MDM Lista 3

Weronika Jakimowicz

ZAD 1.

Poprawność wzoru

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

pokażę przez indukcję.

Dla $n = 2$

$$f(2) = \sum_{k=1}^{2} \lceil \log_2 k \rceil = 1$$

$$2 - 1 + f(1) + f(1) = 1 + 0 + 0 = 1 = f(2)$$

czyli się zgadza.

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla pierwszych n wyrazów. Pokażemy, że wówczas zachodzi również dla wyrazu $n+1$.

Rozważmy dwa przypadki:

I. $2 | n+1$, wtedy możemy zapisać $n+1 = 2k+2$ oraz $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n+1 \rceil \overset{ind}{=} \\
&\overset{ind}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n+1 \rceil = \\
&= n - 1 + f(k+1) + f(k) + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k+1 \rceil = \\
&= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil = \\
&= (n+1) - 1 + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)
\end{aligned}$$

II. $2 \nmid n+1$, czyli, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, mamy $n+1 = 2k+1$ i $n = 2k$. Zauważmy, że wtedy $\lceil \log_2 n+1 \rceil = \lceil \log_2 n+2 \rceil$, bo logarytm dwójkowy liczby nieparzystej nigdy nie będzie liczbą całkowitą.

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n+1 \rceil \overset{ind}{=} \\
&\overset{ind}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n+1 \rceil = \\
&= n - 1 + f(k) + f(k) + \lceil \log_2 2k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k+1 \rceil = \\
&= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k+1 \rceil =
\end{aligned}$$

$$= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil =$$
$$= (n+1) - 1 + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$$

Jedynośc $f(n)$ jako rozwiązania podanej relacji

Jeżeli istnieją dwie funkcje f, g spełniające tę zależność i

$$f(1) = 0 = g(1)$$

oraz niech m oraz $d \in [0, 2^m)$ będą najmniejsze takie, że

$$f(2^m + d) \neq g(2^m + d),$$

czyli są pierwszym punktem w którym te funkcje są różne.

$$f(2^m + d) = 2^m + d - 1 + f(\lfloor 2^{m-1} + \frac{d}{2} \rfloor) + f(\lceil 2^{m-1} + \frac{d}{2} \rceil) =$$
$$= (2^m + d) - 1 + 2f(2^{m-1}) + f(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{d}{2} \rceil)$$

$$g(2^m + d) = 2^m + d - 1 + g(\lfloor 2^{m-1} + \frac{d}{2} \rfloor) + g(\lceil 2^{m-1} + \frac{d}{2} \rceil) =$$
$$= (2^m + d) - 1 + 2g(2^{m-1}) + g(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + g(\lceil \frac{d}{2} \rceil)$$

Skoro te funkcje są po raz pierwszy różne, to $(\forall x < 2^m + d) f(x) = g(x)$, a różnica $f(2^m + d) - g(2^m + d) \neq 0$

$$f(2^m + d) - g(2^m + d) = (2^m + d) - 1 + 2f(2^{m-1}) + f(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{d}{2} \rceil) - ((2^m + d) - 1 + 2g(2^{m-1}) + g(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + g(\lceil \frac{d}{2} \rceil)) =$$
$$= 2f(2^{m-1}) + f(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{d}{2} \rceil) - 2g(2^{m-1}) - g(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) - g(\lceil \frac{d}{2} \rceil))$$

ale ponieważ punkt który wybrałam to pierwszy punkt w którym te funkcje się różnią, wówczas $f(2^{m-1}) = g(2^{m-1})$ oraz $f(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor) = g(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$ i $f(\lceil \frac{d}{2} \rceil)) = g(\lceil \frac{d}{2} \rceil))$, czyli ta suma jest równa zero. W takim razie te funkcje są sobie równe.

ZAD 2.

Zauważmy, że dla każdego k i pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$2^{m-1} < k \leq 2^m$$

i wtedy $\lceil \log_2 k \rceil = m$. W jednym takim przedziale mamy $2^{m-1}(2 - 1)$ liczb całkowitych, których powały z logarytmów sumują się do $m2^{m-1}(2-1) = m2^{m-1}$. Niech dla pewnego N zachodzi $N = \lceil \log_2 n \rceil$, a więc

$$2^{N-1} < n \leq 2^N$$

i dalej

$$\sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil = \lceil \log_2 n \rceil + \ldots + \lceil \log_2 2^{N-1} + 1 \rceil + \lceil \log_2 2^{N-1} \rceil + \ldots =$$
$$= N(n - 2^{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-1} k2^{k-1} =$$
$$N(n - 2^{N-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} k2^k$$

Oznaczmy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k,$$

wtedy suma w drugiej części sumy wynosi:

$$\begin{aligned} S_n &= 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n = \\ &= 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + (2^2 + \ldots + (n-1)2^n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2S_{n-1} \end{aligned}$$

Wzrór na pierwszą część sumy jest łatwy do osiągnięcia:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Zauważamy też, że z definicji S_n można wyprowadzić:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k2^k + 2^n = n2^n + S_{n-1}$$

czyli mamy równość:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 2 + 2S_{n-1} &= n2^n + S_{n-1} \\ S_{n-1} &= 2^n(n-2) + 2 \\ S_n &= 2^{n+1}(n-1) + 2 \end{aligned}$$

Wracając do sumy z zadania:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil &= N(n - 2^{N-1}) + \frac{1}{2}S_{N-1} = \\ &= N(n - 2^{N-1}) + 2^{N-1}(N-2) + 1 = \\ &= nN - N2^{N-1} + N2^{N-1} - 2^N + 1 \\ &= nN - 2^N + 1 \end{aligned}$$

Czyli wzór jawny na szukaną funkcję to:

$$f(n) = n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$$

ZAD 3.

I. istnienie takiego zapisu:

Dla $n = 1$ mamy

$$1 = 1\cdot 1 = 1\cdot F_2.$$

Załóżmy, że jest to prawdą również dla wszystkich liczb naturalnych do n włącznie. Niech wtedy k będzie największą liczbą naturalną taką, że

$$F_k \leq n.$$

Jeżeli $n = F_k$, to zapis jest oczywisty. W przeciwnym wypadku, liczba $m = n - F_k$ jest liczbą naturalną mniejszą niż n, a więc z założenia indukcyjnego możemy ją zapisać tak jak w poleceniu. Dalej zauważmy, że dla takiego n mamy:

$$F_k < n < F_{k+1}$$

$$0 < n - F_k < F_{k+1}$$

czyli dla m zauważamy, że zachodzi:

$$m = n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$$

a więc zapis

$$n = m + F_k$$

nie zawiera F_{k-1} czyli jest zgodny z treścią zadania.

II. jedyność:

Po pierwsze, zauważmy że jeśli dany jest nam zbiór S_j różnych, nienastępujących po sobie liczb Fibonacciego, to jeśli F_j, dla $j \geq 2$, jest największą spośród nich, ich suma jest ostro mniejsza niż F_{j+1}. Łatwo to udowodnić przez indukcję.

Dla $j = 2$ mamy zbiór jednoelementowy: $S_2 = \{F_2\}$ i jego suma wynosi $1 < F_3 = 2$. Zakładamy, że dla wszystkich $j \leq n$ jest to prawdą. Wtedy dla $j = n+1$ Możemy rozdzielić taki zbiór S_{n+1} na dwie części:

$$S_{n+1} = (S_{n+1} \cap \{F_k : 2 \leq k \leq n-1\}) \cup \{F_{n+1}\}$$

Zauważmy, że pierwsza część tej sumy pozwala nam użyć założenia indukcyjnego, gdyż zawiera różne, nienastępujące po sobie liczby Fibonacciego nie większe niż F_{n-1} (nie może być F_n bo dalej mamy F_{n+1} a wykluczamy występowanie dwóch kolejnych liczb Fibonacciego). Czyli ich suma jest ostro mniejsza niż F_n. Czyli mamy:

$$\sum_{f \in S_{n+1}} f < F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

Załóżmy, że dla pewnej liczby n mamy dwa zbiory liczb Fibonacciego U i W, spełniające założenia, takie, że

$$\sum_{f \in U} f = \sum_{f \in W} f.$$

Usuńmy teraz części wspólne tych zapisów, czyli niech $U' = U - W$ oraz $W' = W - U$. Ponieważ $U \neq U$ to te zbiory nie mogą być puste i

$$\sum_{f \in U'} f = \sum_{f \in W'} f.$$

Weźmy teraz u największe takie, że $F_u \in U$ oraz w największe takie, że $F_w \in W$. Ponieważ usunęliśmy część wspólną, mamy $F_w \neq F_u$ i bez straty ogólności możemy założyć, że $F_u < F_w$. Ale wtedy mamy, zgodnie ze spostrzeżeniem na początku, że

$$\sum_{f \in U} f < F_{u+1} \leq F_w$$

co daje nam sprzeczność z faktem, że sumy zbiorów U i W' są równe. Czyli któryś z nich musi być pusty. Ale wtedy jego suma jest równa 0 i musi być równa sumie drugiego zbioru, czyli oba są puste. Czyli zostaje nam, że U = W, bo niezerową sumę dają tylko liczby wspólne, które usunęliśmy w pierwszym kroku.

ZAD 4.

Zauważmy, że jeżeli

$$A \mod n = a$$
$$B \mod n = b$$

to wtedy

$$AB \mod n = (ab \mod n)$$

```
function modulo (x, k, n)
    if k == 1
        return x % n
    else if k % 2 == 1
        return ((x % n) * modulo(x, (k-1)/2, n) * modulo(x, (k-1)/2, n)) % n
    else
        return (modulo(x, k/2, n) * modulo(x, k/2, n)) % n
```

Algorytm wykonuje $O(\log_2 k)$ mnożeń.

ZAD 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dla $n = 1$ mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

Załóżmy, że zależność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $\leq n$. Wtedy dla $n+1$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}F_{n+1}+F_n & F_{n+1}\\ F_n+F_{n-1} & F_n\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+1} & F_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

```
function tm(R, M)
    R = [
            R[0]*M[0]+R[1]*M[2],
            R[0]*M[1]+R[1]*M[3],
            R[2]*M[0]+R[3]*M[2],
            R[2]*M[1]+R[3]*M[3]
        ]
    return R


function fibb_matrix(n)
    if n == 0 || n == 1
        return n

    M = [1, 1, 1, 0]
    R = [1, 0, 0, 1]

    while n > 0
        if n % 2 == 0
            n /= 2
            M = tm(M, M)
        else
            R = tm(R, M)
            n -= 1
            n /= 2
            M = tm(M, M)

    return R[1]
```

NIE ROZUMIEM ZLOZONOSCI

ZAD 6.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}F_2\\ F_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_2\\ F_1\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_2+F_1\\ F_2\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_3\\ F_2\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-k}\begin{pmatrix}F_{2+k}\\ F_{1+k}\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-n}\begin{pmatrix}F_{2+n}\\ F_{1+n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{2+n}\\ F_{1+n}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$