# Zadania z ⋆⋆ LISTA 7

Weronika Jakimowicz

32 października 2022

## ZAD 1.

1. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ:

Aby funkcja wieloarguemntowa o wartościach wektorowych była różniczkowalna w punkcie $(x_0, y_0)$, granica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}$$

musi zmieżać do 0. To znaczy, że funkcję F możemy bardzo dobrze przybliżyć za pomocą przekształcenia liniowego T w okolicy punktu $(x_0, y_0)$. Ponieważ operujemy na przekształceniu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, to T będzie miało macierz 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i po wymnożeniu z dowolnym $(x, y)$ będzie dawało wynik

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Aby taka operacja dawała wynik zbliżający się do $(x_0, y_0)$ dla punktów w jego pobliżu, to a musi być małą zmianą w pierwszej współrzędem względem x, a b małą zmianą w pierwszej współrzędnej względem y, analogicznie dla c i d. Czyli T jest Jakobianem. W takim razie, żeby sprawdzić czy badana przez nas funkcja jest zbieżna, wystarczy sprawdzić, czy dla dowolnego punktu $(x_0, y_0)$ poniższa funkcja zmieża do 0 dla $(x, y) \to (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \\ &= \frac{\| \begin{pmatrix} x + f(y) \\ y + f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 + f(y_0) \\ y_0 + f(x_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x - x_0 + (y - y_0)f'(y_0) \\ (x - x_0)f'(x_0) + y - y_0 \end{pmatrix} \|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \\ &= \frac{\| \begin{pmatrix} f(y) - f(y_0) - (y - y_0)f'(y_0) \\ f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \end{pmatrix} \|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \\ &= \Big[\frac{(f(y) - f(y_0) - (y - y_0)f'(y_0))^2 + (f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0))^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Po pierwsze zauważmy, że podana funkcja ma wartości nieujemne, więc jeśli jest ciągła, to musi zmieżać do wartości nieujemnej. Po drugie, zauważy, że

$$\begin{aligned} G(x,y) &\le \Big[\frac{(f(y) - f(y_0) - (y - y_0)f'(y_0))^2}{(y - y_0)^2} + \frac{(f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0))^2}{(x - x_0)^2}\Big]^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \Big|\frac{f(y) - f(y_0) - (y - y_0)f'(y_0)}{(y - y_0)}\Big| + \Big|\frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{(x - x_0)}\Big| \end{aligned}$$

Widzimy, że funkcja o nieujemnych wartościach jest ograniczona od góry przez funkcję o wartościach nieujemnych dążącą do 0 (ponieważ f jest klasy C1), więc i funkcja $G(x, y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$.

2. RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ I NA

Jeśli funkcja jest $1-1$ oraz "na", to jest funkcją odwracalną. Czyli wystaczy pokazać, że F jest odwracalne na całej swojej dziedzinie. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, że F jest odwracalna w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^2$, jeżeli

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}F_1(a) & \frac{d}{dy}F_1(a) \\ \frac{d}{dx}F_2(a) & \frac{d}{dy}F_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f'(a_2) \\ f'(a_1) & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= 1 - f'(a_2)f'(a_1) \geq$$
$$\geq 1 - |f'(a_2)||f'(a_1)| \geq 1 - k^2 > 0.$$

Widzimy, że jakobian tej funkcji jest niezerowy dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^2$, w takim razie funkcja jest odwracalna na całej swojej dziedzinie. A więc jest bijekcją.

# ZAD 2.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$m < n$$

Jakobian tej funkcji to macierz o m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}f_1(x) & \frac{d}{dx_2}f_1(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_1(x) \\ \frac{d}{dx_1}f_2(x) & \frac{d}{dx_2}f_2(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_2(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{d}{dx_1}f_m(x) & \frac{d}{dx_2}f_m(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_m(x) \end{bmatrix}$$

Wyznacznik możemy wyliczyć tylko z macierzy kwadratowych, więc w tym wypadku mamy problem. Rozważmy więc funkcję

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \\ x_{m+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

gdzie $y = f(x)$. Funkcja F jest bijekcją wtedy i tylko wtedy gdy f jest $1-1$ i na.

$\Longrightarrow$

1. Jeżeli f nie jest "na", to mamy $a \in \mathbb{R}^m$ taki, że $(\forall\ x \in \mathbb{R}^n)\ f(x) \neq a$. Jeżeli teraz weźmiemy $b \in \mathbb{R}^n$ takie, że pierwsze m współrzędnych pokrywa się z a, a pozostałe to 1, to dowolny punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nie pokryje pierwszych m współrzędnych b. A więc F nie może być "na".

2. Jeżeli f nie jest $1-1$, to dla dwóch $a \neq b$ mamy $f(a) = f(b)$. Jeżeli istnieje taka para, która różni się na pierwszych m współrzędnych, a na pozostałych $n-m$ ich współrzędne się pokrywają, to nie trudno zauważyć, że F nie jest $1-1$. Jeżeli z kolei różnią się na którejś z $n-m$, to wystarczy rozważyć nową funkcję F, która "przesuwa"y nieco niżej.

$\Longleftarrow$

Z różnowartościowości f od razu wynika różnowartościowość F. Tak samo, jeżeli f jest "na", to bez problemu pokrywamy pierwsze m współrzędnych, natomiast fakt, że dolna część definicji F jest identycznością, daje nam pokrycie pozostałych $n-m$ współrzędnych i F jest na.

Jeżeli F jest bijekcją, to musi istnieć funkcja $F^{-1}$, to znaczy że F musi być odwracalne dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej mamy, że F jest bijekcją jeśli jej jakobian jest niezerowy w każdym punkcie. Przyjrzyjmy się więc macierzy Jacobiego F:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}f_1(x) & \frac{d}{dx_2}f_1(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_1(x) \\ \frac{d}{dx_1}f_2(x) & \frac{d}{dx_2}f_2(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_2(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{d}{dx_1}f_m(x) & \frac{d}{dx_2}f_m(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_m(x) \\ \frac{d}{dx_1}id(x) & \frac{d}{dx_2}id(x) & ... & \frac{d}{dx_n}id(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{d}{dx_1}id(x) & \frac{d}{dx_2}id(x) & ... & \frac{d}{dx_n}id(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}f_1(x) & \frac{d}{dx_2}f_1(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_1(x) \\ \frac{d}{dx_1}f_2(x) & \frac{d}{dx_2}f_2(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_2(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{d}{dx_1}f_m(x) & \frac{d}{dx_2}f_m(x) & ... & \frac{d}{dx_n}f_m(x) \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz ta ma wyznacznik zerowy, gdyż wszystkie jej kolumny są liniowo zależne przez obecność 1 na ostatnich współrzędnych.