ANALIZA III - LISTA 6

Zadania bez gwiazdek na tej liście są za 3 punkty.

1. Mówimy, że przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ jest ciągłe jeśli dla każdego ciągu x_n zbieżnego do x, $f(x_n)$ zbiega do $f(x)$. Pokaż, że jeśli f jest ciągłe, a $D \subset \mathbb{R}^m$ jest domknięty, to $f^{-1}(D)$ jest domknięty w $\mathbb{R}^n$ oraz $V \subset \mathbb{R}^m$ jest otwarty, to $f^{-1}(V)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.

To nie wymaga kursu topologii. Robi się z definicji zbioru domkniętego i ciągłości f. Proszę spróbować. Zbieżność rozumiemy w normie euklidesowej.

2. Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż jakąkolwiek metodą, że jeśli $v_n \to 0$, to $Tv_n \to 0$. *Wskazówka: można zacząć od $n = 2$ i napisać wszystko wzorami.*

3. Pokaż, że jeśli f i f^{-1} są ciągłe, to dla każdego zbioru otwartego U, $f(U)$ jest zbiorem otwartym. Zastosuj to do przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ takiego, że, $\det T \neq 0$. Pokaż, że jeśli U jest otwarty, to $T(U)$ jest otwarty.

4. Niech $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ będzie takie, że

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\phi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Niech $T : \ R^n \mapsto \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|T(\phi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Wsk. Można zacząć od $n = 2$, a nawet $n = 1$, żeby zrozumieć, o co chodzi.

5. Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie różniczkowalna, a wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ będą ograniczone na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że istnieje stała C taka,że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\| \tag{0.1}$$

Wskazówka: Zacząć od $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

6. Funkcję spełniającą (0.1) nazywamy lipschitzowską lub Lipschitza. Pokaż, że złożenie dwóch funkcji lipschitzowskich jest funkcją lipschitzowską. Pokaż, że funkcja lipschitzowska jest jednostajnie ciągła. Napisz definicję jednostajnej ciągłości dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Jest kompletnie analogiczna jak w $\mathbb{R}$ tylko używamy normy euklidesowej, a nie modułu.

7*. Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem klasy C^1 takim, że $\det Df(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, a $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ przekształceniem liniowym, $\det T \neq 0$. Załóżmy, że umiemy pokazać, że dla f zachodzi konkluzja twierdzenia 2.21 o funkcji odwrotnej. Pokaż nie korzystając z tw. 2.21, że to samo zachodzi dla $T \circ f$. Tzn., że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ istnieją otoczenia $U \ni x$, $W \ni f(x)$ takie, że $T \circ f$ jest $1-1$ i C^1 na U, $f(U) = W$, $(T \circ f)^{-1}$ istnieje na W i jest C^1.

Wsk. Tu trzeba korzystać ze specyficznych własności przekształcenia liniowego. To zadanie jest raczej żmudne niż trudne, ale pozwala dobrze przećwiczyć rozumienie twierdzenia o funkcji odwrotnej.

8*. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia 3 jednej zmiennej. Załóżmy, że $x^{-3}W(x) \to 0$, gdy $x \to 0$. Pokaż, że współczynniki wielomianu są zerami.

Niech $W(x, y)$ będzie wielomianem stopnia 3 dwóch zmiennych. Załóżmy, że $\|(x, y)\|^{-3}W(x, y) \to 0$, gdy $(x, y) \to 0$. Pokaż, że współczynniki wielomianu są zerami.

**9. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia d, $x \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $\|x\|^{-d}W(x) \to 0$, gdy $x \to 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że współczynniki wielomianu są zerami.