

1. Find (by "drawing" pictures representing graphs) all pairwise non-isomorphic graphs of order 4.

2. For a graph G , define a relation \approx on $V(G)$ by saying $v \approx w$ if and only if there exists a path in G with endpoints v and w . Show that \approx is an equivalence relation – that is, show that $(\forall u \in G)(u \approx ua)$, that $(\forall u, v \in G)(u \approx v \implies v \approx u)$, and that $(\forall u, v, w \in G)([u \approx v \wedge v \approx w] \implies u \approx w)$.

3. Given a graph G , define its *complement* \bar{G} as a graph with vertices $V(\bar{G}) = V(G)$, such that given $v, w \in V(G)$ with $v \neq w$, we have $vw \in E(\bar{G})$ if and only if $vw \notin E(G)$.

a. Show that if $G \simeq \bar{G}$, then $|G| \equiv 0$ or $1 \pmod{4}$.

b. Show that for any graph G , either G or \bar{G} is connected.

4. Show that any graph of order at least 2 has two vertices of the same degree.

5. a. Show that every connected graph G contains a vertex $v \in G$ such that $G - \{v\}$ is connected.

[Hint: pick v so that some connected component of $G - \{v\}$ is as big as possible]

b. A connected graph with at least one vertex is called a *tree* if it has no cycles.

Show that every tree with ≥ 2 vertices has a vertex of degree 1 (such a vertex is called a *leaf*)

c. Deduce that if T is a tree then $e(T) = |T| - 1$

d. Let G be a graph with $|G| = n$. We say that a tuple $(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$, where $\{v_1, \dots, v_n\} = V(G)$, is a *degree sequence* of G . Show that a given tuple (d_1, \dots, d_n) of integers, where $n \geq 2$, is a degree sequence of a tree iff $d_i \geq 1$ for all i and $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

6. Let $G = (V, E)$ be a graph. Show that there exists a partition $V = A \sqcup B$ such that all vertices of $G[A]$ and of $G[B]$ have even degree.

7. Suppose G is a graph that has no induced cycles of odd length – that is, for any $A \subseteq V(G)$, the graph $G[A]$ is not a cycle of odd length. Show that G is bipartite.

1. Znajdź (rysując obrazki reprezentujące grafy) wszystkie parami nieizomorficzne grafy stopnia 4.

2. Dla grafu G definiujemy relację \approx na $V(G)$ mówiąc, że $v \approx w$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka w G z końcami v oraz w . Pokaż, że \approx jest relacją równoważności – że spełnia ...

3. Mając dany graf G , definiujemy jego *dopełnienie* \bar{G} jako graf z wierzchołkami $V(\bar{G}) = V(G)$, taki, że dla danych $v, w \in V(G)$, $w \neq v$, mamy $vw \in E(\bar{G})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $vw \notin E(G)$.

a. Pokaż, że jeżeli $G \simeq \bar{G}$, to $|G| \equiv 0$ lub $1 \pmod{4}$.

b. Pokaż, że dla dowolnego grafu G albo G albo \bar{G} jest spójny.

4. Pokaż, że dowolny graf o stopniu co najmniej 2 ma dwa wierzchołki o tym samym stopniu.

5. a. Pokaż, że każdy spójny graf G posiada wierzchołek $v \in G$ taki, że $G - \{v\}$ jest spójny.

[cenzura <3]

b. Spójny graf z co najmniej jednym wierzchołkiem jest nazywany *drzewem* jeżeli nie ma cykli. Pokaż, że każde *drzewo* z ≥ 2 wierzchołkami ma wierzchołek stopnia 1 (taki wierzchołek nazywa się *liściem*).

c. Wydedukuj, że jeżeli T jest drzewem, wtedy $e(T) = |T| - 1$

d. Niech G będzie grafem z $|G| = n$. Mówimy, że krotka $(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$, gdzie $\{v_1, \dots, v_n\} = V(G)$, jest *sekwencją wierzchołków* ze sie ich stopnie nie zwiększają, sry nie znam nazwy i nie chce mi sie szukac wiecej niz na wikipedii, buzi grafu G . Pokaż, że mając krotkę (d_1, \dots, d_n) liczb całkowitych, gdzie $n \geq 2$, jest *ta właśnie seria* w *drzewie* wtedy i tylko wtedy, gdy $d_i \geq 1$ dla wszystkich i oraz $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokaż, że istnieje podział $V = A \sqcup B$ takie, że wszystkie wierzchołki $G[A]$ i $G[B]$ mają parzyste stopnie

7. Załóż, że G jest grafem nie mającym *induced cycle* (także *chordless cycle*) to taki cykl, że nie ma takich brzdasków które łączą wierzchołki w cyklu, ale do cyklu nie należą nieparzystej długości, tzn dla dowolnego $A \subseteq V(G)$, graf $G[A]$ nie ma cykli o nieparzystej długości. Pokaż, że G jest dwudzielne.

8. Let G be a regular bipartite graph with vertex classes W and M . Show that G contains a matching from W to M .

9. Let $n \geq m \geq 1$. An $m \times n$ *Latin rectangle* is an $m \times n$ matrix with entries in $[n]$ such that each $i \in [n]$ appears exactly once in each row and at most once in each column. Show that any $m \times n$ Latin rectangle forms the first m rows of any $n \times n$ Latin rectangle.

10. Let G be an infinite bipartite graph with (infinite) vertex classes W and M , and suppose that $|N_G(A)| \geq |A|$ for every $A \subseteq W$.
a. Show, by constructing an example, that such a graph G does not need to contain a matching from W to M .
b. Suppose that W is countable and $d_G(w) < \infty$ for all $w \in W$. Show that in this case G does contain a matching from W to M .

11. For each $k \geq 2$, give an example of a k -edge-connected graph that is not 2-connected. Is there a k -connected graph that is not 2-edge-connected?

12. Let G be a k -connected graph for some $k \geq 2$.
a. Show that for every $x \in G$ and every $U \subseteq V(G) \setminus \{x\}$ with $|U| \geq k$, there exists a collection of $(\{x\}, U)$ -paths $P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$, where $P^{(i)} = xy_{i,1} \dots y_{i,m_i}$, such that $y_{i,j} \neq y_{i',j'}$ for $(i,j) \neq (i',j')$ and such that $y_{i,j} \in U$ iff $j = m_i$.
b. Show that if $|G| \geq 2k$ then G contains a cycle of length $\geq 2k$.
c. Show that every collection of k vertices in G is contained in a cycle.

13. Let G be a k -edge-connected graph, and let $F \subseteq E(G)$ with $|F| = k$. Show that $G - F$ has at most two connected components.

14. Let G be an r -regular graph for some $r \geq 1$, and let $H = L_G$ be the line graph of G (appearing in the proof of the edge version of Menger's Theorem).
a. Show that H is regular.
b. Show that $L_H \simeq G$ iff $r = 2$.

8. Niech G będzie regularnym dwudzielnym grafem z klasami wierzchołków W i M . Pokaż, że G zawiera łączenie z W do M .

9. Niech $n \geq m \geq 1$. $m \times n$ *uposzczony trójkąt magiczny* to macierz $m \times n$ z elementami w $[n]$ takimi, że każde $i \in [n]$ występuje dokładnie jeden raz w każdym wierszu i dokładnie raz w każdej kolumnie. Pokaż, że dowolny $m \times n$ prostokąt tworzy pierwsze m wiersze prostokąta $n \times n$.

10. Niech G będzie nieskończonym dwudzielnym grafem z (nieskończonymi) klasami wierzchołków W i M i założ, że $|N_G(A)| \geq |A|$ dla każdego $A \subseteq W$.
a. Pokaż, poprzez konstrukcję przykładu, że taki graf G nie koniecznie musi zawierać połączenia z W do M .
b. Załóż, że W jest przeliczalne i $d_G(w) < \infty$ dla każdego $w \in W$. Pokaż, że w takim wypadku G nie zawiera połączenia z W do M .

11. Dla każdego $k \geq 2$ podaj przykład grafu, który jest spójny i jak wywalisz mniej niż k krawędzi to nadal jest spójny, który nie jest 2-spójny. Czy jest k -spójny graf, który nie jest jednocześnie 2-to-z-krawędziami?

12. Niech G będzie k -spójnym grafem dla pewnego $k \geq 2$.
a. Pokaż, że dla każdego $x \in G$ i dla każdego $U \subseteq V(G) \setminus \{x\}$, gdzie $|U| \geq k$, istnieje kolekcja $(\{x\}, U)$ -ścieżek $P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$, gdzie $P^{(i)} = xy_{i,1} \dots y_{i,m_i}$, taka, że $y_{i,j} \neq y_{i',j'}$ for $(i,j) \neq (i',j')$ i $y_{i,j} \in U$ iff $j = m_i$.
b. Pokaż, że jeżeli $|G| \geq 2k$, to G zawiera cykl długości $\geq 2k$.
c. Pokaż, że każda kolekcja k wierzchołków w G jest zawarta w cyklu.

13. Niech G będzie k -to-z-usuwaniem-krawędzi-zadł i niech $F \subseteq E(G)$, $|F| = k$. Pokaż, że $G - F$ ma co najwyżej dwa spójne podgrafy (części?).

14. Niech G będzie r -regularnym grafem dla pewnego $r \geq 1$ i niech $H = L_G$ będzie grafem krawędziowym grafu G (pojawiający się w dowodzie krawędziowej wersji twierdzenia Megera).

