W poniższej pracy dokonamy analizy ruchu fotonów w pobliżu czarnej dziury, której promień Schwarzschilda wynosi $r_s = 1$. Aby dodatkowo ułatwić rozważania, przyjmujemy $c = G = 1$ i konsekwentnie $M = \frac{1}{2}$.

Symbole Christoffela

Dla wygody, nie będziemy wyliczać symboli Christoffela wprost. Zamiast tego, skorzystamy z lagrangianu, który spełnia

$$S = \int L d\lambda,$$

gdzie λ jest afiniczną parametryzacją, a S to działanie, czyli w prostym przypadku cząsteczki poruszającej się wzdłuż pojedynczej krzywej jest to suma iloczynu pędu cząsteczki z fragmentem drogi przebytej.

Stosując więc powyższe wiadomości dla przypadku fotona poruszającego się w metryce Schwarzschilda dostajemy

$$S = \int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\tau} d\tau = \int \frac{\sqrt{d\tau^2}}{d\tau} d\tau = \int \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}} d\tau = \int L' d\tau.$$

W takim razie jednym z lagrangianów jest $L' = \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}}$. Ponieważ lagrangian nie jest unikalny, i nałożenie na niego dowolnej funkcji dalej daje lagrangian, to możemy wybrać

$$L = (L')^2 = g_{\mu,\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}.$$

Ułatwi to nam wyliczenia korzystające z drugiego równania lagrangianu, to znaczy:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x^\mu}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}.$$

Podstawiając do $d\tau$ metrykę Schwarzschilda dostajemy poniższy układ równań:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\ddot{t} = -\frac{1}{r(r-1)} \dot{r} \dot{t}$$

$$\ddot{r} = -\frac{r-1}{2r^3} \dot{t}^2 + \frac{1}{2r(r-1)} \dot{r}^2 + (r-1) \dot{\theta}^2 + (r-1) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\theta} = \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} - 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

Zauważmy, że otrzymane wyżej równania to tak naprawdę geodezyjna w metryce Schwarzschilda. Z lewej strony równości można więc z łatwością sczytać symbole Christoffela - są to współczynniki przy odpowiednich pochodnych. Ponieważ interesuje nas tylko ruch fotonów po płaszczyźnie $\theta = \frac{\pi}{2}$, to $\dot{\theta} = 0$, $\cos\theta = 0$ i $\sin\theta = 1$.

Chcemy teraz wydobyć $\dot{t}$ oraz $\dot{\varphi}$ - wtedy będziemy wiedzieli jak wyrazić $\frac{\dot{t}}{\dot{\varphi}}$. Wracając do drugiej równości lagrangiana wykorzystanej dla φ oraz t, dostaniemy:

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(2\frac{r-1}{r}\dot{t}\right) = 0$$

Co znaczy, że

$$r^2\dot{\varphi} = a \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{a}{r^2}$$

$$\frac{r-1}{r}\dot{t} = \frac{a}{b} \Rightarrow \dot{t} = \frac{ar}{b(r-1)}$$

dla pewnych stałych a, b.

Przekształcając teraz metrykę Schwarzschilda, dostajemy

$$\frac{r-1}{r} = \frac{(r-1)^2}{r^2}\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r(r-1)\dot{\varphi}^2$$

a podstawiając wartości $\dot{\varphi}^2$ i $\dot{t}^2$ wyliczone wyżej

$$\frac{r-1}{r} = \frac{a^2}{b^2} - \dot{r}^2 - r(r-1)a^2$$

$$\dot{r}^2 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{r-1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Aby teraz wyliczyć równanie orbity, chcemy podzielić powyższe równanie przez $\dot{\varphi}^2 = \frac{a}{r^2}$:

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - \frac{(r-1)}{r}\left(\frac{r^4}{a^2} + r^2\right)$$

Trzeba tutaj zaznaczyć, że równanie wyliczone wyżej nie jest jeszcze krzywą geodezyjną po której podróżuje świattlo - w przypadku wyżej wzięliśmy

$$-1 = g_{\mu,\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu}$$

zamiast przyrównywać to do zera. Badamy więc chwilowo trasę cząsteczki z masą. Aby przejść do badania fotonu, chcemy aby $a \to \infty$. Fizycznie wartość ta jest tak naprawdę równa pędowi kątowemu L wydzielonemu przez zredukowaną masę μ, tzn.

$$r^2\dot{\varphi}^2 = a = \frac{L}{\mu}$$

a ponieważ zredukowana masa jest zależna od masy fotonu $m_1 = 0$,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

gdzie m_1, m_2 to masy składowe układu dwóch ciał, to dla fotonu $\mu = 0$ i co za tym idzie, $a \to \infty$.

Równanie orbity

W równaniu orbity wyliczonym w poprzednim rozdziale zastosujemy podstawienie $u = \frac{1}{r}$, wtedy

$$-r^2\dot{u} = \dot{r}.$$

Po takim podstawieniu równanie orbity to

$$\left(\frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1-u)\left(\frac{1}{a^2} + u^2\right) = \frac{1}{b^2} - (1-u)u^2$$

bo jak wcześniej uzasadniliśmy, $a \to \infty$.

Rozwiązanie powyższego równania dałoby zależność między r a φ, bo możemy usunąć trzymaną z tyłu głowy informację o τ:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1-u)u^2.$$

Bez trudu wyciągniemy też informację o drugiej pochodnej u:

$$2u'(\varphi)u''(\varphi) = -2u + 3u^2$$

$$u''(\varphi) = -u + \frac{3}{2}u^2 = u\left(\frac{3}{2}u - 1\right),$$

bo $u' = c = 1$ w naszym układzie. Stąd widać, że $u = 0$ oraz

$$\frac{2}{3} = u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

są punktami przegięcia funkcji $u(\varphi)$. Dalej, dla

$$\frac{2}{3} < u = \frac{1}{r} \Rightarrow r < \frac{3}{2}$$

pochodna $u'(\varphi)$ powinna być rosnąca (czyli $r' = -r^2u'$ maleje), a dla

$$\frac{2}{3} > u = \frac{1}{r} \Rightarrow r > \frac{3}{2}$$

powinna być malejąca ($r' = -r^2u'$ rośnie).

Możemy więc obserwować pierwiastki powyższej równości, by sprawdzać, kiedy $r(\varphi)$ jest stałe. Co więcej, możemy również sprawdzić przy jakim położeniu foton zapadnie się w czarną dziurę, a kiedy będzie w stanie uciec z jej pobliża.

Równanie wyżej jest równaniem 3 stopnia o rzeczywistych współczynnikach, ma więc ono 3 pierwiastki, co najmniej jeden rzeczywisty i dwa potencjalnie zespolone, sprzężone ze sobą. Możemy oznaczyć je przez u_1, u_2, u_3 i zapisać

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = \\ &= u^3 - u^2(u_1+u_2+u_3) + \\ &+ u(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + \\ &- u_1u_2u_3.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że suma pierwiastków odpowiada wyrazowi przy u^2 w oryginalnym równaniu, natomiast ich iloczyn jest równy wyrazowi wolnemu:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

$$-\frac{1}{b^2} = u_1 u_2 u_3$$

Z tego wzoru możemy od razu wyliczyć wzór na drugą pochodną

$$(u'(\varphi))^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

$$u''(\varphi)u'(\varphi) = \frac{1}{2}[(u - u_2)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_2) + (u - u_1)(u - u_3)]$$

gdzie możemy sprawdzać jej wartość w punktach ekstremalnych funkcji $u(\varphi)$.

Zacznijmy od przypadku gdy $u_1 < u_2 < u_3$ są wszystkie liczbami rzeczywistymi. Wtedy dla $u_2 < u < u_3$ oraz $u < u_1$ funkcja $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ jest ujemna, co daje zespoloną wartość dla $u'(\varphi)$.

Jeśli teraz u_1 będzie jedynym pierwiastkiem rzeczywistym, a u_2 i u_3 będą sprzężonymi ze sobą pierwiastkami zespolonymi. W takim przypadku jedyny pierwiastek rzeczywisty musi być ujemny, bo wtedy

$$-\frac{1}{b^2} = u_1 u_2 u_3 = u_1 u_2 \overline{u_2} = u_1 \left(\mathrm{Re}(u_2)^2 + \mathrm{Im}(u_2)^2\right)$$

gdzie b^2 oraz $\mathrm{Re}(u_2)^2 + \mathrm{Im}(u_2)^2$ są zawsze dodatnimi wartościami.

W takim razie u_1 będzie orbitą, z której fotony nie zapadają się, ale też nie mają szansy wypaść z okolic czarnej dziury. Z racji tego jak wyglądają czarne dziury, możemy z dużą dozą prawdy stwierdzić, że

$$u_1 > r_s = 1.$$

W takim razie $\mathrm{Re}(u_2) = \mathrm{Re}(u_3) < 0$.