1 ZAD 12.

Zauwazmy, ze jesli $f(x) \in P_2$, to f mozemy zapisac jako

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ takich, ze $a + b + c = 1$. W takim razie funkcja $\phi(f)$ sprowadza sie do postaci:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)^2 dx,$$

co na mocy wolfram alpha jest rowne:

$$\phi(f) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2.$$

Cale zadanie sprowadza sie do znalezienia minimum funkcji trzech zmiennych

$$F(a, b, c) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2$$

przy warunku, ze funkcja

$$g(a, b, c) = a + b + c = 1.$$

Uzywajac mnoznikow Lagrange'a dostajemy uklad rownan postaci

$$\begin{cases} \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c + \frac{b}{2} - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}b + \frac{a}{2} + c - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}a + b + 2c - \lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a + 20c + 15b - 30\lambda = 0 \\ 4b + 3a + 6c - 6\lambda = 0 \\ 2a + 3b + 6c - 6\lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Jesli zapiszemy je w postaci macierzy, dostajemy:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Korzystajac z metody eliminacji Gaussa (i strony matrixcalc.org), dostajemy macierz

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ktora daje nam ponizsze rownania:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}c - 4\lambda = 0 \\ \frac{1}{4}b + c + \frac{3}{2}\lambda = 0 \\ 12a + 15b + 20c - 30\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{6} \\ c = 1 \\ b = -5 \\ a = 5 \end{cases}$$

Zauwazmy, ze zbior P_2 jest niezwarty. Musimy wiec sprawdzic, co sie dzieje kiedy

$$\|(a, b, c)\| \to \infty$$

TUTAJ MUSISZ DOKONCZYC DZBANIE

Wartosc funkcji F w punkcie ktory zostal otrzymany w powyzszych obliczeniach wynosi

$$F(5,-5,1) = \frac{1}{6}$$

sprawdzmy, czy istnieja punkty ktore spelniaja $g(x,y,z) = 1$ takie, ze $F(x,y,z) \leq \frac{1}{6}$.

$$\frac{x^2}{5} + \frac{2xz + y^2}{3} + \frac{xy}{2} + yz + z^2 \leq \frac{1}{6}$$
$$12x^2 + 40xz + 20y^2 + 30xy + 60yz + 60z^2 \leq 10$$
$$9x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5xy + 25y^2 + 4x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10xz + 100z^2 - 5y^2 - 40z^2 + 60yz \leq 10$$
$$(3x + 5y)^2 + (2x + 10z)^2 - (25y^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6yz + 36z^2 + 4z^2 - 20y^2) \leq 10$$
$$(3x + 5y)^2 + (2x + 10z)^2 - (5y - 6z)^2 - 4z^2 + 20y^2 \leq 10$$

$$x = 1 - y - z$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{2xz + y^2}{3} + \frac{xy}{2} + yz + z^2 \leq \frac{1}{6}$$
$$12x^2 + 40xz + 20y^2 + 30xy + 60yz + 60z^2 \leq 10$$
$$12(1 - y - z)^2 + 40(1 - y - z)z + 20y^2 + 30(1 - y - z)y + 60yz + 60z^2 \leq 10$$
$$y^2 + 7yz + 3y + (16z^2 + 8z + 1) + 5 \leq 5$$
$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} + 7yz + (4z + 1)^2 + 5 \leq 5 + \frac{9}{4}$$
$$(y + \frac{3}{2})^2 + \frac{y^2}{4} + 7yz + 49z^2 + (4z + 1)^2 \leq \frac{9}{4} + \frac{y^2}{4} + 49z^2$$
$$(y + \frac{3}{2})^2 - \frac{y^2}{4} + (4z + 1)^2 - 49z^2 + (\frac{y}{2} + 7z)^2 \leq \frac{9}{4}$$
$$(y + \frac{3}{2} + \frac{y}{2})(y + \frac{3}{2} - \frac{y}{2}) + (4z + 1 + 7z)(4z + 1 - 7z) \leq \frac{9}{4}$$