ZAD. 1.

Uzasadnić poniższe stwierdzenia, albo bezpośrednim argumentem, albo opierając się na poznanych faktach:

Funkcja niemalejąca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest borelowska.*

Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $y = f(a)$, wtedy zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq f(a)\} = f^{-1}[(-\infty, y]$$

przy czym $(-\infty, y] \in Bor(\mathbb{R})$, a wiemy, że to pociąga mierzalność funkcji.

Jeżeli zbiory $A_n, A \subseteq \mathbb{R}$ *są borelowskie i* $\lambda(A_n \Delta A) < \frac{1}{n}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*, to istnieje ciąg* $n_1 < n_2 < \ldots$ *taki, że funkcje charakterystyczne* $\chi_{A_{n_k}}$ *zbiegają do* χ_A *prawie wszędzie.*

Zbieganie $\chi_{A_{n_k}}$ prawie wszędzie do χ_A oznacza, że zbiór gdzie się nie zgadzają jest miary zero. Nie zgadzają się na zbiorze $A \Delta A_{n_k}$, którego miara zbiega do zera. Koniec?

Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest zbiorem mierzalnym i* $\lambda(A) = 1$*, to istnieje* $r > 0$ *takie, że* $\lambda(A \cap (-r, r)) = \frac{3}{4}$.

Może najpierw zróbmy funkcje $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda(A \cap (-x, x))$, gdzie dla $x = 0$ przypisujemy 0. Oczywiście taka funkcja jest zawsze nieujemna. Łatwo zobaczyć, że jest to funkcja ciągła oraz, że jej wartość nie może przekraczać 1, bo $A \cap (-x, x) \subseteq A \implies \lambda(A \cap (-x, x)) \leq \lambda(A) = 1$. Dodatkowo, funkcja ta jest niemalejąca, bo dla $x < y$ mamy $A \cap (-x, x) \subseteq A \cap (-y, y)$. Czyli w pewnym miejscu musi przyjąć wartość $\frac{3}{4}$.

ZAD. 2.

Niech $f_n, f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami mierzalnymi, takimi, że* $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{(x)}}$ *dla* $x \in (0, 1)$*. Udowodnić, że jeżeli* $f_n \xrightarrow{\lambda} f$*, to* $\lim_n \int_{[0,1]} |f_n - f| d\lambda$.

Wprowadźmy sobie nowy ciąg funkcji, g_n taki, że dla każdego n

$$g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$$

funkcja g_n jest mierzalna, gdyż skrypt, oraz nieujemna, ponieważ $|f_n - f| = |f_n + (-f)| \leq |f_n| + | - f| = |f_n| + |f|$ z nierówności trójkąta. To teraz jak wygląda całka z g_n?

$$\int_{[0,1]} g_n d\lambda = \int_{(0,1)} g_n d\lambda = \int_{(0,1)} |f_n| + |f| - |f_n - f| d\lambda$$