Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

02.04.2005

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Rozmaitość Riemannowska i tensor metryczny

Czasoprzestrzeń w ogólnej teorii względności jest 4 wymiarową rozmaitością, której trzy współrzędne oznaczają położenie w przestrzeni, a czwarta współrzędna informuje nas o czasie. Z matematycznego punktu widzenia, rozmaitość to dowolna przestrzeń topologiczna M taka, że dla każdego punktu $p \in M$ możemy znaleźć otwarty zbiór $p \in U_p \subseteq M$ który jest homeomorficzny z pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. To znaczy, że rozmaitości są lokalnie Euklidesowe. Taka definicja czasoprzestrzeni jest jednak bardzo ogólna, więc wiele modeli sięga po nieco bardziej restrykcyjną definicję rozmaitości. ======= Pojęcie gładkiej rozmaitości pozwala na opisywanie konstrukcji geometrycznych poprzez lokalne sprowadzenie ich za pomocą gładkich map do podzbiorów $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$). To znaczy, że mając pewną abstrakcyjną gładką rozmaitość M, dostajemy jednocześnie dostęp do rodziny par $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, gdzie zbiory $\{U_\alpha\}$ tworzą otwarte pokrycie M, a

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

jest gładką, ciągła funkcją między U_α a podzbiorem $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$. Takie funkcje nazywamy dyfeomorfizmami. Warto tutaj zaznaczyć, że liczba n jest stała dla całej rozmaitości i dzięki temu pojęcie wymiaru rozmaitości M, $\dim M = n$, jest dobrze określone.

Biorąc dowolny punkt $p \in M$ możemy dla niego znaleźć pewną mapę $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że $p \in U_\alpha$. Ponieważ $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ jest pewnym obiektem w $\mathbb{R}^n$, to możemy mówić o wektorach do niego stycznych. Nasuwa się więc pytanie, czy możemy pojęcie styczności wektora do obiektu uogólnić do styczności wektorów do rozmaitości różniczkowalnych. Idąc tym tokiem myślenia bardzo szybko trafiamy na pojęcie przestrzeni stycznej do M w punkcie p: T_pM.

Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość, to jest obiekt T_pM jest przestrzenią liniową wymiaru n. Wybierając mapę (U, φ) wokół punktu $p \in M$ dostajemy od razu bazę na T_pM, której elementy zwyczajowo oznaczamy

$$\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\}.$$

Do dowolnej gładkiej rozmaitości M wymiaru n możemy dołączyć wiązkę styczną TM, która dla dowolnego punktu $p \in M$ zawiera przestrzeń liniową T_pM nazywaną przestrzenią styczną do M w punkcie p. »»»> fbb51673c34c4bb7061bcf9ce358e1cc1893cda7

Definicja 1.1.
Rozmaitość różniczkowalna wymiaru $\mathbb{R}^n$ to para $(M, \mathcal{A})$, gdzie M jest rozmaitością, a $\mathcal{A}$ jest maksymalnym atlasem gładkim. To znaczy, $\mathcal{A}$ jest największą, co do zawierania, rodziną map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że

- zbiory mapowe U_α są otwarte i pokrywają M [$\bigcup U_\alpha = M$],
- dla każdego α odwzorowanie $\varphi_\alpha : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem, a liczba n jest jedyna dla M,
- dowolne dwie mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ są gładko zgodne, tzn.
  - ich dziedziny nie pokrywają się, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, lub

- jeśli $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ to mapy przejścia, $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ i $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$, są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiorami $\mathbb{R}^n$.

Często wybierając dowolny punkt $p \in M$ chcemy rozważyć jedną z map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że $p \in U_\alpha$. Taką dowolną mapę zawierającą $p \in M$ będziemy oznaczać jako (U_p, φ_p). Dodatkowo, możemy wymagać od takiego zbioru U_p, by jego obraz przez φ_p był kulą wokół środka układu współrzędnych, tzn.

$$\varphi_p(U_p) = \overline{U_p}\{(x_1, \dots, x_n) \ : \ \|(x_1, \dots, x_n)\| < r\} = B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n \,.$$

Wówczas $\varphi_p(p) = (0, \dots, 0) \in \overline{U_p} \subseteq \mathbb{R}^n$ [2].

Warto zauważyć, że przestrzenie $\mathbb{R}^k$ spełniają definicję rozmaitości różniczkowalnych, np. z atlasami:

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^k, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k})\}$$

$$\mathcal{A}' = \{(B_1(x), \mathrm{Id}_{B_1(x)}) \ : \ x \in \mathbb{R}^k\}$$

Definicja 1.2.
Niech $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ będą rozmaitościami gładkimi. Funkcja $f : M \to N$ taka, że dla dowolnych punktów $p \in M$ i $f(p) = q \in N$ istnieją mapy (U_p, φ_p) wokół p oraz (V_q, ψ_q) wokół q takie, że reprezentacja f

$$\psi_q \circ f \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p) \to \psi_q(V_q)$$

w tych mapach jest funkcją gładką między $\varphi_p(U_p)$ i $\psi_q(V_q)$:

Do dowolnej gładkiej rozmaitości M wymiaru n możemy dołączyć wiązkę styczną $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$, gdzie T_pM jest przestrzenią styczną do M w punkcie p. Ważną własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość.

Istnieje więc w matematyce sposób na rozważanie abstrakcyjnych przestrzeni przez pryzmat dobrze zbadanych $\mathbb{R}^n$ oraz dopisanie do nich struktury przestrzeni liniowej dzięki przestrzeniom stycznym. Idąc dalej, możemy zastanowić się jakie inne właściwości przestrzeni euklidesowych możemy uogólnić na abstrakcyjne przestrzenie T_pM.

Rozmaitość Riemanna to gładka, rzeczywista rozmaitość M z rodziną dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

zdefiniowanych w każdym punkcie $p \in M$. Każda taka funkcja g_p jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na T_pM, a więc pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

W ten sposób możemy na TM określić funkcję g, która dowolnym dwóm wektorom X_p, Y_p zaczepionym w tym samym punkcie $p \in M$ przypisuje ich odpowiednik iloczynu skalarnego $g_p(X_p, Y_p)$. Tak określony funkcjonał nazywamy tensorem metrycznym, lub w skrócie metryką, na rozmaitości M.

Dowolna mapa (U, φ) na n-wymiarowej Riemannowskiej rozmaitości M zawierająca punkt $p \in M$ pociąga za sobą bazę przestrzeni T_pM

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right\}$$

w takim razie funkcjonał g_p zapisuje się macierzą o wymiarze $n \times n$. Wyrazami takiej macierzy są wartości g_p na kolejnych parach wektorów bazowych.

Mając bazę dualną do $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\}$ możemy zapisać tensor metryczny za pomocą prawdziwego tensora

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j$$

gdzie $g_{i,j}$ to wyrazy macierzy wspomnianej wyżej, a $d\varphi^i$ to elementy bazy dualnej do $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$

1.2 Czarne dziury Schwarzschild'a

Jednym z najprostszych, a przez to najczęściej używanych, sposobów opisu przestrzeni wokół czarnej dziury jest modelowanie tej osobliwości jako sferycznie symetrycznego obiektu o pewnej masie, pozbawionego ładunku elektrycznego i przyśpieszenia kątowego. Tak zdefiniowane czarne dziury nazywamy czarnymi dziurami Schwarzschild'a, na pamiątkę niemieckiego fizyka który jako pierwszy znalazł dokładne rozwiązanie równania Einsteina. W języku matematyki, czarna dziura którą zajmiemy się w tej pracy jest modelowana przez rozmaitość

$$\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

czyli w tym przypadku współrzędne będą oznaczać kolejno czas, odległość od środka masy i położenie na S^2 zapisywane przy pomocy dwóch kątów.

Wspomniane rozwiązanie nazywa się metryką Schwarzschild'a i zapisuje się je jako

$$g = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

lub w formie macierzy

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left[1 - \frac{r_s}{r}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

gdzie τ to czas własny (mierzony przez zegar poruszający się razem z cząsteczką testową), t to współrzędna czasu (mierzona przez zegar położony nieskończenie daleko od czarnej dziury), a r, θ, φ to współrzędne sferyczne wokół środka czarnej dziury (θ to kąt między wektorem opisującym położenie a północnym biegunem przestrzeni) [1].

2 Coś

2.1 Wzory na cząsteczkę poruszającą się po płaszczyźnie

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy cząsteczkę przemieszczającą się po płaszczyźnie przechodzącej przez środek czarnej dziury. Jeśli prędkość początkowa tej cząsteczki nie posiada składnika normalnego do tej płaszczyzny, to od razu możemy założyć, że współrzędna θ ma stale wartość $\frac{\pi}{2}$ oraz $\mathrm{d}\theta = 0$. Co więcej, będąc obserwatorem ze stoperem stojącym nieskończenie daleko od czarnej dziury, możemy założyć, że $\mathrm{d}t = 1$, tzn. co sekundę patrzymy gdzie nasza cząsteczka się znajduje i zapisujemy to. W tym konkretnym przypadku metryka Schwarzschilda wygląda

$$g = -A(r) \cdot c^2 + A(r)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

gdzie $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$ zostało wprowadzone dla przejrzystości pisanego kodu.

Zauważmy, że $\frac{dr}{dt}$ to prędkość przybliżania się do środka układu współrzędnych, a $\frac{d\varphi}{dt}$ to prędkość z jaką zmienia się współrzędna kątowa.

Rozważmy więc cząsteczkę o współrzędnej (r_0, φ_0) poruszającą się z prędkościami

$$\frac{dr}{dt} = a$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b$$

wtedy komponent prędkości równoległy do współrzędnej x wynosi

$$\frac{dx}{dt} = (r_0 + a)\cos(\varphi_0 + b) - r_0 \cos \varphi_0$$

natomiast komponent równoległy do współrzędnej y ma wartość

$$\frac{dy}{dt} = (r_0 + a)\sin(\varphi_0 + b) - r_0 \sin \varphi_0.$$

To wyliczenie, połączone z umiejętnością zamiany między współrzędnymi polarnymi a kartezjańskimi powinno umożliwić nam napisanie prostego programu który wylicza pierwsze n kroków cząsteczki poruszającej się w polu grawitacyjnym badanej czarnej dziury.

PHOTON NIE MA MASY, WIĘC $g = 0$ W JEGO PRZYPADKU

References

[1] Jim Branson. The schwarzschild metric, 2012. Użyte: 12.11.2023.

[2] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2 edition, 2013.