

# **Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne**

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

# Contents

- 1. Wstęp ..... 3
- 1.1. Czarne dziury Schwarzschilda ..... 3
- 1.2. Pojęcie rozmaitości Riemmanowskiej ..... 4
- 2. Matematyczna podróż do czarnej dziury ..... 5
- 2.1. Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja ..... 5
- 2.2. Równanie geodezyjnej w pobliżu czarnej dziury Schwarzschilda ..... 6
- 3. Wyniki symulacji ..... 8
- 3.1. Metoda numeryczna ..... 8
- Bibliografia ..... 9

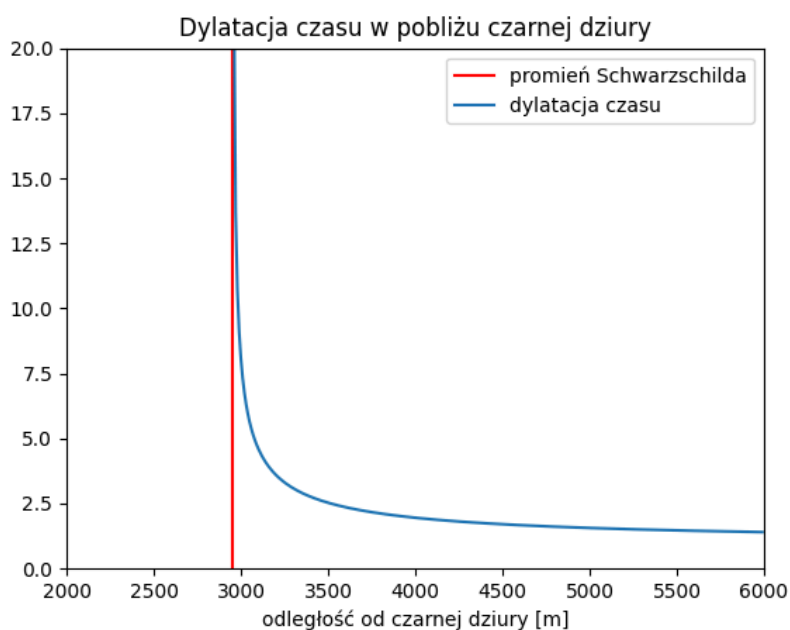
# Wstęp

## Czarne dziury Schwarzschilda

Czarne dziury fascynują i przerażają. Są to obiekty rodem z science fiction - punkt o zerowej objętości i nieskończonej gęstości otoczony tajemniczym horyzontem zdarzeń. Nic dziwnego, że sam Einstein, jak i wielu naukowców, nie mogli uwierzyć w ich istnienie.

Czarne dziury powstają w wybuchu supernowej, kiedy gwiazdzie skończy się paliwo, a reakcje termojądrowe zatrzymają się, grawitacja zgniata masę do jednego malutkiego punktu - osobliwości. Jego masa jest tak wielka, że zakrzywia czasoprzestrzeń i spowalnia czas, a linia po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec, nazywamy horyzontem zdarzeń.

Czarne dziury były inspiracją dla wielu autorów gatunku science fiction - w filmie *Interstellar* pojawia się Gargantua - obiekt o masie 100 milionów Słońc. Gdy podróżnicy docierają na planetę orbitującą wokół czarnej dziury mówią, iż czas płynie tu wolniej. Zjawisko możemy potwierdzić patrząc na wykres, pokazujący stosunek czasu płynącego normalnie, do czasu w zakrzywionej czasoprzestrzeni.



Wykres 1: Stosunek upływu czasu własnego do upływu czasu obserwowanego w punkcie nieskończenie odległym od czarnej dziury w zależności od położenia  $r$ .

W 2019 roku otrzymaliśmy pierwsze zdjęcie czarnej dziury, natomiast w maju 2022 roku otrzymaliśmy zdjęcie Saggitariusza A. - jest to supermasywny obiekt w centrum naszej galaktyki:

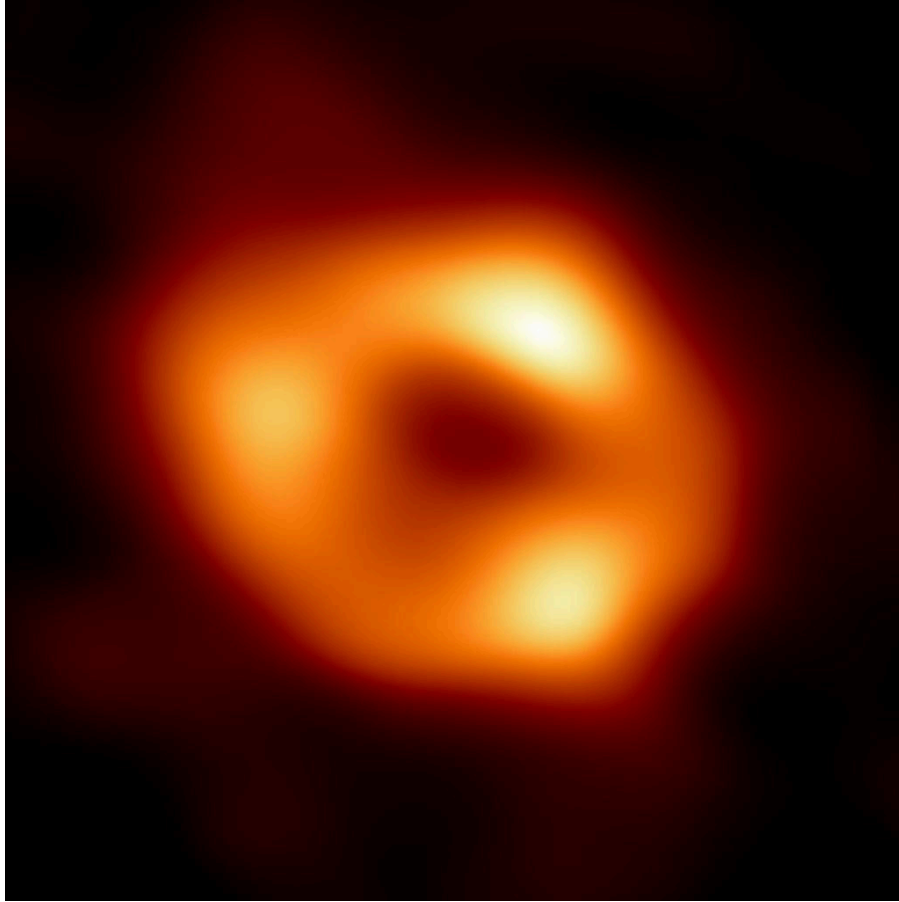


Figura 2: Zdjęcie czarnej dziury w centrum Mlecznej Drogi uzyskane przez [1].

Z matematycznego punktu widzenia, czarna dziura jest rozmaitością różniczkowalną z tensorem metrycznym, który opisuje jak zakrzywiona jest przestrzeń wokół niej. Aby więc dokładnie zrozumieć jak zachowują się cząsteczki w jej pobliżu, należy zrozumieć czym są rozmaitości i jak wygląda ich geometria.

## Pojęcie rozmaitości Riemannowskiej

Rozmaitości różniczkowalne pozwalają na badanie różnych obiektów matematycznych przez pryzmat przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $M$  jest rozmaitością różniczkowalną z atlasem, czyli rodziną map,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , jeśli

- zbiory  $U_\alpha$  tworzą otwarte pokrycie  $M$
- odwzorowania  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \overline{U_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$  są homeomorfizmami na otwarte podzbiory  $\mathbb{R}^n$ , a liczba  $n$  jest dobrze określona dla  $M$
- dowolne dwie mapy  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  i  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  są **gładko zgodne**, tzn.
  - $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  lub
  - mapy przejścia  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  i  $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$  są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiórmi  $\mathbb{R}^n$ .

Dla dowolnego punktu  $p \in M$  mówimy, że  $T_p M$  jest **przestrzenią styczną** w punkcie  $p$ , czyli przestrzenią zawierającą wektory styczne w tym punkcie.  $TM$  to z kolei rozłączna suma po wszystkich przestrzeniach stycznych, którą nazywamy **wiązką styczną**. Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość [2], tzn. dla każdego  $p \in M$  przestrzeń  $T_p M$  jest przestrzenią wektorową wymiaru  $n$ , a jeśli  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  jest mapą wokół  $p$ , to zbiór

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right\}$$

jest bazą  $T_p M$ .

Liniowość przestrzeni stycznych jest wykorzystywana w celu dodawania rozmaiwościom dodatkową strukturę, mianowicie pozwala na definiowanie na wiązce stycznej  $M$  odpowiednika iloczynu skalarnego, nazywanego **tensorem metrycznym**. Formalnie, tensor metryczny to rodzina dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowana w każdym punkcie  $p \in M$ . Każda taka funkcja jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na  $T_p M$ , czyli pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

Tensor metryczny określony na  $TM$  przypisuje więc dwóm wektorom  $X_p, Y_p$  zaczepionym w punkcie  $p$  rozmaiwości  $M$  wartość

$$g(X_p, Y_p) := g_p(X_p, Y_p).$$

Warto zaznaczyć, że mając bazę dualną  $\{d\varphi^i\}$  do  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right\}$ , tensor metryczny możemy zapisać jako

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j$$

gdzie  $g_{i,j}$  to wyraz macierzy  $g$  zdefiniowanej jako odwzorowanie dwuliniowe wyżej odpowiadający ilorazowi skalarnemu  $i$ -tego i  $j$ -tego wektora bazowego.

W niniejszej pracy zajmujemy się tensorem metrycznym Schwarzschilda zdefiniowanym na rozmaiwości  $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$  o znakach  $(-, +, +, +)$ , który jest standardowo zapisywany jako

$$g = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

gdzie  $r_s$  to promień Schwarzschilda, a  $c$  oznacza prędkość światła [3].

## Matematyczna podróż do czarnej dziury

### Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury pozostaje równe 0.

Oznaczmy przez BH rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

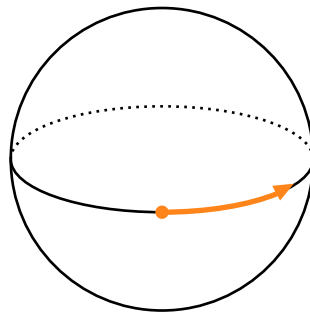
$$\text{BH} = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow \text{BH}$$

gdzie  $I$  jest pewnym odcinkiem. Ponieważ foton porusza się z prędkością światła i nie przyspiesza, to wiemy, że  $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ . Wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.

Niestety, metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze  $S^2$ . Wówczas pomimo, że foton nie przyspiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia:



To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny, czy raczej tensorowy, na badanej przez nas przestrzeni od produktu skalarnego w przestrzeni euklidesowej. Nie jest trudno zauważyć, że tensor metryczny na jednostkowej sferze  $S^2$  przedstawia się macierzą

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

lub równoważnie wzorem  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ , który wynika z wyliczenia długości wektora powstałego przez zmianę kąta  $\varphi$  o  $d\varphi$  oraz kąta  $\theta$  o  $d\theta$ .

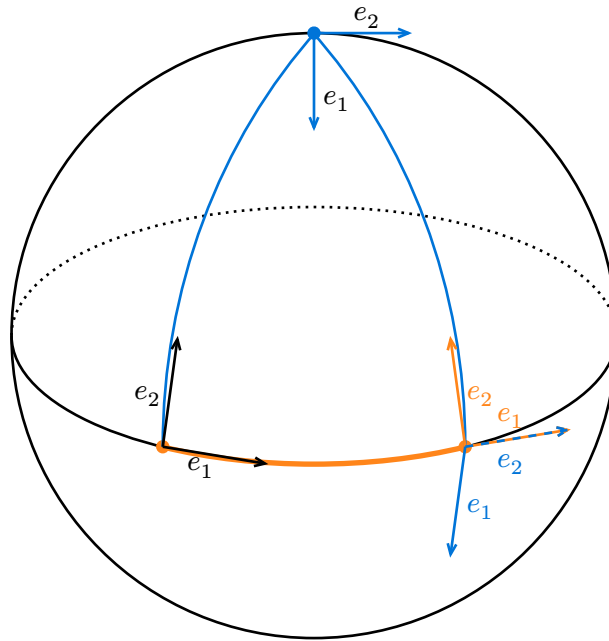
Wiemy już, że pomimo braku przyspieszenia na zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół dziury foton będzie sprawiał wrażenie skręcającego. Chcielibyśmy teraz umieć zrekonstruować jak obserwator w  $\mathbb{R}^3$  widzi trasę fotonu w otoczeniu BH mając tylko początkowe położenie i prędkość cząsteczki.

## Równanie geodezyjnej w pobliżu czarnej dziury Schwarzschilda

Ponieważ foton nie przyspiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zataczana przez foton jest **linią geodezyjną**

na rozmaitości BH. O linii geodezyjnej można myśleć jako o najszybszej ścieżce między dwoma punktami - taką właśnie najmniej pochłaniającą energię drogę wybierają zazwyczaj obiekty fizyczne.

Zauważmy, że patrząc na podróż fotonu, przesuwamy wraz z nim przestrzeń styczną, zawierającą wektor prędkości, po krzywej którą ów foton zatacza. Patrząc znów na prosty przykład na  $S^2$ , przyjrzyjmy się co się dzieje z wektorami stycznymi kiedy przesuwamy je na dwa sposoby między tymi samymi punktami leżącymi na równiku:



Idąc przez północny biegun sfery wektory styczne obracają się i na końcu trasy nie zgadzają się z wektorami, które były przesuwane po równiku. O Operacji przesuwania wektorów stycznych wzdłuż krzywej można myśleć jako o składaniu pól wektorowych - przesuwane wektory są jednym polem, a wektor prędkości na krzywej jest drugim polem. W celu uzgodnienia tego, jak przesuwać przestrzeń styczną wzdłuż krzywej, lub bardziej ogólnie jak składać pola wektorowe, potrzebne jest użycie koneksji Levi-Civity.

**Koneksja Levi-Civita** jest połączeniem afinicznym, który składowe pola wektorowego przenosi na przestrzeń styczną nieskończenie odległą od rozmaitości. Można o tym myśleć jako o rzutowaniu wektorów stycznych w różnych punktach na daleką kartkę papieru. Dzięki temu możemy porównywać pola wektorowe w dowolnych punktach na rozmaitości. Formalna definicja koneksji Levi-Civita mówi, że jest to połączenie afiniczne  $\nabla$  które

- zachowuje metrykę, tzn.  $\nabla g = 0$
- oraz jest pozbawione torsji, tzn. dla dowolnych pól wektorowych  $X, Y$  mamy  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , gdzie  $[X, Y]$  jest pochodną Liego  $X, Y$ .

Jeśli teraz  $x_1, \dots, x_n$  są lokalnymi współrzędnymi na rozmaitości, a  $\partial_1, \dots, \partial_n$  wektorami bazowymi przestrzeni stycznej, to możemy zdefiniować **symbole Christoffela** dla koneksji  $\nabla$  względem tego układu współrzędnych jako liczby spełniające poniższą równość:

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l.$$

Niech więc  $x_i$  będzie lokalnym układem współrzędnych na BH. Wtedy krzywa  $\gamma$  zadaje gładkie funkcje  $t \mapsto x_i(t) = x_i(\gamma(t))$ , które dają funkcję  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Równanie różniczkowe opisujące geodezyjną którą porusza foton przedstawia się wtedy jako

$$\nabla \dot{\gamma}(t) = \Gamma_{i,j}^k(x_1(t), \dots, x_4(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

gdzie  $\Gamma_{i,j}^k$  to symbol Christoffela drugiego rodzaju wyznaczony za pomocą koneksji Levi-Cevity. W szczególności interesuje nas fakt, że  $i$ -ta współrzędna wektora prędkości fotonu wyraża się jako

$$\gamma^{i(t)} = -\Gamma_{m,j}^i \frac{dx^m}{dx} \gamma^{j(t)}.$$

Symbole Christoffela użyte w obliczeniach zostały zaczerpnięte z [4].

Ponieważ foton w naszym przypadku porusza się po płaszczyźnie przechodzącej przez równik, to  $x^3 = \theta = \frac{\pi}{2}$  jest funkcją stałą. Interesują nas więc tylko wartości zmiany  $\varphi = x^4$  oraz  $r = x^2$  w czasie, czyli

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\left(\frac{1}{r}r'\varphi + \frac{1}{r}\varphi'r\right) = -\left(\frac{\varphi}{r}r' + \varphi'\right) \\ r' &= -\left(\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)t - \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}r'r\right) \end{aligned}$$

## Wyniki symulacji

### Metoda numeryczna

Równania różniczkowe opisujące ruch fotonu w pobliżu czarnej dziury zostaną rozwiązane numerycznie przy użyciu metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Kod napisany w języku Python znajduje się w Appendiksie.



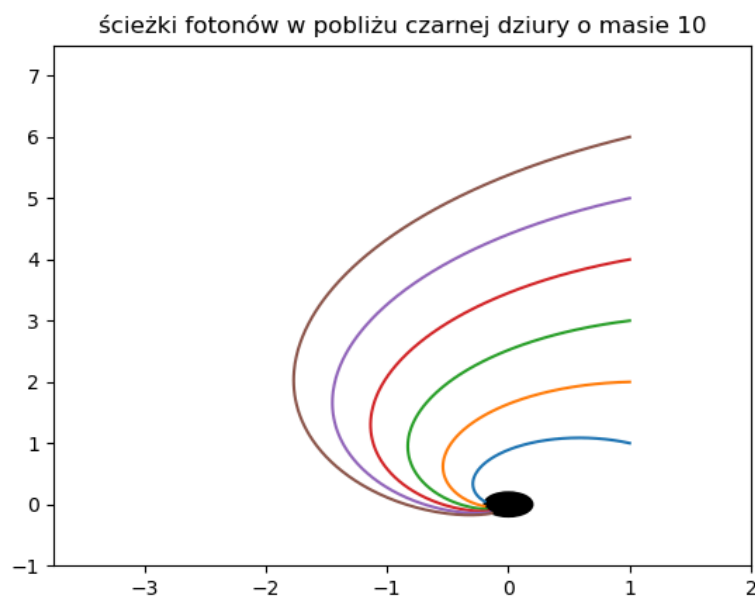


Figure 3: Wizualizacja ścieżek fotonów w pobliżu modelowanej czarnej dziury poruszających się po płaszczyźnie przechodzącej przez równik z zaznaczonym obszarem wewnątrz promienia Schwarzschilda (czarne koło w centrum).

## Bibliografia

- [1] EHT Collaboration, "Milky Way Galactic Center". [Online]. Available: <https://www.eso.org/public/images/eso2208-eh-1-mwa/>
- [2] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer New York, NY, 2013. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [3] J. Branson, "The Schwarzschild Metric". [Online]. Available: [https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b\\_notes/node75.html](https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html)
- [4] G. Rowe, [Online]. Available: <https://physicspages.com/pdf/Relativity/Christoffel%20symbols%20for%20Schwarzschild%20metric.pdf>
- [5] J. M. Lee, *Morse Theory*. 1963.