MDM Lista 11

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Dane jest drzewo T *oraz jego automorfizm* ϕ*. Udowodnij, że istnieje wierzchołek* v *taki, że* $\phi(v) = v$ *lub istnieje krawędź* $\{u, v\}$ *taka, że* $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$

Niech n będzie liczbą wierzchołków w drzewie T. Dla $n = 1$ mamy drzewo o jednym wierzchołku i tylko jeden automorfizm na nim - identyczność, która zachowuje nie tylko wierzchołki, ale i (nieistniejące) krawędzie. Dla $n = 2$ mamy tylko jedną krawędź i dwa punkty, więc ta jedyna krawędź zawsze musi przejść na samą siebie.

Załóżmy teraz, że dla wszystkich drzew o co najwyżej n wierzchołkach teza jest prawdziwa. Niech $|T| = n + 1$. Zauważmy, że jeśli ϕ jest automorfizmem na T, a $v \in T$ jest jego dowolnym liściem, to $\phi(v)$ musi nadal być liściem - inaczej v stopnia 1 przeszłoby na wierzchołek będący węzłem, a więc mający co najmniej stopień 2 i takie ϕ nie mogłoby być automorfizmem na T.
Wiemy też, że w drzewie jest na pewno jeden wierzchołek stopnia 1, niech więc

$$L = \{v \in T \ : \ d(v) = 1\}$$

będzie wierzchołkiem wszystkich liści, który na pewno jest niepusty. Niech $T' = T \setminus L$. Wtedy jeśli ϕ' jest automorfizmem na T', to na mocy założenia indukcyjnego ϕ' spełnia tezę. Z uwagi wyżej wiemy, że liście muszą przejść na siebie, więc jeśli będziemy rozszerzać ϕ' do całego T, to $\phi[L] = L$, czyli nie wpływa na poprawność tezy dla rozszerzenia ϕ' do całego T.

ZAD. 2.

Graf prosty G *jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf* n *wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy* $n \equiv 0$ *lub* $n \equiv 1 \mod 4$

Graf pełny o n wierzchołkach ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi. My chcemy je rozdzielić po równo między dopełnienie i graf sam w sobie, czyli musimy być w stanie liczbę krawędzi K_n podzielić dodatkowo na 2, a więc $n(n-1)$ musi być podzielne przez 4. Jest to wtedy, gdy

$$n \equiv 0 \mod 4$$

lub

$$(n-1) \equiv 0 \mod 4$$

$$n \equiv 1 \mod 4.$$

ZAD. 7.

Liczby 1, 2, 3, 4, 5 mogą być rozmieszczone na kole w porządku 1234531425, który zapewnia, że każde dwie z nich są sąsiednie dokładnie raz. Scharakteryzuj dla jakich n *można znaleźć podobne rozmieszczenie dla liczb 1, 2, 3, ..., n i uzasadnij swoją odpowiedź.*

Kolejne liczby możemy utożsamić z wierzchołkami grafu K_n. Pytanie jest o to, czy możemy po każdej ścieżce przejść dokładnie jeden raz, czyli czy dla danego n w K_n istnieje zamknięta ścieżka Eulera. Wiemy (z wykładu, tylko nie powiem czy z MDM czy z Teorii Grafów), że spójny graf jest eulerowski $\iff$ każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. Zauważamy, że w K_n każdy wierzchołek ma stopień $(n-1)$, czyli znajdziemy zamkniętą ścieżkę Eulera tylko dla nieparzystych n (wtedy $(n-1)$ jest parzyste).

ZAD. 10.

Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5×5 ruchem konika szachowego (na każdym polu stajemy dokładnie raz)? A co jeśli wymagamy, żeby po obejściu szachownicy konik wrócił na to samo pole?

Zacznijmy od drugiego pytania zakładając, że jakieś obejście istnieje. Na szachownicy 5×5 mamy 25 pól, prawie równo podzielone między białe i czarne. Ale nie mamy parzystej liczby pól, czyli któregoś koloru będzie o jeden więcej. Niech czarnych pól będzie więcej. Konik skacząc za każdym razem zmienia kolor pola, czyli jak zacznie obchód w czarnym, to również zakończy je w czarnym polu i nie będzie miał jak skoczyć na to początkowe czarne bez zahaczania o odwiedzone białe pole. Jeśli zacznie od białego, to skończy na czarnym i zostanie mu jeszcze jedno czarne do obskoczenia, czyli nawet nie odwiedzi wszystkich pól.

Poniżej prezentuje przykładowe skakanie konika:

5	22	17	12	7
16	11	6	25	18
21	4	23	8	13
10	15	2	19	24
3	20	9	14	1

ZAD. 12.

Dany jest graf prosty G, w którym $n = |G| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków $u, v, w \in G$ istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi uv, vw, wu. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

Weźmy dowolne $u, v \in G$ takie, że $uv \notin G$. Wtedy dla dowolnego innego $w \in G$ musimy mieć $uw, vw \in G$. W takim razie dla dwóch dowolnych niepołączonych u, v mamy

$$\deg(u) + \deg(v) = (n - 2) + (n - 2) = 2n - 4$$

co dla $n > 3$ daje

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

czyli z twierdzenia Orego wiemy, że w G istnieje cykl Hamiltona.

ZAD. 15.

Pokaż, że jeśli G jest grafem prostym i dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków u, v

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n(G) - 1,$$

to w G istnieje droga Hamiltona.

Niech G' będzie grafem G z dodanym wierzchołkiem w tak, że $(\forall\ v \in G)\ vw \in G'$. Teraz dla dowolnych niesąsiednich wierzchołków mamy

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Z twierdzenia Ore'a wiemy, że wtedy w G' istnieje cykl Hamiltona. Niech teraz C będzie tym cyklem i niech dla pewnych $v, u \in G$ $vw, uw \in C$. Wtedy jeśli usuniemy z C te dwie krawędzie oraz wierzchołek w, to wrócimy do ścieżki zawartej w G, która przechodzi wszystkie wierzchołki.