Wrocławska Księga Matematyki

Weronika Jakimowicz

Spis treści

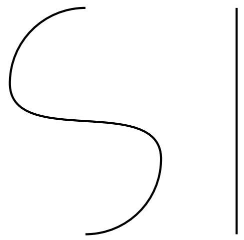
1. Geometria Różniczkowa

Notatki do kursu Geometria Różniczkowa prowadzonego przez dr. Michała Marcinkowskiego w semestrze letnim 2024-2025.

1.1 Przypadek krzywych

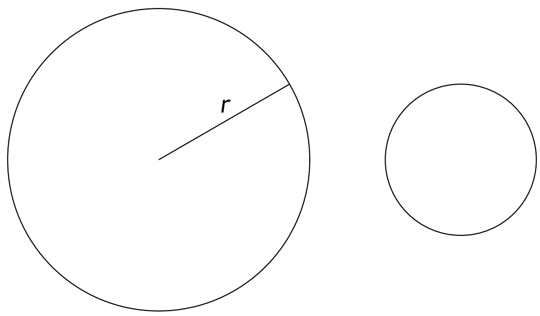
1.1.1 Krzywe na płaszczyźnie

Jakościowo jesteśmy w stanie powiedzieć która z poniższych krzywych jest bardziej krzywa.



Dodatkowo, lewa krzywa nie ma stałej krzywizny: są momenty gdzie zakręca, a są fragmenty gdzie jest niemalże prosta. Narzuca się pytanie, jak tę obserwację ująć w terminach matematycznych?

Zacznijmy od prostego przykładu, czyli okręgu na płaszczyźnie.



Okrąg w każdym punkcie ma taką samą krzywiznę, która dodatkowo maleje wraz ze wzrostem promienia okręgu.

Definicja 1.1: krzywizna okręgu

Krzywiznę okręgu o promieniu r definiujemy jako

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

Wróćmy jeszcze raz do pierwszego rysunku krzywych i wyobraźmy sobie okrąg styczny poruszający się po obu z nich z prędkością w punkcie będącą pochodną krzywej w tym punkcie. Na taki okrąg działa siła odśrodkowa, której będziemy używać do uogólnienia pojęcia krzywizny.

Pojawia się jednak problem, gdyż wartość siły odśrodkowej dla tak podróżującego okręgu zależy nie tylko od tego jak bardzo krzywa jest krzywa, ale także od prędkości okręgu w wybranej parametryzacji krzywej. Będziemy więc chcieli ustandaryzować sposób, w jaki krzywe są nam prezentowane.

Lemat 1.2: o parametryzacji łukowej

Niech $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ będzie krzywą regularną, tzn. krzywą gładką o niezerowej pochodnej $\gamma'(t) \neq 0$. Istnieje wówczas gładka reparametryzacja $s : (a, b) \to (0, l)$ taka, że $\gamma \circ s^{-1}$ jest krzywą o prędkości stale równej 1. Innymi słowy,

$$(\forall\, d \in (0, l))\ |(\gamma \circ s^{-1})'(d)| = 1.$$

Powiemy, że krzywa jest **sparametryzowana długością łuku**, jeśli ma pochodną stale równą 1.

Dowód
TODO

Fakt 1.3

Jeśli γ jest sparametryzowana długością łuku, to $\gamma''(s)$ jest prostopadła do $\gamma'(s)$.

Dowód
Długość wektora prędkości krzywej sparametryzowanej długością łuku jest stale równa jeden, czyli

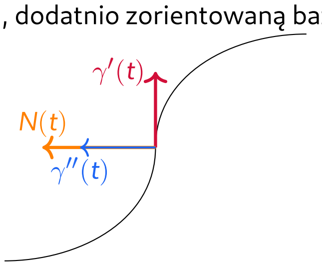
$$1 = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$$

dla każdego s. Możemy to wyrażenie zróżniczkować po s, otrzymując

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle.$$

Definicja 1.4: znakowana krzywizna

Niech γ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku. Niech $N(t)$ będzie wektorem jednostkowym takim, że $(\gamma'(t), N(t))$ jest ortogonalną, dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^2$.



Wówczas **znakowana krzywizna** $\kappa_\gamma(t)$ krzywej γ w punkcie t jest zdefiniowana równaniem

$$\gamma''(t) = \kappa_\gamma(t)N(t).$$

Lemat 1.5: (pierwsze) równania Freneta

Niech γ będzie sparametryzowana długością łuku i niech $(T(s), N(s))$ będzie bazą ortonormalną dodatnio zorientowaną, gdzie $T(s) = \gamma(s)$. Wtedy

$$T' = \kappa \cdot N$$

$$N' = -\kappa T.$$

Dowód
TODO

Twierdzenie 1.6: podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Dla dowolnych

1. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
2. jednostkowego wektora $v \in \mathbb{R}^2$
3. i gładkiej funkcji $\kappa : [0, b] \to \mathbb{R}$

istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ sparametryzowana długością łuku zaczepiona w punkcie (x_0, y_0) o początkowej prędkości $\gamma'(0) = v$ oraz krzywiźnie $\kappa_\gamma = \kappa$.

Dowód
TODO

Definicja 1.7: okrąg ściśle styczny

Niech γ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku i niech η będzie okręgiem sparametryzowanym długością łuku stycznym do γ w punkcie t. Wtedy η jest **okręgiem ściśle stycznym** do γ, jeśli $\eta''(t) = \gamma''(t)$, tzn. jeśli mają tę samą krzywiznę.
Możemy skonstruować nową krzywą, nazywaną **ewolutą krzywej** γ, która składa się ze środków okręgów ściśle stycznych do γ:

$$c = \gamma + \frac{1}{\kappa}N.$$

Definicja okręgu ściśle stycznego w punktach samoprzecięcia krzywej γ psuje się. Wtedy musimy zdecydować, czy chcemy takie punkty brać pod uwagę, czy zdefiniować okrąg ściśle styczny jako prostą.

Fakt 1.8

Niech γ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku taką, że $\kappa'(t) \neq 0$. Wówczas okręgi ściśle styczne są parami rozłączne w otoczeniu punktu t.

Dowód
TODO

1.1.2 Krzywe w przestrzeni

Niech $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą sparametryzowaną długością łuku taką, że $\gamma''(t) \neq 0$. Chcemy wybrać dodatnio zorientowaną, ortogonalną bazę $\mathbb{R}^3$, która będzie nieść ze sobą informacje o krzywej γ. Zdefiniujmy **trójnóg Freneta** jako trójkę wektorów

- $T(t) = \gamma'(t)$ to wektor styczny do krzywej,
- $N(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$ jest znormalizowaną drugą pochodną γ,
- $B = T \times N$ jest nazywany wektorem binormalnym, czyli jednostkowym wektorem prostopadłym do płaszczyzny stycznej do γ.

Definicja 1.9: torsja

Torsję τ krzywej γ definiujemy jako wartość taką, że

$$B' = -\tau N,$$

gdzie B i N są wektorami jak wyżej.

Wektory T oraz N rozpinają płaszczyznę, do której wektor B jest prostopadły. Możemy ją zinterpretować jako płaszczyznę, na której zaczynamy rysować γ. Wtedy τ mówi jak szybko ołówek zaczyna uciekać z tej płaszczyzny.

Twierdzenie 1.10: równania Ferneta

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Dowód
TODO

Twierdzenie 1.11: podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Podobnie jak w twierdzeniu 1.6, chcemy pokazać, że dla ustalonych warunków początkowych, czyli
- funkcji $\kappa : [0, b) \to \mathbb{R}_+$ krzywizny,
- funkcji $\tau : [0, b) \to \mathbb{R}$ torsji,
- oraz dodatnio zorientowanej ortogonalnej bazy (T, N, B) w $\mathbb{R}^3$

istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma : [0, b) \to \mathbb{R}^3$, której krzywizna i torsja to odpowiednio κ i τ, a trójnóg Ferneta w punkcie $t = 0$ to (T, N, B).

Dowód
TODO równania różniczkowe

1.1.3 Krzywizna powierzchni

W tym rozdziale chcemy zdefiniować krzywiznę dla "ładnych" powierzchni w $\mathbb{R}^3$, tzn. powierzchni zadanych przez imersję

$$\Sigma : U \to \mathbb{R}^3$$

dla $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definicja 1.12: metryka Riemanna

Dla dowolnego punktu $p \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ definiujemy dodatnio określoną dwuliniową formę $\langle -, - \rangle_\Sigma$, która dla wektorów stycznych $v_p, w_p \in T_pU$ przyjmuje wartość

$$\langle v_p, w_p \rangle_\Sigma = \langle d\Sigma(v_p), d\Sigma(w_p) \rangle.$$

Funkcja, która każdemu $p \in U$ przypisuje formę $\langle -, - \rangle_\Sigma$ na T_pU nazywamy **metryką Riemanna** na U.

Dla wygody będziemy oznaczać

$$\partial_x = d\Sigma(\partial_x)$$
$$\partial_y = d\Sigma(\partial_y)$$

jako popchnięcie standardowego pola wektorowego na $\mathbb{R}^2$ przez Σ.

Definicja 1.13: wektor normalny

Wektor normalny do powierzchni Σ w punkcie p to

$$n_p = \frac{\partial_x \times \partial_y}{\|\partial_x \times \partial_y\|}$$

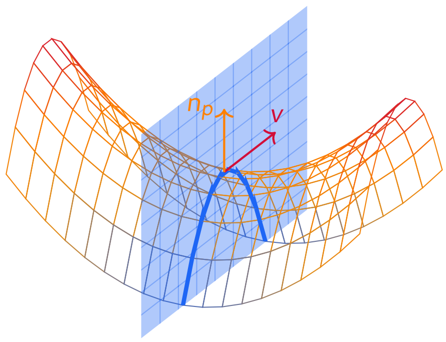
.

W dowolnym punkcie powierzchni, przestrzeń do niego styczna jest dwuwymiarowa. Wybranie pojedynczego wektora stycznego tak jak w przypadku krzywych jest więc niemożliwe. Możemy za to zdefiniować krzywiznę powierzchnie w punkcie jako funkcję

$$\kappa : S^1 \to \mathbb{R}.$$

Definicja 1.14

Dla $v \in T_p\Sigma$ długości 1 definiujemy **krzywiznę** w punkcie p wzdłuż v, $\kappa_p(v)$, jako krzywiznę krzywej planarnej będącej przecięciem Σ z płaszczyzną rozpiętą przez v oraz n_p.



1.2 Koneksja

TODO: narysować na sferce przesuwanie wektorów stycznych po fragmencie równika vs. poludnikiem do bieguna i w dół. I dodać wyjaśnienie po co są koneksje

Niech X i Y będą polami wektorowymi na powierzchni Σ imersjonowanej w $\mathbb{R}^3$. Definiujemy zróżniczkowanie pola Y wzdłuż pola X w $\mathbb{R}^3$ jako wektor

$$D_X Y = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right) = (X(Y_1), X(Y_2), X(Y_3)),$$

który ma część styczną do Σ oraz część normalną:

$$D_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y) n_p.$$

Część normalna, oznaczana $\mathrm{II}(X, Y)n_p$, nazywa się **drugą formą zasadniczą** (ang. second fundamental form). W późniejszych rozdziałach zobaczymy, że jest ona powiązana z krzywizną powierzchni.

Lemat 1.15

Druga zasadnicza forma jest symetryczna i dwuliniowa, tj. dla dowolnych pól wektorowych X, Y oraz gładkiej funkcji f

$$\mathrm{II}(fX, Y) = f\mathrm{II}(X, Y),$$

$$\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X).$$

Dowód
TODO

Część $\nabla_X Y$ nazwiemy z kolei **liniową koneksją** i będzie nam ona mówić jak powinniśmy przesuwać wektory po wiązce stycznej do powierzchni. Zacznijmy jednak od udowodnienia kilku jej własności.

Lemat 1.16

Dla dowolnej powierzchni Σ oraz pól wektorowych X, Y i Z oraz gładkiej funkcji f zachodzi

1. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
2. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$
3. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, czyli ∇ jest beztorsyjna

Dowód

TODO