MDM Lista 3

Weronika Jakimowicz

ZAD 1.

JEDYNOSC O CO CHODZI

Poprawność wzoru

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

pokażę przez indukcję.

Dla $n = 2$

$$f(2) = \sum_{k=1}^{2} \lceil \log_2 k \rceil = 1$$

$$2 - 1 + f(1) + f(1) = 1 + 0 + 0 = 1 = f(2)$$

czyli się zgadza.

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla pierwszych n wyrazów. Pokażemy, że wówczas zachodzi również dla wyrazu $n+1$. Rozważmy dwa przypadki:

I. $2 | n+1$, wtedy możemy zapisać $n+1 = 2k+2$ oraz $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
f(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n+1 \rceil &\overset{\text{ind}}{=} \\
&\overset{\text{ind}}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n+1 \rceil = \\
&= n - 1 + f(k+1) + f(k) + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k+1 \rceil = \\
&= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil = \\
&= (n+1) - 1 + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)
\end{aligned}$$

II. $2 \nmid n+1$, czyli, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, mamy $n+1 = 2k+1$ i $n = 2k$. Zauważmy, że wtedy $\lceil \log_2 n+1 \rceil = \lceil \log_2 n+2 \rceil$.

$$\begin{aligned}
f(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n+1 \rceil &\overset{\text{ind}}{=} \\
&\overset{\text{ind}}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n+1 \rceil = \\
&= n - 1 + f(k) + f(k) + \lceil \log_2 2k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k+1 \rceil =
\end{aligned}$$

$$= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil =$$
$$= (n+1) - 1 + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$$

ZAD 2.

ZAD 3.

I. istnienie takiego zapisu:

Dla $n = 1$ mamy

$$1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot F_2.$$

Załóżmy, że jest to prawdą również dla wszystkich liczb naturalnych do n włącznie. Niech wtedy k będzie największą liczbą naturalną taką, że

$$F_k \leq n.$$

Jeżeli $n = F_k$, to zapis jest oczywisty. W przeciwnym wypadku, liczba $m = n - F_k$ jest liczbą naturalną mniejszą niż n, a więc z założenia indukcyjnego możemy ją zapisać tak jak w poleceniu.