

Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

Contents

- 1. Wstęp 3
- 1.1. O rozmaitościach różniczkowalnych 3
- 1.2. Czarne dziury Schwarzschilda 3
- 1.3. Historia o pewnym fotonie 4
- 1.4. Przygotowania 5
- Bibliografia 5

Wstęp

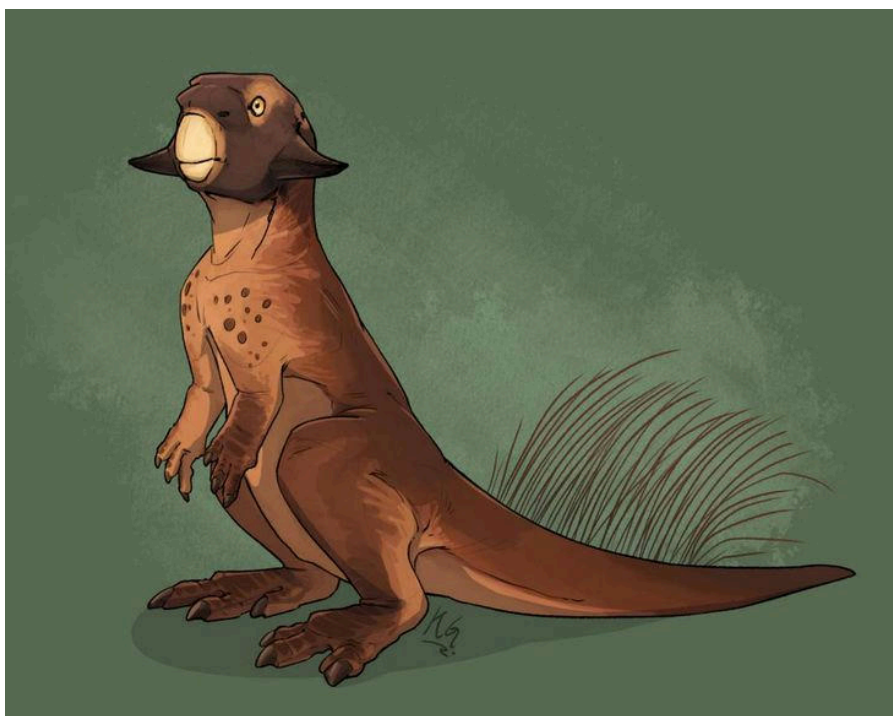
O różniczkowalnościach różniczkowalnych

Czarne dziury Schwarzschilda

Czarne dziury fascynują i przerażają. Są to obiekty rodem z science fiction - punkt o zerowej objętości i nieskończonej gęstości otoczony tajemniczym horyzontem zdarzeń. Nic dziwnego, że sam Einstein, jak i wielu naukowców, nie mogli uwierzyć w ich istnienie.

Czarne dziury powstają w wybuchu supernowej, kiedy gwiazdzie skończy się paliwo, a reakcje termojądrowe zatrzymają się, grawitacja zgina masę do jednego małego punktu - osobliwości. Jego masa jest tak wielka, że zakrzywia czasoprzestrzeń i spowalnia czas, a linia po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec, nazywamy horyzontem zdarzeń.

Czarne dziury były inspiracją dla wielu autorów gatunku science fiction - w filmie *Interstellar* pojawia się Gargantu - obiekt o masie 100 milionów Słońc. Gdy podróżnicy docierają na planetę orbitującą wokół czarnej dziury mówią, iż czas płynie tu wolniej. Zjawisko możemy potwierdzić patrząc na wykres, pokazujący stosunek czasu płynącego normalnie, do czasu w zakrzywionej czasoprzestrzeni.



Wykres 1: Stosunek upływu czasu własnego do upływu czasu obserwowanego w punkcie nieskończenie odległym od czarnej dziury w zależności od położenia r .

W maju 2021 roku otrzymaliśmy pierwsze zdjęcie czarnej dziury - jest to supermasywny obiekt w centrum naszej galaktyki Saggitarius A.:

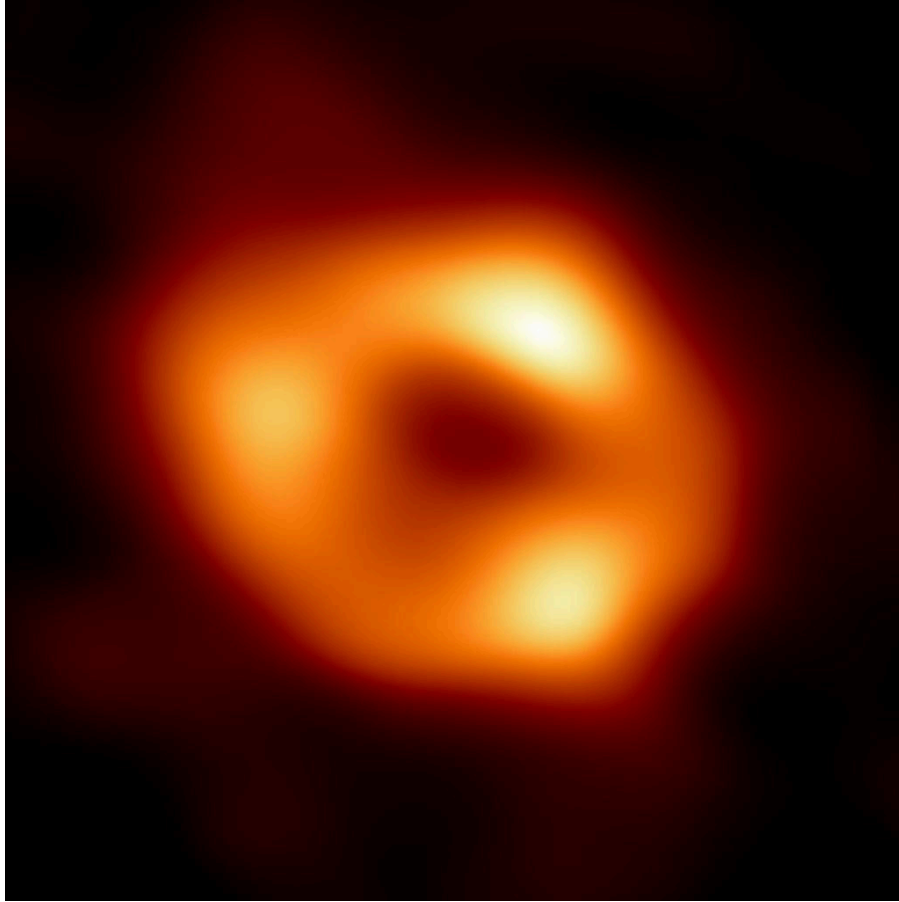


Figura 2: Zdjęcie czarnej dziury w centrum Mlecznej Drogi uzyskane przez [1].

Historia o pewnym fotonie

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury pozostaje równe 0.

Oznaczmy przez BH rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

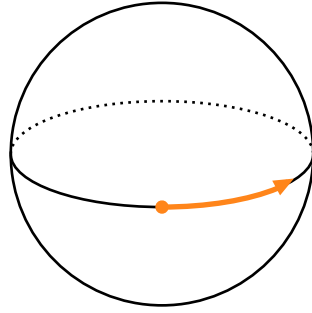
$$\text{BH} = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow \text{BH}$$

gdzie I jest pewnym odcinkiem. Wiemy, że $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$, czyli wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.

Niestety, metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń \mathbb{R}^4 . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze S^2 . Wówczas pomimo, że foton nie przyspiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia:



To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny, czy raczej tensorowy, na badanej przez nas przestrzeni od produktu skalarnego w przestrzeni euklidesowej. Nie jest trudno zauważyć, że tensor metryczny na jednostkowej sferze S^2 przedstawia się macierzą

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

lub równoważnie wzorem $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$, który wynika z wyliczenia długości wektora powstałego przez zmianę kąta φ o $d\varphi$ oraz kąta θ o $d\theta$.

Wiemy już, że pomimo braku przyśpieszenia na zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół dziury foton będzie sprawiał wrażenie skręcającego. Chcielibyśmy teraz umieć zrekonstruować jak obserwator w \mathbb{R}^3 widzi trasę fotonu w otoczeniu BH mając tylko początkowe położenie i prędkość cząsteczki.

Przygotowania

Rozważmy pokrycie rozmaitości BH mapami $(\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$, gdzie zbiory U_1^+ i U_1^- to odpowiednio prawa i lewa półkula sfery S^2 , natomiast U_2^+ i U_2^- to górna i dolna półkula. Odwzorowania φ_i^\pm to wówczas identyczność na pierwszych dwóch współrzędnych, a rzut na płaszczyznę \mathbb{R}^2 z odpowiedniej półkuli.

Bibliografia

- [1] EHT Collaboration, “Milky Way Galactic Center”. [Online]. Available: <https://www.eso.org/public/images/eso2208-eh-t-mwa/>
- [2] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer New York, NY, 2013. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [3] J. Branson, “The Schwarzschild Metric”. [Online]. Available: https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html