ANALIZA III - LISTA 8

Listę robimy na ćwiczeniach 4.11 i 10.11 (zajęcia piątkowe). Przez wzór Taylora n-tego rzędu rozumiemy taki, w którym wielomian jest n-tego rzędu, a reszta R_n ma własność $\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{\|x\|^n}=0$. Zadanie 1 zostało zrobione na wykładzie. Zadania 4-6 trzeba zrobić opierając się na zad 1 i dobrze uzasadnić. Zadania 2,3 robimy jakąkolwiek metodą. Materiał do zadania 9 i zadań 13-17 będzie zrobiony na wykładzie 4.11, ale oznaczenia do zad 9 można samemu doczytać.

1. Niech $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną $n+1$ krotnie. Załóżmy, że

$$f(x)=W(x)+R_n(x)=\widetilde{W}(x)+\widetilde{R}_n(x),$$

gdzie $W,\widetilde{W}$ są wielomianami d zmiennych stopnia n, a $R_n,\widetilde{R}_n$ mają własność

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{\|x\|^n}=0=\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{R}_n(x)}{\|x\|^n}.$$

Pokaż, że wtedy $W=\widetilde{W}$.

2. Napisać wzór Taylora trzeciego rzędu dla funkcji $f(x,y)=e^x\sin y$ w punkcie $(0,0)$.

3. Napisać wzór Taylora trzeciego rzędu $f(x,y)=e^x\log(1+y)$ w punkcie $(0,0)$.

4*. Napisać wzór Taylora trzeciego rzędu $f(x,y)=\cos(y\sqrt{1+x})$ w punkcie $(0,0)$.

5*. Napisać wzór Taylora czwartego rzędu $f(x,y,z)=y^2\cos(x+z)$ w punkcie $(0,0)$.

6*. Napisać wzór Taylora drugiego rzędu $f(x,y)=e^{\sin x}\log(1+x+y)$ w punkcie $(0,0)$. (nie naliczyć się za bardzo, patrz zad. 1).

7. Przedstawić funkcję $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ w postaci szeregu potęgowego dwóch zmiennych (nie naliczyć się za bardzo) i pokazać, że mamy bezwzględną zbieżność na zbiorze $\{(x,y):|x|,|y|<1\}$. *Wsk. użyć odpowiednich szeregów potęgowych jednej zmiennej.*

8. Przedstawić funkcję $f(x,y)=\log(1-x)\log(1-y)$ w postaci szeregu potęgowego dwóch zmiennych (nie naliczyć się za bardzo) i pokazać, że mamy bezwzględną zbieżność na zbiorze $\{(x,y):|x|,|y|<1\}$. *Wsk. użyć odpowiednich szeregów potęgowych jednej zmiennej.*

9*. Niech $g(t)=f(tx_1,...,tx_d)$, gdzie f jest klasy C^{r+1} na kuli $B_r(0)\subset\mathbb{R}^d$. Pokaż, że

$$g^{(k)}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}(D^\alpha f)(tx)x^\alpha.$$

10*. Przypadek szeregu jednej zmiennej. Niech

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

i szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $|x| < r$ dla pewnego $r > 0$. Pokazać, że

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(0).$$

Przypomnieć sobie twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego. Częścią rozwiązania jest staranne zapisanie na tablicy tego twierdzenia.

**11. Załóżmy, że dla funkcji f dwóch zmiennych mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0, & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) &= 0, & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &> 0, & \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0) &> 0. \end{aligned}$$

Rozwijając we wzór Taylora 4 rzędu pokaż, że f ma lokalne minimum w $(0,0)$ tzn. że wszędzie na małym otoczeniu $(0,0)$ wartość funkcji jest większa niż w $(0,0)$.

12 (3 punkty). Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ma wszystkie pochodne ciągłe i na każdym odcinku $[s, -s]$ są one wspólnie ograniczone czyli istnieje $C = C(s)$ takie, że $\sup_n |f^{(n)}(x)| \leq C$ dla $x \in [-s, s]$. Dla każdego n możemy rozwinąć f we wzór Taylora

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m + R_n(x),$$

gdzie resztę piszemy tak jak na wykładzie. Pokaż, że

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

i powyższy szereg jest zbieżny jednostajnie na $[s, -s]$.

13*. Niech $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ma wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe i na każdej kuli $\overline{B_s(0)}$, $s < 1$, są one wspólnie ograniczone czyli istnieje $C = C(s)$ takie, że

$$\sup_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha f(x)| \leq C$$

dla $x \in \overline{B_s(0)}$. Dla każdego n możemy rozwinąć f we wzór Taylora

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_n(x),$$

gdzie resztę piszemy tak jak na wykładzie. Pokaż, że

$$f(x) = \sum_{|\alpha|} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_n(x)$$

i powyższy szereg jest zbieżny jednostajnie na $\overline{B_s(0)}$. Zapisać co to znaczy jednostajnie zbieżny w tym wypadku.

14*(6 punktów). Rozważmy szereg

$$\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

i załóżmy, że $|c_\alpha| \leq M$ dla każdego α. Pokaż, że dla $r < 1$ szereg $\sum_\alpha |c_\alpha| r^{|\alpha|}$ jest zbieżny, a tym samym szereg $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ jest jednostajnie zbieżny dla $\|x\| \leq r$. Należy starannie sformułować, co to znaczy jednostajnie zbieżny. *Wsk. Jak można oszacować z góry ilość wielowskaźników o ustalonej długości?*

**15. Ustalmy $r > 0$. Niech

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

dla $\|x\| \leq r$ i szereg $\sum_\alpha |c_\alpha| r^{|\alpha|}$ jest zbieżny, $r > 0$. Pokazać, że szereg jest jednostajnie zbieżny dla $\|x\| \leq r$ i można go różniczkować wyraz po wyrazie dla $\|x\| < r$ tzn.

$$D^\beta f(x) = \sum_\alpha c_\alpha D^\beta (x^\alpha).$$

Zapisać starannie, co to znaczy jednostajnie zbieżny w tym przypadku.

Wsk. Można sobie na początek założyć, że mamy dwie zmienne. Można użyć twierdzenia o różniczkowalności jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji wielu zmiennych (przerobić je na szeregi). Zrobić najpierw jedno różniczkowanie i zobaczyć, co się dzieje.

16*. Niech

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

dla $|x| < r$ i szereg $\sum_\alpha |c_\alpha| r^{|\alpha|}$ jest zbieżny dla pewnego $r > 0$. Pokazać, że

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0).$$

Wsk. Skorzystać z poprzedniego zadania.

**17. Załóżmy, że f jest określona na kuli o środku w zerze i promieniu 1 oraz

$$|D^\alpha f(x)| \le CM^{|\alpha|}\alpha!.$$

(Na początek można założyć, że $|D^\alpha f(x)| \le C\alpha!$ lub $|D^\alpha f(x)| \le CM^{|\alpha|}$. Będzie nieco łatwiej.) Wtedy szereg

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha$$

jest jednostajnie zbieżny do $f(x)$ w kuli $B_r(0)$ dla każdego $r < M^{-1}$. Napisać starannie, co to znaczy jednostajnie zbieżny. Zrobić dla dwóch zmiennych jeśli dowolna ilość zmiennych jest za trudna.