

Miara i calka

by a plebanek fangirl :>

21.03.2137

1 Zbiory

1.1 Rodziny

Pierscien zbiorow to rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taka, ze

$$\hookrightarrow \emptyset \in \mathcal{R}$$

$$\hookrightarrow A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$$

Cialo zbiorow to pierscien zbiorow, dla ktorego $X \in \mathcal{R}$

σ -pierscien zbiorow to rodzina \mathcal{R} ktora jest pierscieniem zamknietym na przeliczalne sumy. Z tego wynika, ze

$$A_n \in \mathcal{R} \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{R}$$

σ -cialo zbiorow to σ -pierscien do ktorego nalezy X

Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bedzie rodzina zbiorow, wowczas

$\hookrightarrow \mathbf{r}(\mathcal{F})$ - pierscien generowany przez rodzine \mathcal{F}

$\hookrightarrow \mathbf{s}(\mathcal{F})$ - σ -pierscien generowany przez rodzine \mathcal{F}

$\hookrightarrow \mathbf{a}(\mathcal{F})$ - cialo generowane przez \mathcal{F}

$\hookrightarrow \sigma(\mathcal{F})$ - σ -cialo generowane przez \mathcal{F}

σ -cialo zbiorow borelowskich(*) $[\text{Bor}(\mathbb{R})]$ - najmniejsze cialo zawierajace rodzine wszystkich otwartych podzbiorow \mathbb{R}

(*) **zbior borelowski** - dowolny zbior otwarty (domkniety) uzyskany przez sume/przekroj/dopelnienie przeliczalnie wielu zbiorow otwartych (domknietych)

1.2 Funkcje

Funkcja zbioru - dla ustalonej rodziny \mathcal{R} funkcja postaci $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Addytywna funkcja zbioru (miara skonczenie addytywna) - dla \mathcal{R} bedacego pierscieniem zbiorow to funkcja $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ spelniajaca:

$$\hookrightarrow \mu(\emptyset) = 0$$

$$\hookrightarrow A, B \in \mathcal{R} \wedge A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru μ - jesli dla dowolnego R i A_n takich, ze $(\forall i, j) A_i \cap A_j = \emptyset$ oraz $R = \bigcup_n A_n$ zachodzi wzor

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

Warunek rownowazny: jest ciagla z dolu, czyli dla $A_n \uparrow A$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. Jesli zbiory A_n nie sa rozlaczne, to

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Dla **addytywnej funkcji zbioru $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$** ponizsze sa **rownowazne**:

$\hookrightarrow \mu$ jest przeliczalnie addytywna

$\hookrightarrow \mu$ jest ciagla z dolu:

$$A_n \downarrow A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

$\hookrightarrow \mu$ jest ciagla z gory na zbiorze \emptyset :

$$A_n \downarrow \emptyset \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

1.3 Miara Lebesgue'a

Niech \mathcal{R} bedzie pierscieniem na \mathbb{R} generowanym przez zbiory postaci $[a, b)$, wowczas funkcje $\lambda: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla zbioru $R = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)$, $(\forall i, j) [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$, $a_i < b_i$ definiujemy

$$\lambda(R) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Miara Lebesgue'a to standardowy sposob przypisywania miary podzbiorom przestrzeni n -wymiarowej, gdzie λ odpowiada $n = 1$ (dla $n = 2$ liczymy pole, a dla $n = 3$ - objetosc).

Niech $[a_n, b_n)$ bedzie dowolnym ciagiem takim, ze $(\forall i, j) [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$, $[a_i, b_i) \subseteq [a, b)$, wtedy

$$\sum_n (b_n - a_n) \leq b - a$$

Jesli $[a_n, b_n)$ jest dowolnym ciagiem przedzialow takim, ze $[a, b) \subseteq \bigcup_n [a_n, b_n)$ to

$$b - a \leq \sum_n (b_n - a_n)$$