Zadania z ** lista 15

Weronika Jakimowicz

January 20, 2023

ZAD. 3.

Zrobimy to taką troszkę dziwną, skończoną indukcją. To znaczy najpierw pokażemy, że jest pierwsza pochodna po oby współrzędnych.
Korzystając z zadania 12 z listy 12 dla $h(x) = \int_a^b g(x,y)dy$, czyli przedział całkowania jest stały i wyraz $\int_c^d f(x,x,z)dz$ się redukuje, dostajemy

$$\frac{d}{dx_1}\phi \star f(x_1,x_2) = \frac{d}{dx_1}\int\int \phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \int\int \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2$$

i analogicznie dla drugiej współrzędnej.

Załóżmy teraz, że dla wszystkich $\alpha = (a_1,a_2)$ takiego, że $|\alpha| < m$ mamy ciągłe pochodne cząstkowe. Oznaczmy $D^\alpha(\phi\star f)(x) = g$. Popatrzmy teraz na dwie kolejne pochodne: dla $\alpha_1 = (a_1+1,a_2)$ oraz $\alpha_2 = (a_1,a_2+1)$. Zacznijmy od tej pierwszej.

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}(\phi\star f)(x_1,x_2) &= \frac{d}{dx_1}g(x) = \frac{d}{dx_1}\int\int D^\alpha\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \\ &= \int\int \frac{d}{dx_1}D^\alpha\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \\ &= \int\int D^{\alpha_1}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 \end{aligned}$$

Analogicznie dla drugiej:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_2}(\phi\star f)(x_1,x_2) &= \frac{d}{dx_2}g(x) = \frac{d}{dx_1}\int\int D^\alpha\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \\ &= \int\int \frac{d}{dx_2}D^\alpha\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \\ &= \int\int D^{\alpha_2}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 \end{aligned}$$

I oczywiście ogranicza nas tutaj od góry fakt, że ϕ ma tylko m pochodnych cząstkowych.

Jeszcze słowem komentarza o funkcji f. Dzięki temu, że f jest niezerowa tylko na ograniczonym zbiorze, to możemy ten podzbiór miary zero na którym nie jest ciągła ograniczyć przez kwadraciki o coraz to mniejszej mierze. To znaczy zbiór S punktów nieciągłości f jest zawarty w domkniętym

$$S \subseteq \sum_{i=0}^{n}[a_i,b_i]\times[a_i,b_i]$$

którego miarę łatwo jest policzyć i możemy zmniejszać ich średnicę poniżej dowolnego $\varepsilon > 0$, czyli całkowalność całości nam się nie psuje.