

# Teoria grafów

by a fish

21.03.2137



# Contents

<b>1</b>	<b>Structural properties</b>	<b>4</b>
1.1	Basic definitions . . . . .	4
1.2	Hall's Marriage Theorem . . . . .	5
1.3	Menger's Theorem . . . . .	9
1.4	Menger's Theorem (so edgy) . . . . .	11
<b>2</b>	<b>External problems</b>	<b>13</b>
2.1	Complete subgraphs . . . . .	13
2.2	Complete bipartite subgraphs . . . . .	15
2.3	Arbitrary subgraphs . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Ramsey Theory</b>	<b>19</b>
3.1	Ramsey theorem . . . . .	19
3.2	Ramsey but no restrictions on colorzzz . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Architecture shit</b>	<b>21</b>
4.1	Planar graphs . . . . .	21
4.2	Kuratowski's Theorem . . . . .	21
4.3	Graphs on surfaces . . . . .	21

# 1 Structural properties

## 1.1 Basic definitions

**Graph** - an ordered pair  $G = (V, E)$ :

$\hookrightarrow$  vertices  $:= V$  [singular: *vertex*]

$\hookrightarrow$  edges  $:= E, \{v, w\} := vw$

For an edge  $vw$ ,  $v \neq w$  we say that  $v, w$  are its **endpoints** and that it is **incident** to  $v$  (or  $w$ ).

Dla krawedzi  $vw$ ,  $v \neq w$  mowimy, ze  $v, w$  sa jej **koncami** i ze jest krawedzia **padajaca** na  $v$  (lub  $w$ ).

Graphs  $G$  and  $H$  are **isomorphic** ( $G \simeq H$ ) if there exists  $f : V(G) \xrightarrow{1-1} V(H)$  such that

$$(\forall v, w \in V(G)) \quad vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$$

*Meaning that edges are like an operation on a group of vertices*

Grafy  $G$  i  $H$  sa **izomorficzne**, jezeli istnieje  $f : V(G) \xrightarrow[1-1]{na} V(H)$  takie, ze

$$(\forall v, w \in V(G)) \quad vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$$

$G$  jest **podgrafem**  $H$  [ $G \leq H$ ] jezeli  $V(G) \subseteq V(H)$  oraz  $E(G) \subseteq E(H)$ .

$G$  is a **subgraph** of  $H$  [ $G \leq H$ ] if  $V(G) \subseteq V(H)$  and  $E(G) \subseteq E(H)$ .

$G$  jest **H-free** (wolny od  $H$ ?), jezeli nie ma podgrafow izomorficznych z  $H$ .

If  $G$  is **H-free** if it has no subgraphs isomorphic to  $H$ .

A **cycle** of length  $n \geq 3$  [ $C_n$ ] is a graph with vertices

$$V(C_n) = [n]$$

and edges:

$$E(C_n) = \{i(i+1) : i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

A **path** of length  $n-1$  [ $P_{n-1}$ ] is a graph with vertices

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

and edges

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

**Cykl** dlugosci  $n \geq 3$  [ $C_n$ ] to graf z wierzchołkami

$$V(C_n) = [n]$$

i krawiedziami:

$$E(C_n) = \{i(i+1) : i \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}.$$

**Sciezka** dlugosci  $n-1$  [ $P_{n-1}$ ] to graf z wierzchołkami

$$V(P_{n-1}) = [n]$$

i krawiedziami

$$E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

An **induced** by  $A \subseteq V(G)$  subgraph of  $G$  is

$$G[A] = (A, E_A)$$

A **connected component** of  $G$  is a subgraph  $G[W] \leq G$  where  $W \subseteq V$  is an equivalence class under  $\approx$  given by

$$v \approx w \iff \text{exists a path } v \dots w \text{ in } G$$

A graph is **connected** if  $v \approx w$  for every  $v, w \in V$  ( $G$  has at most one connected component).

If  $v$  is a vertex in graph  $G$ , we say that its **neighbourhood** is  $N_G(v) = \{w \in G : vw \in E(G)\}$ . Furthermore, the **degree** of  $v$  is  $|N_G(v)|$ .

If  $A \subseteq V$ , then  $N(A) := \bigcup_{v \in A} N(v)$ .

We define:

$\hookrightarrow$  minimal degree  $\delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$

$\hookrightarrow$  maximal degree  $\Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$

$\hookrightarrow$  average degree  $d(G) = \frac{\sum d(v)}{|G|}$ .

If there exists an  $r \geq 0$  such that

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(G) = r$$

then we say that the graph is **r-regular** or, more generally, it is **regular** for some  $r$ .

**Handshaking Lemma:** for any graph  $G$  we have  $e(G) = \frac{1}{2} \sum d(v) = \frac{|G|}{2} d(G)$

## 1.2 Hall's Marriage Theorem

Graph  $G$  is **bipartite** with vertex classes  $U$  and  $W$  if  $V = U \cup W$  so that every edge has form  $uw$  for some  $u \in U$  and  $w \in W$ .

$G$  is bipartite iff it has no cycles of odd length.

Graf  $G$  jest **dwudzielny** z klasami wierzchołków  $U$  i  $W$ , jeśli  $V = U \cup W$  takimi, że każda krawędź jest formy  $uw$  dla pewnych  $u \in U$  oraz  $w \in W$ .

$G$  jest dwudzielny wtw kiedy nie ma cykli o nieparzystej długości.

[  ] [  ]

[  ]

$\Rightarrow$

Let  $U, W$  be the vertex classes and  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  be a cycle in  $G$ . WLOG suppose that  $v_1 \in U$ . Then  $v_2 \in W$  etc. Specifically we have  $v_i \in U$  if  $i$  is odd and  $v_i \in W$  if  $i$  is even. Then, we have  $v_n v_1$ , so  $n$  must be even.

$\Leftarrow$

Suppose  $G$  has no cycles of odd length. WLOG, assume that  $V(G) \neq \emptyset$  and that  $G$  is connected, because  $G$  will be bipartite if all its connected components are bipartite. Fix  $v \in G$  and for all other  $w \in G$  define distance  $\text{dist}(v, w)$  as the smallest  $n \geq 0$  such that there exists a path  $v \dots w$  in  $G$  of length  $n$ .

Now, let  $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$  and set

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

We want to show that there are no edges in  $G$  of the form  $v'v''$  where  $v', v'' \in U$  or  $v', v'' \in W$ .

Suppose that  $v'v'' \in E(G)$  with  $v' \in V_m, v'' \in V_n$  and  $m \leq n$ . Then, we have a path

$$v \dots v'v'' \in G$$

of length  $m + 1$ , implying that

$$n \in \{m, m + 1\}.$$

Suppose that  $n = m$ . Let  $v'_0 v'_1 \dots v'_m$  and  $v''_0 v''_1 \dots v''_m$  be paths in  $G$  with  $v = v'_0 = v''_0$ ,  $v' = v'_m$  and  $v'' = v''_m$ . Note that  $v'_i, v''_i \in V_i$  for  $0 \leq i \leq m$ . Let  $k \geq 0$  be largest such that

$$v'_k = v''_k$$

and note that  $k \leq m - 1$  as  $v' \neq v''$ . Then

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

is a cycle of odd length, which is a contradiction.

Therefore, we can only have  $n = m + 1$  and then exactly one of  $n, m$  is even meaning that exactly one of  $v'$  and  $v''$  is in  $U$  as required for  $G$  to be bipartite.

[  ]

$\Rightarrow$

Niech  $U, W$  będą klasami wierzchołków oraz niech  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  niech będzie cyklem w  $G$ . BSO założymy, że  $v_1 \in U$ . W takim razie,  $v_2 \in W$  etc. W szczególności, mamy  $v_i \in U$  jeżeli  $i$  jest nieparzyste oraz  $v_i \in W$  jeżeli  $i$  jest parzyste. W takim razie, skoro  $v_n v_1$ , to  $n$  musi być parzyste.



Załozmy, że  $G$  nie ma cykli o nieparzystej dlugosci. BSO zalozmy, że  $V(G) \neq \emptyset$  i że  $G$  jest spojny, poniewaz  $G$  bedzie dwudzielny, wtw gdy wszystkie jego skladowe spojne (????) beda dwudzielne. Ustalmy  $v \in G$  i dla kazdego innego  $w \in G$  zdefiniujmy dystans  $\text{dist}(v, w)$  jako najmniejsze  $n \geq 0$  takie, że istnieje sciezka  $v \dots w$  w  $G$  o dlugosci  $n$ .

Niech  $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$  i zbiory

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$V = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

Chcemy pokazac, że nie istnieja w  $G$  krawedzie postaci  $v'v''$ , gdzie  $v', v'' \in U$  lub  $v', v'' \in V$ .

Załozmy, że  $v'v'' \in E(G)$  z  $v' \in V_m, v'' \in V_n$  oraz  $m \leq n$ . Wtedy istnieje sciezka

$$v \dots v'v'' \in G$$

dlugosci  $m + 1$ , co implikuje, że

$$n \in \{m, m + 1\}.$$

Załozmy, że  $n = m$ . Niech  $v'_0v'_1 \dots v'_m$  oraz  $v''_0v''_1 \dots v''_m$  sa sciezkami w  $G$  takimi, że  $v = v'_0v''_0$ ,  $v' = v'_m$  oraz  $v'' = v''_m$ . Zauwazmy, że  $v'_i, v''_i \in V_i$  dla  $0 \leq i \leq m$ . Niech  $k \geq 0$  bedzie najwiksze takie, że

$$v'_k = v''_k$$

i zauwazmy, że  $k \leq m - 1$  poniewaz  $v' \neq v''$ . Wtedy

$$v'_kv'_{k+1} \dots v'_mv''_mv''_{m-1} \dots v''_k$$

jest cyklem o nieparzystej dlugosci, co daje nam sprzeczność.

W takim raize, mozemy miec tylko  $n = m + 1$  i wtedy dokładnie jedno z  $n, m$  moze byc parzystem, co daje nam dokładnie jedno z  $v'$  i  $v''$  w  $U$  tak, jak jest wymagane zeby to byl graf dwudzielny.

<p>If <math>G</math> is a bipartite graph with <math>V = W \cup M</math> and <math>W' \subseteq W</math>, a <b>partial matching</b> in <math>G</math> from <math>W'</math> to <math>M</math> is</p> $\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$ <p>for some <math>v_w \in M</math> such that <math>w \neq w' \Rightarrow v_w \neq v_{w'}</math>. A partial matching from <math>W</math> to <math>M</math> is called a <b>matching</b>.</p> <p>Sufficient condition:</p> $ N(A)  \geq  A  \quad (\text{☝})$ <p>for every <math>A \subseteq W</math></p> <p>.....</p> <p>A bipartite graf <math>G</math> contains a matching from <math>W</math> to <math>M</math> iff <math>(G, W)</math> satisfies Hall's condition (☝).</p>	<p>Jesli <math>G</math> jest grafem dwudzielnym z <math>V = W \cup M</math> oraz <math>W' \subseteq W</math>, wtedy <b>czesciowe skojarzenie</b> w <math>G</math> z <math>W'</math> do <math>M</math> to</p> $\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$ <p>dla pewnych <math>v_w \in M</math> takich, że <math>w \neq w' \Rightarrow v_w \neq v_{w'}</math>. Czesciowe kojarzenie z <math>W</math> do <math>M</math> jest nazywane <b>kojarzeniem</b>.</p> <p>Wystarczajacy warunek:</p> $ N(A)  \geq  A  \quad (\text{☝})$ <p>dla kazdego <math>A \subseteq W</math></p> <p>.....</p> <p>Dwudzielny graf <math>G</math> zawiera kojarzeniem iff gdy <math>(G, W)</math> zadowala warunek Halla (☝).</p>
---	--

[ 🇬🇧 ] [ 🇵🇱 ]

[ 🇬🇧 ]



Trivial.



Using induction on  $|W|$ . For  $|W| = 0, 1$  it is trivial.

We gonna break it into parts:  $|N(A)| > |A|$  and  $|N(A)| = |A|$

Suppose that  $|N(A)| > |A|$  for every non-empty subset  $A \subsetneq W$ . Take any  $w \in W$  and  $v \in N(w)$  and construct a new graph

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

For any non-empty  $B \subseteq W - \{w\}$  we have

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

and therefore

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|$$

and so  $(G_0, W - \{w\})$  satisfies Hall's condition. From induction we have a matching  $P$  in  $G_0$  from  $W - \{w\}$  to  $M - \{v\}$  and so  $P \cup \{wv\}$  is a matching from  $W$  to  $M$ .

Now, suppose that  $|N(A)| = |A|$  for some non-empty subset  $A \subsetneq W$ . Let

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

and

$$G_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

We will show that both those graphs satisfy Hall's condition.

Let us take any  $B \subseteq A$  in  $G_1$ . We have

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

and so graph  $G_1$  satisfies Hall's condition.

Now, let us take any  $B \subseteq W - A$  in  $G_2$ . We know that  $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$  so

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

Therefore, graph  $G_2$  also satisfies Hall's condition.

Using inductive hypothesis, we have that there exists a matching  $P_1$  in  $G_1$  and a matching  $P_2$  in  $G_2$ . The first one is from  $A$  to  $N_G(A)$  while the second is from  $W - A$  to  $M - N_G(A)$ , so they are disjoint. Therefore,  $P_1 \cup P_2$  is a matching in  $G$  from  $W$  to  $M$ .

[  ]

$\Rightarrow$

Trywialne.

$\Leftarrow$

Uzjemy indukcji na  $|W|$ . Dla  $|W| = 0, 1$  jest trywialne.

Podzielimy dowod na dwie czesci:  $|N(A)| > |A|$  oraz  $|N(A)| = |A|$ .

Zalozmy, że  $|N(A)| > |A|$  dla kazdego niepustego podzbioru  $A \subsetneq W$ . Wezmy dowolne  $w \in W$  oraz  $v \in N(w)$  i skonstruujmy nowy graf

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

Dla kazdego niepustego  $B \subseteq W - \{w\}$  mamy

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

i w takim razie

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|,$$

czyli  $(G_0, W - \{w\})$  spelnia warunek Halla. Z zalozenia indukcyjnego istnieje kojarzenie  $P$  w  $G_0$  z  $W - \{w\}$  do  $M - \{v\}$ , w takim razie  $P \cup \{wv\}$  jest kojarzeniem z  $W$  do  $M$ .

Zalozmy teraz, ze  $|N(A)| = |A|$  dla pewnego niepustego podzbioru  $A \subsetneq W$ . Niech

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

oraz

$$G_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

Pokazemy, ze oba te grafy zaspokajaja warunek Halla.

Wezmy dowolny  $B \subseteq A$  w  $G_1$ . Mamy

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

a wiec graf  $G_1$  zaspokaja warunek Halla.

Teraz, wezmy dowolny  $B \subseteq W - A$  w  $G_2$ . Wiemy, ze  $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$ , a wiec

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

W takim razie  $G_2$  spełnia warunek Halla.

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje kojarzenie  $P_1$  w  $G_1$  oraz  $P_2$  w  $G_2$ . Pierwsze jest z  $A$  do  $N_G(A)$ , natomiast drugie jest z  $W - A$  do  $M - N_G(A)$ , czyli są rozłączne. W takim razie  $P_1 \cup P_2$  jest kojarzeniem w  $G$  z  $W$  do  $M$ .

Let  $G$  be a finite group and let  $H \leq G$  be a subgroup with  $\frac{|G|}{|H|} = k$ , then  $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_k$  for some  $g_1, \dots, g_k \in G$ .

Niech  $G$  będzie skończona grupa i niech  $H \leq G$  będzie podgrupa z  $\frac{|G|}{|H|} = k$ , wtedy  $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_k$  dla pewnych  $g_1, \dots, g_k \in G$ .

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

Oznaczmy

$$L = \{a_1 H, \dots, a_k H\}$$

$$R = \{Hb_1, \dots, Hb_k\}$$

jako zbiory odpowiednio lewych i prawych wrastw  $H$  w  $G$ . Niech  $K$  będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków  $L$  i  $R$ . Wprowadzmy na  $K$  relacje równoważności

$$a_i H \sim Hb_j \iff a_i H \cap Hb_j \neq \emptyset \text{ w } G.$$

Dla dowolnego podzbioru  $A \subseteq L$  zachodzi

$$|\bigcup_{U \in A} U| = |A| \cdot |H|$$

jako podzbiorów  $G$ . *Chodzi o to, że każda warstwa ma moc  $|H|$ , a mamy ich  $|A|$  sztuk w zbiorze  $|A|$ . Więc jak będziemy je dodawać, to one są rozłączne, więc smiga.*

Dla każdego  $V \in R$  mamy  $|V| = |H|$  bo każda warstwa ma tę samą moc co  $H$ , a więc  $\bigcup_{U \in A} U$  nie jest niepusty z co najmniej  $|A|$  elementami z  $R$ . Z tego wynika, że

$$|N_K(A)| \geq |A|,$$

więc istnieje kojarzenie  $P$  w  $K$  z  $L$  do  $R$ . Weźmy więc dowolny  $g_i$  w  $a_i H \cap Hb_j \neq \emptyset$ . Wtedy jest część krawędzi  $(a_i H)(Hb_j)$  w  $P$  dla  $1 \leq i \leq k$ . Mamy więc  $a_i H = g_i H$  oraz  $Hb_j = Hg_i$ .

### Hall's Missing Soulmate Theorem

Let  $G$  be a bipartite graph with vertex classes  $W$  and  $M$ , and let  $d \geq 1$ .

Then  $G$  contains a partial matching from  $W'$  to  $M$  for some  $W' \subseteq W$  with  $|W'| \geq |W| - d$  iff  $|N(A)| \geq |A| - d$  for every  $A \subseteq W$ .

### Twierdzenie Halla o brakującym mezu(????)

Niech  $G$  będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków  $W$  i  $M$  i niech  $d \geq 1$ .

Wtedy  $G$  zawiera kojarzenie z  $W'$  do  $M$  dla pewnego  $W' \subseteq W$  z  $|W'| \geq |W| - d$  iff  $|N(A)| \geq |A| - d$  dla każdego  $A \subseteq W$ .

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]



Trywialne :3



Zapoznajmy panie z  $d$  wyobrazonymi idealnymi dla kazdej pani kawalerami. Wtedy twierdzenie Halla jest spelnione, wiec mozemy ozenic kazda kobiete do odpowiedniego, prawdziwego czy wyobrazonego, meza. W prawdziwym zyciu, co najwyzej  $d$  kobiet jest niezameznych.



### Hall's Polygamous Marriage Theorem

Let  $G$  be a bipartite graph with vertex classes  $W$  and  $M$ , and let  $d \geq 1$ .

Then  $G$  contains a subgraph  $H$  with  $W \subseteq V(H)$  in which each  $w \in W$  has degree  $d$  and each  $v \in M \cap V(H)$  has degree 1 iff  $|N(A)| \geq d|A|$  for every  $A \subseteq W$

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

$\Rightarrow$

Trywialne :3

$\Leftarrow$

Sklonujmy kazda kobiete  $d - 1$  razy. Wtedy warunek Halla jest zaspokojony, wiec mozemy kazda z nich ozenic (klony i oryginaly) do odpowiednich mezow. Teraz scisnijmy klony z oryginalami do jednej osoby. Koniec!

## 1.3 Menger's Theorem

**Cut vertex**  $v$  is a vertex in a connected graph  $G$  such that  $G - \{v\}$  is not connected.

Graph  $G$  is a  **$k$ -connected graph** if for any  $A \subseteq V(G)$ ,  $|A| < k$ ,  $G - A$  is connected.

**Complete graph** has all vertices connected by an edge, that is for all  $v, w \in G$   $v \neq w$  we have  $vw \in E$ .

**$(A, B)$ -path** is a path in  $G$  for some  $A, B \subseteq V$  of the form  $a \dots b$  for some  $a \in A$  and  $b \in B$ .

**$(A, B)$ -cut** in  $G$  is  $C \subseteq V$  such that  $G - C$  contains no  $(A - C, B - C)$ -paths.

If we take vertices  $a, v \in V$  we call an  $(\{a\}, \{b\})$ -path an  $(a, b)$ -path. Given a collection of  $(a, b)$ -paths

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$$

we say such a collection is **independent** if  $P^{(i)} - \{a, b\}$  and  $P^{(j)} - \{a, b\}$  have no common vertices for  $i \neq j$ .

Given  $A, B, C \subseteq V(G)$  and if  $A \subseteq C$  or  $B \subseteq C$ , then  $C$  is an  $(A, B)$ -cut and if  $C$  is an  $(A, B)$ -cut then  $A \cap B \subseteq C$ .

Let  $G$  be a graph,  $A, B \subseteq V(G)$  and  $k \geq 0$ . Suppose that for every  $(A, B)$ -cut  $C$  in  $G$  we have  $|C| \geq k$ .

Then  $G$  contains a **collection of  $k$  vertex-disjoint  $(A, B)$ -paths**.

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

Uzjemy indukcji na  $e(G)$  [definicja dla debila].

Jako przypadek bazowy mamy  $e(G) = 0$ , wtedy  $A \cap B$  jest  $(A, B)$ -cieciem i w takim razie  $k \leq |A \cap B|$ , ale kazdy wierzcholek  $A \cap B$  jest  $(A, B)$ -sciezka dlugosci 0 i wszystkie z nich sa rozlaczne, tak jak wymagamy.

Zalozmy, ze  $e(G) \geq 1$ , wybiezmy krawedz  $e \in E(G)$  i niech  $H = G - \{e\}$ .

Jesli dla kazde  $(A, B)$ -ciecie w  $H$  ma stopien co najmniej  $k$ , to przez hipoteze indukcyjna sa one  $k$  wierzchołkowo rozlacznyymi  $(A, B)$ -sciezками w  $H$  i w takim razie w  $G$ , wiec koniec.

### Twierdzenie Halla o polimalzenstwach

Niech  $G$  bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołkow  $W$  i  $M$  i niech  $d \geq 1$ .

Wtedy  $G$  zaiwera podgraf  $H$  z  $W \subseteq V(H)$  w ktorym kazdy  $w \in W$  ma stopien  $d$  i kazdy  $v \in M \cap V(H)$  ma stopien 1 iff  $|N(A)| \geq d|A|$  dla kazdego  $A \subseteq W$ .

**Tnacy wierzcholek**  $v$  jest wierzchołkiem w spojnym grafie  $G$  takim, ze  $G - \{v\}$  jest niespojny.

Graf  $G$  jest  **$k$ -spojnym grafem**, jezeli dla kazdego  $A \subseteq V(G)$ ,  $|A| < k$ ,  $G - A$  jest spojny.

**Graf pelny** ma wszystkie wierzchołki polaczone krawedzia, to znaczy dla kazdego  $v, w \in G$ ,  $v \neq w$  mamy  $vw \in E$ .

**$(A, B)$ -sciezka** to sciezka w  $G$  dla pewnych  $A, B \subseteq V$  postaci  $a \dots b$  dla jakis  $a \in A$  i  $b \in B$ .

**$(A, B)$ -ciecie** w  $G$  to  $C \subseteq V$  takie, ze  $G - C$  nie zawiera zadnych  $(A - C, B - C)$ -sciezek.

Jesli wezwiemy wierzchołki  $a, v \in V$ , to  $(\{a\}, \{b\})$ -sciezke nazywamy  $(a, b)$ -sciezka. Jesli dana jest kolekcja  $(a, b)$ -sciezek

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$$

mowimy, ze ta kolekcja jest **niezalezna**, jezeli  $P^{(i)} - \{a, b\}$  i  $P^{(j)} - \{a, b\}$  nie maja wspolnych wierzchołkow dla  $i \neq j$ .

Dla danych  $A, B, C \subseteq V(G)$ , jezeli  $A \subseteq C$  albo  $B \subseteq C$ , to  $C$  jest  $(A, B)$ -cieciem i jesli  $C$  jest  $(A, B)$ -cieciem, to  $A \cap B \subseteq C$ .

Niech  $G$  bedzie grafem,  $A, B \subseteq V(G)$  i  $k \geq 0$ . Zalozmy, ze dla kazdego  $(A, B)$ -ciecia  $C$  w  $G$  jest  $|C| \geq k$ .

Wtedy  $G$  zawiera **zbior  $k$  rozlacznych wierzchołkami  $(A, B)$ -sciezek**.

Zalozmy teraz, bez starty ogolnosci, ze w H istnieje co najmniej jedno (A, B)-ciecie C takie, ze  $|C| < k$ . W takim razie C nie jest (A, B)-cieciem w G, wiec  $G - C$  zawiera co najmniej jedna (A, B)-sciezke postaci

$$a \dots vw \dots b$$

dla pewnych  $a \in A$ ,  $b \in B$ , gdzie  $v, w \in G$  sa koncami e. Co wiecej, kazda (A, B)-sciezka w  $G - C$  zawiera wierzcholek v, co implikuje ze

$$C' = C \cup \{v\}$$

jest (A, B)-cieciem w G. Co wiecej,  $|C'| = |C| + 1 \geq k$ . Poniewaz  $a \dots vw \dots b$  bylo jedyna sciezka ktora blokowala C przed zostaniem (A, B)-cieciem w G, ale juz  $|C'|$  nim jest, to  $|C| = k - 1$  i mozemy przyjac, ze

$$C = \{c_1, \dots, c_{k-1}\}.$$

Teraz, poniewaz  $v \in C'$ , to kazde (A,  $C'$ )-ciecie D w H jest takze (A,  $C'$ )-cieciem w G. Poniewaz kazda (A, B)-sciezka w G zawiera wierzcholek  $C'$ , to D jest takze (A, B)-cieciem w G i dlatego  $|D| \geq k$ . Korzystajac wiec z hipotezy indukcyjnej, wiemy, ze istnieja rozlaczne wierzchołkami (A,  $C'$ )-sciezki

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}, p^{(k)}$$

w H konczace sie odpowiednio w  $c_1, \dots, c_{k-1}, v$ . Niech  $C'' = C \cup \{w\}$ . Wtedy analogicznie, mamy takie ( $C''$ , B)-sciezki


$$q^{(1)}, \dots, q^{(k-1)}, q^{(k)}$$

w H zaczynajace sie od odpowiednio wierzchołkow  $c_1, \dots, c_{k-1}, v$ . Co wiecej, poniewaz  $C'$  jest (A, B)-cieciem w G, to  $p^{(i)}$  oraz  $q^{(i)}$  nie moga miec wspolnego wierzchołka u poza przypadkiem  $i = j \leq k - 1$  i  $u = c_i$ . To sugeruje, ze

$$p^{(1)}q^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}q^{(k-1)}, p^{(k)}q^{(k)}$$

sa k rozlacznymi wzgledem wierzchołkow (A, B)-sciezkami w G. Koniec.

<p>Hall's Marriage Theorem may be deduced from this lemma: Let G be a bipartite graph with vertex classes W and M and suppose that (G, W) satisfies Hall's condition. Let C be a (W, M)-cut in G. Then</p> $N(W - C) \subseteq M \cap C$ <p>and therefore</p> $\begin{aligned}  C  &=  W \cap C  +  M \cap C  \geq \\ & W \cap C  +  N(W - C)  \geq \\ & W \cap C  +  W - C  =  W  \end{aligned}$ <p>thus  W  contains vertex-disjoint (W, M)-paths, each of length 1 implying that such a collection of paths is a matching.</p>	<p>Twierdzenie Halla o malzenstwach moze byc wyprowadzone z tego lematu: Niech G bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołkow W i M i zalozmy, ze (G, W) zadowala warunek Halla. Niech C bedzie (W, M)-cieciem w G. Wtedy</p> $N(W - C) \subseteq M \cap C$ <p>i z tego</p> $\begin{aligned}  C  &=  W \cap C  +  M \cap C  \geq \\ & W \cap C  +  N(W - C)  \geq \\ & W \cap C  +  W - C  =  W  \end{aligned}$ <p>a wiec  W  zawiera rozlaczne wzgledem wierzchołkow (W, M)-sciezki, kazda o dlugosci 1, implikujac ze taki zbior sciezek jest kojarzeniem.</p>
<p><b>Menger's Theorem</b></p> <p>Let G be an incomplete graph and let <math>k \geq 0</math>. Then G is k-connected iff for every <math>a, b \in G</math> with <math>a \neq b</math>, there exists a collection of k independent (a, b)-paths in G.</p>	<p><b>Twierdzenie Mengera</b></p> <p>Niech G bedze niepelnym grafem i niech <math>k \geq 0</math>. Wtedy G jest k-spojne iff dla kazdego <math>a, b \in G</math> z <math>a \neq b</math> istnieje zbior k niezaleznych (a, b)-sciezek w G.</p>

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

$\Rightarrow$

Niech  $C \subseteq V(G)$  i załozmy, że  $G - C$  jest niespojny. Wybierzmy dowolne  $a, b \in G - C$  należące do różnych składowych spójności  $G - C$ . Na mocy tego założenia,  $G$  zawiera  $k$  niezależnych  $(a, b)$ -ściezek. Każda z tych ściezek musi mieć wierzchołek w  $C$ , ale żadne dwie ściezki nie mają wspólnego wierzchołka poza  $a$  i  $b$ . Z tego wynika, że  $|C| \geq k$ , tak jak wymagamy.

⇐

Bedziemy robic indukcje po  $k$ .

Przypadek bazowy dla  $k = 0$  jest trywialny.

Niech wiec  $k \geq 1$  i niech  $a, b \in G$  beda rozne.

Zalozmy najpierw, że  $a \not\sim b$ . Niech  $A = N(a)$  oraz  $B = N(b)$ . Grafy  $G - A$  i  $G - B$  sa niespojne, bo nie maja ani jednej sciezki  $a \dots b$ . Daje to  $|A| \geq k$  oraz  $|B| \geq k$ . Jezeli  $C$  jest  $(A, B)$ -cieciem w  $G$ , to  $G - C$  rowniez nie ma scieziem miedzy elementami  $A - C$  oraz  $B - C$ . Dlatego, albo  $A \subseteq C$  albo  $B \subseteq C$ , albo  $G - C$  jest niespojne. W kazdym razie, mamy  $|C| \geq k$  wiec z lematu wyzej,  $G$  ma  $k$  rozlacznych wzgledem wierzchołkow  $(A, B)$ -ściezek:

$$a_1 \dots b_1, \dots, a_k \dots b_k.$$

Wtedy,

$$aa_1 \dots b_1 b, \dots, aa_k \dots b_k b$$

sa  $k$  niezależnymi ściezkami  $(a, b)$  tak jak wymagamy.

Zalozmy teraz, że  $a \sim b$  i niech  $H = G - \{ab\}$ . Pokazemy najpierw, że  $H$  jest  $(k - 1)$ -spojne.

Zalozmy, że tak nie jest. Niech  $C \subseteq V(H)$  bedzie takim podzbiorem, że  $|C| < k - 1$  i niech  $H - C$  bedzie niespojne. Poniewaz  $G$  jest  $k$ -spojne, to  $G - C$  jest spojny i nie ma wierzchołkow tnacych (cut vertices), co implikuje że  $H - C$  dokładnie dwie składowe spójne, kazda zawierajaca jeden z wierzchołkow  $a$  lub  $b$ . Ale wtedy  $|G| = |H| = 2 + |C| \leq k$ , wiec  $G$  jest grafem  $k$ -spojnym z  $|G| \leq k$ , co daje sprzeczność z tym, że  $G$  nie jest pelne.

W takim razie,  $H$  musi byc  $(k - 1)$ -spojne. Z hipotezy indukcyjnej zawiera wiec  $k - 1$  niezależnych  $(a, b)$ -ścieziem. Razem z krawedzie  $ab$  te ściezki tworza zbior  $k$  niezależnych  $(a, b)$  ściezek w  $G$ , co konczy dowod.

## 1.4 Menger's Theorem (so edgy)

Graph  $G$  is  $k$ -edge-connected for  $k \geq 0$  if for every  $F \subseteq E(G)$ ,  $|F| < k$ ,  $G - F$  is connected.

Line graph of graph  $G$   $[L_G]$  is a graph with  $V(L_G) = E(G)$  and for  $e, f \in L_G$  with  $e \neq f$  we have

$$e \sim f \text{ in } L_G \iff e, f \text{ common endpoint in } G$$

Menger's Theorem edge version

Let  $G$  be a graph and let  $k \geq 0$ .

Then  $G$  is  $k$ -edge-connected iff for every  $a, b \in G$  with  $a \neq b$ , there exists a collection of  $k$  edge-disjoint  $(a, b)$ -paths in  $G$ .

Graf  $G$  jest  $k$ -spojny krawedziowo dla  $k \geq 0$  jesli dla kazdego  $F \subseteq E(G)$ ,  $|F| < k$ ,  $G - F$  jest spojny.

Graf krawedziowy grafu  $G$   $[L_G]$  jest grafem z  $V(L_G) = E(G)$  i dla  $e, f \in L_G$  z  $e \neq f$  mamy

$$e \sim f \text{ w } L_G \iff e, f \text{ wspolny koniec w } G$$

Twierdzenie Megera wersja krawedzie

Niech  $G$  bedzie grafem i niech  $k \geq 0$ .

Wtedy  $G$  jest  $k$ -spojny krawedziowo z  $a \neq b$ , wtedy istnieje zbior  $k$  rozlacznych krawedziami  $(a, b)$ -krawedzi w  $G$ .

[  ] [  ]

[  ]

SOMEBONY ONCE TOLD ME THE WORLD IS GONNA ROLL ME

[  ]

⇒

Niech  $L_G$  bedzie grafem krawedziowym grafu  $G$ . Wezmy  $a, b \in G$  takie, że  $a \neq b$ . Niech

$$A = \{av \in E(G) : v \in N_G(a)\}$$

i niech

$$B = \{bv \in E(G) : v \in N_G(b)\}.$$

Oznaczmy przez  $C$   $(A, B)$ -ciecie w  $L_G$ , wiec

$$C \subseteq E(G).$$

Wtedy nie istnieje  $(a, b)$ -ściezka w  $G - C$ , co implikuje, że  $|C| \geq k$ . W takim razie, na mocy lematu z poprzedniego podrozdzialu, istnieje  $k$  rozlaczna wzgledem wierzchołkow  $(A, B)$ -ściezka w  $L_G$  i z tego powodu jest  $k$  rozlaczna wzgledem krawedzi  $(a, b)$ -ściezka w  $G$ .

Mozemy wyprowadzic te implikacje z twierdzenia "max-flow min-cut" przez zamienianie kazdej krawedzi  $vw$  przez pare skierowanych krawedzi  $v \rightarrow w$  i  $w \rightarrow v$ . Ale my nie znamy tego twierdzenia, wiec nie chce mi sie pisac dalej :v



Niech  $f \subseteq E(G)$  i załozmy, że  $G - F$  jest niespojny. Wybierzmy  $a, b \in G - F$  należący do różnych składowych spójności  $G - F$ . Zgodnie z założeniem,  $G$  zawiera  $k$  rozłączne względem krawędzi  $(a, b)$ -ścieżki i każda z tych ściezek musi mieć krawędzie w  $F$ . Z tego też powodu  $|F| \geq k$  tak jak chcieliśmy.

## 2 External problems

How large can we make some parameter of  $G$  before it is forced to have a certain property?

### 2.1 Complete subgraphs

Complete graph of order  $r$  [ $K_r$ ] is a graph with  $V(K_r) = [r]$  and  $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$ .  $K_3$  is called a **triangle**.

$r$ -partite graph  $G$  with vertex classes  $V_1, \dots, V_r$  has every edge of form  $vw$  where  $v \in V_i$  and  $w \in V_j$  and  $i \neq j$ . Such a graph is called **complete  $r$ -partite** if for every  $i, j$ ,  $i \neq j$  we have  $v \in V_i$ ,  $w \in V_j \Rightarrow vw \in E(G)$ .

A **complete bipartite graph** with vertex classes of orders  $|V_1| = m$  and  $|V_2| = n$  is denoted  $K_{m,n}$ .

**Graf pelny stopnia  $r$  [ $K_r$ ]** to graf z  $V(K_r) = [r]$  i  $E(K_r) = \{ij : 1 \leq i < j \leq r\}$ .

$K_3$  jest nazywany **trojkatem**?

**$r$ -dzielny** graf  $G$  z klasami wierzchołkow  $V_1, \dots, V_r$  ma każdy wierzchołek postaci  $vw$ , gdzie  $v \in V_i$  i  $w \in V_j$  dla  $i \neq j$ . Taki graf jest dodatkowo nazywany **pełnym grafem  $r$ -dzielnym**, jeżeli dla każdego  $i, j$ ,  $i \neq j$  jest  $v \in V_i$ ,  $w \in V_j \Rightarrow vw \in E(G)$ .

**Pełny graf dwudzielny** z klasami wierzchołkow o mocy  $|V_1| = m$  i  $|V_2| = n$  jest oznaczany jako  $K_{m,n}$ .

We now want to check how big must  $e(G)$  be in order to force  $K_r$  to be  $G$  subgraph.

$\hookrightarrow$  given  $r \geq 2$  we can see that for  $G$  to be  $K_r$ -free we need  $G$  to be  $(r-1)$ -partite

$\hookrightarrow$  given  $n \geq r-1$  out of all  $(r-1)$ -partite graphs with  $n$  vertices the one with most edges is a complete  $(r-1)$ -partite graph

$\hookrightarrow$  if  $G$  is a complete  $(r-1)$ -partite graph with vertex classes

$V_1, \dots, V_{r-1}$ ,

if  $|V_i| \geq |V_j| + 2$  for some  $i \neq j$ , then we may choose  $v \in V_j$  and consider a new graph obtained by removing edges  $vv_i$  for  $v_i \in V_i$  and adding  $vv_j$  for every  $v_j \in V_j - \{v\}$ . This new graph is  $(r-1)$ -partite and  $|G'| = |G|$  and

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

$\hookrightarrow$  so the  $(r-1)$  partite graph with  $n$  vertices and the most edges will have vertex classes "as equal in size as possible"

Teraz chcemy sprawdzić jak duże musi być  $e(G)$ , żeby zmusić  $K_r$  do bycia podgrafem  $G$

$\hookrightarrow$  mając dane  $r \geq 2$  możemy zauważyć, że aby  $G$  było  $K_r$ -wolne, musi być  $(r-1)$ -dzielne

$\hookrightarrow$  mając dane  $n \geq r-1$  i wszystkie  $(r-1)$ -dzielne grafy z  $n$  wierzchołkami ten, który ma najwięcej krawędzi jest pełnym  $(r-1)$ -dzielnym grafem

$\hookrightarrow$  jeśli  $G$  jest grafem pełnym  $(r-1)$ -dzielnym z klasami wierzchołkow

$V_1, \dots, V_{r-1}$ ,

to jeśli  $|V_i| \geq |V_j| + 2$  dla pewnych  $i \neq j$ , wtedy możemy wybrać  $v \in V_j$  i rozważyć nowy graf otrzymany poprzez usunięcie krawędzi  $vv_i$  dla  $v_i \in V_i$  oraz dodanie  $vv_j$  dla każdego  $v_j \in V_j - \{v\}$ . Taki nowy graf jest  $(r-1)$ -dzielny i  $|G'| = |G|$  oraz

$$e(G') = e(G) - |V_i| + |V_j| - 1 > e(G)$$

$\hookrightarrow$  więc  $(r-1)$ -dzielny graf z  $n$  wierzchołkami i największą liczbą krawędzi będzie miał klasy wierzchołkow tak bliskie rozmiarem jak możliwe

**Turán graph**  $T_r(n)$  for  $n \geq r \geq 1$  is a complete  $r$ -partite graph of order  $n$  with all vertex classes of size  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  or  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ . We denote  $e(T_r(n))$  as  $t_r(n)$ .

**Graf Turána**  $T_r(n)$  dla  $n \geq r \geq 1$  to pełny  $r$ -dzielny graf stopnia  $n$  ze wszystkimi klasami wierzchołkow o rozmiarze  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  lub  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ . Oznaczamy  $e(T_r(n))$  jako  $t_r(n)$ .

Some observations:

↔ If  $T_r(n) \simeq G - \{e\}$  for some  $e \in E(G)$ , then  $G$  is not  $K_{r+1}$ -free.

↔ If  $r$  divides  $n$ , then we have

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

otherwise vertices in large classes have **minimal degree**,  $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$ , and vertices in small classes have **maximal degree**,  $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ . This implies that always

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

↔  $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$  where  $v \in T_r(n)$  is a vertex of minimal degree (any if  $r|n$  or one of the vertices in large classes).

$$\leftrightarrow t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$$

↔ Let us say that we want to create a  $K_{r+1}$ -free graph  $G$  by adding a vertex  $v$  to  $T_r(n-1)$  and  $m$  edges with  $m$  being as large as possible. We know that  $v$  cannot be adjacent to a vertex in every class so we have

$$m = d_G(v) \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

with equality iff  $G$  is complete  $r$ -partite (obtained by adding  $v$  anywhere if  $r|(n-1)$  or to one of the small classes.)

Kilka obserwacji:

↔ Jeśli  $T_r(n) \simeq G - \{e\}$  dla pewnego  $e \in E(G)$ , wtedy  $G$  nie jest  $K_{r+1}$ -free????.

↔ Jeśli  $r$  dzieli  $n$ , to wtedy

$$\delta(T_r(n)) = d(T_r(n)) = \Delta(T_r(n)) = n - \frac{n}{r},$$

w przeciwnym wypadku wierzchołki w dużych klasach mają **najmniejszy stopień**,  $\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$ , i wierzchołki w małych klasach mają **największy stopień**,  $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ . To implikuje, że zawsze

$$\delta(T_r(n)) = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor$$

$$\Delta(T_r(n)) = \lceil d(T_r(n)) \rceil$$

↔  $T_r(n-1) \simeq T_r(n) - \{v\}$  gdzie  $v \in T_r(n)$  jest wierzchołkiem najmniejszego stopnia (każdy jeśli  $r|n$ , wpp jeden z wierzchołków w dużych klasach).

$$\leftrightarrow t_r(n-1) = t_r(n) - \delta(T_r(n))$$

↔ Powiedzmy, że chcemy stworzyć  $K_{r+1}$ -free graf  $G$  poprzez dodanie wierzchołka  $v$  do  $T_r(n-1)$  i  $m$  krawędzi, gdzie  $m$  jest największe możliwe. Wiemy, że  $v$  nie może być obok wierzchołków w każdej klasie, więc

$$m = d_G(v) \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil,$$

z **rownoscia** iff  $G$  jest pełnym grafem  $r$ -dzielnym (otrzymanym przez dodanie  $v$  gdziekolwiek jeśli  $r|(n-1)$  lub do jednej z małych klas).

### Turán's Theorem

Let  $n \geq r \geq 1$  and let  $G$  be a  $K_{r+1}$ -free graph with  $|G| = n$  and  $e(G) \geq t_r(n)$ . Then  $G \simeq T_r(n)$ .

[ 🇬🇧 ] [ 🇵🇱 ]

[ 🇬🇧 ]

Maybe later, dunno

[ 🇵🇱 ]

Użyjemy indukcji na  $n$ .

Jeśli  $n = r$ , to  $T_r(n) \simeq K_r$  i mamy

$$\binom{n}{2} = t_r(n) \leq e(G) \leq \binom{n}{2}$$

i z tego  $T_r(n) \simeq G$ .

Niech teraz  $n > r$ . Wybierzmy podzbiór  $E' \subseteq E(G)$  taki, że  $|E'| = e(G) - t_r(n)$  i niech  $H = G - E'$ , czyli  $e(H) = t_r(n)$ . Wtedy mamy

$$d(H) = \frac{2e(H)}{n} = \frac{2t_r(n)}{n} = d(T_r(n)).$$

Wtedy

$$\delta(H) \leq \lfloor d(H) \rfloor = \lfloor d(T_r(n)) \rfloor = \delta(T_r(n))$$

gdzie ostatnia równość wynika z obserwacji.

Wybierzmy teraz  $v \in H$  taki, że  $d(v) = \delta(H)$  i niech

$$K = H - \{v\}.$$

Wtedy  $K$  jest  $K_{r+1}$ -wolne.  $|K| = n - 1$  i

$$e(K) = e(H) - d_H(v) = t_r(n) - \delta(H) \geq t_r(n) - \delta(T_r(n)) = t_r(n-1),$$

### Twierdzenie Turána

Niech  $n \geq r \geq 1$  i niech  $G$  będzie  $K_{r+1}$ -wolnym grafem z  $|G| = n$  i  $e(G) \geq t_r(n)$ . Wtedy  $G \simeq T_r(n)$ .

gdzie ostatnia równość wynika z obserwacji. W takim razie, poprzez hipotezę indukcyjną, wiemy, że

$$K \simeq T_r(n-1).$$

W szczególności, z tego wynika, że

$$e(K) = t_r(n-1)$$

i w takim razie

$$d_H(v) = \delta(T_r(n))$$

wiec z kolejnej obserwacji mamy, że  $H \simeq T_r(n)$ .

W końcu, ponieważ  $V(H) = V(G)$  oraz  $E(H) = E(G) - E' \subseteq E(G)$  i  $G$  jest  $K_{r+1}$ -wolne, to z obserwacji mamy  $|E'| = 0$  i

$$G \simeq H \simeq T_r(n).$$

## 2.2 Complete bipartite subgraphs

**Jensen's Inequality:**  $a < b \in \mathbb{R}$  and  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is convex. Then

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

for all  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ .

A particular case of Jensen's Inequality is

$$b_t(x) = \begin{cases} \binom{x}{t} = \frac{1}{t!} x(x-1)\dots(x-t+1) & x \geq t-1 \\ 0 & \end{cases}$$

**Nierówność Jensena:**  $a < b \in \mathbb{R}$  i  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła. Wtedy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

dla wszystkich  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ .

Specjalnym przypadkiem nierówności Jensena jest

$$b_t(x) = \begin{cases} \binom{x}{t} = \frac{1}{t!} x(x-1)\dots(x-t+1) & x \geq t-1 \\ 0 & \end{cases}$$

**t-fan** is a graph  $H$  such that  $H \simeq K_{1,t}$ .

For any  $t \geq 2$ , there exists a function  $f = f_t : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$  with  $f(n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$ , such that if  $G$  is a  $K_{t,t}$ -free graph with  $|G| = n$  then  $e(G) \leq f(n)$ .

**t-wachlarzem** jest graf  $H$  taki, że  $H \simeq K_{1,t}$ .

Dla dowolnego  $t \geq 2$  istnieje funkcja  $f = f_t : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$  z  $f(n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$ , taka, że jeśli  $G$  jest  $K_{t,t}$ -wolnym grafem z  $|G| = n$ , to  $e(G) \leq f(n)$ .

[  ] [  ]

[  ]

DUNNO

[  ]

Niech  $G$  będzie  $K_{t,t}$ -wolnym grafem z  $|G| = n \geq 1$  i niech  $e(G) = m$ . Niech  $k$  będzie ilością  $t$ -wachlarzy w  $G$ .

Każdy wierzchołek  $v \in G$  jest wierzchołkiem stopnia  $t$  dla dokładnie  $\binom{d(v)}{t} = b_t(d(v))$   $t$ -grafów w  $G$ , implikując, że

$$k = \sum_{v \in G} b_t(d(v)) \geq n \cdot b_t\left(\frac{1}{n} \sum_{v \in G} d(v)\right) = n \cdot b_t\left(\frac{2m}{n}\right),$$

gdzie środkowa nierówność wynika z nierówności Jensena, a następująca po niej równość - z handshaking lemma. Z drugiej strony, ponieważ  $G$  jest  $K_{t,t}$ -wolnym grafem, dowolny zbiór  $t$  wierzchołków w  $G$  jest wierzchołkiem stopnia 1 w co najwyżej  $(t-1)$   $t$ -wachlarzach w  $G$ . To implikuje, że

$$k \leq \binom{n}{t} (t-1) \leq \frac{n^t}{t!}.$$

Ponieważ  $tn = O(n^{2-\frac{1}{t}})$ , to bez straty ogólności możemy założyć, że  $m \geq tn$  i z tego dostajemy

$$\frac{2m}{n} \geq \frac{m}{n} + y \geq t.$$

Z nierówności Jensena dostajemy

$$k \geq n \binom{\frac{2m}{n}}{t} \geq \frac{n \left( \left( \frac{2m}{n} \right)^t - t + 1 \right)}{t!} > \frac{n}{t!} \left( \frac{m}{n} \right)^t = \frac{m^t}{n^{t-1} t!}.$$

To w połączeniu z przykładem 2.4. ze skryptu, którego nie chce mi się przepisywać, daje  $m^t \leq n^{2t-1}t$ , czyli

$$m \leq \sqrt[t]{tn^{2-\frac{1}{t}}}.$$

Czyli funkcja

$$f_t(n) = \max(tn, \sqrt[t]{tn^{2-\frac{1}{t}}})$$

spełnia warunki twierdzenia.

Theorem above is similar to the [Zarankiewicz problem](#), which, given  $n \geq t \geq 2$ , asks about the smallest number  $z_t(n)$  such that any  $K_{t,t}$ -free graph  $G$  with  $n$  vertices in each class has  $e(G) \leq z_t(n)$ . We call  $z_t(n)$  [Zarankiewicz numbers](#) and the theorem above implies that

$$z_t(n) \leq f_t(2n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$$

Twierdzenie powyżej jest podobne do [problemu Zarankiewicza](#), który, mając dane  $n \geq t \geq 2$ , pyta o najmniejszą liczbę  $z_t(n)$  taką, że dowolny  $K_{t,t}$ -wolny graf  $G$  z  $n$  wierzchołkami w każdej klasie ma  $e(G) \leq z_t(n)$ . Liczby  $z_t(n)$  nazywamy liczbami [liczbami Zarankiewicza](#) i twierdzenie wyżej implikuje, że

$$z_t(n) \leq f_t(2n) = O(n^{2-\frac{1}{t}})$$

## 2.3 Arbitrary subgraphs

[Forbidden subgraph problem](#): given a graph  $H$ , how many edges can a  $H$ -free graph of order  $n$  have?

$$ex(n; H) = \max\{e(G) : G - H\text{-free graph with } |G| = n\}.$$

From previous theorems we know that:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow ex(n; K_{r+1}) &= t_r(n) \text{ and } ex(n; K_{r+1}) \sim \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r}) \\ \hookrightarrow ex(n; K_{t,t}) &= O(n^{2-\frac{1}{t}}) \end{aligned}$$

Let us write

$$e(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}$$

and proof that for  $n \geq 2$  the sequence

$$\left(\frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

converges.

[  ] [  ]

[  ]

DUNNO

[  ]

Ciąg  $(x_n)_{n=2}^{\infty}$  jest ograniczony od dołu przez 0, więc wystarczy pokazać, że nie jest to ciąg rosnący. Niech  $n \geq 3$  i niech  $G$  będzie  $H$ -wolnym grafem z  $|G| = n$  oraz  $e(G) = ex(n; H)$ . Wtedy dla dowolnego  $v \in G$  graf  $G - \{v\}$  jest  $H$ -wolny i ma rząd  $n - 1$ , implikując, że

$$e(G - \{v\}) \leq ex(n - 1, H).$$

Z drugiej strony, dowolna krawędź  $uw \in E(G)$  jest używana dokładnie  $n - 2$  grafach  $G - \{v\}$  dla  $v \in G$  (w tych, gdzie  $v \notin \{u, w\}$ ). To z kolei implikuje, że

$$(n - 2)e(G) = \sum_{v \in G} e(G - \{v\})$$

i z tego mamy

$$x_n = \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}} = \frac{2e(G)}{n(n - 1)} = \sum_{v \in G} \frac{2e(G - \{v\})}{n(n - 1)(n - 2)} \leq \frac{2ex(n - 1; H)}{(n - 1)(n - 2)}$$

[Problem zakazanego podgrafu](#): mając dany graph  $H$ , ile krawędzi może mieć  $H$ -wolny graf rzędu  $n$ ?

$$ex(n; H) = \max\{e(G) : G - H\text{-wolny graf z } |G| = n\}.$$

Z poprzednich twierdzeń wiemy, że:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow ex(n; K_{r+1}) &= t_r(n) \text{ oraz } ex(n; K_{r+1}) \sim \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r}) \\ \hookrightarrow ex(n; K_{t,t}) &= O(n^{2-\frac{1}{t}}) \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$e(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}$$

i udowodnijmy, że dla  $n \geq 4$ , ciąg

$$\left(\frac{ex(n; H)}{\binom{n}{2}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

jest zbieżny.



czyli ciąg nie jest rosnący, a więc musi do czegoś zbiegać.

**Chromatic number** of a graph  $H$  [ $\chi(H)$ ] is the smallest integer  $r \geq 1$  such that  $H$  is  $r$ -partite.

#### Erdős-Stone Theorem

Let  $k, r$  be integers with  $k - 1 \geq r \geq 1$  and let  $\varepsilon > 0$ . Then there exists an integer  $N$  such that for all  $n \geq N$ , if  $G$  is a graph with  $|G| = n$  and  $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \binom{n}{2}$ , then  $T_{r+1}(k) \leq G$ .

No proof for your stupid arse.

Let  $H$  be a graph with  $e(H) \geq 1$ . Then  $ex(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$

[  ] [  ]

[  ]

DUNNO

[  ]

Niech  $r_{\chi(H)} - 1$ , wybierzmy  $k$  takie, że  $H \leq T_{r+1}(k)$  (na przykład możemy wziąć  $k = (r + 1)|H|$ ) i niech  $\varepsilon > 0$ . Oznaczmy przez  $N$  liczbę całkowitą z twierdzenia Erdősa-Stone'a. Wtedy dla dowolnego  $n \geq N$  i dowolnego  $H$ -wolnego grafu  $G$  z  $|G| = n$  wiemy, że  $G$  jest również  $T_r(K)$ -wolny i z tego powodu

$$e(G) < (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \binom{n}{2}.$$

Z tego wiemy, że  $ex(n; H) < (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \binom{n}{2}$  dla wszystkich  $N \geq N$ , a więc

$$ex(H) \leq 1 - \frac{1}{r} + \varepsilon.$$

Ale ponieważ  $\varepsilon > 0$  był z dowolnie mały, to mamy

$$ex(H) \leq 1 - \frac{1}{r}.$$

Z drugiej strony dla dowolnego  $n \geq r$  graf  $T_r(n)$  jest  $H$ -wolny, bo  $H$  nie jest  $r$ -dzielny i mamy  $t_r(n) \sim (1 - \frac{1}{r}) \binom{n}{2}$ , implikując że  $ex(H) \geq 1 - \frac{1}{r}$ .

**Upper density** [ $ud(G)$ ] of an infinite graph  $G$  is defined as:

$$ud(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} : H \leq G, |H| = n \right\}$$

In an infinite graph  $G$  we have either  $ud(G) = 1$  or  $ud(G) = 1 - \frac{1}{r}$  for some  $r \geq 1$ .

[  ] [  ]

[  ]

DUNNO

[  ]

Niech  $x_n$  będzie ciągiem takim, że

$$x_n = \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} : H \leq G, |H| = n \right\}.$$

Wystarczy pokazać, że dla każdego  $r \geq 1$ , jeśli  $ud(G) > 1 - \frac{1}{r}$ , wtedy tak naprawdę  $ud(G) \geq 1 - \frac{1}{r+1}$ .

Załóżmy, że  $ud(G) > 1 - \frac{1}{r}$  i wybierzmy  $\varepsilon > 0$  taki, że

$$ud(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n > 1 - \frac{1}{r} + \varepsilon).$$

**Liczba chromatyczna** grafu  $H$  [ $\chi(H)$ ] to najmniejsza liczba całkowita  $r \geq 1$  taka, że  $H$  jest  $r$ -dzielny.

#### Twierdzenie Erdősa-Stone'a

Niech  $k, R$  będą liczbami całkowitymi z  $k - 1 \geq r \geq 1$  i niech  $\varepsilon > 0$ . Wtedy istnieje liczba całkowita  $N$  taka, że dla każdego  $N \geq N$ , jeżeli  $G$  jest grafem z  $|G| = n$  i  $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \binom{n}{2}$ , wtedy  $T_{r+1}(k) \leq G$ .

Nie ma dowodu dla twojej głupiej dupy.

Niech  $H$  będzie grafem z  $e(H) \geq 1$ . Wtedy  $ex(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$ .

**Górna gęstość** [ $ud(G)$ ] nieskończonego grafu  $G$  jest zdefiniowana jako:

$$ud(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} \max \left\{ \frac{e(H)}{\binom{n}{2}} : H \leq G, |H| = n \right\}$$

Dla nieskończonego grafu  $G$  następuje albo  $ud(G) = 1$  albo  $ud(G) = 1 - \frac{1}{r}$  dla pewnego  $r \geq 1$ .

Wtedy możemy znaleźć ciąg  $(H_l)_{l=1}^{\infty}$  podgrafów  $G$  takich, że

$$e(H_l) \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \frac{|H_l|}{2}$$

dla wszystkich  $l$  oraz  $|H_l| \rightarrow \infty$  razem z  $l \rightarrow \infty$ . Z twierdzenia Erdősa-Stone'a mamy, że  $T_{r+1}(n) \leq G$  dla wszystkich  $n \geq r+1$ . To z kolei pociąga fakt, że

$$x_n \geq \frac{t_{r+1}(n)}{\binom{n}{2}}$$

dla wszystkich  $n \geq r+1$ . Z tego wynika, że

$$ud(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{r+1}(n)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{r+1}$$

tak jak chcieliśmy.

## 3 Ramsey Theory

### 3.1 Ramsey theorem

In graph  $G$  we define a  $k$ -edge-coloring for  $k \geq 2$  is a function

$$c : E(G) \rightarrow [k]$$

A subgraph  $H \leq G$  is **monochromatic** if  $c|_{E(H)}$  has a constant value.

The question in this chapter is whether or not we can find a monochromatic graph  $K_r$  given a  $k$ -edge coloring of  $K_n$ ?

W grafie  $G$  definiujemy  $k$ -kolorowanie krawędzi dla  $k \geq 2$  jako funkcję

$$c : E(G) \rightarrow [k]$$

Podzbiór  $H \leq G$  jest **monochromatyczny**, jeżeli  $c|_{E(H)}$  ma stałą wartość.

Pytanie jakie ten rozdział stawia to czy możemy znaleźć monochromatyczny graf  $K_r$  mając dane  $k$ -kolorowanie  $K_n$ ?

**Ramsey number**  $R(s, t)$  is the smallest  $n$  (if it exists) such that any red/blue edge coloring of  $K_n$  has a red  $K_s$  or a blue  $K_t$ .

**Ramsey's theorem** - let  $s, t \geq 2$ , then  $R(s, t)$  exists. Moreover, if  $s, t > 2$  then  $R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$ .

**Liczba Ramseya**  $R(s, t)$  to najmniejsze takie  $n$  (pod warunkiem, że istnieje) takie, że dla dowolnego kolorowania na czerwono i niebiesko  $K_n$  posiada czerwone  $K_s$  albo niebieskie  $K_t$ .

**Twierdzenie Ramseya** - niech  $s, t \geq 2$ , wtedy  $R(s, t)$  istnieje. Co więcej, jeżeli  $s, t > 2$ , to  $R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$ .

[  ] [  ]

[  ]

By induction on  $s + t$ . The base cases is when  $s = 2$  or  $t = 2$ .

When  $s = 2$  we have  $R(s, t) = t$  because either have a red edge of color red or we have the whole  $K_t$  is blue.

When  $t = 2$  similarly.

Now, when  $s, t > 2$ , let  $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$  and let us color a  $K_n$ . Let us take any  $v \in K_n$ . Then there are

$$R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1$$

edges incident to  $v$ . Therefore, either  $R(s-1, t)$  of them are red or  $R(s, t-1)$  are blue. Without loss of generality, let us assume that there are  $R(s-1, t)$  edges

$$\{vw : w \in A\}$$

are red, where  $A \subseteq V(K_n)$ ,  $|A| = R(s-1, t)$ . Then we have either a red  $K_{s-1}$  inside  $A$  to which we add the red edges to  $v$  to get a red  $K_s$ , or we have a blue  $K_t$ . Analogous proof for the other number.

[  ]

Indukcja na  $s + t$ . Przypadek bazowy jest kiedy  $s = 2$  lub  $t = 2$ .

Jeśli  $s = 2$ , to mamy  $R(s, t) = t$ , bo albo znajdziemy czerwoną krawędź, albo całość jest niebieska.

Analogicznie dla  $t = 2$ .

Teraz, kiedy  $s, t > 2$ , niech  $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$  i pokolorujmy  $K_n$ . Weźmy dowolny  $v \in K_n$ . Wtedy mamy

$$R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1$$

krawędzi wychodzących z  $v$ . W takim razie albo  $R(s-1, t)$  z nich jest czerwonych albo  $R(s, t-1)$  jest niebieskich. Bez straty ogólności założmy, że mamy  $R(s-1, t)$  krawędzi

$$\{vw : w \in A\}$$

czerwonych, gdzie  $A \subseteq V(K_n)$ ,  $|A| = R(s-1, t)$ . Wtedy mamy albo czerwone  $K_{s-1}$  wewnątrz  $A$ , do którego dodajemy wszystkie czerwone krawędzi do  $v$  żeby dostać czerwone  $K_s$ , albo mamy niebieskie  $K_t$ . Analogiczny dowód dla drugiego przypadku.

### 3.2 Ramsey but no restrictions on colorzzz

Let  $k, s_1, \dots, s_k \geq 2$ . The Ramsey number  $R(s_1, \dots, s_k)$  is the smallest number  $n$  such that any  $k$ -edge coloring on graph  $K_n$  contains at least one of  $K_{s_1}, \dots, K_{s_k}$  monochromatic graphs.

Similar argument:  $R(s, t, u) \leq R(s, t, u-1) + R(s, t-1, u) + R(s-1, t, u)$  and so on for more colors.

**Multicolor Ramsey Theorem** - let  $k, s_1, \dots, s_k \geq 2$ . Then  $R(s_1, \dots, s_k)$  exists and if  $k > 2$  we have

$$R(s_1, \dots, s_k) \leq R(s_1, \dots, s_{k-2}, R(s_{k-1}, s_{k-2})).$$

[  ] [  ]

[  ]

Induction on  $k$ . If  $k = 2$ , then we have the standard Ramsey theorem.

Now we have  $k > 2$ . Let  $n = R(s_1, \dots, s_{k-2}, R(s_{k-1}, s_k))$ . We will be coloring  $K_n$ . Let  $s_{k-1}$  be light blue and  $s_{k-2}$  be dark blue, while the remaining colors be non-blue. We will "merge" blue colors. Then we get a  $k - 1$  coloring.

We know that in  $K_n$  contains a  $K_{s_i}$  coloring for  $i \in [k - 2]$  and a blue  $K_{R(s_{k-2}, s_k)}$ . By the definition of Ramsey numbers, then if we want to choose in the latter one two colors, we will always find a  $s_{k-2}$  light blue coloring or a  $s_k$  dark blue coloring. Which is the end, my fellow kidz.

## 4 Architecture shit

### 4.1 Planar graphs

Admissible  $k$ -coloring is a map  $c : V(G) \rightarrow [k]$  such that  $c(v) \neq c(w)$  for any  $v \sim_G w$ . Therefore,  $G$  has an admissible  $k$ -coloring  $\iff \chi(G) \leq k$ .

For a graph  $G$  and a surface  $X$  we can define a **drawing of  $G$  on  $X$**  as an injection  $\phi : V \rightarrow X$  along with a collection of continuous injections  $\gamma_e : [0, 1] \rightarrow X$  for each  $e \in E(G)$  such that:

$$\hookrightarrow (\forall e = vw) \{ \gamma_e(0), \gamma_e(1) \} = \{ \phi(v), \phi(w) \}$$

$\hookrightarrow (\forall e, f \in E(G)) (e \neq f) \implies \gamma_e((0, 1)) \cap \gamma_f((0, 1)) = \emptyset$ , meaning that edges in a drawing intersect only in shared vertices

$$\hookrightarrow (\forall e \in E(G)) \gamma_e((0, 1)) \cap \phi(V) = \emptyset$$

If a drawing of  $G$  exists, then  $G$  is planar.

Poprawne  $k$ -kolorowanie jest funkcją  $c : V(G) \rightarrow [k]$  taką, że  $c(v) \neq c(w)$  dla każdych  $v \sim_G w$ . Czyli,  $G$  posiada  $k$ -kolorowanie  $\iff \chi(G) \leq k$ .

Dla grafu  $G$  i powierzchni  $X$  możemy zdefiniować **rysunek  $G$  na  $X$**  jako iniekcję  $\phi : V \rightarrow X$  razem z rodziną ciągłych iniekcji  $\gamma_e : [0, 1] \rightarrow X$  dla każdego  $e \in E(G)$  takich, że

$$\hookrightarrow (\forall e = vw) \{ \gamma_e(0), \gamma_e(1) \} = \{ \phi(v), \phi(w) \}$$

$\hookrightarrow (\forall e, f \in E(G)) (e \neq f) \implies \gamma_e((0, 1)) \cap \gamma_f((0, 1)) = \emptyset$ , czyli krawędzie przecinają się jedynie we wspólnych wierzchołkach

$$\hookrightarrow (\forall e \in E(G)) \gamma_e((0, 1)) \cap \phi(V) = \emptyset$$

Jeżeli rysunek grafu  $G$  istnieje, wtedy  $G$  jest planarny.

A **subdivision** of graph  $G$  is obtained by adding a vertex in the middle of an edge repeatedly.

**Kuratowski's Theorem:** A graph is planar  $\iff$  it contains no subdivisions of  $K_5$  or  $K_{3,3}$  as subgraphs.

**Elementarny podpodział** (tak mówi wikipedia???) grafu  $G$  jest otrzymywany poprzez dodanie wierzchołka w środek krawędzi wielokrotnie.

**Twierdzenie Kuratowskiego:** Graf jest planarny  $\iff$  nie posiada podpodziałów  $K_5$  lub  $K_{3,3}$  jako podgrafów.

A **face** of a graph on a surface  $X$  is a smaller, enclosed region in which  $X$  was divided by edges of the graph.

**Euler's Formula:** let  $G$  be a connected planar graph with  $|G| = n$  and  $e(G) = m$  and let us suppose that there exists a drawing of  $G$  with  $l$  faces. Then  $n - m + l = 2$ .

**Five Color Theorem:** if  $G$  is planar, then  $\chi(G) \leq 5$ . This was later strengthen with **Four Color Theorem** which said  $G$  - planar  $\implies \chi(G) \leq 4$ .

**Ściana** grafu na powierzchni  $X$  jest mniejszym, zamkniętym rejonem na który  $X$  został podzielony przez krawędzie grafu.

**Formuła Euler'a:** niech  $G$  będzie spójnym planarnym grafem z  $|G| = n$  i  $e(G) = m$  i założmy, że istnieje rysunek  $G$  z  $l$  ścianami. Wtedy  $n - m + l = 2$ .

**Twierdzenie o 5 kolorach:** jeżeli  $G$  jest planarny, to  $\chi(G) \leq 5$ . Twierdzenie to zostało później wzmocnione przez **Twierdzenie o 4 kolorach**, które mówi, że  $G$  - planarny  $\implies \chi(G) \leq 4$ .

### 4.2 Kuratowski's Theorem

Skipped

### 4.3 Graphs on surfaces

**Connected sum**  $[X \# Y]$  of surfaces  $X$  and  $Y$  without boundary is a surface obtained by removing open disks from  $X$  and  $Y$  to get surfaces  $X'$  and  $Y'$  with boundary and gluing  $X'$  and  $Y'$  along their boundary circles.

**Uspójniona suma** (????)  $[X \# Y]$  przestrzeni  $X$  oraz  $Y$  bez brzegu to przestrzeń otrzymana poprzez usunięcie otwartych dysków z  $X$  oraz  $Y$  w celu otrzymania  $X'$  oraz  $Y'$  z brzegiem oraz sklejeniu  $X'$  z  $Y'$  wzdłuż ich brzegowych kółeczek.

**Classification Theorem of Closed Surfaces:** let  $X$  be a closed surfaces. Then  $X$  is homeomorphic to one of:

- ↪ the sphere:  $\Sigma_0 := \mathbb{S}^2$  of genus 0
- ↪ the connected sum  $\Sigma_g := \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  of  $g \geq 1$  copies of the torus  $\mathbb{T}^2$  also known as the closed orientable surface of genus  $g$  or
- ↪ the connected sum  $N_g := \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$  of  $g \geq 1$  copies of the real projective plane  $\mathbb{RP}^2$  also known as the closed non-orientable surface of genus  $g$ .

**Twierdzenie o klasyfikacji zamkniętych sum:** niech  $X$  będzie zamkniętą przestrzenią. Wtedy  $X$  jest homeomorficzne do jednego z:

- ↪ kuli:  $\Sigma_0 := \mathbb{S}^2$
- ↪ uszójnioną sumą  $\Sigma_g := \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$   $g \geq 1$  kopii torusa  $\mathbb{T}^2$  również znana jako zamknięta orientowalna przestrzeń genusu  $g$
- ↪ uszójnioną sumą  $N_g = \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$   $g \geq 1$  kopii rzeczywistej płaszczyzny rzutowej  $\mathbb{RP}^2$ , również znane jako nieorientowalna przestrzeń genusu  $g$ .

**Formuła Eulera=Poincaré:** niech  $G$  będzie grafem z  $|G| = n$  i  $e(G) = m$  i załóżmy, że istnieje rysunek  $G$  na zamkniętej przestrzeni  $X$  z  $l$  ścianami. Wtedy  $n - m + l \geq \epsilon(X)$ , gdzie  $\epsilon(X)$  jest charakterystyką Eulera przestrzeni  $X$ , zdefiniowaną jako  $\epsilon(\sigma_g) = 2 - 2g$  oraz  $\epsilon(N_g) = 2 - g$ .