Algebra II (ISIM), lista 13 (deklaracje 1.02.2022, ćwiczenia 2.02.2022)

Teoria: Postać normalna elementu $k[x]/I$. (–)Porządek dopuszczalny w zbiorze wieloindeksów. (–)Redukcja wielomianu modulo F. (–)Baza Gröbnera ideału $I \lhd k[\bar{x}]$: definicja, własności. (–)Charakteryzacja bazy Gröbnera przy pomocy S-wielomianów. (–)Algorytm Buchbergera. (–) oznacza, że dane zagadnienie nie obowiązuje na egzaminie i na kolokwiach.

R oznacza pierścień przemienny z $1 \neq 0$.

1. $-$ Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych, w postaci normalnej.
   (a) $3x + 4 + I$ i $5x - 2 + I$ w $\mathbb{Q}[x]/I,\ I = (x^2 - 7)$.
   (b) $x^2 + 3x + 1 + I$ i $-2x + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[x]/I$, gdzie $I = (x^3 + 2)$
   (c) $x^2 + 1 + I$ i $x + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[x]/I$, $I = (x^3 + x + 1)$
   (d) $ax + b + I$ i $cx + d + I$ w $\mathbb{R}[x]/I$, $I = (x^2 + 1)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

2. $-$ Załóżmy, że R' jest nadpierścieniem pierścienia R, $a \in R'$ oraz $I = \{f \in R[x] : f(a) = 0\}$. Dowieść, że $I \lhd R[x]$, $R[a] = \{f(a) : f \in R[x]\}$ jest podpierścieniem pierścienia R' (generowanym przez $R \cup \{a\}$) izomorficznym z R/I.

3. Wielomian $W(x) = x^3 + x + 1$ jest nierozkładalny w pierścieniu euklidesowym $\mathbb{Z}_2[x]$, zatem pierścień ilorazowy $\mathbb{Z}_2[x]/I$, gdzie $I = (W)$, jest ciałem.
   (a)– Ile elementów ma to ciało?
   (b) Obliczyć element odwrotny w ciele $\mathbb{Z}_2[x]/I$ do elementu $x + 1 + I$. (wsk: skorzystać z algorytmu Euklidesa).
   (c) Korzystając z postaci normalnej elementu ciała $\mathbb{Z}_2[x]/I$ określić strukturę ciała w zbiorze 8-elementowym $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4. $-$ To samo, co w zadaniu poprzednim, dla ciała 9-elementowego $\mathbb{Z}_3[x]/I$, gdzie $I = (x^2 + 1)$.

5. $\Phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ dane jest wzorem $\Phi(f) = f(\sqrt[3]{2})$. Udowodnić, że:
   (a)– Φ jest homomorfizmem pierścieni (bez rachunków!).
   (b) $Im(\Phi) = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
   (c) $Ker(\Phi) = (x^3 - 2)$.
   (d) Pierścień $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ jest ciałem izomorficznym z pierścieniem ilorazowym $\mathbb{Q}[x]/Ker(\Phi)$.
   (e) Określamy $\Psi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$ wzorem $\Psi(f) = f(\alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ oraz $\alpha^3 = 2$. Udowodnić, że

   $$Im(\Psi) = \mathbb{Q}[\alpha] := \{a + b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

   jest ciałem izomorficznym z ciałem $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

6. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wsk: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał, skorzystać z

zsadniczego tweirdzenia o homomorfizmie pierścieni.
(a) $\mathbb{R}[x]/(x^2+5) \cong \mathbb{C}$
(b)– $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]$
(c)– $\mathbb{Q}[x]/(x^2-7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a+b\sqrt{7} : a,b \in \mathbb{Q}\}$
(d) $\mathbb{Z}[x]/(2x-1) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.
(e)– $\mathbb{Z}_{36}/(4) \cong \mathbb{Z}_4$
(f) $\mathbb{R}[x,y]/(x+y) \cong \mathbb{R}[y]$
(g) $\mathbb{Z}[x]/(3,x+1) \cong \mathbb{Z}_3$
(h) $\mathbb{Q}[x]/(x(x+1)) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

7. * Czy $\mathbb{Q}[x]/(x^2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x(x+1))$?

8. Załóżmy, że $\preceq$ jest porządkiem dopuszczalnym na $\mathbb{N}^n$, $n \geqslant 0$.
(a) Udowodnić, że jeśli $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{N}^n$ oraz $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla wszystkich i, to $\bar{\alpha} \preceq \bar{\beta}$.
(b) Udowodnić, że $\preceq$ jest dobrym porządkiem.
(c)* Jaki jest największy typ porządkowy porządku dopuszczalnego na $\mathbb{N}^n$?
(d)* Ile jest różnych porządków dopuszczalnych na $\mathbb{N}^n$?

9. – * Obliczyć bazę Gröbnera dla ideału $I = (x^2-y, xy-1) \lhd k[x,y]$ względem porządku leksykograficznego z $y < x$, zgodnie z algorytmem Buchbergera. Obliczyc ciąg ideałów generowanych przez wiodące wyrazy wielomianów bazy na każdym kroku dowodu.