MDM Lista 7

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Niech k będzie liczbą pionków do rozłożenia. Jeśli $k > n$, to wtedy co najmniej dwa muszą być w jednej kolumnie, a więc jeden nie będzie na lewo od drugiego. W takim razie musi być $k \leq n$.

Ułóżmy najpierw k pionków na planszy $k \times k$ tak, żeby w każdej parze jeden był na lewo i niżej niż drugi. Takie ułożenie jest jedno, to zaczy pionki muszą stać na przekątnej od lewego dolnego rogu do prawego górnego.
Jeśli ustawimy najpierw k pionków na planszy $k \times k$. Utożsamimy kolumny zawierające pionki z liczbą 1, natomiast kolumny puste z liczbą 0. Wtedy sposobów żeby ustawić $n - k$ jedynek w ciąg n elementowy mamy $\binom{n}{n-k}$. Analogiczna sytuacja zachodzi dla wierszy, a ogólna ilość rozwiązań to

$$\binom{n}{n-k}^2,$$

gdyż łączymy każde ustawienie kolumn z każdym ustawieniem wierszy.

ZAD. 2.

Liczba Fibonaciego F_n odpowiada na pytanie, ile jest ciągów składających się tylko z 1 i 2 sumujących się do $(n - 1)$. Popatrzmy teraz na sumę z zadania:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i}.$$

Pierwszy wyraz, $\binom{n-1}{0}$ to liczba ciągów składających się tylko z 1 sumujących się do $(n - 1)$. Drugi wyraz, $\binom{n-2}{1}$ skraca ciąg $(n - 1)$ jedynek o jeden i wybiera jedną z pozostałych $(n - 2)$ jedynek która zostanie zamieniona na 2. W ten sposób dostajemy ilość ciągów sumujących się do $(n - 1)$ zawierających tylko jedną liczbę 2. Tak więc dla k-tego wyrazu sumy usuwamy k jedynek, a z pozostałych na k sposobów wybieramy te, które zostaną zastąpione przez 2 $\binom{n-1-k}{k}$.

Teza:

$$F_{m+2n} = \sum i = 0^n \binom{n}{i} F_{i+m}$$

Niech $x_n = \begin{pmatrix} F_{m+1+n} \\ F_{n+m} \end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zauważmy, że

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$$

czyli

$$A^{2n} = (A^2)^n = (A + I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i$$

Mnożąc obie strony przez $x_0 = \begin{pmatrix} F_{m+1} \\ F_m \end{pmatrix}$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} F_{m+2n+1} \\ F_{m+2n} \end{pmatrix} = x_{2n} = A^{2n} x_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i x_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \begin{pmatrix} F_{m+i+1} \\ F_{m+i} \end{pmatrix}$$

i przyrównując drugie współrzędne otrzymujemy:

$$F_{m+2} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{m+i}$$