

Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur  
przy użyciu metryki Schwarzschilda:  
Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

Grudzień 2023

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Czarne dziury Schwarzschilda . . . . .	1
1.2	Pojęcie rozmaitości Riemannowskiej . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Szybki kurs geometrii</b>	<b>4</b>
2.1	Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja . . . .	4
2.2	Równanie geodezyjnej . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Matematyczna podróż do czarnej dziury</b>	<b>6</b>
3.1	Symbole Christoffela . . . . .	7
3.2	Równanie orbity . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Dodatek</b>	<b>9</b>
4.1	O rozmaitościach różniczkowalnych . . . . .	9

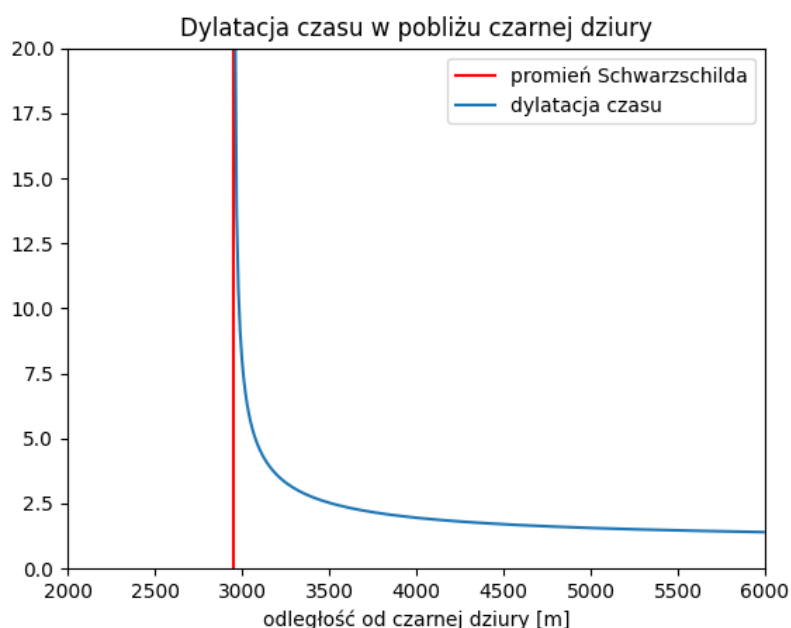
# 1. Wstęp

## 1.1. Czarne dziury Schwarzschilda

Czarne dziury fascynują i przerażają. Są to obiekty rodem z science fiction - punkt o zerowej objętości i nieskończonej gęstości otoczony tajemniczym horyzontem zdarzeń. Nic dziwnego, że sam Einstein, jak i wielu naukowców, nie mogli uwierzyć w ich istnienie.

Czarne dziury powstają w wybuchu supernowej, kiedy gwiazdzie skończy się paliwo, a reakcje termojądrowe zatrzymają się, grawitacja zgniata masę do jednego malutkiego punktu - osobliwości. Jego masa jest tak wielka, że zakrzywia czasoprzestrzeń i spowalnia czas, a linia po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec, nazywamy horyzontem zdarzeń.

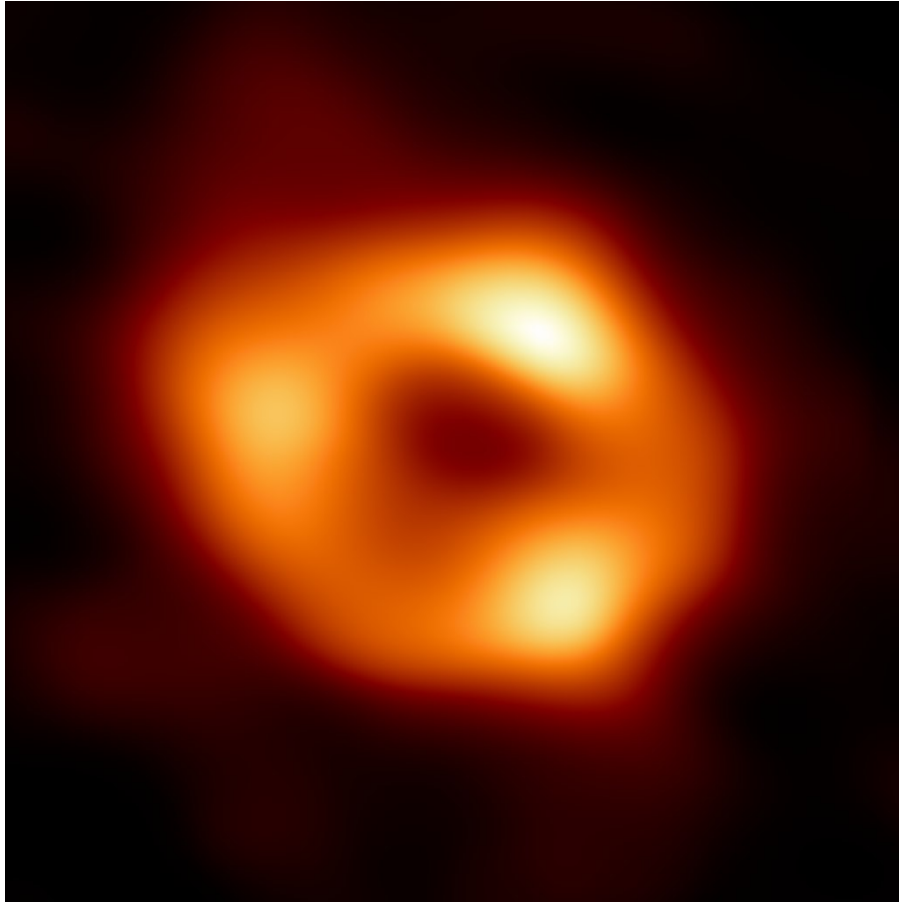
Czarne dziury były inspiracją dla wielu autorów gatunku science fiction - w filmie *Interstellar* pojawia się Gargantua - obiekt o masie 100 milionów Słońc. Gdy podróżnicy docierają na planetę orbitującą wokół czarnej dziury mówią, iż czas płynie tu wolniej. Zjawisko możemy potwierdzić patrząc na wykres, pokazujący stosunek czasu płynącego normalnie, do czasu w zakrzywionej czasoprzestrzeni.



Wykres 1: Stosunek upływu czasu własnego do upływu czasu obserwowanego w punkcie nieskończenie odległym od czarnej dziury w zależności od położenia  $r$ .

W 2019 roku otrzymaliśmy pierwsze zdjęcie czarnej dziury, natomiast w maju 2022 roku otrzymaliśmy zdjęcie Saggitariusza A. - jest to supermasywny obiekt w centrum naszej galaktyki:

Z matematycznego punktu widzenia, czarna dziura jest rozmaitością różniczkowalną



Zdjęcie 2: Zdjęcie czarnej dziury w centrum Mlecznej Drogi uzyskane przez [2]

z tensorem metrycznym, który opisuje jak zakrzywiona jest przestrzeń wokół niej. Aby więc dokładnie zrozumieć jak zachowują się cząsteczki w jej pobliżu, należy zrozumieć czym są rozmaitości.

## 1.2. Pojęcie rozmaitości Riemannowskiej

Rozmaitość to przestrzeń matematyczna  $M$ , która wokół każdego punktu  $p \in M$  posiada otwarte otoczenie  $U_p$ , które przypomina pewien podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Na przykład dla rozmaitości topologicznych owo podobieństwo będzie oznaczało istnienie homeomorfizmu

$$\varphi_p : U_p \rightarrow \overline{U_p} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

gdzie  $\overline{U_p} \subseteq \mathbb{R}^n$  jest otwartym zbiorem. W niniejszej pracy zajmiemy się opisem czarnej dziury przez Schwarzschilda, który modeluje przestrzeń wokół tej anomalii jako rozmaitość różniczkowalną z tensorem metrycznym, czyli rozmaitość Riemannowską. Dokładna definicja rozmaitości różniczkowalnej znajduje się w **dodatku**.

Przestrzenie styczne w dowolnym  $p \in M$  są przestrzeniami wektorowymi oznaczanymi  $T_p M$  (dokładna definicja w **dodatku**). W wielu przypadkach możemy więc zdefiniować na nich iloczyn skalarny, w tym ujęciu nazywany **tensorem**

**metrycznym** lub też prościej metryką.

Formalnie, tensor metryczny to rodzina dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowana w każdym punkcie  $p \in M$ . Każda taka funkcja jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na  $T_p M$ , czyli pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

Tensor metryczny określony na  $TM$  przypisuje więc dwóm wektorom stycznym  $X_p, Y_p$  zaczepionym w punkcie  $p$  mnogości  $M$  wartość

$$g(X_p, Y_p) := g_p(X_p, Y_p).$$

Ponieważ  $g$  jest odwzorowaniem liniowym na  $T_p M$  dla każdego  $p \in M$ , to zapisuje się ono macierzą, którą nazwiemy  $g$ . Jej wyraz odpowiadający  $g(\partial\varphi_i, \partial\varphi_j)$  będziemy oznaczać  $g_{i,j}$ .

Warto zaznaczyć, że mając bazę dualną  $\{d\varphi^i\}$  do  $\{\partial\varphi_i\}$ , tensor metryczny możemy zapisać jako

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j.$$

W tej pracy zajmujemy się metryką Schwarzschilda zdefiniowaną na podzbiorze  $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$  o znakach  $(-, +, +, +)$ , który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\frac{r - r_s}{r} \cdot c^2 dt^2 + \left(\frac{r - r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

lub w postaci macierzy [1]

$$g_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1-r_s}{r} \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

gdzie

- $r_s$  to promień Schwarzschilda określonej czarnej dziury,
- $c$  oznacza prędkość światła,
- $\tau$  to czas właściwy (czyli mierzony w pobliżu czarnej dziury),
- $t$  to czas bezwzględny (mierzony nieskończenie daleko od czarnej dziury),
- $\theta$  to kąt po południku,
- a  $\varphi$  to kąt po równoleżniku.

## 2. Szybki kurs geometrii

### 2.1. Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury pozostaje równe 0. Z drugiej strony, nie posiada on masy, więc nie zachowuje się całkowicie jak cząsteczki materii.

Oznaczmy przez  $BH$  rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

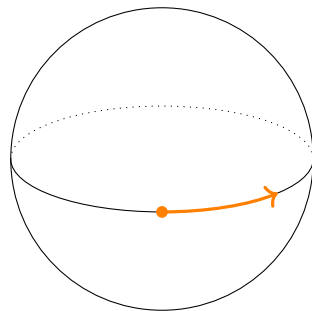
Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow BH$$

gdzie  $I$  jest pewnym odcinkiem, a nawet może być całą prostą  $\mathbb{R}$ . Ponieważ foton porusza się z prędkością światła i nie przyspiesza, to wiemy, że

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.



Rysunek 3: Cząsteczka poruszająca się po sferze  $S^2$ .

Sprawy nie są jednak tak proste, gdyż metryka zadana na  $BH$  mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać

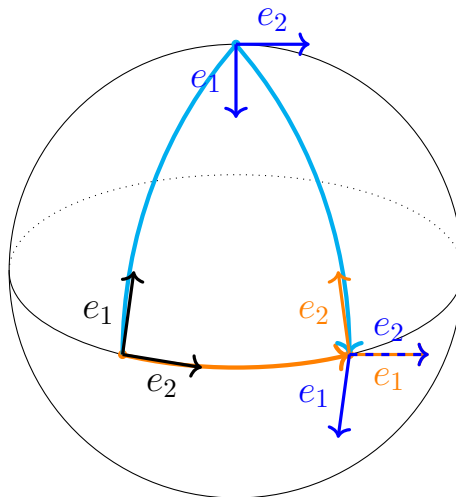
na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu w pobliżu czarnej dziury. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze  $S^2$ . Wówczas pomimo, że foton nie przyśpiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia, jak na rysunku 3.

To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny na badanej przez nas przestrzeni od produktu skalarnego w przestrzeni euklidesowej. Iloczyn metryczny mówi jak długi jest dany wektor, a długość krzywej jest zależna od długości wektorów, które na niej leżą. W takim razie najkrótsza droga między dwoma punktami, czyli droga z zerową drugą pochodną, będzie się zmieniać razem ze zmianą metryki.

## 2.2. Równanie geodezyjnej

Ponieważ foton nie przyśpiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zataczana przez foton jest **linią geodezyjną** na rozmaitości  $BH$ . Linia geodezyjna jest najszybszą (najkrótszą) ścieżką między dwoma punktami - taką właśnie najmniej pochłaniającą energię drogę wybierają zazwyczaj obiekty fizyczne.

Zauważmy, że patrząc na podróż fotonu, przesuwamy wraz z nim przestrzeń styczną, zawierającą wektor prędkości, po krzywej którą ów foton zatacza. Patrząc znów na prosty przykład na  $S^2$ , przyjrzyjmy się co się dzieje z wektorami stycznymi kiedy przesuwamy je na dwa sposoby między tymi samymi punktami leżącymi na równiku, jak na rysunku 4.



Rysunek 4: Różnica między przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po równiku a przestrzeniami stycznymi przesuwanymi po południkach.

Idąc przez północny biegun sfery wektory styczne obracają się i na końcu trasy nie zgadzają się z wektorami, które były przesuwane po równiku. Przesuwanie

wektorów stycznych wzdłuż krzywej kryje w sobie składanie pól wektorowych - pola zawierającego wektory prędkości na krzywej i pola zawierającego wektory bazowe przestrzeni stycznej. W celu uzgodnienia tego, jak przesuwac przestrzeń styczną wzdłuż krzywej, lub bardziej ogólnie jak składać pola wektorowe, potrzebne jest użycie koneksji Levi-Civity, której dokładniejsza definicja znajduje się w [dodatku](#).

Jeśli teraz  $x_1, \dots, x_n$  są lokalnymi współrzędnymi na rozmaitości, a  $\partial_1, \dots, \partial_n$  wektorami bazowymi przestrzeni stycznej, to możemy zdefiniować **symbole Christoffela** dla koneksji  $\nabla$  względem tego układu współrzędnych jako liczby spełniające poniższą równość:

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l.$$

W przypadku czarnej dziury rolę koneksji Levi-Civity będzie spełniać pochodna względem czasu właściwego  $\frac{d}{d\tau}$ . W celu uproszczenia notacji i zadowoleniu zmysłu konformizmu z popularną notacją, dla wektora  $v$  będziemy pisać

$$\nabla v = \frac{d}{d\tau} v = \dot{v}.$$

Niech więc  $x_i$  będzie lokalnym układem współrzędnych na  $BH$ . Wtedy krzywa  $\gamma$  zadaje gładkie funkcje  $t \mapsto x_i(t) = x_i(\gamma(t))$ , które dają funkcję  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ . W celu uproszczenia notacji będziemy od razu pisać  $x_i = x_i(t)$ . Równanie różniczkowe opisujące geodezyjną którą podróżuje foton przedstawia się wtedy jako

$$\ddot{\gamma} = -\Gamma_{i,j}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$$

gdzie  $\Gamma_{i,j}^k$  to symbol Christoffela drugiego rodzaju.

Dodatkowo, ponieważ foton jest cząsteczką bez masy, geodezyjna którą on podróżuje jest określana *nullową* geodezyjną i musi spełniać dodatkowy warunek

$$g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

gdzie  $g_{\mu,\nu}$  to wartość tensora metrycznego  $g(\mu, \nu)$ .

### 3. Matematyczna podróż do czarnej dziury

W poniższej pracy dokonamy analizy ruchu fotonów w pobliżu czarnej dziury, której promień Schwarzschilda wynosi  $r_s = 1$ . Aby dodatkowo ułatwić rozważania, przyjmujemy  $c = G = 1$  i konsekwentnie  $M = \frac{1}{2}$  oraz ustalamy  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Poza tym, wyliczymy symbole Christoffela drugiego rodzaju dla metryki Schwarzschilda.



### 3.1. Symbole Christoffela

Dla wygody, nie będziemy wyliczać symboli Christoffela wprost z definicji. Zamiast tego, skorzystamy z lagrangianu, który spełnia równanie

$$S = \int L d\lambda,$$

gdzie  $\lambda$  jest afiniczną parametryzacją, a  $S$  to działanie, czyli w prostym przypadku cząsteczki poruszającej się wzdłuż pojedynczej krzywej jest to suma iloczynu pędu cząsteczki z fragmentem drogi przebytej.

Stosując więc powyższe wiadomości dla przypadku fotonu poruszającego się w metryce Schwarzschilda dostajemy

$$S = \int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\tau} d\tau = \int \frac{\sqrt{d\tau^2}}{d\tau} d\tau = \int \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau = \int L' d\tau.$$

W takim razie jednym z interesujących nas lagrangianów jest

$$L' = \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}.$$

Ponieważ lagrangian nie jest unikalny, i nałożenie na niego dowolnej funkcji dalej daje lagrangian, to możemy wybrać

$$L = (L')^2 = g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Ułatwi to nam wyliczenia korzystające z drugiego równania lagrangianu, to znaczy:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}.$$

Podstawiając do  $d\tau$  metrykę Schwarzschilda dostajemy poniższy układ równań:

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= -\frac{1}{r(r-1)} \dot{r} \dot{t} \\ \ddot{r} &= -\frac{r-1}{2r^3} \dot{t}^2 + \frac{1}{2r(r-1)} \dot{r}^2 + (r-1) \dot{\theta}^2 + (r-1) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\theta} &= \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\varphi} \dot{\theta} \end{aligned}$$

Zauważmy, że otrzymane wyżej równania to tak naprawdę geodezyjna w metryce Schwarzschilda. Z lewej strony równości można więc z łatwością czytać symbole

Christoffela - są to współczynniki przy odpowiednich pochodnych. Ponieważ interesuje nas tylko ruch fotonów po płaszczyźnie  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , to  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\cos \theta = 0$  i  $\sin \theta = 1$ .

Symbole Christoffela w interesującym nas przypadku są więc równe

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,r}^t &= \frac{1}{2r(r-1)} \\ \Gamma_{t,t}^r &= \frac{r-1}{2r^3} \\ \Gamma_{r,r}^r &= -\frac{1}{2r(r-1)} \\ \Gamma_{\varphi,\varphi}^r &= -(r-1) \\ \Gamma_{r,\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

### 3.2. Równanie orbity

Korzystając jeszcze raz z drugiego równania lagrangianu, dostajemy

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(2\frac{r-1}{r}\dot{t}\right) = 0$$

czyli

$$\begin{aligned}r^2\dot{\varphi} &= a \implies \dot{\varphi} = \frac{a}{r^2} \\ \frac{r-1}{r}\dot{t} &= \frac{a}{b} \implies \dot{t} = \frac{ra}{b(r-1)}\end{aligned}$$

dla pewnych stałych  $a, b$ . Z fizycznego punktu widzenia  $a$  będzie pędem kątowym cząsteczki, natomiast  $\frac{a}{b}$  jest energią całkowitą.

Możemy teraz wyznaczyć  $t$  w zależności od  $\varphi$ , pozbywając się zależności od  $\tau$ :

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^3}{b(r-1)}$$

Przekształcając teraz drugi warunek geodezyjnej *nullowej*, dostajemy

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{(r-1)^2}{r^2}(dt)^2 + (dr)^2 + r(r-1)(d\varphi)^2 \\
(dr)^2 &= \frac{(r-1)^2}{r^2}(dt)^2 - r(r-1)(d\varphi)^2 \\
\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{(r-1)^2}{r^2} \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 - r(r-1) \\
\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{(r-1)^2}{r^2} \cdot \frac{r^6}{b^2(r-1)^2} - r(r-1) \\
\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{r^4}{b^2} - r(r-1)
\end{aligned}$$

a stosując podstawienie

$$u = \frac{1}{r}, \quad -r^2 du = dr$$

wyraz  $\frac{1}{b^2}$  stanie się wyrazem wolnym, znikającym po różniczkowaniu względem  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{1}{b^2} - u^2 + u^3 \\
u'' &= u \left(\frac{3}{2}u - 1\right)
\end{aligned}$$

## 4. Dodatek

### 4.1. O rozmaitościach różniczkowalnych

Rozmaitości różniczkowalne pozwalają na badanie różnych przestrzeni przez pryzmat przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $M$  jest rozmaitością gładką z atlasem, czyli rodziną map,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , jeśli

- zbiory  $U_\alpha$  tworzą otwarte pokrycie  $M$
- odwzorowania  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \overline{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$  są homeomorfizmami na otwarte podzbiory  $\mathbb{R}^n$ , a liczba  $n$  jest dobrze określona dla  $M$
- dowolne dwie mapy  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  i  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  są *gładko zgodne*, tzn.
  - $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  lub
  - mapy przejścia  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  i  $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$  są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiorymi  $\mathbb{R}^n$ .

Dla dowolnego punktu  $p \in M$  mówimy, że  $T_p M$  jest \*przestrzenią styczną\* w punkcie  $p$ , czyli przestrzenią zawierającą wektory styczne w tym punkcie. Definiować wektory styczne zaczynamy od zdefiniowania zbioru krzywych zaczepionych w punkcie  $p \in M$ , czyli zbioru par krzywych  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  i liczb  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  takich, że  $c(t_0) = p$ . Jeśli  $(U, \varphi)$  jest mapą wokół  $p \in M$ , to definiujemy na zbiorze krzywych zaczepionych w  $p$  relację równoważności

$$[c_0, t_0] \sim [c_1, t_1] \iff (\varphi_p \circ c_0)'(t_0) = (\varphi_p \circ c_1)'(t_1).$$

Klasy równoważności par  $[c, t_0]$  to właśnie wektory styczne należące do  $T_p M$ .

$TM$  to z kolei rozłączna suma po wszystkich przestrzeniach stycznych, którą nazywamy \*wiązką styczną\*. Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość [3], tzn. dla każdego  $p \in M$  przestrzeń  $T_p M$  jest przestrzenią wektorową wymiaru  $n$ , a jeśli  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  jest mapą wokół  $p$ , to zbiór

$$\partial\varphi_1, \dots, \partial\varphi_n,$$

gdzie  $\partial\varphi_j$  można również oznaczyć  $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}$ , jest bazą  $T_p M$ .

## Bibliografia

- [1] Jim Branson. 2012. *The Schwarzschild Metric*. [https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b\\_notes/node75.html](https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html) użyte: 12.11.2023.
- [2] EHT Collaboration. 2022. *Milky Way Galactic Center*. <https://www.eso.org/public/images/eso2208-eh-t-mwa/> użyte: 20.11.2023.
- [3] John M. Lee. 2013. *Introduction to Smooth Manifolds* (2 ed.). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>