ZAZNACZYLAM WSZYSTKO POZA 1 I 7!!!

ZAD 1.

Niech $f(x) = \frac{1}{x} - c$. Zauwazajac, ze $f(\frac{1}{c}) = 0$, mozemy przyblizyc $\frac{1}{c}$ uzywajac metody Newtona dla funkcji f.

Rozpatrzmy ciag okreslony:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - c}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + \frac{(1 - cx_n)x_n^2}{x_n} = x_n + x_n - cx_n^2 = x_n(2 - cx_n)$$

Niech ϕ bedzie funkcja taka, ze $\phi(\frac{1}{c}) = \frac{1}{c}$ oraz

$$\phi(x_n) = x_{n+1}$$

$$\phi(x) = x(2 - cx)$$

Aby rozpatrywany przez nas ciag byl zbiezny, funkcje ϕ musi byc funkcja zwiezajaca [kontrakcja], czyli szukamy zbioru D takiego, ze dla $x_n, \frac{1}{c} \in D$ oraz liczby K dla ktorej zachodzi

$$|x_{n+1} - \phi(\frac{1}{c})| = |\phi(x_n) - \frac{1}{c}| < K|x_n - \frac{1}{c}|$$

i dalej

$$|x_n - \frac{1}{c}| < K^2|x_{n-1} - \frac{1}{c}| < K^3|x_{n-1} - \frac{1}{c}| < \ldots < K^n|x_1 - \frac{1}{c}|$$

$$|\phi(x_{n+1}) - \frac{1}{c}| < K|x_n - \frac{1}{c}|$$

$$\left|\frac{\phi(x_{n+1}) - \frac{1}{c}}{x_n - \frac{1}{c}}\right| < K$$

$$\left|\frac{x_n(2 - cx_n) - \frac{1}{c}}{x_n - \frac{1}{c}}\right| < K$$

Uzyjmy szeregu Taylora do przyblizenia funkcji ϕ w okolicy $\alpha = \frac{1}{c}$:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{\phi''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(p1)(\alpha)}}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n\alpha)^p$$

ZAD 2.

Ciag przyblizen za pomoca metody newtona jest zbiezny liniowo do pierwiastka funkcji f.

$$x_{x+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Chce, zeby bylo liniowe.

Rozpatrzmy funkcje dla α takiego, ze $f(\alpha) = 0$:

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

$$\phi(x_n) = x_{n+1}$$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

czyli w szczegolnosci $f(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

Ciag jest zbiezny liniowo, gdy

$$\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| \to K < 1 \quad K > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_{n+1}}{E_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = \phi'(\alpha) \in (0,1)$$

Czyli zauwazmy, ze aby to bylo prawdziwe, to $f'(\alpha) \neq 0$, czyli α jest pojedynczym pierwiastkiem funkcji ktora ma co najmniej 2 niezerowe pochodne, np x^2 dla $\alpha = 0$.

Wtedy

$$\phi(x) = x - \frac{x^2}{2x} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - \alpha = \frac{x_n}{2}$$

czyli $E_{n+1} = \frac{1}{2}E_n$, a wiec

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} \to \frac{1}{2}$$

co spelnia wymagania.

ZAD 3.

Zalozmy, ze mamy funckje rosnaca, wtedy regula falsi daje nam ciag

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - bf(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

Dla wygody oznaczmy $B = f(b)$

$$x_{n+1} = x_n\frac{B}{B - f(x_n)} - b\frac{f(x_n)}{B - f(x_n)}$$

rozpatrzmy funkcje ϕ taka, ze

$$f(\alpha) = 0$$

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

$$\phi(x) = x\frac{B}{B - f(x)} - b\frac{f(x)}{B - f(x)}$$

$$\phi(x_n) = x_{n+1}$$

Aby metoda byla zbiezna liniowo, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_{n+1}}{E_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = \phi'(\alpha) = K \in (0,1)$$

$$\phi'(x) = \frac{Bf'(x)}{B - f(x)}$$

$$\phi'(\alpha) = \frac{Bf'(\alpha)}{B} = f'(\alpha)$$

co jest prawda na przyklad dla funkcji

$$f(x) = x^3 - 1$$

ZAD 4.

Aby ciag byl zbiezny kwadratowo, musi zachodzic dla $\alpha = 0$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} \to K \in (0, \infty).$$

$$\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n^2})^2} = \frac{n^4}{n^2} \to \infty$$

Czyli ten ciag nie jest zbiezny kwadratowo.

$$\frac{1}{2^{2^n}}$$

$$\frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = 2^{2^n - 2^{n+1}} = 2^{2^n(1-2)} = 2^{-2^n} \to 0$$

Czyli ciag jest zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty$$

Czyli ciag nie jest zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{e^n}$$

$$\frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{3^{2n}}} = \frac{e^{2n}}{e^n} = e^n \to \infty$$

Czyli znowu nie zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{n^n}$$

$$\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{2n}}} = \frac{n^{2n}}{n^n} = n^n \to \infty$$

ZAD 5.

Jest to jedyny pierwiastek, gdyz w przeciwnym wypadku w pewnym punkcie funkcja f musialaby sie przegiac, wiec miec zerowa pierwsza pochodna.

Poniewaz $f''(x) > 0$, to funkcja f jest wypukla. W dodatku, $f'(x) > 0$, wiec funkcja ta jest rosnaca. Oznaczmy blad metody Newtona przez

$$e_n = x_n - \alpha.$$

W zalozeniu mamy, ze f'' jest ciagla i pokazalismy, ze α jest jedynym pierwiastkiem tej funkcji. Z definicji wyrazu w metodzie Newtona mamy

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a na mocy wzoru Taylora:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n) \quad (1)$$

dla pewnego $\xi_n \in [x_n, r]$. To daje

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e^2 n$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \approx \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^2 = Ce_n^2 \quad (2)$$

czyli ta metoda jest zbiezna kwadratowo.

Wobec wzoru (2) mamy

$$e_{n+1} > 0,$$

czyli $x_n > r$ dla $n \geq 1$. Z tej wlasnosci wynika tez, ze $f(x_n) > f(\alpha) = 0$ Dlatego, na mocy (1) $e_{n+1} < e_n$. W takim razie ciag bledow jest malejacy i ograniczny z dolu. Dzieki temu, granice

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n$$

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

istnieja. Z (1) wynika tez, ze $e = e - \frac{f(x)}{f'(x)}$, czyli $f(x) = 0$ i $x = \alpha$.

ZAD 6.

$$x_{n+1} = x_n - rf(x_n)$$

Ciag jest zbiezny liniowo, gdy

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \to K \quad 0 < K < 1$$

Szukamy α takiego, ze $f(\alpha) = 0$. Rozpatrzmy funkcje ϕ taka, ze

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

czyli miejsce zerowe f to jej punkt staly. Dalej, niech

$$\phi(x_n) = x_{n+1},$$

$$\phi(x_n) = x_n + rf(x_n).$$

Zauwazmy, ze istnieje $\xi \in [\alpha, x_n]$ takie, ze

$$x_{n+1} = \phi(\alpha) + \phi'(\xi)(x_n - \alpha) + \ldots + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

natomiast dla zbieznosci liniowej potrzebne nam jest $p = 1$, wiec

$$\phi(x_n) = \alpha + \phi'(\xi)(x_n - \alpha)$$

$$\phi(x_n) - \alpha = \phi'(\xi)(x_n - \alpha)$$

Sprawdzmy kiedy funkcja $\phi(x_n)$ zbiega do α, czyli kiedy

$$|\phi'(x)| = |1 - rf'(x)| < 1$$

bo w przeciwnym wypadku mamy ciag ktory nie jest zbiezny liniowo.

$$-1 < 1 - rf'(x) < 1$$
$$0 < rf'(x) < 2$$

ZAD 8.

Rozwazmy funkcje

$$f(x) = x^2 - R$$

jej miejscem zerowym jest $\sqrt{R}$. Dalej, niech

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - R}{\sqrt{2x}}$$

Miejscem zerowym funkcji g jest nadal liczba $\sqrt{R}$. Jesli rozwazymy metode Newtona dla g, to otrzymamy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x^2 - R)2x_n}{4x_n^4 - (x^2 - R)} = x_n - \frac{2x_n^3 - 2Rx_n}{3x_n^2 + R} = \frac{4x_n^3 + Rx_n - 2x_n^3 + 2Rx_n}{3x_n^2 + R} = x_n \frac{x_n^2 + 3R}{3x_n^2 + R}$$

Czyli chcemy sprawdzic, czy metoda Newtona dla funkcji g jest zbiezna szesciennie. Tak jak poprzednio, potrzebujemy funkcji

$$\phi(x) = x - \frac{2x^3 - 2Rx}{3x^2 + R}$$

i zeby byla to zbieznosc szescienna, to

$$\frac{1}{6}\phi^{(3)}(\sqrt{R}) < \infty$$

$$\phi^{(3)}(\sqrt{R}) = -(12\sqrt{R} + 48\sqrt{R}^3 - 24\sqrt{R}R)(3R+R)^{-2} + 2(3R+R)^{-3}(6R - 2R + 12R^2 - 12R^2)6\sqrt{R} =$$

$$= 2\frac{3\sqrt{R}\cdot R}{16R^3} - \frac{\sqrt{R}(12+24R)}{16R^2} = \frac{6R^{\frac{3}{2}} - 12R^{\frac{3}{2}} - 24R^{\frac{5}{2}}}{16R^3} = \frac{-6R^{\frac{3}{2}} - 24R^{\frac{5}{2}}}{16R^3} = \frac{-6R^{-1} - 24}{16R^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

ZAD 9.

Metoda Newtona dla funkcji

$$g = \frac{f}{\sqrt{f'}}$$

$$g' = \frac{2(f')^2 - f''f}{2(f')^{\frac{3}{2}}}$$

wyglada nastepujaco:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g}{g'} = x_n - \frac{f}{\sqrt{f'}}\frac{2(f')^{\frac{3}{2}}}{2(f')^2 - f''f} = x_n - \frac{f'f}{(f')^2 - \frac{f''f}{2}}$$