Zadania z ⋆⋆ LISTA 007

Weronika Jakimowicz

29 luty 2023

ZAD. 2

Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *i* $m < n$ *jest klasy* C^1*, rząd* Df *jest równy* m *w każdym punkcie. Pokazać, że nie jest wzajemnie jednoznaczna.*

Krótkie rozważanie topologiczne:

Dla dowolnego $n > 1$ wiemy, że $\mathbb{R}^n$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{R}$, bo punkt rozspaja prostą, a spójność jest niezmiennikiem homeomorfizmu. Można to jeszcze przeciągnąć na $n > 2$ i $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$, bo $\mathbb{R}^2$ bez punktu x nie jest jednospójna - pętelka która przy zwężaniu przeszłaby przez x nie może zostać zwężona jeśli usuniemy x. Jednospójność jest również niezmiennikiem homeomorfizmu, a więc tutaj nie może on istnieć.

Załóżmy nie wprost, że f jest bijekcją.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, niestałą, różniczkowalną to istnieje $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takie, że $Dh(x_0) \not\equiv 0$. Gdyby tak nie było, to dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ $Dh(x) = 0$, ale jeśli pochodna się nie zmienia to funkcja jest stała i mamy sprzeczność. Zajmiemy się funkcją $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taką, że

$$g(x) = (f(x), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

i ponieważ f jest $1-1$, to istnieje $x_0 \in \mathbb{R}^n$ taki, że $Dg(x_0) \not\equiv 0$. Czyli dla pewnego bardzo małego otoczenia $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ g jest funkcją odwracalną, a więc w szczególności na $g[U]$.
Niech więc $z, y \in U$ i niech z, y różnią się na $i > m$ współrzędnej. Ponieważ na U g jest jednoznaczna, to możemy też wymagać, aby $g(z)$ i $g(y)$ miały tę samą pierwszą współrzędną - coś musi pokryć

Załóżmy nie wprost, że f jest bijekcją. To znaczy, że nie możemy mieć $Df(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Rozważmy teraz funkcję

$$g(x) = (f(x), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

i przypatrzmy się jej (teraz mam już nadzieję, że poprawnemu) jakobianowi

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}f_1(x) & \frac{d}{dx_2}f_1(x) & \ldots & \frac{d}{dx_n}f_1(x) \\ \frac{d}{dx_1}f_2(x) & \frac{d}{dx_2}f_2(x) & \ldots & \frac{d}{dx_n}f_2(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d}{dx_1}f_m(x) & \frac{d}{dx_2}f_m(x) & \ldots & \frac{d}{dx_n}f_m(x) \\ & 0 & & Id_{n-m} \end{bmatrix}$$

Szybko zauważmy, że wyznacznik macierzy $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

dla B, D - macierzy kwadratowych jest równy $\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$. Najłatwiej (niekoniecznie najładniej) jest to uzasadnić korzystając z metody eliminacji Gaussa. Chcemy zeschodkować macierz B i macierz D. Zauważamy, że do schodkowania D wystarczy nam tylko dolna część, która przecież nie ma nic wspólnego z D. Tak samo dla schodkowania góry wystarczy nam tylko korzystanie z wierszy i kolumn pokrywających sie z B, a więc rozłącznych z D. Czyli górną część przekątnej zrobiliśmy korzystając tylko z B, a dolną - tylko z D, więc mnożąc to wszystko dostajemy schodki tylko B (czyli det(B)) pomnożone ze schodkami tylko D (czyli det(D)).

Niech więc

$$A_x = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}f_1(x) & \frac{d}{dx_2}f_1(x) & \dots & \frac{d}{dx_m}f_1(x) \\ \frac{d}{dx_1}f_2(x) & \frac{d}{dx_2}f_2(x) & \dots & \frac{d}{dx_m}f_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dx_1}f_m(x) & \frac{d}{dx_2}f_m(x) & \dots & \frac{d}{dx_m}f_m(x) \end{bmatrix}$$

wtedy $Dg(x) = \det(A_x)$, które z kolei jest jakobianem obcięcia f do $\mathbb{R}^m$, czyli jeśli f jest $1-1$, to również to obcięcie jest $1-1$ i $\det(A_x) = Dg(x) \neq 0$

TUTAJ ROBIE SKIPA

Weźmy dowolne