

Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda

Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

22.01.2024 / Zespołowy Projekt Specjalnościowy

Spis treści

- 1 Czym są czarne dziury?
 - Czarne Dziury Schwarzschilda
 - Czarna Dziura jako rozmaitość Riemannowska

- 2 Szybki Kurs Geometrii
 - Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach
 - Równanie geodezyjnej

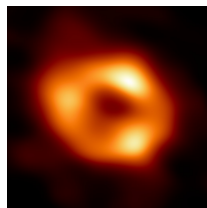
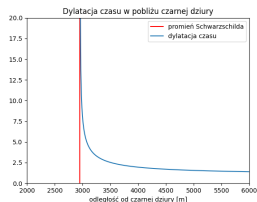
- 3 Matematyczna podróż do czarnej dziury

Spis treści

- 1 Czym są czarne dziury?
 - Czarne Dziury Schwarzschilda
 - Czarna Dziura jako różnorodność Riemannowska
- 2 Szybki Kurs Geometrii
 - Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach
 - Równanie geodezyjnej
- 3 Matematyczna podróż do czarnej dziury

Czarne Dziura Schwarzschilda

- Wyróżniamy cztery rodzaje czarnych dziur:
 - Schwarzschilda
 - Kerra
 - Reissner–Nordströma
 - Kerra–Newmana
- Są to obiekty o nieskończonej gęstości, tak masywne, że zakrzywiają czasoprzestrzeń wokół siebie.
- Powstają podczas śmierci gwiazdy w wybuchu supernowej.
- Czarne dziury są inspiracją dla wielu autorów science fiction - *Interstellar*.



Czarna Dziura jako rozmaitość Riemannowska

Rozmaitość

Rozmaitość to pojęcie matematyczne opisujące przestrzeń M , która wokół każdego punktu $p \in M$ posiada otwarte otoczenie U_p , które przypomina pewien podzbiór przestrzeni \mathbb{R}^n .

Schwarzschild opisywał czarną dziurę, modelując przestrzeń wokół niej jako rozmaitość różniczkowalną z tensorem metrycznym, czyli rozmaitość Riemannowską.

Metryka Schwarzschilda

Metryka Schwarzschilda jest zdefiniowana na podzbiorku $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$ o sygnaturze $(-, +, +, +)$, który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\frac{r-r_s}{r} \cdot c^2 dt^2 + \left(\frac{r-r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1-r_s}{r} \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

gdzie

- r_s to promień Schwarzschilda określonej czarnej dziury,
- c oznacza prędkość światła,
- τ to czas właściwy (czyli mierzony w pobliżu czarnej dziury),
- t to czas bezwzględny (mierzony nieskończenie daleko od czarnej dziury),
- θ to kąt po południku,
- a ϕ to kąt po równoleżniku.

Spis treści

- 1 Czym są czarne dziury?
 - Czarne Dziury Schwarzschilda
 - Czarna Dziura jako rozmaiłość Riemannowska
- 2 Szybki Kurs Geometrii
 - Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach
 - Równanie geodezyjnej
- 3 Matematyczna podróż do czarnej dziury

Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach

Oznaczmy przez BH rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

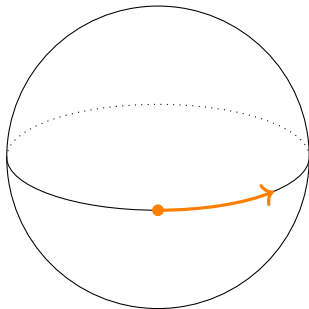
Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow BH$$

gdzie I jest pewnym odcinkiem, a nawet może być całą prostą \mathbb{R} . Ponieważ foton porusza się z prędkością światła i nie przyspiesza, to wiemy, że

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń \mathbb{R}^4 . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu w pobliżu czarnej dziury.



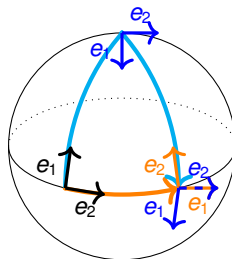
Rysunek: Cząsteczka poruszająca się po sferze S^2 .

Równanie geodezyjnej

Ponieważ foton nie przyspiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zakreślana przez foton jest **linią geodezyjną** na rozmaitości BH .

Patrząc na podróż fotonu, przesuwamy wraz z nim przestrzeń styczną, zawierającą wektor prędkości, po krzywej którą ów foton zatacza. Patrząc znów na prosty przykład na S^2 , przyjrzyjmy się co się dzieje z wektorami stycznymi kiedy przesuwamy je na dwa sposoby między tymi samymi punktami leżącymi na równiku, jak na rysunku

Symbole Christofela



Rysunek: Różnica między przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po równiku a przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po południkach.

Spis treści

- 1 Czym są czarne dziury?
 - Czarne Dziury Schwarzschilda
 - Czarna Dziura jako rozmaitość Riemannowska
- 2 Szybki Kurs Geometrii
 - Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach
 - Równanie geodezyjnej
- 3 Matematyczna podróż do czarnej dziury

Summary

- The **first main message** of your talk in one or two lines.
 - The **second main message** of your talk in one or two lines.
 - Perhaps a **third message**, but not more than that.
-
- Outlook
 - Something you haven't solved.
 - Something else you haven't solved.