ZAD. 4.

$$x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$$
$$2xdx + 2ydy + 4dy = xdy + ydx + 2dx$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y + 2$$
$$\frac{dy}{dx}(2y + 4 - x) = y + 2 - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2 - 2x}{2y + 4 - x}$$

Pochodna zeruje sie tylko wtedy, gdy licznik jest rowny zero, wiec

$$y + 2 - 2x = 0$$

$$y = 2x - 2$$

potencjalne extrema znajduja sie na prostej. Wstawiajac y do oryginalnego wzoru dostaniemy

$$x^2 + (2x - 2)^2 + 4(2x - 2) = x(2x - 2) + 2x$$
$$x^2 + 4x^2 - 8x + 4 + 8x - 8 = 2x^2 - 2x + 2x$$
$$3x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$

czyli sa dwa rozwiazania dla y:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2 \end{cases}$$

Dalej chcemy sprawdzic, czy one nie sa przypadkiem punktem przegiecia, wiec lecimy szukac drugiej pochodnej :v
Zauwazylam, ze sa w sumie to 3 metody:

Wyliczamy sobie te oryginalna $\frac{dy}{dx}$ i rozniczkujemy obie strony normalnie, z tym, ze tam gdzie rozniczkujemy po y to przeciez tak jakby mamy funkcje zalezna od x, wiec pochodna x to pochodna tej funkcji, czyli $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y + 2 - 2x}{2y + 4 - x}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx} - 2)(2y + 4 - x) - (y + 2 - 2x)(2\frac{dy}{dx} - 1)}{(2y + 4 - x)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}x - 3y - 6}{(2y + 4 - x)^2}$$

Drugi sposob, to bez wyliczania sobie od razu, po prostu stosujemy product rule do tego co zostalo wczesniej wyliczone. Tutaj trzeba uwazac, bo jak na razie rozniczkujemy wszystko po wszystkim, z tym, ze dx nam sie do tego nie wlicza, a pochodna dy to d^2y, czyli podwojnie zrozniczkowany y c:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y + 2$$
$$2dx + 2\frac{d^2y}{dx} + 2y\frac{d^2y}{dx} + 4\frac{d^2y}{dx} = dy + x\frac{d^2y}{dx} + dy$$
$$2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}$$

Ostatnia jest podobna do tego co wyzej, tylko nie dzielilismy przez dx tak jak postac z poprzedniego kroku:

$$2xdx + 2ydy + 4dy = xdy + ydx + 2dx$$
$$2dx^2 + 2d^2y + 2yd^2y + 4d^2y = dydx + xd^2y + dydx$$
$$2 + \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}$$

Wracajac do sprawdzania czy nie znalezlismy przypadkiem tylko punktu przegiecia, podstawiamy sobie wartosci jaki obliczylismy. Na szescie szukalismy ich tak, zeby pochodna pierwszego stopnia byla zerowa, wiec tam gdzie sie pojawia $\frac{dy}{dx}$ nam sie wyzeruje. Podstawie do tego, co znalazlam jako pierwsze

$$\frac{d^2y}{dx^2}(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}} - 2) = \frac{-3(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) - 6}{(2(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) + 4 - \frac{2}{\sqrt{3}})^2}$$

Mnie tylko interesuje, czy to sie zeruje czy nie, wiec wylicze tylko mianownik:

$$-3(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) - 6 = -3\frac{4}{\sqrt{3}} + 6 - 6 \neq 0$$

wiec to jest maksimum.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) = \frac{-3(-\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) - 6}{(2(-\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) + 4 - + \frac{2}{\sqrt{3}})^2}$$

Znowu czy mianownik sie zeruje:

$$-3(-\frac{4}{\sqrt{3}} - 2) - 6 = 3\frac{4}{\sqrt{3}} + 6 - 6 \neq 0$$

i mamy minimum.

ZAD 5.

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$$

$$z(x, y)$$

Lecimy. Najpierw pierwsza pochodna dla x:

$$2xdx + 6zdz + ydx - dx = 0$$

$$2x + 6z\frac{dz}{dx} + y - 1 = 0$$

$$\frac{dz}{dx}(1, -2) = \frac{1}{6}(1 + 2 - 2) = \frac{1}{6}$$

Druga pochodna dla x:

$$2xdx + 6zdz + ydx - dx = 0$$

$$2dx^2 + 6d^z + 6zd^2z = 0$$

$$1 + \frac{d^2z}{dx^2}(6 + 6z) = 0$$

$$\frac{d^2z}{dx}(1, -2) = \frac{1}{12}$$

No i w sumie analogicznie dla y, wiec mi sie nie chce tego liczyc.