ANALIZA III - LISTA 2

1. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu i określić czy jest to minimum lub maksimum.
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum, ewentualnie lokalne minimum, lokalne maksimum. $f(x,y) = x^{10} + y^{10}$, przy warunku $x + y = 2$

3*. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum. $f(x_1, ..., x_n) = x_1^p + ... + x_n^p$, przy warunku $x_1 + ... + x_n = a > 0, x_i \geq 0$

4*. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum, ewentualnie lokalne minimum, lokalne maksimum. $f(x,y) = x + y$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5*. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$ w kole jednostkowym, tzn. w zbiorze $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = xy - y^2$ w kole jednostkowym, tzn. w zbiorze $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7*. Pudełko w kształcie prostopadłościanu otwarte od góry ma powierzchnię $16m^2$. Znaleźć wymiary, przy których objętość jest największa. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje największą objętość. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów i co się dzieje, gdy jeden z wymiarów dąży do nieskończoności.

8. Poczta w USA wymaga, aby wymiary paczki były takie, że suma długości, podwojonej szerokości i podwojonej wysokości nie przekraczała 108 cali. Jaka jest objętość największej objętościowo paczki jaką poczta może dostarczyć? Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje największą objętość. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów.

9*. Niech n będzie liczbą naturalną całkowitą. Znajdź n liczb, których suma wynosi 8n, a suma kwadratów jest tak mała jak to możliwe. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje najmniejszą sumę kwadratów. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów i co się dzieje w nieskończoności.

10. W trapezie równoramiennym suma mniejszej podstawy i dwóch ramion wynosi $3r$. Pokaż, że trapez o największym polu ma podstawę równą r raz kąt pomiędzy podstawą i ramieniem wynosi $2\pi/3$.

11*. W koło o promieniu r wpisać prostokąt o największej powierzchni. W kulę o promieniu r wpisać prostopadłościan o najwiekszej objętości.

12. Znaleźć wymiary puszki o największej objętości przy ustalonej powierzchni całkowitej. To samo dla puszki bez wieczka.