MDM Lista 3

Weronika Jakimowicz

ZAD 1.

JEDYNOSC O CO CHODZI

Poprawność wzoru

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

pokażę przez indukcję.

Dla $n = 2$

$$f(2) = \sum_{k=1}^{2} \lceil \log_2 k \rceil = 1$$

$$2 - 1 + f(1) + f(1) = 1 + 0 + 0 = 1 = f(2)$$

czyli się zgadza.

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla pierwszych n wyrazów. Pokażemy, że wówczas zachodzi również dla wyrazu $n + 1$. Rozważmy dwa przypadki:

I. $2 | n + 1$, wtedy możemy zapisać $n + 1 = 2k + 2$ oraz $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
f(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n + 1 \rceil &\overset{ind}{=} \\
\overset{ind}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n + 1 \rceil &= \\
= n - 1 + f(k+1) + f(k) + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil &= \\
= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k + 1 \rceil &= \\
= n - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k + 1 \rceil &= \\
= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil &= \\
= (n+1) - 1 + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)&
\end{aligned}$$

II. $2 \nmid n + 1$, czyli, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, mamy $n + 1 = 2k + 1$ i $n = 2k$. Zauważmy, że wtedy $\lceil \log_2 n + 1 \rceil = \lceil \log_2 n + 2 \rceil$.

$$\begin{aligned}
f(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \lceil \log_2 k \rceil = f(n) + \lceil \log_2 n + 1 \rceil &\overset{ind}{=} \\
\overset{ind}{=} n - 1 + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \log_2 n + 1 \rceil &= \\
= n - 1 + f(k) + f(k) + \lceil \log_2 2k + 1 \rceil &= \\
= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil \log_2 2(k+1) \rceil &= \\
= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \lceil 1 + \log_2 k + 1 \rceil &= \\
= n - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + 1 + \lceil \log_2 k + 1 \rceil &=
\end{aligned}$$

$$= (n+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=1}^{k+1} \lceil \log_2 i \rceil =$$
$$= (n+1) - 1 + f(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$$

ZAD 2.

ZAD 3.

I. istnienie takiego zapisu: nie powiedziałam nic o tym że nie ma dwóch pod rząd

Dla $n = 1$ mamy
$$1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot F_2.$$

Załóżmy, że jest to prawdą również dla wszystkich liczb naturalnych do n włącznie. Niech wtedy k będzie największą liczbą naturalną taką, że
$$F_k \leq n.$$

Jeżeli $n = F_k$, to zapis jest oczywisty. W przeciwnym wypadku, liczba $m = n - F_k$ jest liczbą naturalną mniejszą niż n, a więc z założenia indukcyjnego możemy ją zapisać tak jak w poleceniu. Dalej zauważmy, że dla takiego n mamy:
$$F_k < n < F_{k+1}$$
$$0 < n - F_k < F_{k+1}$$

czyli dla m zauważamy, że zachodzi:
$$m = n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$$

a więc zapis
$$n = m + F_k$$
nie zawiera F_{k-1} czyli jest zgodny z treścią zadania.

II. jedyność:

Po pierwsze, zauważmy że jeśli dany jest nam zbiór S_j różnych, nienastępujących po sobie liczb Fibonacciego, to jeśli F_j, dla $j \geq 2$, jest największą spośród nich, ich suma jest ostro mniejsza niż F_{j+1}. Łatwo to udowodnić przez indukcję.

Dla $j = 2$ mamy zbiór jednoelementowy: $S_2 = \{F_2\}$ i jego suma wynosi $1 < F_3 = 2$. Zakładamy, że dla wszystkich $j \leq n$ jest to prawdą. Wtedy dla $j = n + 1$ Możemy rozdzielić taki zbiór S_{n+1} na dwie części:
$$S_{n+1} = (S_{n+1} \cap \{F_k \ : \ 2 \leq k \leq n-1\}) \cup \{F_{n+1}\}$$

Zauważmy, że pierwsza część tej sumy pozwala nam użyć założenia indukcyjnego, gdyż zawiera różne, nienastępujące po sobie liczby Fibonacciego nie większe niż F_{n-1} (nie może być F_n bo dalej mamy F_{n+1} a wykluczamy występowanie dwóch kolejnych liczb Fibonacciego). Czyli ich suma jest ostro mniejsza niż F_n. Czyli mamy:
$$\sum_{f \in S_{n+1}} f < F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

Załóżmy, że dla pewnej liczby n mamy dwa zbiory liczb Fibonacciego U i W, spełniające założenia, takie, że
$$\sum_{f \in U} f = \sum_{f \in W} f.$$

Usuńmy teraz części wspólne tych zapisów, czyli niech $U' = U - W$ oraz $W' = W - U$. Ponieważ $U \neq U$ to te zbiory nie mogą być puste i
$$\sum_{f \in U'} f = \sum_{f \in W'} f.$$

Weźmy teraz u największe takie, że $F_u \in U$ oraz w największe takie, że $F_w \in W$. Ponieważ usunęliśmy część wspólną, mamy $F_w \neq F_u$ i bez straty ogólności możemy założyć, że $F_u < F_w$. Ale wtedy mamy, zgodnie ze spostrzeżeniem na początku, że
$$\sum_{f \in U} f < F_{u+1} \leq F_w$$

co daje nam sprzeczność z faktem, że sumy zbiorów U i W' są równe. Czyli któryś z nich musi być pusty. Ale wtedy jego suma jest równa 0 i musi być równa sumie drugiego zbioru, czyli oba są puste. Czyli zostaje nam, że $U = W$, bo niezerową sumę dają tylko liczby wspólne, które usunęliśmy w pierwszym kroku.