Algebra II (ISIM), lista 1 (12.10.2021, deklaracje do godziny 9:00).

Symbolem – oznaczone będą ćwiczenia do samodzielnego wykonania, bez omawiania na zajęciach (chyba że na życzenie studentów). Wszystkie działania są (domyślnie) binarne. G oznacza zazwyczaj grupę.

Teoria: Działanie w zbiorze: defnicja, własności działań (łączność, przemienność, rozdzielność, element neutralny). Struktura algebraiczna, izomorfizm i homomorfizm struktur. Epi-, mono-, izo-, endo- i automorfizm. Podstruktura. Generowanie podstruktury. Indukowanie struktury (działania, transport działania). Grupa i grupa abelowa: definicja, podstawowe własności, notacja multyplikatywna i addytywna. Rząd grupy. Podgrupa: defnicja, podstawowe własności, charakteryzacja podgrupy jako podstruktury.

1. – Załóżmy, że $F : (A, \circ) \to (B, *)$ jest homomorfizmem struktur. Udowodnić, że $F[A]$ jest podstrukturą struktury B.

2. – Załóżmy, że $\emptyset \neq X \subseteq A$, gdzie $A = (A, \circ)$ jest strukturą algebraczną. Udowodnić, że $\langle X \rangle$ jest najmniejszą podstrukturą struktury A zawierającą X.

3. Udowodnić uwagę 1.6. Podać wzor na indukowane działanie $*$.

4. – $F : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ określone jest przez: $F(0) = 1$, $F(1) = 3$, $F(2) = 0$, $F(3) = 2$. Podać tabelkę działania $*$ indukowanego w zbiorze $\mathbb{Z}_4$ przez F i $+_4$.

5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.

6. $*$ W zbiorze A określone jest działanie $*$ takie, że dla dowolnych $a, b \in A$ mamy
$$(a * b) * b = a \text{ oraz } b * (b * a) = a.$$
Udowodnić, że:
(a) $(b * a) * b = a,\ b * (a * b) = a$.
(b) $*$ jest przemienne.

7. W zbiorze G określone jest działanie $\circ$. Stwierdzić, czy jest to działanie grupowe.
(a) $G = R^* = R \setminus \{0\}$, $x \circ y = xy$, gdy $x > 0$, oraz $x \circ y = x/y$, gdy $x < 0$.
(b) $G = \mathbb{Z}, x \circ y = x + y$, gdy x jest parzyste, oraz $x \circ y = x - y$, gdy x jest nieparzyste.

8. – Udowodnić, że w grupie G dla każdego elementu istnieje jedyny element doń odwrotny.

9. Udowodnić uwagę 1.10.

10. (a)– Podać przykład grupy $G = (G, \cdot)$ i jej podstruktury H, która nie jest podgrupą grupy G.
(b) Udowodnić uwagę 1.12(2).

11. Niech $g \in G$. Określamy funkcje $l_g, r_g : G \to G$ (lewe i prawe przesunięcie o g): $l_g(x) = gx,\ r_g(x) = xg$. Udowodnić, że funkcje te są bijekcjami.

12. Udowodnić, że $(\mathbb{Z}_p, \cdot_p)$ jest grupą.

13. Załóżmy, że $a^2 = e$ dla wszystkich elementów a grupy G. Udowodnić, że G jest abelowa.

14. Wyznaczyć poniższe grupy automorfizmów.
(a) $Aut(\mathbb{N}, +)$ — tu pokazać, że jest to grupa trywialna.
(b)* $Aut(N, \cdot)$ — tu pokazać, że jest ona izomorficzna z grupą $Sym(\mathbb{N})$ (w szczególności jest mocy continuum).

Program wykładu:
I. Grupy:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Działania grup. Twierdzenie Lagrange'a. Lemat Burnside'a z zastosowaniami.
3. Homomorfizmy grup, dzielniki normalne i grupy ilorazowe.
4. Grupy permutacji.
5. Twierdzenia Sylowa. Grupy małych rzędów.
6. Geometryczne przykłady grup.
7. Skończone grupy abelowe.
8. Grupa wolna i prezentacja grupy.
II. Pierścienie:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Teoria podzielności w pierścieniach, w tym warunek UFD.
3. Homomorfizmy perścieni, ideały i pierścienie ilorazowe.
4. Pierścienie ideałów głównych i pierścienie euklidesowe.
5. Dziedziny (całkowitości) i ich ciała ułamkow.
6. Jednoznaczność rozkładu w pierścieniach wielomianow.
7. Pierścienie noetherowskie. Twierdzenie Hilberta o bazie.
8. Bazy Groebnera (nieobowiązkowe).
III. Ciała:
1. Podstawowe definicje. Ciała jako pierścienie ilorazowe.
2. Ciała skończone. Kody BCH (nieobowiązkowe).
Książki:
M.Artin, Algebra
S.Lang, Algebra
Vinberg, Kurs algebry
Kostrykin, Wstęp do algebry
Gilbert, Nicholson, Modern algebra with applications
Shafarevich, Basic notions of algebra
Garrett, Abstract Algebra
Białynicki-Birula, Zarys Algebry.

Zaliczenie ćwiczeń: system 3 kolokwiów po 60 minut, na początku zajęć (3x20 pkt) + 15pkt (aktywność). Zaliczenie: minimum 28 pkt, w tym minimum 24 za kolokwia. Kolejne progi na wyższe oceny to: 36, 44, 52, 60.

Mały punkt otrzymuje się za deklarację rozwiązania podpunktu zadania z list 1-12 (bez minusa) lub jako punkt bonusowy. Za błędne rozwiązanie można otrzymać małe punkty ujemne (do -6). Kurs wymiany: 10 małych punktów = 1 pkt za aktywność. Terminy kolokwiów: 16.11, 14.12 i 25.01. Egzamin: pisemny, 150 minut.

Wspólnie z prof. Piotrem Kowalskim, wykładowcą na Algebrze 1, ustaliliśmy następujące warunki przenoszenia z Algebry II na Algebrę 1 studentów, którzy nie dają sobie rady na Algebrze II:

1. Każdy ze studentów Algebry II może przenieść się na Algebrę 1 do 22.11.2021 (bez żadnych warunków), składając odpowiednie podanie do dyr. T.Elsnera oraz dodatkowo wysyłając do niego email. Jeśli przeniesienie nastąpi po pierwszym kolokwium na algebrze II, punkty zostaną odpowiednio przeliczone. Po przeniesieniu obowiązują zasady zaliczeń ogłoszone na Algebrze 1.

2. Każdy ze studentów Algebry II, który nie skorzystał z możliwości opisanej w punkcie 1, a uzyskał z trzech kolokwiów na Algebrze II minimum 18 punktów, może przenieść się na Algebrę 1 w okresie 26.01 - 31.01.2022, składając podanie do dyr. T.Elsnera i wysyłając email. W tym przypadku student taki traci zaliczenie ćwiczeń na Algebrze II, natomiast na Algebrze 1 jest dopuszczony tylko do pierwszego terminu egzaminu, który jest równocześnie testem na zaliczenie ćwiczeń. Jeśli student obleje ten egzamin, uzyskuje ocenę niedostateczną na zaliczenie ćwiczeń z Algebry 1. Jeśli uzyska ocenę pozytywną z egzaminu, ocena ta jest również oceną na zaliczenie ćwiczeń.

3. W związku z epidemią COVID-19 przenoszenie w trybie 1 i 2 jest uwarunkowane dostępnością miejsc.

Po akceptacji przez dyr. T.Elsnera student jest zobowiązany powiadomić prof. Piotra Kowalskiego o dołączeniu do zajęć z Algebry 1.

Listy zadań będa publikowane w zespole Algebra II, 2021/22 w MS Teams. Tamże, w plikach będą tabelki, gdzie studenci będą deklarować rozwiązania zadań (przy pomocy plusów), podobnie jak na algebrze I w roku 2020/21. Zachęcam do konsultacji i zadawania pytań, zarówno stacjonarnie jak i przez Teams (przez telefon tamże lub wpisując pytanie w kanale w zespole w Teams).