# Miara i calka

speedrun przed terminem 0

by a MEEEE

21.03.2137

Funkcja $\Sigma$-mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ to funkcja, która dla każdego $f^{-1}[B] \in \Sigma$ spełnia $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, równoważnie jeżeli $\mathscr{G} \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że $\sigma(\mathscr{G}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, to wystarczy dla każdego $G \in \mathscr{G}$ $f^{-1}[G] \in \Sigma$.

Każdy z poniższych pociąga mierzalność:

$\{x : f(x) < t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \leq t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) > t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \geq t\} \in \Sigma$

Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma$-mierzalna, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma$-mierzalna.

Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

Każdą $\Sigma$-mierzalna funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Funkcja prosta to funkcja o skończonym zbiorze wartości, czyli kombinacja liniowa skończenie wielu funkcji charakterystycznych

Ciąg funkcji mierzalnych jest zbieżny prawie wszędzie, jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ poza zbiorem miary zero.

Dla każdej $\lambda$-mierzalnej funkcji f istnieje borelowska funkcja g taka, że $f = g$ $\lambda$-prawie wszędzie.

Jeżeli $f_n \to f$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ o $\mu(A) < \varepsilon$ i $f_n$ jest jednostajnie zbieżny do j na zbiorze $A^c$.

Ciąg funkcji mierzalnych jest niemal jednostajnie zbieżny, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg $f_n$ zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.

Mówimy, że ciąg jest zbieżny według miary, jeżeli dla każdego $\varepsilon$ $\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

$\hookrightarrow$ Zbieżny niemal jednostajnie $\implies$ zbieżny według miary.
$\hookrightarrow$ Zbieżny prawie wszędzie w mierze skończonej $\implies$ zbieżny według miary.

Twierdzenie Riesza: jeżeli