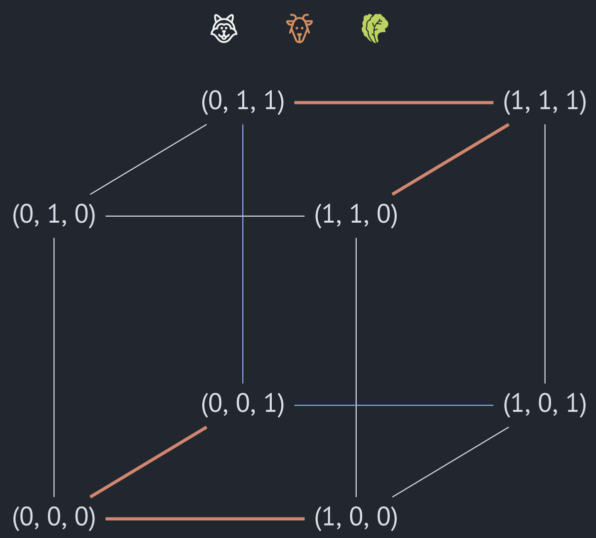
MDM Lista 9

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Najpierw przewozimy kozę, a wilka z kapustą zostawiamy na starym brzegu. Potem wracamy z pustą łódką i zabieramy kapustę. Dobijamy do docelowego brzegu, wysadzamy kapustę i zabieramy kozę. Wracamy na startowy brzeg i zostawiamy kozę, po czym szybko zabieramy wilka zanim on złapie kozę. Odstawiamy wilka na brzeg z kapustą, po czym wracamy po kozę i koniec.

Przedstawiamy ten problem za pomocą grafu, którego wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami sześcianu. Wierzchołki opiszemy trójkami (w, g, c), gdzie wartości kolejnych współrzędnych to miejsce danej postaci. w będzie oznaczać wilka, g kozę, a c to kapusta. Wartość 0 oznacza, że dane stworzonko znajduje się na wyjściowym brzegu, a wartość 1 - na brzegu docelowym.



Zastanówmy się teraz, które krawędzie są na pewno nielegalne. Krawędź $(0,0,0)--(1,0,0)$ oraz $(0,0,0)--(0,0,1)$ zostawiają odpowiednio kapustę lub wilka z kozą, więc ich na pewno nie chcemy użyć. Nie możemy też przejść z $(0,1,1)--(1,1,1)$, bo to znaczy, że dowozimy wilka na brzeg gdzie do tej pory była koza i kapusta. Tak samo ruch $(1,1,0)--(1,1,1)$ implikuje że koza przeżyła z wilkiem sam na sam.
Zostajemy z dwoma możliwymi ścieżkami od $(0,0,0)$ do $(1,1,1)$:

$$(0,0,0)--(0,1,0)--(0,1,1)--(0,0,1)--(1,0,1)--(1,1,1),$$

która jest reprezentacja mojego rozwiązania oraz

$$(0,0,0)--(0,1,0)--(1,1,0)--(1,0,0)--(1,0,1)--(1,1,1),$$

gdzie do samotnej kozy zamiast kapusty dowozimy wilka i zabieramy kozę etc.

ZAD. 8.

Wierzchołki grafu dwudzielnego G można podzielić na dwie klasy: W i M. Oznaczmy moc $w = |W|$ i wtedy $|M| = n - w$. Będziemy mieli najwięcej krawędzi, jeśli stopień każdego wierzchołka będzie największy. Suma stopni wierzchołków w W wynosi

$$d(W) = w \cdot (n - w)$$

natomiast dla M jest to

$$d(M) = (n - w)w.$$

Czyli suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie to

$$d(G) = d(W) + d(M) = w(n - w) + (n - w)w = 2w(n - w)$$

i będzie to największe, gdy $w = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, bo wtedy mamy $d(G)$ to około $2\left(\frac{n}{2}\right)^2$.
Wiadomo, że liczba krawędzi w grafie to

$$e(G) = \frac{d(G)}{2},$$

bo przy zliczaniu stopni wierzchołków każdą krawędź liczymy podwójnie, więc trzeba to podzielić na dwa. W takim razie dostajemy

$$e(G) = \frac{d(G)}{2} \approx \frac{n^2}{4},$$

a ponieważ liczba krawędzi grafów jest zazwyczaj liczbą całkowitą, to musimy zaokrąglić otrzymany wynik do dołu, co daje

$$e(G) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

ZAD. 9.

Jeżeli G jest spójny, to zadanie mamy z głowy. W przeciwnym wypadku istnieją $u, w \in G$ takie, że nie ma między nimi żadnej ścieżki. Czyli możemy wierzchołki G podzielić na dwa zbiory U, W takie, że $u \in U$ i $w \in U$ i dla każdego $a \in U$ i dla każdego $b \in W$ $ab \notin G$. gdyby tak nie było, to mielibyśmy w G ścieżkę $u...w$.
Wtedy w grafie $\overline{G}$ dostajemy prawie graf dwudzielny o klasach wierzchołków U i W takie, że dla każdego $a \in U$ i $b \in W$ mamy $ab \in \overline{G}$. Czyli jeżeli chcemy przejść między wierzchołkami $a, b \in U$ takimi, że $ab \notin \overline{G}$ to wystarczy zahaczyć o wierzchołek z W i mamy ścieżkę.

ZAD. 14.

Niech G będzie drzewem o n wierzchołkach, które nazwiemy v_i. Chcemy pokazać, że

$$G \text{ jest drzewem} \iff \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2(n - 1).$$

$\Longrightarrow$

Po pierwsze zauważmy, że $e(G) = |G| - 1 = n - 1$. Można to pokazać w prosty sposób za pomocą indukcji. Jeżeli mamy drzewo o $n + 1$ wierzchołkach, to możemy obciąć jeden liść, co da nam drzewo T' o n wierzchołkach. Ilość krawędzi spada o jeden, więc $e(T') = n - 1$ z założenia indukcyjnego. Jeśli teraz dołożymy z powrotem ten liść, to dodajemy jedną krawędź i jeden wierzchołek, co daje $e(T) = (n + 1) - 1$.

Wiemy, że $e(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e(G) = 2(n - 1)$$

$\Longleftarrow$

Indukcja po n. Dla $n = 2$ mamy $\sum_{i=1}^{n} = 2(2 - 1) = 2$ czyli $e(G) = 1$ i mamy drzewo o dwóch wierzchołkach.
Teraz mamy graf o $(n + 1)$ wierzchołkach takich, że

$$\sum_{i=1}^{n+1} d(v_i) = 2n.$$

Jeżeli wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty, to mielibyśmy co najmniej jeden wierzchołek stopnia 0, co jest sprzeczne z dodatniością stopnia każdego wierzchołka. Czyli potrzebujemy co najmniej jedną parę wierzchołków stopnia 1, jeśli jeden taki wierzchołek wytniemy, to dostajemy graf G' o n wierzchołkach, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2n - 2 = 2(n - 1),$$

a więc G' jest drzewem z założenia indukcyjnego. W takim razie jak dodamy do niego wierzchołek stopnia 1, to tak naprawdę doklejamy jeden liść, więc dalej dostajemy drzewo.