ZAD 1.

Niech $f(x) = \frac{1}{x} - c$. Zauwazajac, ze $f(\frac{1}{c}) = 0$, mozemy przyblizyc $\frac{1}{c}$ uzywajac metody Newtona dla funkcji f.

Rozwazmy wiec punkt x_1, ktory przyblizamy za pomoca:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 + \frac{\frac{1}{x_0} - c}{\frac{1}{x_0^2}} = x_0 + \frac{x_0^2 - cx_0^3}{x_0} = x_0 + x_0 - cx_0^2 = 2x_0 - cx_0^2$$

Czyli w punkcie x_0 rysujemy styczna do funkcji f i szukamy jej punktu przeciecia z osia OX.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(2 - cx_1) = \\ &= (x_0(2 - cx_0))(2 - c(x_0(2 - cx_0))) = \\ &= (2x_0 - cx_0^2)(2 - 2cx_0 + c^2x_0^2) = \\ &= 4x_0 - 4cx_0^2 + 2c^2x_0^3 - 2cx_0^2 + 2c^2x_0^3 - c^3x_0^4 = \\ &= 4x_0 - 6cx_0^2 + 4c^2x_0^3 - c^3x_0^4 \end{aligned}$$

Czyli dla coraz to wiekszego n mamy coraz to wieksze potegi x_0, czyli generalnie to nie bedziemy chcieli brac zbyd duzego x_0, najlepiej cos ponizej 1. W dodatku przy wyzszych potegach x_0 mamy wyzsza potege c, przy czym potega przy x_0 jest zwykle o jeden wieksza. Mozemy przewidziec, ze tak bedzie dalej. Najlepiej wiec, zeby $x_0^2 \cdot c < 1$, a im mniejsze tym lepiej.

ZAD 2.

Ciag przyblizen za pomoca metody newtona jest zbiezny liniowo do pierwiastka funkcji f.

$$x_{x+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Chce, zeby bylo liniowe

ZAD 4.

Aby ciag byl zbiezny kwadratowo, musi zachodzic dla $\alpha = 0$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \to K \in (0, \infty).$$

$$\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n^2})^2} = \frac{n^4}{n^2} \to \infty$$

Czyli ten ciag nie jest zbiezny kwadratowo.

$$\frac{1}{2^{2^n}}$$

$$\frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = 2^{2^n - 2^{n+1}} = 2^{2^n(1-2)} = 2^{-2^n} \to 0$$

Czyli ciag jest zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty$$

Czyli ciag nie jest zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{e^n}$$

$$\frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{3^{2n}}} = \frac{e^{2n}}{e^n} = e^n \to \infty$$

Czyli znowu nie zbiezny kwadratowo

$$\frac{1}{n^n}$$

$$\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{2n}}} = \frac{n^{2n}}{n^n} = n^n \to \infty$$

ZAD 6.

$$x_{n+1} = x_n - rf(x_n)$$

Ciag jest zbiezny liniowo, gdy

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \to K \quad 0 < K < 1$$

Szukamy α takiego, ze $f(\alpha) = 0$. Rozpatrzmy funkcje ϕ taka, ze

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

czyli miejsce zerowe f to jej punkt staly. Dalej, niech

$$\phi(x_n) = x_{n+1},$$

$$\phi(x_n) = x_n + rf(x_n).$$

Zauwazmy, ze istnieje $\xi \in [\alpha, x_n]$ takie, ze

$$x_{n+1} = \phi(\alpha) + \phi'(\xi)(x_n - \alpha) + ... + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

natomiast dla zbieznosci liniowej potrzebne nam jest $p = 1$, wiec

$$\phi(x_n) = \alpha + \phi'(\xi)(x_n - \alpha)$$

$$\phi(x_n) - \alpha = \phi'(\xi)(x_n - \alpha)$$

Sprawdzmy kiedy funkcja $\phi(x_n)$ zbiega do α, czyli kiedy

$$|\phi'(x)| = |1 - rf'(x)| < 1$$

bo w przeciwnym wypadku mamy ciag ktory nie jest zbiezny liniowo.

$$-1 < 1 - rf'(x) < 1$$
$$0 < rf'(x) < 2$$