Co mam: 1, 4, 6, 8 (4)
MAX: 10

ZAD. 1

Chcemy udowodnić, że

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_k(x)T_l(x)dx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l = 0 \\ \frac{\pi}{2} & k = l \neq 0 \end{cases}$$

Po pierwsze zauważmy, że

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 2\pi & k = l = 0 \\ \pi & \end{cases}$$

Korzystając z zależności

$$\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)) = \frac{1}{2}(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\cos(x)\cos(y)) = \cos(x)\cos(y)$$

Jeśli $k = l = 0$, to mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(0\cdot\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}1d\theta = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

natomiast jeśli $k = l \neq 0$, to jest

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(k\theta)d\theta = \frac{2k(\pi+\pi)+\sin(2k\pi)-\sin(-2k\pi)}{4k} = \frac{4k\pi}{4k} = \pi$$

Jeśli $k \neq l$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((k-l)\theta)+\cos((k+l)\theta))d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k-l)\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k+l)\theta)d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin((k-l)\theta)}{k-l} + \frac{1}{2}\frac{\sin((k+l)\theta)}{k-l} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((k-l)\pi)-\sin((l-k)\pi)}{k-l} + \frac{\sin((k+l)\pi)-\sin((-k-l)\pi)}{k+l}\right) =$$
$$= \frac{\sin(\pi\frac{k-l+l-k}{2})\cos(\pi\frac{k-l+l-k}{2})}{k-l} + \frac{\sin(\pi\frac{k+l-k-l}{2})\cos(\pi\frac{k+l-k-l}{2})}{k+l} =$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Wracając do Czebyszewa, wiemy, że $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. W takim razie

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_k(x)T_l(x)dx = \begin{bmatrix} x = \cos(\theta) \\ dx = -\sin(\theta)d\theta = -\sqrt{1-\cos^2(\theta)}d\theta \end{bmatrix} = -\int_{\pi}^{0}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta =$$
$$= \int_{0}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta$$

A ponieważ $\cos(x)$ jest funkcją parzystą, to

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta = 2\int_{0}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta$$

ZAD. 2.

(a) !!! zmieniam oznaczenie funkcji wagowej na w(x) bo tak.
(to jest z Kincaida)
Tak jak na slajdzie zauważono, jeżeli $P_n(x) = a_n x^n + \dots$, to $P_n = a_n p_n(x)$ gdzie p_n to standardowy wielomian ortogonalny. Standardowe wielomiany ortogonalne są definiowane w następujący sposób:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = (x - a_1)p_0(x)$$

$$p_k(x) = (x - a_k)p_{k-1}(x) - b_k p_{k-2}(x),$$

gdzie

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle}$$

$$b_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle}$$

Udowodnimy przez indukcję względem n, że $\langle p_n, p_i\rangle = 0$ dla $i < n$.
Jeżeli $n = 1$, to mamy

$$0 = \langle p_1, p_0\rangle = \langle (x - a_1)p_0, p_0\rangle = \langle xp_0, p_0\rangle - a_1\langle p_0, p_0\rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} = \frac{\int w(x)xdx}{\int w(x)dx}$$

co jest wyznaczone jednoznacznie.
Jeżeli $n \geq 2$ i $\langle p_{n-1}, p_i\rangle = 0$ dla $i < n - 1$, to chcemy

$$\begin{aligned} 0 = \langle p_n, p_{n-1}\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-1}\rangle = \\ &= \langle (x - a_n)p_{n-1}, p_{n-1}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-1}\rangle = \\ &= \langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle - b_n \cdot 0 = \\ &= \langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle},$$

co jest zdefiniowane jednoznacznie.

$$\begin{aligned} 0 = \langle p_n, p_{n-2}\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-2}\rangle = \\ &= \langle (x - a_n)p_{n-1}, p_{n-2}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle = \\ &= \langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle}$$

co również jest jednoznaczne z poprzednich definicji.

Dalej, dla dowolnego $i < n - 1$ mamy

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_i\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_i\rangle = \\ &= \langle xp_{n-1}, p_i\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_i\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_i\rangle = \\ &= \langle p_{n-1}, xp_i\rangle = \langle p_{n-1}, p_{i+1} + a_{i+1}p_i + b_{i+1}p_{i-1}\rangle = 0 \end{aligned}$$

(b)
To, że lnz to zadanie 6, więc sobie pominę. Jest ich $n + 1$ sztuk, a przestrzeń Π_n jest wymiaru $n + 1$, bo jej bazą standardową jest

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

czyli mamy maksymalny układ liniowo niezależny, ergo baza.
(c)
W poprzednim podpunkcie pokazaliśmy, że wielomiany ortogonalne $P_0, \dots, P_{k-1}$ tworzą bazę Π_{k-1}. W takim razie

$$Q = \sum_{i=0}^{k-1} c_i P_i$$

i mamy

$$\langle Q, P_k\rangle = \langle \sum_{i=0}^{k-1} c_i P_i, P_k\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\langle P_i, P_k\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot 0 = 0.$$

ZAD. 3.

Wielomiany ortogonalne są definiowane w następujący sposób:

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_1(x) = (a_1 x - b_1)P_0(x)$$

$$P_k(x) = (a_k x - b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x).$$

Chcemy pokazać, że zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale (a, b), możemy więc ograniczyć się do przestrzeni Π_n rozpiętej przez wielomiany $P_0, \dots, P_n$, bo tylko te mają wpływ na wartość P_n.
Załóżmy, nie wprost, że P_n ma m miejsc zerowych $x_1, \dots, x_m$ dla $0 \leq m < n$. Wiemy, że

$$\langle P_0, P_n \rangle = \int_a^b a_0 p(x)P_n(x)dx = a_0 \int_a^b p(x)P_n(x)dx = 0$$

$$\int_a^b p(x)P_n(x)dx = 0$$

Ponieważ $p(x)$ nie zmienia znaku na przedziale $[a, b]$, to $P_n(x)$ nie może takie być. W takim razie dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$ $P_n(x)$ zmienia znak w x_i. Oznaczmy wielomian $Z(x) = (x - x_1)\dots(x - x_m)$. Wtedy $P_n(x)Z(x)p(x)$ jest wielomianem niezmieniającym znak na przedziale $[a, b]$, czyli

$$c = \int_a^b Z(x)P_n(x)p(x)dx \neq 0$$

Ale z drugiej strony wiemy, że Z jest wielomianem stopnia $m < n$, więc może zostać zapisane w postaci

$$Z = \sum_{k=0}^{m} x_k P_k,$$

co daje nam

$$c = \int_a^b p(x)Z(x)P_n(x)dx = \int_a^b p(x)P_n(x) \sum_{k=0}^{m} x_k P_k(x)dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} x_k \int_a^b p(x)P_k(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{m} x_k \cdot 0 = 0$$

i jest sprzeczność.

ZAD. 4.

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} c_j f_j \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|_2^2$$

Norma:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} f^2(x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| \sum_{j=0}^{n} c_j f_j \|_2^2 = \langle \sum_{j=0}^{n} c_j f_j, \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \rangle = \sum_{j=0}^{n} |c_j| \langle f_j, \sum_{i=0}^{n} c_i f_j \rangle =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} |c_j| \sum_{i=0}^{n} |\overline{c_i}| \langle f_j, f_i \rangle = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |c_j||\overline{c_i}| \langle f_j, f_i \rangle =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \langle f_j, f_j \rangle = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|_2^2$$

ZAD. 6.

Wiem, że $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ dla każdego $i \neq j$. Chce pokazać, że

$$\sum_{i=0}^{m} a_i f_i = 0 \iff a_i = 0$$

Załóżmy nie wprost, że co najmniej jedno $a_k \neq 0$. Weźmy to k i wtedy:

$$0 = \langle 0, f_k \rangle = \langle \sum_{i=0}^{m} a_i f_i, f_k \rangle = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \langle f_i, f_k \rangle = |a_k| \langle f_k, f_k \rangle = |a_k| \|f_k\|^2 \neq 0$$

co daje sprzeczność.

ZAD. 8.

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60

Średnia wartość x to $\overline{x} = 45.625$, wartość średnia y - $\overline{y} = 64.3125$, średnie nachylenie:

$$\overline{a} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = -0.07993035770813546$$

I chcemy, żeby to przechodziło przez średni punkt:

$$64.3125 = -0.07993 \cdot 45.625 + b \implies b = 67.9593$$

a więc

$$S = -0.07993T + 67.9593$$