## ANALIZA III - LISTA 15

Zadań 1,2 nie opisujemy, są to ćwiczenia przed następnymi.

1. Niech $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ tzn. $\phi$ ma ciągłą pochodną i $\phi$ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że $f$ jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś odcinku i zbiór punktów nieciągłości $f$ ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y) f(y)\, dy \tag{0.1}$$

ma ciągłą pochodną oraz, że

$$\frac{d}{dx}(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{d}{dx}\phi\big)(x-y) f(y)\, dy \tag{0.2}$$

Wsk. Napisać z definicji iloraz różnicowy. Można sobie założyć, że $f$ jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

2. Niech $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ tzn. $\phi$ ma ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe i $\phi$ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że $f$ jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś prostokącie i zbiór punktów nieciągłości $f$ ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y) f(y)\, dy \tag{0.3}$$

ma ciągłe pochodne oraz, że

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \big(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi\big)(x-y) f(y)\, dy \tag{0.4}$$

Wsk. Napisać z definicji iloraz różnicowy. Można sobie założyć, że $f$ jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

**3. Niech $\phi \in C_c^m(\mathbb{R}^2)$ tzn. $\phi$ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu $m$ i $\phi$ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że $f$ jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś prostokącie i zbiór punktów nieciągłości $f$ ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y) f(y)\, dy \tag{0.5}$$

$\phi$ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu $m$ i

$$D^\alpha(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \big(D^\alpha\phi\big)(x-y) f(y)\, dy \tag{0.6}$$

dla każdego wielowskaźnika do rzędu $m$.

Można sobie założyć, że $f$ jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

**4. Niech

$$\psi_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon} \exp\big(\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}\big), \text{ gdy } |x| < \varepsilon \tag{0.7}$$

i $\psi_\varepsilon = 0$ poza tym. $c$ jest dobrane tak by $\int_{\mathbb{R}} \psi_1(x)\ dx = 1$. Załóżmy, że $f$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ i ma nośnik zwarty (można założyć, że przedział jesli łatwiej myśleć) . Pokazać, że

$$\psi_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x - y) f(y)\ dy \tag{0.8}$$

zbiega jednostajnie do $f(x)$. Wsk. Zauważyć, że $\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x)\ dx = 1$. Trzeba oszacować $f(x) - \psi_\varepsilon * f(x)$ dla bardzo małych $x$ i dla pozostałych. Można najpierw pokazać zbieżność punktową. Zastanowić się, co się dzieje z $\psi_\varepsilon$, gdy $\varepsilon \to 0$.

**5. Zrobić zadanie 3 dla $f$ całkowalnego w sensie Lebsgue'a używając twierdzenia Lebsgue'a o zbieżności ograniczonej, jak już się go nauczycie. Schemat dowodu jest identyczny jak dla $f$ całkowalnej w sensie Riemanna.