

ANALIZA III - LISTA 4

1. Pokazać, że z równania $x^3z^2 - z^3yx = 0$ można obliczyć z jako funkcję od x, y w otoczeniu $(1, 1, 1)$, ale nie w pobliżu $(0, 0, 0)$. Obliczyć $(\partial z / \partial x)$ i $(\partial z / \partial y)$ w punkcie $(1, 1)$.

2. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej obliczyć dy/dx dla $e^{x+y^2} + y^3 = 0$. Sprawdzić, gdzie się da rozwikłać. Zapisać pochodną w możliwie prostej postaci.

W zadaniach 3,3 robimy co najwyżej jeden przykład na ćwiczeniach (za 2 punkty), a reszta do samodzielnego przećwiczenia.

3. Oblicz pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ (czyli wyraż przez x, y, z), gdy

$$(a) z^2 = xy \quad (b) x^2 + y^2 + z^2 = 2z \quad (c) \cos(x + y + z) + x + y + z = 0.$$

Zastanów się, gdzie to można rozwikłać.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $y = y(x)$ zadanej równaniem

$$(a) x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x \quad (b) x^3 + y^3 = 12xy \quad (c) x^4 + y^6 + 12x^2y^4 = 0$$

5. Znaleźć pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji $z(x, y)$ w punkcie $x = 1, y = -2, z = 1$ zadanej niejawnie równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

6. Czy istnieje płaszczyzna styczna do powierzchni $x^2 - y^2 + 2x + 2y + z^2 = 1$ równoległa do płaszczyzny $z = x + y$?

7. Rozważmy równanie

$$e^{xz^2} + zy^3 + xyz - 2 = 0.$$

Pokaż, że z tego równania da się wyliczyć z jako funkcję x, y w otoczeniu punktu $(0, 1, 1)$ i napisz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z(x, y)$ w tym punkcie.

8. Sprawdzić czy funkcja $z(x, y)$ zadana niejawnie równaniem $x^2 + 2y^2 + z^2 - z - 6 + xy = 0$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$.

9. Pokazać, że powierzchnia jest ograniczona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

10*. Pokazać, że powierzchnia jest ograniczona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + y^2 - z^2) = 0$

11*(5 punktów). Pokazać, że powierzchnia jest ograniczona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 72$. Jak poradzić sobie z punktami, gdzie z nie można rozwikłać?