Miara i calka

speedrun przed terminem 0

by a MEEEE

21.03.2137

ROZDZIAŁ 2

Funkcja Σ-mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ to funkcja, która dla każdego $f^{-1}[B] \in \Sigma$ spełnia $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, równoważnie jeżeli $\mathscr{G} \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że $\sigma(\mathscr{G}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, to wystarczy dla każdego $G \in \mathscr{G}$ $f^{-1}[G] \in \Sigma$.

Każdy z poniższych pociąga mierzalność:

$\{x : f(x) < t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \leq t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) > t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \geq t\} \in \Sigma$

Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest Σ-mierzalna, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ jest Σ-mierzalna.

Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

Każdą Σ-mierzalna funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.

Funkcja prosta to funkcja o skończonym zbiorze wartości, czyli kombinacja liniowa skończenie wielu funkcji charakterystycznych

Ciąg funkcji mierzalnych jest zbieżny prawie wszędzie, jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ poza zbiorem miary zero.

Dla każdej λ-mierzalnej funkcji f istnieje borelowska funkcja g taka, że $f = g$ λ-prawie wszędzie.

Jeżeli $f_n \to f$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ o $\mu(A) < \varepsilon$ i f_n jest jednostajnie zbieżny do j na zbiorze A^c.

Ciąg funkcji mierzalnych jest niemal jednostajnie zbieżny, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg f_n zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.

Mówimy, że ciąg jest zbieżny według miary, jeżeli dla każdego ε $\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

$\hookrightarrow$ Zbieżny niemal jednostajnie $\implies$ zbieżny według miary.
$\hookrightarrow$ Zbieżny prawie wszędzie w mierze skończonej $\implies$ zbieżny według miary.

Twierdzenie Riesza: jeżeli ciąg funkcji spełnia warunek Cauchy'ego według miary, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

to f_n jest zbieżny według miary do pewnego f oraz istnieje podciąg liczb naturalnych $n(k)$ taki, że $f_{n(k)}$ jest zbieżny prawie wszędzie oraz według miary.

ROZDZIAŁ 3

Całkę po funkcji prostej $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ definiujemy jako

$$\int_X f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Dla nieujemnej mierzalnej funkcji f definiujemy

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f\},$$

czyli jeżeli $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ jest ciągiem funkcji prostych takich, że $\lim_n s_n = f$ prawie wszędzie, to

$$\int_X f d\mu = \lim_x \int_X s_n d\mu.$$

Funkcja mierzalna jest całkowalna, jeżeli $\int_X |f| d\mu < \infty$, wtedy definiujemy całkę wzorem $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ dla $f = f^x - f^-$ nieujemnych.

Dla f, g całkowalnych i h mierzalnej:

$\hookrightarrow$ $\int_X (af + gb) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$
$\hookrightarrow$ $h = 0$ prawie wszędzie, to $\int_X h d\mu = 0$
$\hookrightarrow$ $f \leq g$ prawie wszędzie, to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
$\hookrightarrow$ $| \int_X (f + g) d\mu| \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu$
$\hookrightarrow$ $a \leq f \leq b$ prawie wszędzie, to $a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X)$
$\hookrightarrow$ dla $A, B \in \Sigma$ jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej: niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych takich, że $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ zbieżnych prawie wszędzie do $f = \lim_n f_n$

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Lemat Fatou: dla dowolnego ciągu funkcji nieujemnych f_n zachodzi

$$\int_X \liminf f_n d\mu = \liminf \int_X f_n d\mu$$

Twierdzenie Lesbegue'a o zbieżności ograniczonej: niech f_n, g będą mierzalne, że dla każdego n $|f_n| \leq g$ zachodzi prawie wszędzie przy czym $\int_X g d\mu < \infty$. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie, to

$$\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\lim_n \int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

Jeżeli teraz $\mu(X) < \infty$ oraz f_n są wspólnie ograniczone i $\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

Jeżeli f jest mierzalna i nieujemna, to funkcja $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

jest miarą na Σ.

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest λ-mierzalna i obie całki są sobie równe: $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

ROZDZIAŁ 4

Niech (X, Σ) i (Y, Θ) będą przestrzeniami z Σ, Θ będącymi σ-ciałami. W $X \times Y$ możemy zdefiniować następujące σ-ciało:

$$\Sigma \otimes \Theta = \sigma(\{A \times B \;:\; A \in \Sigma, B \in \Theta\}),$$

wtedy $\Sigma \otimes \Theta$ jest produktem σ-ciał Σ i Θ.

Zbiór $F \subseteq X \times Y$ należy do ciała prostokątów na Σ, Θ wtw $F = \bigcup A_i \times B_i$ dla $A_i \in \Sigma$ i $B_i \in \Theta$.
Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, to dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$ definiujemy cięcia pionowe i poziome $E_x = \{z \in Y \;:\; (x, z) \in E\}$ i $E^y = \{z \in Z \;:\; (z, y) \in E\}$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, a funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalna, to funkcja f_x jest θ-mierzalna, a f^y jest Σ-mierzalna.

$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Miarę na produkcie przestrzeni (X, Σ, μ) i (Y, Θ, ν) definiujemy:

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

Na σ-ciele $\Sigma \otimes \Theta$ istnieje jedyna miara spełniająca dla każdego $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

a dla dowolnego $E \in \Sigma \otimes \Theta$ funkcja $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ są mierzalne i zachodzą wzory:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Twierdzenie Fubiniego: jeżeli funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalna oraz f jest nieujemna lub f jest $\mu \otimes \nu$-całkowalna, to wtedy

$$I : x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

$$J : y \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(x)$$

są mierzalne względem Σ i odpowiednio Θ, oraz

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \\ = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Czyli możemy bezkarnie zamieniać granice całkowania.

Jeżeli rozważamy przestrzenie metryczne (X_i, Σ_i, μ_i) dla $i = 1, \ldots, n$, to na σ-ciele $\bigotimes_{i \leq n} \Sigma_i$ podzbiorów $\prod_{i \leq n} X_i$ generowanym przez wszystkie kostki mierzalne $A_1 \times \ldots \times A_n$, to istnieje jedyna miara $\mu = \bigotimes \mu_i$ spełniająca dla wszystkich $A_i \in \Sigma_i$

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

$K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - przestrzeń ciągów $0, 1$, wtedy możemy określić metrykę $d(x, y) = \frac{1}{n}$ gdzie n to pierwszy indeks gdzie te dwa ciągi się różnią.

Funkcja $f : K \to [0, 1]$ zadana $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n}$ jest homeomorfizmem między K a zbiorem Cantora. Dla funkcji $\psi : \mathbb{N} \supseteq A \to \{0, 1\}$ oznaczamy zbiór

$$[\psi] = \{x \in K \;:\; x(i) = \psi(i)\ i \in A\}.$$

Cylindry ten postaci są otwarto-domknięte w K i stanowią bazę topologii w K. Oznaczmy przez $\mathscr{C}$ ciało podzbiorów K generowanych przez wszystkie cylindry. Zbiór C jest w $\mathscr{C}$ wtw istnieje n i $C' \subseteq \{0, 1\}^n$ takie, że $C = C' \times \{0, 1\} \times \ldots$.

Dla $C \in \mathscr{C}$ definiujemy miarę na K:

$$\nu(C) = \frac{|C'|}{2^n}$$

która spełnia własność:

$$(\forall\, B \in \mathrm{Bor}(K))(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, C \in \mathscr{C})\ \nu(B \Delta C) < \varepsilon.$$

ROZDZIAŁ 5