MDM Lista 6

Weronika Jakimowicz

ZMIANY:
- $\hookrightarrow$ Zadanie 2.
- $\hookrightarrow$ Zadanie 5.
- $\hookrightarrow$ Zadanie 6.

ZAD. 1.

Rozważmy najpierw prawą stronę równania. Spośród n osób wybieramy najpierw lidera delegacji. Możemy to zrobić na n sposobów. Chcemy mu dobrać pewną delegację osób. Ponieważ lider został już wybrany, to zostaje nam $(n-1)$ osób. Dla każdej z nich mamy dwie możliwości: albo osoba zostanie wybrana albo nie. Czyli dla każdej z $(n-1)$ możemy zadecydować jej los na 2 sposoby, co daje nam

$$n \cdot 2^{n-1}$$

sposobów na wybranie delegacji z co najmniej 1 osobą.

Teraz zajmujemy się lewą stroną równania. Suma przechodzi przez wszystkie możliwe rozmiary delegacji: możemy wybrać delegację która ma tylko jedną osobę (wtedy $k = 1$),a możemy też przecież wybrać delegację o $k = n-1$ lub $k = n$ członkach. W każdej z takich k-osobowych delegacji lidera możemy wybrać na k sposobów. Całość daje to samo rozwiązanie co przechodzenie przez każdą potencjalną osobę po kolei i decydowanie czy ona trafia do delegacji czy też nie.

ZAD. 2.

Zamieniłam pomysł z łączeniem w pary na o wiele prostsze wyjaśnienie.

Jeśli jedynek jest o co najmniej 2 więcej niż zer, to całość nam nie zadziała. Na przykład w 1101 nie możemy rozdzielić dwóch pierwszych 1. Załóżmy więc, że

$$k < l + 2$$

Rozstawmy nasze l zer w jednorodny ciąg. Między nimi jest $(l+1)$ pustych miejsc w które chcemy wstawiać nasze k jedynek, ale każde miejsce możemy wybrać tylko raz. Czyli wybieramy k spośród $(l+1)$ miejsc, co daje

$$\binom{l+1}{k}.$$

ZAD. 3.

Określmy zbiory:

$$A = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 2|k\}$$
$$B = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 3|k\}$$

Zacznijmy od znalezienia $|A \cup B|$. Z zasady włączeń i wyłączeń jest to

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor,$$

bo $A \cap B$ to liczby podzielne jednocześnie przez 3 i 2, czyli podzielne przez 6.

Teraz niech

$$C = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 14|k \text{ lub } 21|k\}$$
$$D = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 10|k \text{ lub } 15|k\}$$
$$|C| = \lfloor \frac{n}{14} \rfloor + \lfloor \frac{n}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n}{42} \rfloor$$
$$|D| = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor$$
$$|C \cup D| = |C| + |D| - \lfloor \frac{n}{210} \rfloor$$

Czyli teraz od sumy $|A \cup B|$ chcemy odjąć $|C \cup D|$ i to jest nasz wynik.

ZAD. 4.

Liczba wszystkich permutacji to n!. Teraz wystarczy od wszystkich permutacji odjąć te, które nam nie pasują, czyli mają co najmniej jedną liczbę $i \leq k$ na pozycji i.
Rozważmy ciąg rekurencyjny $a(n, k)$ taki, że $a(n, k)$ to liczba permutacji zbioru n-elementowego, że pierwsze k elementów nie jest na swoim wyjściowym miejscu. Dla $a(n, 0)$ mamy oczywiście wartość n! a dla $a(n, 1) = (n - 1)(n - 1)!$.
Prześledźmy wędrówkę pierwszego elementu. Jeżeli zamienimy go z jednym z pierwszych k elementów, to możemy to zrobić na $(k - 1)$ sposobów i zostaje nam wtedy $(k - 2)$ elementy w $(n - 2)$ elementach. Jeżeli zamienimy pierwszy element z jednym z ostatnich $(n - k)$ elementów, możemy to zrobić na $(n - k)$ sposobów i zostaje nam wtedy do ustawienia $(k - 1)$ elementów spośród zbioru $(n - 2)$ elementowego. Jeśli natomiast na miejscu pierwszego elementu postawimy jeden z pozostałych $(n - 1)$ elementów ale nie zamienimy go z jedynką, to pozostaje nam ustawienie $(k - 1)$ elementów spośród zbioru $(n - 1)$ elementowego. Daje to poniższy wzór rekurencyjny:

$$a(n, k) = (k - 1)a(n - 2, k - 2) + (n - k)a(n - 2, k - 1) + (n - 1)a(n - 1, k - 1)$$

ZAD. 5.

Szukamy liczby permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że dla każdego i nie stoi ono na pozycji i.

Popatrzmy na liczbę permutacji, w których dokładnie k elementów pozostaje na swoim miejscu. Z n elementów te k które zostanie pozostawione w swoim miejscu może zostać wybranie na $\binom{n}{k}$ sposobów. Z zasady włączeń i wyłączeń, mamy, że ilość permutacji, w których przynajmniej jeden element jest na swoim miejscu to

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

Nieporządek to permutacja, w której żaden element nie jest na swoim miejscu to liczba wszystkich permutacji pomniejszona o liczbę permutacji w których przynajmniej jeden element jest na swoim miejscu:

$$d_n = n! - \sum_{k} = 1^n(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(-1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Wzór Taylora na e^x to

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

i dla $x = -1$ przyjmuje to wartość

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

czyli liczba nieporządków to w przybliżeniu

$$d_n \approx n!e^{-1} = \frac{n!}{e}$$

Uzasadnienie, że różnica między d_n a $\frac{n!}{e}$ jest bardzo mała:
W zadaniu proszeni jesteśmy o uzasadnienie, że

$$d_n = \lfloor\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\rfloor$$

$$\frac{n!}{e} = n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= d_n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot(k-1)\ldots(n+1)} \leq d_n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k-(n+1)+1}} =$$

$$= d_n + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}}{2^{k+1}}$$

zauważmy, że suma $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}}{2^{k+1}}$ to szereg geometryczny, czyli jego suma to

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}}{2^{k+1}} = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}$$

Czyli różnica między d_n a $\frac{n!}{e}$ jest mniejsza niż $\frac{1}{2}$, więc możemy otrzymać d_n poprzez przybliżanie $\frac{n!}{e}$ do najbliższej liczby całkowitej:

$$d_n = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor.$$

ZAD. 6.

Zamiana na wersje z czarnymi skarpetami

Najpierw zajmijmy się przyporządkowaniem jednolicie czarnych skarpet do komody. Każda z nich ma być pełna, więc jeśli $n < 5$, to oczywiście nie możemy zrobić żeby żadna nie była pusta. Dajmy każdej komodzie po jednej skarpecie, w każdej z nich wybieramy szufladę na 4 sposobów, więc rozłożyć po jednej jednolicie czarnej skarpecie do 5 komód można na 4^5 sposobów. Pozostaje nam rozmieszczenie $n - 5$ skarpet do 20 szuflad.

Weźmy 19 jednolicie białych kapci, które będą nam wskazywać które skarpety idą do której szuflady i ułóżmy skarpety w ciąg. Koniec zawartości ostatniej szuflady jest wyznaczany przez koniec ciągu, stąd też o jeden kapeć mniej niż ilość szuflad.
Mamy $(n - 5) + 19 = n + 14$ miejsc w które możemy postawić kapcia. Wybieramy więc 19 takich miejsc i wkładamy w nie kapcie na

$$\binom{n+14}{19}$$

sposobów. Ostatecznie dostajemy

$$4^5 \cdot \frac{n+14}{19}$$

sposobów rozłożenia jednolicie czarnych skarpet do 5 komód po 4 szuflady tak, żeby żadna komoda nie była pusta.

ZAD. 12.

(a) $\{id, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$
TAK, jest to grupa, ponieważ wszystkie elementy to potęgi (12345) (czyli mamy podgrupę cykliczną).

$$(12345)(12345) = (13524)$$
$$(12345)(13524) = (14253)$$
$$(12345)(14253) = (15432)$$
$$(12345)(15432) = (1)(2)(3)(4)(5)$$

(b) $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
TAK:

$$(12)(34)(13)(24) = (14)(23)$$
$$(12)(34)(14)(23) = (13)(24)$$
$$(12)(34)(12)(34) = id$$

$$(13)(24)(14)(23) = (12)(34)$$
$$(13)(24)(13)(24) = id$$
$$(13)(24)(12)(34) = (14)(32)$$

$$(14)(23)(13)(24) = (12)(34)$$
$$(14)(23)(12)(34) = (13)(24)$$
$$(14)(23)(14)(23) = id$$

Zbiór ten jest zamknięty na składanie permutacji, branie odwrotności i jego działanie jest łączne ze względu na definicję S_5.

(c) $\{id, (12)(345), (135)(24), (15324), (12)(45), (134)(25), (143)(25)\}$
NIE:

$$(12)(345)(135)(24) = (14)(25)$$

nie jest zamknięta na składanie permutacji, bo wynik powyższego działania nie należy do danego zbioru.

ZAD. 14.

Obracając wierzchołki dwunastościanu dostajemy 60 symetrii:

Weźmy dowolny wierzchołek. Sąsiaduje on z 3 innymi, więc jeśli przerzucimy ten wybrany wierzchołek na dowolny inny, co można zrobić na 20 sposobów, bo mamy 20 wierzchołków, to dla jednego z jego sąsiadów miejsce możemy wybrać na trzy sposoby. Pozostali sąsiedzi muszą sią dostosować do tego układu tak, żeby sądiedztwo wierzchołków nie zostało naruszone. Daje to $20 \cdot 3 = 60$ symetrii obrotowych.

Teraz zauważmy, że dla każdego takiego obrotu możemy go złożyć z obrotem o π względem osi poprowadzanej przez wybrany wierzchołek i wierzchołek naprzeciwko niego. Takie złożenie jest nadal symetrią i mamy $60 \cdot 2 = 120$ symetrii na dwunastościanie foremnym.