ZAD: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9

zadanie 7 - brak podpunktu d

Z gory przepraszam za brak polskich znakow - nie udalo mi sie polaczyc polskiego i niestandardowych czcionek w latexu.

ZAD 1.

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$$

Niech $\mathbb{Z} \ni m = \lfloor an \rfloor$, wtedy

$$\begin{aligned} m &\leq an < m+1 \\ m-n &\leq an-n < m-n+1 \\ n-m &\geq n-an > n-m-1 \end{aligned}$$

Poniewaz $n \notin \mathbb{Q}$, to $n-an \notin \mathbb{Z}$, wiec

$$\lfloor n-an \rfloor = n - \lfloor an \rfloor - 1$$

a z tego

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor n(1-a) \rfloor = n-1$$

$$\lceil an \rceil + \lceil n-an \rceil = n+1$$

ZAD 2.

$$\lfloor \frac{x}{m} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{m} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{x+m-1}{m} \rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor \quad (🦇)$$

Po pierwsze pokazemy, ze dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor \quad (☕)$$

Niech $p = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor$, wtedy

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ \mathbb{Z} \ni m \cdot p - n &\leq \lfloor x \rfloor < m \cdot (p+1) - n \in \mathbb{Z} \\ m \cdot p - n &\leq x < m \cdot (p+1) - n \\ p &\leq \frac{x-n}{m} < p+1 \\ p &\leq \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor < p+1 \\ p &= \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

Czyli pokazalismy (☕).

Po drugie, zauwazmy, ze dla dowolnego n i dla kazdego $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m > 1$ zachodzi

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{n+i}{m} \right\rfloor$$

Zauwazmy, ze jest to ilosc elementow w kazdej grupie przy podziale n elementow na m grup. Jesli n jest podzielne przez m, to problem jest trywialny. Niech wiec istnieja takie $k, r \in \mathbb{Z}$, $r \in (0, m)$ takie, ze

$$n = km + r.$$

W takim razie istnieje $p \in \mathbb{Z} \cap (0, m)$ takie, ze

$$km + r + p < (k+1) + m$$

$$km + r + p + 1 = (k+1) + m.$$

To znaczy, ze przez pierwsze p kolumn ukladamy $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ elementow, a przez pozostale $m - p$ kolumn rozkladamy o jeden element wiecej. Przez to, ze bierzemy podloge, calosc sumuje sie do n elementow.

Wracajac do ( ), mozemy powiedziec, ze

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

ZAD 3.

a) potrzebujemy a_0, a_1, natomiast a_2 mozemy juz obliczyc za pomoca a_0

b) potrzebne jest a_0, a_1 oraz a_2, bo wyraz a_3 to juz suma wyrazow poprzednich

c) potrzebny jest tylko wyraz a_0 – jest on potrzebny dla a_1, dla a_2 potrzebne jest a_1 i tak dalej – zawsze przy odpowiedniej ilosci podzielen na 2 otrzymujemy a_0

ZAD 4.

a) $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $f_1 = 3$.

To jest suma szeregu geometrycznego:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} 3^i = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

Pokazemy to za pomoca indukcji.
1^o $n = 2$, wtedy

$$f_2 = 3 + 3^2 = 12 = \frac{3^3 - 3}{2} = \frac{24}{2} = 12 = f_2.$$

2^o zakladamy, ze dla pierwszych n wyrazow wzor jest prawdziwy, wowczas

$$f_{n+1} = f_n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}(1+2) - 3}{2} = \frac{3^{n+2} - 3}{2}$$

b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$

$$h_n = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) n$$

1^o $n = 2$

$$h_2 = h_1 - n = -1$$

2^o zalozmy, ze jest to prawda dla pierwszych n wyrazow. Rozwazmy dwa przypadki:
A. $2 | n+1$, czyli $n + 1 = 2k + 2$, natomiast $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= h_n - (n+1) = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) n - n - 1 = -k + (n - 2k) n - n - 1 = -k - 1 = \\ &= -(k+1) = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \underbrace{(n + 1 - 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)}(n+1) \end{aligned}$$

zaznaczony fragment wylicza sie do 0.
B. $2 \nmid n+1$, czyli $n + 1 = 2k + 1$, natmoiast $n = 2k$

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= h_n + (n+1) = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) n (n+1) = \\ &= -k + (n - 2k) n - n - 1 = -k + (n+1) = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \underbrace{(n + 1 - 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)}(n+1) \end{aligned}$$

zaznaczony fragment wylicza sie do 1

c) $l_n = l_{n-1} l_{n-2}$ dla $n > 2$ i $l_1 = l_2 = 2$
Oznaczmy przez f_n n-ty wyraz ciagu fibbonacciego, wtedy

$$l_n = 2^{f_n}$$

1° $n = 3$

$$l_3 = 2 \cdot 2 = 2^2 = 2^{f_3}.$$

2° zakladamy, ze wzor jest poprawny dla pierwszych n wyrazow, wowczas

$$l_{n+1} = l_n l_{n-1} = 2^{f_n} 2^{f_{n-1}} = 2^{f_n + f_{n-1}} = 2^{f_{n+1}}$$

ZAD 5.

a) $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ dla $a_0 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n | 2 \\ 2 \end{cases}$$

Dla $n = 0, 1$ - dziala. Zalozmy, ze dziala tez dla wszystkich wyrazow mniejszych niz n. Rozwazamy dwa przypadki:

$2 | n$, wtedy $2 \nmid n - 1$ i mamy $a_{n-1} = 2$

$$a_n = \frac{2}{2} = 1$$

czyli tak jak jest we wzorze.

$2 \nmid n$, wtedy $a_{n-1} = 1$ i

$$a_n = \frac{2}{1} = 2.$$

b) $b_n = \frac{1}{1 + b_{n-1}}$ $b_0 = 0$

Oznaczmy jako f_n n-ty wyraz ciagu fibbonacciego, czyli $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, gdzie $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Wtedy

$$b_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}.$$

Dla $n = 0, 1$ mamy $b_0 = \frac{0}{1} = 0$ oraz $b_1 = \frac{1}{1} = 1$. Zalozmy, ze dla wszystkich wyrazow do b_n wzor dziala. Wtedy

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{1 + b_n} = \frac{1}{1 + \frac{f_n}{f_{n+1}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}}} \frac{f_{n+1}}{f_n + f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \end{aligned}$$

c) $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$ $c_0 = 1$
Dla $n \neq 0$ zachodzi

$$c_n = 2^{n-1}$$

natomiast dla $n = 0$ mamy $c_0 = 1$.

Dla $n = 1, 2$ jest $c_1 = 2^0 = 1$, $c_2 = 2^2 = 2$. Zalozmy, ze dla kazdego n wzor jest prawdziwy, wtedy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i + c_n = \\ &= c_n + c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

d) $d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$ $d_0 = 1$ $d_1 = 2$

Dla $n = 0, 1$ mamy $d_0 = 2^0 = 1$, $d_1 = 2^1 = 2$. Zalozmy, ze dla wszystkich n wzor jest prawdziwy, wowczas

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{d_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$$

ZAD 6.

a) $y_0 = y_1 = 1,\ y_n = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}}$

$$y_n = 1$$

Dla $n = 2$ $y_2 = 1$. Zalozmy, ze dla pierwszych n wyrazow wzor jest prawdziwy, wowczas

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $z_0 = 1,\ z_1 = 2,\ z_n = \frac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}}$

$$z_n = n + 1$$

Dla $z_2 = 3$, wiec zalozmy, ze dla wszystkich n wzor zachodzi, wowczas

$$z_{n+1} = \frac{z_n^2 - 1}{z_{n-2}} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n} = \frac{n^2 + 2n}{n} = n + 2 = (n+1) + 1$$

c) $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4}$

$$a_n = n^2$$

Dla $n = 2$ smiga, zalozmy, ze smiga tez dla wszystkich n. Wowczas

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{(t_n - t_{n-1} + 3)^2}{4} = \frac{(n^2 - (n-1)^2 + 3)^2}{4} = \\ &= \frac{(n^2 - n^2 + 2n - 1 + 3)^2}{4} = \frac{(2n+2)^2}{4} = \\ &= \left(\frac{2n+2}{2}\right)^2 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

ZAD 7.

a) $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ dla $a_0 = 1$

$$a_n = n! + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}$$

Dla $n = 1, 2$ dziala. Zalozmy, ze dziala tez dla wszystkich n, wtedy

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 = (n+1)\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)!}{i!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!}$$

b) $b_0 = \frac{1}{2},\ nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1$ czyli dla $n > 0$ mamy $b_n = \frac{(n-2)b_{n-1} + 1}{n}$

$$b_n = \frac{1}{2}$$

Dla $n = 1, 2$ dziala, zalozmy ze dziala tez dla wszystkich n, wtedy

$$b_{n+1} = \frac{(n-1)b_n + 1}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(n-1) + 1}{n+1} = \frac{n - 1 + 2}{2(n+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

c) $c_0 = 0,\ nc_n = (n+2)c_{n-1} + n + 2$, dla $n > 0$ $c_n = \frac{(n+2)c_{n-1} + n + 2}{n}$

$$c_n = \sum_{i=1}^{n}(2i + 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i + n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n = n(n+1) + n$$

Dla $n = 1, 2$ dziala, zalozmy, ze jest zgodny dla wszystkich n, wtedy

$$c_{n+1} = \frac{(n+3)c_n + n + 3}{n+1} = \frac{(n+3)(n(n+1)+n)+n+3}{n+1} =$$
$$= = \frac{(n+3)(n(n+1)+n+1)}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1)(n+1)}{n+1} =$$
$$= (n+3)(n+1) = (n+1)(n+2) + (n+1)$$

d) $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}$, czyli d;a $n > 0$ $d_n = \frac{(n-2)!d_{n-1}d_{n-2}}{n}$

$$d_0 = 1$$
$$d_1 = 2$$
$$d_2 = 1$$
$$d_3 = \frac{2}{3}$$
$$d_4 = \frac{1}{3}$$
$$d_5 = \frac{4}{15}$$

ZAD 8.

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

Rozpiszmy pierwsze 6 wyrazow badanego ciagu:

$$a_0 = \alpha$$
$$a_1 = \beta$$
$$a_2 = \frac{1+a_1}{a_0} = \frac{1+\beta}{\alpha}$$
$$a_3 = \frac{1+a_2}{a_1} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}$$
$$a_4 = \frac{1+a_3}{a_2} = \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\beta+\beta^2} = \frac{\alpha+1}{\beta}$$
$$a_5 = \frac{1+a_4}{a_3} = \frac{\beta+\alpha+1}{\beta}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1} = \alpha$$
$$a_6 = \frac{1+a_5}{a_4} = (1+\alpha)\frac{\beta}{1+\alpha} = \beta$$

Z powyzszych wyliczen wynika, ze ciag ma tylko 4 rozne wartosci, ktore powtarzaja sie cyklicznie. W takim razie wystarczy, zeby kazdy z tych wyrazow byl rozny od 0.

W takim razie $\alpha, \beta \neq 0$. Z wyrazu a_4 musi zachodzic $\alpha + 1 \neq 0$, co daje $\alpha \neq -1$, a z wyrazu a_2 mamy $\beta + 1 \neq 0$, $\beta \neq -1$

Z licznika a_3 mamy nierownosc
$$\alpha + \beta + 1 \neq 0,$$
czyli
$$\alpha \neq -1 - \beta.$$

ZAD 9.

a) $f(1) = 1$, $f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$

$$f(n) = 2n - 1$$

Dla $n = 1, 2$ smiga, zalozmy, ze smiga tez dla pierwszych n wyrazow. Rozwazmy dwa przypadki:
1^o $2|n$, mozemy wiec zapisac $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f(n) = f(2k) = f(k) + f(k) + 1 = 2k - 1 + 2k - 1 + 1 = 4k - 1 = 2n - 1$$

2^o $2 \nmid n$, wtedy $n = 2k+1$

$$f(n) = f(k) + f(k+1) + 1 = 2k - 1 + 2k + 1 + 1 = 4k + 2 - 1 = 2n - 1$$

b) $g(0) = 0$, $g(n) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor$

$$g(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} i = \frac{1}{2}(\lfloor \log_2 n \rfloor)(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)$$

1^o dla $n = 1$ mamy

$$g(1) = g(0) + 0 = 0 = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$$

2^o zalozmy, ze wzor jest poprawny dla pierwszych n wyrazow, rozwazmy dwie mozliwosci:

A. $n + 1 = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
g(n+1) &= g(2^k) = g(2^{k-1}) + \lfloor \log_2 2^k \rfloor = \frac{1}{2}(\lfloor \log_2 2^{k-1} \rfloor)(\lfloor \log_2 2^{k-1} \rfloor + 1) + k = \\
&= \frac{1}{2}(k-1)k + k = \frac{(k-1)k + 2k}{2} = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\lfloor \log_2(n+1) \rfloor(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1)
\end{aligned}$$

B. $n + 1 = 2^k + r$, $k, r \in \mathbb{Z}$ i $0 < r < 2^k$

$$\begin{aligned}
g(n+1) &= g(2^k + r) = g(2^{k-1} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor) + \lfloor \log_2(2^k + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor) \rfloor = \\
&= \frac{1}{2}\lfloor \log_2(2^{k-1} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor) \rfloor(\lfloor \log_2(2^{k-1} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor) \rfloor + 1) + k = \\
&= \frac{1}{2}k(k-1) + k = \frac{k(k-1) + 2k}{2} = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\lfloor \log_2(n+1) \rfloor(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1)
\end{aligned}$$

ZAD 15.

Lecimy funkcja tworzaca, cuz why not. Niech

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_n x^n$$

wtedy

$$F(x) = \sum_{i=0} f_i x^i$$
$$F(x) = x + \sum_{i=2} (f_{i-1} + f_{i-2}) x^i$$
$$F(x) = x + x \sum_{i=2} f_{i-1} x^{i-1} + x^2 \sum_{i=2} f_{i-2} x^{i-2}$$
$$F(x) = x + x \sum_{i=1} f_i x^i + x^2 \sum_{i=0} f_i x^i$$

Zauwazmy, ze poniewaz $f_0 = 0$, to $\sum_{i=0} f_i x^i = \sum_{i=1} f_i x^i$

$$F(x) = x + (x + x^2) \sum_{i=0} f_i x^i$$
$$F(x) = x + (x + x^2) F(x)$$
$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$
$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Zauwazamy, ze

$$1 - x - x^2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Czyli mamy

$$F(x) = \frac{x}{(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})}$$

Rozbicie tego na dwa dodawane ulamki zostawiam czytelnikowi oraz wikipedii. Tak samo jak dokonczenie tego rozwiazania.

Zalozmy, ze czytelnik byl mniej leniwy niz autorka i wyliczyl jawny wzor na n-ty wyraz ciagu fibonaciego, ktory wg wikipedii wyglada mniej wiecej tak:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}$$