Kombinatoryka & teoria grafów

by a fish

21.03.2137

SYLABUS - MDM:

A. ELEMENTY ALGEBRY I TEORII LICZB

- Funkcje całkowitoliczbowe, arytmetyka modularna, operacje sufit i podłoga zaokrąglania liczb rzeczywistych, algorytm mergesort
- Asymptotyka funkcji liczbowych z uwzględnieniem zastosować w szacowaniu złożoności czasowej algorytów
- Podzielność liczb, algorytm Euklidiesa
- Liczby Fibonacciego
- Liczby pieriwsze i względnie pierwsze. Rozkład na czynniki. Funckja Eulera. Chińskie twierdzenie o resztach. Twierdzenie Eulera.

B. KOMBINATORYKA

- Rozmieszczenia, permutacje, kombinacje, podziały (zbioru, liczbyb), Lemat Burnside'a
- Metody generowania prostych obiektów kombinatorycznych
- Przykłady prostych problemów definiowanych rekurencyjnie
- Rozwązywanie równań rekurencyjnych, funkcje tworzące
- Liczby Catalana
- Zasada włączania i wyłączania

C. TEORIA GRAFÓW

- Definicja i przykłady grafów, grafy pełne, dwudzielne skierorwane, stopień wierzchołka
- Drogi i cykle w grafach: grafy spójne i dwudzielne
- Drzewa - równoważność różnych definicjii
- Komputeroaw reprezentacja grafów
- Metody BFS i DFS przeszukiwania grafów
- Minimalne drzewa rozpinające - algorytmy Kruskala i Prima-Dijkstry
- Przechodznie domknięcie: algorytmy Dijkstry i Warshalla. Złożoność problemu
- Cykle i drogi Eulera
- Cykle i drogi Hamiltowa, twierdzenie Ore i wielomianowa redukcja problemu drogi do cyklu i odwrotnie
- Przepływy w sieciach
- Kolorowanie grafów: zastosowanie - planowanie sesji egzaminacyjnej. Algorytm sekwencyjny i twierdzenie o 5-kolorowaniu grafów planarnych.

SYLABUS – teoria grafów:

1. Basic concepts: graphs, paths and cycles, complete andbipartite graphs
2. Matchings: Hall’s Marriage theorem and its variations
3. Forbidden subgraphs: complete bipartite and r-partite subgraphs, chromatic numbers, Turąn’s thorem, asymptotic behaviour og edge density, Erdós-Stone theorem
4. Hamiltonian cycles (Dirac’s Theorem), Eulerian circuits
5. Connectivity: connected and k-connected graphs, Menger’s theorem
6. Ramsey theory: edge colourings of graphs, Ramsey’s theorem and its variations, asymptotic bounds on Ramsey numbers
7. Planar graphs and colourings: statements of Kuratowski’s and Four Colour theorems, proof of Five Colour theorem, graphs on other surfaces and Euler chracteristics, chromatic polynomial, edge colourings and Vizing’s theorem
8. Random graphs: further asymptotic bounds on Ramsey numbers, Zarankiewicz numbers and their bounds, graphs of large firth and high chromatic number, cmplete subgraphs in random graphs.
9. Algebraic methods: adjavenvy matrix and its eigenvalues, strongly regular graphs, Moore graphs and their existence.

Spis treści

1 Elementy algebry i teorii liczb

1.1 Podłoga i sufit

Reguły funkcji podłoga i sufit:

1. $\lfloor x \rfloor = n \iff n \le x < n+1$
2. $\lfloor x \rfloor = n \iff x-1 < n \le x$
2. $\lceil x \rceil = n \iff n-1 < x \le n$
3. $\lceil x \rceil = n \iff x \le n < x+1$

Więcej hardocorowych własności:

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

ale dla mnożenia to już nie zadziała.

Dla liczb całkowitych zachodzi:

$$\begin{aligned} x < n &\iff \lfloor x \rfloor < n \\ n < x &\iff n < \lceil x \rceil \\ x \le n &\iff \lceil x \rceil \\ n \le x &\iff n \le \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

Część ułamkowa to różnica $x - \lfloor x \rfloor$. Oznaczamy $\{x\}$, chyba że gdzieś obok pojawiają się singletony. Wtedy nie oznaczamy. Simple.

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

W pierwszej kolejności chcemy pozbyć się zewnętrznych nawiasów i pierwiastka kwadratowego, potem usunąć nawiasy wewnętrzne. Na koniec dodajemy z powrotem pierwiatek i nawiasy zewnętrzne:

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \to \sqrt{\lfloor x \rfloor} \to \lfloor x \rfloor \to x \to \sqrt{x} \to \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Niech $m = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$. Z wcześniej ustalonych reguł wynika, że

$$m \le \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1.$$

Ponieważ wszystkie trzy wyrażenia są nieujemne, możemy podnieść je do kwadratu:

$$m^2 \le \lfloor x \rfloor < (m+1)^2.$$

Ponieważ zarówno m jak i $m+1$ są liczbami całkowitymi, to możemy pozbyć się nawiasów kwadratowych, otrzymując

$$m^2 \le x < (m+1)^2.$$

Obie strony nadal są nieujemne, możemy je więc spierwiastkować, żeby otrzymać

$$m \le \sqrt{x} < m+1$$

a więc

$$m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

i to jest to, co chcieliśmy otrzymać.

i śmiga

Możemy tę równość uogólnić dla dowolnej funkcji f takiej, że $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \ \wedge \ \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil.$$

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \ \wedge \ \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil$$

Widmo liczby rzeczywistej α to nieskończony zbiór liczb całkowitych z powtórzeniami:

$$Spec(\alpha) = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, ...\}.$$

Ilość elementów $Spec(\alpha)$ nie większych niż n wynosi:

$$N(\alpha, n) = \sum_{k>0} (\lfloor k\alpha \le n \rfloor) = \sum_{k>0} (\lfloor k\alpha < n+1 \rfloor) = \sum_{k>0} (k\alpha < n+1) = \lceil \frac{(n+1)}{\alpha} - 1 \rceil$$

1.2 Operacja mod

Wzór na dzielenie liczby n przez m:

$$n = m\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor + n \mod m,$$

czyli

$$n \mod m = n - m\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor, \quad m \neq 0$$

Jest to definicja która działa też dla liczb ujemnych, na przykłady

$$5 \mod 3 = 5 - 3\left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor = 2$$
$$5 \mod -3 = 5 - (-3)\left\lfloor\frac{5}{-3}\right\rfloor = -1$$
$$-5 \mod -3 = -5 - (-3)\left\lfloor\frac{-5}{-3}\right\rfloor = -2$$

Część ułamkową można zdefiniować jako operację modulo:

$$\{x\} = x \mod 1.$$

Działania modulo:

$$c(x \mod y) = cx \mod cy$$

Jeśli rozmieścimy n przedmiotów do m grup tak, żeby różnica ich ilości między grupami była nie większa niż 1, a większe grupy były bliżej początku, to bez problemu możemy sprawdzić ilość przedmiotów w k-tej grupie:

$$\left\lceil\frac{n-k+1}{m}\right\rceil.$$

A więc skoro mamy n przedmiotów w m grupach, to całość dostaniemy sumując wszystkie grupy:

$$n = \left\lceil\frac{n}{m}\right\rceil + ... + \left\lceil\frac{n-m+1}{m}\right\rceil.$$

Po prostu powoli odejmujemy coraz więcej od reszty z tego dzielenia.

Podobna zależność działa też dla liczb rzeczywistych:

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m}\right\rfloor ... + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m}\right\rfloor$$

WYPADAŁOBY TUTAJ WRÓCIĆ, ALE CHWILOWO MAM DOŚĆ OPERACJI NA PODŁOGACH I INNYCH SUFITACH

1.3 Hierarchia - asymptotyka

$$f(n) \prec g(n) \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Czyli $f(n)$ rośnie wolniej niż $g(n)$. Na przykład $n \prec n^2$. Podstawowa hierarchia to dla $0 < \varepsilon < 1 \leq c$:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}.$$

Wszystkie te funkcje przy $n \to \infty$ dążą do nieskończoności, kluczowe więc nie jest określenie czy to robią, a raczej jak szybko do ∞ dążą. Alternatywnie, możemy porównywać odwrotności funkcji i jak szybko one dążą do zera, nigdy go nie osiągając.

$$e^{f(n)} \prec e^{g(n)} \iff \lim_{n\to\infty}(f(n) - g(n)) = -\infty$$

Dwie funkcje są do siebie asymptotyczne, jeżeli mają ten sam współczynnik. Piszemy wtedy $f(n) \asymp g(n)$, czyli

$$f(n) \asymp g(n) \iff |f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \wedge |g(n)| \leq C \cdot |f(n)|,$$

dla pewnej stałej C oraz dostatecznie dużych n. Zachodzi to na przykład dla wielomianów tego samego stopnia.

Klasa funkcji logarytmiczno-wykładniczych jest zdefiniowana rekurencyjnie jako najmniejsza rodzina L (to powinno być gotyckie L, ale coś nie działą) spełniająca

1. dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(n) = \alpha$ należy do L
2. funkcja tożsamościowa $f(n) = n$ należy do L
3. jeżeli $f(n)$ i $g(n)$ należą do L, to również $f(n) - g(n)$ należy do L
4. jeżeli $f(n)$ należy do L oraz jest dodatnia od pewnego momentu, to również $\ln(f(n))$ należy do L.

Główne twierdzenie Hardy'ego mówi, że jeżeli $f(n), g(n) \in L$ to zachodzi jedna z możliwości:

1. $f(n) \prec g(n)$
2. $g(n) \prec f(n)$
3. $f(n) \asymp g(n)$.

1.4 Big O notation

Zapis $f(n) = O(g(n))$ oznacza, że $|f(n)| \leq C|g(n)|$ dla wszystkich n. Czyli oznacza, że $O(5)$ jest liczbą której wartość bezwzględa po pomnożeniu przez jakąś stałą jest nie większa niż 5.

Bardzo często narzucamy na notację O pewne ograniczenia, na przykład powiedzenie, że

$$f(n) = O(g(n)), \quad n \to \infty$$

oznacza, że warunek jest spełniony dla n bardzo bliskich ∞, a o inne n nie dbamy. Czyli tak naprawdę nakładamy dwie stałe: C do mnożenia i n_0 od którego warunek zaczyna być spełniany.

Uwaga, znak $=$ w kontekscie notacji dużego O to lekkie nadużycie. Notacja $f(n) = O(g(n))$ oznacza tylko, że $f(n)$ należy do pewnego zbioru funkcji takich, że istnieje C takie, że $f(n) \leq C|g(n)|$. Dlatego też piszemy O po prawej stronie równania nie po lewej - znak $=$ to tak naprawdę leniwe $\subseteq$.

1.5 Notacja Duże Ω

Używana jest do dolnych ograniczeń funkcj, tzn

$$f(n) = \Omega(g(n)) \iff |f(n)| \geq C|g(n)|$$

dla pewnego $C > 0$. Mamy więc

$$f(n) = \Omega(g(n)) \iff g(n) = O(f(n)).$$

Czyli na przykład algorytm sortujący w czasie $\Omega(n^2)$ jest o wiele bardziej nieefektywny niż $O(n \log n)$.

1.6 Notacja Dużego Θ

Określa dokładny porządek przyrostu:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff \begin{matrix} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(n) \end{matrix}.$$

Czyli $f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) \asymp g(n)$.

1.7 Notacja małego o

Odpowiada relacji $f(n) \prec g(n)$. Dodatkowo, mamy

$$f(n) \sim g(n) \iff f(n) = g(n) + o(g(n)).$$

1.8 Reguły notacji dużego O

Ciąg bardzo fajnych i przyjemnych wzorków które trzeba się naumieć c:

$$n^a = O(n^b) \quad a \leq b$$

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$$
$$f(n) = O(f(n))$$

$$c \cdot O(f(n)) = O(f(n))$$
$$O(O(f(n))) = O(f(n))$$
$$O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$$
$$O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$$

Jeżeli suma

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

jest bezwzględnie zbieżna dla pewnego $z_0 \in \mathbb{Z}$, to

$$S(z) = O(1) \quad (\forall\ z)\ |z| \leq |z_0|,$$

bo

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \leq \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n = C < \infty$$

Przybliżenie asymptotyczne ma błąd bezwzględy równy $O(g(n))$ jeżeli jest ono postaci $f(n)+O(g(n))$, gdzie $f(n)$ nie zawiera O. Błąd względny jest równy $O(g(n))$ gdy jest ono z kolei postaci $f(n)(1+O(g(n)))$.

2 Basic concepts of graph theory

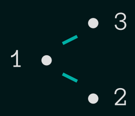
2.1 Graphs

Graph $(G = (V, E))$ – a structure made up of vertices (V) that are connected in pairs with edges (E).

Multigraph – a graph where two vertices are allowed to have more than one egde connecting them.

If a vertex is allowed to be connected to itself, then the graph is called a graph with loops and the edge that connects the vertex to itself is known as a loop.

Adjacency relation – is the symmetric relation of pairings between vertices of an undirected graph. It is used to construct an adjacency matrix that is another form of representing graphs.



$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Directed graph is a graph in which edges have orientation. Here, the set of edges contains ordered pairs of vertices. However, this definition does not allow multiple edges between two vertices. To fix this problem, we introduce another object, ϕ, that is a mapphing of edges to ordered pairs of vartices. To avoid confusion, we call such graph a directed multigraph $(G = (V, E, \phi))$.

Mixed graph is a graph that allows both directed and undirected edges.

Weigthed graph is a graph in which each edge has a value assigned to it.

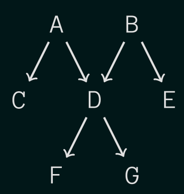
Oriented graph is a directed graph where each edge has a set orientation, that is if an edge $\langle x, y \rangle$ exists, there cannot be an edge $\langle y, x \rangle$

Regular graph is a graph in which each vertex has the same number of neighbours (degree).

Complete graph is a graph where every pair of vertices is connected with an edge.

Tree is a graph in which any two vertices are connected by exactly one path.

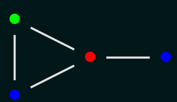
Polytree is a graph whose underlying graph is a tree. For example on the right is a polytree in which subgraph (A, D, F, G) is a tree.



2.2 Paths

A pair of vertices x, y is connected if there can be found a collection of edges so that they are have connected ends and going through them leads from x to y and vice versa. Such a collection is called a path.
A graph is connected if each two vertices are connected. A stronger condition, each two vertices are connected with directed edges, makes a graph strongly connected.

Chromatic number – the smallest number of colors needed to color a graph so that every two vertices of an edge have different colors. For example the following graph has chromatic number 3:



Bipartite graph is a simple graph where vertex set can be partioned into two sets. Alternatively, it is a graph with chromatic number 2.

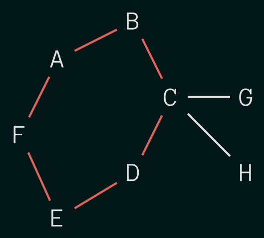
Planar graph is a graph that can be drawn on a plane so that no two edges intersect.

2.3 Cycles

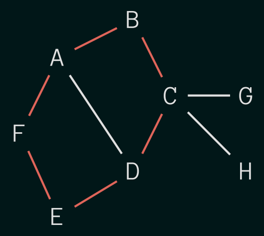
Cycle - non-empty trail in which only the first and last vertices are equal. If more than just the first and last vertices repeat in a cycle, then it is called a circuit.

Cycle graph of order n is a graph where n vertices create a cycle. They are connected graphs with vertices of degree 2. If no cycles exist in a graph, then it is called an acyclic graph.

Chordless cycle is a cycle in which no two vertices are connected by an edge that itself does not belong in the cycle, for example (A, B, C, D, E, F) form an chordless cycle



Whereas in the next example, (A, B, C, D, E, F) do not form a chordless cycle - edge $\{A, D\}$ is a chord.



Girth of a graph is the length of its shortest chordless cycle. Cages are regular graphs with as few vertices as possible for its girth.