there is only one bra – ALGEBRA

PRZEKSZTAŁCENIA

Lemat Steinitza – załóżmy, że B jest bazą V, a $a_1, \dots, a_n$ jest lnz ciągiem wektorów. Wtedy

- $|B| \geq n$
- możemy wybrać parami różne element $c_1, \dots, c_n \in B$ takie, że

$$(B \setminus \{c_1, \dots, c_n\}) \cup \{a_1, \dots, a_n\}$$

jest wciąż bazą V.

Funkcję $F : V \to W$ nazywamy izomorfizmem, jeżeli:

- F jest addytywny $(F(v+1) = F(v) + F(w))$ i jednorodny $(F(av) = aF(v))$
- F jest bijekcją

Jeżeli $\dim V = n$, to $V \cong K^n$, a więc $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

Jądro F:

$$\ker F := \{v \in V : F(v) = 0\}$$

Obraz F:

$$\operatorname{im} F := \{F(v) : v \in V\}$$

Załóżmy, że $F : V \to W$ jest liniowe, wtedy

- F jest na $\iff \operatorname{im} F = W$
- F jest 1-1 $\iff \ker F = 0$

Rząd przekształcenia liniowego to $\operatorname{rk} F := \dim \operatorname{im} F$

Twierdzenie o rzędzie:

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim \ker F + \operatorname{rk} F$$

Jeżeli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i $\dim V = \dim W < \infty$, to następujące warunki są równoważne:

- $\ker F = 0$
- F jest 1-1
- F jest na
- F jest izomorfizmem

Jeżeli mamy krótki ciąg dokładny przestrzeni liniowych

$$V_1 \xrightarrow{F_1} V_2 \xrightarrow{F_2} V_3$$

gdzie

- F_1 jest 1-1
- F_2 jest na
- $\operatorname{im} F_1 = \ker F_2$

to wtedy $\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$.

Suma prosta (lub produkt) przestrzeni liniowych V, W to przestrzeń z określinymi działaniami

$$V \oplus W$$

$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
$a(v, w) = (av, aw)$

Jeżeli mamy liniowe $F_1 : V_1 \to W_1$ i $F_2 : V_2 \to W_2$, to mamy liniowe

$$F_1 \oplus F_2 : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$$

$$(F_1 \oplus F_2)(v_1, v_2) = (F_1(v_1), F_2(v_2))$$

PRZESTRZENIE (bi)DUALNE, warstwy

Przestrzeń dualna do przestrzeni liniowej V nad ciałem K to przestrzeń liniowa spełniająca:

$$V^* + = \{f : V \to K : f \text{ jest liniowe}\}$$

i elementy V^* nazywamy funkcjonałami na V.
Jeżeli $\dim V \leq \infty$, to $\dim V = \dim V^*$.

Przkształcenie dualne do liniowego przekształcenia $F : V \to W$ to

$$F^* : W^* \to V^*$$

$$F^*(f)(v) = f(F(v))$$

i jest liniowe.

Jeżeli $F_1 : V_1 \to V_2$ i $F_2 : V_2 \to V_3$ są liniowe, to $(F_1 \circ F_2)^* = F_1^* \circ F_2^*$

Jeżeli $F : V \to W$ jest izomorfizmem, to F^* też nim jest i wtedy $V^* \cong W^*$

Jeżeli $W \leq V$ są przestrzeniami liniowymi i $v \in V$, to warstwą v względem W nazywamy zbiór

$$v + W = \{v + w : w \in W\}$$

$$v_1 + W = v_2 + W \iff v_1 - v_2 \in W$$

Zbiór V/W warstw W w V to zbiór ilorazowy $V/\sim$ gdzie

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$$

Przestrzeń ilorazowa to zbiór ilorazowy z określinymi działaniami

$0_{V/W} = 0 + W$
$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$
$a(v+W) = (av) + W$

$$\dim V = \dim V/W + \dim W$$

Twierdzenie o izomorfizmie - jeżeli $F: V \to W$ jest *odwzorowaniem liniowym*, to $\operatorname{im} F \cong V/\ker F$

Dla każdej liniowej przestrzeni mamy przekształcenie liniowe

$$\phi : V \to V^{**}$$

$$\phi(v)(f) = f(v) \quad (f \in V^*)$$

gdzie przestrzeń V^{**} (dualną do przestrzeni dualnej) nazywamy przestrzenią bidualną.

Jeżeli $\dim V < \infty$, to ϕ zadaje izomorfizm $V \cong V^{**}$

MACIORKI

Jeżeli M jest dowolną macierzą, to $e_i^T M e_j$ to ij-ty wyraz M, w szczególności jeżeli $M, N \in M_{n\times m}(K)$ spełniają $v^T M w = v^T N w$ dla każdych $v \in K^m$, $w \in K^n$, to $M = N$.

Układy równań - postaci i ich imiona

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

postać wektorowa:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = Y,$$

gdzie $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$

postać macierzowa:

$$(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n)X = AX = Y$$

wtedy A to macierz główna układu równań, a macierz $(A|Y)$ to macierz rozszerzona.

Dla jednorodnego układu równań poniższe są równoważne

- układ ma rozwiązanie
- $Y \in \operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n)$
- $\operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n, Y)$
- $\dim \operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n, Y)$

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego - układ ma rozwiązanie $\iff \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|Y)$

Operacje kolumnowe i wierszowe nie zmieniają rzędu macierzy.

Każdą macierz można sprowadzić operacjami kolumnowymi i wierszowymi do postaci schodkowej (lub schodkowej z wiodącymi 1).

Przerwa od pseudo-formalizmu, macierz odwrotną szukamy wlepiając po prawej naszą macierz, a po lewej identyczność i operacjami wierszowymi dochodząc do identycznosci po prawej - po lewej to co powstało to odwrócona oryginalna.

Załóżmy, że mamy

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z$$

gdzie baza V to B, baza W to C, a baza Z to D, wtedy

$$m_D^B(G \circ F) = m_D^C(G) \cdot m_C^B(F)$$

i mamy z tego wzorek na zmianę bazy endomorfizmu $F : V \to V$

$$m_C(F) = m_C^B(id)m_B(F)m_B^C(id)$$

$F : V \to W$ jest odwracalnym przekształceniem liniowym $\iff$ F jest izomorfizmem, a więc $\dim V = \dim W$

WYZNACZNIK

Wyznacznik macierzy jest funkcją

- n-liniową (czyli dla ustalonego jednego argumentu jest liniowa w drugim)
- alternujący, czyli dla $X_i = X_j$ dla $i \neq j$ $\det(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$
- jeżeli $\operatorname{char} K \neq 2$ $(1+1 \neq 0)$ to alternujące $\iff$ antysymentryczne, czyli zmienia znak jeżeli zamienimy dowolne dwa argumenty

S_n to zbiór permutacji zioru $\{1, \ldots, n\}$, a pojedyńczą permutację oznaczamy σ

Mam dwie postaci permutacji:

- iloczyn transpozycji postaci $(i, i+1)$ (i tutaj ogółem patrzymy na 1, i gdzie ona się pojawi na dole, potem hop to pod czym jest 1 i pod czym to jest i to wychodzą pary $(1,a)(1,b)\ldots$)
- iloczyn rozłącznych cykli

Liczba inwersji (nieporządków) permutacji to liczba jej skrzyżowań, a sama inwersja (nieporządek) to para (i, j), $i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$.

Znak permutacji σ to

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{liczba inwersji} \sigma}$$

Wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ definiujemy więc jako

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Ustalmy permutację $\sigma \in S_n$. Niech $\overline{\sigma}$ będzie permutacją powstałą przez zamianę $\sigma(j)$ i $\sigma(k)$, wtedy

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\overline{\sigma})$$

Jeżeli σ, τ są permutacjami, to $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$

Jeżeli $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ jest cyklem, to $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1^{n-1})$

Jeżeli σ^{-1} jest permutacją odwrotną do σ, to wtedy $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

PODSTAWOWE WŁASNOŚĆI WYZNACZNIKA::::

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

(sigma gdzie indziej)

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- rozwinięcie Laplace względem wiersza i kolumny działa
- nie zmienia się, gdy dowolnego wiersza/kolumny dodajemy skalarną wielokrotność innego wiersza/kolumny
- jeżeli pomnożymy dowolny wiersz przez skalar, to wyznacznik też się przez niego pomnoży
- zamiana wierszy miejscami zmienia znak wyznacznika
- wyznacznik macierzy górno/dolno trójkątnej to iloczyn tego co na przekątnej
- wyznacznik jest $= 0 \iff$ kolumny są lz

Wyznacznik Vandermonde'a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Minor macierzy A to macierz kwadratowa powstała z A przez wykreślenie pewnej liczby wiierszy lub kolumn, lub wyznacznik takiej macierzy

Jeżeli A jest dowolną macierzą, to rk A jest max rozmiarem niezerowego minora

CRAMER

$$(A_1, \ldots, A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

to jeżeli A jest nieosobliwa (czyli ma lnz kolumny), to

$$x_k = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_n)}{\det A}$$

Dla macierzy $A = (a_{ij})$ iloczyn $(-1)^{i+j} A_{ij}$, gdzie A_{ij} to minor powstały przez wykreślenie i tej kolumny i j wiersza, nazywa się dopełnieniem algebraicznym wyrazu a_{ij} macierzy A.

Macierz dołączona do A to macierz transponowana do macierzy dopełnień algebraicznych A, czyli

$$\operatorname{adj}(A) = A^V =$$

$$\begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & \ldots & (-1)^{n+1} A_{n1} \\ -A_{12} & +A_{22} & \ldots & \\ \ldots & & & \\ (-1)^{n+1} A_1 n & (-1)^{n+1} A_{2n} & \ldots & \end{pmatrix}$$

Jeżeli $A \in M_{n \times n}(K)$, to

- $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot I$
- jeżeli $\det A \neq 0$, to $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$

WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY?

Hom(V, W) to przestrzeń odwzorowań liniowych $V \to W$

Jeżeli B jest bazą V, a C jest bazą W i obie przestrzenie są skończenie wymiarowe, to $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

Jeżeli $F \in \operatorname{Hom}(V, V)$, to $\det m_B^B(F)$ nie zależy od wyboru bazy

Ślad F to suma wyrazów na przekątnej jego macierzy i równoważnie

$$\operatorname{tr}(F) = (-1)^{n-1} \cdot \text{wspolczynnik przy } x \text{ w } \chi_F(x)$$

Podprzestrzenie $V_1, \ldots, V_k \leq V$ są liniowo niezależne, jeżeli dla $v_i \in V_i$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = 0 \iff v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0$$

Niech $V_1, \ldots, V_k \leq V$, wtedy następujące są równoważne

- $V = v_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$
- $\phi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to V$ zadana wzorem $\phi(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + \ldots v_n$ jest izomorfizmem
- $V_1, \ldots, V_n$ są lnz i $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$
- $\infty > \dim V = \dim V_1 + \ldots + \dim V_2$

Niech $W \leq V$, a $F \in \operatorname{End}(V)$, mówimy że W jest F-nizmiennicza, jeżeli $F[W] \subseteq W$

Jeżeli W jest F-nizmiennicza, to mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\overline{F} : V/W \to V/W$$

$$\overline{F}(v + W) = F(v) + W$$

Przestrzeń własna dla λ to

$$V_\lambda = \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

Przestrzeń pierwiastkowa dla λ to

$V^\lambda = \{v \in V : (\exists k)\ (F-\lambda)^k v = 0\} = \ker(F-\lambda)^{\dim V^\lambda}$

$\dim V^\lambda$ to krotność λ jako pierwiastka $\chi_F(x)$
Spektrum punktowe (widmo) F to

$$\sigma(F) = \mathrm{Spec}(F) = \{\lambda : V_\lambda \neq 0\}$$

bo czemu nie używać tej samej literki do kilku rzeczy! to nie tak, że alfabet ma więcej niż 5 na krzyż i możemy wybierać do woli!!!

$F : V \to V$ ma co najwyżej dim V wartości własnych

Załóżmy, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są parami różne, wtedy $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ są liniowo niezależne

Przestrzenie pierwiastkowe dla różnych wartości własnych są liniowo niezależne

---

$F : V \to V$ jest diagonalizowalne, jeżeli $\sum_{\lambda\in\sigma(F)} \dim V_\lambda = \dim V$

Następujące są równoważne

- F jest diagonalizowalne
- istnieje baza B że $m_B(F)$ jest diagonalna
- istnieje B złożona z wektorów własnych F

PRZEKLĘTY JORDAN

Wzór na n-tą potęgę k-wymiarowej klatki Jordana dla wartości własnej λ

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ldots & \ldots & \binom{n}{k}\lambda^{n-k} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ldots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Ilość klatek rozmiaru $\geq k$ i wartością własną λ to

$$\dim\ker(F-\lambda)^k - \dim\ker(F-\lambda)^{k-1}$$

Rozkład Fittinga $V = V^0 \oplus V'$, gdzie $V' = \mathrm{im}\, F^{\dim V^0}$, poza tym $F|V'$ jest odwracalne

---

Wielomian $P \in K[x]$ rozszczepia się nad K, jeżeli jest iloczynem jednomianów z K[x].
Jeżeli wielomian charakterystyczny rozszczepia się nad K, to $V = \bigoplus V^\lambda$.

Endomorfizm $F \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny, jeżeli $F^d = 0$ dla pewnego d.
Podprzestrzeń jest cykliczna, gdy jest postaci $K[F] \cdot v := \mathrm{Lin}(v, F(v), F^2(v), \ldots)$

Załóżmy, że F jest nilpotentny, $d \in \mathbb{N}_+$ jest minimalne takie, że $F^d = 0$, zaś $v_0 \in V \setminus \ker F^{d-1}$ – wtedy istnieje niezmiennicza podprzestrzeń dopełnicza do $K[F] \cdot v_0$

Niech F będzie nilpotentny, wtedy V jest sumą prostą cyklicznych podprzestrzeni F.

Ciało K jest algebraicznie domknięte, jeżeli każdy niestały wielomian o współczynnikach z K ma pierwiastek w K

Kompleksyfikacja V to

$$V_C = V \oplus iV$$

Jeżeli $A \subseteq V$, to $\mathrm{Lin}_\mathbb{R}(A) = V \cap \mathrm{Lin}_C(A)$

Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, wtedy $\dim_\mathbb{R} V = \dim_C V_C$ i dla $B \subseteq$ mamy

- B rozpina V $\iff$ B rozpina V_C
- B jest lnz w V $\iff$ B jest lnz w V_C
- B jest bazą V $\iff$ B jest bazą V_C

Jeżeli λ jest wartością własną F_c, to $\overline{\lambda}$ też nią jest

Jeżeli $3+i$ jest wartością własną F, to jedna z klatek Jordana w formie rzeczywistej jest na przykład

$$\begin{pmatrix} 3+i & 1 \\ 0 & 3+1 \end{pmatrix}$$

a coś zespolonego to będzie wtedy

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

FORMY DWULINIOWE I KWADRYKIIII

Iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$ jest

- dwuliniowy
- symetryczny
- dodatnio określony

Forma dwuliniowa φ jest symetryczna $\iff$ macierz φ jest symentryczna w każdej bazie

$$m^{CC}(\varphi) = m_B^C(id)^T \cdot m^{BB}(\varphi) \cdot m_B^{CC}(id)$$

Dwie formy dwuliniowe są równoważne jeżeli mają te same macierze (niekonieczne w tych samych bazach)

P jest ortogonalna, jeżeli $P^T = P^{-1}$

Maciierz A jest dodatnio określona, jeżeli dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$v^T A v > 0$$

Kryterium Sylvestera – wszystkie wiodące minory główne (czyli mają k pierwszych kolumn i wierszy i przekątna pokrywa się z przekątną całej macierzy) mają dodatni wyznacznik
Następujące są równoważne dla $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

- A reprezentuj standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$
- istnieje odwracalne P takie, że $A+P^TP$
- A jest symetryczna i dodatnio określona

φ jest iloczynem skalarnym $\iff$ istnieje B spełniająca $m^{BB}(\varphi) = I$

Dopełnienie ortogonalne A^T to zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich elementów A

$$A^T = \{v \in V : (\forall a \in A)\ \varphi(a, v) = 0\}$$

Twierdzenie Lagrange'a:

- niech φ będzie formą symetryczną na rzeczywistej prezstrzeni liniowej V, wtedy istnieje baza ortogonalna dla φ

niech A będzie rzeczywistą macierzą symetryczna, wtedy istnieje macierz odwracalna Q taka, że QAQ^T jest diagonalne