ZAD 1.

a.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \lambda_k(x)$$

Czyli $\sum_{k=0}^{n}$ interpoluje funkcję w węzłach

$$(x_0, 1), (x_1, 1), (x_2, 1), \ldots, (x_k, 1).$$

Bez trudu można zauważyć, że jedynym wielomianem który to robi jest wielomian $q(x) = 1$, więc

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = q(x) = 1.$$

b.

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Jeżeli $j = 0$, to mamy

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \sum_{x=0}^{n} \lambda_k(0)$$

co z poprzedniego podpunktu jest zawsze równe 1.
Jeżeli $j \neq 0$, to interpolujemy funkcję f w węzłach

$$(x_0, x_0^j), (x_1, x_1^j), \ldots, (x_k, x_k^j).$$

W tym celu możemy użyc $q(x) = x^j$, czyli

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) x_k^j = q(x) = x^j$$

co po wstawieniu $x = 0$ daje

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = q(0) = 0^j = 0.$$

ZAD 2.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Twierdzenie 6.2.1. z "Analiza numeryczna" Kincaid.
Po pierwsze, jeżeli interpolujemy funkcję f przez wielomain p_k stopnia k + 1-tego w węzłach $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, to jest ten wielomian wyrażony jednoznacznie (Twierdzenie 6.1.1. - Kicnaid). Niech więc p_k, p_{k-1} interpolują funkcję f w odpowiednio węzłach $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ i $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$. Dalej, niech q będzie wielomianek interpolującym f w węzłach $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Dla ułatwienia dowodu, wprowadźmy lemat że

$$q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

interpoluje funkcję w węzłach $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.
Wielomian $q(x) - p_{k-1}(x)$ ma miejsca zerowe dla

$$x_1, \ldots, x_{k-1},$$

więc nie wpływa na węzły $(x_1, y_1), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$. Co więcej, przechodzi on przez (x_k, y_k) i $(x_0, -y_0)$. W takim razie, wielomian

$$(x_k - x)(q(x) - p_{k-1}(x))$$

ma miejsce zerowe dodatkowo dla x_k i przechodzi przez $(x_0, -y_0)$. Ponieważ $x_k > x_0$, to $x_0 - x_k < 0$, więc

$$\frac{x_k - x}{x_0 - x_k}[q(x) - p_{k-1}(x)] = \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

przechodzi tylko przez (x_0, y_0), a w pozostałych węzłach ma miejsca zerowe. Czyli

$$q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)]$$

jest przechodzące przez wszystkie $k + 1$ węzłów.

Skoro istnieje tylko jeden wielomian k-tego stopnia przechodzący przez ustalone węzły $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$, to zachodzi

$$p_k(x) = q(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q(x) - p_{k-1}(x)].$$

Współczynnik przy x^k po lewej stronie to

$$f[x_0, \ldots, x_k],$$

natomiast współczynnik przy x^k po prawej stronie to

$$\frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

co daje nam dowodzoną zależność:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

ZAD 3.

Dla $k = 1$

$$p[x, x_1] = \frac{p[x_1] - p[x]}{x_1 - x} = \frac{p(x_1) - p(x)}{x_1 - x}$$

co jest wielomianem stopnia $n - 1$, bo dzielimy wielomian stopnia n przez wielomian stopnia 1.

Załóżmy, że jest teza jest prawdziwa dla wszystkich $\leq k$, wtedy

$$p[x, x_1, \ldots, x_{k+1}] = \frac{p[x_1, \ldots, x_{k+1}] - p[x, x_1, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x}.$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $p[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n - k$. Pierwsza część róznicy w liczniku jest wartością niezależną od x. W takim razie do stopnia szukanego wielomianu przyczynia się tylko wielomian stopnia $n - k$ dzielony przez wielomian stopnia 1. Daje nam to wielomian stopnia $n - k - 1$, czyli $n - (k + 1)$ co kończy dowód.

ZAD 4.

x	−2	−1	0	1	2	3
p(x)	31	5	1	1	11	61

Bedziemy uzywac wzoru interpolacyjnego Newtona, czyli potrzebujemy roznicy dzielonej y:

x_0		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5
31		5		1		1		11		61
	−26		−4		0		10		50	
		11		2		5		20		
			−3		1		5			
				1		1				
					0					

Wzór interpolacyjny Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5}[y_0,...,y_k]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5}[y_0,...,y_k]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) =$$
$$= 31-26(x+2)+11(x+2)(x+1)-3(x+2)(x+1)x+(x+2)(x+1)x(x-1)$$

Dla drugiego wielomianu zmienia się jedynie wartość na szczycie, czyli $[x_0, x_1, ..., x_5]$. Wynosi ono wtedy $-\frac{31}{120}$ zamiast 0 i mamy

$$q(x) = p(x) - \frac{31}{120}(x+2)(x+1)x+(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$$

ZAD 5.

$$\prod_{i=0}^{n}|x-x_i| \le \frac{1}{4}n!h^{n+1}$$
$$\frac{1}{4}n!h^{n+1} = \frac{1}{4}n!\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

$$\prod_{i=0}^{n}|x-(a+ih)| = \prod_{i=0}^{n}|x-a-i\frac{b-a}{n}|$$

$$|x-x_0| = |x-a| \le \frac{1}{2}|b-a|$$
$$|x-x_1| = |x-a-\frac{b-a}{n}| \le |x-a|+|\frac{a-b}{n}| \le \frac{1}{2}|b-a|+h$$
$$|x-x_2| = |x-a-2\frac{b-a}{n}| \le |x-a|+2|\frac{a-b}{n}| \le \frac{1}{2}|b-a|+2h$$
$$|x-x_i| = |x-a-i\frac{b-a}{n}| \le |x-a|+i|\frac{a-b}{n}| \le \frac{1}{2}|b-a|+ih$$

ZAD 6.

Skoro funkcja $f^{(n+1)}$ ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$ to ma tam co najwyżej jedno miejsce zerowe, więc mamy co najwyżej $n+1$ miejsc zerowych funkcji f w tym przedziale.