MDM Lista 13

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Niech $G \bullet e$ *oznacza graf* G *po ściągnięciu krawędzi* e. *Pokaż, że jeśli* G *jest planarny, to* $G \bullet e$ *też jest planarny. Czy graf Petersena jest planarny?*

Niech G będzie grafem planarnym, a $uv = e \in G$ będzie dowolną jego krawędzią. Narysujmy jak wygląda sąsiedztwo e:

ZAD. 2.

Załóżmy, że graf G *jest grafem o co najmniej* 11 *wierzchołkach. Wykaż, że grafy* G *i* $\overline{G}$ *nie mogą być jednocześnie planarne.*

Wystarczy, że będziemy rozpatrywać tylko planarność G. NO NIE MOGOM NOOO.

ZAD. 4.

Udowodnij, że jeśli G *jest grafem płaskim, to* $n(G) + f(G) = m(G) + k(G) + 1$, *gdzie* $f(G)$ *jest liczbą obszarów, a* $k(G)$ *jest liczbą składowych spójnośći.*

Rozważmy najpierw graf spójny G, czyli $k(G) = 1$. Chcemy, żeby

$$n - m + f = 2.$$

Jest to prosty dowód indukcją po dowolnej wielkości. Weźmy indukcję po n. Mamy graf planarny $|G| = n + 1$ i dla dowolnego wierzchołka $v \in G$ $G' = G - v$ spełnia

$$n - m' + f' = 2$$

dla $m' = e(G')$, $f' = f(G')$. Zauważmy, ze jeżeli z wierzchołka który usunęliśmy wychodzi tylko jedna krawędź, to nie rozbijamy ani jednej ściany. AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

ZAD. 5.

Udowodnij, że jeśli G *jest spójnym grafem planarnym, w którym najkrótszy cykl ma długość* r, *to spełniona jest nierówność* $(r - 2)m \leq r(n - 2)$. *Kiedy nierówność ta staje się równościa?*

Niech G będzie grafem o najmniejszej długości cyklu r. Wtedy jeżeli weźmiemy dowolny cykl, to do niego wchodzi r wierzchołków i r krawędzi. Ale żeby mieć dwa różne cykle, muszą się różnic AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

ZAD. 11.

Dla grafy G *oznaczamy przez* $G \bullet e$ *graf powstały w wyniku ściągnięcia krawędzi* e, *a przez* $P_G(k)$ *- liczbę pokolorowań grafu* G k *kolorami. Pokaż, że* $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \bullet e}(k)$.

Kolorujemy graf G na x kolorów. Możemy to zrobić na $P_G(x)$ sposobów. Niech teraz $e = uv \in G$ będzie dowolną krawędzią. Graf $G - e$ ma dwa sposoby kolorowania: takie, w których u, v mają ten sam kolor (niemożliwe w G) i takie, w których

u, v mają różne kolory (możliwe w G). Dalej zauważmy, że jeżeli ściągamy krawędź e do jednego punktu, to tak jakbyśmy malowali u, v na ten sam kolor. Czyli jeśli $P_{G-e}(x) - P_{G\bullet e}(x)$ usuwa te kolorowania $G - v$ na x kolorów gdzie u i v mają ten sam kolor, bo tylko te kolorowania pokrywają nam się z kolorowaniami $G - e$.

ZAD. 13.

Wykaż, że liczba krawędzi dowolnego grafu wynosi co najmniej $\chi(G)\frac{\chi(G)-1}{2}$.

$$e(G) = \frac{1}{2}\sum_{d\in G} d(v) \geq \frac{1}{2}\sum \delta = \frac{1}{2}n\delta$$

$$\chi(G)\frac{\chi(G) - 1}{2} \leq \chi(G)\frac{n - 1}{2}$$

ZAD. 14.

Pokaż, że dla dowolnego grafu G $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

Weźmy dowolny graf G o n wierzchołkach i niech $c_1 : V(G) \to [\chi(G)]$ będzie poprawnym kolorowaniem go za pomocą $\chi(G)$ kolorów. To samo powtórzmy dla $\overline{G}$, to znaczy $c_2 : V(\overline{G}) \to [\chi(\overline{G})]$ jest kolorowaniem za pomocą $\chi(\overline{G})$ kolorów. Zauważmy teraz, że jeżeli połączymy G i $\overline{G}$ razem, to dostaniemy graf K_n.

Opiszmy kolorowanie na K_n takie, że każdy wierzchołek $v \in K_n$ dostaje parę uporządkowaną $(c_1(v), c_2(v))$. Ponieważ kolorowanie na G i na $\overline{G}$ było poprawne, a dana krawędź z K_n musi istnieć w dokładnie jednym z nich, to dla dwóch stycznych wierzchołków nigdy nie będziemy mieli dokładnie tej samej pary. Co więcej, ponieważ możliwości na pierwszym miejscu jest $\chi(G)$, a na drugim miejscu każdej pary jest $\chi(\overline{G})$, to ogółem takich par do poprawnego pokolorowania K_n utworzyliśmy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$, co musi być co najmniej tyle ile $\chi(K_n) = n$. Czyli dostajemy pożądany wynik.