

# Zadania z ★★ LISTA 12

Weronika Jakimowicz

28 grudnia 2023

## ZAD. 12

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą taką, że  $\frac{\partial f}{\partial x}$  istnieje i jest ciągła. Pokazać, że

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) dz dy = \int_c^d f(x, x, z) dz + \int_a^x \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dz dy$$

Rozważmy funkcję

$$g(x, y) = \int_c^d f(x, y, z) dz$$

oraz

$$h(x) = \int_a^x g(x, y) dy.$$

Będziemy liczyć

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) dz dy = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t}.$$

Dla ułatwienia zapisu, sprawdzimy najpierw jak będzie wyglądał licznik powyższego ułamka:

$$\begin{aligned} h(x+t) - h(x) &= \int_a^{x+t} g(x+t, y) dy - \int_a^x g(x, y) dy = \\ &= \int_a^x [g(x+t, y) - g(x, y)] dy + \int_x^{x+t} g(x+t, y) dy \end{aligned}$$

Wartość drugiego elementu tej sumy, to znaczy

$$\int_x^{x+t} g(x+t, y) dy$$

możemy ocenić za pomocą twierdzenia o wartości średniej, czyli istnieje  $\xi \in [x, x+t]$  takie, że

$$\int_x^{x+t} g(x+t, y) dy = (x+t-x)g(x, \xi).$$

Teraz wracając do całości:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} h(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_a^x [g(x+t, y) - g(x, y)] dy + \int_x^{x+t} g(x+t, y) dy \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^x \frac{g(x+t, y) - g(x, y)}{t} dy + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} g(x+t, y) dy = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^x \frac{g(x+t, y) - g(x, y)}{t} dy + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x+t-x}{t} g(x, \xi) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^x \frac{g(x+t, y) - g(x, y)}{t} dy + g(x, x), \end{aligned}$$

bo w drugim składniku  $\frac{x+t-x}{t} = \frac{t}{t} = 1$  natomiast  $\xi \in [x, x+t]$  szerokość tego przedziału zmierza do 0, więc  $\xi = x$ . Teraz chcemy włożyć lim pod całkę, więc musimy pokazać, że  $\frac{g(x+t,y)-g(x,y)}{t}$  zbiega jednostajnie do  $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ . Popatrzmy na ciąg

$$p_n(x,y) = \frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x,y)}{\frac{1}{n}}.$$

Nietrudno zauważyć, że dla  $n \rightarrow \infty$  mamy to samo co dla  $t \rightarrow 0$ , natomiast z ciągłości  $g$  (jako złożenia funkcji ciągłych), mamy zbieżność jednostajną tego ciągu do  $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ . Czyli wracając do długiego równania, mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x,y,z) dz dy &= \frac{d}{dx} h(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) dy + g(x,x) = \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x,y,z) dz dy + \int_c^d f(x,x,z) dz = \\ &= \int_a^x \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) dz dy + \int_c^d f(x,x,z) dz \end{aligned}$$

gdzie włożenia  $\frac{\partial}{\partial x}$  pod całkę dokonuję, bo w  $\int_c^d f(x,y,z) dz$  funkcja  $f$  zależy od  $x$  a cała całka zmienia się przez zmianę wartości  $f$  w  $x$ .