MDM Lista 6

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Rozważmy najpierw prawą stronę równania. Spośród n osób wybieramy najpierw lidera delegacji. Możemy to zrobić na n sposobów. Chcemy mu dobrać pewną delegację osób. Ponieważ lider został już wybrany, to zostaje nam $(n-1)$ osób. Dla każdej z nich mamy dwie możliwości: albo osoba zostanie wybrana albo nie. Czyli dla każdej z $(n-1)$ możemy zadecydować jej los na 2 sposoby, co daje nam

$$n \cdot 2^{n-1}$$

sposobów na wybranie delegacji z co najmniej 1 osobą.

Teraz zajmujemy się lewą stroną równania. Suma przechodzi przez wszystkie możliwe rozmiary delegacji: możemy wybrać delegację która ma tylko jedną osobę (wtedy $k = 1$),a możemy też przecież wybrać delegację o $k = n-1$ lub $k = n$ członkach. W każdej z takich k-osobowych delegacji lidera możemy wybrać na k sposobów. Całość daje to samo rozwiązanie co przechodzenie przez każdą potencjalną osobę po kolei i decydowanie czy ona trafia do delegacji czy też nie.

ZAD. 2.

Jeśli jedynek jest o co najmniej 2 więcej niż zer, to całość nam nie zadziała. Na przykład w 1101 nie możemy rozdzielić dwóch pierwszych 1. Załóżmy więc, że

$$k < l + 2$$

Aby ułatwić sobie zadanie, sklejmy $k-1$ jedynek z zerami. Na razie niech zera będą zawsze przez jedynką, to znaczy tworzymy pary 01. Ustawiamy je jedna koło drugiej i zrobić to możemy na jeden sposób. Zostaje nam $k-(k-1) = 1$ jedynka, którą musimy wstawić na sam przód ciągu i $l-(k-1)$ zer. Nie mamy ograniczeń na położenie zer, więc możemy je wstawić na dowolne miejsce między dotychczasowymi $2k-1$ elementami lub na jednym z końców, co daje nam

$$\binom{2k}{l-k+1}$$

miejsc na wstawienie 0. Dostajemy więc $\binom{2k}{l-k+1}$ ciągów kiedy zera stoją przed jedynkami.
Teraz zauważmy, że jeśli odbijemy początkowe pary jedynek i zer, tzn. postawimy jedynki przed zerami, dostaniemy sytuację lustrzaną. Czyli kolejne $\binom{2k}{l-k+1}$ sposobów na ustawienie ciągu. Daje to ostateczną liczbę ciągów, gdzie jedynki nigdy nie są koło siebie, czyli

$$2 \cdot \binom{2k}{l-k+1}$$

ZAD. 3.

Zasada włączeń i wyłączeń, ale chwilowo mi się nie chce.

ZAD. 4.

Liczba wszystkich permutacji to $n!$. Teraz wystarczy od wszystkich permutacji odjąć te, które nam nie pasują. Możemy rozdzielić te przypadki na dwie grupy: pierwsze k liczb znajduje się na pierwszych k miejscach i kiedy jakaś grupa spośród pierwszych k elementów jest wymieszana z pozostałymi $(n-k)$ elementami. Będziemy musieli użyć nieporządków chyyyba, ale chwilowo nie chce mi się myśleć więcej.