

ZAD 1.

Po pierwsze zauważmy, że dla $u < 1$, co $u = 2^{-t-1}$ z pewnością spełnia, zachodzi

$$\begin{aligned}u &\leq \frac{u}{1-u} \\u(1-u) &\leq u \\u - u^2 &\leq u \\0 &\leq u^2.\end{aligned}$$

Dla $n=1$ działa, założmy więc, że dla wszystkich n mamy

$$1 - \frac{nu}{1-nu} \leq \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j)^{p_j} \leq 1 + \frac{nu}{1-nu}$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1} (1 + \alpha_j)^{p_j} &= 1 + \theta_{n+1} = \\&= (1 + \alpha_{n+1})^{p_{n+1}} (1 + \theta_n)\end{aligned}$$

czyli mamy, że

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &\leq \alpha_{n+1} + \theta_n + \alpha_{n+1} \theta_n \leq \\&\leq \frac{u}{1-u} + \frac{nu}{1-nu} + \frac{nu}{1-nu} \frac{u}{1-u} = \\&= \frac{u(1-nu) + nu(1-u) + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\&= \frac{u - nu^2 + nu - nu^2 + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\&= \frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)}\end{aligned}$$

ale ja potrzebuje

$$\theta_{n+1} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

To sprawdzmy, czy

$$\begin{aligned}\frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} &\leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u} \\ \frac{(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} &\leq \frac{(n+1)}{1-(n+1)u}\end{aligned}$$

$$1 - nu + n \leq n + 1$$

bo $nu < 1$, czyli

$$1 - nu + n \leq n \leq n + 1$$

oraz

$$(1-nu)(1-u) = 1 - u - nu + nu^2 \geq 1 - nu - u$$

co jest prawda, bo $nu^2 \geq 0$.

To mamy ograniczenie od góry, teraz muszę zrobić od dołu

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1} (1 + \alpha_j)^{p_j} &= 1 + \theta_{n+1} = \\&= (1 + \theta_n)(1 + \alpha_{n+1})^{p_{n+1}} \\&\geq (1 + \theta_n)(1 + \alpha_n)^{-1} \geq \\&\geq \left(1 - \frac{nu}{1-nu}\right) \left(1 + \frac{u}{1-u}\right)^{-1} = \\&= \frac{1-2nu}{1-nu} \left(\frac{1}{1-u}\right)^{-1} = \\&= \frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu}\end{aligned}$$

teraz potrzebuje pokazac, zeby

$$\begin{aligned}\frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu} &\geq 1 - \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u} = \frac{1-2(n+1)u}{1-(n+1)u} \\ (1-2nu)(1-u)(1-nu-u) &\geq (1-nu)(1-2(n+1)u) \\ (1-nu-u)(1-u-2nu+2nu^2) &\geq (1-nu)(1-2nu-2u) \\ (1-nu)(1-u-2nu) + (1-nu)(2nu^2) - u(1-u-2nu+2nu^2) &\geq (1-nu)(1-2nu-u) - u(1-nu) \\ 2nu^2 - nu2nu^2 - u + u^2 + 2nu^2 - 2nu^3 &\geq nu^2 - u\end{aligned}$$

ZAD 2.

Znowu indukcja, czyli zakladamy, ze zachodzi dla wszystkich n , wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1} (1 + \alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} = (1 + \theta_n)(1 + \alpha_{n+1}) = 1 + \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n \alpha_{n+1}$$

czyli

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n \alpha_{n+1} \leq 1.01nu + u + 1.01nu^2$$

Wystarczy mi, zeby

ZAD 3. x, y – liczby maszynowe takie, ze $|y| \leq \frac{1}{2}u|x|$, pokazac, ze $fl(x+y) = x$

WERSJA PODPIERDOLONA

Zapiszmy te liczby w postaci

$$|x| = m_x 2^{c_x}$$

$$|y| = m_y 2^{c_y}$$

Wiemy tez, ze

$$|y| = m_y 2^{c_y} \leq m_x 2^{c_x} \cdot 2^{-t-2}$$

a przez to, ze $\frac{\frac{1}{2} < m_x}{m_y < 2}$, bedziemy musieli wszystko dostosowywac korzystajac z cechy, a mantysa nic nam nie naprawi. W takim razie

$$c_x - c_y \geq t+2.$$

Zeby dodawac liczby, musimy wyrownac cechy, czyli przesunac w prawo mantyse y o $t+2$ bitow w prawo. W takim raize mamy

$$x + y = m_x 2^{c_x} + m_y 2^{c_x} 2^{-t-2} = 2^{c_x} (m_x + m_y 2^{-t-2})$$

Super, ale u nas mantysa ma t bitow, to jak przesuniemy y w prawo o $t+2$, to nam nic nie zostanie do dodawania, wiec zachowa sie tylko mantysa x razy 2^{c_x} .

ZAD 4.

ZAD 5.

$$f(a) = a^2 + a \quad \text{wynik dokladny}$$

$$f(a(1+\alpha)) = a^2(1+\alpha)^2 + a(1+\alpha) \quad \text{wynik dokladny przy LZB}$$

$$f(a(1+\alpha)) \frac{1+\beta}{1+\alpha} = a^2(1+\alpha)(1+\beta) + a(1+\beta) \quad \text{zaburzony wynik LZB, aka } fl(f(a))$$

ZAD 6.

$$w(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_n)))$$

$$f_l(w) = a_0(1+\alpha_0) + x(1+\beta_1)(a_1(1+\alpha_1) + x(1+\beta_2)(a_2(1+\alpha_2) + \dots + x(1+\beta_{n-1})(a_{n-1}(1+\alpha_{n-1}) + x(1+\beta_n)(a_n(1+\alpha_n))))$$

$$f_l(w) = \sum_{i=0}^n x^i a_i \prod_{j=1}^i (1 + \beta_j) \prod_{k=0}^i (1 + \alpha_k) = \sum_{i=0}^n x^i (a_i (1 + E))$$

ZAD 7.

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}$$

a) uzasadniamy przez indukcje

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)} &= \cos \frac{A}{2} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos A) &= \cos^2 \frac{A}{2} \\ 1 + \cos A &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} \\ \cos A &= \cos^2 \frac{A}{2} + (\cos^2 \frac{A}{2} - 1) \\ \cos A &= \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)} &= \sin \frac{A}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos A) &= \sin^2 \frac{A}{2} \\ 1 - \cos A &= 2 \sin^2 \frac{A}{2} \\ 1 - \cos A &= 1 - \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \\ \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} &= \cos A \end{aligned}$$

Dla $n = 2$:

$$P_{2^2} = \frac{1}{2} 2^2 \sin \frac{2\pi}{2} = 2^{2-1} \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi}{2})} = 2^{2-1} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1)} = 2^{2-1} \sqrt{1} = 2$$

Dalej zakładamy, że jest prawdziwa dla wszystkich n , wtedy

$$P_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} 2^{n+1} \sin \frac{2\pi}{2^{n+1}} = 2^n \sin \frac{2\pi}{2^n} = 2^n \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi}{2^n})} = ALG$$

ZAD 8.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$

Jezeli $c \geq 0$ to smiga, ale jesli $c < 0$, to w okolicy $x = \sqrt{-c}$ cały przykład sie jebie.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + c} &= -\frac{2x}{(c + x^2)^2} \\ C_f(x) &= \frac{2x^2}{(c + x^2)^2} \cdot \frac{x^2 + c}{1} = \frac{2x^2}{c + x^2} = \frac{2}{\frac{c}{x^2} + 1} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\frac{d}{dx} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^3}$$

