Ujebanko przez kolanko

maruda

69

ZAD. 3.

Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia ≤ 3 zachodziła równość $\int_0^1 (1 + x^2)f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

ZAD. 5.

Niech $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

(a) $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

1. zero dla $x = 0$ jest trywialne
2. jednorodność: niech $a \in \mathbb{R}$, wtedy

$$\|ax\| = \sum_{i=1}^{n} |ax_i| = \sum_{i=1}^{n} |a||x_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |a|\|x\|$$

3. warunek trójkąta:

$$\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\| + \|y\|$$

(b) $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

1. zero dla $x = 0$ trywialne
2. jednorodność: trywialne
3. warunek trójkąta:

$$\|x + y\| = \max_{1\leq k\leq n} |x_k + y_k| \leq \max_{1\leq k\leq n} (|x_k| + |y_k|) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| + \max_{1\leq k\leq n} |y_k| = \|x\| + \|y\|$$

ZAD. 6.

Wykazać, że macierzowa norma spektralna, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$ wyraża się wzorem $\|A\|_2 = \sqrt{\sigma(A^T A)}$, gdzie promień spektralny σ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

Po pierwsze zanotujmy sobie, że macierz A jest ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Normę ograniczonych operatorów liniowych definiujemy jako

$$\|A\| = \sup_{\|x\|<1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

jest to faktycznie największa wartość własna macierzy A. Zgaduję, że chcemy teraz pokazać, że jest to naprawdę normą.

1. zero jest dość trywialne
2. jednorodność: niech $a \in \mathbb{R}$

$$\|aA\| = \sup \frac{\|aAx\|}{\|x\|} = \sup \frac{|a|\|Ax\|}{\|x\|} = |a| \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |a|\|A\|$$

3. warunek trójkąta:

$$\|A + B\| = \sup \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} = \sup \left[\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right] = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

ZAD. 7.

Wykazać, że dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

(a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

Honestly, odmawiam pisania tego.

(b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

DUPA

$$\|x\| = \sup|x_k| = \sup\sqrt{x_k^2} \le \sqrt{\sum x_k^2} = \|x\|_2 \le \sqrt{\sum \sup x_k^2} = \sqrt{n \sup x_k^2} = \sqrt{n}\sup\sqrt{x_k^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

Nierówność Höldera: niech p, q takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wtedy

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \le \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\|x_1\| = \sum |x_k| = \sum \sqrt{x_k^2} \ge \sqrt{\sum x_k^2} = \|x\|_2 = \left[\sum |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ge \sum |x_i||\frac{1}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1$$

ZAD. 8.

Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum |a_{ij}|$.

$$\|A\|_\infty = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup \frac{\max|Ax_k|}{\max|x_k|} = \sup \frac{\max|\sum_{j=0}^n a_{kj}x_k|}{\max|x_k|} =$$
$$+ \sup \frac{\max|x_k||\sum a_{kj}|}{\max|x_k|} = \sup\max|\sum a_{kj}| = \max|\sum a_{kj}|$$

ZAD. 9.

Wykazać, że wzór $\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2}$ *definiuje normę submultiplikatywną normę w* $\mathbb{R}^{n\times n}$*, zwaną normą euklidesową zgodną z normą wektorową* $\|\cdot\|_2$.

Norma macierzy jest submultiplikatywna, jeżeli $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$. No to lecimy :v

$$\|AB\| = \sup\frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \le \sup\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\cdot\sup\frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\sup\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

Niech x będzie dowolnym niezerowym wektorem.
Korzystamy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\|Ax\|^2 = \sum_i\sum_j (a_{ij}x_j)^2 \le \sum_i\left[\sum_j a_{ij}^2 \sum_j x_j^2\right] = \|x\|^2 \sum_i\sum_j a_{ij}^2$$

Teraz jeżeli podzielimy obie strony przez $\|x\|$, to dostajemy

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \le \frac{\|x\|^2\sum_i\sum_j a_{ij}^2}{\|x\|^2} = \sum_i\sum_j a_{ij}^2$$

czyli

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sqrt{\sum_i\sum_j a_{ij}^2}$$

wystarczy pokazać, że dla któregoś to się zgadza. Po prostu weźmy $x_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wtedy $\|x\| = 1$, natomiast

$$\|Ax\| = \sum_i\sum_j\left(\frac{a_{ij}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{n}\sum_j a_{ij}^2 = \sum_i\sum_j a_{ij}^2$$