MDM Lista 10

Weronika Jakimowicz

ZAD. 2

(a) Taki graf nie może istnieć, bo mamy 3 wierzchołki stopnia nieparzystego, a z hand shaking lemma wiemy, że wierzchołków stopnia nieparzystego musi być parzyście wiele.

(b) Mamy 5 wierzchołków, w tym jeden stopnia 4, czyli musi być połączony ze wszystkimi pozostałymi. Na to połączenie używamy wszystkich możliwych połączeń wierzchołków stopnia 1 (bo mamy graf prosty, więc nie możemy go połączyć wielokrotnie z wierzchołkiem stopnia 3) i zostaje nam wierzchołek który chce mieć stopień 3. Szuka więc jeszcze 2 sąsiadów, ale już każdy inny wierzchołek ma dość sąsiadów i dlatego nie możemy spełnić jego oczekiwań. Czyli taki graf nie może istnieć.

(c) Mamy 5 wierzchołków i graf dwudzielny. Możemy mieć więc albo jeden wierzchołek samotny i pozostałe 4 w jednej klasie albo klasę o 3 wierzchołkach i klasę o 2 wierzchołkach. Pierwszy pomysł nie jest możliwy, gdyż z klasy o jednym wierzchołku wychodzą dwie krawędzie, ale z większej klasy chce do niej wejść 8 krawędzi. Drugi graf obalamy w ten sam sposób: z mniejszej klasy wychodzi 4 krawędzie, ale z drugiej chce wejść tych krawędzi aż 6.

ZAD. 3.

Niech G będzie grafem takim, że $d(G) > 3$. Weźmy $u, v \in G$ takie, że $d(u, v) = d(G) > 3$. Chcemy pokazać, że odległość każdych dwóch wierzchołków w $\overline{G}$ jest mniejsza niż 3. Niech więc $x, y \in \overline{G}$ będą dwoma dowolnymi wierzchołkami. Oczywiście pula wierzchołków G i $\overline{G}$ jest taka sama.
Wierzchołki u, v na pewno nie mogą być połączone w G, czyli są połączone w $\overline{G}$. W zbiorze u, v, x, y mamy co najwyżej 4 różne wierzchołki. Jeżeli $xy \in \overline{G}$ to koniec. W przeciwnym wypadku istnieje $xy \in G$. Nie możemy mieć $xu, xv \in G$ bo wtedy $uxv \in G$ i jest $d(u, v) \leq 2$. Tak samo dla uy, vy. Co więcej, jeśli $ux \in G$, to mamy $vx \in \overline{G}$ i wtedy nie możemy mieć $vy \in G$, bo wtedy $uxyv \in G$ i jest $d(u, v) \leq 3$. Czyli jeśli $vx \in \overline{G}$, to mamy $vy \in \overline{G}$ i jest $xvy \in \overline{G}$ i wtedy w kontekście $\overline{G}$ jest $d(x, y) \leq 2$.

ZAD. 6.

Zauważmy, że w drzewie jeśli mamy ścieżkę bez powtarzających się wierzchołków, to jest to unikalne takie połączenie. W naszym drzewie ab i cd są rozłączne, ale już ac i ad mają wspólne wierzchołki. Tak samo bc i bd. Teraz zauważmy, że ac i bc mają również co najmniej jeden wspólny wierzchołek. Teraz rozważmy przypadki pod względem czy $c \in bd$. Symetryczne przypadki $d \in bd$ albo $a, b \in bd$ są analogiczne.
Jeżeli $c \in bd$, to wystarczy, że do bc dokleimy ścieżkę cd i mamy $bccd = bd \ni c$ ma wspólny co najmniej wierzchołek c ze ścieżką ac.
Jeżeli zaś $c \notin bd$, to wtedy również $c \notin ad$, bo $ad = abbd \not\ni c$ (lub $bd = baad$). Wtedy mamy $ac = addc$ i d jest wspólnym wierzchołkiem ac i bd.

ZAD. 13.

Graf Túrana $T_r(n)$ to zupełny graf r-dzielny o n wierzchołkach, który w każdej klasie ma $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ wierzchołków. Graf $T_r(n)$ jest K_{r+1}-wolny, bo wybierając $(r + 1)$ wierzchołków co najmniej dwa muszą leżeć w tej samej klasie i być niepołączone. Grafy Túrana pojawiają się w twierdzeniu Túrana, które mówi, że jeśli $|G| = n$ jest K_{r+1}-wolny i $e(G) \geq e(T_r(n))$, to $G \cong T_r(n)$. Z tego wynika, że $T_r(n)$ jest grafem K_{r+1}-wolnym o największej liczbie krawędzi.

W zadaniu rozważamy grafy K_3-wolne. Z uwagi wyżej wiemy, że $T_2(n)$ będzie grafem o n wierzchołkach, który jest K_3 wolny i ma największą możliwą liczbę krawędzi. Teraz zauważmy, że $T_2(n)$ to graf dwudzielny o jak najbardziej równych klasach wierzchołków. Na poprzedniej liście w zadaniu 8 udowodniliśmy, że graf dwudzielny o n wierzchołkach ma co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ krawędzi i jest to nadal aktualne w tym zadaniu dla grafu $T_2(n)$.

ZAD. 14.

G jest 2-spójny $\iff$ (a):

$\Longrightarrow$

Niech G będzie 2-spójnym grafem. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa wierzchołki $u, v \in G$ nie leżące na jednym cyklu. Ponieważ G jest grafem spójnym, to istnieje ścieżka $u...v \in G$. Ponieważ nie istnieje cykl zawierający jednocześnie u i v, to musimy mieć co najmniej jeden wierzchołek $x \in G$ przez który wszystkie takie ścieżki przechodzą. Inaczej moglibyśmy mieć $y \in G$ taki, że $u...y...v \in G$ i może się zdarzyć, że $u...x...v$ oraz $u...y...v$ mają wspólne tylko końce, czyli $u...x...v...y...u$ jest cyklem. Ale zauważmy, że jeśli jest co najmniej jeden taki wierzchołek x, to usunięcie go powoduje usunięcie wszystkich ścieżek $u...v$, a co za tym idzie - rozspójnienie grafu G. Czyli G nie może być 2-spójny.

$\Longleftarrow$

Jeżeli każde dwa wierzchołki uv leżą na cyklu, to mamy co najmniej dwie rozłączne ścieżki P_1, P_2 między u a v. Czyli jeśli usuniemy dowolny wierzchołek z P_1 lub P_2, to zostaje nam zawsze druga, nietknięta i rozłączna z rozciętą, ścieżka. Czyli graf jest 2-spójny.

G jest 2-spójny $\iff$ (b):

$\Longrightarrow$

Mamy graf 2-spójny oraz dwie krawędzie: $ab, cd \in G$. Przedzielmy ab na pół nowym wierzchołkiem u, czyli dodamy au, ub do grafu G. Taki graf jest nadal 2-spójny, bo stare wierzchołki nie zostały zmienione, więc jeśli usuniemy cokolwiek poza a, b, u graf zachowuje się tak naprawdę po staremu, natomiast jeśli usuniemy a lub b to dostaniemy graf jakbyśmy usunęli z poprzedniego a lub b, ale z dołączonym "liściem". Skoro graf bez liście był spójny, to z liściem nadal jest spójny. Na koniec, jeśli usuwamy u, to wpływamy tylko na wierzchołki połączone przez ab, ale przecież z punktu (a) wiemy, że a i b są na jednym cyklu i rozłączenie cyklu w jednym punkcie zostawia nam ścieżkę $a...b$. Czyli po prostu zamiast krótkiej drogi ab mamy $a...b$, ale nadal jest to spójny graf. To samo możemy zrobić z krawędzią cd: dzielimy ją nowym wierzchołkiem v. Po tych dwóch modyfikacjach możemy nazwać nowy graf G'.
Z poprzedniego podpunktu i fakty, że G' jest 2-spójny wiemy, że wierzchołki u i v leżą na jednym cyklu. Nazwijmy ten cykl C'. Zauważmy, że C' zawiera aub oraz cvd. Teraz jeśli przeniesiemy C' na realia grafu G i zaczniemy tworzyć cykl C, to wierzchołki różne od a, b, c, d, u, v są bez zmian - prosta kalka z C'. Natomiast dla wierzchołków a, b, c, d zamiast aub i cvd musimy do cyklu C wrzucić tylko krawędzie ab i cd, czyli wyjmujemy u i v i sklejamy z powrotem krawędzie które nimi rozrywaliśmy. W ten sposób powstał cykl C zawierający nasze dwie oryginalne krawędzie.

$\Longleftarrow$

Wiemy, że w grafie G każde dwie krawędzie leżą na jednym cyklu. Czyli jeżeli będziemy chcieli usunąć jeden wierzchołek, to tylko rozrywamy taki cykl i dalej mamy przejście dłuższą drogą.