = (X^n - 1)^{p^l} = w_{n_1}(X)^{p^l}.$$

Czyli $\mu_n(K) = \mu_{n_1}(K)$. Załóżmy, że $a \in K$ to pierwiastek wielomianu $w_n(X)$. Wtedy a jest też pierwiastkiem wielomianu w_{n_1} w ciele K. Wtedy

$$w_{n_1}(X) = (X-a)v_{n_1}(X),$$

v_{n_1} jak w przypadku wyżej. Wówczas

$$v_{n_1}(a) = n_1 a^{n_1 - 1} \neq 0,$$

bo $p \nmid n_1$. Jeśli a jest 1-krotnym pierwiastkiem $w_{n_1}(X)$, to jest on p^l-krotnym pierwiastkiem $w_n(X)$.

Twierdzenie 3.4. *Niech $G < \mu(K)$ i G jest podgrupą skończoną o $|G| = n$. Wtedy*

1. $G = \mu_n(K)$

2. G jest cykliczna

3. Jeśli $\mathrm{char}(K) = p > 0$, to $p \nmid n$.

Dowód.

1. 1. Jeśli $|G| = n$, to dla każdego $x \in G$ mamy $x^n = 1$. Z tego wynika, że $G \subseteq \mu_n(K)$, ale $|\mu_n(K)| \leq n$, czyli $G = \mu_n(K)$.
2. 2. Chcemy pokazać, że dla wielomianu $w_n(X)$ mamy n różnych pierwiastków. Wystarczy pokazać, że istnieje $x \in G$ taki, że $\mathrm{ord}(x) = n$.

   Załóżmy nie wprost, że dla każdego $x \in G$ $\mathrm{ord}(x) < n$. Niech

   $$k = \max\{\mathrm{ord}(x) \ : \ x \in G\}.$$

   Niech $x_0 \in G$ takie, że $\mathrm{ord}(x_0) = k$. Wtedy

   $$(\forall\ y \in G)\ \mathrm{ord}(y) \mid k.$$

   Gdyby tak nie było, to istniałby $y \in G$, $\mathrm{ord}(y) \nmid k$. Czyli istnieje liczba pierwsza p taka, że l jest podzielne przez wyższą potęgę p niż k. To oznacza, że $l = p^\alpha l'$ i $k = p^\beta k'$, gdzie $p \nmid l'$ i $\alpha > \beta$. Rozważmy $y' = y^{l'}$. Skoro y ma rząd l, to $\mathrm{ord}(y') = p^\alpha$, a dla $x_0' = x_0^{p^\beta}$ mamy $\mathrm{ord}(x') = k'$. Wobec tego $\mathrm{ord}(x_0'y') = p^\alpha \cdot k'$, ale to jest większe od k i dostajemy sprzeczność.
3. 3. Wiemy, że wszystkie pierwiastki $w_n = x^n - 1$ są jednokrotne, bo jest ich w tym przypadku dokładnie n (z poprzedniego punktu). Z uwagi 3.3, że jeśli $n = p^l n_1$, to pierwiastki wielomianu $w_n(x)$ mają krotność p^l. Ale w tym przypadku pierwiastki mają krotność jeden, czyli $p^l = 1$ i $n = 1 \cdot n_1$, gdzie $p \nmid n_1$.

Wniosek 3.5. *Jeśli $a \in \mu_n(K)$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia $n > 1$, to a generuje $\mu_n(K)$.*

Dowód. $\mu_n(K) \supseteq \langle a \rangle = \mu_k(K)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Ale ponieważ a było pierwiastkiem pierwotnym z 1, to musimy mieć $n = k$.

3.3 Ciała skończone

Twierdzenie 3.6. *Niech K będzie ciałem skończonym. Wtedy*

1. $\mathrm{char}(K) = p \implies |K| = p^n$ *dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$

2. *Dla każdego* $n > 0$ *istnieje dokładnie jedno ciało* K *takie, że* $|K| = p^n$ *z dokładnością do izomorfizmu.*

Ciało mocy p^n *będziemy oznaczać* $F(p^n)$.

Dowód. 1. Skoro $\mathrm{char}(K) = p$, to $\mathbb{Z}_p \subseteq K$ jest najmniejszym podciałem prostym ciała K. W takim razie, K jest skończoną przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_p$. Jeśli $n = \dim_{\mathbb{Z}_p}(K)$, to K jest izomorficzne z $\mathbb{Z}_p^n$, jako przestrzenie liniowe nad $\mathbb{Z}_p$. W takim razie $|K| = p^n$.

2.

Istnienie:

Niech $n > 0$. Rozważmy

$$w_{p^n-1}(x) = x^{p^n-1} \in \mathbb{Z}_p[X].$$

Niech $L \supseteq \mathbb{Z}_p$ będzie ciałem rozkładu wielomianu w_{p^n-1}, a $K = \{0\} \cup \{$ pierwiastki $w_{p^n-1}\}$. Wtedy

$$|K| = 1 + p^n - 1 = p^n,$$

czyli mamy potencjalne ciało rzędu p^n. Wystarczy więc pokazać, że K jest ciałem.

Niech $f : L \xrightarrow{1-1} L$ będzie funkcją Frobeniusa $x \mapsto x^p$. Teraz niech $f^n = f \circ ... \circ f$, $f^n(x) = x^{p^n}$. Jest to monomorfizm, bo składamy ze sobą n takich samych funkcji $1-1$. Dla $a \in L$ mamy

$$(a^{p^n-1} = 1 \ \vee \ a = 0) \iff a \in K.$$

Co więcej, $a^{p^n-1} = 1 \iff a^{p^n} = a \iff f^n(a) = a$, czyli $K = \{a \in L \ : \ f^n(a) = a\}$ jest zbiorem punktów stałych morfizmu f^n, czyli jest ciałem, czego dowód jest pozostawiony na ćwiczenia.

Jedyność K:

Ciało K stworzone jak wyżej jest ciałem rozkładu $w_{p^n-1}(x)$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Załóżmy nie wprost, że K' to inne ciało mocy p^n. Bes straty ogólności $\mathbb{Z}_p \subseteq K'$. Niech $x \in K'$. wiemy, że $x = 0$ lub $x^{p^n-1} = 1$. W takim razie w_{p^n-1} rozkłada się nad K' na czynniki liniowe. Zatem K' jest również ciałem rozkładu w_{p^n-1} nad $\mathbb{Z}_p$.

Z wniosku 2.1.(2) mamy, że dwa ciała rozkładu nad jednym wielomianem są izomorficzne i $K \cong K'$ nad $\mathbb{Z}_p$ i mamy sprzeczność. ☕

Wykład 4: Rozszerzenia ciał

Definicja 4.1. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami i $a \in L \setminus K$.

- Jeżeli a jest algebraiczny nad K, to istnieje $f \in K[X]$ stopnia > 0 i $f(a) = 0$
- a jest przestępny nad K [transcendental] $\iff$ a nie jest algebraiczny.
- **Rozszerzenie** $L \supseteq K$ jest **algebraiczne** $\iff$ dla każdego $a \in L$ a jest algebraiczny nad K.
- **Rozszerzenie jest przestępne** $\iff$ nie jest algebraiczne.
- Niech $a \in \mathbb{C}$. Wtedy a jest algebraiczna, gdy a jest algebraiczna nad $\mathbb{Q}$.

Przykłady:

1. W $\mathbb{C}$ na i jest pierwiastkiem algebraicznym wielomianu $x^2 + 1$, a $\sqrt[n]{d}$ jest pierwiastkiem $x^n - d$.

2. Ciało $F(p^n)$ ma charakterystykę p i $F(p) \subseteq F(p^n)$ jest rozszerzeniem ciał, które jest algebraiczne. Dla dowolnego $a \in F(p^n)$ to jest ono pierwiastkiem wielomianu $X^{p^n} - X$, czyli a jest algebraiczne nad $F(p)$.

3. Pierwiastki przestępne to na przykład e, π, E^{π}, aczkolwiek nie jesteśmy pewni tego ostatniego [doczytać w S. Lang, Algebra].

4. Rozważamy $K \subseteq L = K(X)$, czyli pierścień ułamków. Weźmy $x \in K(X)$ - przestępny nad K. Załóżmy, że istnieje wielomian $f \in K[X]$ rózny od 0. I załóżmy, że $0 = \hat{f}(X)$ to funkcja wielomianowa.

$$0 = \hat{f}(X) = f \neq 0$$

i jest to sprzeczność.

Uwaga 4.2. *Niech* a *jak wyżej. Wtedy* a *jest algebraiczny nad* K $\iff$ $I(a/K) \neq \{0\}$ *jako ideał* $K[X]$.

4.1 Wymiar przestrzeni liniowej

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciała K. Wtedy L jest **przestrzenią liniową nad** K. Definiujemy stopień rozszerzenia [coś innego jak indeks przy grupach]

$$[L : K] := \dim_K(L)$$

jako wymiar przestrzeni liniowej nad K.

Uwaga 4.3. *Niech* $a \in L \setminus K$. *Następujące warunki są równoważne:*

1. a *jest algebraiczny nad* K

2. $K[a] = K(a)$, *to znaczy* $K[a]$ *jest ciałem (usuwanie niewymierności z mianownika)*

3. $[K(a) : K] = \dim_K(a) < \infty$

Dowód. $1 \implies 2$

Wystarczy pokazać, że $K[a]$ jest ciałem. Rozważamy $I(a/K) \triangleleft K[X]$. Wiemy, że $K[X]$ jest PID, więc potrzebujemy, aby $I(a/K)$ było ideałem pierwszym.

$$f \cdot g \in I(a/K) \iff 0 = \widehat{f \cdot g}(a)$$

gdzie daszek oznacza homomorfizm ewaluacji, który jest również homomorfizmem w punkcie. Czyli

$$\widehat{f \cdot g}(a) = \hat{f}(a)\hat{g}(a) = 0 \iff \hat{f}(a) = 0 \lor \hat{g}(a) = 0.$$

Czyli $I(a/K)$ jest ideałem pierwszym w pierścieniu PID, więc jest ideałem maksymalnym. Mamy więc, że

$$K[a]/I(a/K)$$

jest ciałem, więc jest izomorficzne z $K(a)$, bo $K[a]$ to najmniejszy pierścień generowany przez $K \cup \{a\}$ (tutaj pierścień), a $K(a)$ to najmniejsze ciało generowane przez $K \cup \{a\}$.

$2 \implies 3$

Załóżmy, że $a \neq 0$. Wtedy $a^{-1} \in K[a]$, czyli istnieje wielomian $f \in K[X]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i, \quad b_n \neq 0$$

taki, że $a^{-1} = f(a)$. Wobec tego mamy

$$1 = f(a) \cdot a$$

$$0 = f(a)a - 1 = b_n a^{n+1} + b_a a^2 + \ldots + b_0 a - 1,$$

stąd mamy, że

$$a^{n+1} = -\frac{1}{b_n}(b_{n-1}a^n + \ldots + b_0 a - 1) \in Lin_K(1, a, \ldots, a^n)$$

jest w domknięciu liniowym $(1, a, \ldots, a^n)$. Indukcyjnie pokazujemy, że

$$(\forall\ m \geq 0)\ a^m \in Lin_K(1, a, \ldots, a^n).$$

1. $m = 0, \ldots, n + 1$ bo one są już w $Lin_k(1, a, \ldots, a^n)$.
2. Zakładamy teraz, że dla m mamy

$$a^m = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$$

i pokazujemy dla $m + 1$.

$$a^{m+1} = a \cdot a^m = a \sum_{i=0}^{n} c_i a^i = \sum_{i=0}^{n} c_i a^{i+1} \in Lim_K(1, a, \ldots, a^n),$$

bo $a^{n+1} \in Lim_K(1, a, \ldots, a^m)$.

Czyli

$$K[a] = K(a) = Lin_K(1, a, \ldots, a^n),$$

co daje, że $[K(a) : K] \leq n < \infty$.

$3 \implies 1$

$[K(a) : K] < \infty$, z czego wynika, że

$$\{1, a, \ldots, a^n, \ldots, \} = \{a^t\ :\ t \in \mathbb{N}\} \subseteq K(a)$$

jest zbiorem liniowo zależnym. Z liniowej zależności wiemy, że

$$(\exists\ n \in \mathbb{N})(\exists\ b_{n-1}, \ldots, b_0)\ a^n = b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_1 a + b_0.$$

Stąd dla $f \in K[X]$ zadanego wzorem

$$f(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 - x^n$$

mamy $f(a) = 0$, zatem a jest algebraiczny nad K.

Definicja 4.4. Niech $a \in L \supseteq K$ będzie algebraicznym pierwiastkiem nad K, $I(a/K) = \{w \in K[X]\ :\ w(a) = 0\} = (f)$, $f \neq 0$, $f \in K[X]$, f unormowany (ang. monic)

- f jest nazywany wielomianem **minimalnym** a nad K (wyznaczony jednoznacznie)
- stopień a nad K jest definiowany jako $\deg(f)$.

Uwaga 4.5. *Załóżmy, że* $I(a/K) = (f)$ *i* f *jest unormowany. Wówczas:*

1. f *jest unormowanym wielomianem minimalnego stopnia takim, że* $f(a) = 0$
2. $\deg(f) = [K(a) : K]$, *czyli stopień tego wielomianu jest równy stopniu przestrzeni liniowej* $K(a)$ *nad* K.

Dowód.

1. Oczywiste DOWODZIK, ZE IRREDUCIBLE JEST MINIMAL
2. Niech $n = \deg(f)$,

$$f(x) = x^n + \sum_{k<n} b_k x^k$$

Z tego, że $f(a) = 0$ mamy, że

$$a^n = -\sum_{k<n} b_k x^k \in \mathrm{Lin}_K(1, a, ..., a^{n-1}) \subseteq L.$$

Czyli $K(a) = \mathrm{Lin}_K(1, a, ..., a^{n-1})$ i wystarczy zobaczyć, że $\{1, ..., a^{n-1}\}$ jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku dla pewnego $0 < r < m$ $a^r \in \mathrm{Lim}_K(1, a, ..., a^{t-1})$, czyli istnieje wielomian taki, że a jest jego pierwiastkiem, a stopień jest nie większy niż $r < n$ i to daje sprzeczność.

Czyli $\mathrm{Lim}_K(1, a, ..., a^n)$ jest bazą $K(a)$ nad K i koniec.

☕

Przykład:

1. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$, wtedy $f(x) = x^2 - 2$ jest wielomianem minimalnym $\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$ i stopień $\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$ jest równy 2.
2. $\pi \in \mathbb{R}$ nie ma stopnia, bo π nie jest liczbą algebraiczną nad $\mathbb{Q}$
3. $\sqrt[7]{7 + \sqrt[3]{3}} - \sqrt[6]{6} \in \mathbb{R}$, czy jest to algebraiczne nad $\mathbb{Q}$? Tak i ma stopień 126.

Jeśli $K \subseteq L \ni a$ jest algebraiczny, to $\deg(a/K) = n$, to

$$K(a) = K[a] = \{\sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i \ : \ b_i \in K\}$$

Fakt 4.6. *Niech* $K \subseteq L \subseteq M$ *będą rozszerzeniami ciał. Wtedy*

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$$

Dowód. Niech $\{e_i \ : \ i \in I\}$ będzie bazą L nad K, a $\{f_j \ : \ j \in J\}$ będzie bazą M nad L. Stąd $|I| = [L : K]$ i $|J| = [M : L]$.

Chcemy za pomocą tych dwóch zbiorków zrobić bazę M nad K. Rozważmy zbiór

$$X = \{e_i \cdot f_j \ : \ i \in I, j \in J\}.$$

Musimy pokazać, że

1. X jest liniowo niezależny
2. X jest bazą M nad K
3. $|X| = |I| \cdot |J|$

Czyli X jest bazą M nad K (1.,2.) i ma odpowiednią moc (3.).

1. Załóżmy nie wprost, że X nie jest lnz, czyli istnieją $k_{ij} \in K$ takie, że

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} k_{ij} e_i f_j = 0,$$

ale $\sum_i k_i j e_i = l_j$ są elementami L, czyli

$$\sum_{j\in J} l_j f_j = 0$$

więc f_j są liniowo zależne, a przecież były bazowe, w takim razie

$$0 = l_j = \sum_{i\in I} k_{ij} e_i,$$

$e_i \neq 0$, czyli $k_{ij} = 0$ i koniec.

2. X generuje M nad K, bo dla $m \in M$ mam

$$m = \sum l_j f_j = \sum \left(\sum a_{ij} e_i\right) f_j = \sum\sum a_{ij} e_i f_j = \sum\sum k_{ij} e_i f_j$$

3. Załóżmy, nie wprost, że dla $i \neq i'$ i $j \neq j'$ i $e_i f_j = e_{i'} f_{j'}$. Czyli

$$e_i f_j - e_{i'} f_{j'} = 0,$$

czyli $f_j, f_{j'}$ są liniowo zależne nad L, czyli mamy, że $f_j = f_{j'}$ i

$$0 = e_i f_j - e_{i'} f_j = (e_i - e_{i'}) f_j \implies e_i - e_{i'} = 0 \implies i = i'$$

Z tego wynika, że $[M : K] = |X| = |I||J| = [L : K][M : L]$. ☕

Wniosek 4.7. *Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem skończonego ciała. Niech*

$$K_{alg}(L) = \{a \in L \ : \ a \textit{ jest algebraiczny nad } K\}.$$

Okazuje się, że K_{alg} jest podciałem.

Dowód. Weźmy $a, b \in K_{alg}$. Wiemy, że $[K(a) : K]$ i $[K(b) : K]$ są skończone. Mamy, że

$$K \subseteq K(a) \subseteq K(a, b)$$

Z faktu **??** wiemy, że

$$[K(a, b) : K] = [K(a, b) : K(a)] \cdot [K(a) : K]$$

czyli również $K(a, b)$ jest skończone. Zatem dla $x \in K(a, b)$ mamy

$$[K(x) : K] \leq [K(a, b) : K]$$

też jest skończone, zatem x jest algebraiczny nad K.

Dla $x \in K(a, b)$ mamy $[K(x) : K] \leq [K(a) : K]$, czyli również jest skończone. W takim razie, x jest algebraiczny nad K i należy do K_{alg}. ☕

Definicja 4.8.

1. $K_{alg}(L)$ nazywamy **algebraicznym domknięciem** K w L.
2. K jest **relatywnie algebraicznie domknięte** w L $\iff K_{alg}(L) = K$.

Przykłady:

1. $\mathbb{Q}_{alg}(\mathbb{C}) := \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{alg}$ jest to tak zwane ciało liczb algebraicznych. $\widehat{\mathbb{Q}}$ jest przeliczalne, bo $\mathbb{Q}[x]$ jest przeliczalne, więc jest mnóstwo liczb przestępnych (zespolonych, które nie są algebraiczne, ale nie potrafimy żadnej wskazać).
2. K jest algebraicznie domknięte w K(X)

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$, bo $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$ jest ciałem

$$L = \underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}]}_{\subseteq\mathbb{C}} = \underbrace{\underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]}_{\text{ciało}}[\sqrt{3}]}_{\sqrt[3]{2}\text{alg.w}}\,\mathbb{Q} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})\}$$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in L \implies \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}} \in L$$

Wykład 5: Wielomiany koła, domknięcia algebraiczne

Uwaga 5.1. *Niech* $K \subseteq L \subseteq M$ *będą rozszerzeniami ciał.* $K \subseteq M$ *jest algebraiczne* $\iff$ $K \subseteq L$ *i* $L \subseteq M$ *są algebraiczne*

Dowód.
$\implies$ OK

$\impliedby$

Weźmy dowolny $m \in M$. $L \subseteq M$ jest algebraiczny, co oznacza $f(m) = 0$, gdzie $f \in L[X]$

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_n x^i, \quad a_n \neq 0$$

W takim razie m jest algebraiczne nad ciałek $K(a_0, ..., a_n)$. Ale teraz

$$[K(m)\ :\ K] \leq [K(a_0, ..., a_m, m)\ :; K] \overset{4.6}{=} [K(a_0, ..., a_n, m) : K(a_0, ..., a_n)][K(a_0, ..., a_n) : K] < \infty$$

bo m jest algebraiczny $K(\bar{a})$. Czyli

$$[K(m) : K] < \infty$$

więc m jest algebraiczny nad K (uwaga 4.3). ☕

Uwaga 5.2. $K_{alg}(L)$ *jest relatywnie algebraicznie domknięty w* L. *To znaczy* $(K_{alg}(L))_{alg}(L) = K_{alg}(L)$.

Dowód. Ćwiczenia. ☕

5.1 Wielomian rozkładu koła [cyclotomic polynomials]

Rozważamy wielomian

$$w_m(x) = x^m - 1$$

dla $m \in \mathbb{N}$. Wiemy, że

- pierwiastki w_m w $\mathbb{C}$ są jednokrotne
- $\mu_m(\mathbb{C})$ jest grupą cykliczną
- $a \in \mu_m(\mathbb{C})$ jest generatorem $\mu_m(\mathbb{C}) = \{a^i\ :\ 0 \leq i \leq m\} \cong (\mathbb{Z}_m, +)$
- a^k generuje $\mu_m(\mathbb{C}) \iff \mathrm{NWD}(k, m) = 1$

Funkcja Eulera:

$$\phi(m) = |\{k \in \mathbb{N}\ :\ 0 \leq k < m. \mathrm{NWD}(k, m) = 1\}|$$

$\mu_m(\mathbb{C})$ ma $\phi(m)$ generatorów.

Niech

$$\{k \in \mathbb{N}\ :\ 0 < k < m, \mathrm{NWD}(k, m) = 1\} = \{m_1, ..., m_{\phi(n)}\}$$

i zdefiniujmy

$$F_m(x) := (x - a^{m_1})...(x - a^{m_{\phi(n)}}) \in \mathbb{C}[X]$$

F_m to m-*ty wielomian cyklotoniczny.*

Uwaga 5.3.

1. $w_m(x) = x^m - 1 = F_m(x) \cdot v_m(x) = F_m(x) \cdot \prod_{\substack{d<m \\ d|m}} F_d(x)$

2. $F_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$

Dowód:

1. Wiemy, że wielomian w_m ma m pierwiastków na płaszczyźnie Gaussa, więc jest iloczynem dwumianów $x - b$, $b \in \mu_m(\mathbb{C})$, czyli

$$\alpha \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \alpha^d - 1 \quad d = \mathrm{ord}(\alpha),\ d|m$$

Wtedy α jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia d. Wobec tego

$$F_d(x) = \prod_{\substack{\alpha\in\mu_m(\mathbb{C}) \\ \mathrm{ord}(\alpha)=d}} (x-\alpha) \implies \text{(teza)}$$

2. Dowód przez indukcję względem m. Dla $m = 1$ mamy $F_m(x) = x - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Teraz zakładamy, że dla wszystkich $0 < d < m$ jest $F_d(x) \in \mathbb{Z}[X]$. Z punktu (1) wiemy, że

$$x^m - 1 = w_m(x) = F_m(x)v_m(x)$$

z założenia indukcyjnego $v_m(x) \in \mathbb{Z}[X]$, bo jest iloczynem $\prod_{\substack{\alpha\in\mu_m(\mathbb{C}) \\ \mathrm{ord}(\alpha)=d}} (x-\alpha)$

$w_m(x)$ w $\mathbb{Z}[X]$ jest podzielny przez v_m i dostajemy:

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot L(x)$$

ale w $\mathbb{C}[X] \supseteq \mathbb{Z}[X]$ było

$$w_m(x) = v_m(x) \cdot F_m(x),$$

czyli $F_m = L \in \mathbb{Z}[X]$.

Uwaga 5.4. [Lemat Gaussa] $F_m(x)$ *jest wielomianem nierozkładalnym w* $\mathbb{Q}[X]$ *(równoważnie w* $\mathbb{Z}[X]$*).*

Dowód:

Po pierwsze zauważmy, że F_m jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X] \iff$ nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$.

Załóżmy nie wprost, że

$$F_m(x) = G_1(x) \cdot G_2(x)$$

dla $G_1, G_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Możemy założyć, że $G_1(x)$ jest dalej nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$ oraz $0 < \deg(G_1) < \deg(F_m) = \phi(m)$

Lemat: Istnieje ε'-pierwiastek G_1 oraz liczba pierwsza p taka, że $p \nmid m$ i $G_1(b) = G_2(b^p) = 0$.

Dowód lematu:

Niech ε będzie jakimś pierwiastkiem G_1, a τ będzie jakimś pierwiastkiem G_2. W takim razie

$$\tau, \varepsilon \in \mu_m(\mathbb{C}) \implies \tau = \varepsilon^l$$

dla pewnego l takiego, że $\mathrm{NWD}(l, m) = 1$.

Niech $l = p_1 \cdot ... p_s$ będzie rozkładem na liczby pierwsze. Wtedy mamy ciąg różnych liczb

$$\text{pierwiastem } G_1 = \varepsilon, \varepsilon^{p_1}, \varepsilon^{p_1 p_2}, ..., \varepsilon^{p_1,...,p_s} = \tau \text{ pierwiastek } G_2$$

które są pierwiastkami pierwotnymi stopnia m. Z tego wynika, że każda z tych liczb jest pierwiastkiem G_1 lub G_2, czyli istnieje taka pozycja i, że

$$G_1(\varepsilon^{p_1 \cdots p_i}) = 0,$$
$$G_2(\varepsilon^{p_1 \cdots p_{i+1}}) = 0$$

wtedy $\varepsilon' := \varepsilon^{p_1 \cdots p_i}$ oraz $p = p_{i+1}$ i lemat jest spełniony.

Wimy już, że $G_1(\varepsilon) = 0$ i $G_1 \in \mathbb{Z}[X]$ jest wielomianem nierozkładalnym. Niech p będzie liczbą pierwszą z lematu. Rozważmy

$$G_3(x) = G_2(x^p).$$

Wtedy $G_2(\varepsilon^p) = G_3(\varepsilon) = 0$, ale stąd wynika, że $G_1(x)$ dzieli $G_3(x)$. Niech więc

$$G_3(x) = G_1(x)H(x) \in \mathbb{Z}[X].$$

Rozważmy homomorfizm

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =$$

i indukowany przez niego epimorfizm pierścieni

$$\bar{f} : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_p[X].$$

Z założenia $F_m = G_1 G_2$ mamy, że

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

a z rozumowania powyżej ($G_3 = G_1 H$)

$$\bar{f}(G_3) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H)$$

ale

$$\bar{f}(G_3(x)) = \bar{f}(G_2(x^p)) = \bar{f}(G_2(x))^p,$$

bo współczynniki $f(G_2(x^p))$ są w $\mathbb{Z}_p$, a $(\sum c_i x^i)^p = \sum c_i x^{pi}$, bo $c_i^{kp} = c_i^k$ dla $c_i \in \mathbb{Z}_p$.

Stąd wiemy, że

$$f(G_2(x))^p = \bar{f}(G_1)\bar{f}(H).$$

Pierścień $\mathbb{Z}_p[X]$ jest UFD, więc $\bar{f}(G_1)$ i $\bar{f}(G_2)$ mają wspólny dzielnik w $\mathbb{Z}_p[X]$, stopnia co najmniej 1. Zatem z

$$\bar{f}(F_m) = \bar{f}(G_1)\bar{f}(G_2)$$

$$\bar{f}(F_m) | \bar{f}(w_m) = x^m - 1.$$

Zatem w pewnym rozszerzeniu $L \supseteq \mathbb{Z}_p$ w_m ma pierwiastek wielokrotny co daje sprzeczność.

Uwaga 5.5. *Jeżeli $\varepsilon \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia m, to $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = \phi(m)$.*

Dowód: $F_m(x) \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, a ε jest jego pierwiastkiem. To znaczy, że $F_,(x)$ jest wielomianem minimalnym dla ε nad $\mathbb{Q}$. Mamy, że $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = \deg F_m = \phi(m)$.

Lemat 5.6. [lemat Liouville'a o aproksymacji diofantycznej]: *Jeżeli $a \in \mathbb{R}$ jest liczbą algebraiczną stopnia $N > 1$, to istnieje $c = c(a) \in \mathbb{R}_+$ takie, że dla każdego $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ zachodzi*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^N}$$

Lemat Liouville'a mówi o cesze. Jeżeli liczba nie spełnia tego lematu, to jest liczbą przestępną .

Dowód. Niech $N > 1$ i $a \in \mathbb{Q}$. Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$ taki, że $f(a) = 0$ i $\deg(f) = \deg(a/\mathbb{Q})$. Teraz zauważmy, że na f patrzymy jako na funkcję wielomianową. To znaczy, dla każdego $x \in \mathbb{R}$ patrząc na

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}(x) - \underbrace{\widehat{f}(a)}_{=0}$$

ale funkcje wielomianowe są różniczkowalne. Dlatego możemy skorzystać z theoremierdzenia o wartości średniej. To znaczy

$$\widehat{f}(x) - \widehat{f}(a) = \widehat{f}'(x - a)$$

My wiemy, że a jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu f(x). Niech $\varepsilon > 0$ takie, że $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ jest jedynym pierwiastkiem f(x) w tym przedziale. Oczywiście,

$$\deg(\widehat{f}'(x)) < \deg(\widehat{f}(x)) \implies \widehat{f}'(a) \neq 0.$$

Bez straty ogólności $\widehat{f}'(a) > 0$. Niech i $d = \sup_{x \in I} \widehat{f}'(x)$.

$$c = c(a) = \min(\varepsilon, \frac{1}{d}).$$

Udowodnimy, że c jest dobrze określona. Niech $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0$$

Rozważamy przypadki:

1. $f \notin I$. Wtedy $\left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{q^N} \geq \frac{c}{q^n}$
2. $f \in I$. Wtedy $\left|a - \frac{p}{q}\right|$ i $\frac{p}{q}$ może być naszym x. Czyli

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(\frac{p}{q})|}{|f(f'(t)|} \geq \frac{|f(\frac{p}{q})|}{d} \geq \frac{c}{q^N}$$

bo $c \leq \frac{1}{d}$

$$0 \neq |f(\frac{p}{q})| = \left|\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{p^k}{q^k}\right| = \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} a_k p^k q^{N-k}\right|}{q^N} \geq \frac{1}{q^N}$$

☕

5.2 Domknięcia algebraiczne

Definicja 5.7. Ciało $L \supseteq K$ jest **algebraicznym domknięciem** K wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. L jest algebraicznie domknięte
2. $L \supseteq K$ jest rozszerzeniem algebraicznym, to znaczy dla każdego $a \in L$ a jest pierwiastkiem algebraicznym nad K

Takie L oznaczamy przez $\widehat{K}, K^{alg}$.

Uwaga 5.8. *Dla każdego K istnieje algebraiczne domknięcie* $\widehat{K}$.

Dowód. Rozważmy $K_\infty \supseteq K$ - ciało algebraicznie domknięte (theoremierdzenie z początku wykładu). Pokażemy, że

$$\widehat{K} = K_{alg}(K_\infty) = \{a \in K_\infty \;:\; a \text{ algebraiczny nad } K\}$$

1. $\widehat{K}$ jest algebraicznie domknięte:

   Jeżeli $f \in \widehat{K}[X]$, to f ma pierwiastek w K, ale $\widehat{K} \subseteq K_\infty$, to znaczy, że $a \in \widehat{K}$ jest algebraiczne nad K.

2. $K \subseteq \widehat{K}$ jest rozszerzeniem algebraicznym:

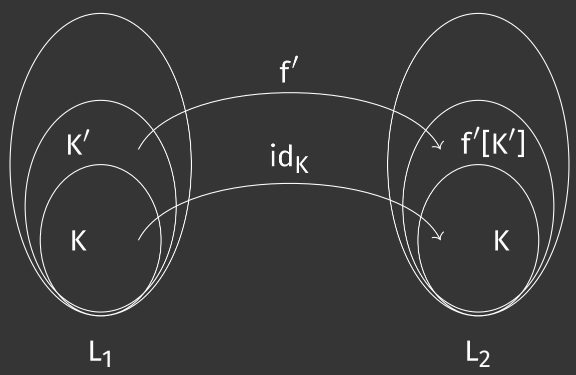
   $K \subseteq \widehat{K} = K_{alg}(K_\infty)$ z definicji jest rozszerzeniem algebraicznym.

Twierdzenie 5.9. *$\widehat{K}$ jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu nad K.*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "(\exists!\, f)\ f\restriction K = id_K", "\cong"'] & & L_2 \\ & K \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd}$$

Dowód. Można użyć indukcji pozaskończonej, a można też użyć lematu Zorna. My zrobimy to drugie. Niech

$$\mathfrak{K} = \{(k', f') \ : \ K \subseteq K' \subseteq L_1, f' : K' \xrightarrow{1-1} L_2,\ f' \restriction K = id_k\}$$



Oczywiście, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, bo $(K, id_K) \in \mathfrak{K}$. W $\mathfrak{K}$ definiujemy relację porządku w naturalny sposób, to znaczy

$$(K', f') \leq (K'', f'') \iff K' \subseteq K'' \ \wedge\ f'' \restriction K' = f''.$$

Wtedy $(\mathfrak{K}, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i niepustym (bo jest $(K, id_K) \in \mathfrak{K}$). Ponadto każdy wstępujący łańcuch $(\mathfrak{K}, \leq)$ ma ograniczenie górne. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w tej rodzinie istnieje element maksymalny, nazwijmy go (K_1, f_1). Pokażemy, że $K_1 = L_1$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje $a \in L_1 \setminus K_1$. Niech $w(x) \in K_1[X]$ będzie wielomianem minimalnym elementu a nad K_1. Niech

$$K_2 = f_1[K_1]$$
$$v(x) = f_1(a_0) + f_1(a_1)x + \ldots + f_1(a_n)x^n \in K_2[X].$$

$v(x)$ też jest nierozkładalny nad K_2, bo $w(x)$ był nierozkładalny nad K_1. Niech $b \ \in\ L_2$ będzie pierwiastkiem wielomianu v.

Zauważmy, że $K_1(a) = K_1[a]$, bo $w(x)$ jest nierozkładalny nad K_1, ale

$$K_1[a] \simeq K_1[X]/(w) \simeq K_2[X]/(v) \simeq K_2[b] \simeq K_2(b).$$

Czyli $K_1(a) \simeq K_2(b)$ i $f_2 \ : \ K_1(a) \xrightarrow{\cong} K_2(b)$ jest izomorfizmem rozszerzającym f_1. Wtedy mamy $(K_1, f_1) \lneq (K_1(a), f_2)$, co daje sprzeczność z maksymalnością (K_1, f_1). Zatem $L_1 = K_2$.

Zrobimy sprytnie wprost: $K_1 = L_1$, $K \subseteq K_2 \subseteq L_2$ i $K_1 \cong_K K_2$. K_1 jest aglebraicznie domknięte, więc K_2 też takie musi być. Czyli $K \subseteq K_2 \subseteq L_2$ jest algebraiczne, więc $K_2 = L_2$, bo założyliśmy, że $b \in L_2 \setminus K_2$ i wtedy wielomina minimalny $f_b(x) \in K_2[X]$ ma pierwiastek $c \in K_2$, czyli $(x - c) | f_n(x)$ a więc $x - c = f_b(x)$ jest nierozkładalny i $b = c$.

Wniosek 5.10. *Jeśli $K \cong L$, to $\widehat{K} \cong \widehat{L}$. Dokładniej, jeżeli $f_0 : LK \to L$ jest izomorfizmem ciał, to istnieje izomorfizm $f : \widehat{K} \to \widehat{L}$ taki, że $f \restriction K = f_0$.*

Dowód. Ćwiczenia ☕

Uwaga 5.11. *Jeśli* $K \subseteq L$ *jest algebraicznym rozszerzeniem ciał, to istnieje monomorfizm* $f : L \to \widehat{K}$ *taki, że* $f \restriction K = \mathrm{id}_K$.

Dowód. Ćwiczenie ☕

Wykład 6: Wstęp do teorii Galois

6.1 Grupy Galois

Niech K będzie ciałem, $\widehat{K}$ jego algebraicznym domknięciem. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym ciał [BSO: $L \subseteq \widehat{K}$]. **Grupą Galois** rozszerzenia $K \subseteq L$ nazywamy

$$G(L/K) = \mathrm{Gal}(L/K) = \{f \in \mathrm{Aut}(L) \ : \ f \restriction K = \mathrm{id}_k\} = \mathrm{Aut}(L/K)$$

ze składaniem jako działaniem. Jest to jednocześnie podgrupa wszystkich automorfizmów.

Przykład:

1. Niech K będzie ciałem prostym ($\cong$ z $\mathbb{Q}$ lub z $\mathbb{Z}_p$). Wtedy $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}(L)$, bo
   - Niech $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(L) = p > 0$ i niech $f \in \mathrm{Aut}(L)$. Wtedy $f(1) = 1$, $f(\underbrace{1 + ... + 1}_{k}) = \underbrace{1 + ... + 1}_{k}$, a ponieważ $K = \{\underbrace{1 + ... + 1}_{k} \ : \ k \in \{1, ..., p\}\}$, zatem $f \restriction K = \mathrm{id}_K$, czyli $f \in \mathrm{Gal}(L/K)$.
   - Niech $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(L) = 0$, wtedy $K \cong \mathbb{Q}$. Niech $f \in \mathrm{Aut}(L)$. Wtedy $f(0) = 0, f(1) = 1$, a dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ $f\,\underbrace{1 + ... + 1}_{k} = \underbrace{1 + ... + 1}_{k}$, stąd dostajemy, że $f(n) = n$ dla $n \in \mathbb{Z}$, a z własności $\mathbb{Q}$ dostajemy, że $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$, zatem $f \restriction K = \mathrm{id}_K$.
2. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \{f_0, f_1\} \cong \mathbb{Z}$, bo $\sqrt{2}$ może przejść na siebie albo na $-\sqrt{2}$. Wtedy $f_0 = \mathrm{id}$, a $f_1(-\sqrt{2})$

Grupę Galois $\mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ nazywamy **absolutną grupą Galois** ciała K.

Czy każda grupa skończona jest izomorficzna z $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ *dla pewnego* $\mathbb{Q} \subseteq L$*?* Jest to otwarty problem teorii Galois.

Uwaga 6.1. $a, b \in \widehat{K}$, *takie, że* $I(a/K) = I(b/K)$, *to wtedy istnieje* $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ *takie, że* $f(a) = b$.

Dowód.

$$\begin{tikzcd}
K[a] \arrow[r, "\cong", "f"'] \arrow[d, "\subseteq"] & K[b] \arrow[d, "\subseteq"] \\
K[a]^{alg} = \widehat{K} \arrow[r, "\exists f'", "\cong"'] & \widehat{K} = K[b]^{alg}
\end{tikzcd}$$

Co jest wnioskiem z wniosku 5.10. ☕

6.2 Rozszerzenia algebraiczne normalne

$\widehat{K}$ jest największym algebraicznym rozszerzeniem K tzn. $K \subseteq L$ oznacza, że istnieje $f : L \to \widehat{K}$ monomorfizm ciał taki, że $f \restriction K = \mathrm{id}_K$. (☕)

Mówmy, że rozszerzenie algebraiczne $K \subseteq L$ jest **normalne**, gdy w (☕) $f[L] \subseteq \widehat{K}$ dla wszystkich $f : L \to K$.

Przykład Rozszerzenie $K \subseteq \widehat{K}$ jest normalne.

Uwaga 6.2. *Załóżmy, że* $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$. *Wtedy rozszerzenie* $K \subseteq L$ *jest normalne* $\iff$ *dla każdego* $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ $f[L] = L$.

Dowód. $\implies$ z definicji, bo $\mathrm{id}_K[L] = L$.

$\impliedby$ z definicji.

☕

Czyli $K \subseteq L_1 \subseteq L$ i $K \subseteq L$ jest normalna, to $L_1 \subseteq L(\subseteq \widehat{K})$, więc $\mathrm{Gal}(\widehat{L_1}/L_1) \leq \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$.

Twierdzenie 6.3. *Dla $K \subseteq L$ algebraicznego rozszerzenia jest normalne $\iff$ dla każdego $b \in L$ wielomian minimalny $f \in K[X]$ rozkłada się w $L[X]$ na iloczyn czynników liniowych.*

Dowód. Bez straty ogólności rozważamy $L \subseteq \widehat{K}$.

$\implies$

Dowód nie wprost, to znaczy załóżmy, że istnieje $b \in L$ takie, że $w_b(x)$ ma pierwiastek $a \in \widehat{K} \setminus L$. Ale wtedy z Uwagi 6.1. na jednorodność $\widehat{K}$ istnieje $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f(b) = a$, więc $f[L] = L$ co jest sprzeczne z 6.2.

$\impliedby$

Załóżmy nie wprost, że na mocy 6.2. istnieje $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f[L] \neq L$. Ale L i $f[L]$ są wzajemnie sprzężone, więc wybierzmy $a \in L \setminus f[L]$. Symetrycznie, $a' \in f[L] \setminus L$, $f' : f[L] \xrightarrow{\cong} L$ spełnia warunek (☕). Niech $w_a(x)$ jest wielomianem minimalnym a nad K. Wtedy $w_a(X) = f(w_a(x))$, bo $f \restriction K = id_K$. Czyli w_a jest wielomianem minimalnym dla $b = f(a)/K$. Czyli $L \overset{f}{\cong}_K f[L]$. Z (☕) wiemy, że $w_a(x)$ rozkłada się nad L na czynniki liniowe. Czyli $w_a(x)$....$f[L]$..., co daje nam sprzeczność, bo a jest pierwiastkiem $w_a(X)$, ale $a \notin f[L]$. ☕

Rozszerzenie ciał $K \subseteq L$ jest **skończone**, jeśli $[L : K] < \infty$.

Twierdzenie 6.4. *Niech $K \subseteq L$ będą rozszerzeniami ciał. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *rozszerzenie $K \subseteq L$ jest skończone i normalne*
2. *L jest ciałem rozkładu pewnego wielomianu*

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$.

(2) $\implies$ (1)

Załóżmy, że L jest ciałem rozkłądu pewnego wielomianu. Wtedy $L = K(a_1, ..., a_n)$, gdzie $a_1, ..., a_n$ to wszystkie pierwiastki wielomianu $w(x)$ w $\widehat{K}$.

Niech $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$, wtedy $f(a_1, ..., f(a_n)$ to też wszystkie pierwiastki wielomianu $w(x)$. Stąd

$$f[L] = K(f(a_1), ..., f(a_n)) = K(a_1, ..., a_n) = L,$$

zatem rozszerzenie $K \subseteq L$ jest normalne i skończone.

(1) $\implies$ (2)

Niech $K \subseteq L$ będzie skończone i normalne. Wtedy $L = K(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych $a_1, ..., a_n \in L$ i $\{a_1, ..., a_n\}$ będzie bazą L nad K. Wtedy istnieje $w \in K[X] \setminus \{0\}$ takie, że $w(a_1) = ... = w(a_n) = 0$, zatem

$$L \supseteq \{\text{ pierwiastki } w\} \supseteq \{a_1, ..., a_n\}.$$

COŚ TUTAJ JEST NIE TAK ☕

Przykłady:

1. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami skończonymi, wtedy $K \subseteq L$ jest ciałem normalnym, bo $|L| = p^n$, $w_{p^n-1}(x) = x^{p^n-1} - 1$ i L jest ciałem rozkładu w nad K.
2. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ to rozszerzenie skończone, ale nie normalne. Jest tak, bo
   - $x^3 - 2$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$ (kryterium Eisteina)
   - W ciele $\mathbb{C}$ $x^3 - 2$ ma 3 pierwiastki, z których tylko jeden jest w $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$a

Uwaga 6.5. *Niech* $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ *i niech* L_1 *będzie ciałem generowanym przez* $\bigcup\{f[L] : f \in Gal(\widehat{K}/K)\}$. *Wtedy* L_1 *to* ***normalne domknięcie ciała*** L ***w*** $\widehat{K}$. *Wtedy*

1. *Rozszerzenie* $K \subseteq L_1$ *jest normalne*
2. *Jeśli* $K \subseteq L_2$ *i* $L \subseteq L_2$ *są normalne, to istnieje monomorfizm* $L_1 \to L_2$ *taki, że* $f \restriction K = id$.

Dowód. (1) Z 6.2

(2)

Bez straty ogólności załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq L_2 \subseteq \widehat{K}$ i $K \subseteq L \subseteq L_2 \subseteq \widehat{K}$. Niech $f \in Gal(\widehat{K}/K), f[L] \subseteq L_2$. W takim razkie $\bigcup\{f[L] : f \in Gal(\widehat{K}/K)\} \subseteq L_2$, z czego wynika, że $L_1 \subseteq L_2$.

6.3 Rozszerzenia rozdzielcze

- Niech K będzie ciałem i $a \in \widehat{K}$. Mówimy, że a jest **rozdzielczy nad** K, gdy wielomian minimalny a, $w_a(x) \in K[X]$
- Algebraiczne rozszerzenie $K \subseteq L$ jest **rozszerzeniem rozdzieliczym**, gdy dla każdego $a \in L$ a jest rozdzielcze nad K.
- Wielimian $w(x) \in K[X]$ jest **rozdzielczy**, gdy w ma tylko pierwiastki jednokrotne w $\widehat{K}$.

Uwaga 6.6. *Załóżmy, że* $w(x) \in K[X]$ *jest wielomianem nierozkładalnym stopnia* > 0. *Wtedy*

1. $w(x)$ *jest rozdzielczy* $\iff$ $w(x)$ *i* $w'(x)$ *są względnie pierwsze*
2. *Jeśli* $char(K) = 0$, *to* w *jest rozdzielczy*
3. *Jeśli* $char(K) = p > 0$, *to* w *jest nierozdzielczy* $\iff$ $w(x) \in K[X^p]$, *to znaczy* $w(x) = v(x^p$ *dla pewnego* $v(x) \in K[X]$*).*

Dowód. Dowód zadanie z listy 4

Przykłady:

1. Niech $K \subseteq L$ będzie rozdzielcze i $K \subseteq L_1 \subseteq L$. Wtedy $L_1 \subseteq L$ też jest rozdzielcze [ćwiczenia]
2. Jeśli $char(K) = 0$, to każde rozszerzenie algebraiczne ciała K jest rozdzielcze.
3. Niech $K \subseteq L$ będą ciałami skończonymi. Wtedy $K \subseteq L$ jest rozdzielcze.

   Ciał L rozkładu wielomianu $x^{p^n} - x$ o pierwiastkach jednokrotnych.
4. Rozszerzeni nierozdzielnicze: niech $K = F_p(X) \subseteq L = K(\sqrt[p]{x})$. Niech $w_a(T) = T^p - x \in K[T]$ będzie wielomianem minimalnym $a = \sqrt[p]{x}$. Wtedy $w_a' = 0$, czyli w ciele L istnieje p-krotny pierwiastek w_a: $w_a(T) = (t-a)^p.a$

Lemat 6.7.

1. *Jeśli* $a \in \widehat{K}$, *to* $|\{f(a) : f \in Gal(\widehat{K}/K)\}| \leq$ *stopień* a *nad* K
2. a *jest rozdzielczy nad* K $\iff$ *w podpunkcie (1) jest równość.*

Dowód.

$$\{f(a) : f \in Gal(\widehat{K}/K)\} \overset{??}{=} \{\text{pierwiastki wielomianu minimalnego } w_a \in K[X] \text{ nad } K\}$$

czyli $deg(a/K) = deg(w_a)$.

Element $a \in L$ nazywamy **elementem pierwotnym** rozszerzenia $K \subseteq L$, gdy $L = K(a)$.

Twierdzenie 6.8. *Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem skończonym, $L = K(a_1, \dots, a_n)$ i $a_1, \dots, a_n$ rozdzielcze nad K. Wtedy istnieje $a^* \in L$ rozdzielczy nad K taki, że $L = K(a^*)$.*

Dowód. Bez starty ogólności załóżmy, że $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$. Rozważmy dwa przypadki:

1. K jest skończone. Wtedy L także jest skończone, a L^* jest cykliczna. Niech więc $a^* \in L^*$ będzie generatorem L^*. Wtedy $L = K(a^*)$.
2. K jest nieskończone.

   Dowód przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ jest oczywiste. Robimy więc krok indukcyjny $(n-1) \implies n$:
   $$K(a_1, \dots, a_{n-1}) = K(b)$$
   $$K(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = K(b, a_n)$$
   Niech teraz k będzie stopniem b nad K, a m - stopniem a_n nad $K(b)$. Z lematu 6.7 wiemy, że istnieją $f_1, \dots, f_k \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ takie, że $f_1(b), \dots, v_k(b)$ są parami różne. Niech więc $f_{1,1}, \dots, f_{1,m} \in G(\widehat{K}/K(b))$ takie, że $f_{1,1}(a), \dots, f_{1,m}(a)$ są parami różne.

   Dla $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$ niech $f_{i,j} = f_i \circ f_{1,j} \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$.
   $$\begin{tikzcd}
   K(b)(a) \arrow[r, "f_{i,j}"] & K(b, f_{1,j}(a)) \arrow[r, "f_i"] & K(f_i(b), f_i(f_{1,j}(a))) \\
   K(b) \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[r] & K(f_i(b)) \arrow[ur, "\subseteq"] & \\
   K \arrow[u, "\subseteq"] & K \arrow[u, "\subseteq"] &
   \end{tikzcd}$$
   Zauważmy, że
   $$\langle i, j\rangle \neq \langle i', j'\rangle \implies \langle f_{i,j}(a), f_{i,j}(b)\rangle \neq \langle f_{i',j'}(a), f_{i',j'}(b)\rangle,$$
   bo są dwie możliwości:
   - $i \neq i'$, wtedy $f_{i,j} = f_i(b) \neq f_{i'}(b) = f_{i',j'}(b)$
   - $i = i' \wedge j \neq j'$, wtedy $f_{ij}(a) = f_i(f_{1,j}(a)) \neq f_{i'}(f_{1,j}(a)) = f_{i'j'}(a)$, bo $f'_{1,j}(a) \neq f'_{1,j'}(a)$.

   Skoro K było nieskończone, to istnieje $c \in K$ takie, że dla $\langle i, j\rangle \neq \langle i', j'\rangle$ mamy
   $$f_{i,j}(b) + f_{i,j}(a) \cdot c \neq f_{i',j'}(b) + f_{i',j'}(a) \cdot c,$$
   bo
   $$F(x) = \prod_{\langle i,j\rangle \neq \langle i',j'\rangle} [f_{i,j}(b) + f_{ij}(a)x - (f_{i'j'}(b) + f_{i'j'}(a)x)]$$
   i c po prostu nie jest pierwiastkiem F.

   Postulujemy, że $K(b, a_n) = K(a^*)$, gdzie $a^* = b + a_n c$ jest elementem pierwotnym.

   $\supseteq$ jest jasne

   $\subseteq$ $f_{ij}(a^*)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$ parami różne.

   Wiemy, że $\deg(a^*/K) \geq k \cdot m$, z drugiej strony
   $$k \cdot m \leq [K(a^*) : K] \leq [K(a_b, b) : K] = [K(b) : K][K(a_n, b) : K(b)] = km$$
   czyli wszędzie wyżej są równości i mamy $K(a^*) = K(a_n, b)$.

Wniosek 6.9.

1. *Jeśli* $L = K(a_1, ..., a_n)$ *i* a_i *są rozdzielcze nad* K*, to* $L \supseteq K$ *też jest rozdzielcze.*
2. $K \subseteq L$ *jest rozdzielcze i* $L \subseteq M$ *jest rozdzielcze, to* $K \subseteq M$ *też jest rozdzielcze.*

Dowód. 1. Niech $L = K(a)$ i a jest rozdzielczy nad K. Załóżmy, że $b \in L$ nie jest rozdzielczy nad K. Wtedy $L = K(b, a)$.

$$\begin{array}{ccccc} n \cdot m & & n & & m \\ \| & & \| & & \| \\ \deg(a/K) & = & \deg(b/K) & \cdot & \deg(a/K(b)) \\ \| & & \| & & \| \\ [K(a) : K] & = & [K(b) : K] & \cdot & [K(a, b) : K(b)] \end{array}$$

Wybierzmy teraz $g \in K[X]$ takie, że $g(a) = b$. Wtedy

$$n \cdot m = |\{f(a) \ : \ f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = (\star),$$

bo a jest rozdzielczy nad K. Dalej,

$$(\star) = |\{(f(b), f(a)) \ : \ f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)\}| = (\star\star),$$

bo $f(b)$ ma $k < n$ możliwości, gdyż b nie jest rozdzielczy nad K i korzystamy z 6.7. Przy ustalonym $f(b)$ skakać po $f(a)$ możemy na co najwyżej m sposobów, bo $\deg(a/K(b)) = m = \deg(f(a)/K(f(b))$. Czyli koniec końców

$$(\star\star) \leq k \cdot m < n \cdot m,$$

co daje sprzeczność.

2. Podobny dowód zostawiony studentowi do pokiwania głową, że rozumie a w duszy płacz bo co się dzieje?

Wykład 7: Rozszerzenia radykalne (czysty Bangladesz)

Niech $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ jak zwykle. Wtedy

- $a \in L$ jest **czysto nierozdzielczy** nad K, czyli **radykalny**, gdy wielomian minimalny a nad K, $w_a(x) \in K[X]$, ma tylko jeden pierwiastek w $\widehat{K}$.
- $K \subseteq L$ jest **rozszerzeniem radykalnym** (czysto nierozdzielczym), gdy dla każdego $a \in L$ a jest radykalne nad K.

Uwaga 7.1.

1. *Jeśli* $\mathrm{char}(K) = 0$, *to* a *nad* K *jest czysto nierozdzielczy* $\iff$ $a \in K$.
2. a *jest radykalne nad* K $\iff$ *dla każdego* $f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)$ $f(a) = a$
3. *Jeśli* $\mathrm{char}(K) = p$, *to* a *jest radykalne nad* K $\iff$ *istnieje* $n \geq 0$ $a^{p^n} \in K$.

Dowód.

1. $w_a(x)$ ma tylko pierwiastki jednokrotne, gdy $\mathrm{char}(K) = 0$
2. Oczywiste $\star$
3. $\Longleftarrow$ oczywiste: $w_a(x) \in K[X]$ dzieli $x^{p^n} - a^{p^n} = (x-a)^{p^n} \in K[X]$

   $\Longrightarrow$ Dowodzimy indukcją po $n = \deg(a/K)$. Niech $w_a(x) = (x-a)^n \in K[X]$i $w'_a(x) = n(x-a)^{n-1} \in K[X]$ i $w'_a \in I(a/K)$ gdy $n > 1$, czyli $w'_a(x) = 0$, więc $p|n$. Niech więc $n = p \cdot n_1$ i wtedy $w_a(x) = (x^p - a^p)^{n_1}$ i a^p jest radykalny nad K, bo $\deg(a^p/K) \leq n_1 < n$. Z założenia indukcyjnego istnieje $k \geq 0$ takie, że $(a^p)^{p^k} = a^{p^{k+1}} \in K$ i to jest to, czego szukaliśmy.

☕

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym. Definiujemy

1. rozdzielcze domknięcie K w L: $\mathrm{sep}_L(K) = \{a \in L \;:\; a \text{ radykalne nad } K\}$
2. radykalne domknięcie (czysto nierozdzielcze) K w L: $\mathrm{rad}_L(K) = \{a \in L \;:\; a \text{ radykalny nad } K\}$

Wniosek 7.2. $K \subseteq \mathrm{sep}_L(K)$ *i* $\mathrm{rad}_L(K) \subseteq L \subseteq \widehat{K}$ *to ciała takie, że* $\mathrm{sep}_L(K) \cap \mathrm{rad}_L(K) = K$.

Dowód. Fakt, że $\mathrm{sep}_L(K)$ jest ciałem wynika z 6.9. Natomiast to, że $\mathrm{rad}_L(K)$ jest ciałem wynika z tego, że

$$\mathrm{rad}_L(K) = L \cap \bigcap_{f \in \mathrm{Gal}(\widehat{K}/K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a \in \widehat{K} \;:\; f(a) = a\}$$

Dalej, dla $a \in \mathrm{sep}_L(K) \cap \mathrm{rad}_L(K)$ mamy $w_a(x) = x - a$ jest wielomianem minimalnym a nad K. ☕

- $\widehat{K}^s = \mathrm{sep}_{\widehat{K}}(K)$ jest rozdzielczym domknięciem K
- $\widehat{K}^r = \mathrm{rad}_{\widehat{K}}(K)$ jest radykalnym domknięciem K.

Uwaga 7.3.

1. *Gdy* $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}$, *to* $\mathrm{sep}_L(K) = \widehat{K}^s \cap L$, $\mathrm{rad}_L(K{=}\widehat{K}^r \cap L$
2. *Załóżmy, że* $K \subseteq L \subseteq M \subseteq \widehat{K}$, *wtedy* $K \underset{\mathrm{rad}}{\subseteq} L \underset{\mathrm{rad}}{\subseteq} M \iff K \underset{\mathrm{rad}}{\subseteq} M$

3. *Jeśli* $\mathrm{char}(K) = 0$, *to* $\mathrm{sep}_L(K) = K^{alg}(L)$ *i* $\mathrm{rad}_L(K) = K$, *oraz* $\widehat{K}^s = \widehat{K}$, $\widehat{K}^r = K$.

Spis twierdzeń