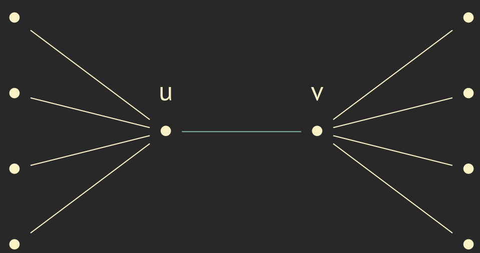
MDM Lista 13

Weronika Jakimowicz

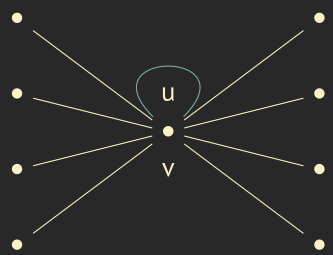
ZAD. 1.

Niech $G \bullet e$ oznacza graf G po ściągnięciu krawędzi e. Pokaż, że jeśli G jest planarny, to $G \bullet e$ też jest planarny. Czy graf Petersena jest planarny?

Niech G będzie grafem planarnym, a $uv = e \in G$ będzie dowolną jego krawędzią. Narysujmy jak wygląda sąsiedztwo e:



Co się stanie jeśli po prostu przysuniemy prawą stronę sąsiedztwa tak, żeby wierzchołki u i v były jeden na sobie?



Niebieska pętla zostaje usunięta, gdyż pracujemy na grafach prostych. Przesunęliśmy część poprawnego rysunku w lewo, co nie psuje planarności $G \bullet e$.

Graf Petersona to graf o 10 wierzchołkach oraz 15 krawędziach. W dodatku, najkrótsze cykle w grafie Petersona mają 5 elementów, czyli jeśli m to ilość krawędzi, a f - ilość ścian, to mamy

$$2m \geq 5f$$

co w połączeniu z formułą Eulera (nad którą pochylamy się bardziej w zadaniu 4) dostajemy

$$n - m + f = 2$$

$$f = 2 - n + m$$

$$2m \geq 5f = 5[2 - n + m] = 10 - 5n + 5m$$

$$2m = 30 \geq 10 - 5 \cdot 10 + 5 \cdot 15 = 35 = 5[2 - n + m]$$

i to daje nam sprzeczność.

ZAD. 4.

Udowodnij, że jeśli G jest grafem płaskim, to $n(G) + f(G) = m(G) + k(G) + 1$, gdzie $f(G)$ jest liczbą obszarów, a $k(G)$ jest liczbą składowych spójności.

Rozważmy najpierw graf spójny G. Wtedy $k(G) = 1$, a więc $n + f - m = 2$, co jest formułą Eulera, dość szeroko znaną. Zrobimy szybki dowód indukcyjny po ilości krawędzi. Jeżeli $m = 0$, to mamy tylko samotny wierzchołek i jedną ścianę, więc

$n + f = 1 + 1 = 2$, co się zgadza. Dalej załóżmy, że formuła jest prawdziwa dla wszystkich grafów spójnych o co najwyżej m krawędziach. Niech G będzie grafem o $(m + 1)$ krawędziach. Rozważmy dwie możliwości:

1. G nie ma cykli, czyli jest drzewem, więc mamy tylko jedną ścianę (bo jest potrzebny cykl by oddzielić kolejną) i ilość wierzchołków jest o 1 większa niż ilość krawędzi, czyli $n = m + 2$ i mamy

$$n - (m + 1) + f = m + 2 - m - 1 + 1 = 2$$

tak jak chcieliśmy.

2. G ma cykle, wtedy niech $e \in G$ będzie krawędzią należącą do pewnego cyklu. Wtedy usunięcie takiej krawędzi połączy dwie ściany w jedną większą, czyli $f' = f - 1$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że dla grafu $G' = G - e$ mamy

$$2 = n - m' + f' = n - (m - 1) + (f - 1) = n - m + 1 + f - 1 = n - m + f$$

tak jak chcieliśmy.

Niech teraz G będzie grafem o k składowych spójności $G_1, \ldots, G_k$. Wtedy dla każdej z nich osobno możemy zastosować formułę Eulera, czyli

$$n_i - m_i + f_i = 2$$

gdzie n_i, m_i, f_i to odpowiednio ilość wierzchołków, krawędzi i ścian w składowej G_i. Rysunek każdej z tych składowych możemy ograniczyć do pewnego okręgu na płaszczyźnie, czyli tylko ta "zewnętrzna" ściana jest wspólna dla wszystkich składowych spójności. W takim razie jeśli dodamy wszystkie równania jak wyżej, dostaniemy

$$\sum_{i=1}^{k} [n_i - m_i + f_i] = 2 \cdot k$$

ale ponieważ jedna ściana jest dublowana dla każdej z tych składowych, to musimy odjąć ją od każdego f_i jeden i dodać to jako tę jedną wspólną ścianę, czyli

$$\sum_{i=1}^{k} [n_i - m_i + (f_i - 1)] + 1 = k + 1$$

a z kolei lewa strona sumuje się do

$$\sum_{i=1}^{k} [n_i - m_i + (f_i - 1)] + 1 = n - m + f,$$

gdzie n, m, f to wartości dla pełnego grafu. Ostatecznie, dostajemy

$$n - m + f = k + 1.$$

ZAD. 5.

Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem planarnym, w którym najkrótszy cykl ma długość r, to spełniona jest nierówność $(r - 2)m \leq r(n - 2)$. Kiedy nierówność ta staje się równością?

Niech G będzie grafem planarnym o najkrótszym cyklu r, n wierzchołkach i m krawędziach. Niech f będzie liczbą ścian w jego poprawnym rysunku. Wtedy z formuły Eulera mamy

$$n - m + f = 2$$

$$f = 2 - n + m$$

natomiast ponieważ tylko cykle tworzą nowe ściany, każda krawędź wpada do dwóch ścian i na jedną ścianę potrzebujemy co najmniej r krawędzi, to mamy nierówność

$$2m \geq r \cdot f$$

Podstawiając $f = 2 - n + m$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2m &\geq r \cdot (2 - n + m) \\ 2m - rm &\geq r \cdot (2 - n) \\ (2 - r)m &\geq r \cdot (2 - n) \\ -(r - 2)m &\geq -r(n - 2) \\ (r - 2)m &\leq r(n - 2) \end{aligned}$$

ZAD. 10.

Na płaszczyźnie rozłożono pewną liczbę monet o jednakowej średnicy, z których żadne dwie nie nachodzą na siebie. Monety te kolorujemy tak, by te, które się stykają miały różne kolory. Nie krozystając z twierdzenia o czterech barwach pokaż, że cztery kolory zawsze wystarczą, a trzy nie zawsze.

NIE MAM KONTRPRZYKŁADU DLA 3

Będziemy rozpatrywać kolorowanie monet w ramach kolorowania grafu w którym monety to wierzchołki, a krawędzi oznaczają stykanie się dwóch monet. Udowodnimy, że jeżeli G_n to graf utworzony przez ułożenie n monet na stole, to

$$\chi(G_n) \leq 4.$$

Dla $n = 1$ jest to trywialne. Załóżmy teraz, że dla n monet zawsze działa i weźmy $n+1$ monet aby stworzyć G_{n+1}. Zauważmy, że w takim grafie zawsze mamy monetę "brzegową", czyli stopnia co najwyżej 3. Jeżeli taką monetę wyjmiemy z grafu G_{n+1}, to dostajemy G_n, które możemy pokolorować 4 kolorami. Dołączenie wyjętej monety nic nie zmieni, bo w jej sąsiedztwie były tylko 3 inne, więc wybieramy kolor który się między nimi nie pojawił i tak też malujemy dokładaną monetę. Czyli $\chi(G_{n+1}) \leq 4$.

ZAD. 11.

Dla grafy G *oznaczamy przez* $G \bullet e$ *graf powstały w wyniku ściągnięcia krawędzi* e*, a przez* $P_G(k)$ *- liczbę pokolorowań grafu* G k *kolorami. Pokaż, że* $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\bullet e}(k)$.

Kolorujemy graf G na x kolorów. Możemy to zrobić na $P_G(x)$ sposobów. Niech teraz $e = uv \in G$ będzie dowolną krawędzią. Graf $G - e$ ma dwa sposoby kolorowania: takie, w których u, v mają ten sam kolor (niemożliwe w G) i takie, w których u, v mają różne kolory (możliwe w G). Dalej zauważmy, że jeżeli ściągamy krawędź e do jednego punktu, to tak jakbyśmy malowali u, v na ten sam kolor. Czyli jeśli $P_{G-e}(x) - P_{G\bullet e}(x)$ usuwa te kolorowania $G - v$ na x kolorów gdzie u i v mają ten sam kolor, bo tylko te kolorowania pokrywają nam się z kolorowaniami $G - e$.

ZAD. 12.

Niech T *będzie drzewem* n*-wierzchołkowym, a* C_n *grafem cyklicznym. Pokaż, że* $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$ *oraz* $P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

Najpierw rozważmy wielomian chromatyczny (chromian wg. jednego studenta IM) drzewa. Niech T_n będzie drzewem i niech $e \in T_n$ będzie liściem, czyli wierzchołkiem stopnia 1. Wtedy $T_n \bullet e$ jest drzewem T'_{n-1}, bo ściągnięcie krawędzi jest w tym przypadku analogiczne do usunięcia liścia. Graf $T_n - e$ jest natomiast niespójny, z jednym samotnym wierzchołkiem oraz drzewem T_{n-1}, które możemy kolorować niezależnie. Czyli korzystając z poprzedniego zadania (i ukrytej indukcji) mamy

$$\begin{aligned} P_{T_n}(x) &= P_{T_n-e}(x) - P_{T_n\bullet e}(x) = P_{T_{n-1}}(x)\cdot x - P_{T'_{n-1}}(x) = \\ &= x\cdot x(x-1)^{n-2} - x(x-1)^{n-2} = x(x-1)^{n-2}(x-1) = x(x-1)^{n-1} \end{aligned}$$

tak jak chcieliśmy.

Przypatrzmy się teraz na cykl długości n. Jeżeli wybierzemy dowolną krawędź $e \in C_n$, to graf $C_n - e$ jest ścieżką długości n, a więc możemy go pokolorować na $x \cdot (x-1)^{n-1}$ sposobów (pierwszy wierzchołek na x, każdy kolejny na $(x-1)$). Graf $C_n \bullet e$ to z kolei cykl C_{n-1}, czyli korzystając z ukrytej indukcji i poprzedniego zadania, dostajemy

$$\begin{aligned} P_{C_n}(x) &= P_{C_n-e}(x) - P_{C_n\bullet e}(x) = x(x-1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(x-1) = \\ &= (x-1)^{n-1}(x-1) + (-1)^n(x-1) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1) \end{aligned}$$

ZAD. 13.

Wykaż, że liczba krawędzi dowolnego grafu wynosi co najmniej $\chi(G)\frac{\chi(G)-1}{2}$.

$\chi(G)$ mówi nam, ile potrzebujemy co najmniej kolorów, żeby dostać kolorowanie grafu G. Czyli na ile najmniej klas wierzchołków możemy podzielić graf G. Ponieważ $\chi(G)$ jest minimalną taką liczbą, to między każdymi dwoma wierzchołkami które są w różnych klasach mamy co najmniej jedną krawędź. Klas jest $\chi(G)$, więc jeżeli miałyby one po jednym wierzchołku, to mielibyśmy co najmniej $(\chi(G) - 1)$ krawędzi wychodzących z każdej klasy. Czyli sumarycznie z każdej klasy musi wychodzić $\chi(G)(\chi(G) - 1)$ krawędzi, ale ponieważ sumujemy je dwukrotnie, to dostajemy dolne ograniczenie na krawędzie w G postaci:

$$\frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G) - 1)$$

ZAD. 14.

Pokaż, że dla dowolnego grafu G $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

Weźmy dowolny graf G o n wierzchołkach i niech $c_1 : V(G) \to [\chi(G)]$ będzie poprawnym kolorowaniem go za pomocą $\chi(G)$ kolorów. To samo powtórzmy dla $\overline{G}$, to znaczy $c_2 : V(\overline{G}) \to [\chi(\overline{G})]$ jest kolorowaniem za pomocą $\chi(\overline{G})$ kolorów. Zauważmy teraz, że jeżeli połączymy G i $\overline{G}$ razem, to dostaniemy graf K_n.

Opiszmy kolorowanie na K_n takie, że każdy wierzchołek $v \in K_n$ dostaje parę uporządkowaną $(c_1(v), c_2(v))$. Ponieważ kolorowanie na G i na $\overline{G}$ było poprawne, a dana krawędź z K_n musi istnieć w dokładnie jednym z nich, to dla dwóch stycznych wierzchołków nigdy nie będziemy mieli dokładnie tej samej pary. Co więcej, ponieważ możliwości na pierwszym miejscu jest $\chi(G)$, a na drugim miejscu każdej pary jest $\chi(\overline{G})$, to ogółem takich par do poprawnego pokolorowania K_n utworzyliśmy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$, co musi być co najmniej tyle ile $\chi(K_n) = n$. Czyli dostajemy pożądany wynik.