

## ZAD 1.

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$$

Niech  $\mathbb{Z} \ni m = \lfloor an \rfloor$ , wtedy

$$\begin{aligned} m &\leq an < m+1 \\ m-n &\leq an-n < m-n+1 \\ n-m &\geq n-an > n-m-1 \end{aligned}$$

Ponieważ  $n \notin \mathbb{Q}$ , to  $n-an \notin \mathbb{Z}$ , więc

$$\lfloor n-an \rfloor = n - \lfloor an \rfloor - 1$$

a z tego

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor n(1-a) \rfloor = n - 1$$

$$\lceil an \rceil + \lceil n-an \rceil = n + 1$$

## ZAD 2.

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor \quad (\text{👉})$$

Po pierwsze pokazemy, że dla dowolnych  $n, m \in \mathbb{Z}$  oraz  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor \quad (\text{☕})$$

Niech  $p = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor$ , wtedy

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ \mathbb{Z} \ni m \cdot p - n &\leq \lfloor x \rfloor < m \cdot (p+1) - n \in \mathbb{Z} \\ m \cdot p - n &\leq x < m \cdot (p+1) - n \\ p &\leq \frac{x-n}{m} < p+1 \\ p &\leq \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor < p+1 \\ p &= \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

Czyli pokazaliśmy (☕).

Po drugie, zauważmy, że dla dowolnego  $n$  i dla każdego  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq m > 1$  zachodzi

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{n+i}{m} \right\rfloor$$

Zauważmy, że jest to ilość elementów w każdej grupie przy podziale  $n$  elementów na  $m$  grup. We wszystkich kolumnach umiemy co najmniej  $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$  obiektów, ale w ostatnich  $n \bmod m$  kolumnach będzie ich o 1 więcej, co jest uzyskiwane przez zwiększanie o 1 licznika po każdej kolumnie.

Wracając do (👉), możemy powiedzieć, że

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

### ZAD 3.

a) potrzebujemy  $a_0$ ,  $a_1$ , natomiast  $a_2$  możemy już obliczyć za pomocą  $a_0$

b) potrzebne jest  $a_0$ ,  $a_1$  oraz  $a_2$ , bo wyraz  $a_3$  to już suma wyrazów poprzednich

c) potrzebny jest tylko wyraz  $a_0$  – jest on potrzebny dla  $a_1$ , dla  $a_2$  potrzebne jest  $a_1$  i tak dalej – zawsze przy odpowiedniej ilości podzielen na 2 otrzymujemy  $a_0$

### ZAD 4.

a)  $f_n = f_{n-1} + 3^n$  dla  $n > 1$  i  $f_1 = 3$ .

To jest suma geometric sequence:

$$f_n = \sum_{i=1}^n 3^i = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

b)  $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$  dla  $n > 1$  i  $h_1 = 1$

$$h_n = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)n$$

c)  $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$  dla  $n > 2$  i  $l_1 = l_2 = 2$

$$l_3 = 4 = 2^2$$

$$l_4 = 8 = 2^3$$

$$l_5 = 32 = 2^5$$

$$l_6 = 256 = 2^8$$

$l_n$  wyraz to  $2^k$ , gdzie  $k$  to  $n$ -ty wyraz ciągu fibonacciego. Także zostaje mi nic innego jak znaleźć jawny wzór na ciąg fibonacciego,  $f_n$  :)

Lecimy funkcja tworząca, cuz why not. Niech

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_n x^n$$

wtedy

$$F(x) = \sum_{i=0} f_i x^i$$

$$F(x) = x + \sum_{i=2} (f_{i-1} + f_{i-2})x^i$$

$$F(x) = x + x \sum_{i=2} f_{i-1} x^{i-1} + x^2 \sum_{i=2} f_{i-2} x^{i-2}$$

$$F(x) = x + x \sum_{i=1} f_i x^i + x^2 \sum_{i=0} f_i x^i$$

Zauważmy, że ponieważ  $f_0 = 0$ , to  $\sum_{i=0} f_i x^i = \sum_{i=1} f_i x^i$

$$F(x) = x + (x + x^2) \sum_{i=0} f_i x^i$$

$$F(x) = x + (x + x^2)F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Zauważamy, że

$$1 - x - x^2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Czyli mamy

$$F(x) = \frac{x}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Rozbicie tego na dwa dodawane ułamki zostawiam czytelnikowi oraz wikipedii. Tak samo jak dokonczenie tego rozwiazania.

Zalozmy, ze czytelnik byl mniej leniwy niz autorka i wyliczyl jawny wzor na  $n$ -ty wyraz ciagu fibbonaciego, ktory wg wikipedii wyglada mniej wiecej tak:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

Otrzymujemy wiec:

$$l_n = 2^{f_n} = 2^{f_{n-1}} \cdot 2^{f_{n-2}}$$

## ZAD 5.

a)  $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$  dla  $a_0 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n|2 \\ 2 & \end{cases}$$

Dla  $n = 0, 1$  - dziala. Zalozmy, ze dziala tez dla wszystkich wyrazow mniejszych niz  $n$ . Rozwazamy dwa przypadki:

$2|n$ , wtedy  $2 \nmid n-1$  i mamy  $a_{n-1} = 2$

$$a_n = \frac{2}{2} = 1$$

czyli tak jak jest we wzorze.

$2 \nmid n$ , wtedy  $a_{n-1} = 1$  i

$$a_n = \frac{2}{1} = 2.$$

b)  $b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}}$   $b_0 = 0$

Oznaczmy jako  $f_n$   $n$ -ty wyraz ciagu fibbonaciego, czyli  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , gdzie  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ . Wtedy

$$b_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}.$$

Dla  $n = 0, 1$  mamy  $b_0 = \frac{0}{1} = 0$  oraz  $b_1 = \frac{1}{1} = 1$ . Zalozmy, ze dla wszystkich wyrazow do  $b_n$  wzor dziala. Wtedy

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{1+b_n} = \frac{1}{1+\frac{f_n}{f_{n+1}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{f_n+f_{n+1}}{f_{n+1}}} \frac{f_{n+1}}{f_n+f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \end{aligned}$$

c)  $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$   $c_0 = 1$

Dla  $n \neq 0$  zachodzi

$$c_n = 2^{n-1}$$

natomiast dla  $n = 0$  mamy  $c_0 = 1$ .

Dla  $n = 1, 2$  jest  $c_1 = 2^0 = 1$ ,  $c_2 = 2^1 = 2$ . Zalozmy, ze dla kazdego  $n$  wzor jest prawdziwy, wtedy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sum_{i=0}^n c_i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i + c_n = \\ &= c_n + c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

d)  $d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$   $d_0 = 1$   $d_1 = 2$

Dla  $n = 0, 1$  mamy  $d_0 = 2^0 = 1$ ,  $d_1 = 2^1 = 2$ . Zalozmy, ze dla wszystkich  $n$  wzor jest prawdziwy, wowczas

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{d_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$$

## ZAD 6.

a)  $y_0 = y_1 = 1$ ,  $y_n = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}}$

$$y_n = 1$$

Dla  $n=2$   $y_2=1$ . Załozmy, że dla pierwszych  $n$  wyrazów wzór jest prawdziwy, wówczas

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

b)  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = 2$ ,  $z_n = \frac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}}$

$$z_n = n + 1$$

Dla  $z_2=3$ , więc załozmy, że dla wszystkich  $n$  wzór zachodzi, wówczas

$$z_{n+1} = \frac{z_n^2 - 1}{z_{n-2}} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n} = \frac{n^2 + 2n}{n} = n + 2 = (n+1) + 1$$

c)  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4}$

$$a_n = n^2$$

Dla  $n=2$  smiga, załozmy, że smiga też dla wszystkich  $n$ . Wówczas

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{(t_n - t_{n-1} + 3)^2}{4} = \frac{(n^2 - (n-1)^2 + 3)^2}{4} = \\ &= \frac{(n^2 - n^2 + 2n - 1 + 3)^2}{4} = \frac{(2n + 2)^2}{4} = \\ &= \left(\frac{2n + 2}{2}\right)^2 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

## ZAD 7.

a)  $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$  dla  $a_0 = 1$

$$a_n = n! + \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!}$$

Dla  $n=1, 2$  działa. Załozmy, że działa też dla wszystkich  $n$ , wtedy

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 = (n+1) \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^n \frac{(n+1)!}{i!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!}$$

b)  $b_0 = \frac{1}{2}$ ,  $nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1$  czyli dla  $n > 0$  mamy  $b_n = \frac{(n-2)b_{n-1} + 1}{n}$

$$b_n = \frac{1}{2}$$

Dla  $n=1, 2$  działa, załozmy że działa też dla wszystkich  $n$ , wtedy

$$b_{n+1} = \frac{(n-1)b_n + 1}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(n-1) + 1}{n+1} = \frac{n-1+2}{2(n+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

c)  $c_0 = 0$ ,  $nc_n = (n+2)c_{n-1} + n+2$ , dla  $n > 0$   $c_n = \frac{(n+2)c_{n-1} + n+2}{n}$

$$c_n = \sum_{i=1}^n (2i+1) = \sum_{i=1}^n 2i + n = 2 \sum_{i=1}^n i + n = n(n+1) + n$$

Dla  $n=1, 2$  działa, załozmy, że jest zgodny dla wszystkich  $n$ , wtedy

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} &= \frac{(n+3)c_n + n + 3}{n+1} = \frac{(n+3)(n(n+1) + n) + n + 3}{n+1} = \\
 &= \frac{(n+3)(n(n+1) + n + 1)}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1)(n+1)}{n+1} = \\
 &= (n+3)(n+1) = (n+1)(n+2) + (n+1)
 \end{aligned}$$

d)  $d_0 = 1, d_1 = 2, nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}$ , czyli dla  $n > 0$   $d_n = \frac{(n-2)!d_{n-1}d_{n-2}}{n}$

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = 1$$

$$d_3 = \frac{2}{3}$$

$$d_4 = \frac{1}{3}$$

$$d_5 = \frac{4}{15}$$

## ZAD 8.

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

Rozpiszmy pierwsze 6 wyrazow badanego ciagu:

$$a_0 = \alpha$$

$$a_1 = \beta$$

$$a_2 = \frac{1 + a_1}{a_0} = \frac{1 + \beta}{\alpha}$$

$$a_3 = \frac{1 + a_2}{a_1} = \frac{\alpha\beta + 1}{\alpha\beta}$$

$$a_4 = \frac{1 + a_3}{a_2} = \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\beta + \beta^2}$$

$$a_5 = \frac{1 + a_4}{a_3} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta + 1} \frac{\beta^2 + 2\beta + \alpha\beta + \alpha + 1}{\beta + 1} = \alpha$$

$$a_6 = \frac{1 + a_5}{a_4} = (\alpha + 1) \frac{\beta + \beta^2}{\alpha\beta + \alpha + 1 + \beta} = \frac{\beta(\beta + 1)}{\beta + 1} = \beta$$

Z powyższych wyliczeń wynika, że ciąg ma tylko 4 różne wartości, które powtarzają się cyklicznie. W takim razie wystarczy, żeby mianownik każdego z tych wyrazów był różny od 0. Ze wzoru na wyrazy  $a_2, a_3$  jasno wynika, że  $\alpha, \beta \neq 0$ , a ponieważ w  $a_4$  wyraz  $a_2$  jest w mianowniku, to jego licznik musi spełniać  $1 + \beta \neq 0$ , czyli  $\beta \neq -1$ .

Z licznika  $a_3$  mamy nierówność

$$\alpha + \beta + 1 \neq 0,$$

czyli

$$\alpha \neq -1 - \beta.$$