ZAD. 1.

Uzasadnić poniższe stwierdzenia, albo bezpośrednim argumentem, albo opierając się na poznanych faktach:

Funkcja niemalejąca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska.

Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $y = f(a)$, wtedy zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq f(a)\} = f^{-1}[(-\infty, y]$$

przy czym $(-\infty, y] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, a wiemy, że to pociąga mierzalność funkcji.

Jeżeli zbiory $A_n, A \subseteq \mathbb{R}$ są borelowskie i $\lambda(A_n \Delta A) < \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \ldots$ taki, że funkcje charakterystyczne $\chi_{A_{n_k}}$ zbiegają do χ_A prawie wszędzie.

Zbieganie $\chi_{A_{n_k}}$ prawie wszędzie do χ_A oznacza, że zbiór gdzie się nie zgadzają jest miary zero. Nie zgadzają się na zbiorze $A \Delta A_{n_k}$, którego miara zbiega do zera. Koniec?

Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem mierzalnym i $\lambda(A) = 1$, to istnieje $r > 0$ takie, że $\lambda(A \cap (-r, r)) = \frac{3}{4}$.

Może najpierw zróbmy funkcje $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda(A \cap (-x, x))$, gdzie dla $x = 0$ przypisujemy 0. Oczywiście taka funkcja jest zawsze nieujemna. Łatwo zobaczyć, że jest to funkcja ciągła oraz, że jej wartość nie może przekraczać 1, bo $A \cap (-x, x) \subseteq A \implies \lambda(A \cap (-x, x)) \leq \lambda(A) = 1$. Dodatkowo, funkcja ta jest niemalejąca, bo dla $x < y$ mamy $A \cap (-x, x) \subseteq A \cap (-y, y)$. Czyli w pewnym miejscu musi przyjąć wartość $\frac{3}{4}$.

ZAD. 2.

Niech $f_n, f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi, takimi, że $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt(x)}$ dla $x \in (0, 1)$. Udowodnić, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, to $\lim_n \int_{[0,1]} |f_n - f| d\lambda$.

Po pierwsze, co to znaczy, że $f_n \xrightarrow{\lambda} f$:

$$\lim_n \lambda(\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$

Ustalmy więc $\varepsilon > 0$ i niech

$$A = \{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

ZAD. 3.

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, a $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi.

Udowodnić, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$, to $f_n - g_n \xrightarrow{\mu} f - g$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech N będzie takie, że dla każdego $n > N$ $|f_n - f| < \varepsilon$ oraz $|g_n - g| < \varepsilon$.

$$|g_n - f_n - (g - f)| = |g_n - g + (f - f_n)| \leq |g_n - g| + |f - f_n| < 2\varepsilon$$

Poza zbiorem miary zero $\star$

Wyjaśnić, dlaczego warunki $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $f_n \xrightarrow{\mu} g$ implikują, że $f = g$ prawie wszędzie.

Wiemy, że poza pewnym zbiorem miary zero A mamy $f_n(x) \to f(x)$ oraz poza B miary zero $f_n(x) \to g(x)$. Co jeśli teraz weźmiemy $A \Delta B$? jest to nadal zbiór miary zero oraz

$$\lambda((A \Delta B) \cup A \cup B) \leq \lambda(A \Delta B) + \lambda(A) + \lambda(B) = 0$$

ale $(A \Delta B) \cup A \cup B$ jest zbiorem gdzie $f_n(x)$ nie zbiega do $f(x)$ lub $f_n(x)$ nie zbiega do $g(x)$. Poza tym zbiorem mamy, że $f_n(x) \to f(x)$ oraz $f_n(x) \to g(x)$, więc $f(x) = g(x)$ poza tym brzydkim zbiorem.

ZAD. 4.

Obliczyć i podać szczegółowe uzasadnienia rachunków:

Niech

$$f_n = \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + n^2} = \frac{\frac{x^2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{x^4}{n} + 1},$$

wtedy $f_n \to 0$ prawie wszędzie, więc jak w zad. 2.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{nx^2+1}{nx^4+n^2} d\lambda(x) = 0$$

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} d\lambda$$

Niech

$$f_n = n\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} = \int_{[0,1]} n \cdot \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} d\lambda.$$

Teraz popatrzmy na

$$g_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 n \cdot_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} d\lambda = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} n \cdot_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} d\lambda$$

oryginalnie bedzie ∞?

ZAD. 5.

Niech funkcje mierzalne $f)n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *spełniają warunek* $\int_0^1 |f_n| d\lambda \leq 1$. *Niech* B *będzie zbiorem tych* $x \in [0,1]$, *dla których szereg* $\sum_n \frac{f_n(x)}{n^2}$ *nie jest zbieżny. Udowodnić, że zbiór* B *jest miary zero; wyjaśnić, dlaczego spełniona jest zależność* $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}$. *Udowodnić, że zbiór* B *jest miary zero; wyjaśnić dlaczego spełniona jest zależność*

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^2} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{f_n(x)}{n^2} d\lambda$$