ANALIZA III - LISTA 12

W zadaniach 1-6,8 ćwiczymy twierdzenie o zamianie zmiennych.

1. Niech D będzie obszarem określonym warunkami $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$, $a \leq x \leq b$, gdzie ϕ jest ciągłą nieujemną funkcja na $[a,b]$. Załóżmy, że $f(x,y) = -f(x,-y)$ dla $(x,y) \in D$. Uzasadnić, że $\iint_D f(x,y)\ dxdy = 0$.

2. Obliczyć $\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}/2\ dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez proste $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=1$.

3. Określmy $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Niech D^* bedzie zbiorem punktów (u,v) okreslonych warunkami $u^2 + v^2 \leq 1, u, v \geq 0$. Znaleźć $D = T(D^*)$ i obliczyć

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

4. Znajdź nowe współrzędne, w których obszar jest kołem o środku 0 lub jego częścią, zamień zmienne i sprawdź czy da się łatwo policzyć całki. Każdy podpunkt liczy się za 2 punkty.

(a) $\int\int_{(x-3)^2+(y-4)^2\leq 9}\ xy\ dxdy$ (b) $\int\int_{4x^2+9(y+1)^2\leq 1}\ xy\ dxdy$

(c) $\int\int_D xy\ dxdy$, gdzie $D = \{(x-13)^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0, x \geq 13\}$.

5. Obliczyć całkę

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$$

po obszarze D ograniczonym elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią.

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

7. Niech

$$T(r,\phi,\psi) = (r \sin\varphi \cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\varphi)$$

i $B_R(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < R\}$. Pokaż, że T przeprowadza wzajemnie jednoznacznie $(0,R)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ na $B_R(0) \setminus (\{(x,0,z) : x \geq 0, x^2+z^2 < R\} \cup \{(0,0,z) : |z| < R\})$.

8*. Niech A będzie macierzą dodatnio określoną $d \times d$. Udowodnić, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-(x,Ax))\, dx = \left(\frac{\pi^d}{\det(A)}\right)^{1/2}.$$

9*. (6 punktów) Załóżmy, że f jest ciągła na $R = [a,b] \times [c,d]$. Dla $a < x < b, c < y < d$ określamy

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\ dvdu.$$

Pokazać, że $\partial^2 F/\partial x \partial y = \partial^2 F/\partial y \partial x = f(x,y)$. Używając tego wskazać alternatywny dowód, że dla funkcji $f(x,y)$ klasy C^2 pochodne mieszane rzędu 2 są równe.
Wskazówka. Jeśli f ciągła i $g(y) = \int_b^y f(v)\ dv$, to $g'(y) = f(y)$.

10*. Dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du, \qquad [a,b] \xrightarrow{\varphi} [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Wyjasnić dlaczego nie jest to sprzeczne z twierdzeniem o zamianie zmiennych, gdzie występuje $|J_T|$, a nie J_T.

**11. Niech $S = [0,1] \times [0,1]$. Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna ? Proszę spróbować nadać sens tym całkom odcinając punkt $(0,0)$ lub wykazać, że nie da się im nadać sensu.

$$\int\int_S \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy,$$

$$\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy,$$

$$\int\int_S \ln(x^2+y^2)\ dxdy,$$

$$\int\int_S \frac{1}{x^2+y^2}\ dydx,$$

**12. Niech f będzie funkcją ciągłą taką, że $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje i jest ciągła. Pokazać, że

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \int_c^d f(x,y,z)\ dzdy = \int_c^d f(x,x,z)\ dz + \int_a^x \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\ dzdy.$$

Wskazówka. Jeśli f ciągła i $g(y) = \int_b^y f(v)\ dv$, to $g'(y) = f(y)$

**13. Załóżmy, że U^*, U są zbiorami otwartymi, $T : U^* \mapsto U$ jest wzajemnie jednoznaczne, klasy C^1, $\det DT(u) \neq 0$, $u \in U^*$. Niech $D \subset U, D^* \subset U^*$, $T(D^*) = D$. Załóżmy, że domknięcie $\bar{D}$ jest zawarte w U. Pokaż, że D jest mierzalny w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy, gdy taki jest D^*.

Niech f będzie funkcją na U, której zbiór punktów nieciągłości ma miarę zero. Pokaż to samo o $f \circ T$.

Pokaż, że jeśli D jest ograniczony i mierzalny w sensie Jordana, a zbiór punktów nieciągłości ograniczonej f ma miarę zero to

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_{Int\ D} f(x,y)\ dxdy = \iint_{\bar{D}} f(x,y)\ dxdy,$$

gdzie $IntD$ jest wnętrzem D.

Uwaga. Używamy wyłącznie definicji bycia zbiorem miary zero w jej trzech równoważnych wersjach podanych na wykładzie. Wygodne jest użycie pokrycia kulami. To zadanie jest nietrudne, ale żmudne. Dla tych, co lubią wszystko dokładnie zrozumieć.

**14. Niech f będzie funkcją określoną na $\mathbb{R}^d$ całkowalną na każdym prostokącie taką, że
$$\lim_{r\to\infty}\int_{P_r}|f(x)|\ dx<\infty.$$
($P_r=[-r,r]\times ... \times[-r,r]$). Wtedy definiujemy
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ dx := \lim_{r\to\infty}\int_{P_r} f(x)\ dx.$$
Pokaż, że powyższa granica istnieje i daje tę samą wartość, co definicja przy pomocy rozkładu jedności.