Ujebanko przez kolanko

maruda

69

ZAD. 1.

Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste} \\ \frac{2}{1-n^2} \end{cases}$$

W tym zadaniu skorzystamy z własności wielomianów Czebyszewa:

$$T_n(\cos t) = \cos(nt)$$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \begin{bmatrix} x = \cos(t) \\ dx = \sin(t)dt \end{bmatrix} = \int_{\pi}^{2\pi} T_n(\cos t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)dt = \frac{n\sin(x)\sin(nx) + \cos(x)\cos(nx)}{n^2 - 1}\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= \frac{\cos(2\pi)\cos(2n\pi) - \cos(\pi)\cos(n\pi)}{n^2 - 1} = \frac{\cos(2n\pi) + \cos(n\pi)}{n^2 - 1}$$

Ponieważ $\cos(2\pi) = 1$ oraz okres cos to 2π, wiemy, że dla każdego n jest $\cos(2n\pi) = 1$. Wiemy, że $\cos(\pi) = -1$, czyli dla nieparzystych $n = 2k + 1$ mamy

$$\cos(n\pi) = \cos((2k+1)\pi) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$$

natomiast dla parzystych n jest jak dla $\cos(2n\pi) = 1$.

ZAD. 2.

Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ *stosując kwadraturę Newtona-Cotesa, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi* $x_k := a + kh$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, n$, *gdzie* $h := \frac{b-a}{n}$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k).$$

Wykazać, że

$$A_k^{(n)} = h(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (t - j)dt$$

Niech będzie

$$B_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{b - a}.$$

Sprawdzić, że

- ↪ *wielkości* $B_k^{(n)}$ *są liczbami wymiernymi*
- ↪ $B_k^{(n)} = B_{n-k}^{(n)}$.

Z jednej notatki ze SKOSa wiemy, że w kwadraturze interpolacyjnej jest

$$A_k^{(n)} = \int_a^b p(x) \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx$$

oraz, że dla kwadratury Newtona-Cotesa $p \equiv 1$. Czyli

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx = \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{x - (a + jh)}{a + kh - a - jh} dx = \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k} \frac{x - a - jh}{(k - j)h} dx =$$

$$= \int_a^b \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - a - jh}{(k - j)h}\right]\left[\prod_{j=k+1}^{n} \frac{x - a - jh}{(k - j)h}\right] dx = \int_a^b \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - a - jh}{k!}\right](-1)^{n-k}\left[\prod_{j=k+1}^{n} \frac{x - a - jh}{(n - k)!}\right] dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k} (x - a - jh) dx = \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k} \left[\frac{nx - na}{b - a} - j\right] dx = \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \begin{bmatrix} t = \frac{nx-na}{b-a} \\ dt = ndx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq k}^{n} (t - j) dt$$

(a) I mean, to jest dość oczywiste

$$B_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{b - a} = \frac{n}{h} \cdot \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq k} (t - j) dt = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq k} (t - j) dt$$

Początek jest jasne, że należy do wymiernych. Problem jest z całką, ale to co całkujemy to jest wielomian o współczynnikach wymiernych na przedziale o początku i końcu wymiernym, czyli wartość tej całki też będzie wymierna.

(b)

$$B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq k} (t - j) dt =$$

$$B_{n-k} = \frac{(-1)^{k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq n-k} (t - j) dt$$

Czyli ogólnie to potrzebuję

$$(-1)^{n-k} \int_0^n \prod_{j\neq k} (t - j) dt = (-1)^k \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (t - j) dt$$

$$B_k = (-1)^k \int_0^n \prod_{j\neq k} (t - j) dt = (-1)^k \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (t - n + j) dt = \begin{bmatrix} p = n - t \\ -dp = dt \end{bmatrix} = (-1)^k(-1) \int_n^0 \prod_{j\neq n-k} (j - p) dp =$$

$$= (-1)^k \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (j - p) dp = (-1)^k(-1)^n \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (p - j) dp = (-1)^{n+k} \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (p - j) dp =$$

$$= (-1)^{n-k} \int_0^n \prod_{j\neq n-k} (p - j) dp = B_{n-k}$$

ZAD. 3.

Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} = 1.$$

Rozważmy funkcję f stale równą zero na przedziale od 0 do 1. Wtedy

$$1 = Q_n^{NC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}$$

i jeśli podzielimy to przez długość naszego przedziału, to otrzymujemy

$$\frac{1}{1-0} = 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^{(n)}}{1-0} = \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}$$

ZAD. 6.

Niech $f \in C^4[a,b]$. *Obliczamy wartość całki* $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ *za pomocą wzoru Simpsona, czyli kwadraturą Newtona-Cotesa dla* $n = 2$. *Udowodnić, że istnieje taka liczba* $\varepsilon \in [a,b]$ *dla której*

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{90} h^5$$

Strona 139-140 Fichtenholz część druga.

ZAD. 8.

Wykazać, że dla dowolnej funkcji f *ciągłej w przedziale* $[a,b]$ *ciąg złożonych wzorów trapezów* $\{T_n(f)\}$ *jest zbieżny do wartości całki* $\int_a^b f(x)dx$ *gdy* $n \to \infty$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a+(k+1)h) + f(a+kh)}{2} h = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+1)h)h + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)h \to \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

ZAD. 9.

$$T_n(f) = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + f(a+nh)]$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a+kh}^{a+(2k+2)h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a+(2k+2)h - (a+2kh)}{6} \Big[f(a+2kh) + 4f(a+2kh+1) + f(a+(2k+2)h)\Big] = \\
&= \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 3f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h) + f(a+nh)] = \\
&= \frac{h}{3}[2f(a) + 4f(a+h) + 4f(a+2h) + \ldots - f(a) - 2f(a+2h) - 2f(a+4h) - \ldots - f(a+nh)] = \\
&= \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{\frac{n}{2}}(f)]
\end{aligned}$$

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{cases} p(1) = 0 = 1 - 3 + a_1 + a_0 \\ p(2) = 0 = 8 - 12 + 2a_1 + a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 1 - 3 + a_1 + a_0 \\ 0 = 7 - 9 + a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$