ANALIZA III - LISTA 11

W poniższych zadaniach często wygodnie jest zastosować współrzędne biegunowe choć nie zawsze. Zadania 2,4,10,11,12 są z dawnych egzaminów licencjackich.

1. Obliczyć objętość obszaru położonego wewnątrz powierzchni $z = x^2 + y^2$ pomiędzy $z = 0$ i $z = 10$.

2. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całki.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx \qquad \int_{-1}^0 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x\ dydx$$

3. Niech D będzie obszarem określonym przez $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ i $y \geq 0$. Czy D jest obszarem elementarnym? Obliczyć całkę $\int_D (1 + xy)\ dxdy$.

4*. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całkę.

$$\int_{-2}^1 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2\ dxdy.$$

Zadanie to znalazłam na stronie licencjackich lub Omilajnowskiego w wersji

$$\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2\ dxdy,$$

która generuje nieprzyjemne rachunki. Ekstra punkty jak ktoś to zrobi w wersji trudniejszej.

5*. Obliczyć $\int_D y^3(x^2 + y^2)^{-3/2}\ dxdy$, gdzie D składa się z punktów spełniających $1/2 \leq y \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. Niech $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{\pi - x^2}\}$. Oblicz

$$\int\int_U \sin(x^2 + y^2)\ dxdy$$

7. (3 punkty) Znaleźć pole figury ograniczonej poniższą krzywą. Najpierw narysować ją jakościowo.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$$

8. (3 punkty) Znaleźć pole figury ograniczonej poniższą krzywą. Najpierw narysować ją jakościowo.

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

9*. Znaleźć pole figury ograniczonej krzywą

$$x^3+y^3 = xy,\ \ x \geq 0, y \geq 0$$

10. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} (x^4-y^4)\ dydx,$$

11. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całkę

$$\int_{-2}^2 \int_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)\ dydx$$

12*. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całki

$$\int_{-1}^1 \int_{|x|/\sqrt{3}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1000}}\ dydx,$$

Znaleźć objętości brył ograniczonych poniższymi powierzchniami. Najpierw narysować ją jakościowo.

13.

$$z = x^2+y^2, z = x^2+2y^2, y = x, y = 2x, x = 1;$$

14. (3 punkty)

$$x^2+y^2+z^2 = R^2, x^2+y^2 = R(R-2z);$$

15*.

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+y^2 = ax$$

16. (3 punkty)

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$$

Wsk. Współrzędne sferyczne, cylindryczne.

17*. Niech f będzie ciągłą funkcją na $\mathbb{R}^2$. Pokaż, że dla każdego $P \in \mathbb{R}^2$

$$f(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r(P)} f(x,y)\ dxdy$$