Wykład 15a

Pewne rozszerzenia ciała $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$

Inne: liczby p-adyczne, p: l. pierwsza.

- $\mathbb{Z} \ni k = a_0 + a_1 p + \dots + a_l p^l$, $0 \leq a_i < p$

$k = (a_0 a_1 \dots a_l)_p$: zapis k przy podstawie p.

$$\mathbb{Q} \ni \underset{\substack{\neq \\ 0}}{x} = \frac{m}{n} = p^k \frac{m'}{n'} \rightsquigarrow v_p(x) = k$$

$m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ (n ≠ 0), $p \nmid m'n'$

$v_p : \mathbb{Q}^* \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ homomorfizm grup

Konwencja: $v_p(0) = +\infty$ <u>waluacja p-adyczna</u>

Własności v_p:

(1) $v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y)$

(2) $v_p(x+y) \geqslant \min\{v_p(x), v_p(y)\}$

norma p-adyczna:

$\|x\|_p = p^{-v_p(x)}$ gdy $x \in \mathbb{Q}^*$

$\|0\|_p = 0$.

Własności:

(1) $\|xy\|_p = \|x\|_p \cdot \|y\|_p$

(2) $\|x+y\|_p \leqslant \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

norma ultrametryczna

$$\Downarrow$$

$d_p(x,y) = \|x-y\|_p$: metryka p-adyczna

ultrametryka

$\|x-y\|_p \leq \max\{\|x-z\|_p, \|z-y\|_p\}$

$$\Downarrow$$

$d_p(x,y) \leqslant d_p(x,z) + d_p(z,y)$

- $\|\cdot\|_p$ zadaje w $\mathbb{Q}$ topologię metryczną. (względem metryki d_p)

$x_n \xrightarrow[n]{} y \iff \|x_n - y\| \xrightarrow[n]{} 0$

[analogicznie jak zwykła norma
$|\cdot| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ zadaje zwykłą topologię w $\mathbb{Q}$]

Przykłady:

$\{p^n\}_{n>0} \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{} 0$, bo $\|p^n\|_p = \dfrac{1}{p^n} \xrightarrow[n]{} 0$.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p$: uzupełnienie ciała $\mathbb{Q}$ w metryce p-adycznej.

- ciągi Cauchy'ego $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ w metryce d_p
- ich klasy abstrakcji to elementy $\mathbb{Q}_p$ liczby p-adyczne,

Postać jawna

$$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{k=N}^{\infty} a_k p^k : N \in \mathbb{Z},\ a_k \in \{0,\dots,p-1\},\ a_N \neq 0\} \cup \{0\}$$

$+$: $a_k p^k + b_k p^k = c_0 p^k + c_1 p^{k+1}$

gdzie $a_k + b_k = c_0 + c_1 p$

$0 \leq c_i < p$

$c_1 \in \{0,1\}$

$\cdot$: $a_k p^k \cdot b_l p^l = (\quad) \cdot p^{k+l}$

$a_k \cdot b_l = c_0 + c_1 p + \dots + c_t p^t$ (choć: $t \leq 1$,
$= c_0 + c_1 p$ bo: $0 \leq a_k, b_l < p$)

- $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Q}_p \leftarrow$ ciało liczb p-adycznych.

$v_p : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$

$v_p(\sum_{k=N}^{\infty} a_k p^k) = N$ $(a_N \neq 0)$, $v_p(0) = +\infty$

Przykład

$$\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,\ \ a_k \in \{0,\dots,p-1\}\} \subseteq \mathbb{Q}_p$$

pierścień p-adycznych liczb całkowitych

$\mathbb{Q}_p$: jego ciało ułamków.

Przykład : $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$

bo : $(-1) + 1 = 0$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_p \leftarrow$ uzupełnienie $\mathbb{Z}$ w normie p-adycznej

gęsty w normie p-adycznej

$\mathbb{Q}_p$: — // — $\mathbb{Q}$ — // — .

- $\mathbb{Q}_p = p^{-\mathbb{N}} \cdot \mathbb{Z}_p$

Od strony algebraicznej:

$$f_n : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \quad \text{epimorfizm pierścieni}$$

$$x \longmapsto r_{p^n}(x)$$

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{f_1} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{f_2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{f_3} \dots \quad \mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q}_p = (\mathbb{Z}_p)_0 .$$

topologia na $\mathbb{Q}_p$:

topologia p-adyczna na $\mathbb{Q}$:

p^{-n}

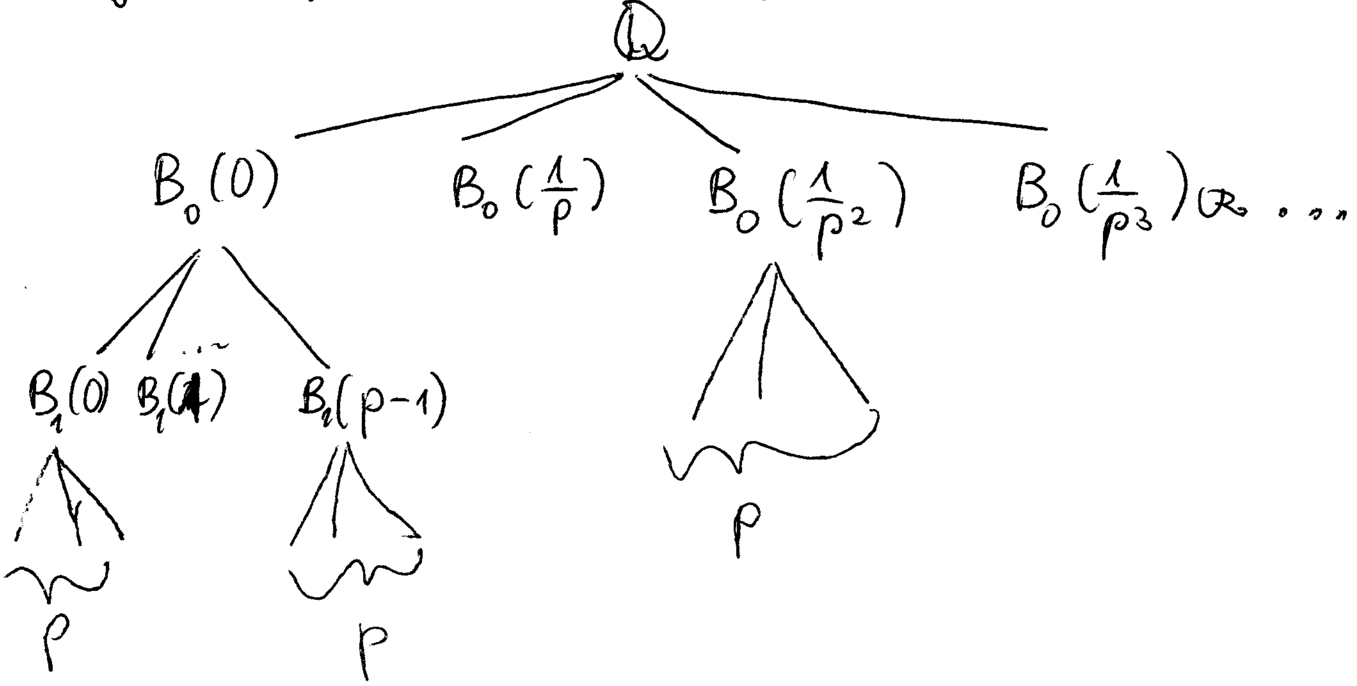
dla $x \in \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{Z}$ $\quad B_n(x) = \{y \in \mathbb{Q} : d_p(x,y) \leq p^{-n}\}$

kula (~~otwarta~~ domknięta i) wokół x. $\qquad v_p(x-y) \geq n$

$$B_0(0) = \{p^k \tfrac{m'}{n'} : k \geq 0,\ p \nmid m'n'\} \supseteq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q} = \dot{\bigcup_{n \geq 0}} \underbrace{\frac{1}{p^n} + B_0(0)}_{B_0\left(\frac{1}{p^n}\right)} = \dot{\bigcup_{n \geq 0}} B_0\left(\frac{1}{p^n}\right)$$

$$B_0(0) = B_1(0) \,\dot\cup\, B_1(1) \,\dot\cup\, B_1(2) \,\dot\cup \dots \dot\cup\, B_1(p-1)$$



$\mathbb{Q}_p$: ciało topologiczne, lokalnie zwarte.