Analiza funkcjonalna

by a weles

21.03.2137

Contents

1 Wstep

1.1 Przestrzenie normalne

Norma na X to funkcja $x \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ taka, ze

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $(\forall\ \lambda \in \mathbb{C})(\forall\ x \in X)\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ – *jednorodnosc*
- $(\forall\, x, y \in X)\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Przestrzen metryczna jest zupelna, jesli kazdy ciag Cauchy'ego jest zbiezny.

Przestrzen Banacha – unormowana przestrzen zupelna w metryce $d(x, y) = \|x - y\|$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbiezny, jesli szereg sum czesciowych jest zbiezny.

Szereg jest bezwzglednie zbiezny, jesli zbiezny jest $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

Przestrzen jest unormowana $\iff$ kazdy szereg bezwzglednie zbiezny jest zbiezny.

Normy $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_2$ sa rownowazne, jesli istnieja $c_1, c_2 > 0$ takie, ze

$$(\forall\, x)\ c_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2.$$

- Jesli zbieznosc ciagow w dwoch normach jest rownowazna, to sa one rownowazne.

- Przestrzenie $\mathbb{C}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ sa zupelne w dowolnej normie.
- Przestrzen unormowana skonczona jest zawsze zupelna.

Twierdzenie o najlepszej aproksymacji – dla skonczonej podprzestrzeni liniowej E przestrzeni unormowanej X zachodzi:

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, x_0 \in E)\ \|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Podzbior $A \subseteq X$ jest zbiorem gestym, jezeli $(\forall\, x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, a \in A)\ d(x, a) < \varepsilon$

Przestrzen jest osrodkowa, gdy posiada przeliczalny zbior gesty.

Kazda przestrzen unormowana mozna uzupelnic do przestrzeni Banacha.

Niech $Y \subseteq X$ bedzie domkniety, wtedy

$$(\forall\, 0 < \theta < 1)(\exists\, x \in X)\ \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \geq \theta$$

Niech X – unormowana, skonczona przestrzen liniowa, wtedy

$$(\exists\, (x_n) \subseteq X)(\forall\, n \neq m)\ \|x_n\| = 1 \ \wedge\ \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

Baza nieskonczonej przestrzeni Banacha jest nieprzeliczalna.

1.2 Operatory

Operator liniowy $T : X \to Y$ to odwzorowanie

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx$$

Dodatkowo, jesli

$$(\exists\, C > 0)\ \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

to wtedy T jest ograniczone.

Dla operatora liniowego pomiedzy X i Y, ktore sa przestrzeniami unormowanymi rownowazne sa:

- T jest ciale w jednym punkcie
- T jest ciagle w kazdym punkcie
- T jest ograniczone

Norma operatora ograniczonego T to

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$$\|t\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|$$

Niech X_0 bedzie gesta podprzestrzenia normalnej przestrzeni X, $T_0 : X_0 \to Y$, gdzie Y jest przes. Banacha, bedzie operatorem ograniczonym. Wtedy istnieje jednoznaczne rozszerzenie T_0 do $T: X \to Y$.

Rownosc Plancherela????

Ograniczony operator T”X $\to$ Y, gdzie X, Y sa unormowane, jest odwracalny, jesli istnieje ograniczony operator $S: Y \to X$ taki, ze

$$STx = x = TSx$$

Unormowane przestrzenie X, Y sa izomorficzne, jesli istnieje ograniczony i odwracalny operator liniowy $X \to Y$.

Jesli Y jest przestrzenia Banacha, a X jest unormowany, to B(X, Y) (macierze deg(Y) $\times$ deg(X)) jest przestrzenia Banacha.