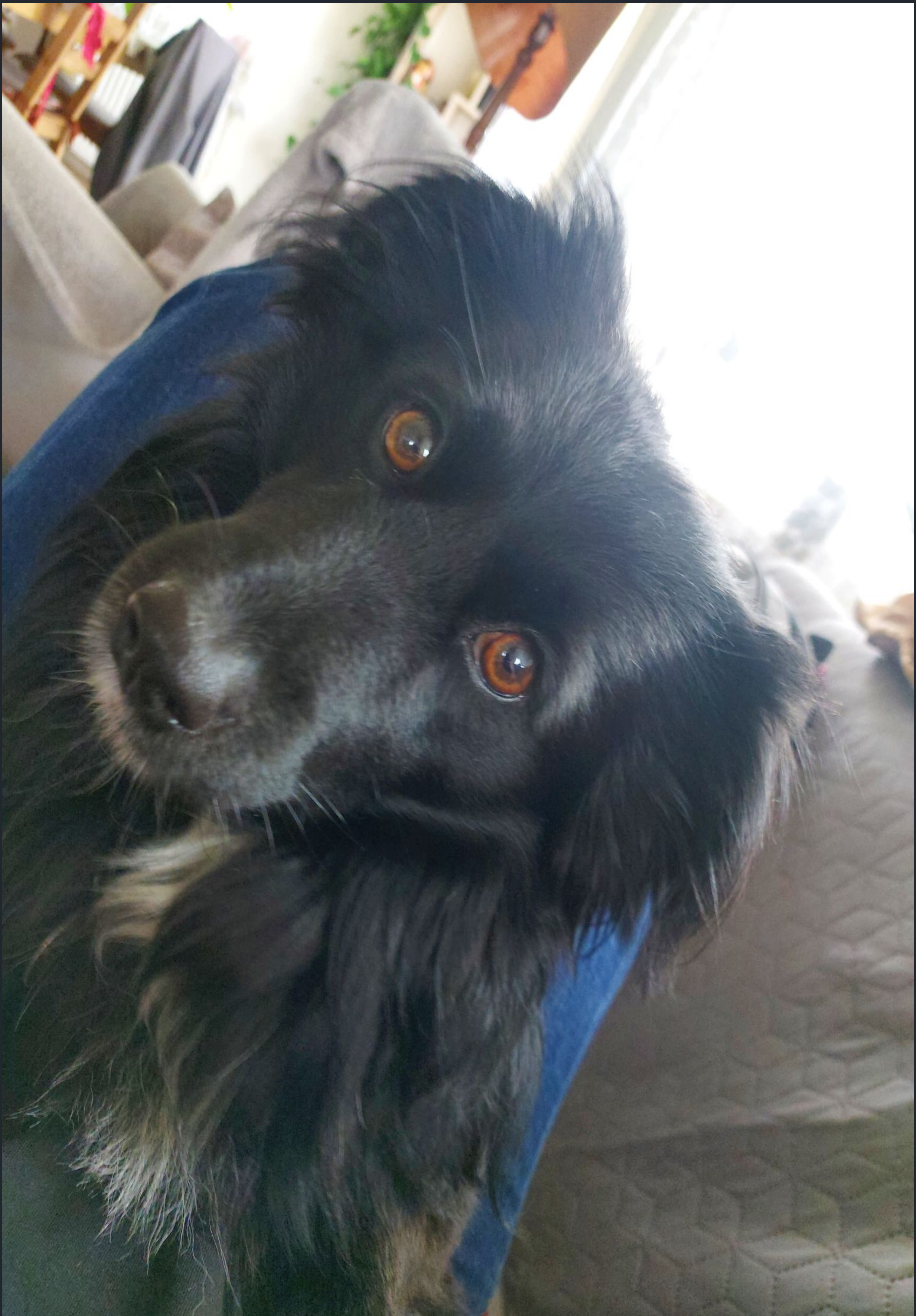
Miara i calka

by a plebanek fangirl :>

21.03.2137

Contents



1 Zbiory

1.1 Wstęp o zbiorkach

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Mówimy, że ciąg zbiorów A_n zbiega od dołu do A, $[A_n \uparrow A]$ jeżeli

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

analogicznie zbieganie od góry $[A_n \downarrow A]$:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Granice górna i dolna:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

i ogółem

$$A = \lim A_n \iff \limsup A_n = \liminf A_n = A.$$

Każdy niepusty otwarty $U \subseteq \mathbb{R}$ można zapisać

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

gdzie $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.
Dla zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}$ mamy z kolei

$$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

i istnieje wtedy takie N, że

$$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n).$$

Rodzina $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ jest pierścieniem $[r(\mathscr{R})]$, jeśli:
$\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{R}$
$\hookrightarrow (\forall\, A, B \in \mathscr{R})\ A \setminus B \in \mathscr{R}$ i $A \cup B \in \mathscr{R}$ (*wnioskiem z tego jest, że* $A \cap B \in \mathscr{R}$).
Pierścień, który jest dodatkowo zamknięty na przeliczalne sumy, tzn.

$$(\forall\, A_n \in \mathscr{R})\ \bigcup A_n \in \mathscr{R}$$

nazywa się σ-pierścieniem $[s(\mathscr{R})]$.
Pierścień, który jest domknięty na dopełnienia, jest nazywany ciałem $[a(\mathscr{R})]$, natomiast σ-pierścień domknięty na dopełnienia to σ-ciało $[\sigma(\mathscr{R})]$. W σ- mamy też domknięcie na $\limsup$ i $\liminf$ ciągów zbiorów.

Rodzina $\mathscr{R}$ zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ takich, że

$$A = \bigcup [a_n, b_n)$$

jest pierścieniem. Co więcej, każdy taki A można zaprezentować za pomocą rozłącznych przedziałów.

σ-ciało zbiorów borelowskich $[\sigma(\mathscr{U})]$ to najmniejsze σ-ciało zawierające rodzinę $\mathscr{U}$ wszystkich podzbiorów otwartych $\mathbb{R}$.
Jeśli $\mathscr{F}$ to zbiór przedziałów postaci $[p, q)$, $p, q \in \mathbb{Q}$ to mamy równość

$$\sigma(\mathscr{F}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$$

1.2 Funkcje zbiorów

Jeśli $\mathscr{R}$ jest pierścieniem zbiorów i mamy funkcję

$$\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$$

to μ jest addytywną funkcją zbiorów, jeśli
$\hookrightarrow \mu(\emptyset) = 0$
$\hookrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dla $A \cap B = \emptyset$.
Kilka fajnych własności:
$\hookrightarrow A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
$\hookrightarrow A \subseteq B$ i $\mu(A) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) = \mu(A)$
$\hookrightarrow A_1, \ldots, A_n$ parami rozłączne, to $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru to μ jak wyżej takie, że dla dowolnego A i A_i rozłącznych takich, że

$$A = \bigcup A_i$$

zachodzi

$$\mu(A) = \mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$$

Jeśli μ jest przeliczalną funkcją zbioru i $A - \bigcup A_i$, to zachodzi

$$\mu(A) = \mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$$

Addytywna funkcja zbioru jest przeliczalna $\iff$ jest ciągła z dołu (alternatywnie z góry), tzn:

$$(\forall\ A)(\forall\ A_n)\ A_n \uparrow A \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A).$$

Dla addytywnej μ następujące warunki są równoważne:

$\hookrightarrow$ μ - przeliczalnie addytywna
$\hookrightarrow$ μ - ciągła z góry/dołu
$\hookrightarrow$ μ - ciągła z góry na zbiór $\emptyset$.

1.3 Miara Lebesgue'a I

Dla $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, gdzie $[a_i, b_i)$ są rozłączne, definiujemy naturalną funkcję zbioru λ:

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i).$$

Od razu warto zaznaczyć, że $[a_i, b_i)$ nie musi być ciągiem skończonym - ciągi nieskończone też śmigają, bo λ jest przeliczalną addytywną funkcją zbioru.