Zadania z ⋆⋆ LISTA 7

Weronika Jakimowicz

32 października 2022

ZAD 1.

1. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ:

Aby funkcja wieloarguemntowa o wartościach wektorowych była różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), granica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$$

musi zmieżać do 0. To znaczy, że funkcję F możemy bardzo dobrze przybliżyć za pomocą przekształcenia liniowego T w okolicy punktu (x_0, y_0). Ponieważ operujemy na przekształceniu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, to T będzie miało macierz 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i po wymnożeniu z dowolnym (x, y) będzie dawało wynik

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Aby taka operacja dawała wynik zbliżający się do (x_0, y_0) dla punktów w jego pobliżu, to a musi być małą zmianą w pierwszej współrzędem względem x, a b małą zmianą w pierwszej współrzędnej względem y, analogicznie dla c i d. Czyli T jest Jakobianem. W takim razie, żeby sprawdzić czy badana przez nas funkcja jest zbieżna, wystarczy sprawdzić, czy dla dowolnego punktu (x_0, y_0) poniższa funkcja zmieża do 0 dla $(x, y) \to (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = \\ &= \frac{\| \begin{pmatrix} x + f(y) \\ y + f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 + f(y_0) \\ y_0 + f(x_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x - x_0 + (y-y_0)f'(y_0) \\ (x-x_0)f'(x_0) + y - y_0 \end{pmatrix} \|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = \\ &= \frac{\| \begin{pmatrix} f(y) - f(y_0) - (y-y_0)f'(y_0) \\ f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0) \end{pmatrix} \|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = \\ &= \Big[\frac{(f(y) - f(y_0) - (y-y_0)f'(y_0))^2 + (f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0))^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Po pierwsze zauważmy, że podana funkcja ma wartości nieujemne, więc jeśli jest ciągła, to musi zmieżać do wartości nieujemnej. Po drugie, zauważy, że

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq \Big[\frac{(f(y) - f(y_0) - (y-y_0)f'(y_0))^2}{(y-y_0)^2} + \frac{(f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0))^2}{(x-x_0)^2}\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \Big|\frac{f(y) - f(y_0) - (y-y_0)f'(y_0)}{(y-y_0)}\Big| + \Big|\frac{f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)}{(x-x_0)}\Big| \end{aligned}$$

Widzimy, że funkcja o nieujemnych wartościach jest ograniczona od góry przez funkcję o wartościach nieujemnych dążącą do 0 (ponieważ f jest klasy C1), więc i funkcja $G(x, y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$.

2. RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ:

Żeby funkcja była różnowartościowa, musi być odwracalna w każdym punkcie swojej dziedziny. To znaczy, że pierwsza pochodna nie może nigdy się zerowa. Przyjżyjmy się Jakobianowi funkcji F

$$\begin{bmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

Jego wyznacznik to

$$1 - f'(x)f'(y)$$

a ponieważ

$$(\forall\ a \in \mathbb{R})\ |f'(a)| < 1,$$

to również

$$|f'(x)f'(y)| < 1,$$

co daje nam

$$1 - f'(x)f'(y) > 0,$$

a więc badana funkcja jest odwracalna w każdym punkcie dziedziny. To znaczy, że jest różnowartościowa.

3. NA:

Jeśli funkcja jest "na", to nie może być ściśle wklęsła ani ściśle wypukła. Czyli wyznacznik jej Hesjana musi być 0.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}1 & \frac{d}{dx}f'(y) \\ \frac{d}{dy}f'(x) & \frac{d}{dy}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wyznacznik jest stale równy zero, więc mamy funkcje która nie jest ani wypukła ani wklęsła, więc przechodzi całą przeciwdziedzinę.

ZAD 2.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$m < n$$

Jakobian w tym wypadku to macierz o m wierszach i n kolumnach. Z kursu algebry liniowej wiemy, że rząd takiej macierzy to co najwyżej m. Jest tak, bo układ n wektorów (kolumny) z przestrzeni m wymiarowej, gdzie $m < n$ może mieć co najwyżej m wektorów niezależnych liniowo.

Załóżmy, nie wprost, że f jest przekształceniem jednoznacznym, to znaczy bijekcją. Wtedy, jeżeli będziemy rozważać f obcięte do $W \leq \mathbb{R}^n$ rozpiętych przez pewne m wektorów bazowych, to takie obcięcie f nadal będzie bijecką.

Rozważmy wszystkie takie podprzestrznie W, które są rozpinane między innymi przez pewien wektor bazowy e. Dobieramy do niego $m - 1$ wektorów na

$$\binom{n}{m-1} \geq \binom{m+1}{m-1} = \frac{(m+1)m}{m}$$

sposobów, co dla $m \geq 2$ jest równe co najmniej $m + 1$.

Teraz, jeżeli dla punktu odpowiadającemu wektorowi e policzymy Jakobian dla każdej z tych $M \geq m+1$ macierzy, to zauważmy, że ponieważ jesteśmy w przekształceniu między przestrzeniami o wymiarze m, to mamy tylko m wektorów liniowo niezależnych. Czyli w pewnej macierzy Jakobiego wartości pochodnych w tym punkcie będą odpowiadały wektorom liniowo zależnym, czyli wyznacznik będzie zerowy. W takim razie, dla tej podprzestrzeni w której to się dzieje, obcięcie f nie jest 1-1, czyli również całe przekształcenie nie może być różnowartościowe. W takim razie nie jest bijecką i dochodzimy do sprzeczności.

Załóżmy, że f jest przekształceniem jednoznaczym, to znaczy bijekcją. Wtedy, jeżeli będziemy rozważać f obcięte do $W \leq \mathbb{R}^n$ rozpiętych przez pewne m wektorów bazowych, to takie obcięcie f nadal będzie bijekcją. Wybrać wektory, na których rozpięta będzie popdrzestrzeń W możemy na

$$\binom{n}{m} \geq \binom{m+1}{m} = m+1.$$

Dalej zauważmy, że każde takie obcięcie jest przekształceniem między przestrzeniami o stopniu m, czyli macierz Jakobiego będzie kwadratowa (możemy obliczyć wyznacznik). Mamy co najmniej $m+1$ takich macierzy i dla każdego punktu co najwyżej m liniowo niezależnych wektorów odpowiadających wartościom pochodnych cząstkowych w tym punkcie, które możemy wpisać w te macierze. Czyli w jednej z tych macierzy na pewno będziemy mieli wektory liniowo zależne. To znaczy, że wyznacznik się zeruje, a więc takie obcięcie f do $W \leq \mathbb{R}^n$ nie jest 1-1. W takim razie również całe przekształcenie nie mozę być 1-1, a więc w szczególności nie jest bijekcją.

$$\frac{(m+1)!}{(m-1)!2!} = \frac{(m+1)m}{2}$$