

# Kombinatoryka & teoria grafów

by a fish

21.03.2137



## SYLABUS – teoria grafów:

1. Basic concepts: graphs, paths and cycles, complete and bipartite graphs
2. Matchings: Hall's Marriage theorem and its variations
3. Forbidden subgraphs: complete bipartite and  $r$ -partite subgraphs, chromatic numbers, Turán's theorem, asymptotic behaviour of edge density, Erdős-Stone theorem
4. Hamiltonian cycles (Dirac's Theorem), Eulerian circuits
5. Connectivity: connected and  $k$ -connected graphs, Menger's theorem
6. Ramsey theory: edge colourings of graphs, Ramsey's theorem and its variations, asymptotic bounds on Ramsey numbers
7. Planar graphs and colourings: statements of Kuratowski's and Four Colour theorems, proof of Five Colour theorem, graphs on other surfaces and Euler characteristics, chromatic polynomial, edge colourings and Vizing's theorem
8. Random graphs: further asymptotic bounds on Ramsey numbers, Zarankiewicz numbers and their bounds, graphs of large first and high chromatic number, complete subgraphs in random graphs.
9. Algebraic methods: adjacency matrix and its eigenvalues, strongly regular graphs, Moore graphs and their existence.

# Contents

<b>1</b>	<b>Structural properties</b>	<b>5</b>
1.1	Basic definitions . . . . .	5
1.2	Hall's Marriage Theorem . . . . .	6
1.3	Menger's Theorem . . . . .	10

# 1 Structural properties

## 1.1 Basic definitions

**Graph** – an ordered pair  $G = (V, E)$ :  
 $\hookrightarrow$  **vertices**  $:= V$  [singular: *vertex*]  
 $\hookrightarrow$  **edges**  $:= E$ ,  $\{v, w\} := vw$

For an edge  $vw$ ,  $v \neq w$  we say that  $v, w$  are its **endpoints** and that it is **incident** to  $v$  (or  $w$ ).

Graphs  $G$  and  $H$  are **isomorphic** ( $G \simeq H$ ) if there exists  $f: V(G) \xrightarrow[1-1]{\text{on}} V(H)$  such that  
 $(\forall v, w \in V(G)) vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$   
*Meaning that edges are like an operation on a group of vertices*  
 $G$  is a **subgraph** of  $H$  [ $G \leq H$ ] if  $V(G) \subseteq V(H)$  and  $E(G) \subseteq E(H)$ .  
If  $G$  is **H-free** if it has no subgraphs isomorphic to  $H$ .

A **cycle** of length  $n \geq 3$  [ $C_n$ ] is a graph with vertices  
 $V(C_n) = [n]$   
and edges:  
 $E(C_n) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}$ .  
A **path** of length  $n-1$  [ $P_{n-1}$ ] is a graph with vertices  
 $V(P_{n-1}) = [n]$   
and edges  
 $E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}$ .

An **induced** by  $A \subseteq V(G)$  subgraph of  $G$  is  
 $G[A] = (A, E_A)$   
A **connected component** of  $G$  is a subgraph  
 $G[W] \leq G$  where  $W \subseteq V$  is an equivalence class under  $\approx$  given by  
 $v \approx w \iff$  exists a path  $v \dots w$  in  $G$   
A graph is **connected** if  $v \approx w$  for every  $v, w \in V$  ( $G$  has at most one connected component).

If  $v$  is a vertex in graph  $G$ , we say that its **neighbourhood** is  $N_G(v) = \{w \in G : vw \in E(G)\}$ . Furthermore, the **degree of**  $v$  is  $|N_G(v)|$ .  
If  $A \subseteq V$ , then  $N(A) := \bigcup_{v \in A} N(v)$ .

Dla krawedzi  $vw$ ,  $v \neq w$  mówimy, że  $v, w$  są jej **koncami** i że jest krawedzia **padająca** na  $v$  (lub  $w$ ).

Grafy  $G$  i  $G$  są **izomorficzne**, jeżeli istnieje  $f: V(G) \xrightarrow[1-1]{\text{na}} V(H)$  takie, że  
 $(\forall v, w \in V(G)) vw \in E(G) \iff f(v)f(w) \in E(H)$   
 $G$  jest **podgrafem**  $H$  [ $G \leq H$ ] jeżeli  $V(G) \subseteq V(H)$  oraz  $E(G) \subseteq E(H)$ .  
 $G$  jest **H-free** (wolny od  $H$ ?), jeżeli nie ma podgrafów izomorficznych z  $H$ .

**Cykl** długości  $n \geq 3$  [ $C_n$ ] to graf z wierzchołkami  
 $V(C_n) = [n]$   
i krawędziami:  
 $E(C_n) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{1n\}$ .  
**Ścieżka** długości  $n-1$  [ $P_{n-1}$ ] to graf z wierzchołkami  
 $V(P_{n-1}) = [n]$   
i krawędziami  
 $E(P_{n-1}) = \{i(i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}$ .

We define:

$$\hookrightarrow \text{minimal degree } \delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$$

$$\hookrightarrow \text{maximal degree } \Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$$

$$\hookrightarrow \text{average degree } d(G) = \frac{\sum d(v)}{|G|}.$$

If there exists an  $r \geq 0$  such that

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(G) = r$$

then we say that the graph is **r-regular** or, more generally, it is **regular** for some  $r$ .

**Handshaking Lemma:** for any graph  $G$  we have  $e(G) = \frac{1}{2} \sum d(v) = \frac{|G|}{2} d(G)$



## 1.2 Hall's Marriage Theorem

Graph  $G$  is **bipartite** with vertex classes  $U$  and  $W$  if  $V = U \cup W$  so that every edge has form  $uw$  for some  $u \in U$  and  $w \in W$ .

$G$  is bipartite iff it has no cycles of odd length.

Graf  $G$  jest **dwudzielny** z klasami wierzchołków  $U$  i  $W$ , jeśli  $V = U \cup W$  takimi, że każda krawędź jest formy  $uw$  dla pewnych  $u \in U$  oraz  $w \in W$ .

$G$  jest dwudzielny wtw kiedy nie ma cykli o nieparzystej długości.

[  ] [  ]

[  ]

$\Rightarrow$

Let  $U, W$  be the vertex classes and  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  be a cycle in  $G$ . WLOG suppose that  $v_1 \in U$ . Then  $v_2 \in W$  etc. Specifically we have  $v_i \in U$  if  $i$  is odd and  $v_i \in W$  if  $i$  is even. Then, we have  $v_n v_1$ , so  $n$  must be even.

$\Leftarrow$

Suppose  $G$  has no cycles of odd length. WLOG, assume that  $V(G) \neq \emptyset$  and that  $G$  is connected, because  $G$  will be bipartite if all its connected components are bipartite. Fix  $v \in G$  and for all other  $w \in G$  define distance  $\text{dist}(v, w)$  as the smallest  $n \geq 0$  such that there exists a path  $v \dots w$  in  $G$  of length  $n$ .

Now, let  $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$  and set

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

We want to show that there are no edges in  $G$  of the form  $v'v''$  where  $v', v'' \in U$  or  $v', v'' \in W$ . Suppose that  $v'v'' \in E(G)$  with  $v' \in V_m, v'' \in V_n$  and  $m \leq n$ . Then, we have a path

$$v \dots v'v'' \in G$$

of length  $m+1$ , implying that

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Suppose that  $n = m$ . Let  $v'_0 v'_1 \dots v'_m$  and  $v''_0 v''_1 \dots v''_m$  be paths in  $G$  with  $v = v'_0 = v''_0$ ,  $v' = v'_m$  and  $v'' = v''_m$ . Note that  $v'_i, v''_i \in V_i$  for  $0 \leq i \leq m$ . Let  $k \geq 0$  be largest such that

$$v'_k = v''_k$$

and note that  $k \leq m-1$  as  $v' \neq v''$ . Then

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

is a cycle of odd length, which is a contradiction.

Therefore, we can only have  $n = m+1$  and then exactly one of  $n, m$  is even meaning that exactly one of  $v'$  and  $v''$  is in  $U$  as required for  $G$  to be bipartite.

[  ]

⇒

Niech  $U, W$  będą klasami wierzchołków oraz niech  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  niech będzie cyklem w  $G$ . BSO założymy, że  $v_1 \in U$ . W takim razie,  $v_2 \in W$  etc. W szczególności, mamy  $v_i \in U$  jeżeli  $i$  jest nieparzyste oraz  $v_i \in W$  jeżeli  $i$  jest parzyste. W takim razie, skoro  $v_n v_1$ , to  $n$  musi być parzyste.

⇐

Założymy, że  $G$  nie ma cykli o nieparzystej długości. BSO założymy, że  $V(G) \neq \emptyset$  i że  $G$  jest spójny, ponieważ  $G$  będzie dwudzielny, wtw gdy wszystkie jego składowe spójne (????) będą dwudzielne. Ustalmy  $v \in G$  i dla każdego innego  $w \in G$  zdefiniujemy dystans  $\text{dist}(v, w)$  jako najmniejsze  $n \geq 0$  takie, że istnieje ścieżka  $v \dots w$  w  $G$  o długości  $n$ .

Niech  $V_n := \{w \in G : \text{dist}(v, w) = n\}$  i zbiory

$$U = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots$$

$$W = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots$$

Chcemy pokazać, że nie istnieją w  $G$  krawędzie postaci  $v'v''$ , gdzie  $v', v'' \in U$  lub  $v', v'' \in W$ .

Założymy, że  $v'v'' \in E(G)$  z  $v' \in V_m, v'' \in V_n$  oraz  $m \leq n$ . Wtedy istnieje ścieżka

$$v \dots v'v'' \in G$$

długości  $m+1$ , co implikuje, że

$$n \in \{m, m+1\}.$$

Założymy, że  $n = m$ . Niech  $v'_0 v'_1 \dots v'_m$  oraz  $v''_0 v''_1 \dots v''_m$  są ścieżkami w  $G$  takimi, że  $v = v'_0 v''_0$ ,  $v' = v'_m$  oraz  $v'' = v''_m$ . Zauważmy, że  $v'_i, v''_i \in V_i$  dla  $0 \leq i \leq m$ . Niech  $k \geq 0$  będzie największe takie, że

$$v'_k = v''_k$$

i zauważmy, że  $k \leq m-1$  ponieważ  $v' \neq v''$ . Wtedy

$$v'_k v'_{k+1} \dots v'_m v''_m v''_{m-1} \dots v''_k$$

jest cyklem o nieparzystej długości, co daje nam sprzeczność.

W takim razie, możemy mieć tylko  $n = m+1$  i wtedy dokładnie jedno z  $n, m$  może być parzyste, co daje nam dokładnie jedno z  $v'$  i  $v''$  w  $U$  tak, jak jest wymagane żeby to był graf dwudzielny.

If  $G$  is a bipartite graph with  $V = W \cup M$  and  $W' \subseteq W$ , a **partial matching** in  $G$  from  $W'$  to  $M$  is

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$

for some  $v_w \in M$  such that  $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$ . A partial matching from  $W$  to  $M$  is called a **matching**.

Sufficient condition:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (\text{☕})$$

for every  $A \subseteq W$

.....  
A bipartite graph  $G$  contains a matching from  $W$  to  $M$  iff  $(G, W)$  satisfies Hall's condition (☕).

Jesli  $G$  jest grafem dwudzielnym z  $V = W \cup M$  oraz  $W' \subseteq W$ , wtedy **czesciowe skojarzenie** w  $G$  z  $W'$  do  $M$  to

$$\{wv_w : w \in W'\} \subseteq E(G)$$



dla pewnych  $v_w \in M$  takich, że  $w \neq w' \implies v_w \neq v_{w'}$ . Czesciowe kojarzenie z  $W$  do  $M$  jest nazywane **kojarzeniem**.

Wystarczajacy warunek:

$$|N(A)| \geq |A| \quad (\text{☕})$$

dla kazdego  $A \subseteq W$

.....  
Dwudzielný graf  $G$  zawiera kojarzeniem iff gdy  $(G, W)$  zadowala warunek Halla (☕).

[  ] [  ]  
[  ]

⇒

Trivial.

←

Using induction on  $|W|$ . For  $|W| = 0, 1$  it is trivial.

We gonna break it into parts:  $|N(A)| > |A|$  and  $|N(A)| = |A|$

Suppose that  $|N(A)| > |A|$  for every non-empty subset  $A \subsetneq W$ . Take any  $w \in W$  and  $v \in N(w)$  and construct a new graph

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

For any non-empty  $B \subseteq W - \{w\}$  we have

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

and therefore

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|$$

and so  $(G_0, W - \{w\})$  satisfies Hall's condition. From induction we have a matching  $P$  in  $G_0$  from  $W - \{w\}$  to  $M - \{v\}$  and so  $P \cup \{wv\}$  is a matching from  $W$  to  $M$ .

Now, suppose that  $|N(A)| = |A|$  for some non-empty subset  $A \subsetneq W$ . Let

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

and

$$G_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$

We will show that both those graphs satisfy Hall's condition.

Let us take any  $B \subseteq A$  in  $G_1$ . We have

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

and so graph  $G_1$  satisfies Hall's condition.

Now, let us take any  $B \subseteq W - A$  in  $G_2$ . We know that  $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$  so

$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

Therefore, graph  $G_2$  also satisfies Hall's condition.

Using inductive hypothesis, we have that there exists a matching  $P_1$  in  $G_1$  and a matching  $P_2$  in  $G_2$ . The first one is from  $A$  to  $N_G(A)$  while the second is from  $W - A$  to  $M - N_G(A)$ , so they are disjoint. Therefore,  $P_1 \cup P_2$  is a matching in  $G$  from  $W$  to  $M$ .

[  ]

⇒

Trywialne.

←

Użyjemy indukcji na  $|W|$ . Dla  $|W| = 0, 1$  jest trywialne.

Podzielimy dowód na dwie części:  $|N(A)| > |A|$  oraz  $|N(A)| = |A|$ .

Załozmy, że  $|N(A)| > |A|$  dla każdego niepustego podzbioru  $A \subsetneq W$ . Weźmy dowolne  $w \in W$  oraz  $v \in N(w)$  i skonstruujmy nowy graf

$$G_0 = G - \{w, v\}.$$

Dla każdego niepustego  $B \subseteq W - \{w\}$  mamy

$$N_{G_0}(B) = N_G(B) - \{v\}$$

i w takim razie

$$|N_{G_0}(B)| \geq |N_G(B)| - 1 \geq |B|,$$

czyli  $(G_0, W - \{w\})$  spełnia warunek Halla. Z założenia indukcyjnego istnieje kojarzenie  $P$  w  $G_0$  z  $W - \{w\}$  do  $M - \{v\}$ , w takim razie  $P \cup \{wv\}$  jest kojarzeniem z  $W$  do  $M$ .

Załozmy teraz, że  $|N(A)| = |A|$  dla pewnego niepustego podzbioru  $A \subsetneq W$ . Niech

$$G_1 = G[A \cup N(A)]$$

oraz

$$G_2 = G[(W - A) \cup (M - N(A))].$$



Pokazemy, że oba te grafy zaspokajają warunek Halla.

Weźmy dowolny  $B \subseteq A$  w  $G_1$ . Mamy

$$N_G(B) \subseteq N_G(A) \subseteq V(G_1)$$

$$|N_{G_1}(B)| = |N_G(B)| \geq |B|$$

a więc graf  $G_1$  zaspokaja warunek Halla.

Teraz, weźmy dowolny  $B \subseteq W - A$  w  $G_2$ . Wiemy, że  $N_{G_2}(B) \subseteq M - N(A)$ , a więc



$$N_{G_2}(B) = N_G(B) - N_G(A) = N_G(A \cup B) - N_G(A)$$

$$|N_{G_2}(B)| = |N_G(A \cup B) - N_G(A)| \geq |N_G(A \cup B)| - |N_G(A)| \geq |A \cup B| - |A| = |A| + |B| - |A| = |B|$$

W takim razie  $G_2$  spełnia warunek Halla.

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje kojarzenie  $P_1$  w  $G_1$  oraz  $P_2$  w  $G_2$ . Pierwsze jest z  $A$  do  $N_G(A)$ , natomiast drugie jest z  $W - A$  do  $M - N_G(A)$ , czyli są rozłączne. W takim razie  $P_1 \cup P_2$  jest kojarzeniem w  $G$  z  $W$  do  $M$ .

Let $G$ be a finite group and let $H \leq G$ be a subgroup with $\frac{ G }{ H } = k$ , then $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \dots \cup H g_k$ for some $g_1, \dots, g_k \in G$ .	Niech $G$ będzie skończoną grupą i niech $H \leq G$ będzie podgrupą z $\frac{ G }{ H } = k$ , wtedy $g_1 H \cup \dots \cup g_k H = G = H g_1 \cup \dots \cup H g_k$ dla pewnych $g_1, \dots, g_k \in G$ .
---	---

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

Oznaczmy

$$L = \{a_1 H, \dots, a_k H\}$$

$$R = \{H b_1, \dots, H b_k\}$$

jako zbiory odpowiednio lewych i prawych wrastw  $H$  w  $G$ . Niech  $K$  będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków  $L$  i  $R$ . Wprowadźmy na  $K$  relacje równoważności

$$a_i H \sim H b_j \iff a_i H \cap H b_j \neq \emptyset \text{ w } G.$$

Dla dowolnego podzbioru  $A \subseteq L$  zachodzi

$$|\bigcup_{U \in A} U| = |A| \cdot |H|$$



jako podzbiorów  $G$ . Chodzi o to, że każda warstwa ma moc  $|H|$ , a mamy ich  $|A|$  sztuk w zbiorze  $A$ . Więc jak będziemy je dodawać, to one są rozłączne, więc smiga.

Dla każdego  $V \in R$  mamy  $|V| = |H|$  bo każda warstwa ma tę samą moc co  $H$ , a więc  $\bigcup_{U \in A} U$  nie jest niepusty z co najmniej  $|A|$  elementami z  $R$ . Z tego wynika, że

$$|N_K(A)| \geq |A|,$$

więc istnieje kojarzenie  $P$  w  $K$  z  $L$  do  $R$ . Weźmy więc dowolny  $g_i$  w  $a_i H \cap H b_j \neq \emptyset$ . Wtedy jest część krawędzi  $(a_i H)(H b_j)$  w  $P$  dla  $1 \leq i \leq k$ . Mamy więc  $a_i H = g_i H$  oraz  $H b_j = H g_i$ .

<b>Hall's Missing Soulmate Theorem</b> Let $G$ be a bipartite graph with vertex classes $W$ and $M$ , and let $d \geq 1$ . Then $G$ contains a partial matching from $W'$ to $M$ for some $W' \subseteq W$ with $ W'  \geq  W  - d$ iff $ N(A)  \geq  A  - d$ for every $A \subseteq W$ .	<b>Twierdzenie Halla o brakującym mezu(????)</b> Niech $G$ będzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołków $W$ i $M$ i niech $d \geq 1$ . Wtedy $G$ zawiera kojarzenie z $W'$ do $M$ dla pewnego $W' \subseteq W$ z $ W'  \geq  W  - d$ iff $ N(A)  \geq  A  - d$ dla każdego $A \subseteq W$ .
---	--

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[ 🇵🇱 ]

⇒

Trywialne :3

⇐

Zapoznajmy panie z  $d$  wyobrazonymi idealnymi dla kazdej pani kawalerami. Wtedy twierdzenie Halla jest spelnione, wiec mozemy ozenic kazda kobiete do odpowiedniego, prawdziwego czy wyobrazonego, meza. W prawdziwym zyciu, co najwyzej  $d$  kobiet jest niezameznych.

.....

#### Hall's Polygamous Marriage Theorem

Let  $G$  be a bipartite graph with vertex classes  $W$  and  $M$ , and let  $d \geq 1$ .

Then  $G$  contains a subgraph  $H$  with  $W \subseteq V(H)$  in which each  $w \in W$  has degree  $d$  and each  $v \in M \cap V(H)$  has degree 1 iff  $|N(A)| \geq d|A|$  for every  $A \subseteq W$

[ 🇬🇧 ] [ 🇵🇱 ]

[ 🇬🇧 ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[ 🇵🇱 ]

⇒

Trywialne :3

⇐

Sklonujmy kazda kobiete  $d - 1$  razy. Wtedy warunek Halla jest zaspokojony, wiec mozemy kazda z nich ozenic (klony i oryginaly) do odpowiednich mezow. Teraz scisnijmy klony z oryginalami do jednej osoby. Koniec!

#### Twierdzenie Halla o polimalzenstwach

Niech  $G$  bedzie grafem dwudzielnym z klasami wierzchołkow  $W$  i  $M$  i niech  $d \geq 1$ .

Wtedy  $G$  zaiwera podgraf  $H$  z  $W \subseteq V(H)$  w którym kazdy  $w \in W$  ma stopien  $d$  i kazdy  $v \in M \cap V(H)$  ma stopien 1 iff  $|N(A)| \geq d|A|$  dla kazdego  $A \subseteq W$ .

### 1.3 Menger's Theorem

**Cut vertex**  $v$  is a vertex in a connected graph  $G$  such that  $G - \{v\}$  is not connected.

Graph  $G$  is a  **$k$ -connected graph** if for any  $A \subseteq V(G)$ ,  $|A| < k$ ,  $G - A$  is connected.

**Complete graph** has all vertices connected by an edge, that is for all  $v, w \in G$   $v \neq w$  we have  $vw \in E$ .

**Thacy wierzcholek**  $v$  jest wierzchołkiem w spojnym grafie  $G$  takim, ze  $G - \{v\}$  jest niespojny.

Graf  $G$  jest  **$k$ -spojnym grafem**, jezeli dla kazdego  $A \subseteq V(G)$ ,  $|A| < k$ ,  $G - A$  jest spojny.

**Graf pelny** ma wszystkie wierzcholki polaczone krawedzia, to znaczy dla kazdego  $v, w \in G$ ,  $v \neq w$  mamy  $vw \in E$ .

**$(A, B)$ -path** is a path in  $G$  for some  $A, B \subseteq V$  of the form  $a \dots b$  for some  $a \in A$  and  $b \in B$ .

**$(A, B)$ -cut** in  $G$  is  $C \subseteq V$  such that  $G - C$  contains no  $(A - C, B - C)$ -paths.

If we take vertices  $a, v \in V$  we call an  $(\{a\}, \{b\})$ -path an  $(a, b)$ -path. Given a collection of  $(a, b)$ -paths

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$$

we say such a collection is **independent** if  $p^{(i)} - \{a, b\}$  and  $p^{(j)} - \{a, b\}$  have no common vertices for  $i \neq j$ .

**$(A, B)$ -sciezka** to sciezka w  $G$  dla pewnych  $A, B \subseteq V$  postaci  $a \dots b$  dla jakis  $a \in A$  i  $b \in B$ .

**$(A, B)$ -ciecie** w  $G$  to  $C \subseteq V$  takie, ze  $G - C$  nie zawiera zadnych  $(A - C, B - C)$ -sciezek.

Jesli wezwiemy wierzcholki  $a, v \in V$ , to  $(\{a\}, \{b\})$ -sciezke nazywamy  $(a, b)$ -sciezka. Jesli dana jest kolekcja  $(a, b)$ -sciezek

$$p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$$

mowimy, ze ta kolekcja jest **niezalezna**, jezeli  $p^{(i)} - \{a, b\}$  i  $p^{(j)} - \{a, b\}$  nie maja wspolnych wierzchołkow dla  $i \neq j$ .

Given  $A, B, C \subseteq V(G)$  and if  $A \subseteq C$  or  $B \subseteq C$ , then  $C$  is an  $(A, B)$ -cut and if  $C$  is an  $(A, B)$ -cut then  $A \cap B \subseteq C$ .



Let  $G$  be a graph,  $A, B \subseteq V(G)$  and  $k \geq 0$ . Suppose that for every  $(A, B)$ -cut  $C$  in  $G$  we have  $|C| \geq k$ .

Then  $G$  contains a collection of  $k$  vertex-disjoint  $(A, B)$ -paths.

Dla danych  $A, B, C \subseteq V(G)$ , jeżeli  $A \subseteq C$  albo  $B \subseteq C$ , to  $C$  jest  $(A, B)$ -cieciem i jeśli  $C$  jest  $(A, B)$ -cieciem, to  $A \cap B \subseteq C$ .

Niech  $G$  będzie grafem,  $A, B \subseteq V(G)$  i  $k \geq 0$ . Załóżmy, że dla każdego  $(A, B)$ -ciecia  $C$  w  $G$  jest  $|C| \geq k$ .

Wtedy  $G$  zawiera zbiór  $k$  rozłącznych wierzchołkami  $(A, B)$ -ściezek.

[  ] [  ]

[  ]

I WILL GET TO IT SOMEDAY

[  ]

Użyjemy indukcji na  $e(G)$  [definicja dla debila].

Jako przypadek bazowy mamy  $e(G) = 0$ , wtedy  $A \cap B$  jest  $(A, B)$ -cieciem i w takim razie  $k \leq |A \cap B|$ , ale każdy wierzchołek  $A \cap B$  jest  $(A, B)$ -ściezka długości 0 i wszystkie z nich są rozłączne, tak jak wymagamy.

Założmy, że  $e(G) \geq 1$ , wybierzmy krawędź  $e \in E(G)$  i niech  $H = G - \{e\}$ .

Jeśli dla każdej  $(A, B)$ -ciecie w  $H$  ma stopień co najmniej  $k$ , to przez hipotezę indukcyjną są one  $k$  wierzchołkowo rozłącznymi  $(A, B)$ -ściezkami w  $H$  i w takim razie w  $G$ , więc koniec.

Założmy teraz, że w  $H$  istnieje co najmniej jedno  $(A, B)$ -ciecie  $C$  takie, że  $|C| < k$ . W takim razie  $C$  nie jest  $(A, B)$ -cieciem w  $G$ , więc  $G - C$  zawiera co najmniej jedną  $(A, B)$ -ściezkę postaci

$a \dots vw \dots b$

dla pewnych  $a \in A$ ,  $b \in B$ , gdzie  $v, w \in G$  są końcami  $e$ . Co więcej, każda  $(A, B)$ -ściezka w  $G - C$  zawiera wierzchołek  $v$ , co implikuje że

$$C' = C \cup \{v\}$$

jest  $(A, B)$ -cieciem w  $G$ . Co więcej,  $|C'| = |C| + 1 \geq k$ .