Praca domowa ciąg dalszy

Problem **2.6.D**

Weronika Jakimowicz

1. POKAZAĆ, ŻE DLA $x \in \mathbb{Q}$ **mamy** $f(x) = f(1)x$

Z addytywności funkcji mamy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$f(kx) = kf(x).$$

Możemy pokazać to za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ jest to oczywista równość. Załóżmy, że dla $k \leq n$ jest to prawdą. Popatrzmy teraz na $k = n + 1$

$$f((n + 1)x) = f(xn + x) = f(nx) + f(x) \overset{*}{=} nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x)$$

gdzie równość z $*$ jest z założenia indukcyjnego.

Specjalnym przypadkiem powyższej równości dla $k \in \mathbb{N}$ jest $x = \frac{1}{k}$. Wtedy mamy

$$f(kx) = kf(x) = kf(\frac{1}{k})$$

a z drugiej strony

$$f(kx) = f(k \cdot \frac{1}{k}) = f(1),$$

czyli

$$f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}f(1).$$

Liczby wymierne mają tę własność, że można je zapisać jako iloraz dwóch (względnie pierwszych) liczb naturalnych. Weźmy więc dowolny $q \in \mathbb{Q}$ taki, że $q = \frac{n}{k}$ dla $k, n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy

$$f(q) = f(\frac{n}{k}) = nf(\frac{1}{k}) = n \cdot \frac{1}{k} \cdot f(1) = f(1) \cdot \frac{n}{k} = qf(1).$$

I to jest udowadniana zależność.

2. JEŚLI f **MIERZALNA, TO** $f(x) = f(1)x$ **DLA** $x \in \mathbb{R}$**.**

Dodając do przydatnych własności funkcji addytywnej, mamy

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$$

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

Twierdzenie Steinhausa (1.11.H): jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A) > 0$, to różnica kompleksowa A z A zawiera odcinek postaci $(-\delta, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$.

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + f(-y)| = |f(x - y)| = f(|x - y|)$$

Aby pokazać ciągłość, chcemy, żeby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało $\delta > 0$ takie, że $\varepsilon > |f(x) - f(y)| = f(|x - y|)$ jeżeli $|x - y| < \delta$. Czyli tak naprawdę wystarczy nam pokazać ciągłość w okolicy zera: wtedy będziemy brać $z = x - y$ i sprawdzać, czy zachodzi $\delta > |z| \implies f(|z|) < \varepsilon$.

Weźmy więc teraz dowolne $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$ i niech $A = f^{-1}[(-p, p)]$. Ponieważ f jest funkcją mierzalną, to również A musi być mierzalne (Lemat 2.1.2). Jeśli $\lambda(A) > 0$, to z twierdzenia Steinhausa wiemy, że dla istnieje $\delta > 0$ takie, że $(-\delta, \delta) \subseteq (A - A)$. Popatrzmy teraz, jak wygląda obraz różnicy kompleksowej A

$$f[(-\delta, \delta)] \subseteq f[A - A] = f[\{x - y \ : \ x, y \in A\}] = \{f(x - y) \ : \ x, y \in A\} =$$
$$= \{f(x) - f(y) \ : \ x, y \in f^{-1}[(-p, p)]\} = \{x - y \ : \ x, y \in (-p, p)\} = (-2p, 2p)$$

Zauważmy, że dla $x, y \in (-p, p)$ mamy

$$|x - y| < |p - (-p)| = 2p$$

Podsumowując, dla dowolnego $p > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x - y| < 2\delta$, to znaczy $x, y \in (-\delta, \delta)$ takie, że

$$|f(x - y)| = |f(x) - f(y)| < 2p,$$

bo $f[(-\delta, \delta)] \subseteq (-2p, 2p)$. To daje ciągłość w zerze, co z addytywności przekłada sie na ciągłość na całej prostej.