ANALIZA III - LISTA 1

1. Podać przybliżoną wartość wykorzystując płaszczyznę styczną:

(a) $\frac{2{,}01\cdot 1{,}03}{2{,}01^2-1{,}03^2}$ (b) $1,02^{3,01}$ (c) $\log(\sqrt[3]{1,03}+0,08^4)$

2. Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, ..., n\}$ jest otwarty, ale nie jest domknięty. Proszę zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

3. Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 2, ..., n\}$ jest domknięty. Proszę zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

4. Niech $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 1, x > 0\}$. Pokaż, że U jest otwarty, ale nie jest domknięty. Proszę spróbować zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

5. Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1, x > 0\}$. Pokaż, że D jest domknięty. Proszę spróbować zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

6. Niech $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Pokaż, że S jest domknięty.

7. Niech $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. g nie jest tożsamościowo równa zero, ani nie jest wszędzie ostro dodatnia. Podaj przykład tak zdefinowanego S, który jest zwarty i takiego, który nie jest zwarty.

8*. Pokaż, że jeśli zbiór $D \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, to z każdego ciągu $x_m \in D$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $x \in D$. *Wsk. Zbieżność w* $\mathbb{R}^n$ *to zbieżność po współrzędnych.*

9*. Korzystając z poprzedniego zadania, pokaż, że jeśli zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty,a $f : D \mapsto \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona i przyjmuje kresy tzn. istnieją punkty $x_1, x_2 \in K$ takie, że

$$f(x_1) = \min_{y\in K} f(y), \qquad f(x_2) = \max_{y\in K} f(y).$$

10. Niech $u = (\bar{u}, u_n) \in T_x$, dla funkcji różniczkowalnej f. Pokaż, że $|u_n - f(\bar{u})| = o(\|\bar{u} - \bar{x}\|)$.

11. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum.

(a) $f(x, y, z) = x - y + z$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
(b) $f(x, y) = x^2 + y$, przy warunku $x^2 + y^2 = 1$

12. Na elipsie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od prostej $3x + y - 9 = 0$