Algebra II (ISIM), lista 10 (18.01.2022, deklaracje do godziny 9:00)

Teoria: Dziedzina noetherowska, w której każdy element nierozkładalny jest pierwszy, jest UFD. Każdy PID jest UFD. NWD i NWW: istnienie w UFD. Opis NWD w PID. Algorytm Euklidesa w pierścieniu euklidesowym.

R oznacza pierścień przemienny z $1 \neq 0$.

1. $-$ Dowieść, że R^* jest zbiorem elementów stowarzyszonych z 1.

2. $-$ Niech $\emptyset \neq A \subseteq R$ oraz niech $D \subseteq R$ składa się ze skończonych sum elementów R postaci $\pm a_1 \dots a_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A$. Dowieść, że D jest najmniejszym podpierścieniem pierścienia R zawierającym A (tzw. podpierścieniem generowanym przez A).

3. Niech $I = \{W \in \mathbb{Z}[X] : \text{wyraz wolny } W \text{ jest parzysty}\}$. Dowieść, że:
   (a)– $I \lhd \mathbb{Z}[X]$
   (b) I nie jest główny (wsk: rozważyć $I \cap \mathbb{Z}$. Które wielomiany dzielą wszystkie elementy tego zbioru? Czy ktoryś z nich generuje I?).
   (c)– $I = (2, X)$.
   (d)* Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ znaleźć $J \lhd \mathbb{Z}[X]$, który nie jest generowany przez n wielomianów.

4. Algorytm Euklidesa. Załóżmy, że R jest euklidesowy, z normą δ, oraz $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wykonując dzielenie z resztą znajdujemy ciągi $r_1, r_2, r_3, \dots \in R$ i $q_1, q_2, q_3, \dots \in R$ takie, że

$$\begin{array}{ccll} a & = & bq_1 + r_1, & \delta(r_1) < \delta(b) \\ b & = & r_1q_2 + r_2, & \delta(r_2) < \delta(r_1) \\ r_1 & = & r_2q_3 + r_3, & \delta(r_3) < \delta(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ r_{k-1} & = & r_kq_{k+1} + r_{k+1}, & \delta(r_{k+1}) < \delta(r_k) \\ r_k & = & r_{k+1}q_{k+2} & \end{array}$$

   Proces dzielenia z resztą kończy się po skończeniu wielu krokach sytuacją, gdy $r_{k+1} | r_k$. W przeciwnym razie dostalibyśmy nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych $\delta(b) > \delta(r_1) > \delta(r_2) > \dots$, co jest niemozliwe. Niech $c = r_{k+1}$. Udowodnić, że:
   (a) $c|a$ i $c|b$.
   (b) Załóżmy, że $d|a$ i $d|b$. Wtedy $d|c$. Zatem c jest $NWD(a, b)$.

5. $-$ Stosując algorytm Euklidesa znaleźć NWD i NWW:
   (a) liczb 510 i 858 w pierścieniu $\mathbb{Z}$,
   (b) liczb $-1 + 3i$ oraz 2 w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$,
   (c) wielomianów $X^3 + 2X - 3,\ X^3 + 3X^2 - 5X + 1$ w pierścieniu $\mathbb{Q}[X]$.

6. $-$ Stosując algorytm Euklidesa udowodnić, że liczby całkowite 858 i 665 są względnie pierwsze, a następnie znaleźć takie liczby całkowite x i y, że $858x + 665y = 1$.

7. Załóżmy, że R jest UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że $(a) \cap (b)$ jest ideałem głównym.

8. Rozstrzygnąć, czy losowo wybrany $x \in \mathbb{Z}_{2075}$ jest odwracalny. Jesli tak, obliczyć jego odwrotność w $\mathbb{Z}_{2075}$.

9. * Załóżmy, że K jest ciałem. (a) Dowieść, że $K[X]/(X^n) \cong K[\![X]\!]/(X^n)$.
   (b) Dowieść, że pierścień ilorazowy $K[X]/(X^n)$ ma dokładnie n właściwych ideałów.

10. –Dowieść, że jesli R jest dziedziną, to $R[X]$ też.

11. Załóżmy, że $d \in \mathbb{Z}$ jest ujemna. Niech $\sqrt{d} = i\sqrt{-d}$. Udowodnić, że
    (a) Każda liczba $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \setminus \{0\}$ ma skończenie wiele podzielników w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (wsk: rozważyć normę $\delta(a + b\sqrt{d}) = |a^2 - b^2 d|$).
    (b) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ jest nieskończenie wiele elementów nierozkładalnych.

12. Udowodnić, że homomorficzny obraz pierścienia noetherowskiego jest noetherowski.