

Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

Contents

1. Wstęp	3
1.1. Czarne dziury Schwarzschilda	3
1.2. Pojęcie rozmaitości Riemannowskiej	4
2. Szybki kurs geometrii	5
2.1. Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja	5
2.2. Równanie geodezyjnej	6
3. Matematyczna podróż do czarnej dziury	8
3.1. Symbole Christoffela	8
3.2. Równanie orbity	10
4. Wyniki symulacji	12
4.1. Metoda numeryczna	12
Bibliografia	12

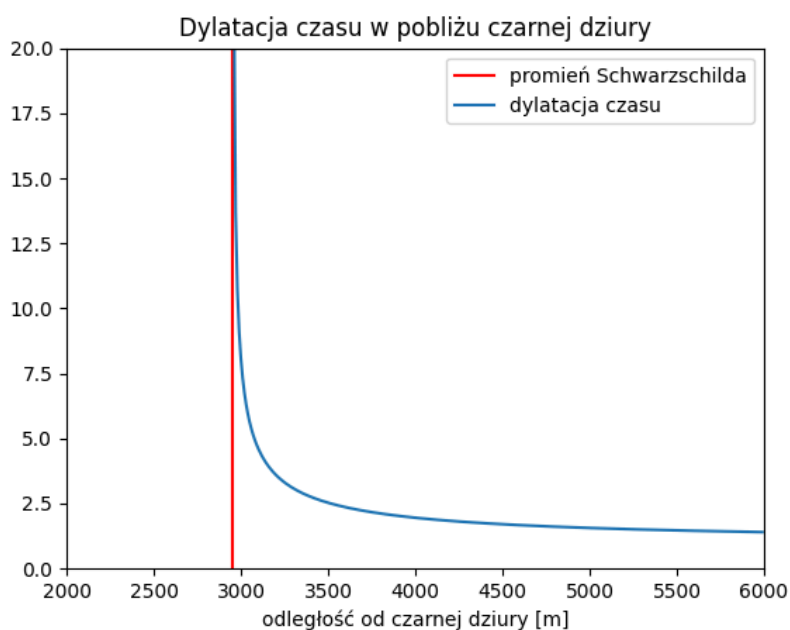
Wstęp

Czarne dziury Schwarzschilda

Czarne dziury fascynują i przerażają. Są to obiekty rodem z science fiction - punkt o zerowej objętości i nieskończonej gęstości otoczony tajemniczym horyzontem zdarzeń. Nic dziwnego, że sam Einstein, jak i wielu naukowców, nie mogli uwierzyć w ich istnienie.

Czarne dziury powstają w wybuchu supernowej, kiedy gwiazdzie skończy się paliwo, a reakcje termojądrowe zatrzymają się, grawitacja zgniata masę do jednego malutkiego punktu - osobliwości. Jego masa jest tak wielka, że zakrzywia czasoprzestrzeń i spowalnia czas, a linia po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec, nazywamy horyzontem zdarzeń.

Czarne dziury były inspiracją dla wielu autorów gatunku science fiction - w filmie *Interstellar* pojawia się Gargantua - obiekt o masie 100 milionów Słońc. Gdy podróżnicy docierają na planetę orbitującą wokół czarnej dziury mówią, iż czas płynie tu wolniej. Zjawisko możemy potwierdzić patrząc na wykres, pokazujący stosunek czasu płynącego normalnie, do czasu w zakrzywionej czasoprzestrzeni.



Wykres 1: Stosunek upływu czasu własnego do upływu czasu obserwowanego w punkcie nieskończenie odległym od czarnej dziury w zależności od położenia r .

W 2019 roku otrzymaliśmy pierwsze zdjęcie czarnej dziury, natomiast w maju 2022 roku otrzymaliśmy zdjęcie Saggitariusza A. - jest to supermasywny obiekt w centrum naszej galaktyki:

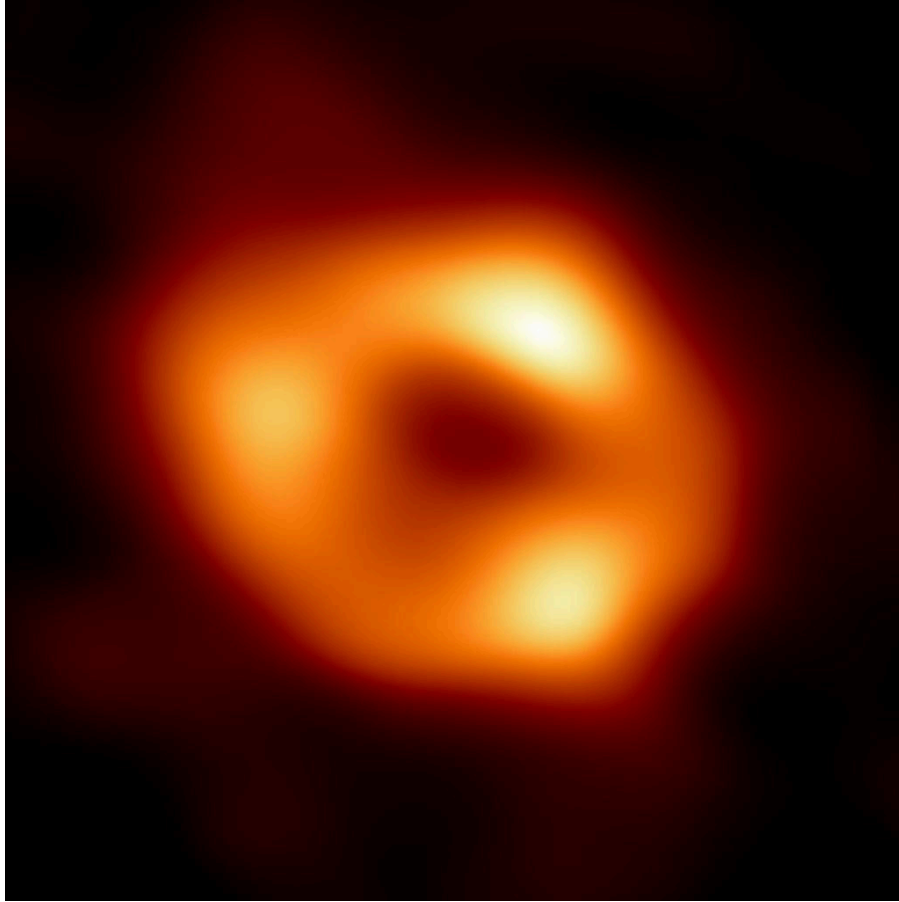


Figura 2: Zdjęcie czarnej dziury w centrum Mlecznej Drogi uzyskane przez [1].

Z matematycznego punktu widzenia, czarna dziura jest rozmaitością różniczkowalną z tensorem metrycznym, który opisuje jak zakrzywiona jest przestrzeń wokół niej. Aby więc dokładnie zrozumieć jak zachowują się cząsteczki w jej pobliżu, należy zrozumieć czym są rozmaitości.

Pojęcie rozmaitości Riemannowskiej

Rozmaitości różniczkowalne pozwalają na badanie różnych przestrzeni przez pryzmat przestrzeni \mathbb{R}^n . Mówimy, że M jest rozmaitością gładką z atlasem, czyli rodziną map, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, jeśli

- zbiory U_α tworzą otwarte pokrycie M
- odwzorowania $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \overline{U_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ są homeomorfizmami na otwarte podzbiory \mathbb{R}^n , a liczba n jest dobrze określona dla M
- dowolne dwie mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ i (U_β, φ_β) są **gładko zgodne**, tzn.
 - $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ lub
 - mapy przejścia $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ i $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiórmi \mathbb{R}^n .

Dla dowolnego punktu $p \in M$ mówimy, że $T_p M$ jest **przestrzenią styczną** w punkcie p , czyli przestrzenią zawierającą wektory styczne w tym punkcie. TM to z kolei rozłączna suma po wszystkich przestrzeniach stycznych, którą nazywamy **wiązką styczną**. Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość [2], tzn. dla każdego $p \in M$ przestrzeń $T_p M$ jest przestrzenią wektorową wymiaru n , a jeśli (U, φ) , $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest mapą wokół p , to zbiór

$$\{\partial\varphi_1, \dots, \partial\varphi_n\},$$

gdzie $\partial\varphi_j$ można również oznaczyć $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}$, jest bazą $T_p M$.

Liniowość przestrzeni stycznych jest wykorzystywana w celu dodawania różnym różnicom dodatkowej struktury, mianowicie pozwala na definiowanie na wiązce stycznej M odpowiednika iloczynu skalarnego, nazywanego **tensorem metrycznym**.

Formalnie, tensor metryczny to rodzina dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowana w każdym punkcie $p \in M$. Każda taka funkcja jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na $T_p M$, czyli pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

Tensor metryczny określony na TM przypisuje więc dwóm wektorom stycznym X_p, Y_p zaczepionym w punkcie p różnicom M wartość

$$g(X_p, Y_p) := g_p(X_p, Y_p).$$

Ponieważ g jest odwzorowaniem liniowym na $T_p M$ dla każdego $p \in M$, to zapisuje się ono macierzą, którą nazwiemy g . Jej wyraz odpowiadający $g(\partial\varphi_i, \partial\varphi_j)$ będziemy oznaczać $g_{i,j}$.

Warto zaznaczyć, że mając bazę dualną $\{d\varphi^i\}$ do $\{\partial\varphi_i\}$, tensor metryczny możemy zapisać jako

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j.$$

W niniejszej pracy zajmujemy się tensorem metrycznym Schwarzschilda zdefiniowanym na różnicy $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$ o znakach $(-, +, +, +)$, który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{r_s}{r})c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

gdzie r_s to promień Schwarzschilda, a c oznacza prędkość światła [3].

Szybki kurs geometrii

Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach - motywacja

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury pozostaje równe 0.

Oznaczmy przez BH rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

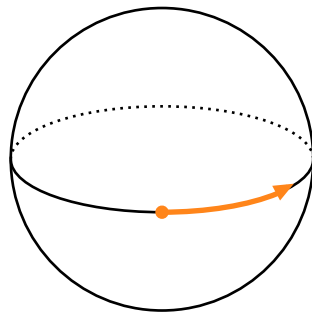
$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow BH$$

gdzie I jest pewnym odcinkiem. Ponieważ foton porusza się z prędkością światła i nie przyspiesza, to wiemy, że $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$. Wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.

Niestety, metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń \mathbb{R}^4 . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze S^2 . Wówczas pomimo, że foton nie przyspiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia:



To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny, czy raczej tensorowy, na badanej przez nas przestrzeni od produktu skalarnego w przestrzeni euklidesowej. Nie jest trudno zauważyć, że tensor metryczny na jednostkowej sferze S^2 przedstawia się macierzą

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

lub równoważnie wzorem $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$, który wynika z wyliczenia długości wektora powstałego zmianę kąta φ o niewielkie zaburzenie $d\varphi$ oraz kąta θ o niewielkie zaburzenie $d\theta$.

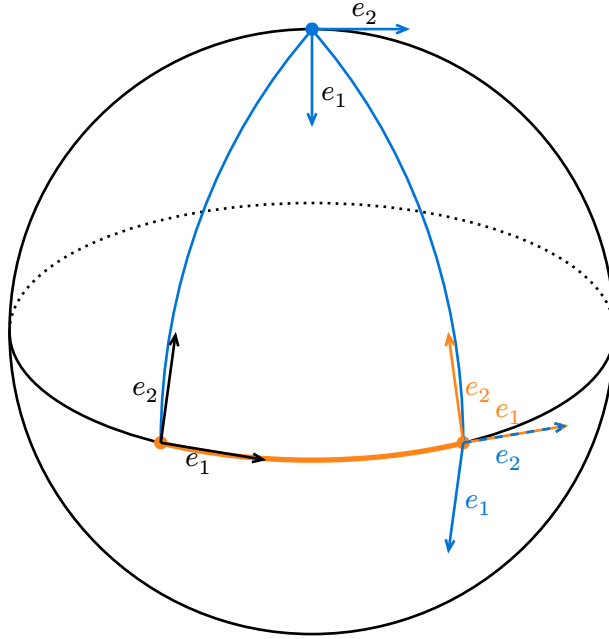
Wiemy już, że pomimo braku przyspieszenia na zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół dziury foton będzie sprawiał wrażenie skręcającego. Chcielibyśmy teraz umieć zrekonstruować jak obserwator w \mathbb{R}^3 widzi trasę fotonu w otoczeniu BH mając tylko początkowe położenie i prędkość cząsteczki.

Równanie geodezyjnej

Ponieważ foton nie przyspiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zataczana przez foton jest **linią geodezyjną**

na rozmaiłości BH. O linii geodezyjnej można myśleć jako o najszybszej ścieżce między dwoma punktami - taką właśnie najmniej pochłaniającą energię drogę wybierają zazwyczaj obiekty fizyczne.

Zauważmy, że patrząc na podróż fotonu, przesuwamy wraz z nim przestrzeń styczną, zawierającą wektor prędkości, po krzywej którą ów foton zatacza. Patrząc znów na prosty przykład na S^2 , przyjrzyjmy się co się dzieje z wektorami stycznymi kiedy przesuwamy je na dwa sposoby między tymi samymi punktami leżącymi na równiku:



Idąc przez północny biegun sfery wektory styczne obracają się i na końcu trasy nie zgadzają się z wektorami, które były przesuwane po równiku. O operacji przesuwania wektorów stycznych wzdłuż krzywej można myśleć jako o składaniu pól wektorowych - przesuwane wektory są jednym polem, a wektor prędkości na krzywej jest drugim polem. W celu uzgodnienia tego, jak przesuwać przestrzeń styczną wzdłuż krzywej, lub bardziej ogólnie jak składać pola wektorowe, potrzebne jest użycie koneksji Levi-Civity.

Koneksja Levi-Civity jest połączeniem afinicznym, który składowe pola wektorowego przenosi na przestrzeń styczną nieskończenie odległą od rozmaiłości. Można o tym myśleć jako o rzutowaniu wektorów stycznych w różnych punktach na daleką kartkę papieru. Dzięki temu możemy porównywać pola wektorowe w dowolnych punktach na rozmaiłości.

Jeśli teraz x_1, \dots, x_n są lokalnymi współzrędnymi na rozmaiłości, a $\partial_1, \dots, \partial_n$ wektorami bazowymi przestrzeni stycznej, to możemy zdefiniować **symbole Christoffela** dla koneksji ∇ względem tego układu współzrędných jako liczby spełniające poniższą równość:

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l.$$

W przypadku czarnej dziury rolę koneksji Levi-Civity będzie spełniać pochona względem czasu właściwego τ . W celu uproszczenia notacji i zadowoleniu zmysłu konformizmu z popularną notacją, dla wektora v będziemy pisać

$$\nabla v = \dot{v}.$$

Niech więc x_i będzie lokalnym układem współrzędnych na BH. Wtedy krzywa γ zadaje gładkie funkcje $t \mapsto x_i(t) = x_i(\gamma(t))$, które dają funkcję $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$. W celu uproszczenia notacji nie będziemy się przejmować faktem, że badamy krzywe na BH. Zamiast tego będziemy od razu pisać $x_i = x_{i(t)}$. Równanie różniczkowe opisujące geodezyjną którą podróżuje foton przedstawia się wtedy jako

$$\ddot{\gamma} = -\Gamma_{i,j}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$$

gdzie $\Gamma_{i,j}^k$ to symbol Christoffela drugiego rodzaju.

Dodatkowo, ponieważ foton jest cząsteczką bez masy, geodezyjna którą on podróżuje jest określana *nullową* geodezyjną i musi spełniać dodatkowy warunek

$$g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

gdzie $g_{\mu,\nu}$ to wartość tensora metrycznego $g(\mu, \nu)$.

Matematyczna podróż do czarnej dziury

W poniższej pracy dokonamy analizy ruchu fotonów w pobliżu czarnej dziury, której promień Schwarzschilda wynosi $r_s = 1$. Aby dodatkowo ułatwić rozważania, przyjmujemy $c = G = 1$ i konsekwentnie $M = \frac{1}{2}$.

Symbole Christoffela

Dla wygody, nie będziemy wyliczać symboli Christoffela wprost. Zamiast tego, skorzystamy z lagrangianu, który spełnia

$$S = \int L d\lambda,$$

gdzie λ jest afiniczną parametryzacją, a S to działanie, czyli w prostym przypadku cząsteczki poruszającej się wzdłuż pojedynczej krzywej jest to suma iloczynu pędu cząsteczki z fragmentem drogi przebytej.

Stosując więc powyższe wiadomości dla przypadku fotonu poruszającego się w metryce Schwarzschilda dostajemy

$$S = \int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\tau} d\tau = \int \frac{\sqrt{d\tau^2}}{d\tau} d\tau = \int \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau = \int L' d\tau.$$

W takim razie jednym z lagrangianów jest $L' = \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$. Ponieważ lagrangian nie jest unikalny, i nałożenie na niego dowolnej funkcji dalej daje lagrangian, to możemy wybrać

$$L = (L')^2 = g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Ułatwi to nam wyliczenia korzystające z drugiego równania lagrangianu, to znaczy:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}.$$

Podstawiając do $d\tau$ metrykę Schwarzschilda dostajemy poniższy układ równań:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\ddot{t} = -\frac{1}{r(r-1)} \dot{r} \dot{t}$$

$$\ddot{r} = -\frac{r-1}{2r^3} \dot{t}^2 + \frac{1}{2r(r-1)} \dot{r}^2 + (r-1) \dot{\theta}^2 + (r-1) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

Zauważmy, że otrzymane wyżej równania to tak naprawdę geodezyjne w metryce Schwarzschilda. Z lewej strony równości można więc z łatwością czytać symbole Christoffela - są to współczynniki przy odpowiednich pochodnych. Ponieważ interesuje nas tylko ruch fotonów po płaszczyźnie $\theta = \frac{\pi}{2}$, to $\dot{\theta} = 0$, $\cos \theta = 0$ i $\sin \theta = 1$.

Chcemy teraz wydobyć \dot{t} oraz $\dot{\varphi}$ - wtedy będziemy wiedzieli jak wyrazić $\frac{\dot{t}}{\dot{\varphi}}$. Wracając do drugiej równości lagrangiana wykorzystanej dla φ oraz t , dostaniemy:

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(2 \frac{r-1}{r} \dot{t} \right) = 0$$

Co znaczy, że

$$r^2 \dot{\varphi} = a \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{a}{r^2}$$

$$\frac{r-1}{r} \dot{t} = \frac{a}{b} \Rightarrow \dot{t} = \frac{ar}{b(r-1)}$$

dla pewnych stałych a, b .

Przekształcając teraz metrykę Schwarzschilda, dostajemy

$$\frac{r-1}{r} = \frac{(r-1)^2}{r^2} \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r(r-1) \dot{\varphi}^2$$

a podstawiając wartości $\dot{\varphi}^2$ i \dot{t}^2 wyliczone wyżej

$$\frac{r-1}{r} = \frac{a^2}{b^2} - \dot{r}^2 - r(r-1) \frac{a^2}{r^2}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{r-1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Aby teraz wyliczyć równanie orbity, chcemy podzielić powyższe równanie przez $\dot{\varphi}^2 = \frac{a}{r^2}$:

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - \frac{(r-1)}{r} \left(\frac{r^4}{a^2} + r^2\right)$$

Trzeba tutaj zaznaczyć, że równanie wyliczone wyżej nie jest jeszcze krzywą geodezyjną po której podróżuje światło - w przypadku wyżej wzięliśmy

$$-1 = g_{\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

zamiast przyrównywać to do zera. Badamy więc chwilowo trasę cząsteczki z masą. Aby przejść do badania fotonu, chcemy aby $a \rightarrow \infty$. Fizycznie wartość ta jest tak naprawdę równa pędowi kątowemu L wydzielonemu przez zredukowaną masę μ , tzn.

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = a = \frac{L}{\mu}$$

a ponieważ zredukowana masa jest zależna od masy fotonu $m_1 = 0$,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

gdzie m_1, m_2 to masy składowe układu dwóch ciał, to dla fotonu $\mu = 0$ i co za tym idzie, $a \rightarrow \infty$.

Równanie orbity

W równaniu orbity wyliczonym w poprzednim rozdziale zastosujemy podstawienie $u = \frac{1}{r}$, wtedy

$$-r^2 \dot{u} = \dot{r}.$$

Po takim podstawieniu równanie orbity to

$$\left(\frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1-u) \left(\frac{1}{a^2} + u^2\right) = \frac{1}{b^2} - (1-u)u^2$$

bo jak wcześniej uzasadniliśmy, $a \rightarrow \infty$.

Rozwiązanie powyższego równania dałoby zależność między r a φ , bo możemy usunąć trzymaną z tyłu głowy informację o τ :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1-u)u^2.$$

Bez trudu wyciągniemy też informację o drugiej pochodnej u :

$$2u'(\varphi)u''(\varphi) = -2u + 3u^2$$

$$u''(\varphi) = -u + \frac{3}{2}u^2 = u\left(\frac{3}{2}u - 1\right),$$

bo $u' = c = 1$ w naszym układzie. Stąd widać, że $u = 0$ oraz

$$\frac{2}{3} = u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

są punktami przegięcia funkcji $u(\varphi)$. Dalej, dla

$$\frac{2}{3} < u = \frac{1}{r} \Rightarrow r < \frac{3}{2}$$

pochodna $u'(\varphi)$ powinna być rosnąca, a dla

$$\frac{2}{3} > u = \frac{1}{r} \Rightarrow r > \frac{3}{2}$$

powinna być malejąca.

Możemy więc obserwować pierwiastki powyższej równości, by sprawdzać, kiedy $r(\varphi)$ jest stałe. Co więcej, możemy również sprawdzić przy jakim położeniu foton zapadnie się w czarną dziurę, a kiedy będzie w stanie uciec z jej pobliża.

Równanie wyżej jest równaniem 3 stopnia o rzeczywistych współczynnikach, ma więc ono 3 pierwiastki, co najmniej jeden rzeczywisty i dwa potencjalnie zespolone, sprzężone ze sobą. Możemy oznaczyć je przez u_1, u_2, u_3 i zapisać

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = \\ &= u^3 - u^2(u_1 + u_2 + u_3) + \\ &+ u(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + \\ &- u_1u_2u_3. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że suma pierwiastków odpowiada wyrazowi przy u^2 w oryginalnym równaniu, natomiast ich iloczyn jest równy wyrazowi wolnemu:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 1 \\ -\frac{1}{b^2} &= u_1u_2u_3 \end{aligned}$$

Z tego wzoru możemy od razu wyliczyć wzór na drugą pochodną

$$\begin{aligned} (u'(\varphi))^2 &= (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \\ u''(\varphi)u'(\varphi) &= \frac{1}{2}[(u - u_2)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_2) + (u - u_1)(u - u_3)] \end{aligned}$$

gdzie możemy sprawdzać jej wartość w punktach ekstremalnych funkcji $u(\varphi)$.

Zacznijmy od przypadku gdy $u_1 < u_2 < u_3$ są wszystkie liczbami rzeczywistymi. Wtedy dla $u_2 < u < u_3$ oraz $u < u_1$ funkcja $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ jest ujemna, co daje zespoloną wartość dla $u'(\varphi)$.

Jeśli teraz u_1 będzie jedynym pierwiastkiem rzeczywistym, a u_2 i u_3 będą sprzężonymi ze sobą pierwiastkami zespolonymi. W takim przypadku jedyny pierwiastek rzeczywisty musi być ujemny, bo wtedy

$$-\frac{1}{b^2} = u_1u_2u_3 = u_1u_2\overline{u_2} = u_1(\operatorname{Re}(u_2)^2 + \operatorname{Im}(u_2)^2)$$

gdzie b^2 oraz $\operatorname{Re}(u_2)^2 + \operatorname{Im}(u_2)^2$ są zawsze dodatnimi wartościami.

W takim razie u_1 będzie orbitą, z której fotony nie zapadają się, ale też nie mają szansy wypaść z okolic czarnej dziury. Z racji tego jak wyglądają czarne dziury, możemy z dużą dozą prawdy stwierdzić, że

$$u_1 > r_s = 1.$$

W takim razie $\text{Re}(u_2) = \text{Re}(u_3) < 0$.

Wyniki symulacji

Metoda numeryczna

Równania różniczkowe opisujące ruch fotonu w pobliżu czarnej dziury zostaną rozwiązane numerycznie przy użyciu metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Kod napisany w języku Python znajduje się w Appendiksie.

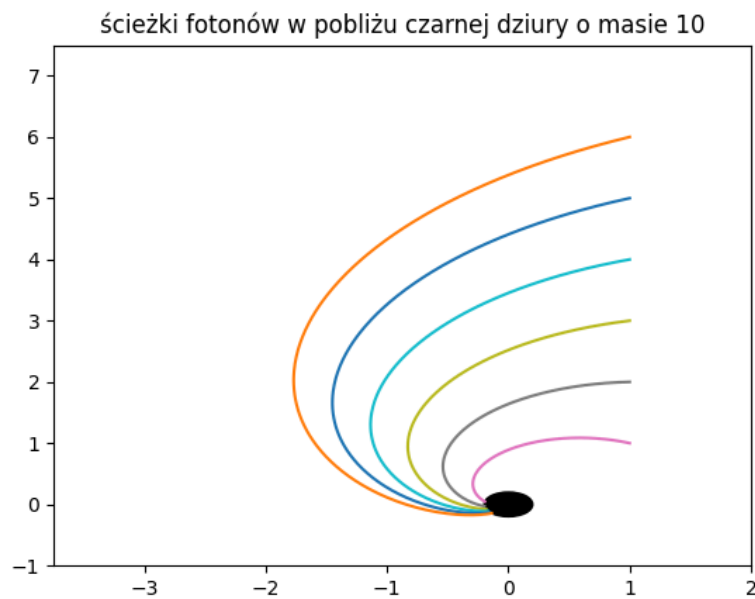


Figure 3: Wizualizacja ścieżek fotonów w pobliżu modelowanej czarnej dziury poruszających się po płaszczyźnie przechodzącej przez równik z zaznaczonym obszarem wewnątrz promienia Schwarzschilda (czarne koło w centrum).

Bibliografia

- [1] EHT Collaboration, “Milky Way Galactic Center”. [Online]. Available: <https://www.eso.org/public/images/eso2208-eh-t-mwa/>
- [2] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer New York, NY, 2013. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [3] J. Branson, “The Schwarzschild Metric”. [Online]. Available: https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html
- [4] J. M. Lee, *Morse Theory*. 1963.
- [5] G. Rowe, [Online]. Available: <http://web.mit.edu/klmitch/classes/8.033/Schwarzschild.pdf>

- [6] G. Rowe, [Online]. Available: <https://physicspages.com/pdf/Relativity/Christoffel%20symbols%20for%20Schwarzschild%20metric.pdf>