

MDM Lista 8

Weronika Jakimowicz

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-

ZAD. 2.

Rozważmy równanie

$$z^k = 1.$$

Jednym z jego pierwiastków jest liczba $z = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Zauważmy też, że

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} = 0,$$

bo

$$(z - 1)(1 + z + \dots + z^{k-1}) = z + z^2 + \dots + z^k - 1 - z - \dots - z^{k-1} = z^k - 1$$

$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = 1 + z + \dots + z^{k-1}$$

ale $z^k - 1 = 0$, więc

$$1 + z + \dots + z^{k-1} = 0.$$

Dla $k = 2$ mamy $z = -1$ i:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$A(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots$$

co po wysumowaniu daje

$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + a_1x(1 - 1) + 2a_2x^2 + a_3x^3(1 - 1) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n}x^{2n}$$

i upraszczając dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^n = \frac{1}{2}(A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x}))$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + \dots$$

$$A(zx) = a_0 + a_1zx + a_2z^2x^2 + a_3z^3x^3 + a_4z^4x^4 + a_5z^5x^5 + a_6z^6x^6 + a_7z^7x^7 + \dots$$

$$A(z^2x) = a_0 + a_1z^2x + a_2z^4x^2 + a_3z^6x^3 + a_4z^8x^4 + a_5z^{10}x^5 + a_6z^{12}x^6 + a_7z^{14}x^7 + \dots$$

Zauważmy, że $z^{3k} = 1^k = 1$, więc przy a_{3n} zawsze mamy tylko x^{3n} , natomiast przy pozostałych potęgach, czyli z^{3k+r} , gdzie $r = 1$ lub $r = 2$ mamy

$$z^{3k+r} = z^{3k}z^r = z^r.$$

Dodając wszystkie te wartości, tak jakd dla przypadku $k = 2$, dostajemy

$$\begin{aligned} A(x) + A(zx) + A(z^2x) &= 3a_0 + a_1x(1 + z + z^2) + a_2x^2(1 + z + z^2) + 3a_3x^3 + a_4x^4(1 + z + z^2) + \dots = \\ &= 3a_0 + 3a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{3n}x^{3n} \end{aligned}$$

a więc aby dostać funkcję tworzącą ciąg a_{3n} wystarczy wziąć

$$\frac{1}{3}(A(\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{x})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n}x^n.$$

ZAD. 3.

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} F_i F_{n-i}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i}$$

ZAD. 4.

k-ta pochodna funkcji $f(x) = (1+x)^\alpha$ to

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

czyli szereg Maclaurina (tzn. szereg Taylora w zerze) dla funkcji $f(x)$ to:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= (1+0)^\alpha + \frac{\alpha}{1!}(1+0)^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(1+0)^{\alpha-2}x^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\end{aligned}$$

Co zgadza się ze wzorem podanym w treści zadania.

ZAD. 6.

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$$

Na podłodze mamy rozłożone $(n+1)$ par skarpet o różnych wzorach i kolorach. Chcemy być osobą nietuzinkową, więc nie możemy nosić dwóch skarpet z jednej pary, dlatego szukamy ilości sposobów na jakie możemy pomieszać naszą kolekcję. Podnosimy górną skarpetkę z pierwszej pary. Odkładamy ją na bok i na n sposobów wybieramy skarpetkę z pozostałych n par. Teraz mamy dwie możliwości:

→ jeśli po prostu zamienimy skarpetę numer 1 z wybraną na n sposobów skarpetą, to zostaje nam pomieszać pozostałe $(n-1)$ skarpet, czyli mamy nd_{n-1}

→ jeśli z kolei nie zadowolimy się zwykłą podmianą pierwszej skarpety i tej wybranej, to tymczasowo kładziemy pierwszą skarpetę na wybranym miejscu i uznajemy to parę, po czym dokonujemy przemieszczania nowo utworzonych n par skarpet, czyli nd_n .

Po zsumowaniu tych dwóch możliwych scenariuszy dostajemy

$$d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}$$

potencjalnych sposobów ułożenia kolekcji skarpet w sposób ciekawy.

Do tej rekurencji potrzebujemy znać wartość d_0 oraz d_1 , gdyż $d_2 = 1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_0$.

Przy d_0 mamy zbiór pusty, więc nie robimy nic. To można nie robić tylko na jeden sposób, czyli $d_0 = 1$.

Przy d_1 mamy tylko jeden element, więc tak czy siak on musi wylądować na miejscu 1, więc na singletonie nie jesteśmy w stanie utworzyć ani jednego nieporządku. Stąd $d_1 = 0$.

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

Dla $n = 1$ mamy

$$d_1 = 1d_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

co jest prawdą jak tłumaczyłam wyżej. Teraz założmy, że wzór jest poprawny dla pierwszych n wyrazów. Wtedy

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) \stackrel{*}{=} nd_n + d_n - (-1)^n = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

Równość z $*$ wynika z faktu, że

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

$$nd_{n-1} = d_n - (-1)^n$$

$$\begin{aligned}
d_n &= nd_{n-1} + (-1)^n = n((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n = \\
&= n(n-1)((n-2)d_{n-3} + (-1)^{n-2}) + n(-1)^{n-1} + (-1)^n = \\
&= n!d_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n+k} = \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! (-1)^{n+k}
\end{aligned}$$

zamiana wykładnika przy $(-1)^{n-k}$ jest możliwa, bo $(-1)^{2k} = 1$, czyli:

$$(-1)^{n-k} = (-1)^{n-k} (-1)^{2k} = (-1)^{n-k+2k} = (-1)^{n+k}$$

co jest wzorem ogólnym na ilość nieporządków.

ZAD. 7.

Wykładnicza funkcja tworząca dla ciągu a_n to funkcja postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Z poprzedniego zadania wiemy, że

$$d_n = (n-1)(d_{n-2} + d_{n-1}) = nd_{n-1} + (-1)^n$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nd_{n-1} + (-1)^n}{n!} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n + e^{-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n - x + e^{-x} = xf(x) - x + e^{-x}
\end{aligned}$$

$$f(x)(1-x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{1-x}$$

ZAD. 10.

Mamy zadanie $2n$ punktów, które chcemy połączyć za pomocą n linii. Niech $a(n)$ będzie ilością takich podziałów.

Biorąc dowolny punkt musimy dla niego wybrać partnera tak, żeby po obu stronach tak przedzielonego okręgu były parzyste ilości punktów. Na pewno możemy wziąć sąsiada po lewej stronie, a następne potencjalne punkty są co dwa, więc takich podziałów mamy n .

Każdy taki wybór daje nam unikatowy podział pozostałych $2n-2$ punktów na dwie części. Jeśli w lewej części podziału mamy $2n-2k-2$ punktów, to w prawej zostaje ich $2k$, gdzie $k = 0, \dots, n-1$. Daje to nam wzór rekurencyjny:

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a(k)a(n-k-1),$$

który jest identyczny ze wzorem na liczbę Catalana:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Warunki początkowe szukanego ciągu to $a(0) = 1$, bo mamy 0 punktów i chcemy je łączyć 0 linii, więc nie robimy nic na jeden sposób. Zgadza się to z wartością $C_0 = 1$, czyli $a(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$, co odpowiada wzorowi na n -tą liczbę Catalana.

ZAD. 13.

Pokażę najpierw, że $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$. Jeśli mamy dane $(n+1)$ elementów i chcemy zrobić z nich permutację rzędu 2, to możemy ostatni zostawić tam gdzie był - jest on wtedy punktem stałym i dalej tworzymy inwolucję na n elementach i jest ich a_n . Możemy też ostatni element wciągnąć w cykl dwuelementowy z jednym z pozostałych n elementów na n sposobów, a pozostałe elementy wchodzić w inwolucję na $(n-1)$ elementach. Czyli

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1},$$

gdzie $a_0 = 1$, bo mamy tylko jedną pustą permutację oraz $a_1 = 1$ bo mamy tylko identyczność.
Wykładnicza funkcja tworząca tego ciągu to

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}}{n!} x^n + 1 + x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-2}}{n!} x^n \\ f'(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = f(x) + xf(x) \end{aligned}$$

$$g(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$g'(x) = (1+x)e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

Czyli $f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$.

ZAD. 14.

Organizujemy przyjęcie na n osób, ale mamy tylko k stołów. Chcemy sprawdzić ile jest możliwych usadzeń n osób przy k stołach. Jeśli jeden gość jest delikwentem którego najlepiej posadzić w kącie przy osobnym stole, to pozostałe osoby rozsadzamy na $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ sposobów. Jeśli delikwent jest w stanie siedzieć przy ludziach, wybieramy mu na $(n-1)$ osobę po której prawej stronie (lub lewej, sytuacja lustrzana) usiądzie, a pozostałych rozsadzamy na $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ sposobów. Daje to zależność z treści zadania.

Dla $n=0$ mamy $x^{\overline{0}} = 1 = \sum \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} x^k = 1 + 0 = 1$. Założmy więc, że dla pierwszych n liczb to działa, wtedy

$$\begin{aligned} x^{\overline{n+1}} &= (x+n)x^{\overline{n}} = (x+n) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} nx^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} nx^k + 0 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k \end{aligned}$$

Ostatnia równość zachodzi, bo dla $n > 0$ $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, więc jest równoznaczna z dodaniem zera.