referacik

dupa chuj kurwa szmata

21.37

Contents

0.1 Powtórka tego co było

DYFEOMORFIZM to funkcja $h : U \to V$ dla otwartych $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ która jest klasy C^∞ i jej odwrotność $h^{-1} : V \to U$ jest również klasy C^∞. k-WYMIAROWA ROZMAITOŚĆ to podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otwarty podzbiór $x \ni U \subseteq \mathbb{R}^n$, otwarty podzbiór $V \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz dyfeomorfizm $h : U \to V$ taki, że

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V \;:\; y^{k+1} = \ldots = y^n = 0\}$$

czyli $U \cap M$ jest z dokładnością do dyfeomorfizmy po prostu $\mathbb{R}^k \times \{0\}$.

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH wg. Spivaka to różnowartościowa funkcja $W \to \mathbb{R}^n$ dla otwartego $W \subseteq \mathbb{R}^k$ taka, że

- $\hookrightarrow$ $f(W) = M \cap U$
- $\hookrightarrow$ $f'(y)$ ma rangę k (czyli obraz ma wymiar k) dla każdego $y \in W$
- $\hookrightarrow$ $f^{-1} : f(W) \to W$ jest ciągła.

TENSORY

k-tensor to funkcja k-liniowa $T : V^k \to \mathbb{R}$ dla V - przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Zbiór wszystkich k-tensorów oznaczamy $\mathscr{T}^k(V)$ i wymagamy, żeby to była przestrzeń liniowa (dodawanie, mnożenie przez skalary ma śmigać)

Iloczyn tensorowy dla $S \in \mathscr{T}^j(V)$ oraz $T \in \mathscr{T}^k(V)$ to $S \otimes T \in \mathscr{T}^{j+k}(V)$i definiujemy go:

$$(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+j}) = S(v_1, \ldots, v_j) \cdot T(v_{j+1}, \ldots, v_{k+j}),$$

bo przecież S i T to tak naprawdę skalary, więc sprowadza się to do mnożenia skalarów, tylko musimy zmienić dziedzinę żeby śmigało :v

Jeśli $e_1, \ldots, e_d$ jest bazą V, a $\phi_1, \ldots, \phi_d$ jest jej bazą dualną, to zbiór wszystkich iloczynów tensorowych k elementów bazy dualnej jest **bazą przestrzeni** $\mathscr{T}^k(V)$.

Dla odzworowania liniowego $f : V \to W$ definiujemy odwzorowanie liniowe $f^* : \mathscr{T}^k(W) \to \mathscr{T}^k(V)$ jako

$$(f^*T)(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

TENSORY ALTERNUJĄCE

Tensor alternujący ω to taki, że dla dowolnego $\sigma \in S_k$ mamy

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\mathrm{sgn}(\sigma))\omega(v_1, \ldots, v_k)$$

Przestrzeń liniową tensorów alternujących oznaczamy $\Omega^k(V)$ (lub$\Lambda^k(V)$, jeżeli jesteśmy Spivakiem)

Przekształcenie $\mathrm{Alt} : \mathscr{T}^k(V) \to \Omega^k(V)$ definiowane $\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(\mathrm{sgn}(\sigma))T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$ jest liniowe.

Iloczyn zewnętrzny tensorów alternujących jest definiowany dla $\omega \in \Omega^k(V)$ i $\eta \in \Omega^j(V)$ jako

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+1)!}{k!j!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Omega^{k+j}(V)$$

Zbiór wszystkich k-krotnych iloczynów zewnętrznych ϕ_i jest **bazą przestrzeni** $\Omega^k(V)$.

POLA

Przestrzeń styczna w punkcie $p \in \mathbb{R}^d$ jest definiowana jako

$$T_p\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d_p := \{(p, v) \ : \ p, v\mathbb{R}^d\}$$

i określamy na niej działanie $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$ oraz $a(p, v) = (p, av)$.

Wiązka styczna w punkcie p to zbiór $\{(p, v) \ : \ p \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}^d\} = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^d} T_p\mathbb{R}^d$

Pole wektorowe zmienia definicje z $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ zadanego $F(p) = (F_1(p), \ldots, F_d(p))$ na $F : \mathbb{R}^d \to T\mathbb{R}^d$ zadanego wzorem $F(p) = (p, \sum_{i=1}^{d} F^i(p)e_i)$ dla wektorów bazowych e_i. Pola wektorowe można dodawać i mnożyć przez funkcjonał.

To samo możemy zrobić dla 1-tensorów, czyli funkcjonałów - podmieniamy w definicji wiązki stycznej wektor v na funkcjonał i dostajemy $T^*\mathbb{R}^d \approx \mathbb{R}^d \times \Omega^1(\mathbb{R}^d)$.

1 Wprowadzenie do twierdzenia Stokes'a

FORMY

Mówimy, że funkcja $\overline{\phi} : \mathbb{R}^d \to T^*\mathbb{R}^d$ jest nazywana **cięciem** $T^*\mathbb{R}^d$, a z kolei $\overline{\omega} : \mathbb{R}^d \to \Omega^k(T\mathbb{R}^d)$ jest **cięciem** $T\mathbb{R}^d$. Alternatywnie, te funkcje nazywamy odpowiednio **1-formą i k-formą**.

Mimo, że wszystkie funkcjonały zapisują się jako suma $\overline{\phi_i}(E_j) = \delta_{ij}$ przemnożona przez $a_i(p)$, ale nie jest to baza, bo a_i to funkcjonał a nie skalar

Jeżeli $f : W \to \mathbb{R}^n$ jest układem współrzędnych, a ω jest k-formą na M to $f^*\omega$ jest k-formą na W.

NOWE OZNACZENIE: $dx^i = \overline{\phi_i}$.

Dowolną k-formę możemy zapisać jako

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

gdzie ω_{i_k} to funkcje na $\mathbb{R}^d$ a ω powinna mieć kreseczkę, ale używamy notacji ze Spivaka :3 Jeśli te funkcje są ciągłe, to cała forma nazywa się **formą ciągłą** i tak samo z klasami $C^1, C^2, \ldots, C^\infty$.

Przestrzeń k-form klasy C^m to $\Gamma^k_m(\mathbb{R}^d) = \{\omega : \mathbb{R}^d \to \Omega^k(T\mathbb{R}^d) \ : \ \omega(p) \in \Omega^k(T_p\mathbb{R}^d)\}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ z dodatkową strukturą mnożenia przez funkcje klasy C^m

Różniczka $dg \in \Gamma^1_0(\mathbb{R}^d)$ dla funkcji $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ to 1-forma $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx^1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_d}dx^d$. Dla funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ możemy też zdefiniować odwzorowanie liniowe $Df(p) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$.
Jeśli mamy k-rozmaitość $M \subseteq \mathbb{R}^n$ i układ współrzędnych $f : W \to \mathbb{R}^n$ wokół $x = f(a)$. Ponieważ ranga $f'(a)$ wynosi k, to liniowe przekształcenie $f_* : T_a\mathbb{R}^d \to T_{f(a)}\mathbb{R}^m$ zadane wzorem

$$f_*((a, v)) = (f(a), Df(a)(v)) < -\text{I CO ONO PONIEWAŻUJE???}$$

Wtedy $f_*(T_a\mathbb{R}^k)$ jest k-wymiarową podprzestrzenią $T_{f(a)}\mathbb{R}^n$. W dodatku jest to niezależne od wyboru układu współrzędnych, czyli jeśli g też jest układem tam gdzie f i $x = g(b)$, to

$$g_*(T_b\mathbb{R}^k) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(T_b\mathbb{R}^k) = f_*(T_a\mathbb{R}^k)$$

i to jest przestrzeń styczna M w x, co Spivak oznacza M_x.
Kolejna funkcja, czyli

$$f^* : \Gamma^k_0(\mathbb{R}^m) \to \Gamma^k_0(\mathbb{R}^d)$$
$$f^*(\omega)(a)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(a))(f_*(v_1), \ldots, f_*(v_k))$$

Twierdzenie: istnieje jedyna $(p + 1)$-forma $d\omega$ na rozmaitości M taka, że dla każdego układu współrzędnych $f : W \to \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega),$$

twierdzenie to jest bardzo podobne do zadania 3 z listy 22.
Dowodzik: Niech $f : W \to \mathbb{R}^n$ będzie układem współrzędnych takim, że $x = f(a)$ i niech $v_1, \ldots, v_{p+1} \in M_x$. Wtedy istnieją unikalne $w_1, .., w_{p+1} \in \mathbb{R}^n$ takie, że $f_*(w_i) = v_i$. Zdefiniujmy

$$d\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \ldots, w_{p+1}).$$

Trzeba sprawdzić, że taka definicja $d\omega$ nie zależy od układu współrzędnych f (patrz na uwagę wyżej, że $f_*(T_a\mathbb{R}^k)$ nie zależy od wyboru układu współrzędnych), więc $d\omega$ zostało dobrze dobrane. Co więcej, jasne jest, że $d\omega$ musiało zostać wybrane tak a nie inaczej, żeby śmigało.