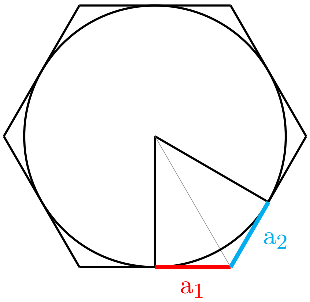
Zadania z ⋆⋆ LISTA 3

Weronika Jakimowicz

32 października 2022

ZAD 10.



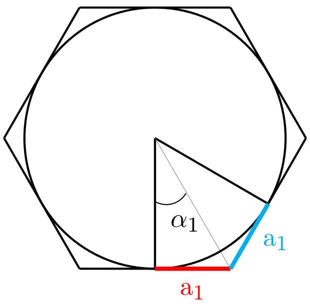
Rozważmy dwa trójkąty prostokątne z bokami a_1, a_2 zaznaczonymi na obrazku wyżej. Mają wspólną przeciwprostokątna, oraz dwie przyprostokątne będące promieniem okręgu na którym opisany jest sześciokąt. W takim razie, z twierdzenia Pitagorasa, mamy

$$a_1^2 + 1^2 = a_2^2 + 1$$
$$a_1^2 = a_2^2$$

a ponieważ rozważamy długości boków sześciokąta, to obie wartości są dodatnie, więc

$$a_1 = a_2.$$

Zauważamy więc, że fragmenty boków od punktu wspólnego z okręgiem do wierzchołka będą parami równe. W dodatku, ponieważ mamy okrąg jednostkowy, jeśli oznaczymy przez α_1 kąt naprzeciwko wierzchołka sześciokąta w każdym z takich kwadratów, to jego tangens jest równy długości a_1.



$$\tan \alpha_1 = \frac{a_1}{1} = a_1 \quad (1)$$

Podzielmy więc sześciokąt na 6 par przystających trójkątów prostokątnych tak jak wyżej, gdzie para o numerze k będzie miała bok na zewnątrz okręgu o długości a_k oraz kąt w wierzchołku będącym środkiem okregu α_k, analogicznie jak dwa obrazka wyżej. Pole całego sześciokąta to wtedy suma pól tych 12 trójkątów, a ponieważ wysokość każdego z nich jest równa 1, możemy napisać

$$P = 2(\sum_{i=1}^{6} a_n)$$

natomiast podstawiając z obserwacji (1) dostaniemy

$$P = 2(\sum_{i=1}^{6} \tan \alpha_k).$$

Zauważmy, że suma oznaczanych przez nas kątów jest równa 2π, ponieważ musi sumuwać się do pełnego kąta, a ponieważ każdy kąt powtarza się dwa razy, to mamy warunek:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \alpha_{\mathrm{i}} = \pi.$$

Rozważamy więc funkcję

$$\mathrm{f}(\alpha_1, ..., \alpha_6) = 2(\sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \tan \alpha_{\mathrm{k}})$$

przy warunku

$$\mathrm{g}(\alpha_1, ..., \alpha_6) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \alpha_{\mathrm{i}} = \pi.$$

Korzystając z metody mnożników Lagrange'a otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{2}{\cos^2 \alpha_1} = \lambda \\ ... \\ \frac{2}{\cos^2 \alpha_6} = \lambda \\ \sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \alpha_{\mathrm{i}} = \pi \end{cases}$$

Ponieważ po lewej stronie każdego z równań mamy wartość która nie może być równa 0 (dzielimy 1 przez pewna wartość), to $\lambda \neq 0$.

Niech $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, mamy

$$\begin{cases} \frac{2}{\cos^2 \alpha_{\mathrm{i}}} = \lambda \\ \frac{2}{\cos^2 \alpha_{\mathrm{j}}} = \lambda \end{cases}$$

$$\frac{2}{\cos^2 \alpha_{\mathrm{i}}} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_{\mathrm{j}}}$$

$$\cos^2 \alpha_{\mathrm{j}} = \cos^2 \alpha_{\mathrm{i}}$$

Są dwie możliwości:

$$1.\ \cos \alpha_{\mathrm{j}} = -\cos \alpha_{\mathrm{i}}$$

co znaczy, że część kątów jest ujemna, co nie może się zdarzyć.

$$1.\ \cos \alpha_{\mathrm{j}} = \cos \alpha_{\mathrm{i}}$$

i wtedy $\alpha_{\mathrm{j}} = \alpha_{\mathrm{i}}$ lub $\alpha_{\mathrm{j}} = 2\pi - \alpha_{\mathrm{i}}$. Przyjżyjmy się napierw drugiej możliwości. Każdy α_{i} możemy wrazić za pomocą α_1, co da nam

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \alpha_{\mathrm{i}} = \alpha_1 + 5(2\pi - \alpha_1) = 10\pi - 4\alpha_1$$

żeby to było zgodne z ograniczeniem, dostaniemy

$$10\pi - 4\alpha_1 = \pi$$

$$\frac{9}{4}\pi = \alpha_1$$

ale wtedy

$$\alpha_{\mathrm{k}} = 2\pi - \frac{9}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi$$

wszystkie kąty poza pierwszym sa ujemne, co być nie może. Pozostaje nam więc

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \alpha_{\mathrm{j}},$$

co spełnia warunek dla $\alpha_{\mathrm{i}} = \frac{\pi}{6}$, a więc o najmniejsze pole podejrzewamy sześciokąt foremny.

$$\mathrm{P} = 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{6} \tan \frac{\pi}{6} = \frac{12}{\sqrt{3}} \approx 6.928$$

Sprawdźmy pole innego sześciokąta, np takiego, dla którego $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, a dla pozostałych i $\alpha_i = \frac{3}{20}\pi$

$$P_2 = 2(\tan\frac{\pi}{4} + 5\tan\frac{3\pi}{20}) \approx 7.095 > P$$

wiemy więc, że znaleziona wartość na pewno nie jest maksimum pola. Aby istniała wartość mniejsza, musielibyśmy jeden kąt zmniejszony o ϵ, a pozostałe wydłużone o jakąś część tego skrócenia. Ale zauważmy, że

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$P_3 = \tan(\frac{\pi}{6} - \epsilon) + \tan(\frac{\pi}{6} + \xi_2) + ... + \tan(\frac{\pi}{6} + \xi_6) =$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{6} - \tan\epsilon}{1 + \tan\frac{\beta}{6}\tan\epsilon} + \sum_{i=2}^{6} \frac{\tan\frac{\pi}{6} + \tan\xi_i}{1 - \tan\frac{\pi}{6}\tan\xi_i}$$

i zauważmy, że to co dodamy jest większe niż to, co odejmiemy, więc dostajemy coś większego niż oryginalne $\frac{\pi}{6}$.

ZAD 12.

Zauważmy, że jesli $f(x) \in P_2$, to f możemy zapisać jako

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ takich, że $a + b + c = 1$. W takim razie, funkcja $\phi(f)$ sprowadza się do postaci:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)^2 dx,$$

co z kolei jest równe:

$$\phi(f) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2.$$

Całe zadanie sprowadza się do znalezienia minimum funkcji trzech zmiennych

$$F(a, b, c) = \frac{a^2}{5} + \frac{2ac + b^2}{3} + \frac{ab}{2} + bc + c^2$$

przy warunku, że funkcja

$$g(a, b, c) = a + b + c = 1.$$

Używając mnożników Lagrange'a dostajemy układ równań postaci

$$\begin{cases} \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c + \frac{b}{2} - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}b + \frac{a}{2} + c - \lambda = 0 \\ \frac{2}{3}a + b + 2c - \lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a + 20c + 15b - 30\lambda = 0 \\ 4b + 3a + 6c - 6\lambda = 0 \\ 2a + 3b + 6c - 3\lambda = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

1. $\lambda = 0$, wtedy

$$\begin{cases} 3a + 4b + 6c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \\ 12a + 15b + 20c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 20c = 3a \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{20}{3} \\ b = -\frac{20}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$F(\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}, 1) = \frac{7}{27}$$

2. $\lambda \neq 0$

Jeśli zapiszemy je w postaci macierzy, dostajemy:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Korzystając z metody eliminacji Gaussa, dostajemy macierz

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & -30 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Która daje nam poniższe równanie:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3}c = \lambda \\ \frac{1}{4}b + c + \frac{3}{2}\lambda = 0 \\ 12a + 15b + 20c - 30\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{9} \\ c = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Zauważmy, że zbiór P_2, oraz zbior wektorów z $\mathbb{R}^3$ o kolejnych współrzędnych będących współczynnikami wielomianów z P_2, jest niezwarty i nieograniczony. Musimy więc sprawdzić, co się dzieje kiedy

$$\|(a, b, c)\| \to \infty$$

$$b = 1 - a - c$$

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= \frac{1}{30}(6a^2 + 20ac + 10b^2 + 15ab + 30bc + 30c^2) = \\ &= \frac{1}{30}(\frac{1}{4}(2a - 5c - 5)^2 + \frac{5}{2}c^2 + \frac{5}{4}(c - 1)^2 + \frac{5}{2}) \to \infty \end{aligned}$$

Czyli dla wektorów o długości dążącej do nieskończoności mamy wartość F dodatnią i dążącą do nieskończoności, więc nie istnieje wartość maksymalna.

Wartość funkcji F w punkcie który został otrzymany w powyższych obliczeniach wynosi

$$F(\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$$

czyli jest niższa niż dla przypadku $\lambda = 0$.

Ponieważ warunek $x + y + z = 1$ każe nam szukać rozwiązań na płaszczyznie, możemy uzależnić jedną zmienną od innych, np x

$$x = 1 - z - y,$$

oraz zbadać nową funkcję, de facto funkcję dwóch zmiennych. Nazwijmy ją $G(y, z)$, ze wzorem wynikłym ze wzoru na F:

$$G(y, z) = \frac{1}{30}(y^2 + 7yz + 3y + 16z^2 + 8z + 6).$$

Hesjan takiej funkcji wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 32 \end{bmatrix} = 64 - 49 > 0$$

i jest niezależny od y, z oraz dodatni, więc funkcja na badanej płaszczyznie jest wypukła. W takim razie znalezione przeze mnie ekstremum to minimum.