# Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzchilda

Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela Weronika Jakimowicz

22.01.2024 / Zespołowy Projekt Specjalnościowy

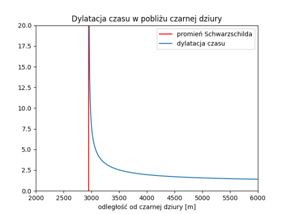
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

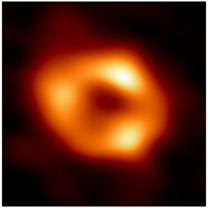
# Spis treści

# Czym są czarne dziury?

# Czarne Dziura Schwarzchilda

- Wyróżniamy cztery rodzaje czarnych dziur:
  - Schwarzchilda
  - Kerra
  - Reissner–Nordströma
  - Kerra–Newmana
- Są to obiekty o nieskończonej gęstości, tak masywne, że zakrzywią czasoprzestrzeń wokół siebie.
- Powstają podczas śmierci gwiazdy w wybuchu supernowej.
- Czarne dziury są inspiracją dla wielu autorów science fiction - *Interstellar*.

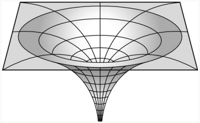


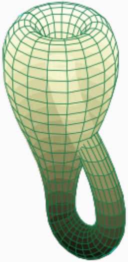



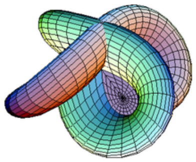
# Czarna Dziura jako rozmaitość Riemannowska

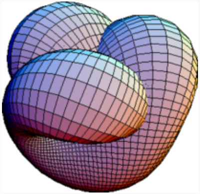
**Rozmaitość** to przestrzeń wraz z rodziną map otwartych $(U_p, \phi_p)$ takich, że $\phi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ pozwala patrzeć na małe otoczenie punktu $p \in U_p$ przez pryzmat $\mathbb{R}^n$.

Schwarzchild opisywał czarną dziurę, modelując przestrzeń wokół niej jako rozmaitość riemannowską (z metryką).









# Metryka Schwarzchilda

Metryka Schwarzchilda jest zdefiniowana na podzbiorze $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$ o sygnaturze $(-, +, +, +)$, który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\frac{r - r_s}{r} \cdot c^2 dt^2 + \left(\frac{r - r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

lub w postaci macierzy:

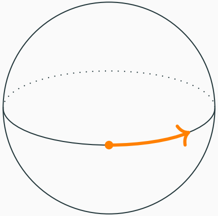
$$g_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1-r_s}{r} \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

# Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach

# Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach

Foton podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury nie przyspiesza, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$.

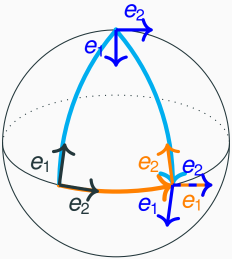
Taka ścieżka między dwoma punktami na rozmaitości z metryką nazywa się **linią geodezyjną**.



**Rysunek 3:** Cząsteczka poruszająca się po sferze $S^2$ - zaznaczona linia na równiku to geodezyjna.

# Koneksja Levi-Civity

Wraz z fotonem przesuwamy przestrzeń styczną, jednak powoduje to pewne problemy.




By uzgodnić, jak przesuwamy wektory styczne wzdłuż krzywej, potrzebujemy konkesji. Najczęściej używana jest koneksja Levi-Civity, definiowana:

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma^l_{jk} \partial_l,$$

gdzie $\Gamma^l_{jk}$ to **symbol Christoffela** drugiego rodzaju.

# Matematyczna podróż do czarnej dziury

# Wyliczenie Symboli Christofela

W pracy wyliczone zostały symbole Christofela przy pomocy tzw. lagrangianu:

$$S = \int L d\lambda$$

oraz równań Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \; .$$

Ważniejsze było jednak otrzymanie równania orbity

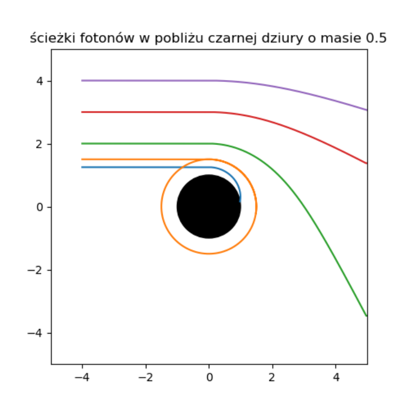
$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + u^3$$

które po zróżniczkowaniu daje

$$u'' = u\left(\frac{3}{2}u - 1\right)$$

# Ścieżki fotonów

Rozwiązując równanie orbity dzięki funkcji `odeint` z biblioteki `scipy` języka Python otrzymujemy:




**Rysunek 4:** Ścieżki fotonów w pobliżu czarnej dziury o masie $M = \frac{1}{2}$ i promieniu Schwarzschilda $r_s = 1$ ($c = 1 = G$) uzyskane przy pomocy języka Python.