Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

02.04.2005

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Rozmaitość Riemannowska i tensor metryczny

Pojęcie gładkiej rozmaitości pozwala na opisywanie konstrukcji geometrycznych poprzez lokalne sprowadzenie ich za pomocą gładkich map do podzbiorów $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$). To znaczy, że mając pewną abstrakcyjną gładką rozmaitość M, dostajemy jednocześnie dostęp do rodziny par $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, gdzie zbiory $\{U_\alpha\}$ tworzą otwarte pokrycie M, a

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

jest gładką, ciągła funkcją między U_α a podzbiorem $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$. Takie funkcje nazywamy dyfeomorfizmami. Warto tutaj zaznaczyć, że liczba n jest stała dla całej rozmaitości i dzięki temu pojęcie wymiaru rozmaitości M, $\dim M = n$, jest dobrze określone.

Biorąc dowolny punkt $p \in M$ możemy dla niego znaleźć pewną mapę $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że $p \in U_\alpha$. Ponieważ $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ jest pewnym obiektem w $\mathbb{R}^n$, to możemy mówić o wektorach do niego stycznych. Nasuwa się więc pytanie, czy możemy pojęcie styczności wektora do obiektu uogólnić do styczności wektorów do rozmaitości różniczkowalnych. Idąc tym tokiem myślenia bardzo szybko trafiamy na pojęcie przestrzeni stycznej do M w punkcie p: T_pM.

Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość, to jest obiekt T_pM jest przestrzenią liniową wymiaru n. Wybierając mapę (U, φ) wokół punktu $p \in M$ dostajemy od razu bazę na T_pM, której elementy zwyczajowo oznaczamy

$$\{\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\}.$$

Do dowolnej gładkiej rozmaitości M wymiaru n możemy dołączyć wiązkę styczną TM, która dla dowolnego punktu $p \in M$ zawiera przestrzeń liniową T_pM nazywaną przestrzenią styczną do M w punkcie p.

Istnieje więc w matematyce sposób na rozważanie dowolnych przestrzeni przez pryzmat dobrze zbadanych $\mathbb{R}^n$ oraz dopisanie do nich struktury przestrzeni liniowej dzięki przestrzeniom stycznym. Idąc dalej, możemy zastanowić się jakie inne właściwości przestrzeni euklidesowych możemy uogólnić na abstrakcyjne przestrzenie T_pM.

Rozmaitość Riemanna to gładka, rzeczywista rozmaitość M z rodziną dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

zdefiniowanych w każdym punkcie $p \in M$. Każda taka funkcja g_p jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na T_pM, a więc pociąga za sobą normę

$$||v||_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

W ten sposób możemy na TM określić funkcję g, która dowolnym dwóm wektorom X_p, Y_p zaczepionym w tym samym punkcie $p \in M$ przypisuje ich odpowiednik iloczynu skalarnego $g_p(X_p, Y_p)$. Tak określony funkcjonał nazywamy tensorem metrycznym, lub w skrócie metryką, na rozmaitości M.

Dowolna mapa (U, φ) na n-wymiarowej Riemannowskiej rozmaitości M zawierająca punkt $p \in M$ pociąga za sobą bazę przestrzeni T_pM

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right\}$$

w takim razie funkcjonał g_p zapisuje się macierzą o wymiarze $n \times n$. Wyrazami takiej macierzy są wartości g_p na kolejnych parach wektorów bazowych.

Mając bazę dualną do $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\}$ możemy zapisać tensor metryczny za pomocą prawdziwego tensora

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j$$

gdzie $g_{i,j}$ to wyrazy macierzy wspomnianej wyżej, a $d\varphi^i$ to elementy bazy dualnej do $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$

1.2 Czarne dziury Schwarzschild'a

Jednym z najprostszych, a przez to najczęściej używanych, sposobów opisu przestrzeni wokół czarnej dziury jest modelowanie tej osobliwości jako sferycznie symetrycznego obiektu o pewnej masie, pozbawionego ładunku elektrycznego i przyśpieszenia kątowego. Tak zdefiniowane czarne dziury nazywamy czarnymi dziurami Schwarzschild'a, na pamiątkę niemieckiego fizyka który jako pierwszy znalazł dokładne rozwiązanie równania Einsteina.

Wspomniane rozwiązanie nazywa się metryką Schwarzschild'a:

$$g = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$