

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M3

27 października 2022 r.

M3.1. [2 punkty] Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzielenia, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - cx_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M3.2. [1 punkt] Podać przykład funkcji $f \in C^2[a, b]$ oraz przybliżenia początkowego $x_0 \in [a, b]$, dla którego ciąg przybliżeń otrzymany za pomocą metody Newtona jest zbieżny liniowo do pierwiastka funkcji f .

M3.3. [1 punkt] Podać przykład funkcji $f \in C[a, b]$ dla której metoda regula-falsi jest zbieżna liniowo.

M3.4. [1 punkt] Które z ciągów: $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2^{2^n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{e^n}$, $\frac{1}{n^n}$ są zbieżne kwadratowo? Odpowiedź uzasadnij.

M3.5. [1,5 punktu] Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0 .

M3.6. [1 punkt] Znaleźć warunki dotyczące r , które gwarantują, że wzór iteracyjny

$$x_{n+1} = x_n - rf(x_n)$$

daje ciąg zbieżny liniowo do zera funkcji f , jeśli punkt początkowy leży blisko tego zera.

M3.7. [1 punkt] Rozważmy metodę iteracyjną określoną przez funkcję iteracji $F(x) = x + f(x)g(x)$, gdzie $f(\alpha) = 0$ oraz $f'(\alpha) \neq 0$. Jakie warunki powinna spełniać funkcja g , aby dla dostatecznie bliskich wartości początkowych, metoda była zbieżna sześciennie do α ?

M3.8. [2 punkty] Udowodnij, że metoda iteracyjna:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$$

jest zbieżna sześciennie do \sqrt{R} .

M3.9. [1 punkt] Metoda Halleya rozwiązywania równania $f(x) = 0$ korzysta ze wzoru iteracyjnego

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - (f(x_n)f''(x_n))/2}.$$

Wykazać, że jest to metoda równoważna metodzie Newtona zastosowanej do funkcji $f/\sqrt{f'}$.

20 października 2022 r.

Rafał Nowak