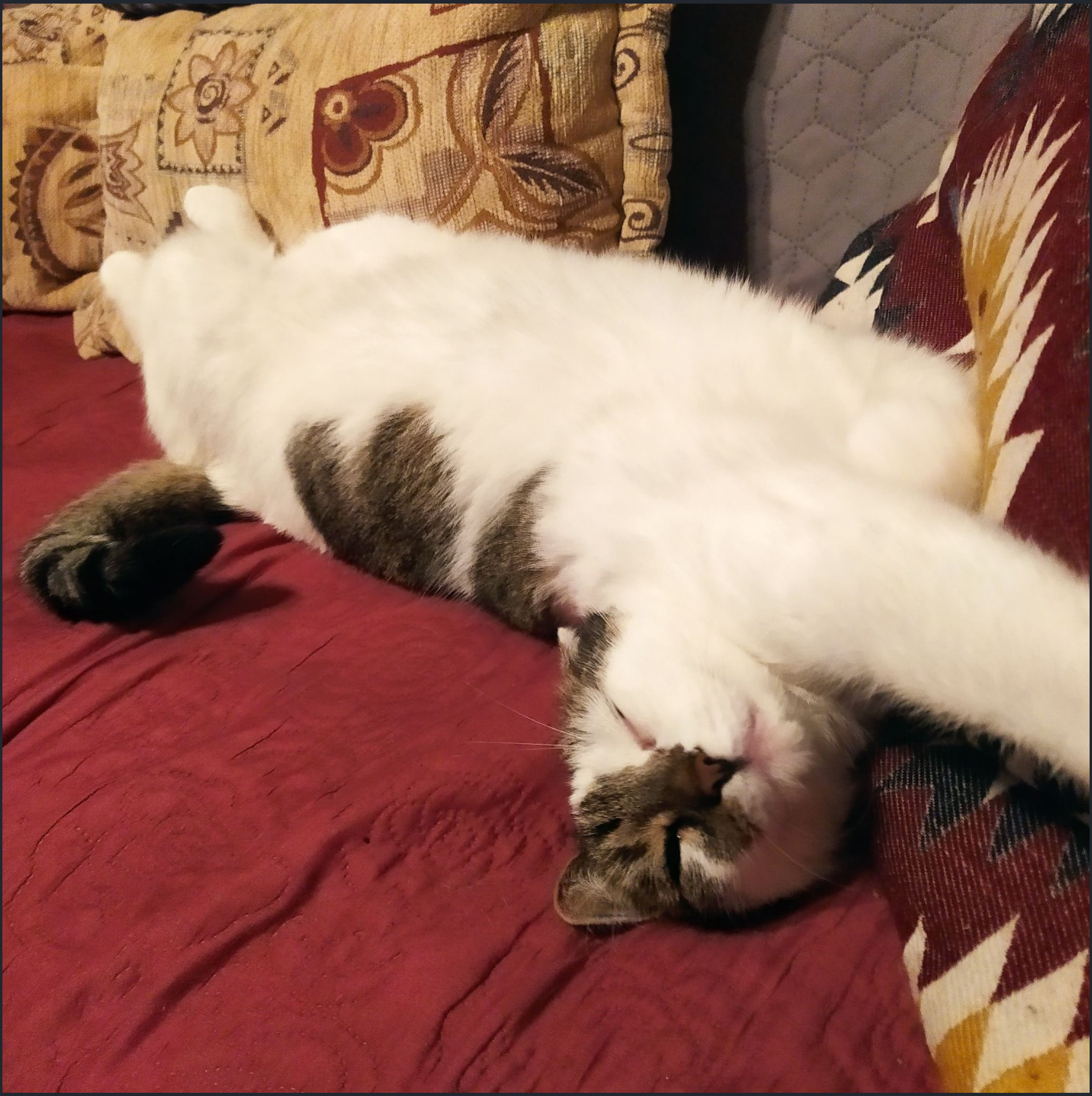
Algebra 1R

by a moron :3

21.03.2137



1 Teoria grup

1.1 Grupy, pierscienie, ciala

Dzialanie [operation] na zbiorze X:

$$\Phi : X \times X \to X,$$

zwykle zapisywane jako xy, $x \cdot y$, $x + y$.

Przyklady:
$\hookrightarrow$ na dowolnym z $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ mamy dodawanie (+) i mnozenie ($\cdot$)
$\hookrightarrow$ na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ mamy $\leq$ ktory daje dzialania:

$$a \vee b := \min a, b$$

$$a \wedge b := \max a, b$$

$\hookrightarrow$ np na $\mathbb{R}$ mozemy zdefiniowac $a \star b := a + b^2$
$\hookrightarrow$ niech X bedzie zbiorem, a X^X bedzie zbiorem wszystkich funkcji $X \to X$, wtedy skladanie funckji jest dzialaniem okreslonym w X^X:

$$f \circ g \in X^X$$

MOZNA DOJEBAC GRAFIK KOMUTUJACY
$\hookrightarrow$ X - zbior i niech $\mathscr{P}(X)$ to zbior wszystkich podzbiorow X, wtedy na $\mathscr{P}(X)$ mamy dzialanie sumy [union] i przekroju [intersection]
$\hookrightarrow$ niech $a, b \in X$, wtedy mamy rzuty na osie:

$$aLb := a$$

$$aPb := b$$

$\hookrightarrow$ na zbiorze $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ deifniujemy $(\forall\ a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})\ a + \infty = \infty = \infty + a$ oraz $(\forall\ a, b \in \mathbb{R})\ a + b = a +_{\mathbb{R}} b$ (dodawanie w $\mathbb{R}$)

Prosty opis dzialan - niech $\star$ bedzie dzialaniem okreslonym w $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, to mozemy dojebac tabelke:

$\star$	a_1	a_2	...	a_n
a_1	$a_1 \star a_1$	$a_1 \star a_2$	..	$a_1 \star a_n$
a_2	$a_2 \star a_1$	$a_2 \star a_2$	..	$a_2 \star a_n$
...	...	...	...	...
a_n	$a_n \star a_1$	$a_n \star a_2$	..	$a_n \star a_n$

Element neutralny [neutral element] - takie e, ze dla kazdego $x \in X$ $ex = xe = x$. Dzialanie ma co najwyzej jeden element neutralny.
Element odwrotny [inverse element] do x to takie y, ze $xy = yx = e$. Jesli dzialanie jest laczne [associative], to ma co najwyzej jeden element odwrotny do danego x.

Homomorfizm algebry $\mathscr{X} = (X, \{\cdot\})$ na algebre $\mathscr{Y} = (Y, \{\circ\})$ nazywamy przeksztalcenie $f : X \to Y$ spelniajace dla kazdego $a, b \in X$

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b).$$

- monomorfizm - f jest 1-1
- epimorfizm - f jest "na"
- izomorfizm - f jest 1-1 i "na"
- endomorfizm - kiedy $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$
- automorfizm - enodmorfizm bedacy izomorfizmem

Polgrupa to niepusty zbior z dzialaniem lacznym.

GRUPA [group] to niepusty zbior z lacznym dzialaniem i elementem neutralnym (zwanym jednoscia grupy) oraz elementami odwrotnymi dla kazdego elementu.

$\hookrightarrow$ grupa abelowa (przemienna) [commutative group] - grupa z dzialaniem przemiennym

Zbior G z dzialaniem $\cdot$ jest grupa, jesli:

1. $(\forall\ a, b, c \in G)\ (ab)c = a(bc)$
2. $(\exists\ e \in G)(\forall\ a \in G)\ ea = ae = e$
3. $(\forall\ a \in G)(\exists\ b \in G)\ ab = ba = e$
*4. $(\forall\ a, b \in G)\ ab = ba$ w grupie *abelowej*

Grupa przeksztalcen [transformation group] - niepusty podzbior $G \subseteq S_X$, ktory jest:
$\hookrightarrow$ jest zamkniety na laczenie funkcji
$\hookrightarrow$ $(\forall\ f \in G)\ f^{-1} \in G$
Pojecie to wprowadzil Galois ok 1830, gdzie X byl zbiorem pierwiastkow pewnego wielomianu.

Grupa macierzy [matrix group] [$M_n(\mathbb{R})$] to grupa wszystkich macierzy z mnozeniem :v

Ogolna grupa liniowa [general linear group] [$GL_n(\mathbb{R})$] to grupa wszystkich macierzy o niezerowym wyznaczniku ze standardowym mnozeniem.

Grupa ortogonalna [orthogonal group] [$O_n(\mathbb{R})$] to podzbior grupy $GL_n(\mathbb{R})$ taki, ze $A^{-1} = A^T$.

WYPADALOBY POKAZAC, ZE $(S_X, \circ)$ jest przemienna iff $|X| \leq 2$

Grupy izometrii - dla $W \subseteq \mathbb{R}^2$, grupa izometrii W to macierze ortogonalne zachowujace zbior W.

PIERSCIEN to niepusty zbior X z dwoma dzialaniami ($\cdot$, +, mnozenie i dodawanie) taki, ze:

1. zbior X z + jest grupa abelowa
2. $\cdot$ jest laczne
3. $(\forall\ x, y, z \in X)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \wedge\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Kolejne dzikie nazwy $\star$:

$\star$ pierscien przemienny - jesli mnozenia jest przemienne

$\star$ pierscien z jednoscia - dla mnozenia istnieje element neutralny

CIALO to pierscien przemienny, ktory dla kazdego elementu $\neq 0$ ma element odwrotny

1.2 Wlasnosci grup

Niech G bedzie grupa, a e jej elementem neutralnym. Wowczas:

$\hookrightarrow$ $a, b \in G \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$\hookrightarrow$ $a \in G$ i $n = 1, \dots, n$ $a^{-n} = (a^n)^{-1} =^* (a^{-1})^n$

$\hookrightarrow$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$ i $a \in G$ mamy $a^{mn} =^* (a^m)^n$

$\hookrightarrow$ dla G grupy abelowej i $n \in \mathbb{Z}$ $(ab)^n =^* a^n b^n$

* trzeba udowodnic, ale mi sie nie chce

$H \subseteq G$ jest podgrupa G, jesli jest grupa ze wzgledu na te same dzialania, czyli wystarczy, ze

$$(\forall\ a, b \in H)\ ab^{-1} \in H.$$

Jelsi $a \in G$ i istnieja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, takie, ze $a^n = e$, to mowimy ze n jest rzedem elementu a ($n = o(a)$). Jesli takie n nie istnieja, to a ma rzad nieskonczony ($o(a) = \infty$).

$\hookrightarrow$ grupa torsyjna - wszystkie elementy maja rzad skonczony

$\hookrightarrow$ grupa beztorsyjna - wszystkie elementy maja rzad nieskonczony

Jesli $o(a) = n$ *oraz* $a^N = e$ *to* $n|N$, *fajny dowodzik, ale leniem jestem*

Grupa cykliczna to grupa zlozona z wszystkich poteg danego elementu a, natomiast a jest nazywane generatorem tej grupy

1.3 Grupy ilorazowe B)

Prawostronna warstwa grupy G wzgledem jej podgrupy H wyznaczona przez $g \in G$ to zbior

$$gH = \{gh\ :\ h \in H\},$$

natomiast lewostronna warstwa to zbior

$$Hg = \{hg\ :\ h \in H\}.$$

Dla grup abelowych sa one rowne.

Dwa elementy $g_1, g_2 \in G$ wyznaczaja te sama warstwe prawostronna wzgledem H, gdy $g_1^{-1}g_2 \in H$, a te sama warstwe lewostronna, gdy $g_1g_2^{-1} \in H$.

Rzad grupy skonczonej G to ilosc jej elementow.

Indeks $[G : H]$ podgrupy H w grupie G to ilosc warstw w grupie G wzgledem H. Dla skonczonych grup mamy:

$\hookrightarrow$ $g \in G$ $o(g)||G|$,

$\hookrightarrow$ rzad i indeks kazdej podgrupy sa dzielnikami rzedu grupy,

$\hookrightarrow$ jesli rzad jest liczba pierwsza, to grupa jest cykliczna

Twierdzenie Lagrange'a - dla skonczonych $G > H$:

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Podgrupa H jest dzielnikiem normalnym grupy G [$H \triangleleft G$] jesli $(\forall\ g \in G)\ gH = Hg$. Wystarczy, ze $(\forall\ g \in G)(\forall\ h \in H)\ ghg^{-1} \in H$.

Niech $f : G_1 \to G_2$ bedzie homomorfizmem, a e_1, e_2 beda elementami neutralnymi grup odpowiednio G_1, G_2. Wtedy $f(e_1) = e_2$ oraz $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$.

Obraz homomorfizmu $f : G_1 \to G_2$ jest podgrupa grupy G_2 [$\mathrm{Im}\ f < G_2$], natomiast jadro f jest dzielnikiem normalnym G_1 [$\mathrm{Ker}\ f \triangleleft G_1$].

Grupa ilorazowa to zbior wszyystkich warstw H/G, gdzie $H \triangleleft G$, z dzialaniem

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H.$$

Odwzorowanie

$$\phi : G \to H$$
$$\phi(g) = gH$$

jest epimorfizmem (czesto nazywane kanonicznym homeomorfizmem G na H).

[!!!]Zasadnicze twierdzenie o homeomorfizmach dla grup - jesli $f : G \to G_1$ jest epimorfizmem oraz $\mathrm{Ker}\ f = H$, natomiast $\phi : G \to G/H$ jest dzialaniem jak wyzej, to istnieje tylko jeden izomorfizm $\psi : G/H \to G_1$ taki, ze $f = \psi \circ \phi$

Jezeli $\emptyset \neq A \subseteq G$ oraz $G(A) < G$ to przekroj wszystkich podgrup G zawierajacych A, a $A \subseteq G_1 < G$, to $G(A) < G_1$.

Jezeli $K \triangleleft G$ i $H \triangleleft G$, to najmniejsza podgrupa G zawierajaca H i K pokrywa sie ze zbiorem

$$KH := \{kh\ :\ k \in K,\ h \in H\}$$

Pierwsze twierdzenie o izomorfizmach - jezeli $K \triangleleft G$ i $H \triangleleft G$, to

$\hookrightarrow$ $K < KH = HK < G$

$\hookrightarrow$ $H \cap K \triangleleft H$ i $K \triangleleft KH$

$\hookrightarrow$ $\phi : hK \to h(K \cap H)$ indukuje izomorfizm

$$HK/K \sim H/(H \cap K)$$

Drugie twierdzenie o izomorfizmach - jezeli $K \triangleleft G$ i $K < H < G$ i oznaczymy $\overline{H} = H/K$ oraz $\overline{G} = G/K$, to wtedy:

$\hookrightarrow$ $\overline{H} < \overline{G}$

$\hookrightarrow$ $\overline{H} \triangleleft \overline{G} \iff H \triangleleft G$

Automorfizm wewnetrzny grupy G wyznaczony przez g: $\phi_g(x) = g^{-1}xg$.
Jesli G to grupa abelowa, to dla kazdego g $\phi_g(x) = x$, a wiec ma ona jedynie identycznosc.

Zbior wszystkich automorfizmow wewnetrznych grupy G oznaczamy I(G) i tworzy on grupe ze skladaniem

Centrum grupy G [Z(G)] to zbior $x \in G$ takich, ze dla dowolnego $y \in G$ $xy = yx$. Dla kazdego G $Z(G) \triangleleft G$

Grupa I(G) jest izomorficzna z G/Z(G).

Jesli M to dowolny podzbior grupy G, to dla kazdego g takiego, ze $\phi_g \in I(G)$ zbiorem sprzezony do M nazywamy zbior

$$M^g = \{\phi_g(x) \ : \ x \in M\}$$

Jesli $M = \{x\}$, to M^g zawiera elementy sprzezone z x.

Normalizator zbioru M:

$$N_G(M) = \{g \in G \ : \ M^g = M\}$$

Centralizator zbioru M:

$$C_G(M) = \{g \in G \ : \ mg = gm, \ m \in M\}$$

Twierdzonka:

- ↪ $(\forall M \subseteq G)\ C_G(M) < N_G(M)$ $(|M| = 1 \implies C_G(M) = N_G(M))$
- ↪ $Z(G) = C_G(G)$
- ↪ dla $M \subseteq G$ ilosc zbiorow M^g jest rowna $[G \ : \ N_G(M)]$.

Aby klasa elementow sprzezonych z $x \in G$ byla jednoelementowa wystarczy, zeby $x \in Z(G)$

Jesli G jest skonczona, to ilosc elementow sprzezonych z zadanym x jest dzielnikiem |G|.

p-grupa to grupa, w ktorej wszystkie elementy maja rzad p, gdzie p jest liczba pierwsza. Jesli $|G| = p^n$ to G jest p-grupa.

Skonczone p=grupy maja nietrywialne centrum.

Jesli $|G| = p^2$, to G jest grupa abelowa.

1.4 Produkty grup

W zbiorze $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, b \in B\}$, gdzie A, B sa grupami, okreslmy

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

Wtedy $(A \times B, \cdot)$ jest grupa zwana produktem A i B.

Oznaczenia:

- ↪ $G^2 = G \times G$
- ↪ $G^n = G \times G \times ... \times G$

Grupa Kleina: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ to najmniejsza niecykliczna grupa. Jest tez $\simeq$ z prostokatem, ktory nie jest kwadratem.

Niech $\{G_i \ : \ i \in I\}$ bedzie rodzina grup indeksowana elementami ze zbioru I

↪ $\prod\limits_{i \in I} G_i$ to zbior wszystkich i-ciagow elementow z G z dzialaniem

$$(g_i)_i \cdot (g_i')_i = (g_i g_i')_i$$

↪ $\sum\limits_{i \in I} G_i :=$

$$\{(g_i)_i \in \prod G_i \ : (\exists\ I_0 \underset{<\infty}{\subseteq} I)(\forall\ i \in I \setminus I_0)\ g_i = e_{g_i}\}$$

2 Permutacje :>

n-ta grupa symetryczna [S_n] - grupa wszystkich permutacji zbioru $X_n = \{1, \dots, n\}$. $|S_n| = n!$

Jesli $P \in S_n$ i dla $i = 1, \dots, n$ $P(i) = a_i$, to piszemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Mnozenie permutacji:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Zbior elementow niezmienniczych (fixpunktow) permutacji P to zbior $F(P) = \{k \in X_n \;:\; P(k) = k\}$. Jego dopelnienie oznaczamy $M(P) = S_n \setminus F(P)$.

. . . .

Cykl k-elementowy C to permutacja taka, ze $C(a_1) = a_2$, $C(a_2) = a_3$, ..., $C(a_n) = a_1$. Cykl 2-elementowy to transpozycja. Cykle zapisujemy

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Kazda permutacja jest iloczynem transpozycji.

. . . .

Permutacje parzyste - iloczyn

$$\prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

jest dodatni (gorny row to kolejne liczby naturalne, dolny to wyrazy). Pozostale permutacje sa nieparzyste.

Znak permutacji jest +1 gdzy permutacja jest parzysta i -1 wpp. Alternatywnie mozna zapisac (gorny row to b_k, a dolny to c_k)

$$\text{sgn } P = \prod_{i<j} \frac{b_j - b_i}{c_j - c_i}$$

Dla dwoch dowolnych permutacji P_1, P_2 mamy

$$\text{sgn } P_1 P_2 = \text{sgn } P_1 \cdot \text{sgn } P_2$$

$$\text{sgn } P_1^{-1} = \text{sng } P_1.$$

n-ta grupa alternujaca [A_n] - podgrupa S_n zlozona ze wszystkich parzystych permutacji.

Permutacja jest parzysta iff σ jest transpozycja parzyscie wielu transpozycji (czyli ma nieparzyscie wiele elementow).

Twierdzenie Arthur Cayley - jeżeli G jest grupą rzędu n, to jest ona izomorficzna z pewną podgrupą S_n.