Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 9

22 grudnia 2022 r.

M9.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\{P_k(x)\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[-a,\, a]$, z wagą $p(x)$ o własności $p(-x) = p(x)$. Wykazać, że wówczas

$$P_{2m}(x) = S_m(x^2), \qquad P_{2m+1}(x) = x\, R_m(x^2) \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

gdzie S_m, R_m są wielomianami stopnia m.

M9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomiany $\{S_m(t)\}$ z poprzedniego zadania są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $v(t) = p(\sqrt{t})/\sqrt{t}$, a wielomiany $\{R_m(t)\}$ są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $w(t) = \sqrt{t}\, p(\sqrt{t})$.

M9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomian $\tilde{T}_n := 2^{1-n} T_n$ ma najmniejszą normę w przedziale $[-1,\, 1]$ spośród wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$, o współczynniku wiodącym rownym 1.

M9.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $f \in C[a, b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

M9.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259

M9.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć z dokładnością do 6 miejsc po przecinku współczynniki wielomianu $w_2(x) = ax^2 + bx + c$, będącego drugim wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji $\sin(x)$ w przedziale $[0, 2\pi]$.
Wskazówka, z której nie można korzystać w rozwiązaniu: $a + b + c \approx 0.465\ldots$.

M9.7. $\boxed{\text{1 punkt, Włącz komputer!}}$ Niech $w_5^* \in \Pi_5$ będzie piątym wielomianem optymalnym (w sensie normy jednostajnej) dla funkcji $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ na zbiorze $[-1, 1]$. Wykazać, że zachodzą nierówności:

$$0.002 < \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - w_5^*(x)| < 0.009.$$

M9.8. $\boxed{\text{2 punkty, Włącz komputer!}}$ Rozważyć aproksymację fukncji Rungego $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ w przedziale $[-1, 1]$ za pomocą wielomianu $w \in \Pi_9$. Dla każdego z poniższych wielomianów podać wartość błędu $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - w(x)|$ (wartość tę można przybliżyć obliczając $|f(x_k) - w(x_k)|$ dla $x_k = -1 + 2k/N$, gdzie N jest bardzo duże, np. $N = 1000$). Rozważyć następujące wielomiany:

a) wielomian interpolujący funkcję f w węzłach równoodległych,

b) wielomian interpolujący funkcję f w zerach wielomianu T_{10},

c) wielomian interpolujący funkcję f w punktach ekstremalnych wielomianu T_9,

d) 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x) \equiv 1$,

e) 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Czebyszewa.

8 grudnia 2022 r.

Rafał Nowak