Algebra 1R

Contents

1 DEFINICJA GRUPY

1.1 Działania

DZIAŁANIE w zbiorze A to funkcja

$$\star : A \times A \to A$$

$$(x, y) \mapsto x \star y$$

Algebrą nazywamy niepusty zbiór A ze wszystkimi działaniami na nim określonymi, to znaczy zestawienie $(A, f_1, \dots, f_k)$. Mówimy, że dwie algebry $A = (A, f_1, \dots, f_k)$ i $B = (B, g_1, \dots, g_k)$ są podobne, jeśli dla każdego $i \leq k$ arność (czyli liczba argumentów) f_i jest równa arności g_i, czyli liczbie l_i.
Dwie algebry są izomorficzne, jeżeli istnieje $F : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ takie, że

$$(\forall\ i \leq k)(\forall\ a_1, \dots, a_{l_i} \in A)\ F(f_i(a_1, \dots, a_{l_i})) = g_i(F(a_1), \dots, F(a_{l_i}))$$

Struktury izomorficzne oznaczamy $A \cong B$. Warto zauważyć, że $\cong$ ma *własności relacji równoważności*, to znaczy jest zwrotny, symetryczny i przechodni.

SŁOWNICZEK:
$\hookrightarrow$ epi-morfizm -> "na"
$\hookrightarrow$ mono-morfizm -> 1-1
$\hookrightarrow$ izo-morfizm -> bijeckja
$\hookrightarrow$ endo-morfizm -> w samego siebie
$\hookrightarrow$ auto-morfizm -> endomorfizm który jest bijekcją.

Działanie jest łączne [🇬🇧 assosiative], jeżeli

$$(\forall\ a, b, c \in A)\ a(bc) = (ab)c$$

a przemienne [🇬🇧 commutative], gdy

$$(\forall\ a, b \in A)\ ab = ba$$

1.2 Przykłady grup

1.3 Podgrupy

1.4 Grupa cykliczna

2 HOMOMORFIZMY

2.1 Rodzaje

2.2 Jądro, obraz

2.3 Zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie

3 PERMUTACJE

3.1 Transpozycje

3.2 Permutacje parzyste

4 WARSTWY, DZIELNIK NORMALNY

4.1 Warstwa, grupa ilorazowa

4.2 Orbita

4.3 Stabilizator

4.4 Orbit-stabilizer theorem

4.5 Dzielnik normalny

5 PRODUKT PÓŁPROSTY

5.1 Twierdzenie Lagrange'a

5.2 Produkt prosty

5.3 Produkt półprosty grup

6 TWIERDZENIE SYLOWA

6.1 I twierdzenie Sylowa

I twierdzenie Sylowa:
Jeżeli p jest liczbą pierwszą, a G jest grupą skończoną rzędu $|G| = p^k m$ dla $k \geq 1$ i $p \nmid m$, to istnieje podgrupa $H \leq G$ mająca p^k elementów. Taka grupa nazywa się podgrupą Sylowa.

DOWÓD:

Niech G będzie grupą rzędu $|G| = p^k m$ taką jak w twierdzeniu. Niech X będzie zbiorem wszystkich p^k elementowych podzbiorów grupy G. Możemy teraz określić działanie ψ grupy G na zbiór X. Jeśli $H = \{h_1, \ldots, h_{p^k}\} \in X$, a $g \in G$, to

$$\psi(H) = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_{p^k}\}.$$

Wiemy, że

$$|H| = \binom{p^k m}{p^k} = \frac{(p^k m)!}{(p^k m - p^k)!(p^k)!} =$$

$$= \frac{p^k m(p^k m - 1)\ldots(p^k m - p^k + 1)}{(p^k)!} = \prod_{i=1}^{p^k} p^k m - i + 1$$

6.2 Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie Cauchy'ego:
Jeżeli liczba pierwsza p dzieli rząd grupy G, to G zawiera element rzędu p.

6.3 p-grupy Sylowa

6.4 Twierdzenia Sylowa

7 KLASYFIKACJA MAŁYCH GRUP

7.1 Grupy rzędu ???

8 GRUPY TORSYJNE

8.1 Torsje

8.2 Grupy torsyjne

8.3 Skończone grupy abelowe

9 GRUPY ROZWIĄZALNE

9.1 Komutator i komutant

9.2 Grupy rozwiązalne

9.3 Rozszerzenia grup rozwiązalnych

9.4 Używanie twierdzeń Sylowa

9.5 Grupy nilpotentne

10 LEMAT O MOTYLU

10.1 Ciąg kompozycyjny w grupie

10.2 Lemat motyla

10.3 Twierdzenie Schreiera

11 GRUPY WOLNE

11.1 Grupy wolne

11.2 Własności

11.3 Przykłady

12 PIERŚCIENIE

12.1 Definicja

12.2 Dzielnik zera

12.3 Grupa elementów odwracalnych pierścienia

12.4 Dziedzina

12.5 Ciało