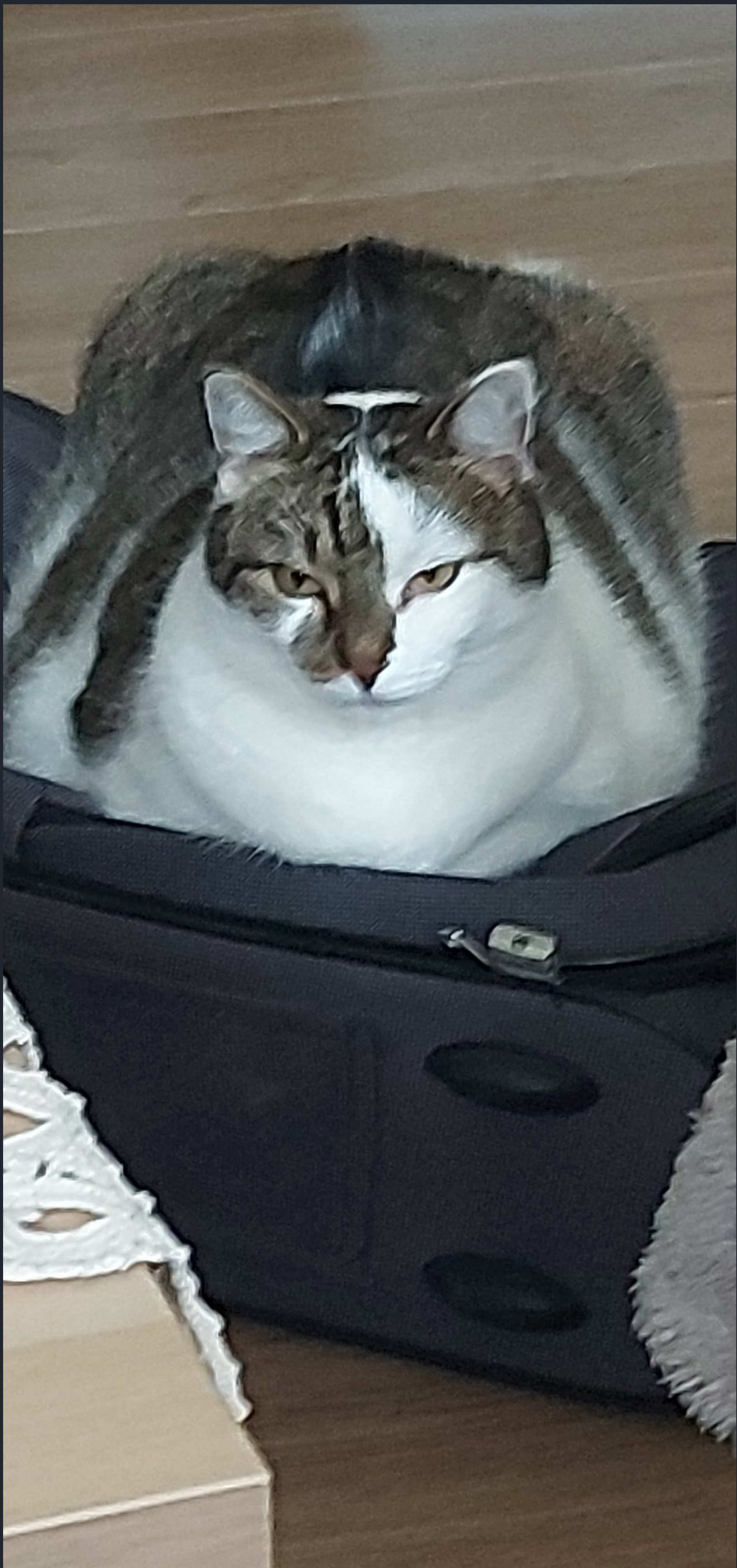
Kombinatoryka & teoria grafów

by a fish

21.03.2137



SYLABUS - teoria grafów:

1. Basic concepts: graphs, paths and cycles, complete andbipartite graphs
2. Matchings: Hall's Marriage theorem and its variations
3. Forbidden subgraphs: complete bipartite and r-partite subgraphs, chromatic numbers, Tur"an's thorem, asymptotic behaviour og edge density, Erd"os-Stone theorem
4. Hamiltonian cycles (Dirac's Theorem), Eulerian circuits
5. Connectivity: connected and k-connected graphs, Menger's theorem
6. Ramsey theory: edge colourings of graphs, Ramsey's theorem and its variations, asymptotic bounds on Ramsey numbers
7. Planar graphs and colourings: statements of Kuratowski's and Four Colour theorems, proof of Five Colour theorem, graphs on other surfaces and Euler chracteristics, chromatic polynomial, edge colourings and Vizing's theorem
8. Random graphs: further asymptotic bounds on Ramsey numbers, Zarankiewicz numbers and their bounds, graphs of large firth and high chromatic number, cmplete subgraphs in random graphs.
9. Algebraic methods: adjavenvy matrix and its eigenvalues, strongly regular graphs, Moore graphs and their existence.

Contents

1 Structural properties

1.1 Basic definitions

Graph – an ordered pair $G = (V, E)$:
$\hookrightarrow$ vertices $:= V$ [singular: *vertex*]
$\hookrightarrow$ edges $:= E$, $\{v, w\} := vw$

For an edge vw, $v \neq w$ we say that v, w are its endpoints and that it is incident to v (or w).

Dla krawedzi vw, $v \neq w$ mowimy, ze v, w sa jej koncami i ze jest krawedzia padajaca na v (lub w).

Graphs G and H are isomorfic ($G \simeq H$) if there exists $f : V(G) \xrightarrow{1-1} \text{on} V(H)$ such that $(\forall\, v, w \in V(G))\; vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$

Meaning that edges are like an operation on a group of vertices

G is a subgraph of H [$G \leq H$] if $V(G) \subseteq V(H)$ and $E(G) \subseteq E(H)$.

If G is H-free if it is has no subgraphs isomorfphic to H.

Grafy G i G sa izomorficzne, jezeli istnieje $f : V(G) \xrightarrow[1-1]{\text{na}} V(H)$ takie, ze $(\forall\, v, w \in V(G))\; vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$

G jest podgrafem H [$G \leq H$] jezeli $V(G) \subseteq V(H)$ oraz $E(G) \subseteq E(H)$.

G jest H-free (wolny od H?), jezeli nie ma podgrafow izomorficznych z H.

A cycle of length $n \geq 3$ [C_n] is a graph with vertices

$$V(C_n) = [n]$$

and edges:

$$E(C_n) = \{i(i+1) \;:\; i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

A path of length $n-1$ [P_{n-1}] is a graph with vertices

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

and edges

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) \;:\; 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Cykl dlugosci $n \geq 3$ [C_n] to graf z wierzcholkami

$$V(C_n) = [n]$$

i krawiedziami:

$$E(C_n) = \{i(i+1) \;:\; i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

Sciezka dlugosci $n-1$ [P_{n-1}] to graf z wierzcholkami

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

i krawedziami

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) \;:\; 1 \leq i \leq n-1\}.$$

An induced by $A \subseteq V(G)$ subgraph of G is $G[A] = (A, E_A)$

A connected component of G is a subgraph $G[W] \leq G$ where $W \subseteq V$ is an equivalence class under $\approx$ given by

$$v \approx w \iff \text{exists a path } v \ldots w \text{ in } G$$

A graph is connected if $v \approx w$ for every $v, w \in V$ (G has at most one connected component).

If v is a vertex in graph G, we say that its neighbourhood is $N_G(v) = \{w \in G \;:\; vw \in E(G)\}$. Furthermore, the degree of v is $|N_G(v)|$.

If $A \subseteq V$, then $N(A) := \bigcup_{v \in A} N(v)$.

We define:

- ↪ minimal degree $\delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$
- ↪ maximal degree $\Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$
- ↪ average degree $d(G) = \frac{\sum d(v)}{|G|}$.

If there exists an $r \geq 0$ such that

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(G) = r$$

then we say that the graph is r-regular or, more generally, it is regular for some r.

Handshaking Lemma: for any graph G we have $e(G) = \frac{1}{2}\sum d(v) = \frac{|G|}{2} d(G)$

1.2 Hall's Marriage Theorem

Graph G is bipartite with vertex classes U and W if $V = U \cup W$ so that every edge has form uw for some $u \in U$ and $w \in W$.

G is bipartite iff it has no cycles of odd length.

Graf G jest dwudzielny z klasami wierzcholkow U i W, jesli $V = U \cup W$ takimi, ze kazda krawedz jest formy uw dla pewnych $u \in U$ oraz $w \in W$.

G jest dwudzielny wtw kiedy nie ma cykli o nieparzystej dlugosci.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

$\Longrightarrow$

Let U, W be the vertex classes and $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ be a cycle in G. WLG suppose that $v_1 \in U$. Then $v_2 \in W$ etc. Specifically we have $v_i \in U$ if i is odd and $v_i \in W$ if i is even. Then, we have $v_n v_i$, so n must be even.

$\Longleftarrow$

Suppose G has no cycles of odd length. WLOG, assume that $V(G) \neq \emptyset$ and that G is connected, because G will be bipartite if all its connected components are bipartite. Fix $v \in G$ and for all other $w \in G$ define distance $\mathrm{dist}(v, w)$ as the smallest $n \geq 0$ such that there exists a path $v \dots w$ in G of length n.

Now, let $V_n := \{w \in G : \mathrm{dist}(v, w) = n\}$ and set

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$
$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

We want to show that there are no edges in G of the form $v'v''$ where $v', v'' \in U$ or $v', v'' \in W$. Suppose that $v'v'' \in E(G)$ with $v' \in V_m, v'' \in V_n$ and $m \leq n$. Then, we have a path

$$v \dots v'v'' \in G$$

of length $m + 1$, implying that

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Supose that $n = m$. Let $v'_0 v'_1 \dots v'_m$ and $v''_0 v''_1 \dots v''_m$ be paths in G with $v = v'_0 = v''_0$, $v' = v'_m$ and $v'' = v''_m$. Note that $v'_i, v''_i \in V_i$ for $0 \leq i \leq m$. Let $k \geq 0$ be largest such that

$$v'_k = v''_k$$

and note that $k \leq m - 1$ as $v' \neq v''$. Then

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

is a cycle of odd length, which is a contradiction.

Therefore, we can only have $n = m + 1$ and then exactly one of n, m is even meaning that exactly one of v' and v'' is in U as required for G to be bipartite.

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Niech U, W beda klasami wierzcholkow oraz niech $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ niech bedzie cyklem w G. BSO zalozmy, ze $v_1 \in U$. W takim razie, $v_2 \in W$ etc. W szczegolnosci, mamy $v_i \in U$ jezeli i jest nieparzyste oraz $v_i \in W$ jezeli i jest parzyste. W takim razie, skoro $v_n v_1$, to n musi byc parzyste.

$\Longleftarrow$

Zalozmy, ze G nie ma cykli o nieparzystej dlugosci. BSO zalozmy, ze $V(G) \neq \emptyset$ i ze G jest spojny, poniewaz G bedzie dwudzielny, wtw gdy wszystkie jego skladowe spojne (????) beda dwudzielne. Ustalmy $v \in G$ i dla kazdego innego $w \in G$ zdefiniujmy dystans $\mathrm{dist}(v, w)$ jako najmniejsze $n \geq 0$ takie, ze istnieje sciezka $v \dots w$ w G o dlugosci n.

Niech $V_n := \{w \in G : \mathrm{dist}(v, w) = n\}$ i zbiory

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$
$$V = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

Chcemy pokazac, ze nie istnieja w G krawedzie postaci $v'v''$, gdzie $v', v'' \in U$ lub $v', v'' \in W$. Zalozmy, ze $v'v'' \in E(G)$ z $v' \in V_m, v'' \in V_n$ oraz $m \leq n$. Wtedy istnieje sciezka

$$v \dots v'v'' \in G$$

dlugosci $m+1$, co implikuje, ze

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Zalozmy, ze $n = m$. Niech $v_0'v_1' \dots v_m'$ oraz $v_0''v_1'' \dots v_m''$ sa sciezkami w G takimi, ze $v = v_0'v_0''$, $v' = v_m'$ oraz $v'' = v_m''$. Zauwazmy, ze $v_i', v_i'' \in V_i$ dla $0 \leq i \leq m$. Niech $k \geq 0$ bedzie najwiksze takie, ze

$$v_k' = v_k''$$

i zauwazmy, ze $k \leq m-1$ poniewaz $v' \neq v''$. Wtedy

$$v_k'v_{k+1}' \dots v_m'v_m''v_{m-1}'' \dots v_k''$$

jest cyklem o nieparzystej dlugosci, co daje nam sprzecznosc.

W takim raize, mozemy miec tylko $n = m+1$ i wtedy dokladnie jedno z n, m moze byc parzystem, co daje nam dokladnie jedno z v' i v'' w U tak, jak jest wymagane zeby to byl graf dwudzielny.

If G is a bipartite graph with $V = W \cup M$ and $W' \subseteq W$, a partial matching in G from W' to M is

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$

for some $v_w \in M$ such that $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. A partial matching from W to M is called a matching.

Sufficient condition:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (☕)$$

for every $A \subseteq W$

A bipartite graf G contains a matching from W to M iff (G, W) satisfies Hall's condition (☕).

Jesli G jest grafem dwudzielnym z $V = W \cup M$ oraz $W' \subseteq W$, wtedy czesciowe skojarzenie w G z W' do M to

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$

dla pewnych $v_w \in M$ takich, ze $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$. Czesciowe kojarzenie z W do M jest nazywane kojarzeniem.

Wystarczajacy warunek:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (☕)$$

dla kazdego $A \subseteq W$

Dwudzielny graf G zawiera kojarzeniem iff gdy (G, W) zadowala warunek Halla (☕).

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

$\Longrightarrow$

Trivial.

$\Longleftarrow$

Using induction on $|W|$. For $|W| = 0, 1$ it is trivial.

We gonna break it into parts: $|N(A)| > |A|$ and $|N(A)| = |A|$

Suppose that $|N(A)| > |A|$ for every non-empty subset $A \subsetneq W$. Take any $w \in W$ and $v \in N(w)$ and construct a new graph

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

For any non-empty $B \subseteq W - \{w\}$ we have

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

and therefore

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|$$

and so $(G_0, W - \{w\})$ satisfies Hall's condition. From induction we have a matching P in G_0 from $W - \{w\}$ to $M - \{v\}$ and so $P \cup \{wv\}$ is a matching from W to M.

Now, suppose that $|N(A) = |A|$ for some non-empty subset $A \subsetneq W$. Let

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

and

$$g_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

We will show that both those graphs satisfy Hall's condition.
Let us take any $B \subseteq A$ in G_1. We have

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

and so graph G_1 satisfies Hall's condition.
Now, let us take any $B \subseteq W - A$ in G_2. We know that $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$ so

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

Therefore, graph G_2 also satisfies Hall's condition.
Using inductive hypothesis, we have that there exists a matching P_1 in G_1 and a matching P_2 in G_2. The first one is from A to $N_G(A)$ while the second is from $W - A$ to $M - N_G(A)$, so they are disjoint. Therefore, $P_1 \cup P_2$ is a matching in G from W to M.

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Trywialne.

$\Longleftarrow$

Uzyjemy indukcji na $|W|$. Dla $|W| = 0, 1$ jest trywialne.

Podzielimy dowod na dwie czesci: $|N(A)| > |A|$ oraz $|N(A)| = |A|$.

Zalozmy, że $|N(A)| > |A|$ dla kazdego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Wezmy dowolne $w \in W$ oraz $v \in N(w)$ i skonstruujmy nowy graf

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

Dla kazdego niepustego $B \subseteq W - \{w\}$ mamy

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

i w takim razie

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|,$$

czyli $(G_0, W - \{w\})$ spelnia warunek Halla. Z zalozenia indukcyjnego istnieje kojarzenie P w G_0 z $W - \{w\}$ do $M - \{v\}$, w takim razie $P \cup \{wv\}$ jest kojarzeniem z W do M.

Zalozmy teraz, ze $|N(A) = A|$ dla pewnego niepustego podzbioru $A \subsetneq W$. Niech

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

oraz

$$g_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

Pokazemy, ze oba te grafy zaspokajaja warunek Halla.
Wezmy dowolny $B \subseteq A$ w G_1. Mamy

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

a wiec graf G_1 zaspokaja warunek Halla.
Teraz, wezmy dowolny $B \subseteq W - A$ w G_2. Wiemy, ze $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$, a wiec

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

W takim razie G_2 spelnia warunek Halla.

Z zalozenia indukcyjnego wiemy, ze istnieje kojarzenie P_1 w G_1 oraz P_2 w G_2. Pierwsze jest z A do $N_G(A)$, natomiast drugie jest z $W - A$ do $M - N_G(A)$, czyli sa rozlaczne. W takim razie $P_1 \cup P_2$ jest kojarzeniem w G z W do M.

Let G be a finite group and let $H \leq G$ be a subgroup with $\frac{|G|}{|H|} = k$, then
$g_1 H \cup \ldots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \ldots \cup H g_k$
for some $g_1, \ldots, g_k \in G$.

Niech G bedzie skonczona grupa i niech $H \leq G$ bedzie podgrupa z $\frac{|G|}{|H|} = k$, wtedy
$g_1 H \cup \ldots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \ldots \cup H g_k$
fdla pewnych $g_1, \ldots, g_k \in G$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

Oznaczmy

$$L = \{a_1 H, \ldots, a_k H\}$$

$$R = \{H b_1, \ldots, H b_k\}$$

jako zbiory odpowiednio lewych i prawych wrastw H w G. Niech K bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow L i R. Wprowadzmy na K relacje rownowaznosci

$$a_i H \sim H b_j \iff a_i H \cap H b_j \neq \emptyset \text{ w } G.$$

Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq L$ zachodzi

$$|\bigcup_{U \in A} U| = |A| \cdot |H|$$

jako podzbiorow G. *Chodzi o to, ze kazda warstwa ma moc $|H|$, a mamy ich $|A|$ sztuk w zbiorze $|A|$. Wiec jak bedziemy je dodawac, to one sa rozlaczne, wiec smiga.*
Dla kazdego $V \in R$ mamy $|V| = |H|$ *bo kazda warstwa ma te sama moc co H*, a wiec $\bigcup_{U \in A} U$ tnie sie niepusto z co najmniej $|A|$ elementami z R. Z tego wynika, ze

$$|N_K(A)| \geq |A|,$$

wiec istnieje kojarzenie P w K z L do R. Wezmy wiec dowolny g_i w $a_i H \cap H b_j \neq \emptyset$. Wtedy jest czescia krawedzi $(a_i H)(H b_j)$ w P dla $1 \leq i \leq k$. Mamy wiec $a_i H = g_i H$ oraz $H b_j = H g_i$.

Hall's Missing Soulmate Theorem
Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M, and let $d \geq 1$.
Then G contains a partial matching from W' to M for some $W' \subseteq W$ with $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ for every $A \subseteq W$.

Twierdzenie Halla o brakujacym mezu(????)
Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i niech $d \geq 1$.
Wtedy G zaiwera kojarzenie z W' do M dla pewnego $W' \subseteq W$ z $|W'| \geq |W| - d$ iff $|N(A)| \geq |A| - d$ dla kazdego $A \subseteq W$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Trywialne :3

$\Longleftarrow$

Zapoznajmy panie z d wyobrazonymi idealnymi dla kazdej pani kawalerami. Wtedy twierdzenie Halla jest spelnione, wiec mozemy ozenic kazda kobiete do odpowiedniego, prawdziwego czy wyobrazonego, meza. W prawdziwym zyciu, co najwyzej d kobiet jest niezameznych.

Hall's Polygamous Marriage Theorem
Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M, and let $d \geq 1$. Then G contains a subgraph H with $W \subseteq V(H)$ in which each $w \in W$ has degree d and each $v \in M \cap V(H)$ has degree 1 iff $|N(A)| \geq d|A|$ for every $A \subseteq W$

Twierdzenie Halla o polimalzenstwach
Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i niech $d \geq 1$. Wtedy G zaiwera podgraf H z $W \subseteq V(H)$ w ktorym kazdy $w \in W$ ma stopien d i kazdy $v \in M \cap V(H)$ ma stopien 1 iff $|N(A)| \geq d|A|$ dla kazdego $A \subseteq W$.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Trywialne :3

$\Longleftarrow$

Sklonujmy kazda kobiete $d - 1$ razy. Wtedy warunek Halla jest zaspokojony, wiec mozemy kazda z nich ozenic (klony i oryginaly) do odpowiednich mezow. Teraz scisnijmy klony z oryginalami do jednej osoby. Koniec!

1.3 Menger's Theorem

Cut vertex v is a vertex in a connected graph G such that $G - \{v\}$ is not connected.

Tnacy wierzcholek v jest wierzcholkiem w spojnym grafie G takim, ze $G - \{v\}$ jest niespojny.

Graph G is a **k-connected graph** if for any $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ is connected.

Graf G jest **k-spojnym grafem**, jezeli dla kazdego $A \subseteq V(G)$, $|A| < k$, $G - A$ jest spojny.

Complete graph has all vertices connected by an edge, that is for all $v, w \in G$ $v \neq w$ we have $vw \in G$.

Graf pelny ma wszystkie wierzcholki polaczone krawedzia, to znaczy dla kazdego $v, w \in G$, $v \neq w$ mamy $vw \in G$.

(A, B)-path is a path in G for some $A, B \subseteq V$ of the form $a \dots b$ for some $a \in A$ and $b \in B$. **(A, B)-cut** in G is $C \subseteq V$ such that $G - C$ contains no $(A - C, B - C)$-paths.

If we take vertices $a, v \in V$ we call an $(\{a\}, \{b\})$-path an (a, b)-path. Given a collection of (a, b)-paths

$$P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$$

we say such a collection is **independent** if $P^{(i)} - \{a, b\}$ and $P^{(j)} - \{a, b\}$ have no common vertices for $i \neq j$.

(A, B)-sciezka to sciezka w G dla pewnych $A, B \subseteq V$ postaci $a \dots b$ dla jakis $a \in A$ i $b \in B$. **(A, B)-ciecie** w G to $C \subseteq V$ takie, ze $G - C$ nie zawiera zadnych $(A - C, B - C)$-sciezek.

Jesli wezmiemy wierzcholki $a, v \in V$, to $(\{a\}, \{b\})$-sciezke nazywamy (a, b)-sciezka. Jesli dana jest kolekcja (a, b)-sciezek

$$P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$$

mowimy, ze ta kolekcja jest **niezalezna**, jezeli $P^{(i)} - \{a, b\}$ i $P^{(j)} - \{a, b\}$ nie maja wspolnych wierzcholkow dla $i \neq j$.

Given $A, B, C \subseteq V(G)$ and if $A \subseteq C$ or $B \subseteq C$, then C is an (A, B)-cut and if C is an (A, B)-cut then $A \cap B \subseteq C$.

Dla danych $A, B, C \subseteq V(G)$, jezeli $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, to C jest (A, B)-cieciem i jesli C jest (A, B)-cieciem, to $A \cap B \subseteq C$.

Let G be a graph, $A, B \subseteq V(G)$ and $k \geq 0$. Suppose that for every (A, B)-cut C in G we have $|C| \geq k$.
Then G contains a collection of k vertex-disjoint (A, B)-paths.

Niech G bedzie grafem, $A, B \subseteq V(G)$ i $k \geq 0$. Zalozmy, ze dla kazdego (A, B)-ciecia C w G jest $|C| \geq k$.
Wtedy G zawiera zbior k rozlacznych wierzcholkami (A, B)-sciezek.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

Uzyjemy indukcji na $e(G)$ [definicja dla debila].

Jako przypadek bazowy mamy $e(G) = 0$, wtedy $A \cap B$ jest (A, B)-cieciem i w takim razie $k \leq |A \cap B|$, ale kazdy wierzcholek $A \cap B$ jest (A, B)-sciezka dlugosci 0 i wszystkie z nich sa rozlaczne, tak jak wymagamy.

Zalozmy, ze $e(G) \geq 1$, wybiezmy krawedz $e \in E(G)$ i niech $H = G - \{e\}$.

Jesli dla kazde (A, B)-ciecie w H ma stopien co najmniej k, to przez hipoteze indukcyjna sa one k wierzcholkowo rozlacznymi (A, B)-sciezkami w H i w takim razie w G, wiec koniec.

Zalozmy teraz, bez starty ogolnosci, ze w H istnieje co najmniej jedno (A, B)-ciecie C takie, ze $|C| < k$. W takim razie C nie jest (A, B)-cieciem w G, wiec $G - C$ zawiera co najmniej jedna (A, B)-sciezke postaci

$$a \ldots vw \ldots b$$

dla pewnych $a \in A$, $b \in B$, gdzie $v, w \in G$ sa koncami e. Co wiecej, kazda (A, B)-sciezka w $G - C$ zawiera wierzcholek v, co implikuje ze

$$C' = C \cup \{v\}$$

jest (A, B)-cieciem w G. Co wiecej, $|C'| = |C| + 1 \geq k$. Poniewaz $a \ldots vw \ldots b$ bylo jedyna sciezka ktora blokowala C przed zostaniem (A, B)-cieciem w G, ale juz $|C'|$ nim jest, to $|C| = k - 1$ i mozemy przyjac, ze

$$C = \{c_1, \ldots, c_{k-1}.$$

Teraz, poniewaz $v \in C'$, to kazde (A, C')-ciecie D w H jest takze (A, C')-cieciem w G. Poniewaz kazda (A, B)-sciezka w G zawiera wierzcholek C', to D jest takze (A, B)-cieciem w G i dlatego $|D| \geq k$. Korzystajac wiec z hipotezy indukcyjnej, wiemy, ze istnieja rozlaczne wierzcholkami (A, C')-sciezki

$$P^{(1)}, \ldots, P^{(k-1)}, P^{(k)}$$

w H konczace sie odpowiednio w $c_1, \ldots, c_{k-1}, v$. Niech $C'' = C \cup \{w\}$. Wtedy analogicznie, mamy takie (C'', B)-sciezki

$$Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k-1)}, Q^{(k)}$$

w H zaczynajace sie od odpowiednio wierzcholkow $c_1, \ldots, c_{k-1}, v$. Co wiecej, poniewaz C' jest (A, B)-cieciem w G, to $P^{(i)}$ oraz $Q^{(j)}$ nie moga miec wspolnego wierzcholka u poza przypadkiem $i = j \leq k - 1$ i $u = c_i$. To sugeruje, ze

$$P^{(1)}Q^{(1)}, \ldots, P^{(k-1)}Q^{(k-1)}, P^{(k)}eQ^{(k)}$$

sa k rozlacznymi wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezkami w G. Koniec.

....

Hall's Marriage Theorem may be deduced from this lemma:
Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M and suppose that (G, W) satisfies Hall's condition. Let C be a (W, M)-cut in G. Then

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

Twierdzenie Halla o malzenstwach moze byc wyprowadzone z tego lematu:
Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzcholkow W i M i zalozmy, ze (G, W) zadowala warunek Halla. Niech C bedzie (W, M)-cieciem w G. Wtedy

$$N(W - C) \subseteq M \cap C$$

and therefore

$$|C| = |W \cap c| + |M \cap C| \geq |W \cap C| + |N(W - C)| \geq |W \cap C| + |W - C| = |W|$$

thus $|W|$ contains vertex-disjoint (W, M)-paths, each of length 1 implying that such a collection of paths is a matching.

i z tego

$$|C| = |W \cap c| + |M \cap C| \geq |W \cap C| + |N(W - C)| \geq |W \cap C| + |W - C| = |W|$$

a wiec $|W|$ zawiera rozlaczne wzgledem wierzcholkow (W, M)-sciezki, kazda o dlugosci 1, implikujac ze taki zbior sciezek jest kojarzeniem.

Menger's Theorem

Let G be an incomplete graph and let $k \geq 0$. Then G is k-connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k independent (a, b)-paths in G.

Twierdzenie Mengera

Niech G bedze niepelnym grafem i niech $k \geq 0$. Wtedy G jest k-spojne iff dla kazdego $a, b \in G$ z $a \neq b$ istnieje zbior k niezaleznych (a, b)-sciezek w G.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$

Niech $C \subseteq V(G)$ i zalozmy, ze $G - C$ jest niespojny. Wybierzmy dowolne $a, b \in G - C$ nalezace do roznych skladowych spojnosci $G - C$. Na mocy tego zalozenia, G zawiera k niezaleznych (a, b)-sciezek. Kazda z tych sciezek musi miec wierzcholek w C, ale zadne dwie sciezki nie maja wspolnego wierzcholka poza a i b. Z tego wynika, ze $|C| \geq k$, tak jak wymagamy.

$\Longleftarrow$

Bedziemy robic indukcje po k.

Przypadek bazowy dla $k = 0$ jest trywialny.
Niech wiec $k \geq 1$ i niech $a, b \in G$ beda rozne.
Zalozmy najpierw, ze $a \not\sim b$. Niech $A = N(a)$ oraz $B = N(b)$. Grafy G-A i G-B sa niespojne, bo nie maja ani jednej sciezki a....b. Daje to $|A| \geq k$ oraz $|B| \geq k$. Jezeli C jest (A, B)-cieciem w G, to $G - C$ rowniez nie ma sciezem miedzy elementami $A - C$ oraz $B - C$. Dlatego, albo $A \subseteq C$ albo $B \subseteq C$, albo $G - C$ jest niespojne. W kazdym razie, mamy $|C| \geq k$ wiec z lematu wyzej, G ma k rozlacznych wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezek:

$$a_1 \ldots b_1, \ \ldots, \ a_k \ldots b_k.$$

Wtedy,

$$aa_1 \ldots b_1b, \ \ldots, \ aa_k \ldots b_kb$$

sa k niezaleznymi sciezkami (a, b) tak jak wymagamy.
Zalozmy teraz, ze $a \sim b$ i niech $H = G - \{ab\}$. Pokazemy najpiew, ze H jest $(k-1)$-spojne.
Zalozmy, ze tak nie jest. Niech $C \subseteq V(H)$ bedzie takim podzbiorem, ze $|C| < k - 1$ i niech $H - C$ bedzie niespojne. Poniewaz G jest k-spojne, to $G - C$ jest spojne i nie ma wierzcholkow tnacych (cut vertices), co implikuje ze $H - C$ dokladnie dwie skladowe spojne, kazda zawierajaca jeden z wierzcholkow a lub b. Ale wtedy $|G| = |H| = 2 + |C| \leq k$, wiec G jest grafem k-spojnym z $|G| \leq k$, co daje sprzecznosc z tym, ze G nie jest pelne.
W takim raize, H musi byc $(k-1)$-spojne. Z hipotezy indukcyjnej zawiera wiec $k-1$ niezaleznych (a, b)-sciezem. Razem z krawedzie ab te sciezki tworza zbior k niezaleznych (a, b) sciezek w G, co konczy dowod.

1.4 Menger's Theorem (so edgy)

Graph G is k-edge-connected for $k \geq 0$ if for every $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ is connected.

Line graph of graph G $[L_G]$ is a graph with $V(L_G) = E(G)$ and for $e, f \in L_G$ with $e \neq f$ we have

$$e \sim f \text{ in } L_G \iff e, f \text{ common endpoint in } G$$

Menger's Theorem edge version
Let G be a graph and let $k \geq 0$.
Then G is k-edge-connected iff for every $a, b \in G$ with $a \neq b$, there exists a collection of k edge-disjoint (a, b)-paths in G.

Graf G jest k-spojny krawedziowo dla $k \geq 0$ jesli dla kazdego $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $G - F$ jest spojny.

Graf krawedziowy grafu G $[L_G]$ jest grafem z $V(L_G) = E(G)$ i dla $e, f \in L_G$ z $e \neq f$ mamy

$$e \sim f \text{ w } L_G \iff e, f \text{ wspolny koniec w } G$$

Twierdzenie Megera wersja krawedzie
Niech G bedzie grafem i niech $k \geq 0$.
Wtedy G jest k-spojny krawedziowo z $a \neq b$, wtedy istnieje zbior k rozlacznych krawedziami (a, b)-krawedzi w G.

[🇬🇧] [🇵🇱]

[🇬🇧]

SOMEBONY ONCE TOLD ME THE WORLD IS GONNA ROLL ME

[🇵🇱]

$\Longrightarrow$
Niech L_G bedzie grafem krawedziowym grafu G. Wezmy $a, b \in G$ takie, ze $a \neq b$. Niech

$$A = \{av \in E(G) \ : \ v \in N_G(a)\}$$

i niech

$$B = \{bv \in E(G) \ : \ v \in N_G(b)\}.$$

Oznaczmy przez C (A, B)-ciecie w L_G, wiec

$$C \subseteq E(G).$$

Wtedy nie istnieje (a, b)-sciezka w $G - C$, co implikuje, ze $|C| \geq k$. W takim razie, na mocy lematu z poprzedniego podrozdzialu, istnieje k rozlaczna wzgledem wierzcholkow (A, B)-sciezka w L_G i z tego powodu jest k rozlaczna wzgledem krawedzi (a, b)-sciezka w G.

Mozemy wyprowadzic te implikacje z twierdzenia "max-flow min-cut" przez zamienianie kazdej krawedzi vw przez pare skierowanych krawedzi $v \to w$ i $w \to v$. Ale my nie znamy tego twierdzenia, wiec nie chce mi sie pisac dalej :v

$\Longleftarrow$
Niech $f \subseteq E(G)$ i zalozmy, ze $G - F$ jest niespojny. Wybierzmy $a, b \in G - F$ nalezacy do roznych skladowych spojnosci $G - F$. Zgodnie z zalozeniem, G zawiera k rozlaczne wzgledem krawedzi (a, b)-sciezki i kazda z tych sciezek musi miec krawedzie w F. Z tego tez powodu $|F| \geq k$ tak jak chcielismy.