

# Praca domowa ciąg dalszy

## Problem 2.6.D

Weronika Jakimowicz

### 1. POKAZAĆ, ŻE DLA $x \in \mathbb{Q}$ mamy $f(x) = f(1)x$

Z addytywności funkcji mamy, że dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  i  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi:

$$f(kx) = kf(x).$$

Możemy pokazać to za pomocą indukcji. Dla  $k = 1$  jest to oczywista równość. Załóżmy, że dla  $k \leq n$  jest to prawdą. Popatrzmy teraz na  $k = n + 1$

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) \stackrel{*}{=} nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

gdzie równość z  $*$  jest z założenia indukcyjnego.

Specjalnym przypadkiem powyższej równości dla  $k \in \mathbb{N}$  jest  $x = \frac{1}{k}$ . Wtedy mamy

$$f(kx) = kf(x) = kf\left(\frac{1}{k}\right)$$

a z drugiej strony

$$f(kx) = f\left(k \cdot \frac{1}{k}\right) = f(1),$$

czyli

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}f(1).$$

Liczby wymierne mają tę własność, że można je zapisać jako iloraz dwóch (względnie pierwszych) liczb naturalnych. Weźmy więc dowolny  $q \in \mathbb{Q}$  taki, że  $q = \frac{n}{k}$  dla  $k, n \in \mathbb{N}$ . Mamy wtedy

$$f(q) = f\left(\frac{n}{k}\right) = nf\left(\frac{1}{k}\right) = n \cdot \frac{1}{k} \cdot f(1) = f(1) \cdot \frac{n}{k} = qf(1).$$

I to jest udowadniania zależność.

### 2. JEŚLI $f$ MIERZALNA, TO $f(x) = f(1)x$ DLA $x \in \mathbb{R}$ .

Dodając do przydatnych własności funkcji addytywnej, mamy

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

**Twierdzenie Steinhausa** (1.11.H): jeżeli  $A \subseteq \mathbb{R}$  jest mierzalny i  $\lambda(A) > 0$ , to różnica kompleksowa  $A$  z  $A$  zawiera odcinek postaci  $(-\delta, \delta)$  dla pewnego  $\delta > 0$ .

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + f(-y)| = |f(x - y)| = f(|x - y|)$$

$f(x) = ax$  znaczy, że  $f$  jest funkcją ciągłą. Warunek na ciągłość, jaki chcemy wykorzystać to, dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że  $\varepsilon > |f(x) - f(y)| = f(|x - y|)$  jeżeli  $|x - y| < \delta$ . Zaczniemy od wykazania ciągłości w okolicy zera, a później przeniesiemy to na całą prostą korzystając z addytywności  $f$ .

Weźmy teraz dowolne  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p > 0$  (możemy je traktować podobnie jak  $\varepsilon$ ) i niech  $A = f^{-1}[(-p, p)]$ . Ponieważ  $f$  jest funkcją mierzalną, to również  $A$  musi być mierzalne (Lemat 2.1.2). Jeśli  $\lambda(A) > 0$ , to z twierdzenia Steinhausa wiemy, że dla istnieje  $\delta > 0$  takie, że  $(-\delta, \delta) \subseteq (A - A)$ . Jeśli  $\lambda(A) = 0$ , to weźmy większe  $p$  i powtórzmy ten proces. Kiedyś musimy trafić na przeciwobraz niebędący zbiorem miary zero, bo nie jest to funkcja stała (dla  $a \neq 0$ ), a  $\lim_{p \rightarrow \infty} (-p, p) = \mathbb{R}$ , które miary zero zdecydowanie nie jest.

Popatrzmy teraz, jak wygląda obraz różnicy kompleksowej  $A$

$$\begin{aligned} f[(-\delta, \delta)] &\subseteq f[A - A] = f[\{x - y : x, y \in A\}] = \{f(x - y) : x, y \in A\} = \\ &= \{f(x) - f(y) : x, y \in f^{-1}[(-p, p)]\} = \{x - y : x, y \in (-p, p)\} = (-2p, 2p) \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla  $x, y \in (-p, p)$  mamy

$$|x - y| < |p - (-p)| = 2p$$

Podsumowując, dla dowolnego  $p > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla  $|x - y| < 2\delta$ , to znaczy  $x, y \in (-\delta, \delta)$  takie, że

$$|f(x - y)| = |f(x) - f(y)| < 2p,$$

bo  $f[(-\delta, \delta)] \subseteq (-2p, 2p)$ . wiemy już, że funkcja jest ciągła w okolicy zera.

Musimy teraz skorzystać z addytywności funkcji  $f$ , aby pokazać, że jest ciągła nie tylko w  $u$ , ale też na całej prostej. Weźmy dowolny  $x \in (-\delta, \delta)$  i dowolny niezerowy  $u \in \mathbb{R}$ . Zauważmy teraz, że  $y = u + x$  jest bardzo blisko  $u$ , to znaczy  $|y - u| = |u + x - u| = |x| < \delta$ . Popatrzmy teraz jak daleko od siebie są punkty  $f(u)$  i  $f(y)$ :

$$|f(y) - f(u)| = |f(u + x) - f(u)| = |f(u + x + (-u)) - f(u)| = |f(x)| < \varepsilon$$

czyli  $f$  jest ciągłe w okolicy dowolnego  $u \in \mathbb{R}$ , a z tego wynika, że jest też ciągłe w dowolnym miejscu na prostej.

*i śmiga*

