1. Find (by "drawing" pictures representing graphs) all pariwise non-isomorphic graphs of order 4.

2. For a graph G, define a relation $\approx$ on $V(G)$ by saying $v \approx w$ if and only if there exists a path in G with endpoints v and w. Show that $\approx$ is an equivalence relation – that is, show that $(\forall u \in G)(u \approx ua)$, thath $(\forall u, v \in G)(u \approx v \implies v \approx u)$, and that $(\forall u, v, w \in G)([u \approx v \wedge v \approx w] \implies u \approx w)$.

3. Given a graph G, define its *complement* $\overline{G}$ as a graph with vertices $V(\overline{G}) = V(G)$, such that given $v, w \in V(G)$ with $v \neq w$, we have $vw \in E(\overline{G})$ if and only if $vw \notin E(G)$.
a. Show thath if $G \simeq \overline{G}$, then $|G| \equiv 0$ or 1 (mod 4).
b. Show thath for any graph G, either G or $\overline{G}$ is connected.

4. Show that any graph of order at least 2 has two vertices of the same degree.

5. a. Show that every connected graph G contains a vertex $v \in G$ such that $G - \{v\}$ is connected.
[*Hing: pick* v *so thath some connected component of* $G - \{v\}$ *is as big as possible*]
b. A connected graph with at least one vertex is called a *tree* if it has no cycles. Show that every tree with ≥ 2 vertices has a vertex of degree 1 (such a vertex is called a *leaf*)
c. Deduce that if T is a tree then $e(T) = |T| - 1$
d. Let G be a graph with $|G| = n$. We say that a tuple $(d_G(v_1), \ldots, d_G(v_n))$, where $\{v_1, \ldots, v_n\} = V(G)$, is a *degree sequence* of G. Show that a given tuple $(d_1, \ldots, d_n)$ of integers, where $n \geq 2$, is a degree sequence of a tree iff $d_i \geq 1$ for all i and $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

6. Let $G = (V, E)$ be a graph. Show that there exists a partition $V = A \sqcup B$ such that all vertices of $G[A]$ and of $G[B]$ have even degree.

7. Suppose G is a graph that has no induced cycles of odd legth – thath is, for any $A \subseteq V(G)$, the graph $G[A]$ is not a cycle of odd length. Show that G is bipartite.

1. Znajdz (rysujac obrazki reprezentujace grafy) wszystkie parami nieizomorficzne grafy stopnia 4.

2. Dla grafu G definiujemy relacje $\approx$ na $V(G)$ mowiac, ze $v \approx w$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sciezka w G z koncami v oraz w. Pokaz, ze $\approx$ jest relacja rownowaznosci – ze spelnia ...

3. Majac dany graf G, definiujemy jego *dopelnienie* $\overline{G}$ jako graf z wierzcholkami $V(\overline{G}) = V(G)$, taki, ze dla danych $v, w \in V(G)$, $w \neq v$, mamy $vw \in E(\overline{G})$ wtw $vw \notin E(G)$
a. Pokaz, ze jezeli $G \simeq \overline{G}$, to $|G| \equiv 0$ lub 1 (mod 4).
b. Pokaz, ze dla dowolnego grafu G albo G albo $\overline{G}$ jest spojny.

4. Pokaz, ze dowolny graf o stopniu co najmniej 2 ma dwa wierzcholki o tym samym stopniu.

5. a. Pokaz, ze kazdy spojny graf G posiada wierzcholek $v \in G$ taki, ze $G - \{v\}$ jest spojny.
[*cenzura* <3]
b. Spojny graf z co najmniej jednym wierzcholkiem jest nazywany *drzewem* jezeli nie ma cykli. Pokaz, ze kazde drzewo z ≥ 2 wierzcholkami ma wierzcholek stopnia 1 (taki wierzcholek nazywa sie *lisciem*).
c. Wydedukuj, ze jezeli T jest drzewem, wtedy $e(T) = |T| - 1$
d. Niech G bedzie grafem z $|G| = n$. Mowimy, ze krotka $(d_G(v_1), \ldots, d_G(v_n))$, gdzie $\{v_1, \ldots, v_n\} = V(G)$, jest *ze jest to sekwencja wierzcholkow ze sie ich stopnie nie zwiekszaja, sry nie znam nazwy i nie chce mi sie szukac wiecej niz na wikipedii, buzi* grafu G. Pokaz, ze majac krotke $(d_1, \ldots, d_n)$ liczb calkowitych, gdzie $n \geq 2$, jest *ta wlasnie seria* w drzewie wtw $d_i \geq 1$ dla wszystkich i oraz $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

6. Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem. Pokaz, ze istnieje podzialy $V = A \sqcup B$ takie, ze wszystkie wierzcholki $G[A]$ i $G[B]$ maja parzyste stopnie

7. Zaloz, ze G jest grafem nie majacych *induced cycle (takze chordless cycle) to taki cykl, ze nie ma takich brudaskow ktore lacza wierzcholki w cyklu, ale do cyklu nie naleza* nieparzystej dlugosci, tzn dla dowolnego $A \subseteq V(G)$, graf $G[A]$ nie ma cykli o nieparzystej dlugosci. Pokaz, ze G jest dwudzielne.

8. Let G be a regular bipartite graph with vertex classes W and M. Show that G contains a matching from W to M.

9. Let $n \geq m \geq 1$. An $m \times n$ *Latin rectangle* is an $m \times n$ matrix with entries in $[n]$ such that each $i \in [n]$ appears exactly once in each row and at most once in each column. Show that any $m \times n$ Latin rectangle forms the first m rows of any $n \times n$ Latin rectangle.

10. Let G be an infinite bipartite graph with (infinite) vertex classes W and M, and suppose that $|N_G(A)| \geq |A|$ for every $A \subseteq W$.
a. Show, by constructing an example, that such a graph G does not need to contain a matching from W to M
b. Suppose that W is countable and $d_G(w) < \infty$ for all $w \in W$. Show that in this case G does contain a matching from W to M.

8. Niech G bedzie regularnym dwudzielnym grafem z klasami wierzcholkow W i M. Pokaz, ze G zawiera laczenie z W do M.

9. Niech $n \geq m \geq 1$. $m \times n$ *uposledzony trojkat magiczny* to macierz $m \times n$ z elementami w $[n]$ takimi, ze kazde $i \in [n]$ wystepuje dokladnie jeden raz w kazdym wierszu i dokladnie raz w kazdej kolumnie. Pokaz, ze dowolny $m \times n$ prostokacik tworzy pierwsze m wierszy prostokacika $n \times n$.

10. Niech G bedzie nieskonczonym dwudzielnym grafem z (nieskonczonymi) klasami wierzcholkow W i M i zaloz, ze $|N_G(A)| \geq |A|$ dla kazdego $A \subseteq W$.
a. Pokaz, poprzez konstrukcje przykladu, ze taki graf G nie koniecznie musi zawierac polaczenia z W do M
b. Zaloz, ze W jest przeliczalne i $d_G(w) < \infty$ dla kazdego $w \in W$. Pokaz, ze w takim wypadku G nie zawiera polaczenia z W do M.