Homomorfizmy grup, grupy ilorazowe.

Założenie: $f : G \longrightarrow H$ jest homomorfizmem grup.

Uwaga 3.1.

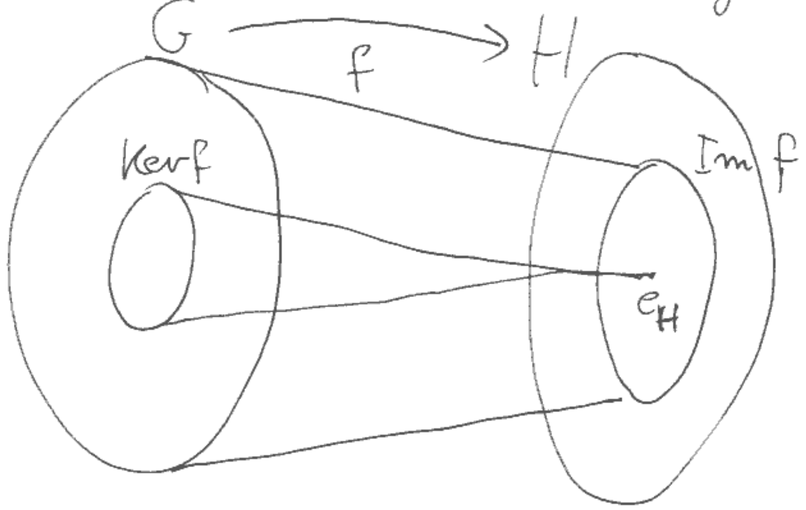
(1) $f(e_G) = e_H$

(2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

D-d zad.

$\operatorname{Ker} f = \{ g \in G : f(g) = e_H \}$ jądro f kernel

$\operatorname{Im} f = \{ f(g) : g \in G \}$ obraz f image



Uwaga 3.2.

$\operatorname{Ker} f < G$, $\operatorname{Im} f < H$

D-d jak dla przestrzeni liniowych.

Uwaga 3.3. f : monomorfizm $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{e_G\}$

D-d : jak dla przestrzeni liniowych.

Niech $S = \mathrm{Im}\, f$.

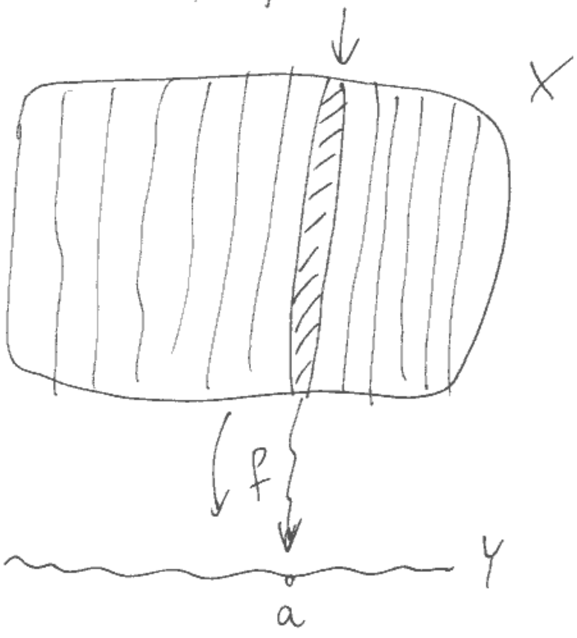
Strukturę grupy S można odtworzyć / odczytać z G i $\mathrm{Ker}\, f$!

Przypomnienie z LdI (?):

$f : X \xrightarrow{na} Y \rightsquigarrow \sim_f$ na X :

$$x \sim_f y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)$$

- relacja równoważności na X
- klasy abstrakcji : włókna funkcji f (fibers)
- Dla $a \in Y$, $f^{-1}[\{a\}]$: klasa abstrakcji $\sim_f$



U nas: $f : G \xrightarrow{epi} S$

Niech $K = \mathrm{Ker}\, f = f^{-1}[\{e_S\}]$: włókno f !

Uwaga 3.4 (1) Dla każdego $a \in G$, $aK = Ka$

(2) Warstwy K w G to włókna f
(klasy abstrakcji relacji $\sim_f$, postaci $f^{-1}[\{s\}]$, $s \in S$)

D-d Niech $a \in G$ i $s = f(a)$.

(*) $f^{-1}[\{s\}] = aK$.

bo:

- $aK \subseteq f^{-1}[\{s\}]$

bo: Niech $\underset{aK}{\underset{\cap}{b}} = a \underset{K}{\underset{\cap}{k}}$. Wtedy:

$$f(b) = f(ak) \underset{f \text{ homo}}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{f(a)}_{s} \underbrace{f(k)}_{e_S} = s \cdot e_S = s, \text{ więc } b \in f^{-1}[\{s\}]$$

- $f^{-1}[\{s\}] \subseteq aK$

bo: Zał., że $g \in f^{-1}[\{s\}]$, tzn. $f(g) = s$.

Niech $k = a^{-1}g$.

Również: $f(a) = s$ $\Downarrow$ $f(a^{-1}) = s^{-1}$

Stąd: $f(k) = f(a^{-1}) f(g) = s^{-1}s = e_S \rightsquigarrow k \in \operatorname{Ker} f = K$.

Stąd: $g = ak \in aK$.

Podobnie: $f^{-1}[\{s\}] = Ka$.

ozn: $L \lhd G$
(normal subgroup)

Def. 3.5. Zał., że $L < G$. L jest <u>dzielnikiem normalnym</u> [<u>podgrupą normalną</u>] grupy G, gdy:

$aL = La$ dla każdego $a \in G$
$\Updownarrow$
$L = a^{-1}La$

Wn. 3.6

Jeśli $f: G \longrightarrow H$ homomorfizm grup, to $\operatorname{Ker} f \trianglelefteq G$.

Uwaga 3.7. Niech $L < G$. Wtedy

$$L \trianglelefteq G \iff (\forall a \in G)\ aLa^{-1} = L$$

Iloczyn kompleksowy w G:

dla $A, B \subseteq G$ $\quad A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$.

- łączne: $(AB)C = A(BC)$ $(\ldots = ABC)$

Załóżmy, że $L \trianglelefteq G$, $a, b \in G$

$$(aL)(bL) = a(Lb)L = a(bL)L = abLL = abL$$

Zatem:

- iloczyn kompleksowy jest działaniem łącznym w G/L
- element neutralny: $eL = L$
- element odwrotny do aL: $a^{-1}L$

Zatem:

Def. 3.8 / Fakt 3.8

(1) G/L z mnożeniem kompleksowym jest grupą zwaną grupą ilorazową G przez L

(2) $j: G \xrightarrow[\text{ilorazowe}]{} G/L$ jest epimorfizmem grup, zwanym homomorfizmem ilorazowym (kanonicznym)

$j(g) = gL$

(3.9)

Zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup

Załóżmy, że $f: G \longrightarrow S$ jest epimorfizmem grup. Niech $K = \operatorname{Ker} f$. Wtedy istnieje jedyny izomorfizm grup $\bar{f} : G/K \xrightarrow{\cong} S$ taki, że $f = \bar{f} \circ j$,

tzn. diagram:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & S \\ G/K \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

#: "komutuje".

D-d Istnienie: Niech

$aK \in G/K$ f stała na $aK \subseteq G$

$\bar{f}(aK)$ = wspólna wartość f dla $x \in aK$

$\bar{f}(aK) = f(a)$.

to jest dobre (ćwiczenie: to jest izomorfizm)

jedyność: oczywista. Definicja $\bar{f}$ jedyna możliwa, by diagram komutował.

Przykłady

1. $n \geq 1$ $r_n : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +_n)$ epimorfizm grup.

$(\mathbb{Z}, +) > \operatorname{Ker} r_n = n\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z},+)/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$

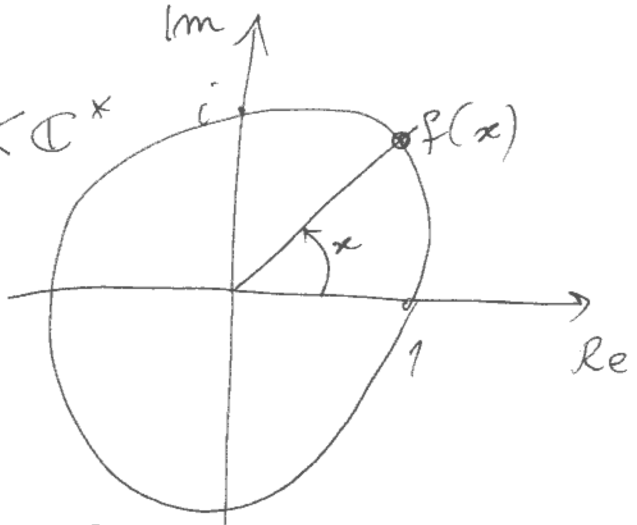
2. $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ $\quad f(x) = \cos x + i \sin x = e^{ix}$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

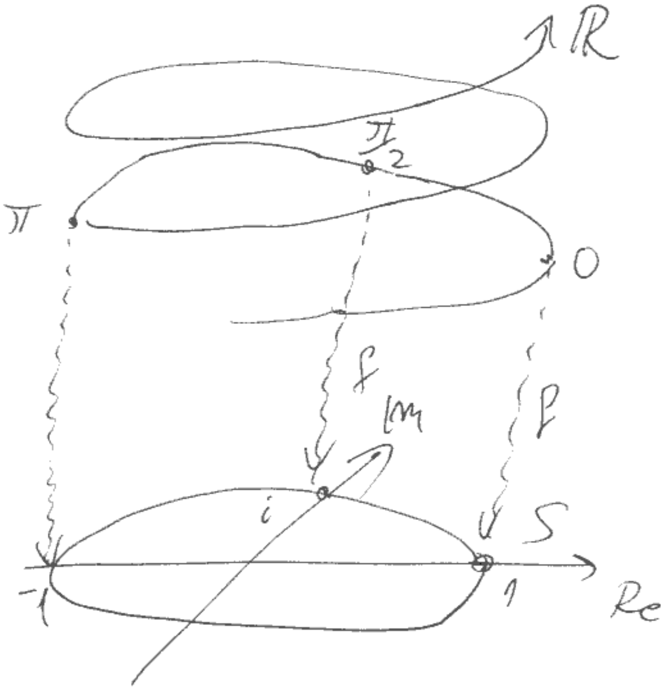
homomorfizm grup.

- $\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \overset{\text{ozn}}{=}: S < \mathbb{C}^*$

- $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x + i \sin x = 1\} = 2\pi\mathbb{Z} < (\mathbb{R}, +)$.



$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} = (\mathbb{R},+)/_{2\pi\mathbb{R}} \cong S$ okrąg.



3. $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ epimorfizm grup.

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\operatorname{Ker} \det = SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$

n-ta specjalna grupa liniowa.

$$\underset{\substack{\parallel \\ GL_n(\mathbb{R})}}{GL(n, \mathbb{R})} / SL(n, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

Działania grup na zbiorach.

Przykłady 1. $G = \operatorname{Aut}(A)$, A : struktura algebraiczna.

2. $GL(n, \mathbb{R}) \cong \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n, +, r)_{r \in \mathbb{R}}$

3. G_X dla $X \subseteq \mathbb{R}^2$ (gpa izometrii własnych zbioru X)

to są grupy G przekształceń pewnych zbiorów X.

Abstrakcyjnie:

Def. 3.10 (1) Działanie (lewostronne) grupy G na zbiorze X to dowolna funkcja $\bullet : G \times X \longrightarrow X$ taka, że:

(1) $e \bullet x = x$

(2) $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$

Prawostronne: $\bullet : X \times G \to X$

(1') $x \bullet e = x$

(2') $(x \bullet g) \bullet h = x \bullet (gh)$

[myślimy o $g \in G$ jako o funkcji $g : X \longrightarrow X$, zamiast $g(x)$ piszemy $g \bullet x$]

(2) Załóżmy, że G działa na X (symbolicznie: $G \circlearrowleft X$)

Wtedy definiujemy funkcję

$$\varphi : G \longrightarrow X^X$$

$$\underset{G}{\varphi(g)}\underset{X}{(x)} = g \circ x$$

Uwaga 3.11.

(1) $\varphi(g) \in Sym(X)$

(2) $\varphi(g) \circ \varphi(h) = \varphi(gh)$

} tzn: $\varphi : G \longrightarrow Sym(X)$ homomorfizm grup.

Na odwrót, jeśli $\psi : G \longrightarrow Sym(X)$ jest homomorfizmem grup, to wyznacza on działanie G na X: $g \circ x = \psi(g)(x)$.

<u>D-d</u> $\varphi(g) : X \longrightarrow X$ z definicji

(2) $\varphi(gh)(x) = (gh) \circ x \underset{\substack{(2)\\ \text{z Def. 3.10(1)}}}{=} g \circ (h \circ x) = g \circ (\varphi(h)(x)) =$

$= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)$.

Czyli: $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$.

(3) $\varphi(e)(x) = e \circ x = x$, więc $\varphi(e) = id_X$

(4) $\varphi(g^{-1}) \circ \varphi(g) = \varphi(g^{-1}g) = \varphi(e) = id_X = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1})$

<u>stąd</u>$_{(1)}$ $\varphi(g) \in Sym(X)$.

Druga część: Ćwiczenie.

Przykład. 1. $G = GL(n, \mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$

G działa na $\mathbb{R}^n$: mnożenie wektorów przez macierz

$\underset{\substack{\Downarrow\\ A}}{G}$ $\underset{\substack{\Downarrow\\ v}}{\mathbb{R}^n}$ $A \cdot v = Av$

2. G: dowolna. G działa na sobie: $X = G$

$\underset{\substack{\Downarrow\\ g}}{G}$ $\underset{\substack{\Downarrow\\ x}}{X = G}$ przez lewe przesunięcie:

$g \cdot x = gx$

G działa na sobie z prawej strony

przez prawe przesunięcie:

$x \cdot g = xg$

Def. 3.12.

Działanie G na X nazywamy wiernym (faithful), gdy

$\varphi : G \longrightarrow Sym(X)$ jest 1-1, tzn:

$(\forall g \in G)(g \neq e \Rightarrow (\exists x \in X)\, g \cdot x \neq x)$

Wniosek 3.12' (tw. Cayleya)

Każda grupa G jest izomorficzna z pewną grupą permutacji.

D-d. $G \circlearrowright X = G$ przez lewe przesunięcie

$\varphi(g) = l_g$ działanie wierne

$\varphi : G \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}\varphi < Sym(\underset{\substack{\shortparallel\\ G}}{X})$

Def. 3.13. Zał, że $G \curvearrowright X$.

dla $x \in X$:

(1) $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$

stabilizator elementu x w G

(2) $\mathcal{O}(x) = Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$

orbita elementu x w X

~~Def. 3.13.~~ Uwaga 3.14. (1) $G_x < G$

(2) Orbity elementów $x \in X$ tworzą partycję zbioru X

(3) $|G| = |G_x| \cdot |\mathcal{O}(x)|$.

<u>D-d</u> (1) Ćw.

(2) $x \in \mathcal{O}(x)$, bo $x = e \cdot x$, więc $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x)$

- różne orbity są rozłączne:

nie wprost:

zał, że $\underbrace{\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y)}_{\ni z} \neq \emptyset$

$\Rightarrow z = g_0 \cdot x$ dla pewnego $g_0 \in G$

Ale wtedy: $\underset{\mathcal{O}(z)}{\underset{\shortparallel}{G \cdot z}} = G \cdot (g_0 \cdot x) = (Gg_0) \cdot x = G \cdot x =$

$= \mathcal{O}(x)$.

symetrycznie: $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(y)$.

(3) $\varphi_x : G \longrightarrow O(x)$

$$\varphi_x(g) = g \cdot x$$

· φ_x : "na"

· włókna φ_x to lewostronne warstwy G_x w G:

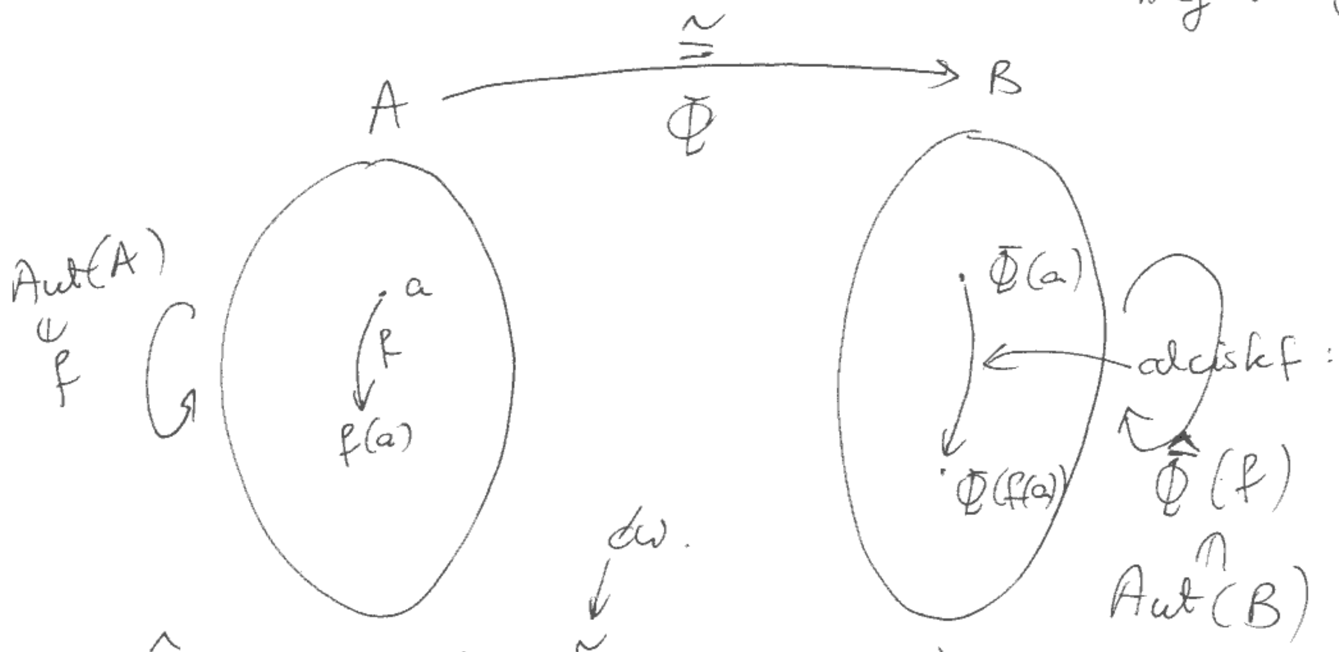
niech $y \in O(x)$, tzn. $y = g_0 \cdot x$ dla pewnego $g_0 \in G$.

Liczymy $\varphi_x^{-1}[\{y\}]$ (włókno):

$$\begin{aligned} g \in \underline{\underline{\varphi_x^{-1}[\{y\}]}} &\iff \varphi_x(g) = y \\ &\iff g \cdot x = y = g_0 \cdot x \\ &\iff g_0^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \\ &\iff (g_0^{-1} g) \cdot x = x \\ &\iff g_0^{-1} g \in G_x \\ &\iff g \in \underline{\underline{g_0 G_x}} \end{aligned}$$

<u>Przykład</u>: Sprzężenie (conjugacy) ~~z~~

Niech $\Phi : (A, f_1, \dots, f_k) \xrightarrow{\cong} (B, g_1, \dots, g_k)$
izomorfizm algebr



$$\hat{\Phi} : \mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(B)$$

Wzór na $\hat{\Phi}(f)$:

Niech $b = \Phi(a)$ $\qquad \hat{\Phi}(f)(b) = \Phi(f(a)) = \Phi(f(\Phi^{-1}(b)))$

$a = \Phi^{-1}(b)$ $\qquad$ czyli $\hat{\Phi}(f) = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$.

Przypadek gdzie $(A, f_1, \ldots, f_k) = (B, g_1, \ldots, g_k)$:

Wtedy $\Phi : A \xrightarrow{\cong} B$ znany: $\Phi \in \mathrm{Aut}(A)$.

Φ wyznacza wtedy $\hat{\Phi} : \mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(A)$

dany wzorem:

$$\hat{\Phi}(f) = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}.$$

Abstrakcyjnie:

G dowolna grupa, $g \in G$ wyznacza $j_g : G \xrightarrow{\cong} G$ wzorem $j_g(x) = gxg^{-1}$.
(zamiast $Aut(A)$)

Co daje funkcję:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Aut(G) < Sym(X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = j_g \end{array}$$

Uwaga 3.15
φ jest homomorfizmem grup.

D-d $\underset{j_{gh}}{\varphi(gh)} = \underset{j_g}{\varphi(g)} \circ \underset{j_h}{\varphi(h)}$, bo:

$$j_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} =$$
$$= g(hxh^{-1})g^{-1} = g\, j_h(x)\, g^{-1} = j_g(j_h(x)) =$$
$$= (j_g \circ j_h)(x).$$ Czyli: $j_{gh} = j_g \circ j_h$.