# MDM Lista 5

Weronika Jakimowicz

## ZAD. 1

Funkcja Eulera $\phi(n)$ zwraca ilość liczb względnie pierwszych z n. W zadaniu spotykamy się tylko z potęgami liczby pierwszej, a wiemy, że dla dowolnej liczby k

$$k \perp p_i^{n_i} \iff p_i \nmid k.$$

Wielokrotności liczby $p_i$ w ciągu $\{0, 1, ..., p_i^{n_i} - 1\}$ jest

$$|\{0, p_i, 2p_i, ..., p_i^{n_i} - p_i\}| = p^{n_i - 1}$$

a więc $\phi(p_i^{n_i})$ daje ilość wszystkich liczb w tym ciągu z pominięciu wielokrotności $p_i$, więc

$$\phi(p_i^{n_i}) = p_i^{n_i} - p_i^{k_i - 1}.$$

$$\begin{aligned}\psi(n) &= \mathrm{lcm}(\phi(p_1^{n_1}), \phi(p_2^{n_2}), ..., \phi(p_s^{n_s})) = \\ &= \mathrm{lcm}(p_1^{n_1-1}(p_1 - 1), p_2^{n_2-1}(p_2 - 1), ..., p_s^{n_s-1}(p_s - 1)) = \\ &= \mathrm{lcm}(p_1 - 1, ..., p_s - 1)\prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i - 1}\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $i \neq j$ $p_i^{n_i-1} \perp p_j^{n_j-1}$.

Udowodnijmy pomocniczo, że jeśli $n = n_1 n_2$ dla $n_1 \perp n_2$, to

$$\phi(n) = \phi(n_1)\phi(n_2).$$

Weźmy dowolne m takie, że $m \perp n$ i $m < n$. Zauważmy, że zachodzi wtedy m jest jednocześnie względnie pierwsze z $n_1$ i $n_2$. Kombinatorycznie, m które to spełniają jest $\phi(n_1) \cdot \phi(n_2)$ i to daje nam wszystkie możliwości na m.

Teraz, jeśli weźmiemy $n_1 = p_1^{n_1}$ oraz $n_2 = \prod_{i=2}^{s} p_i^{n_i}$, to mamy $n_1 \perp n_2$ i

$$\phi(n) = \phi(p_1^{n_1})\phi(\prod_{i=2}^{s} p_i^{n_i}).$$

Możemy tę samą operację powtórzyć dla drugiego czynnika, co da nam

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{s}\phi(p_i^{n_i}) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i-1}(p_i - 1).$$

Zauważmy teraz, że istnieje $A \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i-1}(p_i - 1) = A \cdot \mathrm{lcm}(p_1 - 1, ..., p_s - 1)\prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i-1} = A \cdot \psi(n).$$

Wracając do treści zadania, chcemy pokazać, że dla $a \perp n$ zachodzi

$$a^{\psi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

$$a^{\phi(n)} = a^{A\psi(n)}.$$

# ZAD. 3

Niech n będzie największą z tych liczb. Chcemy pokazać, że

$$k! | n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Zauważmy, że

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\frac{n!}{(n-k)!k!} = k!\binom{n}{k}$$

a dwumian Newtona dla $n, k \in \mathbb{N}$ jest zawsze liczbą naturalną, więc otrzymaliśmy, że dla $m = \binom{n}{k}$

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = k!m$$

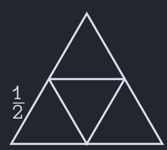
# ZAD. 4

a) Niech n będzie liczbą drużyn. Każda z nich zagra dokładnie n − 1 meczy. Czyli możemy podpisać szufladki ilością rozegranych do tej pory meczy, będzie ich n sztuk.

Jeżeli tylko jedna drużyna do tej pory z nikim nie grała, to nie może też się zdażyć, że któraś drużyna rozegrała wszystkie swoje mecze. Odpada więc jedna drużyna i szufladki podpisane 0 i n − 1, co zostawia nas z n − 1 drużynami pakowanymi do n − 2 szufladek, więc dwie wpadną do jednej szufladki i będą miały taką samą ilość meczów.

Jeżeli każda drużyna rozegrała co najmniej jeden mecz, to odpada nam szufladka podpisana 0. Mamy więc n − 1 szufladek i n drużyn, z czego wynika że dwie mają tę samą ilość rozegranych meczy.

b) Podzielmy trójkąt równoboczny na 4 trójkąty tak, jak na ilustracji obok. Dostajemy 4 trójkątów równobocznych o boku $\frac{1}{2}$. Odległość dwóch dowolnych punktów znajdujących się w obrębie jednego z tych małych trójkątów jest co najwyżej $\frac{1}{2}$. Wybierając 5 losowych punków w dużym trójkącie mamy pewność, że co najmniej dwa będą usytuowane w obrębach jednego małego trójkąta, a więc odległość między nimi nie przekroczy $\frac{1}{2}$.




c) Niech n będzie ilością ścian w wielościanie wypukłym. Każda ściana ma między 3 (czworościan) a n − 1 sąsiadów. Ilość sąsiadów ściany to również ilość jej krawędzi. Mamy n − 3 szufladki i n ścian do rozłożenia między nie, więc na pewno stanie się, że dwie wylądują w jednej szufladce i będą miały równą ilość krawędzi.

# ZAD. 5

Jeżeli jedna z liczb jest podzielna przez n, to zadanie jest trywialne. Rozważmy więc sytuację, kiedy żadna z liczb $a_1, \dots, a_n$ nie jest podzielna przez n. Zauważmy, że wtedy reszta z dzielenia każdej z tych liczb przez n jest co najmniej 1 i co najwyżej $n-1$.

Oznaczmy przez $S_k$ sumy częściowe tych liczb:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Reszta z dzielenia $S_k$ przez n wpada pomiędzy 0 a n − 1. Znowu, jeśli trafi nam się suma częściowa podzielna przez 0, to kończymy. W przeciwnym wypadku dostajemy szufladki podpisane resztami od 1 do n − 1, co daje n − 1 szufladek na n sum. W takim razie dwie różne sumy mają tę samą resztę z dzielenia przez n, niech to będą $S_j$ i $S_k$, $j > k$. Ich różnica $S_j - S_k$ jest podzielna przez n, a wynosi

$$S_j - S_k = \sum_{i=1}^{j} s_i - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=k}^{j} a_i$$

i to jest koniec.

# ZAD. 6

Jeśli dwie liczby się powtarzają, to oczywiście wystarczy wziąć dwa singletony tych powtarzających się liczb. Przyjmijmy więc, że taka sytuacja nie ma miejsca.

Spośród 10 liczb możemy wybierać niepuste podzbiory na

$$2^{10} - 1 = 1023$$

sposobów, bo zbiór potęgowy zbioru 10 elementowego ma $2^{10}$ elementów, ale my nie chcemy zbioru pustego z oczywistych przyczyn.

Suma s podzbioru 10 różnych liczb naturalnych jest pomiędzy

$$1 \leq s \leq 945 = \sum_{i=1}^{10} (89 + i)$$

więc mamy 943 możliwych wartości s, a dla dowolnego zbioru S możemy takich wartości wyprodukować 1023. W takim razie co najmniej dwie z nich mają tę samą sumę.