ZAD 1.

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

$$B_{n+2} := B_{n+1} := 0$$
$$B_k := 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k$$

wtedy $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

Wiemy, ze

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

Indukcja po n? Dla $n = 2$ mamy

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1x + c_2(2x^2 - 1)$$

$$B_4 = B_3 = 0$$
$$B_2 = 2xB_3 - B_4 + c_2 = c_2$$
$$B_1 = 2xB_2 - B_3 + c_1 = 2xc_2 + c_1$$
$$B_0 = 2xB_1 - B_2 + c_0 = 4x^2c_2 + 2xc_1 - c_2 + c_0$$
$$w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2) = \frac{1}{2}(4x^2c_2 + 2xc_1 - c_2 + c_0 - c_2) = 2x^2c_2 + xc_1 - c_2 + \frac{1}{2}c_0$$

więc śmiga.
Załóżmu indukcyjnie, że algorytm działa dla dowolnego algorytmu zawierającego $T_0(x), \ldots, T_n(x)$.
Pokażemy, że działa wtedy też dla wielomianu z doklejonym $T_{n+1}(x)$.

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2}T_0(x) + \ldots + c_nT_n(x) + c_{n+1}T_{n+1}(x) = \\ &= \frac{1}{2}T_0(x) + \ldots + c_nT_n(x) + c_{n+1}(2xT_n(x) - T_{n-1}(x)) = \\ &= \frac{1}{2}T_0(x) + \ldots + T_{n-1}(x)(c_{n-1} - c_{n+1}) + T_n(c_n + 2xc_{n+1}) \end{aligned}$$

Taki wielomian z założenia indukcyjnego można rozwiązać za pomocą algorytmu, więc mamy

$$B_{n+2} = B_{n+1} = 0$$
$$B_n = 2xB_{n+1} - B_{n+2} + c_n + 2xc_n = c_n + 2xc_{n+1}$$
$$B_{n-1} = 2xB_n - B_{n+1} + c_{n-1} - c_{n+1} = 4x^2c_{n+1} + 2xc_n + c_{n-1} - c_{n+1}$$
$$B_{n-2} = 2xB_{n-1} - B_nc_{n-2}\ldots$$

Rozważmy więc nowy ciąg, C, zdefiniowany rekurencyjnie:

$$C_{n+3} = C_{n+2} = 0$$
$$C_{n+1} = c_{n+1}$$
$$C_n = 2xc_{n+1} + c_n = B_n$$
$$C_{n-1} = 2xC_n - C_{n+1} = 4x^2c_{n+1} + 2xc_n - c_{n+1} + c_{n-1} = B_{n-1}$$
$$C_k = 2xC_{k+1} - C_{k+2} + c_k$$

Ponieważ C_n i C_{n-1} odpowiadają B_n i B_{n-1} i oba ciągi mają tę samą definicję rekurencyjną, to są sobie równe od n w dół. Skoro C to algorytm dla $w(x)$ w całość, to

$$w(x) = \frac{1}{2}(C_0 - C_2)$$

i koniec.

ZAD. 5

Tabelka w ramach pomocy:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_2 & & x_2 \\
7 & & 7 & & 6 & & 6 & & 22 & & 22 \\
 & -1 & & -1 & & 0 & & 16 & & 56 & \\
 & & 0 & & 1 & & 16 & & 40 & & \\
 & & & 1 & & \frac{15}{2} & & 24 & & & \\
 & & & & \frac{13}{4} & & \frac{33}{4} & & & & \\
 & & & & & \frac{5}{2} & & & & &
\end{array}
$$

$$p(x) = 7 - (x+1) + x(x+1)^2 + \frac{13}{4}x^2(x+1)^2 + \frac{5}{2}x^2(x+1)^2(x-1)$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}x(25x^3 + 46x^2 + 30x + 11)$$