

Zadanie 1. Dla ciągłych funkcji rzeczywistych $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ na rozmaitości gładkiej M , oraz dla $\varepsilon > 0$ mówimy, że g jest ε -aprosymacją f , jeśli $\|f - g\| < \varepsilon$ (tzn. dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$).

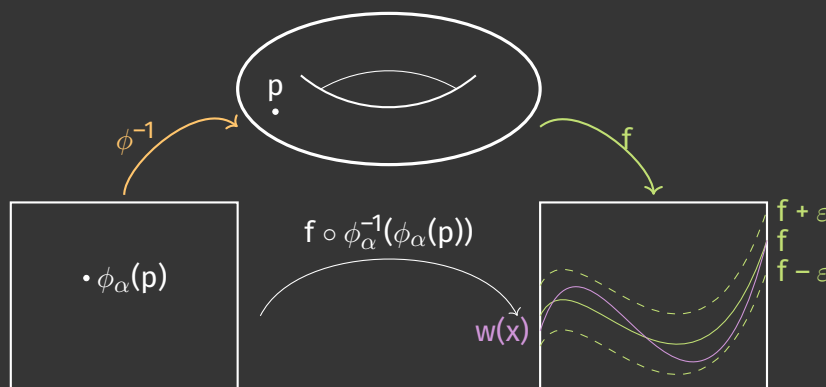
- (a) Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ każda ciągła funkcja $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ posiada gładką ε -aprosymację.
- (b) Rozszerz ten wynik do sytuacji, gdy $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną ciągłą dodatnią funkcją rzeczywistą, zaś ε -aprosymacja funkcji f to dowolna taka funkcja g , że dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$.
- (c) Niech $D \subseteq M$ będzie dowolnym domkniętym podzbiorem. Dla dowolnego ε jak w punkcie (b) uzasadnij, że dowolna funkcja ciągła $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, która jest gładka na pewnym otwartym otoczeniu zbioru D , posiada gładką ε -aprosymację $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $g \upharpoonright D = f \upharpoonright D$.

(a)

Daną mam ciągłą funkcję $F : M \rightarrow \mathbb{R}$. Wiem, że każdą funkcję mogę dowolnie dokładnie aproksymować za pomocą wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Weźmy sobie jakiś atlas na M zawierający mapy (U_α, ϕ_α) . Wiem, że skoro f było ciągłe, a ϕ nic nie psuje, to pewnie i $f \circ \phi^{-1}$ jest ciągłe. Czyli w ten sposób dostaję funkcję $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i na tym już chyba umiem pracować jakoś po ludzku.

Ten obrazek średnio cokolwiek daje, ale zrobiłam go i nie zamierzam usuwać, bo wygląda zajebiście.



Chyba mogę znaleźć sobie wielomian $w \in \mathbb{R}[X^n]$ taki, że siedzi w kulce nałożonej na f w przestrzeni funkcji ciągłych. Ewentualnie mogę powiedzieć, że w to jest po prostu gładka funkcja blisko f określona na $\phi_\alpha(U_\alpha)$, bo chyba funkcje gładkie są gęste w zbiorze funkcji ciągłych czy jakoś tak. Teraz chcę sobie produkować $g = w(\phi(p))$, ale wtedy to nie wyśmignie się chyba tak od razu?

Może wyprodukujmy sobie rozkład jedności ψ_α taki, że $\psi_\alpha \equiv 0$ poza U_α i dowolny punkt $p \in M$ jest $\psi_\alpha(p) > 0$ dla skończenie wielu α . No i jeszcze ten $\sum \psi_\alpha(p) = 1$ dla każdego $p \in M$. Czyli mam pysia będącego rozkładem jedności. Czyli mogę go chyba użyć do wytworzenia w końcu tego g ? Bo jak ψ_α jest gładkie, to ten

$$g(p) = \sum w(\phi_\alpha(p)) \psi_\alpha(p)$$

jest nadal gładkie? Znaczący tutaj jest nieściśłość, bo powinnam pisać, że tak jest dla $p \in U_\alpha$, a jeśli $p \notin U_\alpha$, to po prostu 0, ale to i tak na jedno wychodzi, bo wtedy $\psi_\alpha(p)$ się zeruje. No i jakaś suma skończenie lokalnych gładkich funkcji bla bla bla bla bla

Teraz muszę się upewnić, że to faktycznie jest ograniczeniem moim?

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &= \left\| f(x) - \sum w(\phi_\alpha(x)) \psi_\alpha(x) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum (\psi_\alpha(x)) [f(x) - w(\phi_\alpha(x))] \right\| < \\ &< \left| \sum (\psi_\alpha(x)) \varepsilon \right| = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

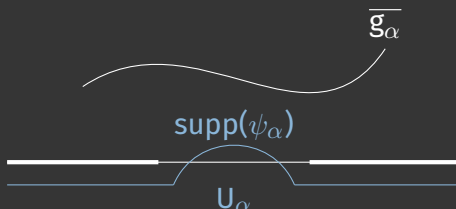
(b)

Teraz zamiast ładnej kulki mam troszkę brzydszą kulkę bo $\{w : f(x) - \varepsilon(x) < w(x) < f(x) + \varepsilon(x)\}$, ale nadal mogę znaleźć jakieś gładkie w i postąpić analogicznie jak wyżej.

Mamy $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ - atlas złożony z przewartych U_α . Niech $\{\psi_\alpha\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w U_α . Ustalmy α . Wtedy $\varepsilon \circ \phi_\alpha^{-1}$ przyjmuje na $\overline{\phi_\alpha(U_\alpha)}$ minimum $m_\alpha > 0$. Istnieje gładka $g_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $\|F \upharpoonright U_\alpha - g_\alpha\| < m_\alpha$. Niech

$$\overline{g_\alpha}(p) = \begin{cases} g_\alpha(p) & p \in U_\alpha \\ 0 & p \notin U_\alpha \end{cases},$$

wtedy $m_\alpha \circ \psi_\alpha(p) \leq \varepsilon(p)$. Niech $G = \sum_\alpha \psi_\alpha \overline{g_\alpha}$.



$$G(p) \leq \sum \psi_\alpha(F(p) + \varepsilon(p)) = F(p) + \varepsilon(p)$$

$$G(p) \geq \sum \psi_\alpha(f(p) - \varepsilon(p)) = F(p) - \varepsilon(p)$$

(c)

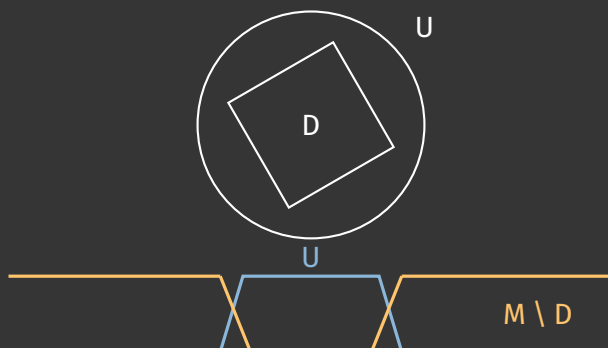
Czyli robię jakieś bump function? Czyli biorę sobie atlas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ taki, że $U_1 = M \setminus D$, a U_2 jest otwartym podzbiorem zawierającym $D \subseteq U_2$. Niech wtedy ψ_1, ψ_2 będzie gładkim rozkładem jedności takim, że $\psi_1 \equiv 0$ na D . Wtedy ϕ_2 na D się nie zeruje, a sumuje do 1, a na okolicy D musi stopniowo schodzić do 0, czyli wyśmignie. To teraz wystarczy znaleźć funkcję, która na $f(\phi_2(D))$ jest identyczna, a na pozostałej części troszkę odbiega, ale to też się da zrobić, taka funkcja to może być w i wtedy

$$g(x) = \begin{cases} w(\phi_2(x)) & x \in D \\ \sum w(\phi_\alpha(x))\psi_\alpha(x) & \text{wpp} \end{cases}$$

Niech $\{\psi_1, \psi_2\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U, M \setminus D\}$, gdzie U jest otoczeniem otwartym D , na którym f jest gładka. Niech

$$G = f \circ \phi_1 + g \circ \phi_2,$$

gdzie g to jest ε -aproksymacja f z punktu (b).



Zadanie 2. Dla niezwanej rozmaitości gładkiej M skonstruuj gładką funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że dla każdego naturalnego n przeciwobraz $f^{-1}([-n, n])$ jest zwartym podzbiorem w M . Funkcje o tej własności nazywają się funkcjami właściwymi. Wskazówka: wykorzystaj zadanie 6 z listy 1: uzasadnij też najpierw następujący fakt pomocniczy: istnieje ciąg otwartych zbiorów V_i takich, że $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = M$, oraz dla każdego i domknięcie $\text{cl}(V_i)$ w M jest zwarte i zawarte w V_{i+1} .

Zadanie 6 w liście 1 mówi, że każda rozmaitość M jest przeliczalną sumą otwartych podzbiorów homeomorficznych z otwartymi kulami w \mathbb{R}^n , których domknięcia w M są homeomorficzne z domkniętymi kulami w \mathbb{R}^n .

Myślę, że wystarczy wziąć ten ciąg jak z faktu pomocniczego i troszkę go podciąć tak, żeby był homeomorficzny z otwartymi kulami. To już robiliśmy. Potem wiem, że domknięcie otwartej kuli jest zbiorem zwartym w \mathbb{R}^n , czyli jego przeciwobraz przez funkcje z atlasu też jest zbiorem zwartym. Mogę więc funkcją f skalować promień na kolejne liczby naturalne, a odległość od kuli i położenie w odpowiedniej półkuli skalować na cały taki odcinek. Taki mam chwilowo pomysł.

To może teraz uzasadnienie faktu pomocniczego? Niech $\bigcup U_i = M$ będzie przeliczalnym pokryciem M . To suniemy z tworzeniem ciągu V_i ? Niech $V_0 = U_0$. Czy mogę powiedzieć, że jeśli zrobię $V_1 = U_1 \cup \text{cl}(V_0)$ to jeśli rzucę to na \mathbb{R}^n i znajdę tam otwarty podzbiór niebędący całym obrazem M , który to zawiera, to jestem w domu? Raczej tak. Czyli takie coś powtarzam dla każdego i i jestem w domu.

Robimy zadanie 3 w inny sposób XD

Istnieją V_i - otwarte prezwarte takie, że $\text{cl}(V_i) \subseteq V_{i+1}$ i $\bigcup V_i = M$. Z zadania 6 z poprzedniej listy wiemy, że istnieją B_k takie, że $M = \bigcup B_k$ i $B_k \cong B(0, 1)$, wtedy $\text{cl}(B_k) \cong \text{cl}(B(0, 1))$.

Możemy więc robić, żeby

$$B \cong B(0, 1) = \bigcup B(0, 1 - \frac{1}{s})$$

To teraz niech $B_k = \bigcup B_{k,s}$ i wtedy mamy to z domknięciem. Teraz możemy zdefiniować V_i jako:

$$V_i = \bigcup_{k=1}^i \bigcup_{s=1}^i B_{k,i} = \bigcup_{k=1}^i B_{k,i}$$

Wtedy

$$\text{cl}(V_i) = \bigcup \text{cl}(B_{k,i}) \subseteq \bigcup B_{k,i+1} \subseteq V_{i+1}$$

Będziemy mieli pary $\{V_{i+1}, M \setminus \text{cl}(V_i)\}$, czyli to jest takie dwuelementowe pokrycie rozmaitości. Teraz chcemy funkcję, która jest 1 na $\text{cl}(V_{i+1})$, a zerem na tym drugim. Rozważmy rozkład jedności $\{\psi_1, 1 - \psi_i\}$ taki, że $\psi_i(M \setminus V_{i+1}) \equiv 1$ i $\psi_i(V_i) \equiv 0$.

Niech $f(x) = \sum \psi_i(x)$. Wystarczy pokazać, że jest to funkcja właściwa. Support to dopełnienie $\text{cl}(V_i)$ i dla dużych i będzie zerem? Nieee wiem, chce spać.

Jeśli $x \in V_i$, to $f(x) \leq i - 1$. Z drugiej strony, jeśli $x \in M \setminus V_i$, to $f(x) \geq i$.

Teraz potrzebujemy, żeby $f^{-1}[-n, n]$ było zwarte. Jak to się ma dla $f^{-1}[0, n]$? jest on zawarty w $\text{cl}(V_{n+1})$

Zadanie 3. Niech \mathcal{U} będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami prezwartymi i niech $\{f_j\}$ będzie gładkim rozkładem jedności wpisanym w \mathcal{U} . Uzasadnij, że funkcja $h = \sum j \circ f_j$ jest gładką funkcją właściwą o dodatnich wartościach. Uzasadnij, że funkcja ta, jak każda rzeczywista funkcja właściwa ograniczona od dołu, posiada globalne minimum (czyli taki punkt $p \in M$ że dla każdego $x \in M$ zachodzi $f(x) \geq f(p)$).

Mamy funkcję $h = \sum j \circ f_j$. Jest gładka i nie się niepusto tylko ze skończenie wieloma zbiorami z pokrycia. Chcemy pokazać, że to jest ograniczone od dołu. Jest właściwa, bo wiemy, że poza sumą zbiorów U_1, \dots, U_n to jest suma większa niż n . Zbiory te są prezwarte, suma skończenie wielu zbiorów prezwartych jest prezwarta. Czyli

$$h^{-1}[-n, n] \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i.$$

Mamy pokazać, że istnieje minimum, czyli coś tam gdzie coś tam jest realizowane.

Weźmy sobie punkt p taki, że $n \leq h(p) < n + 1$. Teraz chcemy dzielić sobie rozmaitość na sumę od U_1, \dots, U_{n+1} i na resztę. I teraz na dopełnieniu sumy U_1, \dots, U_{n+1} na pewno nie znajdzie minimum, bo na tym dopełnieniu ta suma jest większa niż $n + 1$. Ni cholery nie zrozumiałam.

Zadanie 4. Dla rozmaitości M z brzegiem skonstruuj taką gładką funkcję $f : M \rightarrow [0, \infty)$ taką, że $\partial M = f^{-1}(0)$ oraz rząd f w dowolnym punkcie brzegowym wynosi 1.

Rząd funkcji

Idea: Ustalmy rozkład jedności dla zbiorów mapowych $\{h_j\}$. Nie rozumiem tego, co szachu mówi.

$$f(x) = \sum_{j \in M} g_j(\psi_j(x)) \cdot h_j(x)$$

Teraz wypadałoby sprawdzić, że $h_j(x)$ śmiga. Skoro coś tam zeruje się na brzegu, to ma rząd 1. Teraz trzeba policzyć pochodną. Kurwa zgubiłam się. Ale to, że rząd jest co najwyżej 1 to też wynika z tego, że idziemy w \mathbb{R} . Teraz chcemy liczyć pochodną i policzyć, że się nie zeruje.

Pochodna to będzie suma pochodnych czyli będą kontrybucje z różnych map. Teraz musimy wziąć jedną konkretną mapę i policzyć jej pochodną i pokazać, że ta pochodna jest dodatnia, czyli i cała suma też będzie sumą dodatnich i będzie dodatnia.

Ustalmy dowolne $p \in \partial M$. Zauważmy, że $f(p)$ jest skończenie wielu obrazów i skupmy się na jednym, nazwijmy go indeksem β .

$$g_\beta(\psi_\beta(p)) \circ h_\beta(p) = \xi(p)$$

i chcemy pokazać, że $\partial \xi(p) > 0$

DUUUŻO DZIWNYCH RZECZY

Trzeba udowodnić lemacik, że $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i nie wiem co się dzieje hyhy

Idea jest taka, że patrzymy na pochodną funkcji $D(f \circ \psi^{-1})$ to gradient. To jest macierz $1 \times n$. Wiemy, że jest to coś dodatniego i potem coś. AAAAA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA DUPA

Ten lemat to w sumie trzeba zmienić, ale to i tak zdjęcia zrobię

Zadanie 5. Uzasadnij, że naturalne włożenie $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ jest gładkie.

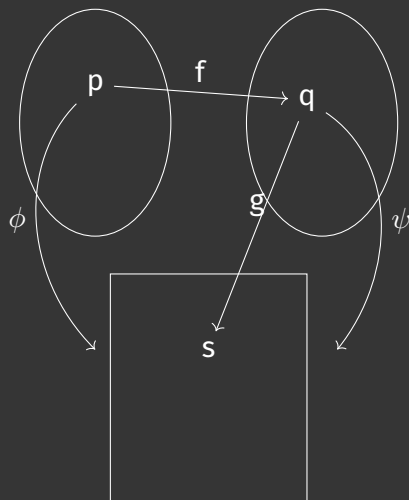
To nie tak, że po prostu mamy identyczność?

Zadanie 6. Niech M, N będą rozmaitościami różniczkowalnymi i niech $f : M \rightarrow N$ będzie przekształceniem gładkim, zaś $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ gładką funkcją rzeczywistą. Uzasadnij z definicji, że złożenie $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką.

Niech $p \in M, q = f(p) \in N$ i $s = g(q) = g(f(p)) \in \mathbb{R}$. Teraz ustalamy sobie mapy $(U, \phi), (V, \psi)$ wokół p i q . Wiem, że $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ i $g \circ \psi^{-1}$ są gładkie i obie przyjmują i oddają wartości rzeczywiste, czyli ich złożenie na pewno będzie gładkie:

$$(g \circ \psi^{-1})(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) = g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} = g \circ f \circ \phi^{-1}$$

jest gładkie, to jak włożymy do tego $\phi(p)$ też będzie gładkie. Koniec.



Zadanie 7. Sprawdź, że dla naturalnej struktury rozmierności gładkiej na produkcie $M \times N$ dwóch rozmierności gładkich rzutowania $M \times N \rightarrow M$ i $M \times N \rightarrow N$ są odwzorowaniami gładkimi.

Na poprzedniej liście już pokazaliśmy, że jest to ziomek gładki i chyba, że $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$ to jest atlas na produkcie kartezjańskim.

Weźmy sobie funkcję $f : M \times N \rightarrow M$ taką, że $f(p, q) = p$.

Niech $(p, q) \in M \times N$ i bierzemy mapy $(p, q) \in (U \times V, \phi \times \psi)$, $p \in (U, \phi)$. Chcę, żeby

$$\phi f(\phi \times \psi)^{-1}$$

było gładkie w punkcie $(\phi \times \psi)(p, q)$.

$$\phi f(\phi \times \psi)^{-1}(\phi \times \psi)(p, q) = \phi(f(p, q)) = \phi(p)$$

no a to jest bardzo gładki?

Zadanie 8. Niech \mathcal{L} będzie rozmiernością prostych na płaszczyźnie.

- Zdefiniuj rozmierność kierunków prostych na płaszczyźnie i pokaż, że odwzorowanie przyporządkowujące prostej z \mathcal{L} jej kierunek jest gładkie.
- Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ przyporządkowujące każdej prostej prostopadłą do niej przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ jest gładkie.
- Dane są gładkie funkcje $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}$ będzie odwzorowaniem w którym $L(t)$ jest prostą przechodzącą przez punkt $p(t)$ i mającą kierunek $\theta(t)$ (liczony w mierze łukowej, tak, że wartości różniące się o π oznaczają ten sam kierunek). Wykaż za pomocą map dla \mathcal{L} , że L jest odwzorowaniem gładkim (gładką krzywą w \mathcal{L}).

Nie rozumiem czego ode mnie wymagają.

Zadanie 9. Odwzorowanie $F : S^3 \rightarrow S^2$ zadane jest wzorem $F(z, w) = (z\bar{w} + w\bar{z}, i\bar{w}z - iz\bar{w}, z\bar{z} - w\bar{w})$, gdzie S^3 traktujemy jako podzbiór w \mathbb{C}^2 zadany równaniem $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Uzasadnij za pomocą wyliczenia w mapach, że F jest odwzorowaniem gładkim. Wcześniej uzasadnij, że jest ono dobrze określone.

S^3 mogę zanurzyć w \mathbb{R}^4 , ale ja mam myśleć w terminach \mathbb{C}^2 , czyli moje zbiory $U_1^\pm, U_2^\pm, U_3^\pm, U_4^\pm$ będą zbiorami które mają dla nieparzystych indeksów $\text{Re}(z)$ jest większe lub mniejsze niż 0, a dla parzystych to $\text{Im}(z)$ jest warunkowane.

To jak wyglądałaby mi mapa $\phi_1^+ : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na

$$U_1^+ = \{(z, w) : \text{Re}(z) > 0\}?$$

$$\phi_1^+(z, w) = (\text{Im}(z), \text{Re}(w), \text{Im}(w))$$

Aby pokazać gładkość F , muszę brać dowolny $(p, q) \in S^3$ i mapę (U, ϕ) zawierającą (p, q) . Potem dobieram mapę (V, ψ) zawierającą $F(p, q)$ i sprawdzam, że $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ jest gładkie.

Dobra, bierzem $(p, q) \in S^3$ i żeby mi było dobrze w życiu, to chcę, aby $(p, q) \in U_1^+$, czyli $\operatorname{Re}(p) > 0$. Wtedy

$$F(p, q) = (p\bar{q} + q\bar{p}, i[q\bar{p} - p\bar{q}], |p| - |q|)$$

Na S^2 ustalam mapy $V_1^\pm, V_2^\pm, V_3^\pm$ i ten obraz musi wpadać w jedną z nich. Chyba mnie nie obchodzi w którą, bo ma szansę wpaść w każdą z nich, w zależności od tego jak będzie wyglądać q ?

Niech $(x, y, z) = \phi(p, q)$, tzn. $p = w + ix, q = y + iz$.

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x, y, z) = \psi(2(wy + xz), 2(wz + xy), w^2 + x^2 - y^2 - z^2)$$

Nie ważne które usuniemy, zawsze dostajemy funkcję gładką, więc i całość jest gładka?