ZAD 1.

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$$

Niech $\mathbb{Z} \ni m = \lfloor an \rfloor$, wtedy

$$m \leq an < m + 1$$
$$m - n \leq an - n < m - n + 1$$
$$n - m \geq n - an > n - m - 1$$

Poniewaz $n \notin \mathbb{Q}$, to $n - an \notin \mathbb{Z}$, wiec

$$\lfloor n - an \rfloor = n - \lfloor an \rfloor - 1$$

a z tego

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor n(1-a) \rfloor = n - 1$$

$$\lceil an \rceil + \lceil n - an \rceil = n + 1$$

ZAD 2.

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{m} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor \quad (🦇)$$

Po pierwsze pokazemy, ze dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor \quad (☕)$$

Niech $p = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor$, wtedy

$$p \leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p + 1$$
$$p \leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p + 1$$
$$\mathbb{Z} \ni m \cdot p - n \leq \lfloor x \rfloor < m \cdot (p+1) - n \in \mathbb{Z}$$
$$m \cdot p - n \leq x < m \cdot (p+1) - n$$
$$p \leq \frac{x-n}{m} < p + 1$$
$$p \leq \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor < p + 1$$
$$p = \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor$$

Czyli pokazalismy (☕).

Po drugie, zauwazmy, ze dla dowolnego n i dla kazdego $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m > 1$ zachodzi

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{n+i}{m} \right\rfloor$$

Zauwazmy, ze jest to ilosc elementow w kazdej grupie przy podziale n elementow na m grup. We wszystkich kolumnach umiescimy co najmniej $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ obiektow, ale w ostatnich $n \bmod m$ kolumnach bedzie ich o 1 wiecej, co jest uzyskiwane przez zwiekszanie o 1 licznika po kazdej kolumnie.

Wracajac do (🦇), mozemy powiedziec, ze

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

ZAD 3.

a) potrzebujemy a_0, a_1, natomiast a_2 mozemy juz obliczyc za pomoca a_0

b) potrzebne jest a_0, a_1 oraz a_2, bo wyraz a_3 to juz suma wyrazow poprzednich

c) potrzebny jest tylko wyraz a_0 – jest on potrzebny dla a_1, dla a_2 potrzebne jest a_1 i tak dalej – zawsze przy odpowiedniej ilosci podzielen na 2 otrzymujemy a_0