

# MDM Lista 7

Weronika Jakimowicz

## ZMIANY:

- ↪ Zadanie 1. - suma
- ↪ Zadanie 2. - krótkie uzasadnienie interpretacji  $F_n$
- ↪ Zadanie 14.b. - krótkie uzasadnienie

## ZAD. 1.

Niech  $k$  będzie liczbą pionków do rozłożenia. Jeśli  $k > n$ , to wtedy co najmniej dwa muszą być w jednej kolumnie, a więc jeden nie będzie na lewo od drugiego. W takim razie musi być  $k \leq n$ .

Ułożmy najpierw  $k$  pionków na planszy  $k \times k$  tak, żeby w każdej parze jeden był na lewo i niżej niż drugi. Takie ułożenie jest jedno, to znaczy pionki muszą stać na przekątnej od lewego dolnego rogu do prawego górnego.

Jeśli ustawimy najpierw  $k$  pionków na planszy  $k \times k$ . Utożsamimy kolumny zawierające pionki z liczbą 1, natomiast kolumny puste z liczbą 0. Wtedy sposobów żeby ustawić  $n - k$  jedynek w ciąg  $n$  elementowy mamy  $\binom{n}{n-k}$ . Analogiczna sytuacja zachodzi dla wierszy, a ogólna ilość rozwiązań to

$$\binom{n}{n-k}^2,$$

gdyż łączymy każde ustawienie kolumn z każdym ustawieniem wierszy.

Sumując teraz po wszystkich możliwych wartościach  $k$  dostajemy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

## ZAD. 2.

Liczba Fibonaciego  $F_n$  odpowiada na pytanie, ile jest ciągów składających się tylko z 1 i 2 sumujących się do  $(n-1)$ . Wynika to z tego, że ciąg sumujący się do  $(n+1)$  możemy uzyskać dodając do dowolnego ciągu sumującego się do  $n$  jedynek na końcu. Możemy też dodać dwójkę do dowolnego ciągu sumującego się do  $(n-2)$ . Czyli ilość ciągów długości  $(n+1)$  to  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ . Popatrzmy teraz na sumę z zadania:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i}.$$

Pierwszy wyraz,  $\binom{n-1}{0}$  to liczba ciągów składających się tylko z 1 sumujących się do  $(n-1)$ . Drugi wyraz,  $\binom{n-2}{1}$  skraca ciąg  $(n-1)$  jedynek o jeden i wybiera jedną z pozostałych  $(n-2)$  jedynek która zostanie zamieniona na 2. W ten sposób dostajemy ilość ciągów sumujących się do  $(n-1)$  zawierających tylko jedną liczbę 2. Tak więc dla  $k$ -tego wyrazu sumy usuwamy  $k$  jedynek, a z pozostałych na  $k$  sposobów wybieramy te, które zostaną zastąpione przez 2  $\binom{n-1-k}{k}$ .

Teza:

$$F_{m+2n} = \sum_{i=0}^n i = 0^n \binom{n}{i} F_{i+m}$$

Niech  $x_n = \begin{pmatrix} F_{m+1+n} \\ F_{n+m} \end{pmatrix}$  oraz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Zauważmy, że

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$$

czyli

$$A^{2n} = (A^2)^n = (A + I)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i$$

Mnożąc obie strony przez  $x_0 = \begin{pmatrix} F_{m+1} \\ F_m \end{pmatrix}$  otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} F_{m+2n+1} \\ F_{m+2n} \end{pmatrix} = x_{2n} = A^{2n} x_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i x_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \begin{pmatrix} F_{m+i+1} \\ F_{m+i} \end{pmatrix}$$

i przyrównując drugie współrzędne otrzymujemy:

$$F_{m+2} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{m+i}$$

### ZAD. 3.

Sposobów na ułożenie  $2n$  skarpet (czyli  $n$  par) jest  $(2n)!$ . Jednak zazwyczaj skarpety z jednej pary są nierozróżnialne, więc nie ma znaczenia które będzie pierwsza. W każdej parze mamy 2 sposoby na wybranie która skarpeta jest pierwsza, mamy  $n$  par więc ogółem tych sposobów jest  $2^n$ . Czyli ogółem sposobów na ułożenie  $n$  par skarpet jest

$$\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Zastanówmy się teraz, ile jest sposobów na ułożenie  $n$  par skarpet tak, żeby określone  $k$  par było obok siebie. Zwijając  $k$  par skarpet razem zmniejszamy liczbę elementów o  $k$ , czyli teraz mamy  $(2n - k)$  rozróżnialnych skarpet. Rozłożyć niezwiązane  $(2n - 2k)$  skarpet tak, żeby skarpety z jednej pary nie były obok siebie można na  $\frac{(2n-2k)!}{2^{n-2k}}$  sposobów. Mamy teraz ciąg  $(2n - 2k)$  ustawionych skarpet w który chcemy włożyć  $k$  dodatkowych elementów. Całość będzie się sumować do  $(2n - k)$ , więc z  $(2n - k)$  możemy wybrać które  $k$  miejsc wybierzemy na  $\binom{2n-k}{k}$  sposobów. Czyli  $k$  par skarpet zmuszamy do bycia razem podczas gdy pozostałe są rozdzielone na

$$\frac{(2n - 2k)!}{2^{n-2k}} \binom{2n - k}{k}$$

sposobów.

Teraz, z zasady włączeń i wyłączeń, dostajemy szukaną odpowiedź w postaci:

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2n - 2k)!}{2^{n-2k}} \binom{2n - k}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n - k}{k} \frac{(2n - 2k)!}{2^{n-k}}$$

### ZAD. 4.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{cases}$$

Rozważmy ciąg geometryczny:  $x_n = q^n$ , wtedy

$$\begin{aligned} q^n &= \frac{1}{2}(q^{n-1} + q^{n-2}) \\ q^2 &= \frac{1}{2}(q + 1) \end{aligned}$$

Czyli  $x_n = q^n$  dla  $q$  będących zerami wielomianu

$$\begin{aligned} w(x) &= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16} \\ x - \frac{1}{4} &= \pm \frac{3}{4} \\ x &= 1 \vee x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Czyli ciąg  $x_n$  rozwiązuje

$$x_n = c_1 1^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Dla dwóch pierwszych wyrazów daje to

$$\begin{cases} x_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ x_1 = 0 = c_1 - \frac{c_2}{2} \end{cases}$$

czyli  $c_2 = \frac{2}{3}$  oraz  $c_1 = \frac{1}{3}$  a postać jawna ciągu to

$$x_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^{-n}$$

## ZAD. 14.

(a)  $a_n = n^2$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

(b)  $a_n = n^3$  Z poprzedniego podpunktu mamy

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

jeśli więc obie strony zróżniczkujemy, to dostaniemy

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^{n-1}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$$

(c)  $a_n = \binom{n+k}{k}$ , dla ułatwienia zmieniam ten zapis na  $a(n, k) = \binom{n+k}{k}$

Dla  $k = 0$  mamy  $a(n, 0) = 1$  oraz

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Teza: dla dowolnego  $k$  mamy

$$f_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Założmy, że dla pierwszych  $k$  działa. Teraz sprawdzimy jak to wygląda dla  $k+1$ .

$$a(n, k+1) = \binom{n+k+1}{k+1} = \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} = \frac{(n+k+1)(n+k)\dots(n+1)}{(k+1)!}$$

Dalej mamy

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)(n+k)\dots(n+1)}{(k+1)!} x^n = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1)a(n, k)x^n = \\ &= \frac{1}{k+1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)a(n, k)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(n, k)x^n \right] = \\ &= \frac{1}{k+1} \left[ \frac{k(1-x) + (k+1)x}{(1-x)^{k+2}} + \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{k+1} \left[ \frac{k(1-x) + (k+1)x + (1-x)}{(1-x)^{k+2}} \right] = \frac{1}{k+1} \frac{(k+1)(1-x+x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{1}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

## ZAD 15.

(a)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots = \\&= \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Niech  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n-1} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n} &= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

Dalej, niech  $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . Wtedy

$$\begin{aligned}h'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \\h(x) &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{|x+1|}{|x-1|} \right]\end{aligned}$$

Podstawiając te funkcje za odpowiednie składniki  $f(x)$  dostajemy

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \log \left[ \frac{|x+1|}{|x-1|} \right]$$

(b)

Po pierwsze, zauważmy, że

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{n-1} + \frac{1}{n} \right] x^n = \\&= x \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\end{aligned}$$

Rozważmy funkcję  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ . Wtedy

$$\begin{aligned}h(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\h'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \\h(x) &= \int \frac{dx}{1-x} = -\log |1-x|\end{aligned}$$

co daje

$$\begin{aligned}f(x) &= xh(x) - \log |1-x| \\f(x) &= \frac{\log |1-x|}{x-1}\end{aligned}$$