Algebra II (ISIM), lista 5 (23.11.2021, deklaracje do godz. 9:00).

G, H oznaczają grupy skończone. p oznacza liczbę pierwszą.

Teoria: Produkt (prosty) grup. Twierdzenie o produkcie wewnętrznym grup. Produkt półprosty grup. p-grupy. Twierdzenia Sylova. p-grupa ma nietrywialne centrum. Twierdzenie Cauchy'ego o elemencie rzędu p. Wyliczenie grup małych rzędów. Ósemkowa grupa kwaternionów $\mathbb{Q}_8$. Uwaga: do rozwiązania zadań o podgrupach Sylova wystarczy znajomość twierdzeń Sylova i idei ich dowodu.

1. Udowodnić, że grupa $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest izomorficzna z produktem dwóch nietrywialnych grup.

2. (a)– Załóżmy, że $g \in G,\ h \in H,\ ord(g) = n,\ ord(h) = m$. Udowodnić, że w $G \times H$ $ord(\langle g, h\rangle) = NWW(n, k)$.
   (b)– Udowodnić, że jeśli $n = m \cdot k$, gdzie m i k są względnie pierwsze, to $(\mathbb{Z}_n, +_n) \cong (\mathbb{Z}_m, +_m) \times (\mathbb{Z}_k, +_k)$. Określić też jawnie izomorfizm między tymi grupami.

3. Załóżmy, że grupy N i H są abelowe. Udowodnić, że grupa $N \rtimes H$ jest abelowa $\iff$ działanie H na N przez automorfizmy (w definicji $N \rtimes H$) jest trywialne, tzn. każde $h \in H$ działa jak id_N (tzn. $\varphi(h) = id_N$).

4. $^-$ Załóżmy, że $H < G$. Udowodnić, że $N(H) < G$ i $H \lhd N(H)$. Tu $N(H)$ oznacza normalizator podgrupy H w grupie G, tj. zbiór $\{g \in G : H^g = H\}$.

5. Przedstawić następujące grupy jako produkty półproste $N \rtimes H$ nietrywialnych grup N, H. W każdym przypadku opisać działanie H na N.
   (a) Grupy z zad. 7 z listy 1.
   (b) $D_n, n \geqslant 3$ i $S_n, n \geqslant 3$.

6. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ określamy funkcję $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f_{a,b}(x) = ax + b$. Niech $A = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ oznacza grupę przekształceń afinicznych prostej $\mathbb{R}$ (ze składaniem). Udowodnić, że $A \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

7. $-$ Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylova w grupach S_p i S_{p+1}. Ile ich jest?

8. (a) Dowieść, że wszystkie grupy rzędu p^2 są abelowe.
   (b) Udowodnić, że każda nieabelowa grupa rzędu $2p$ jest izomorficzna z D_p.

9. * Dowieść, że każda grupa rzędu 200 zawiera normalną 5-podgrupę Sylova (wsk: liczba 5-podgrup Sylova w tej grupie dzieli 200 i przystaje do 1 modulo 5).

10. Udowodnić, że każda normalna p-podgrupa grupy G jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylova grupy G.

11. * Niech $p < q$ będą liczbami pierwszymi.
    (a) Dowieść, że jeśli $p \nmid q - 1$, to każda grupa rzędu pq jest cykliczna.
    (b) Dowieść, że jeśli $p \mid q - 1$, to istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do $\cong$)

grupa nieabelowa rzędu pq i że q-podgrupa Sylova tej grupy jest dzielnikiem normalnym.

12. * Załóżmy, że G działa na zbiorze n-elementowym S. Niech $G^+ = \bigcap_{x \in S} G_x$. Dowieść, że $G^+ \triangleleft G$ oraz $[G : G^+] \mid n!$.