ANALIZA III - LISTA 3

1. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x,y,z) = x + y + z,\quad$ przy warunkach $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$

2. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach
(a) $f(x,y,z,w) = xw + yz,\quad$ przy warunkach $x^2 + y^2 = 1$, $w^2 + z^2 = 1$
(b) $f(x,y,z) = y^3 + xz^2,\quad$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 0$

3. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x,y,z) = xyz,\quad$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

4. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x,y,z) = xyz,\quad$ przy warunkach $xy + yz + xz = 8$, $x + y + z = 5$

5. Znajdź minimum funkcji $f(x,y,z) = xyz$ przy warunkach $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x-2y = 0$.

6*. Namiot bez podłogi, ma kształt cylindra ze stożkowym daszkiem. Jakie muszą być wymiary namiotu o ustalonej objętości V, aby użyć jak najmniej materiału na jego budowę. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje najmniejszą powierzchnię. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów.

*7. Udowodnij nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q},$$

gdzie $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_i, x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź minimum prawej strony nierówności przy warunku* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$. *Można zacząć od* $n = 2$.

8*. Udowodnij nierówność między średnią geometryczną, a arytmetyczną:

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

gdzie $x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź maksimum funkcji* $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ *przy warunku* $\sum_{i=1}^{n} x_i = A$. *Można zacząć od* $n = 2$.

9*. Znajdź wartości ekstremalne funkcji $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$, przy warunku $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, gdzie macierz $[a_{i,j}]$ nie musi być symetryczna. *Wskazówka: Zapoznaj się z przykładem 1.27 ze skryptu.*

**10. Jakie minimalne pole może mieć sześciokąt opisany na okręgu o promieniu 1 w $\mathbb{R}^2$? Odpowiedź uzasadnij. *Uwaga na boki dążące do zera i nieskończoności.*

*11. Dla macierzy

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

definiujemy $\|X\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ i określamy metrykę $d(X, Y) = \|X - Y\|$. Niech Σ będzie zbiorem macierzy 2×2 o wyznaczniku 0. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdź taką macierz $B \in \Sigma$, że wartość $d(A, B)$ jest najmniejsza możliwa.

**12. Niech P_2 będzie zbiorem wielomianów jednej zmiennej stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych. Określamy odwzorowanie $\phi : P_2 \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)^2\, dx.$$

Niech $Q = \{f \in P_2 \ :\ f(1) = 1\}$. Znajdź $f \in Q$ taki, że wartość $\phi(f)$ jest najmniejsza możliwa. Odpowiedź uzasadnij.

**13. Definiujemy *średnią potęgową stopnia* α liczb $x_1, \cdots, x_n > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wzorem

$$M_\alpha = M_\alpha(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Udowodnić monotoniczność średnich potęgowych względem α.

Jak zdefiniować M_0 aby zachodził $M_\alpha \le M_\beta$ dla wszystkich $\alpha \le \beta \in \mathbb{R}$?

Wskazówki:

– Pokazać, że $M_\alpha \le M_\beta$ dla $\alpha \le \beta$ tego samego znaku; wystarczy sprowadzić to do przypadku obydwu α, β dodatnich. Zauważyć, że przemnożenie wszystkich $x_1, ..., x_n$ przez $t > 0$ zachowuje nierówność $M_\alpha \le M_\beta$ czyli można się ograniczyć do jakiegoś zbioru ograniczonego.

– Zauważyć, że hipotetyczne M_0 powinno być (monotoniczną) granicą M_α gdy $\alpha \searrow 0$. Na początku poeksperymentować z $n = 2$.

– Jakie znane nierówności są szczególnymi przypadkami?

**14. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, definiujemy $S_1(x) = x_1 + ... + x_n$ i

$$S_2(x) = \sum_{1 \le j < k \le n} x_j x_k$$

Znaleźć infimum i supremum $S_2(x)$ pod warunkiem $S_1(x) = s$. *Wskazówka: Założyć sobie najpierw n=2,3.*

**15. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, n$

$$S_j(x) = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_j \le n} x_{k_1} \cdots x_{k_j}$$

oznacza j-tą elementarną funkcję symetryczną zmiennych $x_1, \ldots, x_n$. Znaleźć wartości ekstremalne $S_n(x)$ przy jednocześnie zachodzących warunkach $S_j(x) = s_j$ dla $j = 1, \cdots, n-1$.

*Zadanie już dla n=3 zasługuje na **. Nie wiem jak zrobić to zadanie. Podobno warto rozważyć wielomian* $P(t) = (t - x_1) \cdots (t - x_n)$