

Miara i całka

speedrun przed terminem 0

by a MEEEE

21.03.2137

ROZDZIAŁ 1

$\text{Bor}(\mathbb{R})$ to najmniejsze σ -ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte z \mathbb{R}

Dla $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ funkcję $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy **addytywną funkcją zbioru** (*miarą skończenie addytywną*), jeżeli

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mu(\emptyset) &= 0 \\ \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset &\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru to μ takie, że dla parami rozłącznych A_n zachodzi $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$. Jeżeli nie są rozłączne, to $\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$.

Następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mu &\text{ przeliczalnie addytywna} \\ \Leftrightarrow \mu &\text{ jest ciągła z dołu, czyli jeśli } A_n \uparrow A, \text{ to zachodzi} \\ \lim_n \mu(A_n) &= \mu(A) \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ 2

Funkcja Σ -mierzalna $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja, która dla każdego $f^{-1}[B] \in \Sigma$ spełnia $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$, równoważnie jeżeli $\mathcal{G} \subseteq \text{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że $\sigma(\mathcal{G}) = \text{Bor}(\mathbb{R})$, to wystarczy dla każdego $G \in \mathcal{G}$ $f^{-1}[G] \in \Sigma$.

Każdy z poniższych pociąga mierzalność:

$$\begin{aligned} \{x : f(x) < t\} &\in \Sigma \\ \{x : f(x) \leq t\} &\in \Sigma \\ \{x : f(x) > t\} &\in \Sigma \\ \{x : f(x) \geq t\} &\in \Sigma \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest Σ -mierzalna, a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest Σ -mierzalna.

Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

Każdą Σ -mierzalną funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.

Funkcja prosta to funkcja o skończonym zbiorze wartości, czyli kombinacja liniowa skończenie wielu **funkcji charakterystycznych**

Ciąg funkcji mierzalnych jest **zbieżny prawie wszędzie**, jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ poza zbiorem miary zero.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mu &\text{ jest ciągła z góry, jeśli } A_n \downarrow A \text{ to } \lim_n \mu(A_i) = \mu(A) \\ \Leftrightarrow \mu &\text{ jest ciągła z góry na zbiorze } \emptyset, \text{ czyli dla } A_n \downarrow \emptyset \\ &\text{ mamy } \lim_n \mu(A_n) = 0 \end{aligned}$$

$[a_n, b_n]$ jest ciągiem parami rozłącznych przedziałów zawartych w $[a, b]$, to $\sum (b_n - a_n) \leq b - a$. Natomiast, jeżeli $[a, b] \subseteq \bigcup [a_n, b_n]$, to $b - a \leq \sum (b_n - a_n)$.

μ jest **σ -skończona** na pierścieniu \mathcal{R} , jeżeli istnieją X_n takie, że $X = \bigcup X_n$ i $\mu(X_n) < \infty$.

Twierdzenie o konstrukcji miary: funkcja σ -skończona oraz przeliczalnie addytywna rozszerza się do jednoznacznie do miary na $\sigma(\mathcal{R})$.

Dla każdego $A \in \sigma(\mathcal{R})$ o $\mu(A) < \infty$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $R \in \mathcal{R}$ takie, że $\mu(A \Delta R) < \varepsilon$.

Dla każdej λ -mierzalnej funkcji f istnieje borelowska funkcja g taka, że $f = g$ λ -prawie wszędzie.

Jeżeli $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ o $\mu(A) < \varepsilon$ i f_n jest jednostajnie zbieżny do f na zbiorze A^c .

Ciąg funkcji mierzalnych jest **niemal jednostajnie zbieżny**, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg f_n zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.

Mówimy, że ciąg jest **zbieżny według miary**, jeżeli dla każdego ε $\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

\Leftrightarrow Zbieżny niemal jednostajnie \Rightarrow zbieżny według miary.

\Leftrightarrow Zbieżny prawie wszędzie w mierze skończonej \Rightarrow zbieżny według miary.

Twierdzenie Riesz: jeżeli ciąg funkcji spełnia **warunek Cauchy'ego według miary**, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

to f_n jest zbieżny według miary do pewnego f oraz istnieje podciąg liczb naturalnych $n(k)$ taki, że $f_{n(k)}$ jest zbieżny prawie wszędzie oraz według miary.

ROZDZIAŁ 3

Catkę po funkcji prostej $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ definiujemy jako

$$\int_X f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Dla nieujemnej mierzalnej funkcji f definiujemy

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f \right\},$$

czyli jeżeli $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ jest ciągiem funkcji prostych takich, że $\lim_n s_n = f$ prawie wszędzie, to

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X s_n d\mu.$$

Funkcja mierzalna jest **całkowalna**, jeżeli $\int_X |f| d\mu < \infty$, wtedy definiujemy catkę wzorem $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ dla $f = f^+ - f^-$ nieujemnych.

Dla f, g całkowalnych i h mierzalnej:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int_X (af + gb) d\mu &= a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu \\ \hookrightarrow h &= 0 \text{ prawie wszędzie, to } \int_X h d\mu = 0 \\ \hookrightarrow f &\leq g \text{ prawie wszędzie, to } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \\ \hookrightarrow \int_X (f + g) d\mu &\leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu \\ \hookrightarrow a \leq f &\leq b \text{ prawie wszędzie, to } a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X) \\ \hookrightarrow \text{dla } A, B \in \Sigma \text{ jeżeli } A \cap B &= \emptyset, \text{ to } \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \end{aligned}$$

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej: niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych takich, że $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ zbieżnych prawie wszędzie do $f = \lim_n f_n$

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Lemat Fatou: dla dowolnego ciągu funkcji nieujemnych f_n zachodzi

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu = \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

Twierdzenie Lesbegue'a o zbieżności ograniczonej: niech f_n, g będą mierzalne, że dla każdego n $|f_n| \leq g$ zachodzi prawie wszędzie przy czym $\int_X g d\mu < \infty$. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie, to

$$\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\lim_n \int_X f d\mu = \int_X f d\mu$$

Jeżeli teraz $\mu(X) < \infty$ oraz f_n są wspólnie ograniczone i $\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

Jeżeli f jest mierzalna i nieujemna, to funkcja $\nu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

jest miarą na Σ .

Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest λ -mierzalna i obie catki są sobie równe: $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda$.

ROZDZIAŁ 4

Niech (X, Σ) i (Y, Θ) będą przestrzeniami z Σ, Θ będącymi σ -ciałami. W $X \times Y$ możemy zdefiniować następujące σ -ciało:

$$\Sigma \otimes \Theta = \sigma(\{A \times B : A \in \Sigma, B \in \Theta\}),$$

wtedy $\Sigma \otimes \Theta$ jest **produktem σ -ciał** Σ i Θ .

Zbiór $F \subseteq X \times Y$ należy do ciała prostokątów na Σ, Θ wtw $F = \bigcup A_i \times B_i$ dla $A_i \in \Sigma$ i $B_i \in \Theta$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, to dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$ definiujemy **cięcia pionowe i poziome** $E_x = \{z \in Y : (x, z) \in E\}$ i $E^y = \{z \in X : (z, y) \in E\}$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, a funkcja $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$ -mierzalna, to funkcja f_x jest Θ -mierzalna, a f^y jest Σ -mierzalna.

$$\text{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \text{Bor}(\mathbb{R}) = \text{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Miarę na produkcie przestrzeni (X, Σ, μ) i (Y, Θ, ν) definiujemy:

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Na σ -ciele $\Sigma \otimes \Theta$ istnieje jedyna miara spełniająca dla każdego $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

a dla dowolnego $E \in \Sigma \otimes \Theta$ funkcja $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ są mierzalne i zachodzą wzory:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Twierdzenie Fubiniego: jeżeli funkcja $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$ -mierzalna oraz f jest nieujemna lub f jest $\mu \otimes \nu$ -całkowalna, to wtedy

$$I : x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

$$J : y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

są mieralne względem Σ i odpowiednio Θ , oraz

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)\end{aligned}$$

Czyli możemy bezkarnie zamieniać granice całkowania.

Jeżeli rozważamy przestrzeń metryczną (X_i, Σ_i, μ_i) dla $i = 1, \dots, n$, to na σ -ciele $\bigotimes_{i=1}^n \Sigma_i$ podzbiorów $\prod_{i=1}^n X_i$ generowanym przez wszystkie kostki mieralne $A_1 \times \dots \times A_n$, to istnieje jedyna miara $\mu = \bigotimes \mu_i$ spełniająca dla wszystkich $A_i \in \Sigma_i$

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$$

$K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - przestrzeń ciągów 0,1, wtedy możemy określić metrykę $d(x, y) = \frac{1}{n}$ gdzie n to pierwszy indeks gdzie te dwa ciągi się różnią.

Funkcja $f : K \rightarrow [0, 1]$ zadana $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n}$ jest homeomorfizmem między K a zbiorem Cantora. Dla funkcji $\psi : \mathbb{N} \supseteq A \rightarrow \{0, 1\}$ oznaczamy zbiór

$$[\psi] = \{x \in K : x(i) = \psi(i) \text{ } i \in A\}.$$

Cylindry ten postaci są otwarto-domknięte w K i stanowią bazę topologii w K . Oznaczmy przez \mathcal{C} ciało podzbiorów K generowanych przez wszystkie cylindry. Zbiór C jest w \mathcal{C} wtw istnieje n i $C' \subseteq \{0, 1\}^n$ takie, że $C = C' \times \{0, 1\} \times \dots$

Dla $C \in \mathcal{C}$ definiujemy miarę na K :

$$\nu(C) = \frac{|C'|}{2^n}$$

która spełnia własność:

$$(\forall B \in \text{Bor}(K))(\forall \varepsilon > 0)(\exists C \in \mathcal{C}) \nu(B \Delta C) < \varepsilon.$$

ROZDZIAŁ 5

Miara znakowana $\alpha : \Sigma \rightarrow [-\infty, \infty]$ to funkcja która przyjmuje co najwyżej jedną z wartości nieskończonych oraz

$$\alpha(\emptyset) = 0$$

$$\alpha\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \alpha(A_n)$$

dla każdego ciągu rozłącznych A_i .

Rozkład Hahna: jeśli α jest miarą znakowaną na σ -ciele Σ podzbiorów X , to istnieją rozłączne zbioru X^+ i X^- takie, że $X = X^+ \cup X^-$, $X = X^+ \cup X^-$ oraz dla dowolnego $A \in \Sigma$, to

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \text{jeżeli } A \subseteq X^+, \text{ to } \alpha(A) &\geq 0, \\ \Leftrightarrow \text{a jeżeli } A \subseteq X^-, \text{ to } \alpha(A) &\leq 0.\end{aligned}$$

Rozkład Jordana: jeżeli α jest miarą znakowaną na Σ , to istnieją miary α^+, α^- takie, że $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$.

Miara ν jest absolutnie ciągła względem miary μ , jeżeli $(\forall A \in \Sigma) \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Oznaczamy $\nu \ll \mu$.

Miara ν jest singularna względem miary μ , jeżeli istnieją $A, B \in \Sigma$ takie, że $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 0$ i $\nu(B) = 0$. Relację tę oznaczamy $\mu \perp \nu$.

Absolutne wahanie miary znakowanej α to $|\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$. Jeżeli α, β są określone na tym samym Σ , przyjmujemy $\alpha \ll \beta$ gdy $|\alpha| \ll |\beta|$, tak samo $\alpha \perp \beta$ jeżeli $|\alpha| \perp |\beta|$.

ν jest miarą skończoną na Σ , to dla dowolnej μ na Σ

$$\nu \ll \mu \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall A \in \Sigma) \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$$

μ, ν - skończone miary na Σ takie, że $\nu \neq 0$ i $\nu \ll \mu$. Wtedy istnieje $P \in \Sigma$ takie, że $\mu(P) > 0$ i P jest pozytywny dla miary znakowanej $\nu - \varepsilon\mu$, to znaczy $\nu(B) \geq \varepsilon\mu(B)$ dla każdego mierzonego $B \subseteq P$.

Twierdzenie Radona-Nikodyma: (X, Σ, μ) - σ -skończona przestrzeń miarowa i ν jest miarą znakowaną na Σ , że $|\nu|$ jest σ -skończona. Jeśli $\nu \ll \mu$, to istnieje $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

Funkcja f spełniająca tezę twierdzenia Radona-Nikodyma bywa oznaczana $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ i mówi się na nią pochodna Radona-Nikodyma miary ν względem miary μ .

Dla miar μ i ν jak w twierdzeniu wyżej

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

dla każdej ν -całkowalnej funkcji g .

Dla $A \in \Sigma$ w σ -skończonej przestrzeni miarowej, dla σ -ciała $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, istnieje Σ_0 -mieralna funkcja f taka, że dla każdego $B \in \Sigma_0$

$$\mu(A \cap B) = \int_B f d\mu$$

Dla μ, ν σ -skończonych miar na tym samym cielem, wtedy istnieje $\nu = \nu_a + \nu_s$ taki, że $\nu_a \ll \mu$ i $\nu_s \perp \mu$.

Jeżeli μ, ν są miarami na $\text{Bor}(\mathbb{R})$ i dla każdego $a < b$ mamy $\mu[a, b) = \nu[a, b) < \infty$, to $\mu = \nu$.

Miara Lebesgue'a-Stieltjesa λ_F : dla każdej $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lewostronnie ciągłej, niemalejącej istnieje jedyna miara λ_F określona na $\text{Bor}(\mathbb{R})$ taka, że:

$$\lambda_F[a, b) = F(b) - F(a)$$

Jeżeli F niemalejąca ma ciągłą pochodną, to dla każdej λ_F -całkowalnej g :

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} g \cdot F' d\lambda$$

ROZDZIAŁ 6

Dla dowolnych liczb dodatnich a, b, p, q takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

p -norma całkowita funkcji to $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

Nierówność Cauchy'ego-Höldera: dla dowolnych f, g i $p, q > 0$ jak wyżej zachodzi

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Nierówność Minkowskiego: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Warunki, aby $\|\cdot\|$ było normą:

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Leftrightarrow \|cx\| = |c| \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Możemy określić na podstawie normy metrykę $p(x, y) = \|x - y\|$. Jeżeli przestrzeń unormowana z taką metryką jest zupełna, to jest nazywana przestrzenią Banacha.

Symbol $L_p(\mu)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dla których $\|f\|_p < \infty$. Elementy z $L_p(\mu)$ są utożsamiane jeżeli są równe prawie wszędzie. Jest to przestrzeń Banacha.