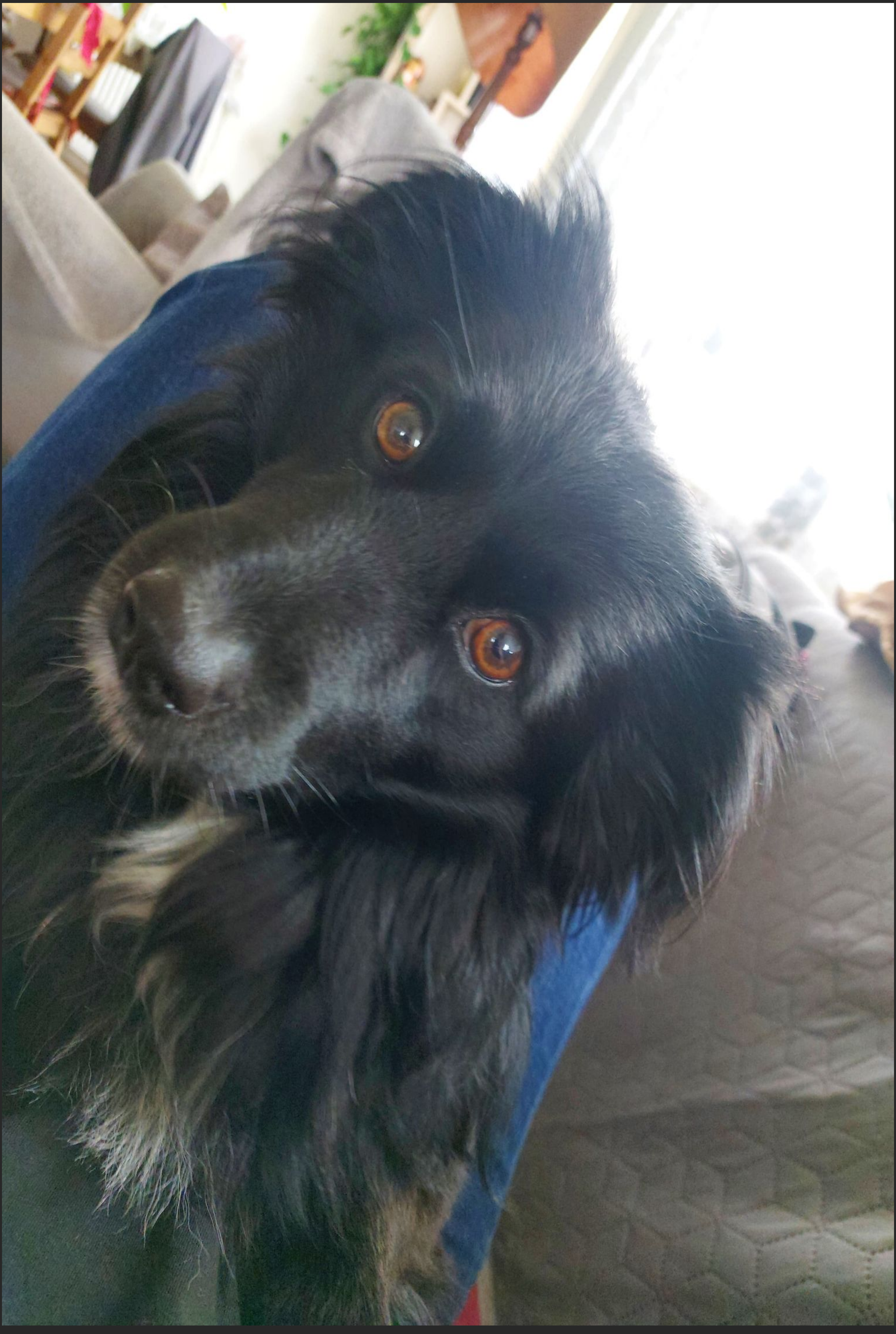
Miara i calka

by a plebanek fangirl :>

21.03.2137



1 Zbiory

1.1 Rodziny

Pierscien zbiorow to rodzina $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ taka, ze

- $\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{R}$
- $\hookrightarrow A, B \in \mathscr{R} \implies A \cup B, A \setminus B \in \mathscr{R}$

Cialo zbiorow to pierscien zbiorow, dla ktorego $X \in \mathscr{R}$

σ-pierscien zbiorow to rodzina $\mathscr{R}$ ktora jest pierscieniem zamknietym na przeliczalne sumy. Z tego wynika, ze

$$A_n \in \mathscr{R} \implies \lim_{n\to\infty} \sup A_n, \lim_{n\to\infty} \inf A_n \in \mathscr{R}$$

σ-cialo zbiorow to σ-pierscien do ktorego nalezy X

Niech $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ bedzie rodzina zbiorow, wowczas

- $\hookrightarrow r(\mathscr{F})$ – pierscien generowany przez rodzine $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow s(\mathscr{F})$ – σ-pierscien generowany przez rodzine $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow a(\mathscr{F})$ – cialo generowane przez $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow \sigma(\mathscr{F})$ – σ-cialo generowane przez $\mathscr{F}$

σ-cialo zbiorow borelowskich(*) [Bor($\mathbb{R}$)] – najmniejsze cialo zawierajace rodzine wszystkich otwartych podzbiorow $\mathbb{R}$

(*) zbior borelowski – dowolny zbior otwarty (domkniety) uzyskany przez sume/przekroj/dopelnienie przeliczalnie wielu zbiorow otwartych (domknietych)

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Jesli $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, to $\lim A_n = A$.

1.2 Funkcyje

Funkcja zbioru – dla ustalonej rodziny $\mathscr{R}$ funkcja postaci $f : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$

Addytywna funkcja zbioru (miara skonczenie addytywna) – dla $\mathscr{R}$ bedacego pierscieniem zbiorow to funkcja $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ spelniajaca:

- $\hookrightarrow \mu(\emptyset) = 0$
- $\hookrightarrow A, B \in \mathscr{R} \land A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru μ – jesli dla dowolnego R i A_n takich, ze $(\forall\, i, j)\ A_i \cap A_j = \emptyset$ oraz $R = \bigcup_n A_n$ zachodzi wzor

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

Warunek rownowazny: jest ciagla z dolu, czyli dla $A_n \uparrow A$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
Jesli zbiory A_n nie sa rozlaczne, to

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Dla addytywnej funkcji zbioru $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ ponizsze sa rownowazne:

- $\hookrightarrow \mu$ jest przeliczalnie addytywna
- $\hookrightarrow \mu$ jest ciagla z dolu:
  $A_n \downarrow A \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- $\hookrightarrow \mu$ jest ciagla z gory na zbiorze $\emptyset$:
  $A_n \downarrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$

1.3 Miara Lebesgue'a

Niech $\mathscr{R}$ bedzie peirscieniem na $\mathbb{R}$ generowanym przez zbiory postaci $[a, b)$, wowczas funkcje $\lambda : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ dla zbioru $R = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, $(\forall\, i, j)\ [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$, $a_i < b_i$ definiujemy

$$\lambda(R) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$ (☕)

Funckja ta jest przeliczalnie addytywna na pierscieniu przedzialow

Miara Lebesgue'a to standardowy sposob przypisywania miary podzbiorom przestrzeni n-wymiarowej, gdzie λ odpowiada $n = 1$ (dla $n = 2$ liczymy pole, a dla $n = 3$ – objetosc).

Niech $[a_n, b_n)$ bedzie dowolnym ciagiem takim, ze $(\forall\, i, j)\ [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$, $[a_i, b_i) \subseteq [a, b)$, wtedy

$$\sum_n (b_n - a_n) \leq b - a$$

Jesli $[a_n, b_n)$ jest dowolnym ciagiem przedzialow takim, ze $[a, b) \subseteq \bigcup_n [a_n, b_n)$ to

$$b - a \leq \sum_n (b_n - a_n)$$

1.4 Konstrukcja miary