ANALIZA III - LISTA 9

1*. Promień pnia drzewa wynosi r. Za pomocą piły wycięto fragment drzewa w kształcie klina w następujący sposób. Wykonano dwa cięcia aż do środka pnia: jedno cięcie poziome a drugie pod kątem θ.Obliczyć objętość klina korzystając z zasady Cavalieri'ego.
2. Znaleźć objętość bryły ograniczonej wykresem funkcji $f(x,y) = 1 + 2x + 3y$, prostokątem $R = [1,2] \times [0,1]$ i czterema pionowymi płaszczyznami wyznaczonymi przez R.
3. To samo, co w poprzednim zadaniu dla powierzchni $f(x,y) = x^4 + y^2$ i prostokąta $R = [-1,1] \times [-3,2]$.

4. Niech $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \text{ jest wymierna} \\ 2y & \text{jeśli } x \text{ jest niewymierna.} \end{cases}$$

Pokazać, że całka iterowana $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\ dy\right]\ dx$ istnieje, ale funkcja f nie jest całkowalna. *Wsk. Użyć definicji całkowalności.*

5. Niech $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{jeśli } 1/2 \le x \le 2 \end{cases}$$

Pokazać, że funkcja f jest całkowalna i $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\ dxdy = 1/2$.

6. Niech f będzie ciągła i $f \ge 0$ na prostokącie R. Pokazać, że jeśli $\int_R f\ dxdy = 0$, to $f = 0$ na R. *Wsk. Założyć, ze istnieje (x_0, y_0) takie, że $f(x_0, y_0) > 0$ i co wtedy z sumą górną i dolną?*

7. Niech $f : R \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna na prostokącie R i niech $g = f$ poza skończenie wieloma punktami. Pokazać, że g jest całkowalna i $\int_R g = \int_R f$. *Wsk. Czy jest prościej jeśli $f(x) = 0$ dla każdego x? Albo gdy $f = g$ poza jednym punktem?*

8. Funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, a g ciągła na $[c,d]$. Pokazać, że

$$\int_R [f(x)g(y)]\ dxdy = \left[\int_a^b f(x)\ dx\right]\left[\int_c^d g(y)\ dy\right]$$

9. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $xz, yz, xy, x + y = 1$ i powierzchnią $z = x^2 + y^4$.

10. Niech $f, g : R \to \mathbb{R}$ będą całkowalne na prostokącie R i załóżmy, że $g \leq f$. Pokazać, że $\int_R g \leq \int_R f$. *Wsk. Definicja całki.*

*11. Niech $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \text{ jest niewymierne} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ wymierne, } y \text{ niewymierne} \\ 1/q, & \text{jeśli } x \text{ wymierne } y = p/q \text{ w postaci nieskracalnej} \end{cases}$$

Pokazać, że funkcja f jest całkowalna i $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\ dxdy = 0$. *Wsk. Analogiczne zadanie dla jednej zmiennej.*

12*. Niech f, g bedą całkowalne na prostokącie R. Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem prostokąta R a S pewnym prostokątem tego podziału. Pokazać, że

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g), \quad M_S(f) + M_S(g) \geq M_S(f+g).$$

Wywnioskować, że

$$L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq (f+g,\mathcal{P}), \quad U(f,\mathcal{P}) + U(f,\mathcal{P}) \geq U(f+g,\mathcal{P}).$$

Korzystając z tych nierówności pokazać, że $f+g$ jest całkowalna oraz

$$\int_R (f+g)\ dxdy = \int_R f\ dxdy + \int_R f\ dxdy.$$

Pokazać, że dla każdej stałej c zachodzi $\int_R cf\ dxdy = c\int_R f\ dxdy.$

13*. Niech f będzie całkowalna. Pokazać, że $|f|$ też jest całkowalna oraz $|\int_R f\ dxdy| \leq \int_R |f|\ dxdy.$

14*. Pokazać, że jeśli ograniczona funkcja $f(x,y)$ jest całkowalna na prostokącie R, a funkcja $\phi(u)$ jest Lipschitzowska na na $[-M, M]$, gdzie dla każdego x, $|f(x)| \leq M$ to funkcja $\phi(f(x,y))$ jest całkowalna na R. Wywnioskować, że $f^2(x,y)$ jest całkowalna. Pokazać, że iloczyn $f(x,y)g(x,y)$ dwóch funkcji całkowalnych na R jest funkcją całkowalną.

15*(6 punktów). Pokazać, że jeśli ograniczona funkcja $f(x,y)$ jest całkowalna na prostokącie R, a funkcja $\phi(u)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$, to funkcja $\phi(f(x,y))$ jest całkowalna na R.
Wskazówka. ϕ jest jednostajnie ciągła na każdym odcinku $[-M, M]$. Dowód całkowalności $\phi(f(x,y))$ dla jednej zmiennej jest w Rudin Podstawy Analizy Matematycznej w rozdziale "Definicja i istnienie całki", Tw. 6.11.