Algebra II (ISIM), lista 3 (26.10.2021, deklaracje do godziny 9:00).

G, H, F oznaczają zazwyczaj grupy.

Teoria: Dzielnik normalny (podgrupa normalna) grupy. Grupa ilorazowa. Zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup. Działanie grupy G na zbiorze X (lewo- i prawostronne). Działanie lewostronne jako homomorfizm $\varphi : G \to Sym(X)$. Działanie wierne, tranzytywne. Stabilizator G_x, orbita $O(x) = Gx$.

1. Załóżmy, że $H < G$ oraz $[G : H] = 2$. Udowodnić, że $H \triangleleft G$.

2. * Załóżmy, że $H < G$ oraz indeks $[G : H]$ jest skończony. Udowodnić, że istnieje podgrupa $N < H$ skończonego indeksu w G, normalna w G.

3. Załóżmy, że $Y \subseteq X$. Udowodnić, że $(\mathcal{P}(X), \triangle)/(\mathcal{P}(Y), \triangle) \cong (\mathcal{P}(X \setminus Y), \triangle)$.

4. Niech $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} < (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   (a) Określić epimorfizm grup $f : (\mathbb{R}, +) \to S$ taki, że $Ker(f) = \mathbb{Z}$.
   (b) Udowodnić, że grupa ilrazowa $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ jest izomorficzna z grupą $S_\infty < S$ wszystkich zespolonych pierwiastków z jedności.
   (c) W grupie $(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ wskazać elementy (1) rzędu nieskończoność (jakikolwiek) i (2) rzędu 5 (wszystkie).

5. (Tw. o faktoryzacji homomorfizmu grup) Załóżmy, że $N \triangleleft G$ oraz $j : G \to G/N$ jest homomorfizmem ilorazowym. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Istnieje homomorfizm $\bar{f} : G/N \to H$ taki, że $f = \bar{f} \circ j$.
   (b) $N < Ker(f)$.

6. Załózmy, że $F \triangleleft G, H < G$. Udowodnić, że:
   (a) $FH < G$ oraz $F \triangleleft FH$
   (b) $F \cap H \triangleleft H$
   (c) $H/(H \cap F) \cong (FH)/F$

7. Załóżmy, że $F < H \triangleleft G$ oraz $F \triangleleft G$. Udowodnić, że $G/H \cong (G/F)/(H/F)$ (wsk. do tego zadania i zadania poprzedniego (c): zastosować odpowiednio twierdzenie o faktoryzacji lub zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup).

8. Wyznaczyc orbity działania grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na:
   (a) przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ (tu dla $A \in GL(n, \mathbb{R})$ i $X \in \mathbb{R}^n$ $A \cdot X = f_A(X)$, gdzie f_A to odwzorowanie liniowe o macierzy A),
   (b)* zbiorze macierzy $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (tu działanie to mnożenie macierzy $A \cdot X$).