ZAD. 1.

Udowodnić, że jeśli $x_n \to x$ *oraz* $y_n \to y$ *w przestrzeni unormowanej* X*, to* $x_n + y_n \to x + y$*. Pokazać, że jeśli* $\lambda_n \to \lambda$*, gdzie* $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$*, to* $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
Skoro $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$, wiemy, że zachodzi

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N)(\forall\ n \geq N)\ \|x_n - x\| < \varepsilon$$

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ N)(\forall\ n \geq N)\ \|y_n - y\| < \varepsilon$$

Weźmy więc dowolnego $\varepsilon > 0$. Wtedy dla x_n znajdziemy N_x że dla $n \geq N_x$ wszystkie x_n są co oddalone od x o mniej niż ε. Tak samo dla y_n znajdziemy N_y które to spełnia. Możemy więc wybrać

$$N = \max(N_x, N_y).$$

Wtedy dla dowolnego $n \geq N$ zachodzą dwie nierówności:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

$$\|y_n - y\| < \varepsilon$$

które po dodaniu tworzą

$$\varepsilon > \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \geq \|x_n - x + y_n - y\| = \|(x_n + y_n) - (x + y)\|.$$

Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ wtedy również

$$\frac{\varepsilon}{\|x\| + 1} > 0$$

$$\frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} > 0$$

są dowolnie małe, w zależności od doboru ε. Czyli znajdziemy N takie, że dla wszystkich $n \geq N$ zachodzi

$$|\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{\|x\| + 1}$$

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

Niech M będzie takie, że dla każdego $n \geq M$ jest

$$|\lambda_n| - |\lambda| \leq ||\lambda_n| - |\lambda|| \leq |\lambda_n - \lambda| < 1$$

i wtedy

$$\frac{|\lambda_n|}{|\lambda| + 1} < 1.$$

Weźmy dowolny n taki, że $n \geq \max(N, M)$, wtedy:

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - x\lambda_n + x\lambda_n - x\lambda\| = \|\lambda_n(x_n - x) + x(\lambda_n - \lambda)\| \leq \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - x)\| + \|x(\lambda_n - \lambda)\| = |\lambda_n|\|x_n - x\| + \|x\||\lambda_n - \lambda| < \\ &< |\lambda_n|\frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} + \|x\|\frac{\varepsilon}{\|x\| + 1} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

ZAD. 2.

Pokazać zupełność przestrzeni $L^p(0, 1)$ *dla* $p \geq 1$.
Wskazówka: Postępować tak jak w przypadku $p = 1$. Skorzystać z nierówności

$$\|\sum |f_n|\|_p \geq \sum \|f_n\|_p.$$

Twierdzenie: Przestrzeń unormowana jest zupełna $\iff$ każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Weźmy dowolny szereg bezwzględnie zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = b < \infty.$$

Chcemy pokazać, że jest on zbieżny, to znaczy że szereg jego sum częściowych

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |f_n|$$

jest zbieżny, czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = s < \infty.$$

Niech $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Funkcja ta jest mierzalna i nieujemna bo jest granicą punktową szeregów funkcji nieujemnych i mierzalnych. Zatem mamy

$$\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \sum |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum \left(\int |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum \|f_n\| < \infty.$$

W takim razie szereg $\sum f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny prawie wszędzie. Możemy więc określić

$$h(x) = \begin{cases} \sum |f_n(x)| & \text{gdy zbieżny} \\ 0 & \end{cases}$$

ja ni cholery nie rozumiem co sie dzieje

ZAD. 3.

W przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ *znaleźć odległość funkcji* x^n *od dwuwymiarowej podprzestrzeni* $E = \{ax + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Tutaj pamiętam, że najładniejszą opcją będzie przewrócenie funkcji x^n tak, żeby zaczynała i kończyła się w 0. Ale to na koniec, najpierw chcę się nauczyć robić to cierpiąc.

Zauważmy, że E to wykres funkcji $g(x) = ax + b$. Odległość między funkcją f a dowolną funkcją z tej przestrzeni to najmniejsza wartość

$$\|f - g\| = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 |x^n - (ax + b)|dx = \pm \int_0^1 x^n - (ax + b)dx =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{a}{2} - b$$