Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzchilda

Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

22.01.2024 / Zespołowy Projekt Specjalnościowy

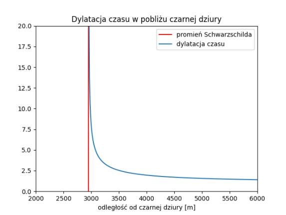
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

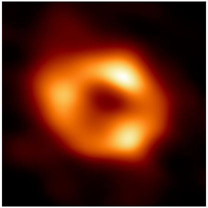
Spis treści

Spis treści

Czarne Dziura Schwarzchilda

- Wyróżniamy cztery rodzaje czarnych dziur:
  - Schwarzchilda
  - Kerra
  - Reissner–Nordströma
  - Kerra–Newmana
- Są to obiekty o nieskończonej gęstości, tak masywne, że zakrzywią czasoprzestrzeń wokół siebie.
- Powstają podczas śmierci gwiazdy w wybuchu supernowej.
- Czarne dziury są inspiracją dla wielu autorów science fiction - *Interstellar*.





Rozmaitość
Rozmaitość to pojęcie matematyczne opisujące przestrzeń M, która wokół każdego punktu $p \in M$ posiada otwarte otoczenie U_p, które przypomina pewien podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Schwarzchild opisywał czarną dziurę, modelując przestrzeń wokół niej jako rozmaitość różniczkowalną z tensorem metrycznym, czyli rozmaitość Riemannowską.

Metryka Schwarzchilda

Metryka Schwarzchilda jest zdefiniowana na podzbiorze $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$ o sygnaturze $(-, +, +, +)$, który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\frac{r - r_s}{r} \cdot c^2 dt^2 + \left(\frac{r - r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1-r_s}{r} \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

gdzie

- r_s to promień Schwarzschilda określonej czarnej dziury,
- c oznacza prędkość światła,
- τ to czas właściwy (czyli mierzony w pobliżu czarnej dziury),
- t to czas bezwzględny (mierzony nieskończenie daleko od czarnej dziury),
- θ to kąt po południku

Spis treści

Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach

Oznaczmy przez BH rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

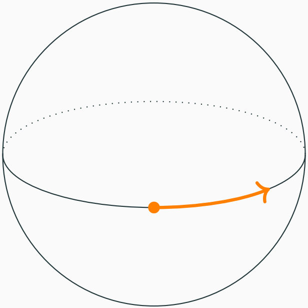
Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \to BH$$

gdzie I jest pewnym odcinkiem, a nawet może być całą prostą $\mathbb{R}$. Ponieważ foton porusza się z prędkością światła i nie przyspiesza, to wiemy, że

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń $\mathbb{R}^4$. Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu w pobliżu czarnej dziury.

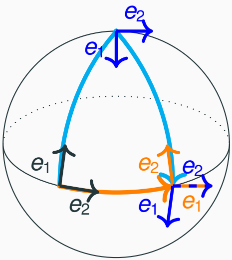


Rysunek 1: Cząsteczka poruszająca się po sferze S^2.

Równanie geodezyjnej

Ponieważ foton nie przyspiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zakreślana przez foton jest **linią geodezyjną** na rozmaitości BH.

Patrząc na podróż fotonu, przesuwamy wraz z nim przestrzeń styczną, zawierającą wektor prędkości, po krzywej którą ów foton zatacza. Patrząc znów na prosty przykład na S^2, przyjrzyjmy się co się dzieje z wektorami stycznymi kiedy przesuwamy je na dwa sposoby między tymi samymi punktami leżącymi na równiku, jak na rysunku



Rysunek 2: Różnica między przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po równiku a przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po południkach.

Spis treści

Summary

- The first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.

- Outlook
  - Something you haven’t solved.
  - Something else you haven’t solved.