Zadania z ⋆⋆ LISTA 3

Weronika Jakimowicz

32 października 2022

ZAD 12.

Zauważmy, że jesli $f(x) \in P_2$, to f możemy zapisać jako

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ takich, że $a + b + c = 1$. W takim razie, funkcja $\phi(f)$ sprowadza się do postaci:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)^2 dx,$$

co z kolei jest równe:

$$\phi(f) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2.$$

Całe zadanie sprowadza się do znalezienia minimum funkcji trzech zmiennych

$$F(a, b, c) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2$$

przy warunku, że funkcja

$$g(a, b, c) = a + b + c = 1.$$

Używając mnożników Lagrange'a dostajemy układ równań postaci

$$\begin{cases} \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c + \frac{b}{2} - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}b + \frac{a}{2} + c - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}a + b + 2c - \lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a + 20c + 15b - 30\lambda = 0 \\ 4b + 3a + 6c - 6\lambda = 0 \\ 2a + 3b + 6c - 3\lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

1. $\lambda = 0$, wtedy

$$\begin{cases} 3a + 4b + 6c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \\ 12a + 15b + 20c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 20c = 3a \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{20}{3} \\ b = -\frac{20}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$F(\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}, 1) = \frac{7}{27}$$

2. $\lambda \neq 0$

Jeśli zapiszemy je w postaci macierzy, dostajemy:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Korzystając z metody eliminacji Gaussa, dostajemy macierz

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Która daje nam poniższe równanie:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3}c = \lambda \\ \frac{1}{4}b + c + \frac{3}{2}\lambda = 0 \\ 12a + 15b + 20c - 30\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{9} \\ c = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Zauważmy, że zbiór P_2, oraz zbior wektorów z $\mathbb{R}^3$ o kolejnych współrzędnych będących współczynnikami wielomianów z P_2, jest niezwarty i nieograniczony. Musimy więc sprawdzić, co się dzieje kiedy

$$\|(a, b, c)\| \to \infty$$

Wtedy $a^2 + b^2 + c^2 \to \infty$, a wiec

$$F(a, b, c) \to \|(a, b, c)\| \to \infty\infty$$

czyli wiemy, że dla nieskończenie długich wektorów wartość funkcji jest nieskończenie wysoka.

Wartość funkcji F w punkcie który został otrzymany w powyższych obliczeniach wynosi

$$F(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$$

czyli jest niższa niż dla przypadku $\lambda = 0$.

Ponieważ warunek $x + y + z = 1$ każe nam szukać rozwiązań na płaszczyznie, możemy uzależnić jedną zmienną od innych, np x

$$x = 1 - z - y,$$

oraz zbadać nową funkcję, de facto funkcję dwóch zmiennych. Nazwijmy ją $G(y, z)$, ze wzorem wynikłym ze wzoru na F:

$$G(y, z) = \frac{1}{30}(y^2 + 7yz + 3y + 16z^2 + 8z + 6).$$

Hesjan takiej funkcji wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 32 \end{bmatrix} = 64 - 49 > 0$$

i jest niezależny od y, z oraz dodatni, więc funkcja na badanej płaszczyznie jest wypukła. W takim razie znalezione przeze mnie ekstremum to minimum.