Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzchilda

Rozwiązania analityczne i numeryczne

Aleksandra Niedziela   Weronika Jakimowicz
22.01.2024 / Zespołowy Projekt Specjalnościowy

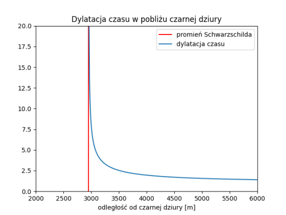
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

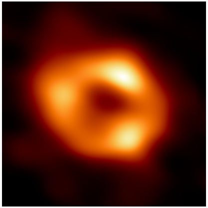
Spis treści

Spis treści

Czarne Dziura Schwarzchilda

- Wyróżniamy cztery rodzaje czarnych dziur:
  - Schwarzchilda
  - Kerra
  - Reissner–Nordströma
  - Kerra–Newmana
- Są to obiekty o nieskończonej gęstości, tak masywne, że zakrzywią czasoprzestrzeń wokół siebie.
- Powstają podczas śmierci gwiazdy w wybuchu supernowej.
- Czarne dziury są inspiracją dla wielu autorów science fiction - *Interstellar*.

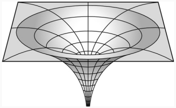


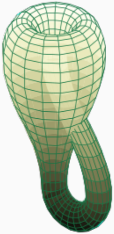


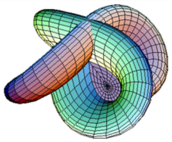
Czarna Dziura jako rozmaitość Riemannowska

Rozmaitość to pojęcie matematyczne opisujące przestrzeń M, która wokół każdego punktu $p \in M$ posiada otwarte otoczenie U_p, które przypomina pewien podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Schwarzchild opisywał czarną dziurę, modelując przestrzeń wokół niej jako rozmaitość różniczkowalną z tensorem metrycznym, czyli rozmaitość Riemannowską.







Metryka Schwarzchilda

Metryka Schwarzchilda jest zdefiniowana na podzbiorze $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$ o sygnaturze $(-, +, +, +)$, który jest standardowo zapisywany jako

$$g = c^2 d\tau^2 = -\frac{r - r_s}{r} \cdot c^2 dt^2 + \left(\frac{r - r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

lub w postaci macierzy:

$$g_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1-r_s}{r} \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix},$$

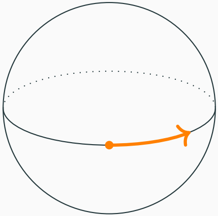
Spis treści

Proste ścieżki na zakrzywionych powierzchniach

Foton podróżując po przestrzeni wokół czarnej dziury nie przyspiesza, tzn. druga pochodna krzywej opisującej jego trasę jest stale równa zero.

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

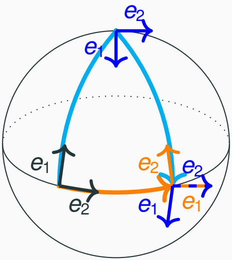
Cząstka będzie szukać najszybszej (najkrótszej) drogi między dwoima punktami - takiej która pochłonid najmniej energii. Na rozmaitości nazywamy ją **linią geodezyją**



Rysunek 2: Cząsteczka poruszająca się po sferze S^2.

Koneksja Levi-Civity

Wraz z fotonem przesuwamy przestrzeń styczną, jednak powoduje to pewne problemy.



By uzgodnić jak będziemy przesuwać przestrzeń styczną wzdłóż krzywej potrzebne jest użycie koneksji Levi-Civity, dla której definiujemy **symbole Christofela** jako liczby, spełniające równanie:

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma^l_{jk} \partial_l.$$

Spis treści

Zamiast liczyć symbole Christofela wprost z definicji możemy skorzystać z lagrangianu:

$$S = \int L d\lambda$$

Dla metryki Schwarzchilda mamy:

$$S = \int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\tau} d\tau = \int \frac{\sqrt{d\tau^2}}{d\tau} d\tau = \int \sqrt{g_{\mu,\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}} d\tau = \int L' d\tau.$$

Korzystamy również z równań Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x^\mu}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \ .$$

Otrzymujemy układ równań:

$$
\begin{aligned}
\ddot{t} &= -\frac{1}{r(r-1)}\dot{r}\dot{t} \\
\ddot{r} &= -\frac{r-1}{2r^3}\dot{t}^2 + \frac{1}{2r(r-1)}\dot{r}^2 + (r-1)\dot{\theta}^2 + (r-1)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \\
\ddot{\theta} &= \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} \\
\ddot{\phi} &= -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} - 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\phi}\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

Wyliczenie Symboli Christofela c.d

Z których wyliczmamy symbole Christofela:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{t}_{t,r} &= \frac{1}{2r(r-1)} \\
\Gamma^{r}_{t,t} &= \frac{r-1}{2r^3} \\
\Gamma^{r}_{r,r} &= -\frac{1}{2r(r-1)} \\
\Gamma^{r}_{\phi,\phi} &= -(r-1) \\
\Gamma^{\phi}_{r,\phi} &= \frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

Równanie orbity

Korzystamy jeszcze raz z równań Eulera-Langrange'a, dostajemy

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(2\frac{r-1}{r}\dot{t}\right) = 0$$

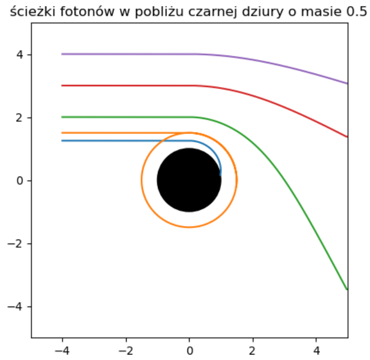
Dzięki temu możemy wyliczyć równanie orbity:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + u^3 \tag{1}$$

$$u'' = u\left(\frac{3}{2}u - 1\right) \tag{2}$$

Ścieżki fotonów

Rozwiązując równanie orbity dzięki funkcji `odeint` z biblioteki `scipy` języka Python otrzymujemy:



Rysunek 3: Ścieżki fotonów w pobliżu czarnej dziury o masie $M = \frac{1}{2}$ i promieniu Schwarzschilda $r_s = 1$ ($c = 1 = G$) uzyskane przy pomocy języka Python.