Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 10

12 stycznia 2023 r.

M10.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste}, \\ \dfrac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste}. \end{cases}$$

M10.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k).$$

Wykazać, że

$$A_k^{(n)} = h(-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (t-j)\,\mathrm{d}t \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Niech będzie $B_k^{(n)} := A_k^{(n)}/(b-a)$ $(k = 0,\, 1, \ldots, n)$. Sprawdzić, że

a) wielkości $B_k^{(n)}$ są liczbami wymiernymi;

b) $B_k^{(n)} = B_{n-k}^{(n)}$ $(k = 0,\, 1, \ldots, n)$

M10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} = 1.$$

M10.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Sprawdzić numerycznie, czy wielkości $B_k^{(n)}$ są dodatnie. Następnie rozważyć sumy $\sigma_n := \sum_{k=0} |B_k^{(n)}|$ i obliczyć $\sigma_{10}, \sigma_{15}, \sigma_{20}$.

M10.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ dla całki

$$\int_{-4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} 4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M10.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą wzoru Simpsona, czyli kwadraturą *Newtona-Cotesa* dla $n = 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5 \qquad (h := (b-a)/2).$$

M10.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5 \qquad (h := (b-a)/3).$$

Notatka: W poniższych zadaniach mowa jest o *złożonych kwadraturach Newtona-Cotesa*.
1. Dla danych punktów $t_k = a + kh$ ($h = (b-a)/n$), ***złożonym wzorem trapezów*** nazywamy kwadraturę, która oblicza całkę $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

w którym każdą całkę $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ obliczamy za pomocą wzoru trapezów.
2. Dla danych punktów $t_k = a + kh$ ($h = (b-a)/n$, $n = 2m$), ***złożonym wzorem Simpsona*** nazywamy kwadraturę, która oblicza całkę $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

w którym każdą całkę $\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ obliczamy za pomocą wzoru Simpsona (w punktach $t_{2k}, t_{2k+1}, t_{2k+2}$).

M10.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

M10.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \ldots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów.

M10.10. $\boxed{\text{Włącz komputer, 3 punkty}}$ Nieznana funkcja f dostępna jest pod adresem

`http://roxy.pythonanywhere.com/f3?x=<value>`,

gdzie wartość `value` można zastąpić dowolną liczbą rzeczywistą (zapisaną w systemie dziesiętnym z użyciem co najwyżej 16 cyfr po przecinku).
Obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratur Newtona-Cotesa dla $n = 1, 2$. Następnie użyć złożonych wzorów Trapezów i Simpsona dla $n = 2, 4, 8, 16$ i 32. Ile cyfr dokładnych dają te metody, jeśli wiadomo, że czwarta pochodna funkcji f nie przekracza co do modułu wartości $1.61 \cdot 10^5$ w przedziale $[0, 1]$?
Uwaga: Efektywna implementacja złożonego wzoru Simpsona powinna wykorzystywać fakt z poprzedniego zadania.

3 stycznia 2022 r.
Rafał Nowak