G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

Nie zgadzam się z matematyką. Uważam, że suma zer daje groźną liczbę.

Stanisław Jerzy Lec

Wrońskian równania drugiego rzedu

Zadanie 1. Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą rozwiązaniami równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha, \beta]$. Oznaczmy

$$W(t) = W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Pokaż, że dla każdych $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$ jest prawdziwa równość

$$W[y_1(t), y_2(t)] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\, \mathrm{d}s\right)$$

(Wskazówka: Znajdź równanie różniczkowe, które spełnia $W(t)$). Wywnioskuj, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(t), y_2(t)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Zadanie 2. Pokaż, że jeżeli wszystkie rozwiązania y i ich pochodne y' równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dążą do 0 gdy $t \to \infty$, to $\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds \to +\infty$ dla $t \to +\infty$.

Zadanie 3. Udowodnij, że $y(t) = t^2$ nigdy nie może być rozwiązaniem równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dla ciągłych $p(t)$ i $q(t)$.

Zadanie 4. Funkcja $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ jest rozwiązaniem równania $y'' + ty' + y = 0$. Znajdź drugie rozwiązanie liniowo niezależne.

Zadanie 5. Rozważamy równanie $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

a) Używając podstawienia $y(x) = z(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(s)\, ds\right)$ sprowadź powyższe równanie do postaci $z'' + b(x)z = 0$.

b) Spróbuj znaleźć podstawienie redukujące wyjściowe równanie do $w'' + c(x)w' = 0$.

c) Zakładając, że y_1 jest rozwiązaniem, znajdź rozwiązanie y_2 (w postaci $y_2 = y_1 z$) niezależne od y_1.

Metoda szeregów potęgowych

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie (w postaci szergu potęgowego) następującego zagadnienia:

$$t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Zadanie 7. Znajdź rozwiązanie ogólne *równania Czebyszewa*

$$(1-t^2)y'' - ty' + 9y = 0,$$

jeżeli wiadomo, że ma ono rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia 3.

Zadanie 8. Równanie postaci $y'' - 2ty' + \lambda y = 0$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywa się *równaniem Hermite'a*.

a) Znajdź dwa niezależne rozwiązania równania Hermite'a.

b) Udowodnij, że dla $\lambda = 2n$ (n – liczba naturalna) równanie Hermite'a ma rozwiązanie w postaci wielomianu stopnia n.