Algebra 1R

by a moron :3

21.03.2137

1 Powtorka z poprzedniego roku

1.1 Grupy, pierscienie, ciala

Dzialanie na zbiorze X:

$$\Phi : X \times X \to X,$$

zwykle zapisywane jako xy, $x \cdot y$, $x + y$.

Element neutralny – takie e, ze dla kazdego $x \in X$ $ex = xe = x$. Dzialanie ma co najwyzej jeden element neutralny.

Element odwrotny do x to takie y, ze $xy = yx = e$. Jesli dzialanie jest laczne, to ma co najwyzej jeden element odwrotny do danego x.

Homomorfizm algebry $\mathscr{X} = (X, \{\cdot\})$ na algebre $\mathscr{Y} = (Y, \{\circ\})$ nazywamy przeksztalcenie $f : X \to Y$ spelniajace dla kazdego $a, b \in X$

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b).$$

- monomorfizm – f jest 1-1
- epimorfizm – f jest "na"
- izomorfizm – f jest 1-1 i "na"
- endomorfizm – kiedy $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$
- automorfizm – enodmorfizm bedacy izomorfizmem

Polgrupa to niepusty zbior z dzialaniem lacznym.

GRUPA to niepusty zbior z lacznym dzialaniem i elementem neutralnym (zwanym jednoscia grupy) oraz elementami odwrotnymi dla kazdego elementu.

$\hookrightarrow$ grupa abelowa (przemienna) - grupa z dzialaniem przemiennym

Zbior G z dzialaniem $\cdot$ jest grupa, jesli:

1. $(\forall\, a, b, c \in G)\ (ab)c = a(bc)$
2. $(\exists\, e \in G)(\forall\, a \in G)\ ea = ae = e$
3. $(\forall\, a \in G)(\exists\, b \in G)\ ab = ba = e$

*4. $(\forall\, a, b \in G)\ ab = ba$ w grupie *abelowej*

PIERSCIEN to niepusty zbior X z dwoma dzialaniami ($\cdot$, $+$, mnozenie i dodawanie), ktory spelnia:

1. zbior X z $+$ jest grupa abelowa
2. $\cdot$ jest laczne
3. $(\forall\, x, y, z \in X)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \wedge\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Kolejne dzikie nazwy $\star$:

$\star$ pierscien przemienny – jesli mnozenia jest przemienne

$\star$ pierscien z jednoscia – dla mnozenia istnieje element neutralny

CIALO to pierscien przemienny, ktory dla kazdego elementu $\neq 0$ ma element odwrotny

Niech G bedzie grupa, a e jej elementem neutralnym. Wowczas:

$\hookrightarrow$ $a, b \in G \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$\hookrightarrow$ $a \in G$ i $n = 1, ..., n$ $a^{-n} = (a^n)^{-1} =^* (a^{-1})^n$

$\hookrightarrow$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$ oraz $a \in G$ mamy $a^{mn} =^* (a^m)^n$

$\hookrightarrow$ dla G grupy abelowej i $n \in \mathbb{Z}$ $(ab)^n =^* a^n b^n$

* trzeba udowodnic, ale mi sie nie chce

$H \subseteq G$ jest podgrupa G, jesli jest grupa ze wzgledu na te same dzialania, czyli wystarczy, ze

$$(\forall\, a, b \in H)\ ab^{-1} \in H.$$

Jelsi $a \in G$ i istnieja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, takie, ze $a^n = e$, to mowimy ze n jest rzedem elementu a ($n = o(a)$). Jesli takie n nie istnieja, to a ma rzad nieskonczony ($o(a) = \infty$).

$\hookrightarrow$ grupa torsyjna – wszystkie elementy maja rzad skonczony

$\hookrightarrow$ grupa beztorsyjna – wszystkie elementy maja rzad nieskonczony

Jesli $n = o(a)$ oraz $a^N = e$ to $n|N$, fajny dowodzik, ale leniem jestem