Teoria grafów

by a fish

21.03.2137

Contents

1 Structural properties **4**
1.1 Basic definitions . . . 4
1.2 Hall's Marriage Theorem . . . 5
1.3 Menger's Theorem . . . 9
1.4 Menger's Theorem (so edgy) . . . 11

2 External problems **13**
2.1 Complete subgraphs . . . 13
2.2 Complete bipartite subgraphs . . . 15
2.3 Arbitrary subgraphs . . . 16

3 Ramsey Theory **19**
3.1 Ramsey theorem . . . 19
3.2 Ramsey but no restrictions on colorzzz . . . 19

1 Structural properties

1.1 Basic definitions

Graph - an ordered pair $G = (V, E)$:
$\hookrightarrow$ vertices $:= V$ [singular: *vertex*]
$\hookrightarrow$ edges $:= E$, $\{v, w\} := vw$

For an edge vw, $v \neq w$ we say that v, w are its endpoints and that it is incident to v (or w).

Dla krawedzi vw, $v \neq w$ mowimy, ze v, w sa jej koncami i ze jest krawedzia padajaca na v (lub w).

Graphs G and H are isomorfic ($G \simeq H$) if there exists $f : V(G) \xrightarrow{1-1}$ on$V(H)$ such that
$(\forall\ v, w \in V(G))\ vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$
Meaning that edges are like an operation on a group of vertices

G is a subgraph of H $[G \leq H]$ if $V(G) \subseteq V(H)$ and $E(G) \subseteq E(H)$.

If G is H-free if it is has no subgraphs isomorfphic to H.

Grafy G i G sa izomorficzne, jezeli istnieje $f : V(G) \xrightarrow[1-1]{na} V(H)$ takie, ze
$(\forall\ v, w \in V(G))\ vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$

G jest podgrafem H $[G \leq H]$ jezeli $V(G) \subseteq V(H)$ oraz $E(G) \subseteq E(H)$.

G jest H-free (wolny od H?), jezeli nie ma podgrafow izomorficznych z H.

A cycle of length $n \geq 3$ $[C_n]$ is a graph with vertices

$$V(C_n) = [n]$$

and edges:

$$E(C_n) = \{i(i+1)\ :\ i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

A path of length $n-1$ $[P_{n-1}]$ is a graph with vertices

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

and edges

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1)\ :\ 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Cykl dlugosci $n \geq 3$ $[C_n]$ to graf z wierzcholkami

$$V(C_n) = [n]$$

i krawiedziami:

$$E(C_n) = \{i(i+1)\ :\ i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

Sciezka dlugosci $n-1$ $[P_{n-1}]$ to graf z wierzcholkami

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

i krawedziami

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1)\ :\ 1 \leq i \leq n-1\}.$$

An induced by $A \subseteq V(G)$ subgraph of G is
$G[A] = (A, E_A)$

A connected component of G is a subgraph $G[W] \leq G$ where $W \subseteq V$ is an equivalence class under $\approx$ given by

$$v \approx w \iff \text{exists a path } v \ldots w \text{ in } G$$

A graph is connected if $v \approx w$ for every $v, w \in V$ (G has at most one connected component).

If v is a vertex in graph G, we say that its neighbourhood is $N_G(v) = \{w \in G\ :\ vw \in E(G)\}$. Furthermore, the degree of v is $|N_G(v)|$.

If $A \subseteq V$, then $N(A) := \bigcup_{v \in A} N(v)$.

We define:

- $\hookrightarrow$ minimal degree $\delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$
- $\hookrightarrow$ maximal degree $\Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$
- $\hookrightarrow$ average degree $d(G) = \frac{\sum d(v)}{|G|}$.

If there exists an $r \geq 0$ such that

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(G) = r$$

then we say that the graph is r-regular or, more generally, it is regular for some r.

Handshaking Lemma: for any graph G we have $e(G) = \frac{1}{2}\sum d(v) = \frac{|G|}{2} d(G)$

1.2 Hall's Marriage Theorem

Graph G is bipartite with vertex classes U and W if $V = U \cup W$ so that every edge has form uw for some $u \in U$ and $w \in W$.

G is bipartite iff it has no cycles of odd length.

Graf G jest dwudzielny z klasami wierzcholkow U i W, jesli $V = U \cup W$ takimi, ze kazda krawedz jest formy uw dla pewnych $u \in U$ oraz $w \in W$.

G jest dwudzielny wtw kiedy nie ma cykli o nieparzystej dlugosci.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

$\Longrightarrow$

Let U, W be the vertex classes and $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ be a cycle in G. WLG suppose that $v_1 \in U$. Then $v_2 \in W$ etc. Specifically we have $v_i \in U$ if i is odd and $v_i \in W$ if i is even. Then, we have $v_n v_i$, so n must be even.

$\Longleftarrow$

Suppose G has no cycles of odd length. WLOG, assume that $V(G) \neq \emptyset$ and that G is connected, because G will be bipartite if all its connected components are bipartite. Fix $v \in G$ and for all other $w \in G$ define distance dist(v, w) as the smallest $n \geq 0$ such that there exists a path v...w in G of length n.

Now, let $V_n := \{w \in G \ : \ \mathrm{dist}(v, w) = n\}$ and set

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$
$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

We want to show that there are no edges in G of the form $v'v''$ where $v', v'' \in U$ or $v', v'' \in W$.

Suppose that $v'v'' \in E(G)$ with $v' \in V_m, v'' \in V_n$ and $m \leq n$. Then, we have a path

$$v \dots v'v'' \in G$$

of length $m + 1$, implying that

$$n \in \{m, m + 1\}.$$

Supose that $n = m$. Let $v'_0 v'_1 \dots v'_m$ and $v''_0 v''_1 \dots v''_m$ be paths in G with $v = v'_0 = v''_0$, $v' = v'_m$ and $v'' = v''_m$. Note that $v'_i, v''_i \in V_i$ for $0 \leq i \leq m$. Let $k \geq 0$ be largest such that

$$v'_k = v''_k$$

and note that $k \leq m - 1$ as $v' \neq v''$. Then

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

is a cycle of odd length, which is a contradiction.

Therefore, we can only have $n = m + 1$ and then exactly one of n, m is even meaning that exactly one of v' and v'' is in U as required for G to be bipartite.

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Niech U, W beda klasami wierzcholkow oraz niech $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ niech bedzie cyklem w G. BSO zalozmy, ze $v_1 \in U$. W takim razie, $v_2 \in W$ etc. W szczegolnosci, mamy $v_i \in U$ jezeli i jest nieparzyste oraz $v_i \in W$ jezeli i jest parzyste. W takim razie, skoro $v_n v_1$, to n musi byc parzyste.

$\Longleftarrow$

Zalozmy, ze G nie ma cykli o nieparzystej dlugosci. BSO zalozmy, ze $V(G) \neq \emptyset$ i ze G jest spojny, poniewaz G bedzie dwudzielny, wtw gdy wszystkie jego skladowe spojne (????) beda dwudzielne. Ustalmy $v \in G$ i dla kazdego innego $w \in G$ zdefiniujmy dystans $\mathrm{dist}(v, w)$ jako najmniejsze $n \geq 0$ takie, ze istnieje sciezka $v \ldots w$ w G o dlugosci n.

Niech $V_n := \{w \in G \ : \ \mathrm{dist}(v, w) = n\}$ i zbiory

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \ldots$$
$$V = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \ldots$$

Chcemy pokazac, ze nie istnieja w G krawedzie postaci $v'v''$, gdzie $v', v'' \in U$ lub $v', v'' \in W$.

Zalozmy, ze $v'v'' \in E(G)$ z $v' \in V_m, v'' \in V_n$ oraz $m \leq n$. Wtedy istnieje sciezka

$$v \ldots v'v'' \in G$$

dlugosci $m + 1$, co implikuje, ze

$$n \in \{m, m + 1\}.$$

Zalozmy, ze $n = m$. Niech $v'_0 v'_1 \ldots v'_m$ oraz $v''_0 v''_1 \ldots v''_m$ sa sciezkami w G takimi, ze $v = v'_0 v''_0$, $v' = v'_m$ oraz $v'' = v''_m$. Zauwazmy, ze $v'_i, v''_i \in V_i$ dla $0 \leq i \leq m$. Niech $k \geq 0$ bedzie najwiksze takie, ze

$$v'_k = v''_k$$

i zauwazmy, ze $k \leq m - 1$ poniewaz $v' \neq v''$. Wtedy

$$v'_k v'_{k+1} \ldots v'_m v''_m v''_{m-1} \ldots v''_k$$

jest cyklem o nieparzystej dlugosci, co daje nam sprzecznosc.

W takim raize, mozemy miec tylko $n = m + 1$ i wtedy dokladnie jedno z n, m moze byc parzystem, co daje nam dokladnie jedno z v' i v'' w U tak, jak jest wymagane zeby to byl graf dwudzielny.

If G is a bipartite graph with $V = W \cup M$ and $W' \subseteq W$, a partial matching in G from W' to M is

$$\{wv_w \ : \ w \in W'\} \subseteq E(G)$$

for some $v_w \in M$ such that $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. A partial matching from W to M is called a matching.

Sufficient condition:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (☕)$$

for every $A \subseteq W$

. . . .

A bipartite graf G contains a matching from W to M iff (G, W) satisfies Hall's condition (☕).

Jesli G jest grafem dwudzielnym z $V = W \cup M$ oraz $W' \subseteq W$, wtedy czesciowe skojarzenie w G z W' do M to

$$\{wv_w \ : \ w \in W'\} \subseteq E(G)$$

dla pewnych $v_w \in M$ takich, ze $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. Czesciowe kojarzenie z W do M jest nazywane kojarzeniem.

Wystarczajacy warunek:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (☕)$$

dla kazdego $A \subseteq W$

. . . .

Dwudzielny graf G zawiera kojarzeniem iff gdy (G, W) zadowala warunek Halla (☕).

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

$\Longrightarrow$

Trivial.

$\Longleftarrow$

Using induction on $|W|$. For $|W| = 0, 1$ it is trivial.

We gonna break it into parts: $|N(A)| > |A|$ and $|N(A)| = |A|$

Suppose that $|N(A)| > |A|$ for every non-empty subset $A \subsetneq W$. Take any $w \in W$ and $v \in N(w)$ and construct a new graph

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

For any non-empty $B \subseteq W - \{w\}$ we have

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

and therefore

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|$$

and so $(G_0, W - \{w\})$ satisfies Hall's condition. From induction we have a matching P in G_0 from $W - \{w\}$ to $M - \{v\}$ and so $P \cup \{wv\}$ is a matching from W to M.

Now, suppose that $|N(A) = |A|$ for some non-empty subset $A \subsetneq W$. Let

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

and

$$g_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

We will show that both those graphs satisfy Hall's condition.
Let us take any $B \subseteq A$ in G_1. We have

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

and so graph G_1 satisfies Hall's condition.
Now, let us take any $B \subseteq W - A$ in G_2. We know that $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$ so

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

Therefore, graph G_2 also satisfies Hall's condition.
Using inductive hypothesis, we have that there exists a matching P_1 in G_1 and a matching P_2 in G_2. The first one is from A to $N_G(A)$ while the second is from $W - A$ to $M - N_G(A)$, so they are disjoint. Therefore, $P_1 \cup P_2$ is a matching in G from W to M.

[ ]

$\Longrightarrow$

Trywialne.

$\Longleftarrow$

Uzyjemy indukcji na $|W|$. Dla $|W| = 0, 1$ jest trywialne.

Podzielimy dowod na dwie czesci: $|N(A)| > |A|$ oraz $|N(A)| = |A|$.

Zalozmy, że $|N(A)| > |A|$ dla kazdego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Wezmy dowolne $w \in W$ oraz $v \in N(w)$ i skonstruujmy nowy graf

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

Dla kazdego niepustego $B \subseteq W - \{w\}$ mamy

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

i w takim razie

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|,$$

czyli $(G_0, W - \{w\})$ spelnia warunek Halla. Z zalozenia indukcyjnego istnieje kojarzenie P w G_0 z $W - \{w\}$ do $M - \{v\}$, w takim razie $P \cup \{wv\}$ jest kojarzeniem z W do M.

Zalozmy teraz, ze $|N(A) = A|$ dla pewnego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Niech

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

oraz

$$g_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

Pokazemy, ze oba te grafy zaspokajaja warunek Halla.
Wezmy dowolny $B \subseteq A$ w G_1. Mamy

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

a wiec graf G_1 zaspokaja warunek Halla.
Teraz, wezmy dowolny $B \subseteq W - A$ w G_2. Wiemy, ze $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$, a wiec

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

W takim razie G_2 spelnia warunek Halla.

Z zalozenia indukcyjnego wiemy, ze istnieje kojarzenie P_1 w G_1 oraz P_2 w G_2. Pierwsze jest z A do $N_G(A)$, natomiast drugie jest z $W - A$ do $M - N_G(A)$, czyli sa rozlaczne. W takim razie $P_1 \cup P_2$ jest kojarzeniem w G z W do M.

Let G be a finite group and let $H \leq G$ be a subgroup with $\frac{|G|}{|H|} = k$, then
$g_1 H \cup \ldots \cup g_k H = G = Hg_1 \cup \ldots \cup Hg_k$
for some $g_1, \ldots, g_k \in G$.

Niech G bedzie skonczona grupa i niech $H \leq G$ bedzie podgrupa z $\frac{|G|}{|H|} = k$, wtedy
$g_1 H \cup \ldots \cup g_k H = G = Hg_1 \cup \ldots \cup Hg_k$
fdla pewnych $g_1, \ldots, g_k \in G$.

[ ] [ ]

[ ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[ ]

Oznaczmy

$$L = \{a_1 H, \ldots, a_k H\}$$

$$R = \{Hb_1, \ldots, Hb_k\}$$

jako zbiory odpowiednio lewych i prawych wrastw H w G. Niech K bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow L i R. Wprowadzmy na K relacje rownowaznosci

$$a_i H \sim Hb_j \iff a_i H \cap Hb_j \neq \emptyset \text{ w } G.$$

Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq L$ zachodzi

$$|\bigcup_{U \in A} U| = |A| \cdot |H|$$

jako podzbiorow G. *Chodzi o to, ze kazda warstwa ma moc |H|, a mamy ich |A| sztuk w zbiorze |A|. Wiec jak bedziemy je dodawac, to one sa rozlaczne, wiec smiga.*

Dla kazdego $V \in R$ mamy $|V| = |H|$ *bo kazda warstwa ma te sama moc co H*, a wiec $\bigcup_{U \in A} U$ tnie sie niepusto z co najmniej $|A|$ elementami z R. Z tego wynika, ze

$$|N_K(A)| \geq |A|,$$

wiec istnieje kojarzenie P w K z L do R. Wezmy wiec dowolny g_i w $a_i H \cap Hb_j \neq \emptyset$. Wtedy jest czescia krawedzi $(a_i H)(Hb_j)$ w P dla $1 \leq i \leq k$. Mamy wiec $a_i H = g_i H$ oraz $Hb_j = Hg_i$.

Hall's Missing Soulmate Theorem

Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M, and let $d \geq 1$.
Then G contains a partial matching from W' to M for some $W' \subseteq W$ with $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ for every $A \subseteq W$.

Twierdzenie Halla o brakujacym mezu(????)

Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i niech $d \geq 1$.
Wtedy G zaiwera kojarzenie z W' do M dla pewnego $W' \subseteq W$ z $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ dla kazdego $A \subseteq W$.

[ ] [ ]

[ ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[ ]

$\Longrightarrow$

Trywialne :3

$\Longleftarrow$

Zapoznajmy panie z d wyobrazonymi idealnymi dla kazdej pani kawalerami. Wtedy twierdzenie Halla jest spelnione, wiec mozemy ozenic kazda kobiete do odpowiedniego, prawdziwego czy wyobrazonego, meza. W prawdziwym zyciu, co najwyzej d kobiet jest niezameznych.

Hall's Polygamous Marriage Theorem
Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M, and let $d \geq 1$.
Then G contains a subgraph H with $W \subseteq V(H)$ in which each $w \in W$ has degree d and each $v \in M \cap V(H)$ has degree 1 iff $|N(A)| \geq d|A|$ for every $A \subseteq W$

Twierdzenie Halla o polimalzenstwach
Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i niech $d \geq 1$.
Wtedy G zaiwera podgraf H z $W \subseteq V(H)$ w ktorym kazdy $w \in W$ ma stopien d i kazdy $v \in M \cap V(H)$ ma stopien 1 iff $|N(A)| \geq d|A|$ dla kazdego $A \subseteq W$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Trywialne :3

$\Longleftarrow$

Sklonujmy kazda kobiete $d - 1$ razy. Wtedy warunek Halla jest zaspokojony, wiec mozemy kazda z nich ozenic (klony i oryginaly) do odpowiednich mezow. Teraz scisnijmy klony z oryginalami do jednej osoby. Koniec!

1.3 Menger's Theorem

Cut vertex v is a vertex in a connected graph G such that $G - \{v\}$ is not connected.

Graph G is a k-connected graph if for any $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ is connected.

Complete graph has all vertices connected by an edge, that is for all $v, w \in G$ $v \neq w$ we have $vw \in G$.

Tnacy wierzcholek v jest wierzcholkiem w spojnym grafie G takim, ze $G - \{v\}$ jest niespojny.

Graf G jest k-spojnym grafem, jezeli dla kazdego $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ jest spojny.

Graf pelny ma wszystkie wierzcholki polaczone krawedzia, to znaczy dla kazdego $v, w \in G$, $v \neq w$ mamy $vw \in G$.

(A, B)-path is a path in G for some $A, B \subseteq V$ of the form $a \ldots b$ for some $a \in A$ and $b \in B$.
(A, B)-cut in G is $C \subseteq V$ such that $G - C$ contains no $(A - C, B - C)$-paths.

If we take vertices $a, v \in V$ we call an $(\{a\}, \{b\})$-path an (a, b)-path. Given a collection of (a, b)-paths

$$P^{(1)}, \ldots, P^{(k)}$$

we say such a collection is independent if $P^{(i)} - \{a, b\}$ and $P^{(j)} - \{a, b\}$ have no common vertices for $i \neq j$.

Given $A, B, C \subseteq V(G)$ and if $A \subseteq C$ or $B \subseteq C$, then C is an (A, B)-cut and if C is an (A, B)-cut then $A \cap B \subseteq C$.

Let G be a graph, $A, B \subseteq V(G)$ and $k \geq 0$. Suppose that for every (A, B)-cut C in G we have $|C| \geq k$.
Then G contains a collection of k vertex-disjoint (A, B)-paths.

(A, B)-sciezka to sciezka w G dla pewnych $A, B \subseteq V$ postaci $a \ldots b$ dla jakis $a \in A$ i $b \in B$.
(A, B)-ciecie w G to $C \subseteq V$ takie, ze $G - C$ nie zawiera zadnych $(A - C, B - C)$-sciezek.

Jesli wezmiemy wierzcholki $a, v \in V$, to $(\{a\}, \{b\})$-sciezke nazywamy (a, b)-sciezka. Jesli dana jest kolekcja (a, b)-sciezek

$$P^{(1)}, \ldots, P^{(k)}$$

mowimy, ze ta kolekcja jest niezalezna, jezeli $P^{(i)} - \{a, b\}$ i $P^{(j)} - \{a, b\}$ nie maja wspolnych wierzcholkow dla $i \neq j$.

Dla danych $A, B, C \subseteq V(G)$, jezeli $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, to C jest (A, B)-cieciem i jesli C jest (A, B)-cieciem, to $A \cap B \subseteq C$.

Niech G bedzie grafem, $A, B \subseteq V(G)$ i $k \geq 0$. Zalozmy, ze dla kazdego (A, B)-ciecia C w G jest $|C| \geq k$.
Wtedy G zawiera zbior k rozlacznych wierzcholkami (A, B)-sciezek.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

Uzyjemy indukcji na $e(G)$ [definicja dla debila].

Jako przypadek bazowy mamy $e(G) = 0$, wtedy $A \cap B$ jest (A, B)-cieciem i w takim razie $k \leq |A \cap B|$, ale kazdy wierzcholek $A \cap B$ jest (A, B)-sciezka dlugosci 0 i wszystkie z nich sa rozlaczne, tak jak wymagamy.

Zalozmy, ze $e(G) \geq 1$, wybiezmy krawedz $e \in E(G)$ i niech $H = G - \{e\}$.

Jesli dla kazde (A, B)-ciecie w H ma stopien co najmniej k, to przez hipoteze indukcyjna sa one k wierzcholkowo rozlacznymi (A, B)-sciezkami w H i w takim razie w G, wiec koniec.

Zalozmy teraz, bez starty ogolnosci, ze w H istnieje co najmniej jedno (A, B)-ciecie C takie, ze $|C| < k$. W takim razie C nie jest (A, B)-cieciem w G, wiec $G - C$ zawiera co najmniej jedna (A, B)-sciezke postaci

$$a \ldots vw \ldots b$$

dla pewnych $a \in A$, $b \in B$, gdzie $v, w \in G$ sa koncami e. Co wiecej, kazda (A, B)-sciezka w $G - C$ zawiera wierzcholek v, co implikuje ze

$$C' = C \cup \{v\}$$

jest (A, B)-cieciem w G. Co wiecej, $|C'| = |C| + 1 \geq k$. Poniewaz $a \ldots vw \ldots b$ bylo jedyna sciezka ktora blokowala C przed zostaniem (A, B)-cieciem w G, ale juz $|C'|$ nim jest, to $|C| = k - 1$ i mozemy przyjac, ze

$$C = \{c_1, \ldots, c_{k-1}.$$

Teraz, poniewaz $v \in C'$, to kazde (A, C')-ciecie D w H jest takze (A, C')-cieciem w G. Poniewaz kazda (A, B)-sciezka w G zawiera wierzcholek C', to D jest takze (A, B)-cieciem w G i dlatego $|D| \geq k$. Korzystajac wiec z hipotezy indukcyjnej, wiemy, ze istnieja rozlaczne wierzcholkami (A, C')-sciezki

$$P^{(1)}, \ldots, P^{(k-1)}, P^{(k)}$$

w H konczace sie odpowiednio w $c_1, \ldots, c_{k-1}, v$. Niech $C'' = C \cup \{w\}$. Wtedy analogicznie, mamy takie (C'', B)-sciezki

$$Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k-1)}, Q^{(k)}$$

w H zaczynajace sie od odpowiednio wierzcholkow $c_1, \ldots, c_{k-1}, v$. Co wiecej, poniewaz C' jest (A, B)-cieciem w G, to $P^{(i)}$ oraz $Q^{(j)}$ nie moga miec wspolnego wierzcholka u poza przypadkiem $i = j \leq k - 1$ i $u = c_i$. To sugeruje, ze

$$P^{(1)}Q^{(1)}, \ldots, P^{(k-1)}Q^{(k-1)}, P^{(k)}eQ^{(k)}$$

sa k rozlacznymi wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezkami w G. Koniec.

Hall's Marriage Theorem may be deduced from this lemma: Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M and suppose that (G, W) satisfies Hall's condition. Let C be a (W, M)-cut in G. Then

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

and therefore

$$|C| = |W \cap c| + |M \cap C| \geq$$
$$|W \cap C| + |N(W - C)| \geq$$
$$|W \cap C| + |W - C| = |W|$$

thus $|W|$ contains vertex-disjoint (W, M)-paths, each of length 1 implying that such a collection of paths is a matching.

Twierdzenie Halla o malzenstwach moze byc wyprowadzone z tego lematu:
Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i zalozmy, ze (G, W) zadowala warunek Halla. Niech C bedzie (W, M)-cieciem w G. Wtedy

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

i z tego

$$|C| = |W \cap c| + |M \cap C| \geq$$
$$|W \cap C| + |N(W - C)| \geq$$
$$|W \cap C| + |W - C| = |W|$$

a wiec $|W|$ zawiera rozlaczne wzgledem wierzcholkow (W, M)-sciezki, kazda o dlugosci 1, implikujac ze taki zbior sciezek jest kojarzeniem.

Menger's Theorem

Let G be an incomplete graph and let $k \geq 0$. Then G is k-connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k independent (a, b)-paths in G.

Twierdzenie Mengera

Niech G bedze niepelnym grafem i niech $k \geq 0$. Wtedy G jest k-spojne iff dla kazdego $a, b \in G$ z $a \neq b$ istnieje zbior k niezaleznych (a, b)-sciezek w G.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Niech $C \subseteq V(G)$ i zalozmy, ze $G - C$ jest niespojny. Wybierzmy dowolne $a, b \in G - C$ nalezace do roznych skladowych spojnosci $G - C$. Na mocy tego zalozenia, G zawiera k niezaleznych (a, b)-sciezek. Kazda z tych sciezek musi miec wierzcholek w C, ale zadne dwie sciezki nie maja wspolnego wierzcholka poza a i b. Z tego wynika, ze $|C| \geq k$, tak jak wymagamy.

$\Longleftarrow$

Bedziemy robic indukcje po k.

Przypadek bazowy dla $k = 0$ jest trywialny.
Niech wiec $k \geq 1$ i niech $a, b \in G$ beda rozne.
Zalozmy najpierw, ze $a \not\sim b$. Niech $A = N(a)$ oraz $B = N(b)$. Grafy $G - A$ i $G - B$ sa niespojne, bo nie maja ani jednej sciezki $a \ldots b$. Daje to $|A| \geq k$ oraz $|B| \geq k$. Jezeli C jest (A, B)-cieciem w G, to $G - C$ rowniez nie ma sciezem miedzy elementami $A - C$ oraz $B - C$. Dlatego, albo $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, albo $G - C$ jest niespojne. W kazdym razie, mamy $|C| \geq k$ wiec z lematu wyzej, G ma k rozlacznych wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezek:

$$a_1 \ldots b_1, \; \ldots, \; a_k \ldots b_k.$$

Wtedy,

$$aa_1 \ldots b_1 b, \; \ldots, \; aa_k \ldots b_k b$$

sa k niezaleznymi sciezkami (a, b) tak jak wymagamy.
Zalozmy teraz, ze $a \sim b$ i niech $H = G - \{ab\}$. Pokazemy najpiew, ze H jest $(k - 1)$-spojne.
Zalozmy, ze tak nie jest. Niech $C \subseteq V(H)$ bedzie takim podzbiorem, ze $|C| < k - 1$ i niech $H - C$ bedzie niespojne. Poniewaz G jest k-spojne, to $G - C$ jest spojne i nie ma wierzcholkow tnacych (cut vertices), co implikuje ze $H - C$ dokladnie dwie skladowe spojne, kazda zawierajaca jeden z wierzcholkow a lub b. Ale wtedy $|G| = |H| = 2 + |C| \leq k$, wiec G jest grafem k-spojnym z $|G| \leq k$, co daje sprzecznosc z tym, ze G nie jest pelne.
W takim raize, H musi byc $(k - 1)$-spojne. Z hipotezy indukcyjnej zawiera wiec $k - 1$ niezaleznych (a, b)-sciezem. Razem z krawedzie ab te sciezki tworza zbior k niezaleznych (a, b) sciezek w G, co konczy dowod.

1.4 Menger's Theorem (so edgy)

Graph G is k-edge-connected for $k \geq 0$ if for every $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ is connected.

Line graph of graph G $[L_G]$ is a graph with $V(L_G) = E(G)$ and for $e, f \in L_G$ with $e \neq f$ we have

$$e \sim f \text{ in } L_G \iff e, f \text{ common endpoint in } G$$

Menger's Theorem edge version
Let G be a graph and let $k \geq 0$.
Then G is k-edge-connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k edge-disjoint (a, b)-paths in G.

Graf G jest k-spojny krawedziowo dla $k \geq 0$ jesli dla kazdego $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ jest spojny.

Graf krawedziowy grafu G $[L_G]$ jest grafem z $V(L_G) = E(G)$ i dla $e, f \in L_G$ z $e \neq f$ mamy

$$e \sim f \text{ w } L_G \iff e, f \text{ wspolny koniec w } G$$

Twierdzenie Megera wersja krawedzie
Niech G bedzie grafem i niech $k \geq 0$.
Wtedy G jest k-spojny krawedziowo z $a \neq b$, wtedy istnieje zbior k rozlacznych krawedziami (a, b)-krawedzi w G.

[ ] [ ]

[ ]

SOMEBONY ONCE TOLD ME THE WORLD IS GONNA ROLL ME

[ ]

$\Longrightarrow$

Niech L_G bedzie grafem krawedziowym grafu G. Wezmy $a, b \in G$ takie, ze $a \neq b$. Niech

$$A = \{av \in E(G) \; : \; v \in N_G(a)\}$$

i niech

$$B = \{bv \in E(G) \; : \; v \in N_G(b)\}.$$

Oznaczmy przez C (A, B)-ciecie w L_G, wiec

$$C \subseteq E(G).$$

Wtedy nie istnieje (a, b)-sciezka w $G - C$, co implikuje, ze $|C| \geq k$. W takim razie, na mocy lematu z poprzedniego podrozdzialu, istnieje k rozlaczna wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezka w L_G i z tego powodu jest k rozlaczna wzgledem krawedzi (a, b)-sciezka w G.

Mozemy wyprowadzic te implikacje z twierdzenia "max-flow min-cut" przez zamienianie kazdej krawedzi vw *przez pare skierowanych krawedzi* $v \to w$ *i* $w \to v$. *Ale my nie znamy tego twierdzenia, wiec nie chce mi sie pisac dalej :v*

$\Longleftarrow$

Niech $f \subseteq E(G)$ i zalozmy, ze $G - F$ jest niespojny. Wybierzmy $a, b \in G - F$ nalezacy do roznych skladowych spojnosci $G - F$. Zgodnie z zalozeniem, G zawiera k rozlaczne wzgledem krawedzi (a, b)-sciezki i kazda z tych sciezek musi miec krawedzie w F. Z tego tez powodu $|F| \geq k$ tak jak chcielismy.

2 External problems

How large can we make some parameter of G before it is forced to have a certain property?

2.1 Complete subgraphs

Complete graph of order r $[K_r]$ is a graph with $V(K_r) = [r]$ and $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$.
K_3 is called a triangle.

r-partite graph G with vertex classes $V_1, \dots, V_r$ has every edge of form vw where $v \in V_i$ and $w \in V_j$ and $i \neq j$. Such a graph is called complete r-partite if for every $i, j,\ i \neq j$ we have $v \in V_i,\ w \in V_j \implies vw \in E(G)$.

A complete bipartite graph with vertex classes of orders $|V_1| = m$ and $|V_2| = n$ is denoted $K_{m,n}$

Graf pelny stopnia r $[K_r]$ to graf z $V(K_r) = [r]$ i $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$.
K_3 jest nazywany trojkatem?

r-dzielny graf G z klasami wierzcholkow $V_1, \dots, V_r$ ma kazdy wierzcholek postaci vw, gdzie $v \in V_i$ i $w \in V_j$ dla $i \neq j$. Taki graf jest dodatkowo nazywany pelnym grafem r-dzielnym, jezeli dla kazdego $i, j,\ i \neq j$ jest $v \in V_i,\ w \in V_j \implies vw \in E(G)$.

Pelny graf dwudzielny z klasami wierzchoklow o mocy $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$ jest oznaczany jako $K_{m,n}$.

We now want to check how big must e(G) be in order to force K_r to be G subgraph.

↪ given $r \geq 2$ we can see that for G to be K_r-free we need G to be $(r-1)$-partite

↪ given $n \geq r-1$ out of all $(r-1)$-partite graphs with n vertices the one with most edges is a complete $(r-1)$-partite graph

↪ if G is a complete $(r-1)$-partite graph with vertex classes
$V_1, \dots, V_{r-4}$,
if $|V_i| \geq |V_j| + 2$ for some $i \neq j$, then we may choose $v \in V_j$ and consider a new graph obtained by removing edges vv_i for $v_i \in V_i$ and adding vv_j for every $v_j \in V_j - \{v\}$. This new graph is $(r-1)$-partite and $|G'| = |G|$ and

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

↪ so the $(r-1)$ partite graph with n vertices and the most edges will have vertes classes "as equal in size as possible"

Teraz chcemy sprawdzic jak duze musi byc e(G), zeby zmusic K_r do bycia podgrafem G

↪ majac dane $r \geq 2$ mozemy zauwazyc, ze aby G bylo K_r-wolne, musi byc $(r-1)$-dzielne

↪ majac dane $n \geq r-1$ i wszystkie $(r-1)$-dzielne grafy z n wierzcholkammi ten, ktory ma najwiecej krawedzi jest pelnym $(r-1)$-dzielnym grafem

↪ jesli G jest grafem pelnym $(r-1)$-dzielnym z klasami wierzcholkow
$V_1, \dots, V_{r-1}$,
to jesli $|V_i| \geq |V_j| + 2$ dla pewnych $i \neq j$, wtedy mozemy wybrac $v \in V_j$ i rozwazyc nowy graf otrzymany poprzez usuniecie krawedzi vv_i dla $v_i \in V_i$ oraz dodanie vv_j dla kazdego $v_j \in V_j - \{v\}$. Taki nowy graf jest $(r-1)$-dzielny i $|G'| = |G|$ oraz

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

↪ wiec $(r-1)$-dzielny graf z n wierzchoklami i najwieksza liczba krawedzi bedzie mial klasy wierzcholkow tak bliskie rozmiarem jak mozliwe

---

Turán graph $T_r(n)$ for $n \geq r \geq 1$ is a complete r-partite graph of order n with all vertex classes of size $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ or $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. We denote $e(T_r(n))$ as $t_r(n)$.

Graf Turána $T_r(n)$ dla $n \geq r \geq 1$ to pelny r-dzielny graf stopnia n ze wszystkimi klasami wierzcholkow roozmiaru $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Oznaczamy $e(T_r(n))$ jako $t_r(n)$.

Some observations:

$\hookrightarrow$ If $T_r(n) \simeq G - \{e\}$ for some $e \in E(G)$, then G is not K_{r+1}-free.

$\hookrightarrow$ If r divides n, then we have

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

otherwise vertices in large classes have minimal degree, $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$, and vertices in small classes have maximal degree, $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. This implies that always

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

$\hookrightarrow$ $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$ where $v \in T_r(n)$ is a vertex of minimal degree (any if r|n or one of the vertices in large classes).

$\hookrightarrow$ $t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$

$\hookrightarrow$ Let us say that we want to create a K_{r+1}-free graph G by adding a vertex v to $T_r(n-1)$ and m edges with m being as large as posiible. We know that v cannot be adjavent to a vertex in every class so we have

$$m = d_G(v) \leq n - 1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

with equality iff G is complete r-partite (obtained by adding v anywhere if r|(n − 1) or to one of the small classes.)

Kilka obserwacji:

$\hookrightarrow$ Jesli $T_r(n) \simeq G - \{e\}$ dla pewnego e]inE(G), wtedy G nie jest K_{r+1}-free????.

$\hookrightarrow$ Jesli r dzieli n, to wtedy

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

w przeciwnym wypadku wierzcholki w duzych klasach maja najmniejszy stopien, $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$, i wierzcholki w malych klasach maja najwiekszy stopien, $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. To implikuje, ze zawsze

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

$\hookrightarrow$ $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$ gdzie $v \in T_r(n)$ jest wierzcholkiem najmniejszego stopnia (kazdy jesli r|n, wpp jeden z wierzcholkow w duzych klasach).

$\hookrightarrow$ $t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$

$\hookrightarrow$ Powiedzmy, ze chcemy stworzyc K_{r+1}-free graf G poprzez dodanie wierzcholka v do $T_r(n-1)$ i m krawedzi, gdzie m jest najwieksze mozliwe. Wiemy, ze v nie moze byc obok wierzcholkow w kazdej klasie, wiec

$$m = d_G(v) \leq n - 1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

z rownoscia iff G jest pelnym grafem r-dzielnym (otrzymanym przez dodanie v gdziekolwiek jesli r|(n − 1) lub do jednej z malych klas).

Turán's Theorem

Let $n \geq r \geq 1$ and let G be a K_{r+1}-free graph with $|G| = n$ and $e(G) \geq t_r(n)$. Then $G \simeq T_r(n)$.

Twierdzenie Turána

Niech $n \geq r \geq 1$ i niech G bedzie K_{r+1}-wolnym grafem z $|G| = n$ i $e(G) \geq t_r(n)$. Wtedy $G \simeq T_r(n)$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

Maybe later, dunno

[🇵🇱]

Uzyjemy indukcji na n.

Jesli $n = r$, to $T_r(n) \simeq K_r$ i mamy

$$\binom{n}{2} = t_r(n) \leq e(G) \leq \binom{n}{2}$$

i z tego $T_r(n) \simeq G$.

Niech teraz $n > r$. Wybierzmy podzbior $E' \subseteq E(G)$ taki, ze $|E'| = e(G) - t_r(n)$ i niech $H = G - E'$, czyli $e(H) = t_r(n)$. Wtedy mamy

$$d(H) = \frac{2e(H)}{n} = \frac{2t_r(n)}{n} = d(T_r(n)).$$

Wtedy

$$\delta(H) \leq \lfloor d(H) \rfloor = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor = \delta(T_r(n))$$

gdzie ostatnia rownosc wynika z obserwacji.

Wybierzmy teraz $v \in H$ taki, ze $d(v) = \delta(H)$ i niech

$$K = H - \{v\}.$$

Wtedy K jest K_{r+1}-wolne. $|K| = n - 1$ i

$$e(K) = e(H) - d_H(v) = t_r(n) - \delta(H) \geq t_r(n) - \delta(T_r(n)) = t_r(n-1),$$

gdzie ostatnia rownosc wynika z obserwacji. W takim razie, poprzez hipoteze indukcyjna, wiemy, ze

$$K \simeq T_r(n-1).$$

W szczegolnosci, z tego wynika, ze

$$e(K) = t_r(n-1)$$

i w takim razie

$$d_H(v) = \delta(T_r(n))$$

wiec z kolejnej obserwacji mamy, ze $H \simeq T_r(n)$.
W koncu, poniewaz $V(H) = V(G)$ oraz $E(H) = E(G) - E' \subseteq E(G)$ i G jest K_{r+1}-wolne, to z obserwacji mamy $|E'| = 0$ i

$$G \simeq H \simeq T_r(n).$$

2.2 Complete bipartite subgraphs

Jensen's Inequality: $a < b \in \mathbb{R}$ and $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is convex. Then

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_1) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

for all $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$.

A particular case of Jensen's Inequality is

$$b_t(x) = \begin{cases} \binom{x}{t} = \frac{1}{t!}x(x-1)\ldots(x-t+1) & x \geq t-1 \\ 0 \end{cases}$$

Nierówność Jensena: $a < b \in \mathbb{R}$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest wypukła. Wtedy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_1) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$.

Specjalnym przypadkiem nierówności Jensena jest

$$b_t(x) = \begin{cases} \binom{x}{t} = \frac{1}{t!}x(x-1)\ldots(x-t+1) & x \geq t-1 \\ 0 \end{cases}$$

t-fan is a graph H such that $H \simeq K_{1,t}$.
For any $t \geq 2$, there exists a function $f = f_t : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ with $f(n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$, such that if G is a $K_{t,t}$-free graph with $|G| = n$ then $e(G) \leq f(n)$.

t-wachlarzem jest graf H taki, ze $H \simeq K_{1,t}$.
Dla dowolnego $t \geq 2$ istnieje funkcja $f = f_t : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ z $f(n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$, taka, ze jesli G jest $K_{t,t}$-wolnym grafem z $|G| = n$, to $e(G) \leq f(n)$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

DUNNO

[🇵🇱]

Niech G bedzie $K_{t,t}$-wolnym grafem z $|G| = n \geq 1$ i niech $e(G) = m$. Niech k bedzie iloscia t-wachlarzy w G.

Każdy wierzchołek $v \in G$ jest wierzchołkiem stopnia t dla dokładnie $\binom{d(v)}{t} = b_t(d(v))$ t-grafów w G, implikując, że

$$k = \sum_{v \in G} b_t(d(v)) \geq n \cdot b_t(\frac{1}{n}\sum_{v \in G} d(v)) = n \cdot b_t\left(\frac{2m}{n}\right),$$

gdzie środkowa nierówność wynika z nierówności Jensena, a następująca po niej równość - z handshaking lemma. Z drugiej strony, ponieważ G jest $K_{t,t}$-wolnym grafem, dowolny zbiór t wierzchołków w G jest wierzchołkiem stopnia 1 w co najwyżej $(t-1)$ t-wachlarzach w G. To implikuje, że

$$k \leq \binom{n}{t}(t-1) \leq \frac{n^t}{t!}t.$$

Ponieważ $tn = O(n^{2-\frac{1}{t}})$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $m \geq tn$ i z tego dostajemy

$$\frac{2m}{n} \geq \frac{m}{n} + y \geq t.$$

Z nierówności Jensena dostajemy

$$k \geq n\binom{\frac{2m}{n}}{t} \geq \frac{n\left(\binom{2m}{n} - t + 1\right)^t}{t!} > \frac{n}{t!}\left(\frac{m}{n}^t\right) = \frac{m^t}{n^{t-1}t!}.$$

To w połączeniu z przykładem 2.4. ze skryptu, którego nie chce mi się przepisywać, daje $m^t \leq n^{2t-1}t$, czyli

$$m \leq \sqrt[t]{t}n^{2-\frac{1}{t}}.$$

Czyli funkcja

$$f_t(n) = \max(tn, \sqrt[t]{t}n^{2-\frac{1}{t}})$$

spełnia warunki twierdzenia.

Theorem above is similar to the Zarankiewicz problem, which, given $n \geq t \geq 2$, asks about the smallest number $z_t(n)$ such that any $K_{t,t}$-free graph G with n vertices in each class has $e(G) \leq z_t(n)$. We call $z_t(n)$ Zarankiewicz numbers and the theorem above implies that

$$z_t(n) \leq f_t(2n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$$

Twierdzenie powyżej jest podobne do problemu Zarankiewicza, który, mając dane $n \geq t \geq 2$, pyta o najmniejszą liczbę $z_t(n)$ taką, że dowolny $K_{t,t}$-wolny graf G z n wierzchołkami w każdej klasie ma $e(G) \leq z_t(n)$. Liczby $z_t(n)$ nazywamy liczbami liczbami Zarankiewicza i twierdzenie wyżej implikuje, że

$$z_t(n) \leq f_t(2n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$$

2.3 Arbitrary subgraphs

Forbidden subgraph problem: given a graph H, how many edges can a H-free graph of order n have?

$$ex(n; H) = \max\{e(G) \; : \; G \text{ - } H\text{-free graph with } |G| = n\}.$$

From previous theorems we know that:

- $\hookrightarrow ex(n; K_{r+1}) = t_r(n)$ and $ex(n; K_{r+1}) \sim \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r})$
- $\hookrightarrow ex(n; K_{t,t}) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$

Let us write

$$e(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}$$

and proof that for $n \geq 2$ the sequence

$$\left(\frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

converges.

Problem zakazanego podgrafu: mając dany graph H, ile krawędzi może mieć H-wolny graf rzędu n?

$$ex(n; H) = \max\{e(G) \; : \; G \text{ - } H\text{-wolny graf z } |G| = n\}.$$

Z poprzednich twierdzeń wiemy, że:

- $\hookrightarrow ex(n; K_{r+1}) = t_r(n)$ oraz $ex(n; K_{r+1}) \sim \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r})$
- $\hookrightarrow ex(n; K_{t,t}) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$

Oznaczmy

$$e(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}$$

i udowodnijmy, że dla $n \geq 4$, ciąg

$$\left(\frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

jest zbieżny.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

DUNNO

[🇵🇱]

Ciąg $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu przez 0, więc wystarczy pokazać, że nie jest to ciąg rosnący. Niech $n \geq 3$ i niech G będzie H-wolnym grafem z $|G| = n$ oraz $e(G) = ex(n; H)$. Wtedy dla dowolnego $v \in G$ graf $G - \{v\}$ jest H-wolny i ma rząd $n - 1$, implikując, że

$$e(G - \{v\}) \leq ex(n - 1, H).$$

Z drugiej strony, dowolna krawędź $uw \in E(G)$ jest używa t dokładnie $n - 2$ grafach $G - \{v\}$ dla $v \in G$ (w tych, gdzie $v \notin \{u, w\}$). To z kolei implikuje, że

$$(n - 2)e(G) = \sum_{v\in G} e(G - \{v\})$$

i z tego mamy

$$x_n = \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}} = \frac{2e(G)}{n(n-1)} = \sum_{v\in G} \frac{2e(G - \{v\})}{n(n-1)(n-2)} \leq \frac{2ex(n-1; H)}{(n-1)(n-2)}$$

czyli ciąg nie jest rosnący, a więc musi do czegoś zbiegać.

Chromatic number of a graph H [$\chi(H)$] is the smallest integer $r \geq 1$ such that H is r – partite.

Erdös-Stone Theorem

Let k, r be integers with $k - 1 \geq r \geq 1$ and let $\varepsilon > 0$. Then there exists an integer N such that for all $n \geq N$, if G is a graph with $|G| = n$ and $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\binom{n}{2}$, then $T_{r+1}(k) \leq G$.
No proof for your stupid arse.

Let H be a graph with $e(H) \geq 1$. Then $ex(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$

Liczba chromatyczna grafu H [$\chi(H)$] to najmniejsza liczba całkowita $r \geq 1$ taka, że H jest r-dzielny.

Twierdzenie Erdösa-Stone'a

Niech k, R będą liczbami całkowitymi z $k - 1 \geq r \geq 1$ i niech $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje liczba całkowita N taka, że dla każdego $N \geq N$, jeżeli G jest grafem z $|G| = n$ i $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\binom{n}{2}$, wtedy $T_{r+1}(k) \leq G$.
Nie ma dowodu dla twojej głupiej dupy.

Niech H będzie grafem z $e(H) \geq 1$. Wtedy $ex(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$.

[ ] [ ]

[ ]

DUNNO

[ ]

Niech $r\chi(H) - 1$, wybierzmy k takie, że $H \leq T_{r+1}(k)$ (na przykład możemy wziąć $k = (r+1)|H|$) i niech $\varepsilon > 0$. Oznaczmy przez N liczbę całkowitą z twierdzenia Erdösa-Stone'a. Wtedy dla dowolnego $n \geq N$ i dowolnego H-wolnego grafu G z $|G| = n$ wiemy, że G jest również $T_r(K)$-wolny i z tego powodu

$$e(G) < (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\binom{n}{2}.$$

Z tego wiemy, że $ex(n; H) < (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\binom{n}{2}$ dla wszystkich $N \geq N$, a więc

$$ex(H) \leq 1 - \frac{1}{r} + \varepsilon.$$

Ale ponieważ $\varepsilon > 0$ był z dowolnie mały, to mamy

$$ex(H) \leq 1 - \frac{1}{r}.$$

Z drugiej strony dla dowolnego $n \geq r$ graf $T_r(n)$ jest H-wolny, bo H nie jest r-dzielny i mamy $t_r(n) \sim (1 - \frac{1}{r})\binom{n}{2}$, implikując że $ex(H) \geq 1 - \frac{1}{r}$.

Upper density [$ud(G)$] of an infinite graph G is defined as:

$$ud(G) = \lim_{n\to\infty} \sup 1 \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} \;:\; H \leq G,\; |H| = n \right\}$$

In an infinite graph G we have either $ud(G) = 1$ or $ud(G) = 1 - \frac{1}{r}$ for some $r \geq 1$.

Górna gęstość [$ud(G)$] nieskończonego grafu G jest zdefiniowana jako:

$$ud(G) = \lim_{n\to\infty} \sup 1 \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} \;:\; H \leq G,\; |H| = n \right\}$$

Dla nieskończonego grafu G następuje albo $ud(G) = 1$ albo $ud(G) = 1 - \frac{1}{r}$ dla pewnego $r \geq 1$.

[ ] [ ]

[ ]

DUNNO

[ ]

Niech x_n będzie ciągiem takim, że

$$x_n = \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} \;:\; H \leq G, |H| = n \right\}.$$

Wystarczy pokazać, że dla każdego $r \geq 1$, jeśli $ud(G) > 1 - \frac{1}{r}$, wtedy tak naprawdę $ud(G) \geq 1 - \frac{1}{r+1}$.

Załóżmy, że $ud(G) > 1 - \frac{1}{r}$ i wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że

$$ud(G) = \lim_{n\to\infty} \sup(x_n > 1 - \frac{1}{r} + \varepsilon).$$

Wtedy możemy znaleźć ciąg $(H_l)_{l=1}^{\infty}$ podgrafów G takich, że

$$e(H_l) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\frac{|H_l|}{2}$$

dla wszystkich l oraz $|H_l| \to \infty$ razem z $l \to$ infty. Z twierdzenia Erdösa-Stone'a mamy, że $T_{r+1}(n) \leq G$ dla wszystkich $n \geq r + 1$. To z kolei pociąga fakt, że

$$x_n \geq \frac{t_{r+1}(n)}{\binom{n}{2}}$$

dla wszystkich $n \geq r + 1$. Z tego wynika, że

$$ud(G) = \lim_{n\to\infty} \sup x_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{t_{r+1}(n)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{r+1}$$

tak jak chcieliśmy.

3 Ramsey Theory

3.1 Ramsey theorem

In graph G we define a k-edge-coloring for $k \geq 2$ is a function

$$c : E(G) \to [k]$$

A subgraph $H \leq G$ is monochromatic if $c|_{E(H)}$ has a constant value.

The question in this chapter is weather or not we can find a monochromatic graph K_r given a k-edge coloring of K_n?

W grafie G definiujemy k-kolorowanie krawędzi dla $k \geq 2$ jako funkcję

$$c : E(G) \to [k]$$

Podzbiór $H \leq G$ jest monochromatyczny, jeżeli $c|_{E(H)}$ ma stałą wartość.

Pytanie jakie ten rozdział stawia to czy możemy znaleźć monochromatyczny graf K_r mając dane k-kolorowanie K_n?

Ramsey number $R(s,t)$ is the smallest n (if it exists) such that any red/blue edge coloring of K_n has a red K_s or a blue K_t.

Ramsey's theorem - let $s,t \geq 2$, then $R(s,t)$ exists. Moreover, is $s,t > 2$ then $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

Liczba Ramseya $R(s,t)$ to najmniejsze takie n (pod warunkiem, że istnieje) takie, że dla dowolnego kolorowania na czerwono i niebiesko k_n posiada czerwone K_s albo niebieskie K_t.

Twierdzenie Ramseya - niech $s,t \geq 2$, wtedy $R(s,t)$ istnieje. Co więcej, jeżeli $s,t > 2$, to $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

[ ] [ ]

[ ]

By induction on $s+t$. The base cases is when $s = 2$ or $t = 2$.
When $s = 2$ we have $R(s,t) = t$ because either have a red edge of color red or we have the whole K_t is blue.
When $t = 2$ similarly.

Now, when $s,t > 2$, let $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ and let us color a K_n. Let us take any $v \in K_n$. Then there are

$$R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$$

edges incident to v. Therefore, either $R(s-1,t)$ of them are red or $R(s,t-1)$ are blue. Without loss of generality, let us assume that there are $R(s-1,t)$ edges

$$\{vw \ : \ w \in A\}$$

are red, where $A \subseteq V(K_n)$, $|A| = R(s-1,t)$. Then we have either a red K_{s-1} inside A to which we add the red edges to v to get a red K_s, or we have a blue K_t. Analogous proof for the other number.

[ ]

Indukcja na $s+t$. Przypadek bazowy jest kiedy $s = 2$ lub $t = 2$.
Jeśli $s = 2$, to mamy $R(s,t) = t$, bo albo znajdziemy czerwoną krawędź, albo całość jest niebieska.
Analogicznie dla $t = 2$.

Teraz, kiedy $s,t > 2$, niech $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ i pokolorujmy K_n. Weźmy dowolny $v \in K_n$. Wtedy mamy

$$R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$$

krawędzi wychodzących z v. W takim razie albo $R(s-1,t)$ z nich jest czerwonych albo $R(s,t-1)$ jest niebieskich. Bez starty ogólności załóżmy, że mamy $R(s-1,t)$ krawędzi

$$\{vw \ : \ w \in A\}$$

czerwonych, gdzie $A \subseteq V(K_n)$, $|A| = R(s-1,t)$. Wtedy mamy albo czerwone K_{s-1} wewnątrz A, do którego dodajemy wszystkie czerwone krawędzi do v żeby dostać czerwone K_s, albo mamy niebieskie K_t. Analogiczny dowód dla drugiego przypadku.

3.2 Ramsey but no restrictions on colorzzz

Let $k, s_1, \ldots, s_k \geq 2$. The Ramsey number $R(s_1, \ldots, s_k)$ is the smallest number n such that any k-edge coloring on graph K_n contains at least one of $K_{s_1}, \ldots, K_{s_k}$ monochromatic graphs.

Similar argument: $R(s,t,u) \leq R(s,t,u-1) + R(s,t-1,u) + R(s-1,t,u)$ and so on for more colors.

Multicolor Ramsey Theorem - let $k, s_1, \ldots, s_k \geq 2$. Then $R(s_1, \ldots, s_k)$ exists and if $k > 2$ we have

$$R(s_1, \ldots, s_k) \leq R(s_1, \ldots, s_{k-2}, R(s_{k-1}, s_{k-2})).$$

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

Induction on k. If $k = 2$, then we have the standard Ramsey theorem.

Now we have $k > 2$. Let $n = R(s_1, \dots, s_{k-2}, R(s_{k-1}, s_k))$. We will be coloring K_n. Let s_{k-1} be light blue and s_{k-2} be dark blue, while the remaining colors be non-blue. We will "merge" blue colors. Then we get a $k - 1$ coloring.
We know that in K_n contains a K_{s_i} coloring for $i \in [k - 2]$ and a blue $K_{R(s_{k-2}, s_k)}$. By the definition of Ramsey numbers, then if we want to choose in the latter one two colors, we will always find a s_{k-2} light blue coloring or a s_k dark blue coloring. Which is the end, my fellow kidz.