Analiza funkcjonalna

by a weles

21.03.2137

Contents

1 Przestrzenie normalne

Norma na X to funkcja $x \mapsto \|x\| \in [0,\infty)$ taka, ze

↪ $\|x\| = 0 \iff x = 0$

↪ $(\forall\ \lambda \in \mathbb{C})(\forall\ x \in X)\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ – *jednorodnosc*

↪ $(\forall\, x, y \in X)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Przestrzen metryczna jest zupelna, jesli kazdy ciag Cauchy'ego jest zbiezny.

Przestrzen Banacha – unormowana przestrzen zupelna w metryce $d(x, y) = \|x - y\|$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbiezny, jesli szereg sum czesciowych jest zbiezny.

Szereg jest bezwzglednie zbiezny, jesli zbiezny jest $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

Przestrzen jest unormowana $\iff$ kazdy szereg bezwzglednie zbiezny jest zbiezny.

Normy $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_2$ sa rownowazne, jesli istnieja $c_1, c_2 > 0$ takie, ze

$$(\forall\, x)\ c_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2.$$

↪ Jesli zbieznosc ciagow w dwoch normach jest rownowazna, to sa one rownowazne.

↪ Przestrzenie $\mathbb{C}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ sa zupelne w dowolnej normie.

↪ Przestrzen unormowana skonczona jest zawsze zupelna.

Twierdzenie o najlepszej aproksymacji – dla skonczonej podprzestrzeni liniowej E przestrzeni unormowanej X zachodzi:

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, x_0 \in E)\ \|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Podzbior $A \subseteq X$ jest zbiorem gestym, jezeli $(\forall\, x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, a \in A)\ d(x, a) < \varepsilon$

Przestrzen jest osrodkowa, gdy posiada przeliczalny zbior gesty.

Kazda przestrzen unormowana mozna uzupelnic do przestrzeni Banacha.

Niech $Y \subseteq X$ bedzie domkniety, wtedy

$$(\forall\, 0 < \theta < 1)(\exists\, x \in X)\ \inf\{\|x - y\|\ :\ y \in Y\} \geq \theta$$

Niech X – unormowana, skonczona przestrzen liniowa, wtedy

$$(\exists\, (x_n) \subseteq X)(\forall\, n \neq m)\ \|x_n\| = 1\ \wedge\ \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

Baza nieskonczonej przestrzeni Banacha jest nieprzeliczalna.