Algebra II (ISIM), lista 10 (11.01.2022, deklaracje do godziny 9:00)

Teoria: Pierścień noetherowski. Tw. Hilberta o bazie. Dziedzina (całkowitości). Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy. Pierścień Gaussa. Pierścień euklidesowy jest PID. Ideały pierwsze, maksymalne, związki z dziedzinami i ciałami (pierścienie ilorazowe). W PID niezerowy ideal pierwszy jest maksymalny. Elementy nierozkładalne w dziedzinie. W dziedzinie noetherowskiej każdy niezerowy element nieodwracalny jest iloczynem elementów nierozkładalnych. Dziedzina z jednoznacznością rozkładu.

R, R' oznaczaja pierścienie przemienne z jednością.

1. – Sprawdzić, że podane zbiory liczb są pierścieniami (ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb):
(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$,
(b) (pierścień Gaussa) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$
(c) $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + bi\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$,
(d) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Dowieść, że
(a) produkt dwóch pierścieni ideałów głównych jest pierścieniem ideałów głównych.
(b) $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2, \ldots]$ nie jest noetherowski.

3. Dowieść, że jedyne ideały niezerowe w pierścieniu $\mathbb{R}[\![X]\!]$ to $(X^0), (X^1), (X^2), \ldots$. Wywnioskować, że pierścień ten jest pierścieniem ideałów głównych (jest też dziedziną...) oraz (X) to jedyny niezerowy ideał pierwszy w tym pierścieniu.

4. * Dowieść, że pierścienie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ i $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ są euklidesowe (wsk: w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ rozważyć normę euklidesową $\delta(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$).

5. (a)– W pierścieniu Gaussa wykonać dzielenie z resztą $17 + 11i$ przez $3 + 4i$.
(b) Podać przykłady dzieleń z resztą w tym pierścieniu, gdzie liczba możliwych wyników to $1, 2, 3, 4$.

6. – (a) Zaznaczyć na płaszczyźnie Gaussa wszystkie liczby $z \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $\delta(z) \leqslant 10$. Ile ich jest?
(b) Wyznaczyć wszystkie jednostki (tj. elementy odwracalne) w pierścieniu Gaussa.
(c) Które z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 1+i, 2+i, 3+i, 4+i, 5+i$ są nierozkładalne w pierścieniu Gaussa?

7. (a) W pierścieniu $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ wyznaczyć grupę jednostek.
(b) Podać przykład wskazujący, że pierścień ten nie ma jednoznaczności rozkładu.

8. – (prawo skracania) Udowodnić, że w dziedzinie R: jeśli $ab = ac$ i $a \neq 0$, to $b = c$.

9. Załóżmy, że $I \lhd R$ jest właściwy. Udowodnić, że I jest pierwszy $\iff$ R/I jest dziedziną.

10. Udowodnić, że skończona dziedzina jest ciałem (por. twierdzenie Wedderburne'a).