Rozmaitości różniczkowalne

elo

—

Spis treści

1. Definicja rozmaitości

Definicję rozmaitości będziemy budowali warstwami: najpierw położymy fundamenty topologiczne, potem naniesiemy na to strukturę gładką, a na koniec rozszerzymy do pojęcia rozmaitości z brzegiem.

Zanim zajmiemy się konkretnymi definicjami, popatrzmy na kilka prostych przykładów rozmaitości:

- powierzchnia, domknięta lub nie,
- przestrzenie opisane (lokalnie) skończoną liczbą parametrów,
- podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ zapisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ w $\mathbb{C}^3$).

1.1. Rozmaitości topologiczne

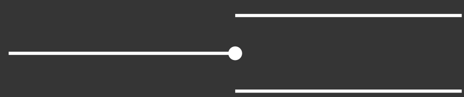
Definicja 1.1. Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową **rozmaitością topologiczną** [n-rozmaitością], jeżeli spełnia:

1. jest Hausdorffa
2. ma przeliczalną bazę
3. jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, czyli każdy punkt z M posiada otwarte otoczenie w M homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

Warunkiem równoważnym do lokalnej euklidesowości jest istnienie otwartego otoczenia dla każdego punktu $p \in U \subseteq M$ takiego, że istnieje homeomorfizm $U \xrightarrow{\cong} B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ [ćwiczenia].

Konsekwencje Hausdorffowości:

- Mamy wykluczone pewne patologie, na przykład przestrzeń



  nie jest rozmaitością topologiczną.
- Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq M$ i homeomorfizmu $\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli $\overline{K} \subseteq \overline{U}$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, to $K = \phi^{-1}[\overline{K}] \subseteq M$ jest domknięty i zawarty w M [ćwiczenia].
- Skończone podzbiory są zamknięte, a granice zbieżnych ciągów są jednoznacznie określone.

Konsekwencje przeliczalności bazy:

- **Warunek Lindelöfa:** każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie [ćwiczenia].
- Każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

  które są po domknięciu zawarte w M.
- Parazwartość, czyli każde pokrycie M posiada lokalnie skończone rozdrobnienie.
- Każdą rozmaitość jesteśmy w stanie zanurzyć w $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednio dużego n.

Konsekwencje lokalnej euklidesowości:

- Twierdzenie Brouwer'a: niepusta n wymiarowa rozmaitość topologiczna nie może być homeomorficzna z żadną m wymiarową rozmaitością gdy $m \neq n$.
- Liczba n w definicji jest jednoznaczna, możemy więc określić **wymiar rozmaitości** jako $\dim M = n$.

Tutaj warto zaznaczyć, że zbiór pusty zaspokaja definicję rozmaitości topologicznej dla dowolnego n. Wygodnie jest jednak móc go czasem użyć, więc w definicji niepustość M nie jest przez nas wymagana.

Uwaga 1.2. *Każdy otwarty podzbiór n-rozmaitości topologicznej jest n-rozmaitością topologiczną [ćwiczenia].*

1.2. Mapy, lokalne współrzędne

Definicja 1.3. Parę (U, ϕ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, a ϕ to homeomorfizm

$$\phi : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

nazywamy **mapą** lub **lokalną parametryzacją** [coordinate chart] na rozmaitości M. Zbiór U taki jak wyżej nazywamy zbiorem mapowym [coordinate domain/neighborhood]. Z lokalnej euklidesowości wiemy, że **zbiory mapowe pokrywają całą rozmaitość**.

Jeżeli (U, ϕ) jest mapą i dla $p \in M$ mamy $\phi(p) = 0$, to mówimy, że mapa jest *wyśrodkowana na* p [centered at p].

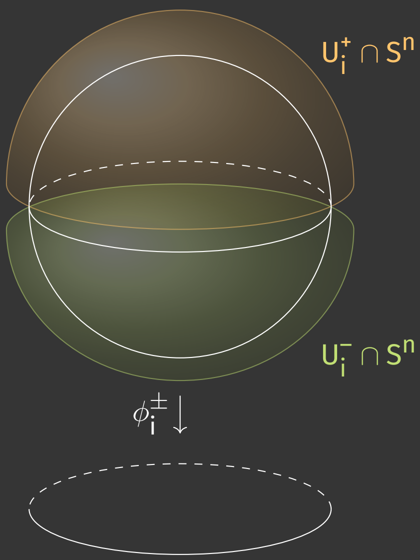
Fakt 1.4. *Hausdorffowska przestrzeń X o przeliczalnej bazie jest n-rozmaitością $\iff$ posiada rodzinę map n-wymiarowych dla której zbiory mapowe pokrywają cały X.*

Przykład:

Rozważmy $S^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ z dziedziczoną topologią. Z racji, że $\mathbb{R}^{n+1}$ jest Hausdorffa i ma przeliczalną bazę, to S^n też spełnia te dwa warunki. Wystarczy teraz wskazać odpowiednią rodzinę map, która pokryje całe S^n. Dla $i = 1, ..., n+1$ określmy otwarte podzbiory w S^n

$$U_i^+ = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{x \in S^n \ : \ x_i < 0\}$$



Określmy odwzorowania $\phi_i^\pm \ : \ U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Obraz tego odwzorowania to

$$\overline{U_i^\pm} = \phi_i^\pm(U_i^\pm) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum x_i^2 < 1\}.$$

Odwzorowanie $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ jest wzajemnie jednoznaczne [bijekcja], bo

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum x_j^2}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Mamy w obie strony odwzorowanie ciągłe, więc jest to homeomorfizmy z odpowiednimi zbiorami $\mathbb{R}^n$.

PRZYKŁADY Z LEE

1.3. Własności rozmaitości topologicznych

1.4. Atlasy, rozmaitości gładkie [różniczkowalne]

Na tym wykładzie nie będziemy poświęcać dużej uwagi rozmaitościom różniczkowalnym nie nieskończenie razy, więc pomimo lekkich niuansów między tymi dwoma słowami, dla nas zwykle znaczą one to samo.

Dla funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ chcemy określić, co znaczy, że f jest różniczkowalna? Będziemy to robić za pomocą wcześniej zdefiniowanych map:

- Funkcja f wyrażona w mapie (U, ϕ) to nic innego jak złożenie $f \circ \phi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$. Teraz $f \circ \phi^{-1}$ jest funkcją zależącą od n zmiennych rzeczywistych.
- Chciałoby się powiedzieć, że funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli dla każdej mapy (U, ϕ) na M, ten fragment wyrażony w tej mapie $f \circ \phi^{-1}$ jest gładki. Niestety, tych map może być nieco za dużo.
- Odwzorowanie przejścia między dwoma mapami (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) to funkcje $\phi_1\phi_2^{-1}$ i $\phi_2\phi_1^{-1}$ określone na $U_1 \cap U_2$.

[zgodność map] Mapy (U, ϕ_1) oraz (U, ϕ_2) są zgodne (gładko-zgodne), gdy odwzorowanie przejścia $\phi_1\phi_2^{-1}$ jest gładkie. Dla map (U, ϕ) i (V, ψ) mówimy, że są one zgodne, jeśli

- $U \cap V = \emptyset$, albo
- $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ i $\psi\phi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ są gładkie.

Warto zauważyć, że jeśli (U, ϕ) i (V, ψ) są zgodne, to $f \circ \phi^{-1}(\phi(U \cap V))$ jest gładkie $\iff$

Odwzorowania przejściowe map są automatycznie dyfeomorfizmami.

[atlas gładki] Gładkim atlasem $\mathscr{A}$ na topologicznej rozmaitości M nazywamy dowolny taki zbiór map $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ taki, że:

1. 1. zbiory mapowe U_α pokrywają całe M
2. 2. każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

Przykład: Rodzina map $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm) \ : \ i = 1, 2, ..., n + 1\}$ jak wcześniej na sferze $S^n \subseteq R^{n+1}$ tworzy gładki atlas. Wystarczy zbadać gładką zgodność tych map. Rozpatrzmy jeden przypadek: $(U_i^+, \phi_i^+), (U_j^+, \phi_j^+), i < j$. Po pierwsze, jak wygląda przekrój tych zbiorów?

$$U_i \cap U_j = \{x \in S^n \ : \ x_i > 0, x_j > 0\}$$

Dalej, jak wyglądają obrazy tego przekroju przez poszczególne mapy?

$$\phi_i^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_{j-1} > 0\}$$
$$\phi_j^+(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1, x_i < 0\}$$

Odwzorowania przejścia to:

$$\phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \ni (x_1, ..., x_n)$$

$$(x_1, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ...x_n)$$

$$\phi_i^+(\phi_j^+)^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, x_j, ..., x_n)$$

jest przekształceniem gładkim. Analogicznie dla drugiego odwzorowania przejścia.

[rozmaitość gładka] Rozmaitość gładka to para $(M, \mathscr{A})$ złożona z rozmaitości M i gładkiego atlasu $\mathscr{A}$ opisanego na M.

Uściślenie: Często $(M, \mathscr{A}_1)$ i $(M, \mathscr{A}_2)$ będące rozmaitościami gładkimi określają tę samą rozmaitość.

[zgodność map, atlasów] Niech $\mathscr{A}$ będzie gładkim atlasem na M.

1. Mapa (U, ϕ) jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}$, jeśli jest zgodna z każdą mapą z $\mathscr{A}$.
2. Dwa atlasy $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ na M są zgodne, jeśli każda mapa z $\mathscr{A}_1$ jest zgodna z atlasem $\mathscr{A}_2$.

[zgodność to relacja równoważnośći] Relacja zgodności atlasów jest relacją równoważności.

Dowód: Ćwiczenia.

Konwencja jest wtedy taka, że zgodne atlasy zadają tą samą strukturę gładką na M. W takim razie, zgodne atlasy można wysumować do jednego większego atlasu.

[atlas maksymalny] $\mathscr{A}$ jest atlasem maksymalnym na M, jeśli każda mapa na M z nim zgodna jest w nim zawarta.

[dla każdego atlasu istnieje jedyny atlas maksymalny] Każdy atlas $\mathscr{A}$ na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym na M. Zaś ten atlas maksymalny to zbiór wszystkich map na M zgodnych z $\mathscr{A}$.

Dowód: Ćwiczenia.

Równoważna definicja rozmaitości gładkiej: para $(M, \mathscr{A})$, gdzie M to rozmaitość topologiczna, zaś $\mathscr{A}$ to pewien atlas maksymalny.

2. Pomocnik idiotów:

Skorowidz definicji

Twierdzonkowa zabawa