Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Kolokwium 2

Exercise 1. *W nieskończonej puli jest n różnych (jednakowo prawdopodobnych) typów kuponów. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą ilość typów kuponów w losowo wybranym zbiorze k kuponów. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}(X)$.*

Wprowadźmy zmienne pomocnicze:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ty rodzaj pojawia się} \\ 0 & \text{wpp} \end{cases},$$

wtedy $X = \sum_{1 \le i \le n} Y_i$.

Do policzenia $\mathbb{E}X$ potrzebuję znać $\mathbb{P}\left[Y_i = 1\right]$, gdy losuję k losów.

$$\mathbb{P}\left[Y_i = 1\right] = 1 - \mathbb{P}\left[Y_i = 0\right] = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k},$$

czyli

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum Y_i = \sum \mathbb{E}Y_i = \sum(1 - \frac{(n-1)^k}{n^k}) = n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}$$

To teraz wariacja:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(\sum Y_i) = \sum \mathrm{Var}(Y_i) + 2\sum \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \\ &= \sum[\mathbb{E}Y_i^2 - (\mathbb{E}Y_i)^2] + 2\sum[\mathbb{E}Y_iY_j - (\mathbb{E}Y_i)(\mathbb{E}Y_j)] = \end{aligned}$$

No i teraz tak: $\mathbb{E}Y_i^2 = \mathbb{E}Y_i$, bo zmienia się tylko fakt, że w gruncie rzeczy to, że mnożymy prawdopodobieństwo przez 1^2 a nie 1. Natomiast $\mathbb{E}Y_iY_j$ trzeba policzyć prawdopodobieństwo, że oba są jedynką.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[Y_iY_j = 1\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[Y_iY_j = 0\right] = 1 - \mathbb{P}\left[Y_i = 0\right] - \mathbb{P}\left[Y_j = 0\right] + \mathbb{P}\left[Y_i = 0, Y_j = 0\right] = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{(n-2)^k}{n^k} \end{aligned}$$

No i teraz wystarczy podstawić, ale mi się nie chce!

Exercise 2.

(a) *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie z gęstością postaci*

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$$

Wyznaczyć rozkład (dystrybuantę lub gęstość) zmiennej losowej $Y = \frac{1}{X}$. Co to za rozkład? Znaleźć $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(\frac{1}{X})$ i porównać z $\frac{1}{\mathbb{E}X}$, o ile to możliwe.

(b) Znaleźć wartość oczekiwaną pola koła, którego promień jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\mathscr{E}x(1)$ z gęstością postaci $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.

(a) Ponieważ wartości X są dodatnie, takie też będą wartości Y. Dokładniej, $Y \in (0, 1]$.

Wyznaczanie dystrybuanty dla $t \in (0, 1]$ (dla $t \geq 1$ będzie zawsze 1, a dla $t \leq 0$ powinno być zerem):

$$F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{X} \leq t\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{t} \leq X\right] = \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = t,$$

czyli $f_Y(t) = 1$, czyli Y ma rozkład jednostajny.

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{E}\frac{1}{X} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}X = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \text{niecałkowalne!!!}$$

(b) Pole koła to πr^2, tylko tutaj zamiast r^2 używam X^2:

$$\mathbb{E}\text{Pole} = \pi \cdot \mathbb{E}X^2 = \pi \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\, dx = \pi \cdot \Gamma(3) = 2\pi$$

Exercise 3.

(a) Znaleźć prawdopodobieństwo, że trójmian kwadratowy $\varepsilon - 2A\varepsilon + B$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeśli A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczymi $\mathscr{E}x(\lambda)$ z gęstością postaci $f_A(x) = f_B(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.

1. Tutaj trzeba chyba pamiętać jak działała delta :<

$$\Delta = 4A^2 - 4B$$

i żeby nie było rozwiązań rzeczywistych potrzebuję, żeby to cacko było ujemne.

$$\mathbb{P}\left[4A^2 - 4B < 0\right] = \mathbb{P}\left[A^2 - B < 0\right] = \mathbb{P}\left[A^2 < B\right] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left[x^2 < B\right] \cdot f_A(x)\, dx =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_{x^2}^{\infty} f_A(x) \cdot f_B(y)\, dydx = \int_0^{\infty}\int_{x^2}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\, dydx =$$
$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda x^2}\, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x^2+x)}\, dx =$$
$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x^2+x+\frac{1}{4})} e^{\frac{\lambda}{4}}\, dx =$$

boże, od tego miejsca to już tylko przestawianie zmiennych i takie chuju muju.