

Kombinatoryka & teoria grafów

by a fish

21.03.2137



SYLABUS – teoria grafów:

1. Basic concepts: graphs, paths and cycles, complete and bipartite graphs
2. Matchings: Hall's Marriage theorem and its variations
3. Forbidden subgraphs: complete bipartite and r -partite subgraphs, chromatic numbers, Turán's theorem, asymptotic behaviour of edge density, Erdős-Stone theorem
4. Hamiltonian cycles (Dirac's Theorem), Eulerian circuits
5. Connectivity: connected and k -connected graphs, Menger's theorem
6. Ramsey theory: edge colourings of graphs, Ramsey's theorem and its variations, asymptotic bounds on Ramsey numbers
7. Planar graphs and colourings: statements of Kuratowski's and Four Colour theorems, proof of Five Colour theorem, graphs on other surfaces and Euler characteristics, chromatic polynomial, edge colourings and Vizing's theorem
8. Random graphs: further asymptotic bounds on Ramsey numbers, Zarankiewicz numbers and their bounds, graphs of large first and high chromatic number, complete subgraphs in random graphs.
9. Algebraic methods: adjacency matrix and its eigenvalues, strongly regular graphs, Moore graphs and their existence.

Contents

1	Structural properties	5
1.1	Basic definitions	5
1.2	Hall's Marriage Theorem	6
1.3	Menger's Theorem	10
1.4	Menger's Theorem (so edgy)	13
2	External problems	14
2.1	Complete subgraphs	14

1 Structural properties

1.1 Basic definitions

Graph – an ordered pair $G = (V, E)$:
 \hookrightarrow **vertices** $:= V$ [singular: *vertex*]
 \hookrightarrow **edges** $:= E$, $\{v, w\} := vw$

For an edge vw , $v \neq w$ we say that v, w are its **endpoints** and that it is **incident** to v (or w).

Graphs G and H are **isomorphic** ($G \simeq H$) if there exists $f: V(G) \xrightarrow{1-1} V(H)$ such that
 $(\forall v, w \in V(G)) \quad vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$

Meaning that edges are like an operation on a group of vertices

G is a **subgraph** of H [$G \leq H$] if $V(G) \subseteq V(H)$ and $E(G) \subseteq E(H)$.

If G is **H-free** if it has no subgraphs isomorphic to H .

Dla krawędzi vw , $v \neq w$ mówimy, że v, w są jej **koncami** i że jest krawędzią **padającą** na v (lub w).

Grafy G i H są **izomorficzne**, jeżeli istnieje $f: V(G) \xrightarrow{1-1} V(H)$ takie, że
 $(\forall v, w \in V(G)) \quad vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$

G jest **podgrafem** H [$G \leq H$] jeżeli $V(G) \subseteq V(H)$ oraz $E(G) \subseteq E(H)$.

G jest **H-free** (wolny od H ?), jeżeli nie ma podgrafów izomorficznych z H .

A **cycle** of length $n \geq 3$ [C_n] is a graph with vertices

$$V(C_n) = [n]$$

and edges:

$$E(C_n) = \{i(i+1) : i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

A **path** of length $n-1$ [P_{n-1}] is a graph with vertices

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

and edges

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Cykl długości $n \geq 3$ [C_n] to graf z wierzchołkami

$$V(C_n) = [n]$$

i krawędziami:

$$E(C_n) = \{i(i+1) : i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

Sciezka długości $n-1$ [P_{n-1}] to graf z wierzchołkami

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

i krawędziami

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

An **induced** by $A \subseteq V(G)$ subgraph of G is $G[A] = (A, E_A)$

A **connected component** of G is a subgraph $G[W] \leq G$ where $W \subseteq V$ is an equivalence class under \approx given by

$$v \approx w \iff \text{exists a path } v \dots w \text{ in } G$$

A graph is **connected** if $v \approx w$ for every $v, w \in V$ (G has at most one connected component).

If v is a vertex in graph G , we say that its **neighbourhood** is $N_G(v) = \{w \in G : vw \in E(G)\}$. Furthermore, the **degree of** v is $|N_G(v)|$.

If $A \subseteq V$, then $N(A) := \bigcup_{v \in A} N(v)$.

We define:

$$\hookrightarrow \text{minimal degree } \delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$$

$$\hookrightarrow \text{maximal degree } \Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$$

$$\hookrightarrow \text{average degree } d(G) = \frac{\sum d(v)}{|G|}.$$

If there exists an $r \geq 0$ such that

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(G) = r$$



then we say that the graph is **r-regular** or, more generally, it is **regular** for some r .

Handshaking Lemma: for any graph G we have $e(G) = \frac{1}{2} \sum d(v) = \frac{|G|}{2} d(G)$

1.2 Hall's Marriage Theorem

Graph G is **bipartite** with vertex classes U and W if $V = U \cup W$ so that every edge has form uw for some $u \in U$ and $w \in W$.

G is bipartite iff it has no cycles of odd length.

[] []

[]

\Rightarrow

Let U, W be the vertex classes and $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ be a cycle in G . WLOG suppose that $v_1 \in U$. Then $v_2 \in W$ etc. Specifically we have $v_i \in U$ if i is odd and $v_i \in W$ if i is even. Then, we have $v_n v_1$, so n must be even.

\Leftarrow

Suppose G has no cycles of odd length. WLOG, assume that $V(G) \neq \emptyset$ and that G is connected, because G will be bipartite if all its connected components are bipartite. Fix $v \in G$ and for all other $w \in G$ define distance $\text{dist}(v, w)$ as the smallest $n \geq 0$ such that there exists a path $v \dots w$ in G of length n .

Now, let $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$ and set

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

We want to show that there are no edges in G of the form $v'v''$ where $v', v'' \in U$ or $v', v'' \in W$. Suppose that $v'v'' \in E(G)$ with $v' \in V_m, v'' \in V_n$ and $m \leq n$. Then, we have a path

$$v \dots v'v'' \in G$$

of length $m+1$, implying that

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Suppose that $n = m$. Let $v'_0 v'_1 \dots v'_m$ and $v''_0 v''_1 \dots v''_m$ be paths in G with $v = v'_0 = v''_0$, $v' = v'_m$ and $v'' = v''_m$. Note that $v'_i, v''_i \in V_i$ for $0 \leq i \leq m$. Let $k \geq 0$ be largest such that

$$v'_k = v''_k$$

and note that $k \leq m-1$ as $v' \neq v''$. Then

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

is a cycle of odd length, which is a contradiction.

Therefore, we can only have $n = m+1$ and then exactly one of n, m is even meaning that exactly one of v' and v'' is in U as required for G to be bipartite.

[]

Graf G jest **dwudzielny** z klasami wierzchołków U i W , jeśli $V = U \cup W$ takimi, że każda krawędź jest formy uw dla pewnych $u \in U$ oraz $w \in W$.

G jest dwudzielny wtw kiedy nie ma cykli o nieparzystej długości.

⇒

Niech U, W będą klasami wierzchołków oraz niech $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ niech będzie cyklem w G . BSO założmy, że $v_1 \in U$. W takim razie, $v_2 \in W$ etc. W szczególności, mamy $v_i \in U$ jeżeli i jest nieparzyste oraz $v_i \in W$ jeżeli i jest parzyste. W takim razie, skoro $v_n v_1$, to n musi być parzyste.

⇐

Założmy, że G nie ma cykli o nieparzystej długości. BSO założmy, że $V(G) \neq \emptyset$ i że G jest spójny, ponieważ G będzie dwudzielny, wtw gdy wszystkie jego składowe spójne (????) będą dwudzielne. Ustalmy $v \in G$ i dla każdego innego $w \in G$ zdefiniujmy dystans $\text{dist}(v, w)$ jako najmniejsze $n \geq 0$ takie, że istnieje ścieżka $v \dots w$ w G o długości n .

Niech $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$ i zbiory

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$V = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

Chcemy pokazać, że nie istnieją w G krawędzie postaci $v'v''$, gdzie $v', v'' \in U$ lub $v', v'' \in W$.

Założmy, że $v'v'' \in E(G)$ z $v' \in V_m, v'' \in V_n$ oraz $m \leq n$. Wtedy istnieje ścieżka

$$v \dots v'v'' \in G$$

długości $m+1$, co implikuje, że

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Założmy, że $n = m$. Niech $v'_0 v'_1 \dots v'_m$ oraz $v''_0 v''_1 \dots v''_m$ są ścieżkami w G takimi, że $v = v'_0 v''_0$, $v' = v'_m$ oraz $v'' = v''_m$. Zauważmy, że $v'_i, v''_i \in V_i$ dla $0 \leq i \leq m$. Niech $k \geq 0$ będzie największe takie, że

$$v'_k = v''_k$$

i zauważmy, że $k \leq m-1$ ponieważ $v' \neq v''$. Wtedy

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

jest cyklem o nieparzystej długości, co daje nam sprzeczność.

W takim razie, możemy mieć tylko $n = m+1$ i wtedy dokładnie jedno z n, m może być parzyste, co daje nam dokładnie jedno z v' i v'' w U tak, jak jest wymagane żeby to był graf dwudzielny.

If G is a bipartite graph with $V = W \cup M$ and $W' \subseteq W$, a **partial matching** in G from W' to M is

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$

for some $v_w \in M$ such that $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. A partial matching from W to M is called a **matching**.

Sufficient condition:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (\text{☕})$$

for every $A \subseteq W$

.....
A bipartite graph G contains a matching from W to M iff (G, W) satisfies Hall's condition (☕).

Jesli G jest grafem dwudzielnym z $V = W \cup M$ oraz $W' \subseteq W$, wtedy **czesciowe skojarzenie** w G z W' do M to

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$



dla pewnych $v_w \in M$ takich, że $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. Czesciowe kojarzenie z W do M jest nazywane **kojarzeniem**.

Wystarczający warunek:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (\text{☕})$$

dla każdego $A \subseteq W$

.....
Dwudzielny graf G zawiera kojarzeniem iff gdy (G, W) zadowala warunek Halla (☕).

[] []

[]

⇒

Trivial.

⇐

Using induction on $|W|$. For $|W| = 0, 1$ it is trivial.

We gonna break it into parts: $|N(A)| > |A|$ and $|N(A)| = |A|$

Suppose that $|N(A)| > |A|$ for every non-empty subset $A \subsetneq W$. Take any $w \in W$ and $v \in N(w)$ and construct a new graph

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

For any non-empty $B \subseteq W - \{w\}$ we have

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

and therefore

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|$$

and so $(G_0, W - \{w\})$ satisfies Hall's condition. From induction we have a matching P in G_0 from $W - \{w\}$ to $M - \{v\}$ and so $P \cup \{wv\}$ is a matching from W to M .

Now, suppose that $|N(A)| = |A|$ for some non-empty subset $A \subsetneq W$. Let

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

and

$$G_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

We will show that both those graphs satisfy Hall's condition.

Let us take any $B \subseteq A$ in G_1 . We have

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

and so graph G_1 satisfies Hall's condition.

Now, let us take any $B \subseteq W - A$ in G_2 . We know that $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$ so

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

Therefore, graph G_2 also satisfies Hall's condition.

Using inductive hypothesis, we have that there exists a matching P_1 in G_1 and a matching P_2 in G_2 . The first one is from A to $N_G(A)$ while the second is from $W - A$ to $M - N_G(A)$, so they are disjoint. Therefore, $P_1 \cup P_2$ is a matching in G from W to M .

[]

⇒

Trywialne.

⇐

Uzjemy indukcyjnie na $|W|$. Dla $|W| = 0, 1$ jest trywialne.

Podzielimy dowód na dwie części: $|N(A)| > |A|$ oraz $|N(A)| = |A|$.

Załozmy, że $|N(A)| > |A|$ dla każdego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Weźmy dowolne $w \in W$ oraz $v \in N(w)$ i skonstruujmy nowy graf

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

Dla każdego niepustego $B \subseteq W - \{w\}$ mamy

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

i w takim razie

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|,$$

czyli $(G_0, W - \{w\})$ spełnia warunek Halla. Z założenia indukcyjnego istnieje kojarzenie P w G_0 z $W - \{w\}$ do $M - \{v\}$, w takim razie $P \cup \{wv\}$ jest kojarzeniem z W do M .

Załozmy teraz, że $|N(A)| = |A|$ dla pewnego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Niech

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

oraz

$$g_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

Pokazemy, że oba te grafy zaspokajają warunek Halla.

Weźmy dowolny $B \subseteq A$ w G_1 . Mamy

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

a więc graf G_1 zaspokaja warunek Halla.

Teraz, weźmy dowolny $B \subseteq W - A$ w G_2 . Wiemy, że $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$, a więc

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$


W takim razie G_2 spełnia warunek Halla.

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje kojarzenie P_1 w G_1 oraz P_2 w G_2 . Pierwsze jest z A do $N_G(A)$, natomiast drugie jest z $W - A$ do $M - N_G(A)$, czyli są rozłączne. W takim razie $P_1 \cup P_2$ jest kojarzeniem w G z W do M .

.....

Let G be a finite group and let $H \leq G$ be a subgroup with $\frac{|G|}{|H|} = k$, then $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \dots \cup H g_k$ for some $g_1, \dots, g_k \in G$.

Niech G będzie skończoną grupą i niech $H \leq G$ będzie podgrupą z $\frac{|G|}{|H|} = k$, wtedy $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \dots \cup H g_k$ dla pewnych $g_1, \dots, g_k \in G$.

[] []

[]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[]

Oznaczmy

$$L = \{a_1 H, \dots, a_k H\}$$

$$R = \{H b_1, \dots, H b_k\}$$

jako zbiory odpowiednio lewych i prawych wrastw H w G . Niech K będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków L i R . Wprowadźmy na K relacje równoważności

$$a_i H \sim H b_j \iff a_i H \cap H b_j \neq \emptyset \text{ w } G.$$

Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq L$ zachodzi

$$|\bigcup_{U \in A} U| = |A| \cdot |H|$$

jako podzbiorów G . Chodzi o to, że każda warstwa ma moc $|H|$, a mamy ich $|A|$ sztuk w zbiorze $|A|$. Więc jak będziemy je dodawać, to one są rozłączne, więc smiga.

Dla każdego $V \in R$ mamy $|V| = |H|$ bo każda warstwa ma tę samą moc co H , a więc $\bigcup_{U \in A} U$ nie jest niepusty z co najmniej $|A|$ elementami z R . Z tego wynika, że

$$|N_K(A)| \geq |A|,$$

więc istnieje kojarzenie P w K z L do R . Weźmy więc dowolny g_i w $a_i H \cap H b_j \neq \emptyset$. Wtedy jest część krawędzi $(a_i H)(H b_j)$ w P dla $1 \leq i \leq k$. Mamy więc $a_i H = g_i H$ oraz $H b_j = H g_i$.



.....

Hall's Missing Soulmate Theorem

Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M , and let $d \geq 1$. Then G contains a partial matching from W' to M for some $W' \subseteq W$ with $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ for every $A \subseteq W$.

Twierdzenie Halla o brakującym mezu(????)

Niech G będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków W i M i niech $d \geq 1$. Wtedy G zawiera kojarzenie z W' do M dla pewnego $W' \subseteq W$ z $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ dla każdego $A \subseteq W$.

[] []

[]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[]

⇒

Trywialne :3



⇐

Zapoznajmy panie z d wyobrazonymi idealnymi dla kazdej pani kawalerami. Wtedy twierdzenie Halla jest spelnione, wiec mozemy ozenic kazda kobiete do odpowiedniego, prawdziwego czy wyobrazonego, meza. W prawdziwym zyciu, co najwyzej d kobiet jest niezameznych.

Hall's Polygamous Marriage Theorem

Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M , and let $d \geq 1$.

Then G contains a subgraph H with $W \subseteq V(H)$ in which each $w \in W$ has degree d and each $v \in M \cap V(H)$ has degree 1 iff $|N(A)| \geq d|A|$ for every $A \subseteq W$

[] []

[]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[]

⇒

Trywialne :3

⇐

Sklonujmy kazda kobiete $d - 1$ razy. Wtedy warunek Halla jest zaspokojony, wiec mozemy kazda z nich ozenic (klony i oryginaly) do odpowiednich mezow. Teraz scisnijmy klony z oryginalami do jednej osoby. Koniec!

1.3 Menger's Theorem

Cut vertex v is a vertex in a connected graph G such that $G - \{v\}$ is not connected.

Graph G is a **k -connected graph** if for any $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ is connected.

Complete graph has all vertices connected by an edge, that is for all $v, w \in G$ $v \neq w$ we have $vw \in E$.

Thacy wierzcholek v jest wierzchołkiem w spojnym grafie G takim, ze $G - \{v\}$ jest niespojny.

Graf G jest **k -spojnym grafem**, jezeli dla kazdego $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ jest spojny.

Graf pelny ma wszystkie wierzcholki polaczone krawedzia, to znaczy dla kazdego $v, w \in G$, $v \neq w$ mamy $vw \in E$.

(A, B) -path is a path in G for some $A, B \subseteq V$ of the form $a \dots b$ for some $a \in A$ and $b \in B$.

(A, B) -cut in G is $C \subseteq V$ such that $G - C$ contains no $(A - C, B - C)$ -paths.

If we take vertices $a, v \in V$ we call an $(\{a\}, \{b\})$ -path an (a, b) -path. Given a collection of (a, b) -paths

$$P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$$

we say such a collection is **independent** if $P^{(i)} - \{a, b\}$ and $P^{(j)} - \{a, b\}$ have no common vertices for $i \neq j$.

(A, B) -sciezka to sciezka w G dla pewnych $A, B \subseteq V$ postaci $a \dots b$ dla jakis $a \in A$ i $b \in B$.

(A, B) -ciecie w G to $C \subseteq V$ takie, ze $G - C$ nie zawiera zadnych $(A - C, B - C)$ -sciezek.

Jesli wezwiemy wierzcholki $a, v \in V$, to $(\{a\}, \{b\})$ -sciezke nazywamy (a, b) -sciezka. Jesli dana jest kolekcja (a, b) -sciezek

$$P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$$

mowimy, ze ta kolekcja jest **niezalezna**, jezeli $P^{(i)} - \{a, b\}$ i $P^{(j)} - \{a, b\}$ nie maja wspolnych wierzcholkow dla $i \neq j$.

Given $A, B, C \subseteq V(G)$ and if $A \subseteq C$ or $B \subseteq C$, then C is an (A, B) -cut and if C is an (A, B) -cut then $A \cap B \subseteq C$.

Let G be a graph, $A, B \subseteq V(G)$ and $k \geq 0$. Suppose that for every (A, B) -cut C in G we have $|C| \geq k$.

Then G contains a collection of k vertex-disjoint (A, B) -paths.

Dla danych $A, B, C \subseteq V(G)$, jeżeli $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, to C jest (A, B) -cieciem i jeśli C jest (A, B) -cieciem, to $A \cap B \subseteq C$.

Niech G będzie grafem, $A, B \subseteq V(G)$ i $k \geq 0$. Załóżmy, że dla każdego (A, B) -ciecia C w G jest $|C| \geq k$.

Wtedy G zawiera zbior k rozłącznych wierzchołkami (A, B) -ściezek.

[] []

[]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[]

Użyjemy indukcji na $e(G)$ [definicja dla debila].

Jako przypadek bazowy mamy $e(G) = \emptyset$, wtedy $A \cap B$ jest (A, B) -cieciem i w takim razie $k \leq |A \cap B|$, ale każdy wierzchołek $A \cap B$ jest (A, B) -ściezka długości 0 i wszystkie z nich są rozłączne, tak jak wymagamy.

Założmy, że $e(G) \geq 1$, wybierzmy krawędź $e \in E(G)$ i niech $H = G - \{e\}$.

Jeśli dla każdej (A, B) -ciecie w H ma stopień co najmniej k , to przez hipotezę indukcyjną są one k wierzchołkowo rozłącznymi (A, B) -ściezkami w H i w takim razie w G , więc koniec.

Założmy teraz, bez starty ogólności, że w H istnieje co najmniej jedno (A, B) -ciecie C takie, że $|C| < k$. W takim razie C nie jest (A, B) -cieciem w G , więc $G - C$ zawiera co najmniej jedną (A, B) -ściezkę postaci

$$a \dots vw \dots b$$

dla pewnych $a \in A$, $b \in B$, gdzie $v, w \in G$ są końcami e . Co więcej, każda (A, B) -ściezka w $G - C$ zawiera wierzchołek v , co implikuje że

$$C' = C \cup \{v\}$$

jest (A, B) -cieciem w G . Co więcej, $|C'| = |C| + 1 \geq k$. Ponieważ $a \dots vw \dots b$ było jedyną ściezką, która blokowała C przed zostaniem (A, B) -cieciem w G , ale już $|C'|$ nim jest, to $|C| = k - 1$ i możemy przyjąć, że

$$C = \{c_1, \dots, c_{k-1}\}.$$

Teraz, ponieważ $v \in C'$, to każde (A, C') -ciecie D w H jest także (A, C') -cieciem w G . Ponieważ każda (A, B) -ściezka w G zawiera wierzchołek C' , to D jest także (A, B) -cieciem w G i dlatego $|D| \geq k$. Korzystając więc z hipotezy indukcyjnej, wiemy, że istnieją rozłączne wierzchołkami (A, C') -ściezki

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}, p^{(k)}$$

w H kończące się odpowiednio w c_1, \dots, c_{k-1}, v . Niech $C'' = C \cup \{w\}$. Wtedy analogicznie, mamy takie (C'', B) -ściezki

$$q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, q^{(k)}$$

w H zaczynające się od odpowiednio wierzchołków c_1, \dots, c_{k-1}, v . Co więcej, ponieważ C' jest (A, B) -cieciem w G , to $p^{(i)}$ oraz $q^{(j)}$ nie mogą mieć wspólnego wierzchołka u poza przypadkiem $i = j \leq k - 1$ i $u = c_i$. To sugeruje, że

$$p^{(1)}q^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}q^{(k-1)}, p^{(k)}q^{(k)}$$

są k rozłącznymi względem wierzchołków (A, B) -ściezkami w G . Koniec.

Hall's Marriage Theorem may be deduced from this lemma:

Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M and suppose that (G, W) satisfies Hall's condition. Let C be a (W, M) -cut in G . Then

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

Twierdzenie Halla o małżeństwach może być wyprowadzone z tego lematu:

Niech G będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków W i M i założmy, że (G, W) zadawała warunek Halla. Niech C będzie (W, M) -cieciem w G . Wtedy

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

and therefore

$$\begin{aligned}|C| &= |W \cap C| + |M \cap C| \geq \\ &|W \cap C| + |N(W - C)| \geq \\ &|W \cap C| + |W - C| = |W|\end{aligned}$$

thus $|W|$ contains vertex-disjoint (W, M) -paths, each of length 1 implying that such a collection of paths is a matching.

i z tego

$$\begin{aligned}|C| &= |W \cap C| + |M \cap C| \geq \\ &|W \cap C| + |N(W - C)| \geq \\ &|W \cap C| + |W - C| = |W|\end{aligned}$$

a wiec $|W|$ zawiera rozlaczne wzgledem wierzchołkow (W, M) -sciezki, kazda o dlugosci 1, implikujac ze taki zbior sciezek jest kojarzeniem.

Menger's Theorem

Let G be an incomplete graph and let $k \geq 0$. Then G is k -connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k independent (a, b) -paths in G .

[] []

[]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[]

\Rightarrow

Niech $C \subseteq V(G)$ i zalozmy, ze $G - C$ jest niespojny. Wybierzmy dowolne $a, b \in G - C$ nalezace do roznych skladowych spojnosci $G - C$. Na mocy tego zalozenia, G zawiera k niezaleznych (a, b) -sciezek. Kazda z tych sciezek musi miec wierzcholek w C , ale zadne dwie sciezki nie maja wspolnego wierzchołka poza a i b . Z tego wynika, ze $|C| \geq k$, tak jak wymagamy.

\Leftarrow

Bedziemy robic indukcje po k .

Przypadek bazowy dla $k=0$ jest trywialny.

Niech wiec $k \geq 1$ i niech $a, b \in G$ beda rozne.

Zalozmy najpierw, ze $a \not\sim b$. Niech $A = N(a)$ oraz $B = N(b)$. Grafy $G - A$ i $G - B$ sa niespojne, bo nie maja ani jednej sciezki $a \dots b$. Daje to $|A| \geq k$ oraz $|B| \geq k$. Jezeli C jest (A, B) -cieciem w G , to $G - C$ rowniez nie ma sciezki miedzy elementami $A - C$ oraz $B - C$. Dlatego, albo $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, albo $G - C$ jest niespojny. W kazdym razie, mamy $|C| \geq k$ wiec z lematu wyzej, G ma k rozlacznych wzgledem wierzchołkow (A, B) -sciezek:

$$a_1 \dots b_1, \dots, a_k \dots b_k.$$

Wtedy,

$$aa_1 \dots b_1b, \dots, aa_k \dots b_kb$$

sa k niezaleznymi sciezками (a, b) tak jak wymagamy.

Zalozmy teraz, ze $a \sim b$ i niech $H = G - \{ab\}$. Pokazemy najpierw, ze H jest $(k-1)$ -spojny.

Zalozmy, ze tak nie jest. Niech $C \subseteq V(H)$ bedzie takim podzbiorem, ze $|C| < k-1$ i niech $H - C$ bedzie niespojny. Poniewaz G jest k -spojny, to $G - C$ jest spojny i nie ma wierzchołkow tnacych (cut vertices), co implikuje ze $H - C$ dokladnie dwie skladowe spojne, kazda zawierajaca jeden z wierzchołkow a lub b . Ale wtedy $|G| = |H| = 2 + |C| \leq k$, wiec G jest grafem k -spojnym z $|G| \leq k$, co daje sprzeczność z tym, ze G nie jest pelny.

W takim razie, H musi byc $(k-1)$ -spojny. Z hipotezy indukcyjnej zawiera wiec $k-1$ niezaleznych (a, b) -scieziem. Razem z krawedzie ab te sciezki tworza zbior k niezaleznych (a, b) sciezek w G , co konczy dowod.

1.4 Menger's Theorem (so edgy)

Graph G is k -edge-connected for $k \geq 0$ if for every $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ is connected.



Line graph of graph G $[L_G]$ is a graph with $V(L_G) = E(G)$ and for $e, f \in L_G$ with $e \neq f$ we have

$$e \sim f \text{ in } L_G \iff e, f \text{ common endpoint in } G$$

Menger's Theorem edge version

Let G be a graph and let $k \geq 0$.

Then G is k -edge-connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k edge-disjoint (a, b) -paths in G .

[] []

[]

SOMEBONY ONCE TOLD ME THE WORLD IS GONNA ROLL ME

[]

\Rightarrow

Niech L_G będzie grafem krawdziowym grafu G . Weźmy $a, b \in G$ takie, że $a \neq b$. Niech

$$A = \{av \in E(G) : v \in N_G(a)\}$$

i niech

$$B = \{bv \in E(G) : v \in N_G(b)\}.$$

Oznaczmy przez C (A, B) -ciecie w L_G , więc

$$C \subseteq E(L_G).$$

Wtedy nie istnieje (a, b) -ściezka w $G - C$, co implikuje, że $|C| \geq k$. W takim razie, na mocy lematu z poprzedniego podrozdziału, istnieje k rozłączna względem wierzchołków (A, B) -ściezka w L_G i z tego powodu jest k rozłączna względem krawędzi (a, b) -ściezka w G .

Mozemy wyprowadzić te implikacje z twierdzenia "max-flow min-cut" przez zamienianie każdej krawędzi vw przez parę skierowanych krawędzi $v \rightarrow w$ i $w \rightarrow v$. Ale my nie znamy tego twierdzenia, więc nie chce mi się pisać dalej :v

\Leftarrow

Niech $F \subseteq E(G)$ i założmy, że $G - F$ jest niespojny. Wybierzmy $a, b \in G - F$ należące do różnych składowych spójności $G - F$. Zgodnie z założeniem, G zawiera k rozłączne względem krawędzi (a, b) -ściezki i każda z tych ściezek musi mieć krawędzie w F . Z tego też powodu $|F| \geq k$ tak jak chcieliśmy.

Graf G jest k -spójny krawdziowo dla $k \geq 0$ jeśli dla każdego $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ jest spójny.

Graf krawdziowy grafu G $[L_G]$ jest grafem z $V(L_G) = E(G)$ i dla $e, f \in L_G$ z $e \neq f$ mamy

$$e \sim f \text{ w } L_G \iff e, f \text{ wspólny koniec w } G$$

Twierdzenie Megera wersja krawedzie

Niech G będzie grafem i niech $k \geq 0$.

Wtedy G jest k -spójny krawdziowo z $a \neq b$, wtedy istnieje zbiór k rozłącznych krawędziami (a, b) -krawędzi w G .

2 External problems

How large can we make some parameter of G before it is forced to have a certain property?

2.1 Complete subgraphs

Complete graph of order r [K_r] is a graph with $V(K_r) = [r]$ and $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$.

K_3 is called a triangle.

r -partite graph G with vertex classes V_1, \dots, V_r has every edge of form vw where $v \in V_i$ and $w \in V_j$ and $i \neq j$. Such a graph is called complete r -partite if for every $i, j, i \neq j$ we have $v \in V_i, w \in V_j \implies vw \in E(G)$.

A complete bipartite graph with vertex classes of orders $|V_1| = m$ and $|V_2| = n$ is denoted $K_{m,n}$.

Graf pelny stopnia r [K_r] to graf z $V(K_r) = [r]$ i $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$. K_3 jest nazywany trojkatem?

r -dzielny graf G z klasami wierzchołkow V_1, \dots, V_r ma każdy wierzchołek postaci vw , gdzie $v \in V_i$ i $w \in V_j$ dla $i \neq j$. Taki graf jest dodatkowo nazywany pelnym grafem r -dzielnym, jeżeli dla każdego $i, j, i \neq j$ jest $v \in V_i, w \in V_j \implies vw \in E(G)$.

Pelny graf dwudzielny z klasami wierzchołkow o mocy $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$ jest oznaczany jako $K_{m,n}$.

We now want to check how big must $e(G)$ be in order to force K_r to be G subgraph.

\hookrightarrow given $r \geq 2$ we can see that for G to be K_r -free we need G to be $(r-1)$ -partite

\hookrightarrow given $n \geq r-1$ out of all $(r-1)$ -partite graphs with n vertices the one with most edges is a complete $(r-1)$ -partite graph

\hookrightarrow if G is a complete $(r-1)$ -partite graph with vertex classes

V_1, \dots, V_{r-1} ,

if $|V_i| \geq |V_j| + 2$ for some $i \neq j$, then we may choose $v \in V_j$ and consider a new graph obtained by removing edges vv_i for $v_i \in V_i$ and adding vv_j for every $v_j \in V_j - \{v\}$. This new graph is $(r-1)$ -partite and $|G'| = |G|$ and

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

\hookrightarrow so the $(r-1)$ partite graph with n vertices and the most edges will have vertex classes "as equal in size as possible"

Teraz chcemy sprawdzic jak duze musi byc $e(G)$, zeby zmusic K_r do bycia podgrafem G

\hookrightarrow majac dane $r \geq 2$ mozemy zauwazyc, ze aby G bylo K_r -wolne, musi byc $(r-1)$ -dzielne

\hookrightarrow majac dane $n \geq r-1$ i wszystkie $(r-1)$ -dzielne grafy z n wierzchołkami ten, który ma najwiecej krawedzi jest pelnym $(r-1)$ -dzielnym grafem

\hookrightarrow jesli G jest grafem pelnym $(r-1)$ -dzielnym z klasami wierzchołkow

V_1, \dots, V_{r-1} ,

to jesli $|V_i| \geq |V_j| + 2$ dla pewnych $i \neq j$, wtedy mozemy wybrac $v \in V_j$ i rozwazyc nowy graf otrzymany poprzez usuniecie krawedzi vv_i dla $v_i \in V_i$ oraz dodanie vv_j dla każdego $v_j \in V_j - \{v\}$. Taki nowy graf jest $(r-1)$ -dzielny i $|G'| = |G|$ oraz

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

\hookrightarrow wiec $(r-1)$ -dzielny graf z n wierzchołkami i największa liczba krawedzi bedzie miał klasy wierzchołkow tak bliskie rozmiarem jak mozliwe

Turán graph $T_r(n)$ for $n \geq r \geq 1$ is a complete r -partite graph of order n with all vertex classes of size $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ or $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. We denote $e(T_r(n))$ as $t_r(n)$.

Graf Turána $T_r(n)$ dla $n \geq r \geq 1$ to pelny r -dzielny graf stopnia n ze wszystkimi klasami wierzchołkow rozmiaru $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Oznaczamy $e(T_r(n))$ jako $t_r(n)$.

Some observations:

↔ If $T_r(n) \simeq G - \{e\}$ for some $e \in E(G)$, then G is **not** K_{r+1} -free.

↔ If r divides n , then we have

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

otherwise vertices in large classes have **minimal degree**, $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$, and vertices in small classes have **maximal degree**, $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. This implies that always

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

↔ $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$ where $v \in T_r(n)$ is a vertex of minimal degree (any if $r|n$ or one of the vertices in large classes).

$$\leftrightarrow t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$$

↔ Let us say that we want to create a K_{r+1} -free graph G by adding a vertex v to $T_r(n-1)$ and m edges with m being as large as possible. We know that v cannot be adjacent to a vertex in every class so we have

$$m = d_G(v) \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

with **equality** iff G is complete r -partite (obtained by adding v anywhere if $r|(n-1)$ or to one of the small classes.)

Kilka obserwacji:

↔ Jeśli $T_r(n) \simeq G - \{e\}$ dla pewnego $e \in E(G)$, wtedy G **nie jest** K_{r+1} -free????.

↔ Jeśli r dzieli n , to wtedy

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

w przeciwnym wypadku wierzchołki w dużych klasach mają **najmniejszy stopień**, $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$, i wierzchołki w małych klasach mają **największy stopień**, $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. To implikuje, że zawsze

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

↔ $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$ gdzie $v \in T_r(n)$ jest wierzchołkiem najmniejszego stopnia (każdy jeśli $r|n$, wpp jeden z wierzchołków w dużych klasach).

$$\leftrightarrow t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$$



↔ Powiedzmy, że chcemy stworzyć K_{r+1} -free graf G poprzez dodanie wierzchołka v do $T_r(n-1)$ i m krawędzi, gdzie m jest największe możliwe. Wiemy, że v nie może być obok wierzchołków w każdej klasie, więc

$$m = d_G(v) \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

z **rownoscia** iff G jest pełnym grafem r -dzielny (otrzymanym przez dodanie v gdziekolwiek jeśli $r|(n-1)$ lub do jednej z małych klas).

Turán's Theorem

Let $n \geq r \geq 1$ and let G be a K_{r+1} -free graph with $|G| = n$ and $e(G) \geq t_r(n)$. Then $G \simeq T_r(n)$.

[] []

[]

Maybe later, dunno

[]

Użyjemy indukcji na n .

Jeśli $n=r$, to $T_r(n) \simeq K_r$ i mamy

$$\binom{n}{2} = t_r(n) \leq e(G) \leq \binom{n}{2}$$

i z tego $T_r(n) \simeq G$.

Niech teraz $n > r$. Wybierzmy podzbiór $E' \subseteq E(G)$ taki, że $|E'| = e(G) - t_r(n)$ i niech $H = G - E'$, czyli $e(H) = t_r(n)$. Wtedy mamy

$$d(H) = \frac{2e(H)}{n} = \frac{2t_r(n)}{n} = d(T_r(n)).$$

Wtedy

$$\delta(H) \leq \lfloor d(H) \rfloor = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor = \delta(T_r(n))$$

Twierdzenie Turána

Niech $n \geq r \geq 1$ i niech G będzie K_{r+1} -wolnym grafem z $|G| = n$ i $e(G) \geq t_r(n)$. Wtedy $G \simeq T_r(n)$.

gdzie ostatnia równość wynika z obserwacji.

Wybierzmy teraz $v \in H$ taki, że $d(v) = \delta(H)$ i niech

$$K = H - \{v\}.$$

Wtedy K jest K_{r+1} -wolne. $|K| = n - 1$ i

$$e(K) = e(H) - d_H(v) = t_r(n) - \delta(H) \geq t_r(n) - \delta(T_r(n)) = t_r(n - 1),$$

gdzie ostatnia równość wynika z obserwacji. W takim razie, poprzez hipotezę indukcyjną, wiemy, że

$$K \simeq T_r(n - 1).$$

W szczególności, z tego wynika, że

$$e(K) = t_r(n - 1)$$

i w takim razie

$$d_H(v) = \delta(T_r(n))$$

wiec z kolejnej obserwacji mamy, że $H \simeq T_r(n)$.

W końcu, ponieważ $V(H) = V(G)$ oraz $E(H) = E(G) - E' \subseteq E(G)$ i G jest K_{r+1} -wolne, to z obserwacji mamy $|E'| = 0$ i

$$G \simeq H \simeq T_r(n).$$