

# **Modelowanie horyzontów zdarzeń czarnych dziur przy użyciu metryki Schwarzschilda: Rozwiązania analityczne i numeryczne**

Aleksandra Niedziela

Weronika Jakimowicz

# Contents

- 1. Wstęp ..... 3
- 1.1. O rozmaitościach różniczkowalnych ..... 3
- 1.2. Czarne dziury Schwarzschilda ..... 3
- 1.3. Historia o pewnym fotonie ..... 3

# Wstęp

## O rozmaitościach różniczkowalnych

### Czarne dziury Schwarzschilda

#### Historia o pewnym fotonie

Foton poruszający się w przestrzeni kosmicznej nie jest pod wpływem zewnętrznych sił. Jest cząsteczką, na której prędkość nie wpływają zewnętrzne (ani wewnętrzne) siły, więc jego przyspieszenie przez całą podróż przez czasoprzestrzeń wokół badanej czarnej dziury Schwarzschilda pozostaje równe 0.

Oznaczmy przez  $BH$  rozmaitość opisującą czasoprzestrzeń wokół rozważanej czarnej dziury Schwarzschilda, która zazwyczaj ma postać

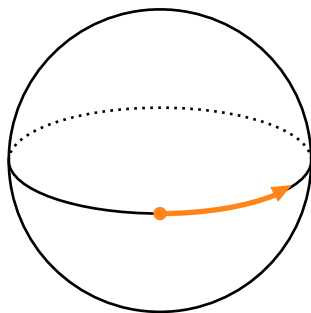
$$BH = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times S^2$$

Wówczas podróż fotonu jest opisywana przez krzywą

$$\gamma : I \rightarrow BH$$

gdzie  $I$  jest pewnym odcinkiem. Wiemy, że  $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ , czyli wydaje się, iż dostajemy proste równania różniczkowe opisujące zachowanie funkcji czterowymiarowej.

Niestety, metryka zadana na  $BH$  mówi nam, że przestrzeń wokół czarnej dziury nie jest do końca taka jak przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Jest ona nieco zakrzywiona i to właśnie to zakrzywienie czasoprzestrzeni będzie wpływać na obserwowane przez nas zakrzywienie trasy fotonu. Aby zrozumieć to lepiej, wyobraźmy sobie, że foton porusza się wzdłuż równika na sferze  $S^2$ . Wówczas pomimo, że foton nie przyspiesza w rozumieniu jego podróży po bardzo zagiętej przestrzeni, to dla obserwatora z zewnątrz jego prędkość cały czas się zmienia:



To zjawisko jest też wyrażone w tym jak różny jest produkt skalarny, czy raczej tensorowy, na badanej przez nas przestrzeni. Nie jest trudno zauważyć, że tensor metryczny na jednostkowej sferze  $S^2$  przedstawia się macierzą

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

lub równoważnie wzorem  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ , który wynika z wyliczenia długości wektora powstałego przez zmianę kąta  $\varphi$  o  $d\varphi$  oraz kąta  $\theta$  o  $d\theta$ .

Wiemy już, że pomimo braku przyśpieszenia na zakrzywionej czasoprzestrzeni wokół dziury foton będzie sprawiał wrażenie skręcającego. Chcielibyśmy teraz umieć zrekonstruować jak wygląda jego trasa w  $\mathbb{R}^3$  mając tylko jego początkowe położenie i wektor prędkości w tamtym momencie.