Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

02.04.2005

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Rozmaitość Riemannowska i tensor metryczny

Czasoprzestrzeń w ogólnej teorii względności jest 4 wymiarową rozmaitością, której trzy współrzędne oznaczają położenie w przestrzeni, a czwarta współrzędna informuje nas o czasie. Z matematycznego punktu widzenia, rozmaitość to dowolna przestrzeń topologiczna M taka, że dla każdego punktu $p \in M$ możemy znaleźć otwarty zbiór $p \in U_p \subseteq M$ który jest homeomorficzny z pewnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. To znaczy, że rozmaitości są lokalnie Euklidesowe. Taka definicja czasoprzestrzeni jest jednak bardzo ogólna, więc wiele modeli sięga po nieco bardziej restrykcyjną definicję rozmaitości.

Definicja 1.1.
Rozmaitość różniczkowalna wymiaru $\mathbb{R}^n$ to para $(M, \mathcal{A})$, gdzie M jest rozmaitością, a $\mathcal{A}$ jest maksymalnym atlasem gładkim. To znaczy, $\mathcal{A}$ jest największą, co do zawierania, rodziną map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że

- zbiory mapowe U_α są otwarte i pokrywają M $[\bigcup U_\alpha = M]$,
- dla każdego α odwzorowanie $\varphi_\alpha : U \to \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem, a liczba n jest jedyna dla M,
- dowolne dwie mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ są gładko zgodne, tzn.
  - ich dziedziny nie pokrywają się, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, lub
  - jeśli $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ to mapy przejścia, $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ i $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$, są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiorami $\mathbb{R}^n$.

Często wybierając dowolny punkt $p \in M$ chcemy rozważyć jedną z map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ taką, że $p \in U_\alpha$. Taką dowolną mapę zawierającą $p \in M$ będziemy oznaczać jako (U_p, φ_p). Dodatkowo, możemy wymagać od takiego zbioru U_p, by jego obraz przez φ_p był kulą wokół środka układu współrzędnych, tzn.

$$\varphi_p(U_p) = \overline{U_p}\{(x_1, ..., x_n) \ : \ \|(x_1, ..., x_n)\| < r\} = B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n .$$

Wówczas $\varphi_p(p) = (0, ..., 0) \in \overline{U_p} \subseteq \mathbb{R}^n$ [2].

Warto zauważyć, że przestrzenie $\mathbb{R}^k$ spełniają definicję rozmaitości różniczkowalnych, np. z atlasami:

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^k, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k})\}$$

$$\mathcal{A}' = \{(B_1(x), \mathrm{Id}_{B_1(x)}) \ : \ x \in \mathbb{R}^k\}$$

Definicja 1.2.
Niech $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ będą rozmaitościami gładkimi. Funkcja $f : M \to N$ taka, że dla dowolnych punktów $p \in M$ i $f(p) = q \in N$ istnieją mapy (U_p, φ_p) wokół p oraz (V_q, ψ_q) wokół q takie, że reprezentacja f

$$\psi_q \circ f \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p) \to \psi_q(V_q)$$

w tych mapach jest funkcją gładką między $\varphi_p(U_p)$ i $\psi_q(V_q)$:

Do dowolnej gładkiej rozmaitości M wymiaru n możemy dołączyć wiązkę styczną $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$, gdzie T_pM jest przestrzenią styczną do M w punkcie p. Ważną własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość.

Istnieje więc w matematyce sposób na rozważanie abstrakcyjnych przestrzeni przez pryzmat dobrze zbadanych $\mathbb{R}^n$ oraz dopisanie do nich struktury przestrzeni liniowej dzięki przestrzeniom stycznym. Idąc dalej, możemy zastanowić się jakie inne właściwości przestrzeni euklidesowych możemy uogólnić na abstrakcyjne przestrzenie T_pM.

Rozmaitość Riemanna to gładka, rzeczywista rozmaitość M z rodziną dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

zdefiniowanych w każdym punkcie $p \in M$. Każda taka funkcja g_p jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na T_pM, a więc pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

W ten sposób możemy na TM określić funkcję g, która dowolnym dwóm wektorom X_p, Y_p zaczepionym w tym samym punkcie $p \in M$ przypisuje ich odpowiednik iloczynu skalarnego $g_p(X_p, Y_p)$. Tak określony funkcjonał nazywamy tensorem metrycznym, lub w skrócie metryką, na rozmaitości M.

Dowolna mapa (U, φ) na n-wymiarowej Riemannowskiej rozmaitości M zawierająca punkt $p \in M$ pociąga za sobą bazę przestrzeni T_pM

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right\}$$

w takim razie funkcjonał g_p zapisuje się macierzą o wymiarze $n \times n$. Wyrazami takiej macierzy są wartości g_p na kolejnych parach wektorów bazowych.

Mając bazę dualną do $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\}$ możemy zapisać tensor metryczny za pomocą prawdziwego tensora

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j$$

gdzie $g_{i,j}$ to wyrazy macierzy wspomnianej wyżej, a $d\varphi^i$ to elementy bazy dualnej do $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$

1.2 Czarne dziury Schwarzschild'a

Jednym z najprostszych, a przez to najczęściej używanych, sposobów opisu przestrzeni wokół czarnej dziury jest modelowanie tej osobliwości jako sferycznie symetrycznego obiektu o pewnej masie, pozbawionego ładunku elektrycznego i przyśpieszenia kątowego. Tak zdefiniowane czarne dziury nazywamy czarnymi dziurami Schwarzschild'a, na pamiątkę niemieckiego fizyka który jako pierwszy znalazł dokładne rozwiązanie równania Einsteina. W języku matematyki, czarna dziura którą zajmiemy się w tej pracy jest modelowana przez rozmaitość

$$\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

czyli w tym przypadku współrzędne będą oznaczać kolejno czas, odległość od środka masy i położenie na S^2 zapisywane przy pomocy dwóch kątów.

Wspomniane rozwiązanie nazywa się metryką Schwarzschild'a i zapisuje się je jako

$$g = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

lub w formie macierzy

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left[1 - \frac{r_s}{r}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

gdzie τ to czas własny (mierzony przez zegar poruszający się razem z cząsteczką testową), t to współrzędna czasu (mierzona przez zegar położony nieskończenie daleko od czarnej dziury), a r, θ, φ to współrzędne sferyczne wokół środka czarnej dziury (θ to kąt między wektorem opisującym położenie a północnym biegunem przestrzeni) [1].

W każdym punkcie (t, r, θ, φ) rozmaitości opisującej czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury możemy rozważać przestrzeń do niej styczną. Bazą takiej przestrzeni będą wówczas wektory $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ których długości to

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} \right\|_g = \sqrt{g_{\mu\mu}}$$

czyli pierwiastki odpowiednich wyrazów macierzy $g_{\mu\nu}$. Zauważmy, że długość żadnego z wektorów nie jest zależna od czasu t ani od szerokości geograficznej.

CHYBA NAJWIĘCEJ SENSU MA PATRZENIE NA PRZEKRÓJ PO RÓWNIKU I WZDŁUŻ OSI PÓŁNOC-POŁUDNIE? PRZYNAJMNIEJ NA POCZĄTKU

References

[1] Jim Branson. The schwarzschild metric, 2012. Użyte: 12.11.2023.

[2] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2 edition, 2013.