G. Plebanek	*Kombinatoryka*	nr 10 (22.05)

Systemy różnych reprezentantów (SRR)

Przypomnijmy, że ciąg zbiorów $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ma system różnych reprezentantów (SRR), zwany też transwersalą, jeżeli istnieją **różne** punkty $x_1, \ldots, x_n$, takie że $x_i \in A_i$ dla każdego $i \leqslant n$.

1. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie ciągiem zbiorów, posiadającą SRR. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że istnieje SRR zawierający x; pokazać na przykładzie, że może nie istnieć SRR, w którym x reprezentuje A_1.

2. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie ciągiem zbiorów spełniającym silniejszy Warunek Halla

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k + 1,$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ i dowolnego wyboru k różnych indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że $\mathcal{A}$ ma SRR, w którym x reprezentuje A_1.

3. Pokazać, że ciąg zbiorów

$$A_i = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

posiada SRR oraz liczba różnych SRR tego ciągu jest równa n-tej liczbie nieporządków D_n.

4. Udowodnić, że jeżeli każdy zbiór z ciągu $\mathcal{A}$ ma $\geqslant d$ elementów, a każdy punkt należy do co najwyżej d zbiorów z $\mathcal{A}$ (gdzie $d > 0$ jest ustalone) to taki ciąg ma SRR.

5. Udowodnić, że ciąg $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ niepustych podzbiorów skończonego zbioru X ma SRR wtedy i tylko wtedy gdy $|\{i : A_i \subseteq Y\}| \leqslant |Y|$ dla każdego $Y \subseteq X$.

6. Po rozgrywce brydżowej talia 52 kart jest podzielona na 13 lew po 4 karty. Udowodnić, że można z każdej lewy wybrać po jednej karcie, tak aby otrzymać wszystkie figury $2, 3, \ldots, 10, W, D, K, A$ (bez uwzględniania kolorów).

Kojarzenie par w grafach dwudzielnych

7. Wyprowadzić twierdzenie Halla o małżeństwach z twierdzenia Halla o SRR.

8. Wybrać (nieduży) graf dwudzielny i pewne kojarzenie par w tym grafie; można posłużyć się przykładem z wykładu. Przećwiczyć działanie algorytmu etykietującego; zdefiniować nowe, lepsze kojarzenie par.

Euler raz jeszcze

Grafem dualnym do grafu planarnego (V, E) (wyznaczającego zbiór ścian F) nazwiemy graf (F, E), w którym każda krawędź łączy obszary, które rozdziela.

Inaczej mówiąc, można utożsamić ścianę $f \in F$ z pewnym punktem p_f do niej należącym i połączyć krawędziami te pary p_f i p_g, dla których ściany f i g mają wspólną krawędź w wyjściowym grafie. Warto popróbować na rysunku.

9. Pokazać, że jeśli (V, E') jest drzewem rozpinającym w planarnym grafie (V, E) to $(F, E \setminus E')$ jest drzewem rozpinającym w grafie dualnym (F, E). Wywnioskować stąd formułę Eulera.