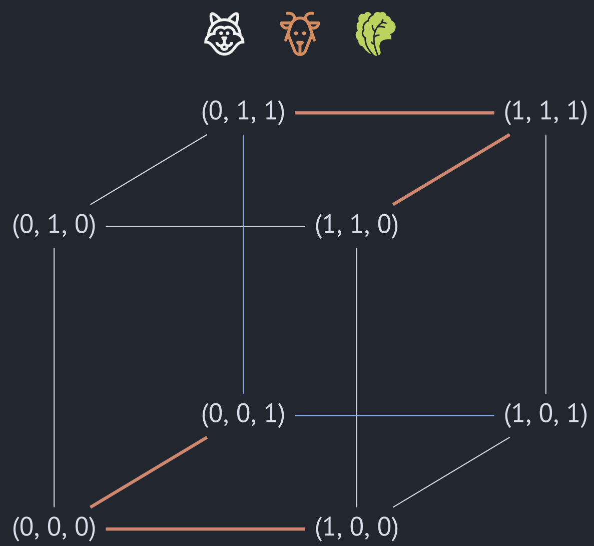
MDM Lista 9

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Najpierw przewozimy kozę, a wilka z kapustą zostawiamy na starym brzegu. Potem wracamy z pustą łódką i zabieramy kapustę. Dobijamy do docelowego brzegu, wysadzamy kapustę i zabieramy kozę. Wracamy na startowy brzeg i zostawiamy kozę, po czym szybko zabieramy wilka zanim on złapie kozę. Odstawiamy wilka na brzeg z kapustą, po czym wracamy po kozę i koniec.

Przedstawiamy ten problem za pomocą grafu, którego wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami sześcianu. Wierzchołki opiszemy trójkami (w, g, c), gdzie wartości kolejnych współrzędnych to miejsce danej postaci. w będzie oznaczać wilka, g kozę, a c to kapusta. Wartość 0 oznacza, że dane stworzonko znajduje się na wyjściowym brzegu, a wartość 1 - na brzegu docelowym.



Zastanówmy się teraz, które krawędzie są na pewno nielegalne. Krawędź $(0,0,0)--(1,0,0)$ oraz $(0,0,0)--(0,0,1)$ zostawiają odpowiednio kapustę lub wilka z kozą, więc ich na pewno nie chcemy użyć. Nie możemy też przejść z $(0,1,1)--(1,1,1)$, bo to znaczy, że dowozimy wilka na brzeg gdzie do tej pory była koza i kapusta. Tak samo ruch $(1,1,0)--(1,1,1)$ implikuje że koza przeżyła z wilkiem sam na sam.
Zostajemy z dwoma możliwymi ścieżkami od $(0,0,0)$ do $(1,1,1)$:

$$(0,0,0)--(0,1,0)--(0,1,1)--(0,0,1)--(1,0,1)--(1,1,1),$$

która jest reprezentacja mojego rozwiązania oraz

$$(0,0,0)--(0,1,0)--(1,1,0)--(1,0,0)--(1,0,1)--(1,1,1),$$

gdzie do samotnej kozy zamiast kapusty dowozimy wilka i zabieramy kozę etc.

ZAD. 2.

Rys. 1.

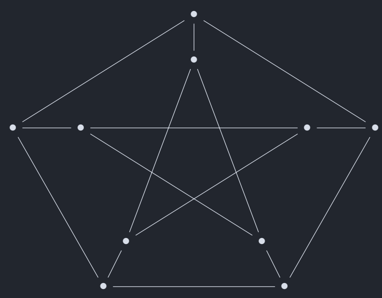
Wybierając wierzchołek z dopiskiem x możemy go umieścić na 4 różnych miejscach. Wiernie pójdzie za nim jego sąsiad z dołu, a jeden wierzchołek z drugiego skrzydełka będzie musiał wybrać jedno z pozostałych dwóch miejsc na skrzydełkach, co daje $2 \cdot 4 = 8$ automorfizmów. Niezależnie od skrzydełek możemy przekręcić lub nie pionową oś, co dodatkowo podwoi nam liczbę automorfizmów, a więc ostatecznie mamy ich

$$2 \cdot 8 = 16.$$

Rys. 2.

Zaznaczony wierzchołek może przejść na dowolny z tych 8 które są w grafie. Za nim pójdą jego sąsiedzi, których jest 3 i możemy im wybrać miejsce na $3! = 6$ sposobów. Czyli mamy $8 \cdot 6 = 48$ automorfizmów na kostce jako grafie.

ZAD. 3.



Poniżej zaprezentuję dwa rozwiązania: jedno podobne do sposobu rozwiązywania poprzedniego zadania i jedno z inspiracją zaczerpniętą z internetu:

1. Jeżeli wybierzemy jeden wierzchołek, możemy dla niego znaleźć nowe miejsce na 10 sposobów. Każdy wierzchołek ma 3 sąsiadów, więc ustawić taką trójkę możemy na $10 \cdot 3! = 60$ sposobów. I dalej u jednego sąsiada możemy obrócić jego dwóch nieokreślonych jeszcze sąsiadów między sobą, określając już w pełni nowe ustawienie grafu (wtedy sąsiedzi pozostałych dwóch sąsiadów oryginalnie wybranego grafu również się zamienią). Daje to $2 \cdot 60 = 120$ automorfizmów.

2. Podpiszmy każdy wierzchołek pewnym dwuelementowym cyklem z S_5. Takich cykli jest $\binom{5}{2} = 10$, czyli idealnie tyle ile mamy wierzchołków. Teraz chcemy, żeby każdy wierzchołek łączył się z 3 innymi, ale żeby te wierzchołki nie były ze sobą połączone. Zauważmy, że jeżeli wyrzucimy dwa elementy, to zostaną nam cykle długości dwa na zbiorze 3 elementowym i tam mamy $\binom{3}{2} = 3$ cykle długości 2. W dodatku łatwo zauważyć, że jeżeli zasadą istnienia krawędzi między wierzchołkami będzie nieprzecinanie się cykli, to wtedy sąsiedzi dowolnego wierzchołka nie będą mogli zostać ze sobą połączeni.
W takim razie dowolna permutacja z S_5 będzie nam wyznaczać automorfizm, bo jeśli (a, b) i (c, d) są niezależne, a σ jest permutacją, to

$$(\sigma(a), \sigma(b)) \text{ i } (\sigma(c), \sigma(d))$$

są nadal cyklami niezależnymi, bo σ jest bijekcją. Czyli mamy $|S_5| = 120$ możliwych automorfizmów.

ZAD. 4.

Grafy, w których liczba stopni wierzchołków jest taka sama są izomorficzne. Chcemy więc pokazać, że istnieją dokładnie 3 grafy które mają wierzchołki różnego stopnia.
Graf pełny ma każdy wierzchołek stopnia 3. Teraz możemy odciąć jedną krawędź i nie ważne w którym wierzchołku to zrobimy, dostaniemy graf dla którego dwa wierzchołki mają stopień jeden. Obcięcie dowolnej krawędzi da nam graf w którym tylko dwa wierzchołki są połączone, a usunięcie jej da graf zawierający tylko 3 punkty. Czyli mamy albo $\triangle$ albo V albo .\ albo $\therefore$.

Mamy 4 wierzchołki, ich stopień jest między 3 a 0. Korzystając z handshaking lemma wiemy, że wierzchołków nieparzystego stopnia musi być parzyście wiele.

Jeżeli największy stopień to 3:
$\hookrightarrow$ 4 wierzchołki stopnia 3 - graf pełny
$\hookrightarrow$ 3 wierzchołki stopnia 1 i jeden stopnia 3 $\hookrightarrow$ 1 wierzchołek stopnia 1, dwa stopnia 2 i jeden stopnia 3

Jeżeli największy stopień to 2:
$\hookrightarrow$ 4 wierzchołki stopnia 2
$\hookrightarrow$ 2 wierzchołki stopnia 1 i dwa stopnia 2
$\hookrightarrow$ 2 wierzchołki stopnia 1, jeden stopnia 2 i jeden stopnia 0
$\hookrightarrow$ 3 wierzchołki stopnia 2 - to jest trójkąt i wtedy mamy 4 możliwości, dlatego nie liczę grafów tworzonych z K_3

Jeżeli największy stopień to 1:
$\hookrightarrow$ 4 wierzchołki stopnia 1

Wypisywałam w ten sposób, bo szczerze nie mam ochoty rysować 15 grafów w $\LaTeX$.

ZAD. 8.

Wierzchołki grafu dwudzielnego G można podzielić na dwie klasy: W i M. Oznaczmy moc $w = |W|$ i wtedy $|M| = n - w$. Będziemy mieli najwięcej krawędzi, jeśli stopień każdego wierzchołka będzie największy. Suma stopni wierzchołków w W wynosi

$$d(W) = w \cdot (n - w)$$

natomiast dla M jest to

$$d(M) = (n - w)w.$$

Czyli suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie to

$$d(G) = d(W) + d(M) = w(n - w) + (n - w)w = 2w(n - w)$$

i będzie to największe, gdy $w = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, bo wtedy mamy $d(G)$ to około $2\left(\frac{n}{2}\right)^2$.
Wiadomo, że liczba krawędzi w grafie to

$$e(G) = \frac{d(G)}{2},$$

bo przy zliczaniu stopni wierzchołków każdą krawędź liczymy podwójnie, więc trzeba to podzielić na dwa. W takim razie dostajemy

$$e(G) = \frac{d(G)}{2} \approx \frac{n^2}{4},$$

a ponieważ liczba krawędzi grafów jest zazwyczaj liczbą całkowitą, to musimy zaokrąglić otrzymany wynik do dołu, co daje

$$e(G) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

ZAD. 9.

Jeżeli G jest spójny, to zadanie mamy z głowy. W przeciwnym wypadku istnieją $u, w \in G$ takie, że nie ma między nimi żadnej ścieżki. Czyli możemy wierzchołki G podzielić na dwa zbiory U, W takie, że $u \in U$ i $w \in U$ i dla każdego $a \in U$ i dla każdego $b \in W$ $ab \notin G$. gdyby tak nie było, to mielibyśmy w G ścieżkę u...w.
Wtedy w grafie $\overline{G}$ dostajemy prawie graf dwudzielny o klasach wierzchołków U i W takie, że dla każdego $a \in U$ i $b \in W$ mamy $ab \in \overline{G}$. Czyli jeżeli chcemy przejść między wierzchołkami $a, b \in U$ takimi, że $ab \notin \overline{G}$ to wystarczy zahaczyć o wierzchołek z W i mamy ścieżkę.

ZAD. 14.

Niech G będzie drzewem o n wierzchołkach, które nazwiemy v_i. Chcemy pokazać, że

$$\text{G jest drzewem} \iff \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2(n - 1).$$

$\Longrightarrow$

Po pierwsze zauważmy, że $e(G) = |G| - 1 = n - 1$. Można to pokazać w prosty sposób za pomocą indukcji. Jeżeli mamy drzewo o $n + 1$ wierzchołkach, to możemy obciąć jeden liść, co da nam drzewo T' o n wierzchołkach. Ilość krawędzi spada o jeden, więc $e(T') = n - 1$ z założenia indukcyjnego. Jeśli teraz dołożymy z powrotem ten liść, to dodajemy jedną krawędź i jeden wierzchołek, co daje $e(T) = (n + 1) - 1$.

Wiemy, że $e(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e(G) = 2(n - 1)$$

$\Longleftarrow$

Indukcja po n. Dla $n = 2$ mamy $\sum_{i=1}^{n} = 2(2 - 1) = 2$ czyli $e(G) = 1$ i mamy drzewo o dwóch wierzchołkach.
Teraz mamy graf o $(n + 1)$ wierzchołkach takich, że

$$\sum_{i=1}^{n+1} d(v_i) = 2n.$$

Jeżeli wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty, to mielibyśmy co najmniej jeden wierzchołek stopnia 0, co jest sprzeczne z dodatniością stopnia każdego wierzchołka. Czyli potrzebujemy co najmniej jedną parę wierzchołków stopnia 1, jeśli jeden taki wierzchołek wytniemy, to dostajemy graf G' o n wierzchołkach, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2n - 2 = 2(n - 1),$$

a więc G' jest drzewem z założenia indukcyjnego. W takim razie jak dodamy do niego wierzchołek stopnia 1, to tak naprawdę doklejamy jeden liść, więc dalej dostajemy drzewo.