MDM Lista 7

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Niech k będzie liczbą pionków do rozłożenia. Jeśli $k > n$, to wtedy co najmniej dwa muszą być w jednej kolumnie, a więc jeden nie będzie na lewo od drugiego. W takim razie musi być $k \leq n$.

Ułóżmy najpierw k pionków na planszy $k \times k$ tak, żeby w każdej parze jeden był na lewo i niżej niż drugi. Takie ułożenie jest jedno, to zaczy pionki muszą stać na przekątnej od lewego dolnego rogu do prawego górnego.
Jeśli ustawimy najpierw k pionków na planszy $k \times k$. Utożsamimy kolumny zawierające pionki z liczbą 1, natomiast kolumny puste z liczbą 0. Wtedy sposobów żeby ustawić $n - k$ jedynek w ciąg n elementowy mamy $\binom{n}{n-k}$. Analogiczna sytuacja zachodzi dla wierszy, a ogólna ilość rozwiązań to

$$\binom{n}{n-k}^2,$$

gdyż łączymy każde ustawienie kolumn z każdym ustawieniem wierszy.

ZAD. 2.

Liczba Fibonaciego F_n odpowiada na pytanie, ile jest ciągów składających się tylko z 1 i 2 sumujących się do $(n - 1)$. Popatrzmy teraz na sumę z zadania:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i}.$$

Pierwszy wyraz, $\binom{n-1}{0}$ to liczba ciągów składających się tylko z 1 sumujących się do $(n - 1)$. Drugi wyraz, $\binom{n-2}{1}$ skraca ciąg $(n - 1)$ jedynek o jeden i wybiera jedną z pozostałych $(n - 2)$ jedynek która zostanie zamieniona na 2. W ten sposób dostajemy ilość ciągów sumujących się do $(n - 1)$ zawierających tylko jedną liczbę 2. Tak więc dla k-tego wyrazu sumy usuwamy k jedynek, a z pozostałych na k sposobów wybieramy te, które zostaną zastąpione przez 2 $\binom{n-1-k}{k}$.

Teza:

$$F_{m+2n} = \sum i = 0^n \binom{n}{i} F_{i+m}$$

Niech $x_n = \begin{pmatrix} F_{m+1+n} \\ F_{n+m} \end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zauważmy, że

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$$

czyli

$$A^{2n} = (A^2)^n = (A + I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i$$

Mnożąc obie strony przez $x_0 = \begin{pmatrix} F_{m+1} \\ F_m \end{pmatrix}$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} F_{m+2n+1} \\ F_{m+2n} \end{pmatrix} = x_{2n} = A^{2n} x_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i x_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \begin{pmatrix} F_{m+i+1} \\ F_{m+i} \end{pmatrix}$$

i przyrównując drugie współrzędne otrzymujemy:

$$F_{m+2} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{m+i}$$

ZAD. 3.

Sposobów na ułożenie 2n skarpet (czyli n par) jest $(2n)!$. Jednak zazwyczaj skarpety z jednej pary są nierozróżnialne, więc nie ma znaczenia które będzie pierwsza. W każdej parze mamy 2 sposoby na wybranie która skarpeta jest pierwsza, mamy n par więc ogółem tych sposobów jest 2^n. Czyli ogółem sposobów na ułożenie n par skarpet jest

$$\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Zastanówmy się teraz, ile jest sposobów na ułożenie n par skarpet tak, żeby określone k par było obok siebie. Zwijając k par skarpet razem zmniejszamy liczbę elementów o k, czyli teraz mamy $(2n-k)$ rozróżnialnych skarpet. Rozłożyć niezwinięte $(2n-2k)$ skarpet tak, żeby skarpety z jednej pary nie były obok siebie można na $\frac{(2n-2k)!}{2^{n-2k}}$ sposobów. Mamy teraz ciąg $(2n-2k)$ ustawionych skarpet w który chcemy włożyć k dodatkowych elementów. Całość będzie się sumować do $(2n-k)$, więc z $(2n-k)$ możemy wybrać które k miejsc wybierzemy na $\binom{2n-k}{k}$ sposobów. Czyli k par skarpet zmuszamy do bycia razem podczas gdy pozostałe są rozdzielone na

$$\frac{(2n-2k)!}{2^{n-2k}}\binom{2n-k}{k}$$

sposobów.
Teraz, z zasady włączeń i wyłączeń, dostajemy szukaną odpowiedź w postaci:

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{(2n-2k)!}{2^{n-2k}}\binom{2n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-k}{k}\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}$$

ZAD. 4.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{cases}$$

Rozważmy ciąg geometryczny: $x_n = q^n$, wtedy

$$q^n = \frac{1}{2}(q^{n-1}q^{n-2})$$
$$q^2 = \frac{1}{2}(q+1)$$

Czyli $x_n = q^n$ dla q będących zerami wielomianu

$$w(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4}$$

$$x = 1 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}.$$

Czyli ciąg x_n rozwiązuje

$$x_n = c_1 1^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Dla dwóch pierwszych wyrazów daje to

$$\begin{cases} x_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ x_1 = 0 = c_1 - \frac{c_2}{2} \end{cases}$$

czyli $c_2 = \frac{2}{3}$ oraz $c_1 = \frac{1}{3}$ a postać jawna ciągu to

$$x_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^{-n}$$

ZAD. 14.

(a) $a_n = n^2$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$
$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$
$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n-1}$$
$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$$

(b) $a_n = n^3$

$$\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3x^{n-1}$$
$$\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n$$

(c) $a_n = \binom{n+k}{k}$, dla ułatwienia zmieniam ten zapis na $a(n,k) = \binom{n+k}{k}$

Dla $k = 0$ mamy $a(n,0) = 1$ oraz

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Teza: dla dowolnego k mamy

$$f_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Załóżmy, że dla pierwszych k działa. Teraz sprawdźmy jak to wygląda dla $k+1$.

$$a(n,k+1) = \binom{n+k+1}{k+1} = \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} = \frac{(n+k+1)(n+k)\ldots(n+1)}{(k+1)!}$$

Dalej mamy

$$f_{k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)(n+k)\ldots(n+1)}{(k+1)!}x^n = \frac{1}{(k+1)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k+1)a(n,k)x^n =$$
$$= \frac{1}{k+1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a(n,k)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(n,k)x^n\right] =$$
$$= \frac{1}{k+1}\left[\frac{k(1-x)+(k+1)x}{(1-x)^{k+2}} + \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\right] =$$
$$= \frac{1}{k+1}\left[\frac{k(1-x)+(k+1)x+(1-x)}{(1-x)^{k+2}}\right] = \frac{1}{k+1}\frac{(k+1)(1-x+x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{1}{(1-x)^{k+2}}$$

ZAD 15.

(a)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Niech $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$$g(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n-1} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1 - x^2)^2}$$

Dalej, niech $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Wtedy

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$h(x) = \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \left[\frac{|x + 1|}{|x - 1|}\right]$$

Podstawiając te funkcje za odpowiednie składniki f(x) dostajemy

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1 - x^2)^2} + \frac{1}{2} \log \left[\frac{|x + 1|}{|x - 1|}\right]$$

(b)

Po pierwsze, zauważmy, że

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [H_{n-1} + \frac{1}{n}] x^n =$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Rozważmy funckję $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Wtedy

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

$$h(x) = \int \frac{dx}{1 - x} = -\log|1 - x|$$

co daje

$$f(x) = xf(x) - \log|1 - x|$$

$$f(x) = \frac{\log|1 - x|}{x - 1}$$