

# **Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne**

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

# Contents

- 1. Wstęp ..... 3
- 1.1. Czarne dziury Schwarzschilda ..... 3
- 1.2. Co ma metryka do tensora? ..... 4
- 1.3. Historia o pewnym fotonie ..... 5
- 1.4. Przygotowania ..... 6
- Bibliografia ..... 7

# Wstęp

## Czarne dziury Schwarzschilda

Czarne dziury fascynują i przerażają. Są to obiekty rodem z science fiction - punkt o zerowej objętości i nieskończonej gęstości otoczony tajemniczym horyzontem zdarzeń. Nic dziwnego, że sam Einstein, jak i wielu naukowców, nie mogli uwierzyć w ich istnienie.

Czarne dziury powstają w wybuchu supernowej, kiedy gwiazdzie skończy się paliwo, a reakcje termojądrowe zatrzymają się, grawitacja zgina masę do jednego malutkiego punktu - osobliwości. Jego masa jest tak wielka, że zakrzywia czasoprzestrzeń i spowalnia czas, a linia po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec, nazywamy horyzontem zdarzeń.

Czarne dziury były inspiracją dla wielu autorów gatunku science fiction - w filmie *Interstellar* pojawia się Gargantu - obiekt o masie 100 milionów Słońc. Gdy podróżnicy docierają na planetę orbitującą wokół czarnej dziury mówią, iż czas płynie tu wolniej. Zjawisko możemy potwierdzić patrząc na wykres, pokazujący stosunek czasu płynącego normalnie, do czasu w zakrzywionej czasoprzestrzeni.



Wykres 1: Stosunek upływu czasu własnego do upływu czasu obserwowanego w punkcie nieskończenie odległym od czarnej dziury w zależności od położenia  $r$ .

W maju 2021 roku otrzymaliśmy pierwsze zdjęcie czarnej dziury - jest to supermasywny obiekt w centrum naszej galaktyki Saggitarius A.:

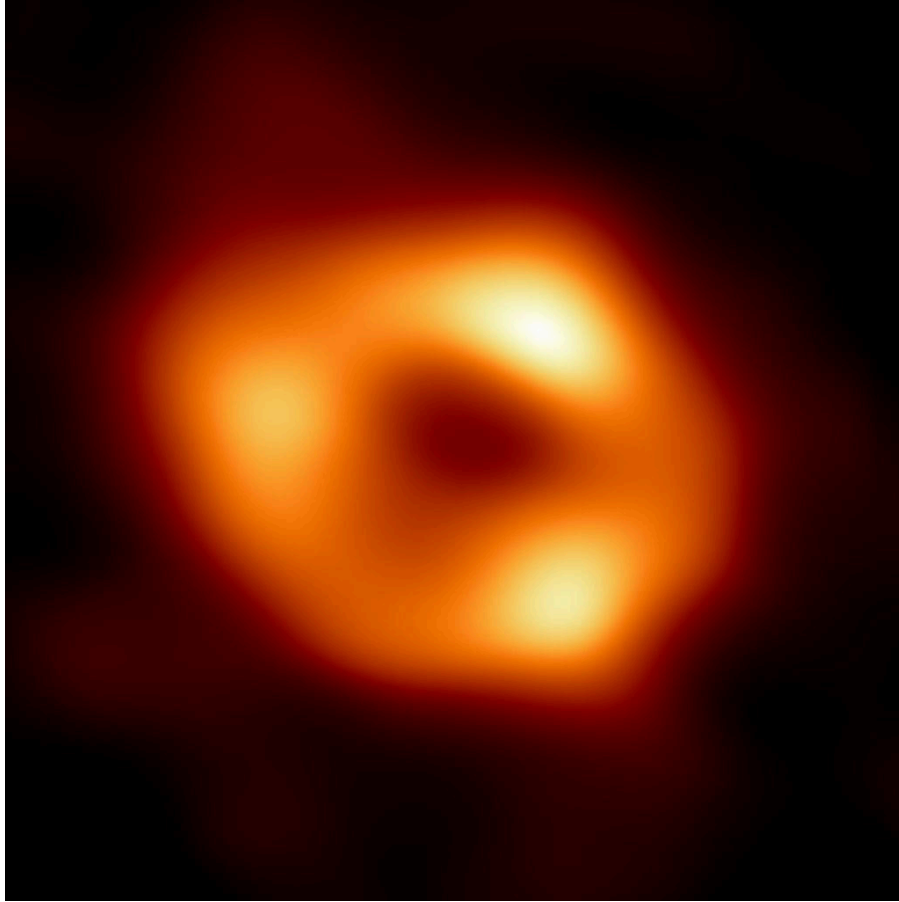


Figura 2: Zdjęcie czarnej dziury w centrum Mlecznej Drogi uzyskane przez [1].

## Co ma metryka do tensora?

Rozmaitości różniczkowalne pozwalają na badanie różnych obiektów matematycznych przez pryzmat przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $M$  jest rozmaitością różniczkowalną z atlasem, czyli rodziną map,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , jeśli

- zbiory  $U_\alpha$  tworzą otwarte pokrycie  $M$
- odwzorowania  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \overline{U_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$  są homeomorfizmami na otwarte podzbiory  $\mathbb{R}^n$ , a liczba  $n$  jest dobrze określona dla  $M$
- dowolne dwie mapy  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  i  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  są **gładko zgodne**, tzn.
  - $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  lub
  - mapy przejścia  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  i  $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$  są gładkimi odwzorowaniami pomiędzy podzbiorami  $\mathbb{R}^n$ .

Dla dowolnego punktu  $p \in M$  mówimy, że  $T_p M$  jest **przestrzenią styczną** w punkcie  $p$ , czyli przestrzenią zawierającą wektory styczne w tym punkcie.  $TM$  to z kolei rozłączna suma po wszystkich przestrzeniach stycznych, którą nazywamy **wiązką styczną**. Bardzo ciekawą własnością przestrzeni stycznych jest ich liniowość [2], tzn. dla każdego  $p \in M$  przestrzeń  $T_p M$  jest przestrzenią wektorową wymiaru  $n$ , a jeśli  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  jest mapą wokół  $p$ , to zbiór

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right\}$$

jest bazą  $T_p M$ .

Liniowość przestrzeni stycznych jest wykorzystywana w celu dodawania rozmaiwościom dodatkową strukturę, mianowicie pozwala na definiowanie na wiązce stycznej  $M$  odpowiednika iloczynu skalarnego, nazywanego **tensorem metrycznym**. Formalnie, tensor metryczny to rodzina dwuliniowych funkcji

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowana w każdym punkcie  $p \in M$ . Każda taka funkcja jest dodatnio określonym iloczynem wewnętrznym na  $T_p M$ , czyli pociąga za sobą normę

$$\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

Tensor metryczny określony na  $TM$  przypisuje więc dwóm wektorom  $X_p, Y_p$  zaczepionym w punkcie  $p$  rozmaiwości  $M$  wartość

$$g(X_p, Y_p) := g_p(X_p, Y_p).$$

Warto zaznaczyć, że mając bazę dualną  $\{d\varphi^i\}$  do  $\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right\}$ , tensor metryczny możemy zapisać jako

$$g = \sum_{i,j \leq n} g_{i,j} d\varphi^i \otimes d\varphi^j$$

gdzie  $g_{i,j}$  to wyraz macierzy  $g$  zdefiniowanej jako odwzorowanie dwuliniowe wyżej odpowiadający ilorazowi skalarnemu  $i$ -tego i  $j$ -tego wektora bazowego.

W niniejszej pracy zajmujemy się tensorem metrycznym Schwarzschilda zdefiniowanym na rozmaiwości  $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$  o znakach  $(-, +, +, +)$ , który jest standardowo zapisywany jako

$$g = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix},$$

gdzie  $r_s$  to promień Schwarzschilda, a  $c$  oznacza prędkość światła [3].

## Historia o pewnym fotonie

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury pozostaje równe 0.

Oznaczmy przez BH rozmaiłość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

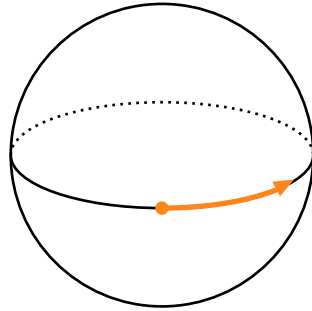
$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow \text{BH}$$

gdzie  $I$  jest pewnym odcinkiem. Wiemy, że  $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ , czyli wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.

Niestety, metryka zadana na BH mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze  $S^2$ . Wówczas pomimo, że foton nie przyspiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia:



To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny, czy raczej tensorowy, na badanej przez nas przestrzeni od produktu skalarnego w przestrzeni euklidesowej. Nie jest trudno zauważyć, że tensor metryczny na jednostkowej sferze  $S^2$  przedstawia się macierzą

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

lub równoważnie wzorem  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ , który wynika z wyliczenia długości wektora powstałego przez zmianę kąta  $\varphi$  o  $d\varphi$  oraz kąta  $\theta$  o  $d\theta$ .

Wiemy już, że pomimo braku przyspieszenia na zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół dziury foton będzie sprawiał wrażenie skręcającego. Chcielibyśmy teraz umieć zrekonstruować jak obserwator w  $\mathbb{R}^3$  widzi trasę fotonu w otoczeniu BH mając tylko początkowe położenie i prędkość cząsteczki.

## Przygotowania

Ponieważ foton nie przyspiesza podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero, to mówimy, że trasa zataczana przez foton jest **linią geodezyjną** na rozmaitości BH. Jeśli więc  $x_i$  będzie lokalnym układem współrzędnych na BH, to krzywa  $\gamma$  zadaje gładkie funkcje  $t \mapsto x_i(t) = x_i(\gamma(t))$ . Wówczas równanie różniczkowe opisującą geodezyjną przedstawia się jako

$$\Gamma_{i,j}^k(x_1(t), \dots, x_4(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

gdzie  $\Gamma_{i,j}^k$  to symbol Christoffela drugiego rodzaju wyznaczony za pomocą koneksji Levi-Cevity. W szczególności interesuje nas fakt, że  $i$ -ta współrzędna wektora prędkości fotonu wyraża się jako

$$\gamma^{i(t)} = -\Gamma_{m,j}^i \frac{dx^m}{dx} \gamma^{j(t)}.$$

Symbole Christoffela użyte w obliczeniach zostały zaczerpnięte z [4].

Ponieważ foton w naszym przypadku porusza się po płaszczyźnie przechodzącej przez równik, to  $x^3 = \theta = \frac{\pi}{2}$  jest funkcją stałą. Interesują nas więc tylko wartości zmiany  $\varphi = x^4$  oraz  $r = x^2$  w czasie, czyli

$$\varphi' = -\left(\frac{1}{r}r'\varphi + \frac{1}{r}\varphi'r\right) = -\left(\frac{\varphi}{r}r' + \varphi'\right)$$
$$r' = -\left(\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)t - \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}r'r\right)$$

## Bibliografia

- [1] EHT Collaboration, “Milky Way Galactic Center”. [Online]. Available: <https://www.eso.org/public/images/eso2208-eh-t-mwa/>
- [2] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer New York, NY, 2013. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [3] J. Branson, “The Schwarzschild Metric”. [Online]. Available: [https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b\\_notes/node75.html](https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html)
- [4] G. Rowe, [Online]. Available: <https://physicspages.com/pdf/Relativity/Christoffel%20symbols%20for%20Schwarzschild%20metric.pdf>
- [5] J. M. Lee, *Morse Theory*. 1963.