Lista 5

Analiza Numeryczna M

Weronika Jakimowicz

16.11.2022

ZAD 1.

a.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \lambda_k(x)$$

Czyli $\sum_{k=0}^{n}$ interpoluje funkcję w węzłach

$$(x_0, 1), (x_1, 1), (x_2, 1), \ldots, (x_k, 1).$$

Bez trudu można zauważyć, że jedynym wielomianem który to robi jest wielomian $q(x) = 1$, więc

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = q(x) = 1.$$

b.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Jeżeli $j = 0$, to mamy

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \sum_{x=0}^{n} \lambda_k(0)$$

co z poprzedniego podpunktu jest zawsze równe 1.
Jeżeli $j \neq 0$, to interpolujemy funkcję f w węzłach

$$(x_0, x_0^j), (x_1, x_1^j), \ldots, (x_k, x_k^j).$$

W tym celu możemy użyc $q(x) = x^j$, czyli

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) x_k^j = q(x) = x^j$$

co po wstawieniu $x = 0$ daje

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = q(0) = 0^j = 0.$$

ZAD 2.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Twierdzenie 6.2.1. z "Analiza numeryczna" Kincaid.

Po pierwsze, jeżeli interpolujemy funkcję f przez wielomain p_k stopnia $k + 1$-tego w węzłach $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, to jest ten wielomian wyrażony jednoznacznie (Twierdzenie 6.1.1. - Kicnaid). Niech więc p_k, p_{k-1} interpolują funkcję f w odpowiednio węzłach $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ i $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$. Dalej, niech q będzie wielomianek interpolującym f w węzłach $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Dla ułatwienia dowodu, wprowadźmy lemat że

$$q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

interpoluje funkcję w węzłach $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.
Wielomian $q(x) - p_{k-1}(x)$ ma miejsca zerowe dla

$$x_1, \ldots, x_{k-1},$$

więc nie wpływa na węzły $(x_1, y_1), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$. Co więcej, przechodzi on przez (x_k, y_k) i $(x_0, -y_0)$. W takim razie, wielomian

$$(x_k - x)(q(x) - p_{k-1}(x))$$

ma miejsce zerowe dodatkowo dla x_k i przechodzi przez $(x_0, -y_0)$. Ponieważ $x_k > x_0$, to $x_0 - x_k < 0$, więc

$$\frac{x_k - x}{x_0 - x_k}[q(x) - p_{k-1}(x)] = \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

przechodzi tylko przez (x_0, y_0), a w pozostałych węzłach ma miejsca zerowe. Czyli

$$q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

jest przechodzące przez wszystkie $k + 1$ węzłów.

Skoro istnieje tylko jeden wielomian k-tego stopnia przechodzący przez ustalone węzły $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$, to zachodzi

$$p_k(x) = q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)].$$

Współczynnik przy x^k po lewej stronie to

$$f[x_0, \ldots, x_k],$$

natomiast współczynnik przy x^k po prawej stronie to

$$\frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

co daje nam dowodzoną zależność:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

ZAD 3.

Dla $k = 1$

$$p[x, x_1] = \frac{p[x_1] - p[x]}{x_1 - x} = \frac{p(x_1) - p(x)}{x_1 - x}$$

co jest wielomianem stopnia $n - 1$, bo dzielimy wielomian stopnia n przez wielomian stopnia 1.
Załóżmy, że jest teza jest prawdziwa dla wszystkich $\leq k$, wtedy

$$p[x, x_1, \ldots, x_{k+1}] = \frac{p[x_1, \ldots, x_{k+1}] - p[x, x_1, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x}.$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $p[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n - k$. Pierwsza część różnicy w liczniku jest wartością niezależną od x. W takim razie do stopnia szukanego wielomianu przyczynia się tylko wielomian stopnia $n - k$ dzielony przez wielomian stopnia 1. Daje nam to wielomian stopnia $n - k - 1$, czyli $n - (k + 1)$ co kończy dowód.

ZAD 4.

x	−2	−1	0	1	2	3
p(x)	31	5	1	1	11	61

Bedziemy uzywac wzoru interpolacyjnego Newtona, czyli potrzebujemy roznicy dzielonej y:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 \\
31 & & 5 & & 1 & & 1 & & 11 & & 61 \\
 & -26 & & -4 & & 0 & & 10 & & 50 & \\
 & & 11 & & 2 & & 5 & & 20 & & \\
 & & & -3 & & 1 & & 5 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

Wzór interpolacyjny Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5} [y_0, \ldots, y_k] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5} [y_0, \ldots, y_k] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) =$$
$$= 31 - 26(x+2) + 11(x+2)(x+1) - 3(x+2)(x+1)x + (x+2)(x+1)x(x-1)$$

Dla drugiego wielomianu zmienia się jedynie wartość na szczycie, czyli $[x_0, x_1, \ldots, x_5]$. Wynosi ono wtedy $-\frac{31}{120}$ zamiast 0 i mamy

$$q(x) = p(x) - \frac{31}{120}(x+2)(x+1)x + (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$$

ZAD 5.

Dla dowolnego $x \in [a, b]$ istnieje k takie, że $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Wtedy iloczyn $(x - x_k)(x - x_{k+1})$ jest największy gdy $x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, czyli jest równo pomiędzy tymi dwoma punktami. Wtedy

$$(x - x_k)(x - x_{k+1}) = \frac{x_k + x_{k+1} - 2x_k}{2} \frac{x_k + x_{k+1} - 2x_{k+1}}{2} =$$
$$= -\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} = -\frac{1}{4}h^2$$

Największą odległość jaką może mieć x względem x_{k-1} jest 2h:

$$(x_{k+1} - x_{k-1}) = a + (k+1)h - a - (k-1)h = 2h.$$

Analogicznie, największa odległość od x_{k-2} to 3h etc. Dla x_{k+2} również największa odległość to 2h:

$$(x_k - x_{k+2}) = a + kh - a - (k+2)h = -2h$$

i tak samo dla x_{k+3} to 3h. Odległość x_0 to kh, a x_n to $(n - k)h$. Daje to nam poniższą nierówność:

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq kh \cdot (k-1)h \cdot \ldots \cdot 2h \cdot \frac{1}{4}h^2 \cdot 2h \cdot \ldots \cdot (n-k-1)h \cdot (n-k) \cdot h =$$
$$= \frac{1}{4}k! \cdot \frac{n!}{k!} h^{k-1} h^2 h^{n-k-1} = \frac{1}{4} n! h^n$$

ZAD 7.

Twierdzenie ze slajdów:
Jeżeli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$-sza pochodną, a wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpoluję tę funkcją w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ to dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi równość

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x)$$

gdzie $p_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.

Czyli

$$f(x) - L_1(x) = \frac{1}{2!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)$$

i dla wartości bezwzględnej:

$$\begin{aligned}
|f(x) - L_1(x)| &= \frac{1}{2}|f^{(n+1)}(\xi_x)||x - x_0||x - x_1| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\max(|f''(x)|)|\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0||\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1| = \\
&= \frac{1}{2}M_2|\frac{x_1 - x_0}{2}||\frac{x_0 - x_1}{2}| = \\
&= \frac{1}{2}M_2(x_1 - x_0)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{8}M_2(x_1 - x_0)^2
\end{aligned}$$

ZAD 8.

Twierdzenia 6.1.7. z Kincaid-Cheney:
Jeżeli węzły x_i są zerami wilomianu Czebyszewa T_{n+1}, to dla $|x| \leq 1$ jest

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_{[-1,1]}$$

Rozważana przez nas norma $\|f\|_{[a,b]}$ to norma maksimum, więc

$$\|f^{(n+1)}\|_{[-1,1]} = \|e^x\|_{[-1,1]} = e^1 = e.$$

Chcemy więc znaleźć najmniejsze takie n, że

$$10^{-5} \leq \frac{e}{2^n(n+1)!}$$

dla $n = 6$

$$2^6 7! = 322560 \approx 3 \cdot 10^5$$

$$\frac{e}{2^6 7!} \approx \frac{3}{3 \cdot 10^5} = 10^{-5}$$