# MDM Lista 8

Weronika Jakimowicz

## ZAD. 2.

Rozważmy równanie
$$z^k = 1.$$
Jednym z jego pierwiastków jest liczba $z = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Zauważmy też, że
$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1} = 0,$$
bo
$$(z-1)(1 + z + \ldots + z^{k-1}) = z + z^2 + \ldots + z^k - 1 - z - \ldots - z^{k-1} = z^k - 1$$
$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = 1 + z + \ldots + z^{k-1}$$
ale $z^k - 1 = 0$, więc
$$1 + z + \ldots + z^{k-1} = 0.$$
Dla $k = 2$ mamy $z = -1$ i:
$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$A(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$
co po wysumowaniu daje
$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + a_1 x(1-1) + 2a_2 x^2 + a_3 x^3 (1-1) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n} x^{2n}$$
i upraszczając dostajemy:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n = \frac{1}{2}(A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x}))$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \ldots$$
$$A(zx) = a_0 + a_1 zx + a_2 z^2 x^2 + a_3 z^3 x^3 + a_4 z^4 x^4 + a_5 z^5 x^5 + a_6 z^6 x^6 + a_7 z^7 x^7 + \ldots$$
$$A(z^2 x) = a_0 + a_1 z^2 x + a_2 z^4 x^2 + a_3 z^6 x^3 + a_4 z^8 x^4 + a_5 z^{10} x^5 + a_6 z^{12} x^6 + a_7 z^{14} x^7 + \ldots$$
Zauważmy, że $z^{3k} = 1^k = 1$, więc przy $a_{3n}$ zawsze mamy tylko $x^{3n}$, natomiast przy pozostałych potęgach, czyli $z^{3k+r}$, gdzie $r = 1$ lub $r = 2$ mamy
$$z^{3k+r} = z^{3k} z^r = z^r.$$
Dodając wszystkie te wartości, tak jakd dla przypadku $k = 2$, dostajemy
$$A(x) + A(zx) + A(z^2 x) = 3a_0 + a_1 x(1 + z + z^2) + a_2 x^2 (1 + z + z^2) + 3a_3 x^3 + a_4 x^4 (1 + z^1 + z^2) + \ldots =$$
$$= 3a_0 + 3a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{3n} x^{3n}$$
a więc aby dostać funkcję tworzącą ciągu $a_{3n}$ wystarczy wziąc
$$\frac{1}{3}(A(\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{2i\pi}{3}} \sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{x})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^n.$$

## ZAD. 3.

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} F_i F_{n-i}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i}$$