Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 12

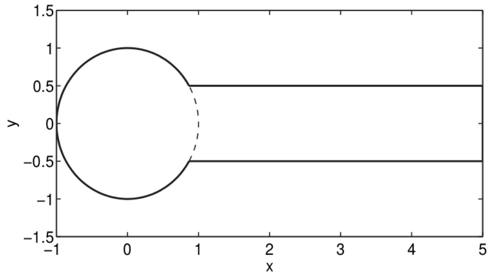
26 stycznia 2023 r.

M12.1. $\boxed{\text{3 punkty}}$ Obliczyć całkę podwójną

$$I = \int\int_D \sin^2 y \sin^2 x (1 + x^2 + y^2)^{-1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx 0.13202,$$

gdzie

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 3, |y| \leqslant 0.5\}.$$



Rysunek 1. Zbiór D.

Wskazówka. Zapisać całkę I w sposób iterowany, tj.

$$I = \int_{-1}^{3} \sin^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

gdzie $\varphi(x) = \int_{-c(x)}^{c(x)} \psi(x, y)\mathrm{d}y$. Obie całki można obliczać np. za pomocą metody Romebrga.

M12.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzór na jednopunktową kwadraturę liniową, która jest dokładna dla wszystkich funkcji stałych i liniowych.

M12.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\displaystyle\int_0^1 (1 + x^2) f(x)\, dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M12.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Udowodnić, że spośród wszystkich wielomianów stopnia n-tego postaci

$$w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0,$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x)\, dx$$

daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

M12.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór

a) $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|,$

definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

M12.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^T A)$ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

M12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty;$

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty;$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1.$

M12.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

M12.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n\times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

M12.10. $\boxed{\text{3 punkty. Włącz komputer.}}$ Zaprogramować efektywnie metodę eliminacji Gaussa w języku Julia. Należy zaprezentować funkcję `solve!(A,b)`, która dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i wektora $b \in \mathbb{R}^n$ znajduje rozwiązanie układu równań $Ax = b$. *Wskazówka.* Aby uzyskać efektywną implementację, można rozważyć układ równań $A^T x = b$. Efektywna implementacja to taka, która działa co najwyżej 30-razy dłużej niż wbudowana metoda `\(A,b)`. Ponadto, dla zaoszczędzenia na obliczeniach, można pominąć wybór elementów głównych.

17 stycznia 2023 r.
Rafał Nowak