

Ujebanko przez kolanko

maruda

69

ZAD. 1.

Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste} \\ \frac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

W tym zadaniu skorzystamy z własności wielomianów Czebyszewa:

$$T_n(\cos t) = \cos(nt)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x) dx &= \int_{\pi}^{2\pi} T_n(\cos t) \sin t dt = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) \sin t dt = \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin(n-1)t}{n-1} \right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \frac{\cos(2\pi) \cos(2n\pi) - \cos(\pi) \cos(n\pi)}{n^2 - 1} = \frac{\cos(2n\pi) + \cos(n\pi)}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

Ponieważ $\cos(2\pi) = 1$ oraz okres \cos to 2π , wiemy, że dla każdego n jest $\cos(2n\pi) = 1$. Wiemy, że $\cos(\pi) = -1$, czyli dla nieparzystych $n = 2k + 1$ mamy

$$\cos(n\pi) = \cos((2k + 1)\pi) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$$

natomiast dla parzystych n jest jak dla $\cos(2n\pi) = 1$.

ZAD. 2.

Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ stosując kwadraturę Newtona-Cotesa, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, gdzie $h := \frac{b-a}{n}$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k).$$

Wykazać, że

$$A_k^{(n)} = h(-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt$$

Niech będzie

$$B_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{b-a}.$$

Sprawdzić, że

- \hookrightarrow wielkości $B_k^{(n)}$ są liczbami wymiernymi
- $\hookrightarrow B_k^{(n)} = B_{n-k}^{(n)}$

Z jednej notatki ze SKOSa wiemy, że w kwadraturze interpolacyjnej jest

$$A_k^{(n)} = \int_a^b p(x) \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx$$

oraz, że dla kwadratury Newtona-Cotesa $p \equiv 1$. Czyli

$$\begin{aligned} A_k^{(n)} &= \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - (a + jh)}{a + kh - a - jh} dx = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - a - jh}{(k - j)h} dx = \\ &= \int_a^b \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - a - jh}{(k - j)h} \right] \left[\prod_{j=k+1}^n \frac{x - a - jh}{(k - j)h} \right] dx = \int_a^b \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - a - jh}{k!} \right] (-1)^{n-k} \left[\prod_{j=k+1}^n \frac{x - a - jh}{(n - k)!} \right] dx = \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n - k)!} \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - a - jh) dx = \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n - k)!} \int_a^b \prod_{j=0, j \neq k}^n \left[\frac{nx - na}{b - a} - j \right] dx = \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n - k)!} \left[t = \frac{nx - na}{b - a} \right] dt = \\ &= \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n - k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

(a) I mean, to jest dość oczywiste

$$B_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{b - a} = \frac{n}{h} \cdot \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n - k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n - k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt$$

Początek jest jasne, że należy do wymiernych. Problem jest z całką, ale to co całkujemy to jest wielomian o współczynnikach wymiernych na przedziale o początku i końcu wymiernym, czyli wartość tej całki też będzie wymierna.

(b)

$$B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n - k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt =$$

$$B_{n-k} = \frac{(-1)^k}{n \cdot k!(n - k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq n-k}^n (t - j) dt$$

Czyli ogólnie to potrzebuję

$$(-1)^{n-k} \int_0^n \prod_{j \neq k} (t - j) dt = (-1)^k \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (t - j) dt$$

$$\begin{aligned} B_k &= (-1)^k \int_0^n \prod_{j \neq k} (t - j) dt = (-1)^k \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (t - n + j) dt = \left[\begin{matrix} p = n - t \\ -dp = dt \end{matrix} \right] = (-1)^k (-1) \int_n^0 \prod_{j \neq n-k} (j - p) dp = \\ &= (-1)^k \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (j - p) dp = (-1)^k (-1)^n \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (p - j) dp = (-1)^{n+k} \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (p - j) dp = \\ &= (-1)^{n-k} \int_0^n \prod_{j \neq n-k} (p - j) dp = B_{n-k} \end{aligned}$$

ZAD. 3.

Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n B_k^{(n)} = 1.$$

Rozważmy funkcję f stale równą zero na przedziale od 0 do 1. Wtedy

$$1 = Q_n^{NC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)}$$

i jeśli podzielimy to przez długość naszego przedziału, to otrzymujemy

$$\frac{1}{1-0} = 1 = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^{(n)}}{1-0} = \sum_{k=0}^n B_k^{(n)}$$

ZAD. 6.

Niech $f \in C^4[a, b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ za pomocą wzoru Simpsona, czyli kwadraturę Newtona-Cotesa dla $n = 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\varepsilon \in [a, b]$ dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{90}h^5$$

Strona 139-140 Fichtenholz część druga.

ZAD. 8.

Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)dx$ gdy $n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a + (k+1)h) + f(a + kh)}{2} h = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h)h + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)h \rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$$

ZAD. 9.

$$T_n(f) = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(a+nh)]$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a+kh}^{a+(2k+2)h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a + (2k+2)h - (a+2kh)}{6} [f(a+2kh) + 4f(a+2kh+h) + f(a+(2k+2)h)] = \\ &= \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 3f(a+4h) + \dots + 4f(a+(n-1)h) + f(a+nh)] = \\ &= \frac{h}{3} [2f(a) + 4f(a+h) + 4f(a+2h) + \dots - f(a) - 2f(a+2h) - 2f(a+4h) - \dots - f(a+nh)] = \\ &= \frac{1}{3} [4T_n(f) - T_{\frac{n}{2}}(f)] \end{aligned}$$