Algebra II (ISIM), lista 2 (19.10.2021, deklaracje do 9:00).

p oznacza liczbę pierwszą, F, G, H sa grupami.

Teoria: Grupa i grupa abelowa: definicja, podstawowe własności, notacja multyplikatywna i addytywna. Rząd grupy. Podgrupa: definicja, podstawowe własności, charakteryzacja podgrupy jako podstruktury. Przykłady grup: grupa czwórkowa Kleina K_4, n-ta grupa dihedralna D_n, n-ta grupa symetryczna S_n. Grupa automorfizmów struktury. Podgrupy $\langle a\rangle$ i $\langle A\rangle$ dla $a \in G, A \subseteq G$. Rząd $ord(a)$ elementu w grupie. Grupy cykliczne: definicja, wyliczenie. Warstwy podgrupy. $|G| = [G : K] \cdot |K|$. Twierdzenie Lagrange'a: rząd podgrupy dzieli rząd grupy. Rząd elementu grupy dzieli rząd grupy.

Homomorfizmy grup: jądro, obraz, własności.

1. Dana jest grupa 4-elementowa $G = \{e, a, b, c\}$ taka, że $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Sporządzić tabelkę działania grupy G, z uzasadnieniem.
2. $^-$ Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup Udowodnic, że
   (a) $f(e_G) = e_H$.
   (b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
   (c) $Ker(f) < G,\ Im(f) < H$.
3. (Małe tw. Fermata) Załóżmy, że liczba całkowita n nie jest podzielna przez p. Udowodnić, że $p|n^{p-1}-1$ (wsk: sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $n \in \mathbb{Z}_p^*$).
4. (a) W grupie $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ obliczyć iloczyn wszystkich elementów.
   (b) Udowodnić twierdzenie Wilsona: $p|(p-1)! + 1$.
5. Udowodnić, że jeśli G, H są grupami cyklicznymi tego samego rzędu, to są izomorficzne.
6. (a) Udowodnić, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.
   (b)– Udowodnić, że homomorficzny obraz grupy cyklicznje jest grupą cykliczną (nie trzeba dowodzić, że jest grupą).
   (c)– Udowodnić, że wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$ sa postaci $n\mathbb{Z},\ n \geq 0$. Dla $n \neq 0$ są one izomorficzne z $(\mathbb{Z}, +)$.
7. (a) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$.
   (b) Zidentyfikować strukturę algebraiczną gruppy $Aut(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ (tzn. wskazać, z którą z grup z wykładu grupa $Aut(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ jest izomorficzna).
8. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup, $g \in G$, $ord(g) = n$, $k \in \mathbb{N}^+$. Uwododnić, że:
   (a) $ord(g^k) = \frac{n}{NWD(n,k)}$
   (b) $ord(f(g))$ dzieli $ord(g)$.
9. * Załóżmy, że K jest podgrupą grupy G. Udowodnić, że $|G| = [G : K] \cdot |K|$ w ogólnym przypadku (tj. również dla grup nieskończonych).

10. (a) Udowodnić, że grupa $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest cykliczna.
Czy istnieje skończony zbiór $A \subseteq \mathbb{Q}$ generujący grupę $(\mathbb{Q}, +)$?
(b)* Wskazać właściwą nietrywialną podgrupę G grupy $(\mathbb{Q}, +)$, która nie jest cykliczna.
(c)* Czy istnieje właściwa podgrupa grupy $(\mathbb{Q}, +)$ izomorficzna z grupą $(\mathbb{Q}, +)$?