# Analiza funkcjonalna I

**Ryszard Szwarc***

## Spis treści



*Wykład prowadzony w semestrze zimowym 2007. Opracowany na podstawie notatek Magdaleny Świczewskiej

# 1 Przestrzenie unormowane

**Definicja 1.1.** *Niech $X$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$). Normą określoną na $X$ nazywamy funkcję $X \ni x \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ spełniającą warunki*

*(i)* $\|x\| = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 0$.

*(ii)* $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *dla* $\lambda \in \mathbb{C}$ *oraz* $x \in X$. ***(jednorodność)***

*(iii)* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *dla* $x, y \in X$. ***(warunek trójkąta)***

**Uwaga 1.2.** Z nierówności trójkąta wynika, że

$$| \|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Określmy funkcję $d(x, y) = \|x - y\|$ dla $x, y \in X$. Wtedy $d(x, y)$ jest metryką i $X$ staje się przestrzenią metryczną.

**Przykłady.**

1. $X = \mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{R}^n$). Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ możemy określić normy

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|. \end{aligned}$$

2. $X = C[0,1]$ (funkcje ciągłe o wartościach zespolonych). Określamy tzw. normę jednostajną

$$\|f\|_\infty = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|.$$

   Ta przestrzeń ma nieskończony wymiar, bo jednomiany $1, x, x^2, x^3, \ldots$ tworzą nieskończony układ liniowo niezależny. Jednakże układ ten nie jest bazą algebraiczną przestrzeni liniowej $X$. Możemy rozważać też inną normę:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

3. $X = \ell^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \,:\, \sup_n |x_n| < \infty\}$.

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

   Zauważmy, że $|x_n| \leqslant \|x\|_\infty$.

**Definicja 1.3.** *Przestrzeń metryczną nazywamy* ***zupełną****, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.*

**Definicja 1.4.** *Przestrzeń unormowaną zupełną w metryce $d(x,y) = \|x-y\|$ nazywamy* ***przestrzenią Banacha****.*

**Przykład.** Przestrzenie $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ są przestrzeniami Banacha.

**Przykład.** $\ell^\infty$ jest przestrzenią Banacha. W tym celu trzeba pokazać, że każdy ciąg Cauchy'ego $x^{(k)}$ w $\ell^\infty$ jest zbieżny do pewnego elementu $x$ z $\ell^\infty$. Ustalmy wskaźnik $n$. Wtedy

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^{(k)} - x_m^{(l)}| = \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty.$$

Zatem dla dowolnej liczby $n$ ciąg liczbowy $(x_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem ten ciąg ma granicę $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg $x = (x_n)_{n=1}^\infty$. Pokażemy, że $x \in \ell^\infty$ oraz $\|x^{(k)} - x\|_\infty \underset{k}{\to} 0$. Ustalmy liczbę dodatnią $\varepsilon$. Z warunku Cauchy'ego istnieje wskaźnik $k_0$ taki, że dla $k, l \geqslant k_0$ mamy
$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leqslant \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon.$$
Przechodząc do granicy po lewej stronie, gdy $l \to \infty$ otrzymamy
$$|x_n^{(k)} - x_n| \leqslant \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$
Zatem $x^{(k)} - x \in \ell^\infty$ oraz
$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leqslant \varepsilon \qquad k \geqslant k_0. \tag{1.1}$$
Stąd $x$ leży w $\ell^\infty$ jako suma dwu elementów z $\ell^\infty$
$$x = -(x^{(k_0)} - x) + x^{(k_0)}.$$
Ponadto (1.1) oznacza, że $x^{(k)}$ zbiega do $x$ w $\ell^\infty$.

**Definicja 1.5.** *Mówimy, że szereg* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *elementów z przestrzeni unormowanej* $X$ *jest zbieżny, jeśli szereg sum częściowych*
$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$
*jest zbieżny.*

*Mówimy, że szereg* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

**Twierdzenie 1.6.** *Przestrzeń liniowa unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

*Dowód.* ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Dla $n > m$ mamy
$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| \leqslant \sum_{j=m+1}^n \|x_j\| \leqslant \sum_{j=m+1}^\infty \|x_j\|.$$

Stąd wynika, że ciąg $s_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny.

($\Leftarrow$) Niech $x_n$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $X$. Dla $\varepsilon = 2^{-k}$ istnieje liczba naturalna $n_k$ taka, że dla $n, m \geqslant n_k$ mamy $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$. Można założyć, że $n_{k+1} > n_k$. Zatem

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Przyjmijmy $y_0 = x_{n_1}$ oraz $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ dla $k \geqslant 1$. Wtedy szereg $\sum y_k$ jest bezwzględnie zbieżny. Zatem szereg ten jest zbieżny. Obliczamy sumy częściowe tego szeregu i otrzymujemy

$$\sum_{l=0}^{k-1} y_l = x_{n_k}.$$

Zatem podciąg $x_{n_k}$ jest zbieżny. Oznaczmy $x = \lim_k x_{n_k}$. Pokażemy, że $x = \lim_n x_n$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego istnieje liczba $k_0$ taka, że

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n, m \geqslant k_0.$$

Istnieje też liczba $l_0$, dla której

$$\|x_{n_l} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad l \geqslant l_0.$$

Niech $n \geqslant \max(k_0, l_0) = m_0$. Wtedy $n \geqslant k_0$ oraz $n_{m_0} \geqslant m_0 \geqslant k_0$. Zatem

$$\|x_n - x\| \leqslant \|x_n - x_{n_{m_0}}\| + \|x_{n_{m_0}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń liniową

$$L^1_{\mathbb{R}}(0,1) = \left\{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ mierzalna}, \; \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Przyjmujemy, że dwie funkcje $f$ i $g$ są równe jeśli $f(x) = g(x)$ prawie wszędzie dla $x$ z przedziału $(0,1)$ względem miary Lebesgue'a. Pokażemy zupełność przestrzeni w normie $\| \;\|_1$. Wystarczy sprawdzić, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Niech $\sum \|f_n\|_1 < \infty$. Określmy funkcję

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Jeśli szereg jest rozbieżny, przyjmujemy wartość $\infty$. Funkcja $g$ jest mierzalna i nieujemna jako granica punktowa sum częściowych funkcji mierzalnych i nieujemnych. Na podstawie twierdzenia Beppo-Leviego mamy

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Zatem $g(x) < \infty$ prawie wszędzie, czyli szereg $\sum f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny prawie wszędzie. To pozwala określić

$$h(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \text{jeśli szereg jest zbieżny;} \\ 0, & \text{jeśli szereg jest rozbieżny.} \end{cases}$$

Pokażemy, że $h \in L^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ oraz $\sum f_n = h$ w normie przestrzeni $L^1_{\mathbb{R}}(0,1)$. Mamy

$$\int_0^1 |h(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| dx \leqslant \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \left\|h - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_1 &= \int_0^1 \left|h(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| dx = \int_0^1 \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\ dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_1 \xrightarrow[n]{} 0. \end{aligned}$$

Tak samo dowodzi się, że przestrzeń $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ jest zupełna dla przestrzeni $X$ z miarą $\mu$.

W przestrzeniach $\mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{R}^n$ oraz np. $C[0,1]$ można określić wiele norm.

**Definicja 1.7.** *Dwie normy $\|\ \|_1$ oraz $\|\ \|_2$ określone na przestrzeni liniowej $X$ nazywamy* ***równoważnymi****, jeśli te normy są porównywalne, tzn. istnieją liczby dodatnie $c_1$ i $c_2$ spełniające*

$$c_2\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_1\|x\|_2$$

*dla wszystkich $x$ z $X$.*

**Uwaga 1.8.** Równoważność norm oznacza zatem, że iloraz norm dla niezerowych elementów jest ograniczony od góry i od dołu przez liczby dodatnie. Jeśli normy $\|\ \|_1$ oraz $\|\ \|_2$ są równoważne, to zbieżność ciągu $x_n$ względem normy $\|\ \|_1$ jest równoważna zbieżności tego ciągu w normie $\|\ \|_2$. Rzeczywiście, wynika to z nierówności

$$c_2\|x_n - x\|_2 \leqslant \|x_n - x\|_1 \leqslant c_1\|x_n - x\|_2.$$

Implikacja odwrotna też jest prawdziwa, tzn. jeśli zbieżność ciągów w dwu normach jest równoważna, to normy te muszą być równoważne (zadanie).

**Przykład.** Rozważmy $C[0, 1]$ i dwie normy

$$\|f\|_\infty = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Mamy

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty.$$

Niech $f_n(x) = x^n$. Wtedy

$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Stąd normy te nie są równoważne, bo iloraz norm nie jest ograniczony.

**Twierdzenie 1.9.** *W przestrzeni $\mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{R}^n$) wszystkie normy są równoważne.*

*Dowód.* Pokażemy, że dowolna norma $\|\ \|$ jest równoważna z normą $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Niech $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oznaczają elementy standardowej bazy w $\mathbb{C}^n$. Tzn. ciąg $e_i$ składa się z $(n-1)$ zer i jedynki umieszczonej na $i$-tej pozycji. Wtedy

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right) \|x\|_\infty$$

Przyjmując $c_1 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ otrzymujemy $\|x\| \leqslant c_1\|x\|_\infty$. Pozostaje udowodnić, że istnieje stała $c_2 > 0$ taka, że

$$c_2\|x\|_\infty \leqslant \|x\|, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

Niech $S = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \|y\|_\infty = 1\}$. Rozważmy funkcję $\varphi : S \to (0, \infty)$ określoną wzorem $\varphi(y) = \|y\|$. Zbiór $S$ jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{C}^n$. Z kolei funkcja $\varphi$ jest ciągła, bo

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = |\|y\| - \|y_0\|| \leqslant \|y - y_0\| \leqslant c_1\|y - y_0\|_\infty.$$

Z twierdzenia Weierstrassa funkcja $\varphi$ przyjmuje wartość najmniejszą w pewnym punkcie zbioru $S$. W szczególności ta funkcja jest ograniczona od dołu przez pewną dodatnią stałą $c_2$. Czyli $\|y\| \geqslant c_2$ dla $y \in S$. Niech $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. Wtedy element $y = x/\|x\|_\infty$ należy do $S$. Z równości $x = \|x\|_\infty\, y$ otrzymujemy zatem

$$\|x\| = \|x\|_\infty\, \|y\| \geqslant c_2\|x\|_\infty.$$

□

**Uwaga 1.10.** Z twierdzenia wynika, że przestrzeń $\mathbb{C}^n$ (i $\mathbb{R}^n$) jest zupełna niezależnie od wyboru normy, bo ciągi zbieżne w jednej normie są zbieżne w każdej innej normie oraz ciągi Cauchy'ego w jednej normie są ciągami Cauchy'ego w każdej innej normie.

**Wniosek 1.11.**

*(i) Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ ( $\mathbb{R}^n$) jest zupełna w dowolnej normie.*

*(ii) Przestrzeń unormowana skończonego wymiaru jest zawsze zupełna.*

*Dowód.* (ii) Niech $X$ będzie tą przestrzenią oraz $\dim X = n$. Niech $f_1, f_2, \ldots, f_n$ będzie bazą przestrzeni $X$. Określmy odwzorowanie $\varphi : X \to \mathbb{C}^n$ wzorem

$$X \ni \sum_{k=1}^n x_k f_k \underset{\varphi}{\longmapsto} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n,$$

oraz normę w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wzorem

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_k f_k\right\|, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Wtedy $\varphi$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $X$ i $\mathbb{C}^n$. Z pierwszej części wniosku wynika, że $X$ jest zupełna. □

Wiadomo, że jeśli podzbiór $Y$ w przestrzeni metrycznej $X$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to $Y$ jest domkniętym podzbiorem w $X$. Stąd natychmiast otrzymujemy

**Wniosek 1.12.** *Jeśli $E$ jest podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej $X$, to $E$ jest domknięta w $X$.*

**Twierdzenie 1.13** (o najlepszej aproksymacji)**.** *Niech $E$ będzie podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej $X$. Dla każdego elementu $x$ z $X$ istnieje element $x_0 \in E$ taki, że*

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

*Dowód.* Oznaczmy $a = \inf_{y \in E} \|x - y\|$. Dla liczby $n$ istnieje element $y_n \in E$ taki, że $\|x - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Wtedy

$$\|y_n\| \leqslant \|y_n - x\| + \|x\| < a + \|x\| + \frac{1}{n} \leqslant a + \|x\| + 1.$$

Zatem ciąg $y_n$ jest ograniczony. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (bo $\dim E < \infty$) możemy wybrać podciąg $y_{n_k}$ zbieżny np. do $x_0$. Ponieważ $E$ jest domknięta, to $x_0 \in E$. Dalej

$$a \leqslant \|x - x_0\| \leqslant \|x - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - x_0\| < a + \frac{1}{n_k} + \|y_{n_k} - x_0\| \xrightarrow[k \to \infty]{} a.$$

Otrzymujemy $\|x - x_0\| = a$ co kończy dowód. $\square$

**Uwaga 1.14.** Jeśli norma spełnia

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies x = \alpha y \text{ dla } \alpha \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

to element $x_0$ z tezy twierdzenia jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że istnieją dwa elementy $x_0$ oraz $x_1$ spełniające

$$\|x - x_0\| = \|x - x_1\| = a.$$

Wtedy

$$a \leqslant \left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| \leqslant \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\| = a.$$

Zatem

$$\left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\|.$$

Wtedy

$$\frac{x - x_0}{2} = \alpha \frac{x - x_1}{2}$$

dla pewnej liczby $\alpha$. Jeśli $\alpha = 1$, to $x_0 = x_1$. Jeśli zaś $\alpha \neq 1$, to obliczając $x$ otrzymamy, że $x \in E$ i wtedy $x = x_0 = x_1$. Można też zauważyć, że liczba $\alpha$ z (1.2) musi być zawsze nieujemna. Jeśli $\|x\| = \|y\| \neq 0$, oraz $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ to $\alpha = 1$.

**Definicja 1.15.** *Podzbiór przestrzeni metrycznej $X$ nazywamy* ***gęstym****, jeśli dla dowolnego elementu $x$ z $X$ i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje element $a$ z $A$ spełniający $d(x,a) < \varepsilon$. Przestrzeń metryczna jest* ***ośrodkowa****, jeśli posiada przeliczalny podzbiór gęsty.*

**Uwaga 1.16.** *Jeśli w przestrzeni metrycznej $X$ znajdziemy nieprzeliczalną rodzinę rozłącznych otwartych kul (tzn. zbiorów postaci $B(x,r) = \{y \in Y \mid d(x,y) < r\}$), to $X$ nie jest ośrodkowa.*

**Przykład.** $X = \mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$).

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}} &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\} \\ A_{\mathbb{C}} &= \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

**Przykład.** Rozważmy $X = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Z twierdzenia Weierstrassa dla dowolnej funkcji $f$ istnieje ciąg wielomianów $p_n$ taki, że $p_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do $f(x)$. Tzn. $\|p_n - f\|_\infty \to 0$, gdy $n \to \infty$. Zatem wielomiany $\mathcal{P}$ tworzą gęsty podzbiór w $X$. Wtedy zbiór

$$\mathcal{P}_0 = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$$

jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem w $\mathcal{P}$, a zatem również w $X$.

**Przykład.** Dla przestrzeni

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty,\ x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

zbiór

$$A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ x_n = 0 \text{ od pewnego miejsca}\}$$

jest przeliczalnym zbiorem gęstym.

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń

$$\ell^\infty_{\mathbb{R}} = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \mid \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty,\ x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ta przestrzeń nie jest ośrodkowa. Rzeczywiście, dla podzbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ określmy

$$x_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A, \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

Wtedy $\|x_A - x_B\|_\infty = 1$ o ile $A \neq B$. Rozważmy kule $B(x_A, \frac{1}{2})$ dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$. Te zbiory są rozłączne i jest ich continuum. Zatem $\ell^\infty_\mathbb{R}$ nie jest ośrodkowa.

**Twierdzenie 1.17.** *Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić do przestrzeni Banacha.*

*Dowód.* Niech $X_0$ będzie przestrzenią unormowaną. Oznaczmy przez $X$ rodzinę klas równoważności ciągów Cauchy'ego elementów z $X_0$. Dwa ciągi Cauchy'ego $(x_n)$ oraz $(y_n)$ są ***równoważne***, co zapisujemy $(x_n) \sim (y_n)$, gdy $\|x_n - y_n\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Przestrzeń $X_0$ utożsamiamy z podzbiorem $X$ następująco

$$X_0 \ni x_0 \longmapsto [(x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots)]_\sim \in X,$$

gdzie $(x_n)_\sim$ oznacza klasę równoważności ciągu. Wiemy z topologii, że $X$ jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką

$$d_X((x_n)_\sim, (y_n)_\sim) = \lim_n d_{X_0}(x_n, y_n) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0}.$$

$X$ jest przestrzenią liniową, bo

(1) $(x_n)_\sim + (y_n)_\sim = (x_n + y_n)_\sim$.

(2) $\lambda(x_n)_\sim = (\lambda x_n)_\sim$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sprawdzimy, że definicja dodawania jest prawidłowa, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów w klasie równoważności. Niech $(x_n) \sim (x'_n)$ oraz $(y_n) \sim (y'_n)$. Wtedy $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$, bo

$$\|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\|_{X_0} \leqslant \|x_n - x'_n\|_{X_0} + \|y_n - y'_n\|_{X_0} \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Analogicznie sprawdzamy (2).

Określmy kandydata na normę w $X$ wzorem

$$\|(x_n)_\sim\|_X = d_X((x_n)_\sim, (0)_\sim) = \lim_n \|x_n\|_{X_0}.$$

Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów, bo środkowe wyrażenie zależy tylko od klasy równoważności ciągu $x_n$.

Pozostaje sprawdzić, że $\| \ \|_X$ jest normą oraz, że $\|(x_0)_\sim\|_X = \|x_0\|_{X_0}$. Warunek trójkąta i jednorodność wynikają z własności normy $\| \ \|_{X_0}$. Sprawdzamy kiedy $\|[(x_n)]_\sim\|_X = 0$. Otrzymujemy $\lim \|x_n\|_{X_0} = 0$, tzn. $(x_n) \sim (0)$. Sprawdzamy jeszcze zgodność normy $\| \ \|_X$ z metryką $d_X( \ , \ )$. Ale

$$d_X((x_n)_\sim, (y_n)_\sim) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0} = \|(x_n)_\sim - (y_n)_\sim\|_X.$$

□

## 1.1 Dodatek

**Lemat 1.18** (F. Riesz)**.** *Niech $Y$ będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową unormowanej przestrzeni liniowej $X$. Dla dowolnej liczby $0 < \theta < 1$ istnieje element $x$ w $X$ spełniający $\|x\| = 1$ oraz*

$$d(x, Y) := \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in Y\} \geqslant \theta.$$

**Uwaga 1.19.** Mamy $d(x, Y) \leqslant 1$, bo $\|x - 0\| = 1$. Lemat mówi, że można znaleźć element $x$ taki, że $\|x\| = 1$, dla którego odległość od domkniętej podprzestrzeni $Y$ jest dowolnie bliska liczbie 1.

*Dowód.* Ustalmy liczbę $0 < \theta < 1$. Niech $x_0 \in X \setminus Y$. Oznaczmy

$$a = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| \ : \ y \in Y\}.$$

Liczba $a$ jest dodatnia, bo jeśli $a = 0$, to istnieje ciąg $y_n \in Y$ taki, że $\|x_0 - y_n\| \underset{n}{\to} 0$. Czyli $y_n \underset{n}{\to} x_0$. Ponieważ $Y$ jest domknięta, to $x_0 \in Y$, co daje sprzeczność. Z dodatniości liczby $a$ mamy $a < a/\theta$. Zatem istnieje element $y_0 \in Y$ spełniający

$$a \leqslant \|x_0 - y_0\| \leqslant \frac{a}{\theta}.$$

Niech

$$x = c(x_0 - y_0), \qquad \text{gdzie } c = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}.$$

Wtedy $\|x\| = 1$. Ponadto, dla $y \in Y$ mamy

$$\|x - y\| = \|c(x_0 - y_0) - y\| = c\|x_0 - (y_0 + c^{-1}y\| \geqslant ca = \frac{a}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \theta.$$

Zatem $d(x, Y) \geqslant \theta$. □

**Twierdzenie 1.20.** *Niech $X$ będzie unormowaną przestrzenią liniową nieskończonego wymiaru. Wtedy istnieje ciąg elementów $x_n$ w $X$ spełniający warunki: $\|x_n\| = 1$ oraz $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ dla $n \neq m$.*

*Dowód.* Z założenia istnieje nieskończony układ liniowo niezależny $y_1, y_2, y_3, \ldots$ . Określmy $Y_n = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Podprzestrzenie liniowe $Y_n$ spełniają

$$Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n \subsetneq \ldots .$$

Stosując lemat Riesza dla $Y_{n-1} \subsetneq Y_n$ i $\theta = \frac{1}{2}$ otrzymujemy element $x_n \in Y_n$ o własności $\|x_n\| = 1$ oraz $d(x_n, Y_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Niech $n > m$. Wtedy $x_m \in Y_m \subset Y_{n-1}$. Zatem $\|x_n - x_m\| \geqslant d(x_n, Y_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. □

**Wniosek 1.21.** *W nieskończenie wymiarowej liniowej przestrzeni unormowanej $X$ kula jednostkowa $B = \{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ nie jest zbiorem zwartym.*

*Dowód.* Wyrazy ciągu $x_n$ z poprzedniego twierdzenia leżą w kuli $B$, ale ciąg ten nie zawiera podciągu zbieżnego. □

**Wniosek 1.22.** *Załóżmy, że przestrzeń Banacha $X$ ma nieskończony wymiar. Wtedy baza przestrzeni $X$ jest nieprzeliczalna.*

*Dowód.* Załóżmy, że przestrzeń $X$ posiada przeliczalną bazę $e_1, e_2, e_3, \ldots$ . Niech $X_n = \operatorname{lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Zatem

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

bo każdy element $x$ w $X$ należy do pewnej przestrzeni $X_n$. Na podstawie dowodu poprzedniego twierdzenia istnieją elementy $x_n \in X_n$ takie, że $\|x_n\| = 1$ oraz $d(x_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny, zatem jest zbieżny (por. Twierdzenie 1.6). Oznaczmy

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} x_n.$$

Element $y$ leży w $X_{n_0}$ dla pewnej liczby $n_0$. Zatem

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n} x_n = y - \sum_{n=1}^{n_0} 4^{-n} x_n \in X_{n_0}.$$

Zatem

$$y_0 := \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{n_0+1-n} x_n \in X_{n_0}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leqslant d(x_{n_0+1}, X_{n_0}) \leqslant \|x_{n_0+1} - y_0\| \\ = \left\| \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. □

# 2 Operatory liniowe

Niech $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ oraz $A = \{a_{ij}\}$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ o wyrazach zespolonych. Wtedy $A$ możemy traktować jako odwzorowanie z $X$ do $Y$ poprzez wzór

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Odwzorowanie $A$ spełnia

$$\begin{aligned} A(x + x') &= Ax + Ax' && \text{gdzie } x, x' \in X, \\ A(\lambda x) &= \lambda A x && \text{gdzie } \lambda \in \mathbb{C}, x \in X. \end{aligned}$$

**Definicja 2.1.** *Operatorem liniowym $T$ z przestrzeni liniowej $X$ w przestrzeń liniową $Y$ nazywamy odwzorowanie $T : X \to Y$ spełniające:*

$$\begin{aligned} T(x + x') &= Tx + Tx' \\ T(\lambda x) &= \lambda T x. \end{aligned}$$

*Załóżmy dodatkowo, że $X$ i $Y$ są przestrzeniami unormowanymi. Operator liniowy $T : X \to Y$ nazywamy ograniczonym jeśli istnieje stała liczba $C > 0$ taka, że*

$$\|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \qquad x \in X. \tag{2.1}$$

**Twierdzenie 2.2.** *Dla operatora liniowego $T : X \to Y$, pomiędzy przestrzeniami unormowanymi $X$ i $Y$ następujące warunki są równoważne.*

*(a) $T$ jest ciągłym odwzorowaniem w jednym punkcie.*

*(b) $T$ jest odwzorowaniem ciągłym w każdym punkcie.*

*(c) $T$ jest operatorem ograniczonym.*

*Dowód.* (c) $\implies$ (b)

Niech $x \in X$ oraz $x_n \underset{n}{\to} x$. Wtedy z liniowości mamy

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqslant C\|x_n - x\| \underset{n}{\to} 0.$$

Stąd $Tx_n \underset{n}{\to} Tx$ w normie przestrzeni $Y$, czyli $T$ jest ciągły w punkcie $x$.
(b) $\implies$ (a)

To wynikanie jest oczywiste.
(a) $\implies$ (c)

Pokażemy, że operator $T$ jest ciągły w punkcie 0 wiedząc, że jest ciągły w jakimś punkcie $x_0$. Niech $x_n \underset{n}{\to} 0$. Wtedy $u_n = x_n + x_0 \underset{n}{\to} x_0$. Z założenia mamy

$$Tx_n + Tx_0 = T(x_n + x_0) = Tu_n \underset{n}{\to} Tx_0.$$

Zatem $Tx_n \underset{n}{\to} 0 = T0$.

Załóżmy nie wprost, że nie istnieje stała spełniająca warunek (2.1). To oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ można znaleźć element $x_n \in X$ taki, że

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

W szczególności $x_n \neq 0$. Określmy

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Wtedy $\|u_n\| = 1/\sqrt{n}$. Zatem $u_n \underset{n}{\to} 0$. Dalej

$$\|Tu_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} > \frac{1}{\sqrt{n}} n = \sqrt{n} \underset{n}{\to} \infty.$$

To przeczy ciągłości operatora $T$ w punkcie 0. $\square$

Jeśli $T$ jest ograniczonym operatorem liniowym, to dla pewnej stałej $C$ i dla wszystkich $x \neq 0$ mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant C.$$

Zatem

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant C.$$

**Definicja 2.3.** *Liczbę*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

*nazywamy **normą** operatora ograniczonego $T$.*

Zauważmy, że dla $x \in X$ mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|, \qquad x \neq 0.$$

Czyli $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ dla $x \in X$ włącznie z $x = 0$. Zatem $C = \|T\|$ jest najmniejszą liczbą nieujemną, dla której nierówność $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ jest spełniona.

**Twierdzenie 2.4.**

$$\|T\| = \sup_{\|u\|\leqslant 1} \|Tu\|.$$

*Dowód.* Dla $x \neq 0$ norma elementu $x/\|x\|$ jest równa 1. Mamy

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leqslant \sup_{\|u\|\leqslant 1} \|Tu\|.$$

Z drugiej strony

$$\sup_{\|u\|\leqslant 1} \|Tu\| = \sup_{0<\|u\|\leqslant 1} \|Tu\| \leqslant \sup_{0<\|u\|\leqslant 1} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \leqslant \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \|T\|.$$

□

**Przykład.** Rozważamy $X = \mathbb{C}^n$ i $Y = \mathbb{C}^m$ z normami euklidesowymi. Niech $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i $f_1, f_2, \ldots, f_m$ oznaczają standardowe bazy w przestrzeniach $X$ i $Y$ odpowiednio. Niech $T$ będzie operatorem liniowym z $X$ do $Y$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j T e_j\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^n |x_j|\, \|Te_j\| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} = C\|x\|,\end{aligned}$$

gdzie $C = \left(\sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2\right)^{1/2}$. Zatem

$$\|T\| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2\right)^{1/2}.$$

Zapiszmy $T$ w postaci macierzowej, tzn.

$$Te_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2,$$

czyli norma $\|T\|$ jest oszacowana z góry przez pierwiastek z sumy kwadratów wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów macierzy związanej z $T$.

**Uwaga 2.5.** Z przykładu wynika, że każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ograniczony. Rzeczywiście obraz takiego operatora ma skończony wymiar, więc można go utożsamić z operatorem pomiędzy $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ dla pewnych $n$ i $m$. Ponieważ normy na tych przestrzeniach są równoważne normie euklidesowej, to operator musi być ograniczony.

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń $C[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$. Niech $k(x,y)$ będzie funkcją ciągłą dwu zmiennych $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Określamy odwzorowanie $T : C[0,1] \to C[0,1]$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &\leqslant \int_0^1 |k(x,y)|\,|f(y)|\,dy \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,y)|\,dy \\
&\leqslant \|f\|_\infty \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 |k(x,y)|\,dy.
\end{aligned}
$$

Zatem dla $C = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \int\limits_0^1 |k(x,y)|\,dy$ otrzymujemy

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |(Tf)(x)| \leqslant C\|f\|_\infty.$$

Ostatecznie

$$\|T\| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 |k(x,y)|\,dy.$$

Wielkość po prawej stronie jest skończona, bo z twierdzenia Weierstrassa funkcja $k(x,y)$ jest ograniczona.

Załóżmy, że $k(x,y) \geqslant 0$. Wtedy dla funkcji stale równej 1 mamy $\|1\|_\infty = 1$ oraz

$$(T1)(x) = \int_0^1 k(x,y)\,dy.$$

Zatem

$$\|T1\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 k(x,y)\,dy.$$

Stąd wynika, że

$$\|T\| \geqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 k(x,y)\,dy.$$

Reasumując otrzymujemy

$$\|T\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 k(x,y)\,dy.$$

Funkcja $k(x,y)$ nie musi być ciągła, aby odpowiadający jej operator $T$ przekształcał $C[0,1]$ w $C[0,1]$. Na przykład operatorowi funkcji pierwotnej

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

odpowiada funkcja

$$k(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0, & x < y \leqslant 1. \end{cases}$$

Ponieważ $k(x,y) \geqslant 0$, to

$$\|T\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 k(x,y)\,dy = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} x = 1.$$

**Przykład.** Niech $X = C^1[0,1]$ oraz $Y = C[0,1]$. W obu przestrzeniach wprowadzamy normę $\| \ \|_\infty$. Rozważamy operator pochodnej $Tf = f'$. Dla $f_n(x) = x^n$ mamy $\|f_n\|_\infty = 1$, ale $\|Tf_n\|_\infty = \|nx^{n-1}\|_\infty = n$. Zatem operator $T$ nie jest ograniczony.

W przestrzeni $X = C^1[0,1]$ bardziej naturalne będzie wprowadzenie normy

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Po tej zmianie przestrzeń $X$ staje się zupełna oraz operator $Tf = f'$ jest ograniczony, bo

$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|.$$

Zatem norma operatora $T$ nie przekracza liczby 1.

**Twierdzenie 2.6.** *Niech $X_0$ będzie gęstą podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $X$. Załóżmy, że operator liniowy $T_0 : X_0 \to Y$, gdzie $Y$ jest przestrzenią Banacha, jest ograniczony. Wtedy istnieje rozszerzenie operatora $T_0$ do operatora $T$ ograniczonego z przestrzeni $X$ w $Y$.*

**Uwaga 2.7.** Rozszerzenie $T$ jest jednoznaczne.

**Przykład.** Niech $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $X = L^2(\mathbb{R})$ oraz $Y = L^2(\mathbb{R})$. W przestrzeniach $X$ i $Y$ wprowadzamy normę

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

Wtedy przestrzeń $Y$ jest zupełna (por. dowód zupełności dla $L^1(0,1)$). Podprzestrzeń $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ jest gęsta w $X = L^2(\mathbb{R})$. Rzeczywiście dla $f \in L^2(\mathbb{R})$ określamy $f_n(x) = f(x)\,\mathbf{I}_{[-n,n]}(x)$. Wtedy $f_n \in L^2([-n,n]) \subset L^1([-n,n]) \subset L^1(\mathbb{R})$. Rzeczywiście

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx \leqslant \left(\int_{-n}^{n} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{-n}^{n} dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant (2n)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Ponadto $f_n \underset{n}{\to} f$ w $L^2(\mathbb{R})$. Istotnie

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2\,dx \underset{n}{\to} 0.$$

Dla $f \in X_0 = L^1 \cap L^2$ określamy

$$Tf = \widehat{f}, \qquad \widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Z równości Plancherela otrzymujemy

$$\|Tf\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\,d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Zatem $\|Tf\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$, dla $f \in L^1 \cap L^2$. Z Twierdzenia 2.6 transformata Fouriera rozszerza się do operatora $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Operator $\mathcal{F}$ jest ograniczony i spełnia $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.

Powracamy do dowodu Twierdzenia 2.6.

*Dowód.* Niech $x \in X$. Z założenia istnieje ciąg elementów $x_n$ z $X_0$ zbieżny do $x$. Badamy ciąg $T_0 x_n$.

$$\|T_0 x_n - T_0 x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leqslant \|T_0\|\;\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Zatem $T_0 x_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w $Y$. Ciąg $T_0 x_n$ jest więc zbieżny, np. do elementu $y$. Określmy operator $T$ wzorem $Tx = y = \lim_n T_0 x_n$. Trzeba sprawdzić, że ta definicja jest poprawna, tzn. wynik $y$ nie zależy od wyboru ciągu $x_n$ zbieżnego do $x$. Załóżmy, że inny ciąg $x'_n$ elementów z $X_0$ jest zbieżny do $x$. Utwórzmy nowy ciąg $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots$. Ten ciąg jest zbieżny do $x$. Zatem, podobnie jak dla ciągu $x_n$, ciąg wartości $Tx_1, Tx'_1, Tx_2, Tx'_2, \ldots$ jest zbieżny. Ale podciąg wyrazów o numerach nieparzystych jest zbieżny do $y$, zatem również podciąg o numerach parzystych, czyli $Tx'_n$, też jest zbieżny do $y$.

$T$ jest rozszerzeniem operatora $T_0$, bo jeśli $x_0 \in X_0$ to możemy przyjąć $x_n \equiv x_0$. Wtedy

$$Tx_0 = \lim_n T_0 x_n = T_0 x_0.$$

Sprawdzamy liniowość. Niech $x_n \underset{n}{\to} x$ oraz $x'_n \underset{n}{\to} x'$, gdzie $x_n, x'_n \in X_0$. Wtedy $x_n + x'_n \underset{n}{\to} x + x'$. Zatem

$$\begin{aligned} T(x+x') = \lim_n T_0(x_n + x'_n) = \lim_n (T_0 x_n + T_0 x'_n) \\ = \lim_n T_0 x_n + \lim_n T_0 x'_n = Tx + Tx' \end{aligned}$$

$$T(\lambda x) = \lim_n T_0(\lambda x_n) = \lambda \lim_n T_0(x_n) = \lambda Tx.$$

Sprawdzamy ograniczoność.

$$\|Tx\| = \|\lim_n T_0 x_n\| = \lim_n \|T_0 x_n\| \leqslant \|T_0\| \lim_n \|x_n\| = \|T_0\|\,\|x\|.$$

Otrzymaliśmy $\|T\| \leqslant \|T_0\|$. Ale oczywiście mamy $\|T\| \geqslant \|T_0\|$, bo kres górny występujący w określeniu normy operatora $T$ oblicza się po większym zbiorze elementów niż przy obliczaniu normy operatora $T_0$. Reasumując $\|T\| = \|T_0\|$. $\square$

**Uwaga 2.8.** Stosowanie Twierdzenia 2.6 dla przestrzeni skończenie wymiarowych nie ma sensu, bo taka przestrzeń nie posiada właściwych gęstych podprzestrzeni liniowych.

**Definicja 2.9.** *Mówimy, że ograniczony operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy unormowanymi przestrzeniami liniowymi jest* ***odwracalny****, jeśli istnieje ograniczony operator liniowy $S : Y \to X$ spełniający*

$$\begin{aligned} STx &= x, \quad \text{dla } x \in X, \\ TSy &= y, \quad \text{dla } y \in Y. \end{aligned}$$

*W szczególności odwzorowanie $T$ musi być różnowartościowe i obraz przez $T$ musi być równy $Y$.*

**Uwaga 2.10.** Jeśli $T$ jest odwzorowaniem różnowartościowym i „na”, to istnieje odwzorowanie odwrotne $S$. Ponieważ $T$ jest operatorem liniowym, to również $S$ jest operatorem liniowym. W definicji odwracalności dodatkowo żądamy, aby odwzorowanie odwrotne było ograniczone (równoważnie: ciągłe).

**Przykład.** Niech $X = \mathbb{C}^n$ oraz $Y = \mathbb{C}^m$. Rozważmy operator liniowy $T : X \to Y$. Odwzorowanie $T$ nie może być odwracalne, gdy $n \neq m$, bo dla $m < n$, $T$ nie jest różnowartościowe. Z kolei dla $m > n$ odwzorowanie $T$ nie jest „na”.

Jeśli $n = m$, to z kursu algebry liniowej wiemy, że $T$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy to odwzorowanie jest „na”, co z kolei jest równoważne warunkowi $\det T \neq 0$.

**Przykład.** Niech $X = Y = \ell^1$, gdzie $\ell^1$ oznacza przestrzeń ciągów $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ (o wyrazach zespolonych (lub rzeczywistych) bezwzględnie sumowalnych z normą

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Rozważamy operator

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Wtedy

$$\|Tx\|_1 = \|x\|_1.$$

Zatem $\|T\| = 1$. Operator $T$ jest różnowartościowy, ale nie jest odwracalny, bo ciąg $(1, 0, 0, \ldots)$ nie należy do obrazu operatora $T$. Rozważmy operator

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Mamy

$$\|Sx\|_1 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1.$$

Zatem $\|S\| \leqslant 1$. Tym razem operator $S$ nie jest różnowartościowy, bo

$$S(1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots) = S(0, 0, \ldots).$$

Obraz operatora $S$ jest równy $\ell^1$, bo

$$S(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots).$$

Zauważmy, że $ST = I$ oraz

$$(TS)(x_1, x_2, x_3 \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots).$$

**Fakt 2.11.** *Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \to Y$ jest odwzorowaniem $1-1$ i „na”. $T$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej dodatniej liczby $c$ spełniona jest nierówność $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$, dla wszystkich $x$ w $X$.*

*Dowód.* Oznaczmy symbolem $S$ operator odwrotny do $T$.
($\Rightarrow$). Załóżmy, że $T$ jest odwracalny. Wtedy $S$ jest ograniczony, zatem

$$\|x\| = \|STx\| \leqslant \|S\| \; \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geqslant c\|x\|, \qquad c = \frac{1}{\|S\|}.$$

($\Leftarrow$). Załóżmy, że dla $c >$ mamy $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$. Wtedy dla $y \in Y$ mamy

$$\|y\| = \|TSy\| \geqslant c\|Sy\|.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|Sy\| \leqslant \frac{1}{c}\|y\|.$$

To oznacza, że $S$ jest ograniczony. □

**Przykład.** Niech $X = c$ oraz $Y = c_0$, gdzie $c$ oznacza przestrzeń wszystkich zbieżnych ciągów, natomiast $c_0$ oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera. W obu przestrzeniach wprowadzamy normę

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|, \qquad x = (x_n)_{n=1}^\infty.$$

Dla $x \in X$ niech $x_\infty = \lim\limits_n x_n$. Określmy operator $T : X \to Y$ wzorem

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_\infty, x_1 - x_\infty, x_2 - x_\infty, \ldots, x_n - x_\infty, \ldots).$$

Łatwo stwierdzić, że $T$ jest operatorem liniowym z $X$ do $Y$. Sprawdzimy ograniczoność. Mamy $|x_\infty| \leqslant \|x\|_\infty$* oraz

$$|x_n - x_\infty| \leqslant |x_n| + |x_\infty| \leqslant \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2\|x\|_\infty.$$

*Jeśli $x_n \to x_\infty$, to $|x_n| \to |x_\infty|$. Mamy więc $|x_\infty| = \limsup |x_n| \leqslant \sup |x_n| = \|x\|_\infty$.

Zatem
$$\|Tx\|_\infty \leqslant 2\|x\|_\infty,$$
czyli $\|T\| \leqslant 2$. Określmy operator $S : Y \to X$ wzorem
$$S(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (y_1 + y_0, y_2 + y_0, \ldots, y_n + y_0, \ldots)\,.$$
$S$ jest operatorem liniowym z $Y$ do $X$ oraz
$$\|Sy\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |y_n + y_0| \leqslant 2 \sup_{n\geqslant 0} |y_n| = 2\|y\|_\infty.$$
Ponadto $STx = x$ oraz $TSy = y$. Zatem $T$ jest operatorem odwracalnym.

**Definicja 2.12.** *Dwie unormowane przestrzenie liniowe $X$ i $Y$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje ograniczony i odwracalny operator liniowy z $X$ na $Y$.*

**Uwaga 2.13.** Ostatni przykład pokazuje, że przestrzenie $c$ i $c_0$ są izomorficzne. Można udowodnić, że te przestrzenie nie są izometrycznie izomorficzne, tzn. nie istnieje operator liniowy $T$ z $X$ na $Y$ spełniający $\|Tx\|_\infty = \|x\|_\infty$ dla wszystkich $x$ z $X$.

Dla dwu unormowanych przestrzeni liniowych $X$ i $Y$ symbolem $B(X, Y)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych z $X$ w $Y$. Dla $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ określamy
$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)x &= T_1x + T_2x,\\ (\lambda T_1)x &= \lambda(T_1x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$
Wtedy operatory $T_1 + T_2$ oraz $\lambda T_1$ są liniowe. Sprawdzamy ich ograniczoność.
$$\begin{aligned}\|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| &\leqslant \|T_1x\| + \|T_2x\|\\ &\leqslant \|T_1\|\,\|x\| + \|T_2\|\,\|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|.\end{aligned}$$
Zatem $\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$. Dalej
$$\|(\lambda T_1)x\| = \|\lambda(T_1x)\| = |\lambda|\,\|T_1x\|.$$
W konsekwencji otrzymujemy
$$\|\lambda T_1\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(\lambda T_1)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_1x\| = |\lambda|\|T_1\|.$$
Z obliczeń wynika, że $B(X, Y)$ jest unormowaną przestrzenią liniową z normą operatorową $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\|$.

**Przykład.** Niech $X = \mathbb{C}^n$ oraz $Y = \mathbb{C}^m$. Wtedy $B(X,Y)$ można utożsamić z macierzami zespolonymi wymiaru $m \times n$. Czyli przestrzeń $B(X,Y)$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^{mn}$.

**Twierdzenie 2.14.** *Jeśli $Y$ jest przestrzenią Banacha, a $X$ jest przestrzenią unormowaną, to $B(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

*Dowód.* Trzeba pokazać zupełność przestrzeni $B(X,Y)$. Niech $T_n$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X,Y)$, tzn.

$$\|T_n - T_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Dla $x \in X$ mamy

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\ \|x\|.$$

Zatem $T_n x$ jest ciągiem Cauchy'ego w $Y$. Ponieważ $Y$ jest przestrzenią Banacha, to ciąg $T_n x$ jest zbieżny. Oznaczmy

$$Tx = \lim_n T_n x.$$

Wtedy $T$ odwzorowuje $X$ w $Y$. Odwzorowanie $T$ jest liniowe, bo

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_n T_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_n(\lambda_1 T_n x_1 + \lambda_2 T_n x_2) \\ &= \lambda_1 \lim_n T_n x_1 + \lambda_2 \lim_n T_n x_2 = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2. \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że $T$ jest ograniczony oraz, że $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba $N$ taka, że dla $n, m \geqslant N$ mamy $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Niech $n \geqslant N$. Wtedy

$$\|(T_n - T)x\| = \|T_n x - Tx\| = \lim_m \|T_n x - T_m x\|.$$

Z drugiej strony jeśli $m \geqslant N$, to

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\,\|x\| \leqslant \varepsilon\|x\|.$$

Zatem

$$\|(T_n - T)x\| \leqslant \varepsilon\|x\|, \qquad n \geqslant N. \tag{2.2}$$

czyli

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$$

dla $n \geqslant N$. W szczególności operator $T_N - T$ jest ograniczony. Ponieważ $T = T_N - (T_N - T)$, to również $T$ jest ograniczony. Ponadto z (2.2) wnioskujemy, że $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ w normie operatorowej. □

**Wniosek 2.15.** *Jeśli $Y = \mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$), to $B(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

# 3 Przestrzenie Hilberta

## 3.1 Podstawowe własności

Będziemy rozważać zespolone przestrzenie liniowe $X$ z iloczynem skalarnym $\langle x, y\rangle$. Z kursu algebry liniowej wiemy, że wyrażenie $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ jest normą. Iloczyn skalarny można wyrazić poprzez normę wzorem polaryzacyjnym.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \|x + i^k y\|^2 i^k.$$

Spełniona jest nierówność Schwarza

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Norma pochodząca od iloczynu skalarnego spełnia równość równoległoboku.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Przypomnimy wzór

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że

**Twierdzenie 3.1** (Jordan, von Neumann)**.** *Norma przestrzeni liniowej pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek równoległoboku.*

**Przykłady.**

(1) $X = \mathbb{C}^n$ $\qquad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$

(2) $X = \ell^2$ $\qquad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

(3) $X = L^2(0, 2\pi)$ $\qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

**Definicja 3.2.** *Przestrzeń zupełną z iloczynem skalarnym nazywamy* ***przestrzenią Hilberta****.*

**Lemat 3.3** (o najlepszej aproksymacji)**.** *Niech $M$ będzie podprzestrzenią domkniętą przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wtedy dla $x \in \mathcal{H}$ istnieje jedyny element $v_0 \in M$ spełniający warunek*

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf_{v \in M} \|x - v\|.$$

*Dowód.* Niech $d = d(x, M)$. Wtedy istnieje element $v_n \in M$ taki, że

$$d \leqslant \|x - v_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}.$$

Pokażemy, że ciąg $v_n$ jest zbieżny. Korzystając z równości równoległoboku mamy

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|^2 &= \|(x - v_m) - (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - \|(x - v_m) + (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2 \\ &\leqslant 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \xrightarrow{n,m} 0.\end{aligned}$$

Zatem $v_n$ jest ciągiem Cauchy'ego. Niech $v_0 = \lim_n v_n$. Wtedy

$$\|x - v_0\| = \lim_n \|x - v_n\| = d.$$

Ponadto $v_0 \in M$, bo $M$ jest domkniętą podprzestrzenią. Z rozumowania wynika, że element $v_0$ jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że również $\widetilde{v}_0 \in M$ spełnia $\|x - \widetilde{v}_0\| = d$. Rozważmy ciąg $v_n$ postaci $v_0, \widetilde{v}_0, v_0, \widetilde{v}_0, \ldots$ Na podstawie obliczeń wnioskujemy, że taki ciąg jest zbieżny. Zatem $\widetilde{v}_0 = v_0$. □

**Definicja 3.4.** *Niech $M$ będzie podzbiorem przestrzeni $\mathcal{H}$. Określamy* ***dopełnienie ortogonalne*** *$M^\perp$ wzorem*

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, \text{ dla wszystkich } y \in M\}.$$

Z własności iloczynu skalarnego wynika, że zbiór $M^\perp$ jest podprzestrzenią liniową. Co więcej, $M^\perp$ jest domknięty, bo jeśli $x_n \to x$ oraz $x_n \in M^\perp$, to dla $y \in M$ mamy

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| = |\langle x - x_n, y\rangle| \leqslant \|x - x_n\|\ \|y\| \xrightarrow{n} 0.$$

Zatem $\langle x, y\rangle = 0$ dla $y \in M$, czyli $x \in M^\perp$.

**Twierdzenie 3.5.** *Niech $M$ będzie domkniętą podprzestrzenią liniową w $\mathcal{H}$. Wtedy każdy element $x$ w $\mathcal{H}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$x = x_0 + x_1, \qquad \text{gdzie} \quad x_0 \in M, \; x_1 \in M^\perp.$$

*Tzn.* $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

*Dowód.* Mamy $M \cap M^\perp = \{0\}$, bo jeśli $x \in M \cap M^\perp$, to $\langle x, x \rangle = 0$, czyli $x = 0$. Stąd wynika jednoznaczność rozkładu. Rzeczywiście jeśli $x_0 + x_1 = x_0' + x_1'$, dla $x_0, x_0' \in M$ oraz $x_1, x_1' \in M^\perp$, to element $x_0 - x_0' = x_1' - x_1$ leży w $M \cap M^\perp$. Stąd $x_0 = x_0'$ i $x_1 = x_1'$. Niech $x \in \mathcal{H}$. Z poprzedniego lematu istnieje element $x_0 \in M$ taki, że $d = \|x - x_0\| = d(x, M)$. Niech $x_1 = x - x_0$. Wtedy $x = x_0 + x_1$. Pokażemy, że $x_1 \in M^\perp$. Niech $0 \neq y \in M$. Trzeba udowodnić, że $\langle x, y \rangle = 0$. Dla $t \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\|^2 \leqslant \|x - (x_0 + ty)\|^2 &= \|(x - x_0) - ty\|^2 \\
&= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x - x_0, ty \rangle \\
&= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\bar{t}\,\langle x - x_0, y \rangle
\end{aligned}$$

Podstawmy

$$t = \frac{\langle x - x_0, y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\|^2 \leqslant \|x - x_0\|^2 + \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - 2 \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\
= \|x - x_0\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Zatem $\langle x, y \rangle = 0$. □

**Uwaga 3.6.** Dla $x \in \mathcal{H}$ element $x_0$ nazywamy rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $M$ i oznaczamy symbolem $P_M x$. Z Twierdzenia 3.5 wynika $P_M x \perp x - P_M x$.

W przestrzeni z iloczynem skalarnym elementy $x, y$ nazywamy ortogonalnymi, jeśli $\langle x, y \rangle = 0$. Stosujemy wtedy zapis $x \perp y$. Rodzinę elementów o normie jeden i parami ortogonalnych nazywamy układem ortonormalnym. Maksymalny, ze względu na zawieranie, układ ortonormalny nazywamy bazą ortonormalną. Z kursu algebry liniowej wiemy, że

**Twierdzenie 3.7.** *Każda przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym posiada bazę ortonormalną.*

**Uwaga 3.8.** Baza ortonormalna nie jest bazą przestrzeni liniowej, tzn. nie jest maksymalnym układem elementów liniowo niezależnych chyba, że przestrzeń ma skończony wymiar.

**Lemat 3.9.** *Baza ortonormalna w ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest przeliczalna.*

*Dowód.* Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie bazą ortonormalną. Wtedy dla $i, j \in I$ takich, że $i \neq j$ mamy

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2.$$

Czyli $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Zatem kule $B(e_i, \frac{1}{2})_{i\in I}$ są parami rozłączne. Z ośrodkowości ilość tych kul jest przeliczalna. Tzn. zbiór $I$ jest przeliczalny. □

**Twierdzenie 3.10** (Nierówność Bessela)**.** *Jeśli $e_1, e_2, \dots, e_n$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $X$, to dla $x \in X$ mamy*

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

*Dowód.* Użyjemy prostego faktu, że jeśli elementy $x_1, x_2, \dots, x_n$ są parami ortogonalne, to

$$\|x_1 + x_2 + \dots, +x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Rozważmy

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Wtedy dla $1 \leqslant k \leqslant n$ mamy

$$\langle x - s_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle s_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_k\rangle = 0.$$

To oznacza, że $x - s_n \perp e_1, e_2, \dots, e_n$. Zatem $x - s_n \perp s_n$ oraz

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

□

**Lemat 3.11.** *Jeśli* $\langle x, y\rangle = \langle x', y\rangle$ *dla wszystkich* $y \in X$*, to* $x = x'$*.*

*Dowód.* Z założenia $\langle x - x', y\rangle = 0$ dla $y \in X$. W szczególności dla $y := x - x'$ otrzymujemy $\|x - x'\|^2 = 0$, czyli $x = x'$. $\square$

**Lemat 3.12.**

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle x, y\rangle|.$$

*Dowód.* Możemy założyć, że $x \neq 0$. Z nierówności Schwarza mamy

$$\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|.$$

Niech $y_0 = x/\|x\|$. Wtedy $\|y_0\| = 1$ oraz $\langle x, y_0\rangle = \|x\|$. Zatem

$$\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle x, y\rangle| \geqslant \|x\|.$$

$\square$

**Twierdzenie 3.13.** *Załóżmy, że przestrzeń Hilberta* $\mathcal{H}$ *posiada przeliczalną bazę ortonormalną* $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ *. Wtedy dla każdego elementu* $x \in \mathcal{H}$ *mamy*

*(i)* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

*(ii)* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

*Dowód.* Ustalmy liczbę $n$. Z nierówności Bessela mamy

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

dla dowolnej liczby $N$. Przechodząc do granicy $N \to \infty$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Zbadamy zbieżność szeregu w (i). W tym celu sprawdzimy warunek Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych $s_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$. Niech $n > m$. Wtedy

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$
$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Zatem szereg jest zbieżny. Oznaczmy

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Chcemy pokazać, że $x' = x$. Mamy

$$\langle x - x', e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x', e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \lim_n \langle s_n, e_k \rangle$$
$$= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0.$$

Czyli $x - x' \perp e_k$ dla każdego $k$. Ponieważ $\{e_k\}$ jest maksymalnym układem ortogonalnym, to $x - x' = 0$. To dowodzi (i).

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ we wzorze

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

i korzystając z $s_n \to x$ otrzymujemy (ii). □

**Uwaga 3.14.** Z dowodu twierdzenia wynika, że warunki (i) i (ii) są równoważne dla pojedynczego elementu $x$.

**Wniosek 3.15.** *Przestrzeń Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Każdy element przestrzeni jest granicą sum częściowych $s_n$, które są kombinacjami liniowymi elementów bazy ortonormalnej. Tzn. skończone kombinacje liniowe elementów bazy $e_1, e_2, \ldots$ leżą gęsto w $\mathcal{H}$. Z kolei każda taka skończona kombinacja liniowa jest granicą kombinacji liniowych ze współczynnikami z przeliczalnego zbioru $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Ostatecznie kombinacje liniowe o współczynnikach z $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ leżą gęsto w $\mathcal{H}$. Takich kombinacji jest tylko przeliczalnie wiele. □

**Twierdzenie 3.16** (Równość Parsevala). *Dla przestrzeni Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną $(e_n)$ mamy*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}.$$

*Dowód.* Niech $x_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ oraz $y_n = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j$. Wiemy, że $x_n \xrightarrow{n} x$ i $y_n \xrightarrow{n} y$. Zatem

$$\langle x, y\rangle = \lim_n \langle x_n, y_n\rangle = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle}$$

□

**Wniosek 3.17.** *Niech $M$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Załóżmy, że układ $(e_n)_{n=1}^{N}$, gdzie $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jest bazą ortonormalną w $M$. Dla każdego elementu $x$ w $\mathcal{H}$ jego rzut ortogonalny na $M$ wyraża się wzorem*

$$P_M x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

*Dowód.* Z założenia $P_M x$ leży w $M$. Zatem z Twierdzenia 3.13 zastosowanego do $M$ oraz z Uwagi 3.6 uzyskujemy

$$P_M x = \sum_{n=1}^{N} \langle P_M x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

□

**Twierdzenie 3.18.** *Każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta nieskończonego wymiaru jest izometrycznie izomorficzna z $\ell^2$.*

*Dowód.* Z Lematu 3.9 przestrzeń $\mathcal{H}$ posiada przeliczalną bazę ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rozważmy odwzorowanie $U : \mathcal{H} \to \ell^2$ określone wzorem

$$Ux = \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

$U$ jest odwzorowaniem liniowym. Ponadto z Twierdzenia 3.13(ii) wnosimy, że $\|Ux\|_{\ell^2} = \|x\|$, tzn. $U$ jest izometrią. W szczególności $U$ jest różnowartościowe. Pozostaje sprawdzić, że $U$ jest "na". Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ jest zbieżny w $\mathcal{H}$, bo jego sumy częściowe spełniają warunek Cauchy'ego. Oznaczmy $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Wtedy $\langle x, e_n\rangle = a_n$. Czyli $Ux = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

**Przykład.** Rozważamy $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi)$. Niech $e_n(t) = e^{int}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Wiadomo z kursu szeregów Fouriera, że $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Ponadto

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt = \widehat{f}(n).$$

Przyporządkowanie

$$f \longmapsto \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

jest izometrycznym izomorfizmem z $\mathcal{H}$ na $\ell^2$.

## 3.2 Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta

Niech $\{u_n\}_{n=1}^N$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni $\mathcal{H}$. Naszym celem jest skonstruowanie układu ortonormalnego $\{v_n\}_{n=1}^N$ o własności

$$L_n := \operatorname{lin} \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \operatorname{lin} \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

oraz $\langle v_n, u_n \rangle > 0$ dla wszystkich $n$.

Określamy $v_1 = u_1/\|u_1\|$. Załóżmy, że elementy $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ zostały już skonstruowane. Aby określić $v_n$ rozważamy podprzestrzeń $L_{n-1} = \operatorname{lin} \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$. Niech $u_n'$ oznacza rzut ortogonalny elementu $u_n$ na $L_{n-1}$. Wtedy $u_n \neq u_n'$, bo $u_n \notin L_{n-1}$. Określamy

$$v_n = \frac{u_n - u_n'}{\|u_n - u_n'\|}.$$

Z konstrukcji otrzymujemy $v_n \in L_n$ oraz $v_n \perp L_{n-1}$. Zatem dla $m < n$ mamy $v_m \in L_m \subset L_{n-1}$ oraz $v_n \perp L_{n-1}$. To oznacza, że $v_m \perp v_n$ czyli otrzymaliśmy układ ortonormalny. Dalej

$$\langle v_n, u_n \rangle = \frac{\langle u_n - u_n', u_n \rangle}{\|u_n - u_n'\|} = \frac{\langle u_n - u_n', u_n - u_n' \rangle}{\|u_n - u_n'\|} = \|u_n - u_n'\| > 0.$$

**Uwaga 3.19.** Elementy $v_n$ można określić bezpośrednim wzorem wyznacznikowym, w którym występują iloczyny skalarne $\langle u_j, u_k \rangle$ (por. Zadanie 65).

## Funkcjonały liniowe

**Definicja 3.20.** *Przestrzeń $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ nazywamy przestrzenią ograniczonych funkcjonałów liniowych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.*

**Przykład.** Dla ustalonego elementu $y \in \mathcal{H}$ określamy $f(x) = \langle x, y\rangle$ dla $x \in \mathcal{H}$. Wtedy

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|y\|\,\|x\|.$$

Ponadto z Lematu 3.12 mamy

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|y\|.$$

**Twierdzenie 3.21** (Lemat Riesza). *Dla każdego ograniczonego funkcjonału liniowego $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ istnieje jedyny element $y \in \mathcal{H}$ spełniający $f(x) = \langle x, y\rangle$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$.*

*Dowód.* Zbiór $N = \{x \in \mathcal{H} \,|\, f(x) = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową w $\mathcal{H}$. Jeśli $N = \mathcal{H}$, to możemy przyjąć $y = 0$. Załóżmy, że $N \neq \mathcal{H}$. Zatem z Twierdzenia 3.5 istnieje element $y_0 \neq 0$ taki, że $y_0 \perp N$. Ponadto $f(y_0) \neq 0$, bo $y_0 \notin N$. Niech $y_1 = y_0/f(y_0)$. Wtedy $f(y_1) = 1$ oraz $y_1 \perp N$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$x = (x - f(x)y_1) + f(x)y_1. \tag{3.1}$$

Pierwszy składnik rozkładu należy do $N$ a drugi do $N^\perp$. Mnożąc skalarnie obie strony (3.1) przez $y_1 \in N^\perp$ otrzymamy

$$\langle x, y_1\rangle = \langle f(x)y_1, y_1\rangle = f(x)\|y_1\|^2.$$

Zatem

$$f(x) = \frac{\langle x, y_1\rangle}{\|y_1\|^2}.$$

Możemy więc określić $y = y_1/\|y_1\|^2$. Jedyność elementu $y$ wynika z Lematu 3.11. □

**Wniosek 3.22.** *Przestrzeń $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ można utożsamić z $\mathcal{H}$. Przyporządkowanie*

$$\mathcal{H} \ni y \longmapsto f_y \in B(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \qquad \text{gdzie } f_y(x) = \langle x, y\rangle$$

*jest antyliniowe, tzn.*

$$f_{y_1+y_2} = f_{y_1} + f_{y_2},$$
$$f_{\lambda y} = \overline{\lambda} f_y.$$

**Definicja 3.23.** *Formą półtoraliniową $F$ na $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ spełniające* *(i)* $F(\lambda x + \mu y, z) = \lambda F(x, z) + \mu F(y, z)$.

*(ii)* $F(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} F(z, x) + \overline{\mu} F(z, y)$.

*Mówimy, że forma $F$ jest ograniczona, jeśli dla pewnej stałej $c$ mamy*

$$|F(x, y)| \leqslant c\|x\|\,\|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

**Przykład.** Dla $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ każda forma półtoraliniowa ma postać

$$F(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \overline{y_j}.$$

Rzeczywiście

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} F(e_i, e_j)\, x_i \overline{y_j},$$

zatem $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Forma $F(x, y)$ jest ograniczona, bo z nierówności Schwarza

$$|F(x, y)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x_i \overline{y_j})\right| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i|^2 |y_j|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \|x\|\,\|y\|.$$

**Przykład.** Niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie operatorem ograniczonym. Określmy $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$. Wtedy $F$ jest ograniczoną formą półtoraliniową, bo

$$|F(x, y)| = |\langle x, Ay \rangle| \leqslant \|x\|\,\|Ay\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

**Twierdzenie 3.24.** *Każda ograniczona forma półtoraliniowa na $\mathcal{H}$ ma postać*

$$F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

*dla pewnego ograniczonego operatora liniowego $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Operator $A$ jest jedyny.*

*Dowód.* Ustalmy $y \in \mathcal{H}$ i rozważmy odwzorowanie $\varphi_y$

$$\mathcal{H} \ni x \underset{\varphi_y}{\longmapsto} F(x, y) \in \mathbb{C}.$$

Wtedy $\varphi_y$ jest funkcjonałem liniowym. Ponadto

$$|\varphi_y(x)| = |F(x, y)| \leqslant c\|y\|\,\|x\|.$$

Zatem $\varphi_y$ jest ograniczony oraz $\|\varphi_y\| \leqslant c\|y\|$. Z lematu Riesza istnieje jedyny wektor $Ay$ taki, że

$$F(x, y) = \varphi_y(x) = \langle x, Ay\rangle.$$

Pokażemy, że przyporządkowanie $y \mapsto Ay$ jest liniowe. Mamy

$$\begin{aligned}\langle x, A(y_1 + y_2)\rangle = F(x, y_1 + y_2) &= F(x, y_1) + F(x, y_2)\\ &= \langle x, Ay_1\rangle + \langle x, Ay_2\rangle = \langle x, Ay_1 + Ay_2\rangle\end{aligned}$$

Zatem $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2$. Podobnie pokazujemy, że $A(\lambda y) = \lambda Ay$. Pozostaje sprawdzić ograniczoność operatora $A$. Mamy

$$\|Ay\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, Ay\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |F(x, y)| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (c\|x\|\,\|y\|) = c\|y\|$$

Zatem $\|A\| \leqslant c$. □

**Wniosek 3.25.** *Dla ograniczonego operatora liniowego $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ istnieje jedyny operator $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ spełniający*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

*Operator $A^*$ nazywamy operatorem sprzężonym do operatora $A$.*

*Dowód.* Funkcja $F(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ jest ograniczoną formą półtoraliniową. Zatem istnieje ograniczony operator liniowy $A^*$ taki, że

$$\langle Ax, y\rangle = F(x, y) = \langle x, A^*y\rangle.$$

□

**Uwaga 3.26.** Jeśli $\langle A_1x, y\rangle = \langle A_2x, y\rangle$, to $A_1 = A_2$.

**Przykład.** Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ oraz $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, będzie odwzorowaniem liniowym zadanym macierzą $(a_{ij})$ gdzie $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$. Wyznaczamy macierz odwzorowania $A^*$.

$$a^*_{ij} = \langle A^*e_i, e_j\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle = \overline{a_{ji}}.$$

Otrzymujemy $A^* = \overline{A^T}$, gdzie $T$ oznacza transpozycję macierzy.

# 4 Przestrzenie sprzężone

**Definicja 4.1.** *Przestrzeń $B(X, \mathbb{C})$ (czyli przestrzeń ograniczonych funkcjonałów liniowych), nazywamy* ***przestrzenią sprzężoną*** *do przestrzeni unormowanej $X$ i oznaczamy symbolem $X^*$.*

**Przykład.** Z lematu Riesza mamy $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Istotnie każdy funkcjonał liniowy na $\mathcal{H}$ ma postać $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$ dla pewnego elementu $y \in \mathcal{H}$. Przyporządkowanie $\mathcal{H} \ni y \mapsto \varphi_y \in \mathcal{H}^*$ spełnia

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1+y_2} &= \varphi_{y_1} + \varphi_{y_2}, \\ \varphi_{\lambda y} &= \bar{\lambda}\varphi_y. \end{aligned}$$

**Przykład.** Niech $X = c_0$ oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera z normą supremum wartości bezwzględnej wyrazów. Wykażemy, że $X^* = \ell^1$. Niech $\Lambda$ oznacza funkcjonał z $X^*$. Każdy element $x$ z $c_0$ zapisujemy w postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

gdzie

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots).$$

Szereg jest zbieżny, bo ogon szeregu dąży do zera w normie przestrzeni $c_0$. Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda(e_n).$$

Oznaczmy $\lambda_n = \Lambda(e_n)$. Wtedy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

tzn. każdy funkcjonał liniowy na $c_0$ ma postać jak wyżej dla pewnego ciągu $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Załóżmy, że $\lambda \in \ell^1$. Wtedy dla $x \in c_0$ mamy

$$|\Lambda(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \, |x_n| \leqslant \sup_n |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \|\lambda\|_1 \, \|x\|_{\infty}.$$

Zatem $\Lambda \in X^*$ oraz $\|\Lambda\| \leqslant \|\lambda\|_1$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\Lambda \in X^*$. Chcemy pokazać, że ciąg $\lambda_n = \Lambda(e_n)$ leży w $\ell^1$. Dla ustalonej naturalnej liczby $N$ określmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)}, \ldots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)}, 0, 0, \ldots) \in c_0.$$

Ponieważ $\|f_N\|_\infty \leqslant 1$, to

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| = |\Lambda(f_N)| \leqslant \|\Lambda\| \, \|f_N\|_\infty \leqslant \|\Lambda\|.$$

Przechodząc do granicy z $N$ otrzymujemy

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leqslant \|\Lambda\|.$$

Z wcześniejszego rozumowania wynika równość $\|\Lambda\| = \|\lambda\|_1$.

**Przykład.** Można udowodnić, że dla $1 < p < \infty$ mamy $(\ell^p)^* = \ell^q$, gdzie $q = p/(p-1)$ oraz $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. Przeprowadzimy szkic dowodu dla $1 < p < \infty$. Ponieważ dla $x \in \ell^p$ szereg $x = \sum x_n e_n$ jest zbieżny w $\ell^p$, to dla funkcjonału $\Lambda \in (\ell^p)^*$ mamy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(e_n) x_n.$$

Załóżmy, że ciąg $\lambda_n = \Lambda(e_n)$ leży w $\ell^q$. Wtedy z nierówności Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\Lambda(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \, |x_n| \\ &\leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \|\lambda\|_q \|x\|_p. \end{aligned}$$

Zatem $\|\Lambda\| \leqslant \|\lambda\|_q$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\Lambda \in (\ell^p)^*$. Pokażemy, że $\lambda \in \ell^q$ oraz $\|\lambda\|_q \leqslant \|\Lambda\|$. W tym celu rozważmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)}|\lambda_1|^{q-1}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)}|\lambda_2|^{q-1}, \ldots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)}|\lambda_N|^{q-1}, 0, 0, \ldots) \in \ell^p.$$

Mamy

$$\Lambda(f_N) = \Lambda\left( \sum_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} \, |\lambda_n|^{q-1} e_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} \, |\lambda_n|^{q-1} \Lambda(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^q. \tag{4.1}$$

Dalej obliczamy

$$\|f_N\|_p^p = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^q. \tag{4.2}$$

Z ograniczoności funkcjonału $\Lambda$ mamy

$$|\Lambda(f_N)| \leqslant \|\Lambda\|\, \|f_N\|_p.$$

Na podstawie (4.1) i (4.2) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^q \leqslant \|\Lambda\| \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^q\right)^{1/p}.$$

Po przekształceniu mamy

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^q\right)^{1/q} \leqslant \|\Lambda\|.$$

Ostatecznie $\|\lambda\|_q \leqslant \|\Lambda\|$.

# 5 Twierdzenia Hahna-Banacha

## 5.1 Przedłużanie funkcjonałów liniowych

Załóżmy, że $Y$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $X$. Na podprzestrzeni $Y$ mamy określony funkcjonał liniowy $\lambda$. Naszym celem jest przedłużenie go do funkcjonału liniowego $\Lambda$ określonego na przestrzeni $X$. Będziemy chcieli zachować pewne własności funkcjonału $\lambda$.

**Definicja 5.1.** *Funkcję $p : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą**, jeśli*

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha p(x) + \beta p(y) \qquad \text{dla } x, y \in X,\ \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

**Przykład.** Jeśli $X$ jest unormowaną przestrzenią liniową, to $p(x) = \|x\|$ jest funkcją wypukłą.

**Twierdzenie 5.2** (Hahn-Banach)**.** *Niech $X$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz $p(x)$ będzie funkcją wypukłą na $X$. Załóżmy, że $\lambda$ jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej $Y \subset X$, spełniającym*

$$\lambda(y) \leqslant p(y), \qquad y \in Y.$$

O KURWA CO SIE DZIEJE



*Wtedy istnieje funkcjonał liniowy $\Lambda$ określony na $X$ i spełniający*

$$\begin{aligned}\Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y,\\ \Lambda(x) &\leqslant p(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

*Dowód.* Załóżmy, że $Y \subsetneq X$. Wybierzmy $x_0 \in X \setminus Y$. Wtedy $x_0 \neq 0$. Określmy przestrzeń

$$X_0 = \mathrm{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 + y \,:\, y \in Y,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Każdy element z $X_0$ ma jednoznaczny zapis w postaci $\alpha x_0 + y$. Rzeczywiście, jeśli $\alpha x_0 + y = \alpha' x_0 + y'$, to

$$(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y \in Y.$$

Ponieważ $x_0 \notin Y$, to $\alpha = \alpha'$ i wtedy $y = y'$.

Niech $\widetilde{\lambda}$ oznacza rozszerzenie funkcjonału $\lambda$ na $X_0$. Funkcjonał $\widetilde{\lambda}$ jest wyznaczony przez liczbę $\widetilde{\lambda}(x_0)$, bo

$$\widetilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) = \alpha\widetilde{\lambda}(x_0) + \widetilde{\lambda}(y) = \alpha\widetilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y).$$

Chcemy dobrać wartość $\widetilde{\lambda}(x_0)$ tak, aby spełniony był warunek

$$\widetilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) \leqslant p(\alpha x_0 + y), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ y \in Y.$$

Czyli chcemy, aby

$$\alpha\widetilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y) \leqslant p(\alpha x_0 + y).$$

Dla $\alpha = 0$ warunek jest spełniony z założenia. Rozważmy $\alpha \neq 0$. Dla $\alpha > 0$ musi zachodzić

$$\widetilde{\lambda}(x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha}[p(\alpha x_0 + y) - \lambda(y)].$$

Z kolei dla $\alpha = -\beta,\ \beta > 0$ musi być spełniony warunek

$$\widetilde{\lambda}(x_0) \geqslant \frac{1}{\beta}[\lambda(y) - p(y - \beta x_0)].$$

Obie nierówności muszą być spełnione dla wszystkich $y \in Y$ oraz wszystkich dodatnich liczb $\alpha$ i $\beta$ zatem liczba $\widetilde{\lambda}(x_0)$ musi spełniać warunek

$$\sup_{\beta>0}\sup_{y\in Y}\frac{1}{\beta}[\lambda(y)-p(y-\beta x_0)] \leqslant \widetilde{\lambda}(x_0) \leqslant \inf_{\alpha>0}\inf_{y'\in Y}\frac{1}{\alpha}[p(\alpha x_0+y')-\lambda(y')]. \quad (5.1)$$

Liczba $\widetilde{\lambda}(x_0)$ da się znaleźć tylko wtedy, gdy liczba po lewej stronie (5.1) jest nie większa niż liczba po prawej stronie. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$ oraz dowolnych $y, y' \in Y$ mamy

$$\frac{1}{\beta}[\lambda(y) - p(y - \beta x_0)] \leqslant \frac{1}{\alpha}[p(\alpha x_0 + y') - \lambda(y')].$$

Mnożąc obie strony przez $\alpha\beta$, odpowiednio przekształcając, i wreszcie dzieląc obie strony przez $\alpha + \beta$ otrzymamy równoważną postać pożądanej nierówności:

$$\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y'\right) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta}p(y - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p(\alpha x_0 + y'). \tag{5.2}$$

Niech $y_1 = y - \beta x_0$ oraz $y_2 = \alpha x_0 + y'$. Wtedy

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y'.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y'\right) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y_2\right) \\
&\leqslant p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y_2\right) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta}p(y_1) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p(y_2) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}p(y - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p(\alpha x_0 + y'),
\end{aligned}$$

co kończy dowód pożądanej nierówności (5.2).

**Uwaga 5.3.** Jeśli skrajne liczby w nierówności (5.1) są równe, to rozszerzenie $\widetilde{\lambda}$ jest jednoznaczne. W przeciwnym wypadku rozszerzenie nie jest jednoznaczne.

Niech $\mathcal{E}$ oznacza rodzinę wszystkich rozszerzeń $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{X})$ funkcjonału $(\lambda, Y)$ spełniających warunek $\widetilde{\lambda}(x) \leqslant p(x), \quad x \in \widetilde{X}$, gdzie $\widetilde{X}$ jest podprzestrzenią $X$ zawierającą $Y$. Rodzina takich rozszerzeń jest częściowo uporządkowana:

$$(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{X_1}) \prec (\widetilde{\lambda}_2, \widetilde{X_2})$$

jeśli $\widetilde{X_1} \subset \widetilde{X_2}$ oraz $\widetilde{\lambda}_2(x) = \widetilde{\lambda}_1(x)$ dla $x \in \widetilde{X}_1$. Pokażemy, że każdy łańcuch w $\mathcal{E}$ (czyli rodzina liniowo uporządkowana) jest ograniczony. Niech $(\widetilde{\lambda}_i, \widetilde{X}_i)_{i\in I}$

będzie łańcuchem. Określmy $\widetilde{X} = \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$. Wtedy $\widetilde{X}$ jest przestrzenią liniową. Określamy funkcjonał $\widetilde{\lambda}$ na $\widetilde{X}$ następująco:

$$\widetilde{\lambda}(x) = \widetilde{\lambda}_i(x), \qquad \text{jeśli } x \in \widetilde{X}_i.$$

Definicja jest poprawna, bo jeśli $x \in \widetilde{X}_i \cap \widetilde{X}_j$, to $\widetilde{X}_i \subset \widetilde{X}_j$ lub $\widetilde{X}_j \subset \widetilde{X}_i$. W każdym przypadku $\widetilde{\lambda}_i(x) = \widetilde{\lambda}_j(x)$. Nietrudno sprawdzić, że $\widetilde{\lambda}$ jest funkcjonałem liniowym na $\widetilde{X}$. Ponadto

$$\widetilde{\lambda}(x) = \widetilde{\lambda}_i(x) \leqslant p(x), \qquad \text{dla } x \in \widetilde{X}_i.$$

Z konstrukcji rozszerzenie $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{X})$ jest większe niż $(\widetilde{\lambda}_i, \widetilde{X}_i)$ dla wszystkich $i \in I$. Zatem z lematu Kuratowskiego-Zorna rodzina $\mathcal{E}$ zawiera element maksymalny $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{X})$. Jeśli $\widetilde{X} \subsetneq X$, to z pierwszej części dowodu można rozszerzyć $\widetilde{\lambda}$ o jeden wymiar, co przeczyłoby maksymalności rozszerzenia $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{X})$. Zatem $\widetilde{X} = X$. □

**Definicja 5.4.** *Mówimy, że funkcja $p : X \to \mathbb{R}$ jest* ***absolutnie wypukła*** *jeśli*

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$$

*dla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| = 1$, $x, y \in X$.*

**Uwaga 5.5.** *Warunek dotyczy przestrzeni liniowych nad $\mathbb{C}$ i jest mocniejszy od wypukłości. Norma $p(x) = \|x\|$ jest absolutnie wypukła.*

**Twierdzenie 5.6** (Hahn-Banach)**.** *Niech $\lambda$ będzie funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni $Y$ zespolonej przestrzeni liniowej $X$. Załóżmy, że $\lambda$ spełnia*

$$|\lambda(y)| \leqslant p(y), \quad y \in Y$$

*dla pewnej absolutnie wypukłej funkcji $p : X \to \mathbb{R}_+$. Wtedy istnieje funkcjonał liniowy $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ spełniający*

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leqslant p(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

*Dowód.* Niech $\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y)$. Wtedy $\ell(y)$ jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym na $Y$. Ponadto

$$\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y) \leqslant |\lambda(y)| \leqslant p(y), \quad y \in Y.$$

Zatem z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonał rzeczywisty $\mathcal{L}$ określony na $X$ i spełniający

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y) &= \ell(y), \quad y \in Y,\\ \mathcal{L}(x) &\leqslant p(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\ell(iy) = \operatorname{Re}\lambda(iy) = \operatorname{Re}[i\lambda(y)] = -\operatorname{Im}\lambda(y).$$

Zatem

$$\lambda(y) = \operatorname{Re}\lambda(y) + i\operatorname{Im}\lambda(y) = \ell(y) - i\ell(iy). \tag{5.3}$$

Określmy

$$\Lambda(x) = \mathcal{L}(x) - i\mathcal{L}(ix), \quad x \in X. \tag{5.4}$$

Wtedy $\Lambda$ jest funkcjonałem liniowym nad $\mathbb{R}$ określonym na $X$, bo $\mathcal{L}$ jest takim funkcjonałem. Dalej

$$\Lambda(ix) = \mathcal{L}(ix) - i\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(ix) + i\mathcal{L}(x) = i[\mathcal{L}(x) - i\mathcal{L}(ix)] = i\Lambda(x).$$

Zatem $\Lambda$ jest funkcjonałem liniowym nad $\mathbb{C}$. Ze wzorów (5.3) i (5.4) i z faktu, że $\mathcal{L}$ jest rozszerzeniem $\ell$ wynika, że

$$\Lambda(y) = \lambda(y), \quad y \in Y.$$

Zapiszmy

$$\Lambda(x) = |\Lambda(x)|e^{i\theta}.$$

Wtedy

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathcal{L}(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Ostatnia równość wynika z absolutnej wypukłości funkcji $p$. Wystarczy przyjąć $\beta = 0$. $\square$

**Wniosek 5.7.** *Załóżmy, że $Y$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $X$ oraz $\lambda$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na $Y$. Wtedy istnieje ograniczony funkcjonał liniowy $\Lambda$ określony na $X$ i spełniający*

$$\begin{aligned}\Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y,\\ \|\Lambda\|_{X^*} &= \|\lambda\|_{Y^*}.\end{aligned}$$

*Dowód.* Określmy $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$. Wtedy $p(x)$ jest funkcją absolutnie wypukłą na $X$. Ponadto

$$|\lambda(y)| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}\|y\| = p(y), \quad y \in Y.$$

Z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonał liniowy $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|. \end{aligned}$$

Zatem $\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}$. Ale $\|\Lambda\|_{X^*} \geqslant \|\lambda\|_{Y^*}$, bo $\Lambda$ jest rozszerzeniem funkcjonału $\lambda$. □

**Uwaga 5.8.** Jeśli $M$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\varphi$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na $M$, to $\varphi$ ma postać

$$\varphi(y) = \langle y, v\rangle, \quad y \in M,$$

dla pewnego wektora $v \in M$. Wtedy rozszerzenie $\Phi$ na $X$ ma postać

$$\Phi(x) = \langle x, v\rangle.$$

W tym wypadku jest to jedyne rozszerzenie nie podwyższające normy funkcjonału.

**Wniosek 5.9.** *Niech $x_0$ będzie niezerowym elementem przestrzeni unormowanej $X$. Wtedy istnieje funkcjonał $\Lambda \in X^*$ taki, że*

$$\Lambda(x_0) = \|x_0\|, \qquad \|\Lambda\|_{X^*} = 1.$$

*Dowód.* Rozważmy prostą, czyli podprzestrzeń jednowymiarową, $Y = \mathbb{C}\, x_0$. Określmy funkcjonał $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\lambda(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|.$$

Zatem $|\lambda(\alpha x_0)| = \|\alpha\, x_0\|$. To oznacza, że $\|\lambda\|_{Y^*} = 1$. Z poprzedniego wniosku istnieje funkcjonał $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ spełniający $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$ oraz $\Lambda(x_0) = \lambda(x_0) = \|x_0\|$. □

**Wniosek 5.10.** *Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy dla $x \in X$ mamy*

$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| \,:\, \varphi \in X^*, \ \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\}.$$

**Uwaga 5.11.** Wniosek jest uogólnieniem własności przestrzeni z iloczynem skalarnym:

$$\|x\| = \max\{|\langle x, y\rangle| \,:\, \|y\| \leqslant 1\}.$$

*Dowód.* Dla $\|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1$ mamy

$$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*}\|x\| \leqslant \|x\|.$$

Stąd

$$\sup\{|\varphi(x)| \,:\, \varphi \in X^*,\ \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\} \ \leqslant\ \|x\|.$$

Dla $x \in X$ istnieje funkcjonał $\varphi_0$ taki, że $\|\varphi_0\|_{X^*} = 1$ oraz $\varphi_0(x) = \|x\|$. Zatem

$$\sup\{|\varphi(x)| \,:\, \varphi \in X^*,\ \|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1\} \ \geqslant\ \varphi_0(x) = \|x\|.$$

□

**Wniosek 5.12.** *Niech $Y$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $X$ oraz $x_0 \in X \setminus Y$. Istnieje funkcjonał $\Lambda \in X^*$ spełniający*

$$\Lambda|_Y = 0, \qquad \Lambda(x_0) = d,$$

*gdzie $d = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| \,:\, y \in Y\}$, oraz $\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1$.*

**Uwaga 5.13.** Dla $Y = \{0\}$ tezę otrzymujemy z Wniosku 5.9.

*Dowód.* Niech $X_0 = \mathrm{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 - y \,:\, \alpha \in \mathbb{C},\ y \in Y\}$. Określmy funkcjonał $\lambda : X_0 \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\lambda(\alpha x_0 - y) = \alpha d.$$

Sprawdzamy ograniczoność funkcjonału $\lambda$.

$$\sup_{\alpha\neq 0,\, y\in Y} \frac{|\lambda(\alpha x_0 - y)|}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha\neq 0,\, y\in Y} \frac{|\alpha|\, d}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha\neq 0,\, y\in Y} \frac{d}{\|x_0 - \alpha^{-1} y\|} \leqslant 1.$$

Zatem $\|\lambda\|_{X_0^*} \leqslant 1$. Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $\Lambda \in X^*$ taki, że $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{X_0^*} \leqslant 1$ oraz

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y) = 0, \quad y \in Y, \\ \Lambda(x_0) &= \lambda(x_0) = d. \end{aligned}$$

□

**Uwaga 5.14.** Jeśli $x_0$ leży poza domknięciem podprzestrzeni $Y$, tzn. $d > 0$, to $\|\Lambda\|_{X^*} = 1$. Istotnie

$$\|\lambda\|_{X_0^*} = \sup_{\alpha\neq 0,\, y\in Y} \frac{d}{\|x_0 - \alpha^{-1} y\|} = \frac{d}{\inf\{\|x_0 - y\| \,:\, y \in Y\}} = 1.$$

## 5.2 Granica Banacha

Rozważmy podprzestrzeń $c \subset \ell^\infty$ złożoną z ciągów zbieżnych. W podprzestrzeni $c$ określamy funkcjonał

$$\lambda(x) = \lim_n x_n, \qquad x = \{x_n\} \in c.$$

Ten funkcjonał jest niezmienniczy na przesunięcia, tzn.

$$\lambda(x) = \lambda(s(x)), \quad \text{gdzie } s(x)_n = x_{n+1}.$$

Mamy

$$|\lambda(x)| \leqslant \sup_n |x_n| = \|x\|_\infty.$$

Zatem $\|\lambda\|_{c^*} = 1$. Chcemy znaleźć rozszerzenie $\Lambda$ funkcjonału $\lambda$ na $\ell^\infty$ tak, aby funkcjonał $\Lambda$ był też niezmienniczy na przesunięcia. Niech $Y$ oznacza podprzestrzeń ciągów ograniczonych $y$ takich, że granica

$$\lim_n \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \tag{5.5}$$

istnieje. Wiemy, że $c \subset Y$ oraz dla $y \in c$ wielkość w (5.5) jest równa $\lim_n y_n$. W przestrzeni $Y$ określamy funkcjonał $\lambda$ wzorem

$$\lambda(y) = \lim_n \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}, \quad y \in Y.$$

Mamy

$$|\lambda(y)| \leqslant \sup_n \frac{|y_1 + y_2 + \ldots + y_n|}{n} \leqslant \sup_n \frac{|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|}{n} \leqslant \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty.$$

Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $\Lambda : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ taki, że $\|\Lambda\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$ oraz $\Lambda(x) = \lim_n x_n$ dla $x \in c$, bo $c \subset Y$ oraz $\lambda(x) = \lim_n x_n$ jeśli $x \in c$. Pozostaje wykazać, że $\Lambda(x) = \Lambda(s(x))$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego ciągu $x \in \ell^\infty$ ciąg $y = x - s(x)$ leży w $Y$ oraz $\lambda(x - s(x)) = 0$. Rzeczywiście

$$\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) \underset{n}{\to} 0.$$

Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda(s(x)) + \Lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)) + \lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)).$$

## 5.3 Przestrzeń sprzężona do $C[a,b]$

**Twierdzenie 5.15** (F. Riesz)**.** *Każdy ograniczony funkcjonał liniowy $\varphi$ na $C[a,b]$ (lub $C_{\mathbb{R}}[a,b]$) ma postać*

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dw(x)$$

*dla pewnej funkcji $w(x)$ o wahaniu ograniczonym na $[a,b]$. Ponadto*

Czyli w(x) nie oscyluje bez ograniczenia. Tam pare razy sie gibnie i wraca do bycia grzeczna

$$\|\varphi\|_{C^*} = \operatorname{Var}_{[a,b]}(w).$$

*Dowód.* Rozważmy funkcjonał $\varphi \in C[a,b]^*$. Symbolem $B[a,b]$ oznaczamy przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji określonych na przedziale $[a,b]$ z normą $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Wtedy $C[a,b] \subset B[a,b]$. Istnieje rozszerzenie $\Phi$ funkcjonału $\phi$ na przestrzeń $B[a,b]$ takie, że $\|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_{C^*}$. Określmy funkcję

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x = a, \\ \Phi(\mathbb{1}_{[a,x]}) & a < x \leqslant b. \end{cases}$$

Zbadamy wahanie funkcji $w(x)$. W tym celu dzielimy przedział punktami $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{n} |w(x_j) - w(x_{j-1})| = |\Phi(\mathbb{1}_{[x_0,x_1]})| + \sum_{j=2}^{n} |\Phi(\mathbb{1}_{(x_{j-1},x_j]})|.$$

Oznaczmy $g_1 = \mathbb{1}_{[x_0,x_1]}$, $g_j = \mathbb{1}_{(x_{j-1},x_j]}$ dla $j \geqslant 2$, oraz niech $a_j = \overline{\operatorname{sgn}\Phi(g_j)}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |w(x_j) - w(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} |\Phi(g_j)| = \sum_{j=1}^{n} a_j\Phi(g_j) \\ &= \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j g_j\right) \leqslant \|\Phi\|_{B^*} \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j g_j\right\|_\infty \leqslant \|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_{C^*}\end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{Var}_{[a,b]}(w) \leqslant \|\varphi\|_{C^*}.$$

Podzielmy przedział $[a,b]$ punktami $x_k = a + (b-a)k/n$. Dla funkcji $f \in C[a,b]$ określamy ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\chi_{I_j}, \qquad I_1 = [x_0, x_1],\ I_j = (x_{j-1}, x_j],\ j \geqslant 2.$$

Wiadomo, że $f_n \underset{n}{\rightrightarrows} f$, tzn. $f_n \underset{n}{\to} f$ w normie przestrzeni $B[a,b]$. W związku z tym $\Phi(f_n) \underset{n}{\to} \Phi(f) = \varphi(f)$. Ale

$$\Phi(f_n) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Phi(\chi_{I_j}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)[w(x_j) - w(x_{j-1})] \underset{n}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dw(x).$$

Zatem

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dw(x).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}|\Phi(f_n)| = \left|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)[w(x_j) - w(x_{j-1}]\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|\,|w(x_j) - w(x_{j-1}| \\ &\leqslant \|f\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |w(x_j) - w(x_{j-1}| \leqslant \mathrm{Var}_{[a,b]}(w)\,\|f\|_\infty\end{aligned}$$

Zatem

$$|\varphi(f)| = |\Phi(f)| = \lim_n |\Phi(f_n)| \leqslant \mathrm{Var}_{[a,b]}(w)\,\|f\|_\infty.$$

Stąd $\|\varphi\|_{C^*} \leqslant \mathrm{Var}_{[a,b]}(w)$, czyli

$$\|\varphi\|_{C^*} = \mathrm{Var}_{[a,b]}(w).$$

□

**Uwaga 5.16.** Różne funkcje $w$ mogą wyznaczyć ten sam funkcjonał na $C[a,b]$, nawet jak przyjmiemy $w(a) = 0$. Na przykład dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ niech

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \alpha, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x)\,dw_\alpha(x) = f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Każda funkcja o wahaniu ograniczonym posiada granice jednostronne w każdym punkcie, bo jest kombinacją liniową czterech funkcji rosnących. Dla funkcji $w$ o wahaniu ograniczonym określamy

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} w(a), & x = a \\ w(b), & x = b \\ \lim\limits_{t \to x^-} w(t), & a < x < b. \end{cases}$$

Wtedy $\widetilde{w}$ jest lewostronnie ciągła wewnątrz przedziału oraz nadal ma wahanie ograniczone (bo jeśli $w$ jest rosnąca, to $\widetilde{w}$ też jest rosnąca). Ponadto

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\widetilde{w}(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dw(x).$$

Co więcej jeśli $w_1$ i $w_2$ są różnymi funkcjami o wahaniu ograniczonym, lewostronnie ciągłymi na $(a, b)$ oraz $w_1(a) = w_2(a)$, to funkcjonały wyznaczone przez te funkcje są różne, tzn. dla pewnej funkcji $f \in C[a, b]$ mamy

$$\int\limits_a^b f(x)\, dw_1(x) \neq \int\limits_a^b f(x)\, dw_2(x).$$

## 5.4 Wersja geometryczna

**Definicja 5.17.** *Podzbiór $V \subset X$ nazywamy **wypukłym** jeśli dla $x, y \in V$ oraz $0 \leqslant t \leqslant 1$ mamy $tx + (1-t)y \in V$. To oznacza, że zbiór $V$ zawiera elementy $x$ i $y$ wraz z całym odcinkiem łączącym $x$ z $y$*.

**Przykład.** $V = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant r\}$.

**Przykład.** Niech $\varphi$ będzie rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni unormowanej $X$. Wtedy zbiór

$$V_\alpha = \{x \in X \,:\, \varphi(x) > \alpha\}$$

jest wypukły dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Załóżmy, że zbiór wypukły $V \subset X$ jest otwarty i zawiera punkt 0. Zatem dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy $B_\varepsilon(0) \subset V$. To oznacza, że dla dowolnego elementu $x \in X$ istnieje liczba $t > 0$ taka, że $t^{-1}x \in V$. Rzeczywiście wystarczy, aby $\|t^{-1}x\| < \varepsilon$, czyli $t > \varepsilon^{-1}\|x\|$.

**Definicja 5.18.** *Dla otwartego, wypukłego zbioru $V$, zawierającego $0$, określamy* ***funkcjonał Minkowskiego*** *wzorem*

$$p_V(x) = \inf\{t > 0 \,:\, t^{-1}x \in V\}.$$

**Przykład.** Niech $V = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant r\}$. Dla dowolnego elementu $x \in X$ mamy $t^{-1}x \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t > r^{-1}\|x\|$. Zatem $p_V(x) = r^{-1}\|x\|$.

**Przykład.** Na płaszczyźnie $X = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową rozważmy elipsę

$$V = \{(x, y) \,:\, x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}.$$

Elementy $u = (2, 0)$ i $w = (0, 2)$ mają tę samą normę, ale

$$p_V(u) = 2 \neq 4 = p_V(w).$$

**Lemat 5.19.**

(a) $p_V(0) = 0$.

(b) $p_V(sx) = s\, p_V(x)$ *dla* $s > 0$.

(c) $p_V(x + y) \leqslant p_V(x) + p_V(y)$.

(d) $\{x \in X \,:\, p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in X \,:\, p_V(x) \leqslant 1\}$.

(e) *Jeśli* $W \subset V$, *to* $p_W(x) \geqslant p_V(x)$.

*Dowód.*

(a) Mamy $t^{-1}0 = 0 \in V$ dla $t > 0$. Zatem $p_V(0) = 0$.

(b) Warunek $t^{-1}x \in V$ jest równoważny z warunkiem $(st)^{-1}(sx) \in V$ dla $s > 0$. Stąd $p_V(sx) = sp_V(x)$.

(c) Załóżmy, że $t^{-1}x \in V$ oraz $s^{-1}y \in V$. Wtedy z wypukłości zbioru $V$ mamy

$$(s + t)^{-1}(x + y) = \frac{t}{s + t}(t^{-1}x) + \frac{s}{s + t}(s^{-1}y) \in V.$$

Zatem $p_V(x + y) \leqslant s + t$. Biorąc kres dolny względem $s$ i $t$ spełniających $t^{-1}x \in V$ oraz $s^{-1}y \in V$ otrzymamy

$$p_V(x + y) \leqslant p_V(x) + p_V(y).$$

(d) Niech $p_V(x) < 1$. Zatem istnieje liczba $0 < t < 1$ spełniająca $t^{-1}x \in V$. Wtedy z wypukłości $V$ i z warunku $0 \in V$ wynika, że

$$x = t(t^{-1}x) + (1-t)0 \in V.$$

To dowodzi pierwszego zawierania w (d). Załóżmy, że $x \in V$. Wtedy $1^{-1}x \in V$, czyli $p_V(x) \leqslant 1$. Stąd otrzymujemy drugą część (d). □

**Uwaga 5.20.** Z lematu wynika, że funkcja $p_V(x)$ jest wypukła.

**Definicja 5.21.** *Mówimy, że dwa zbiory $A$ i $B$ w przestrzeni unormowanej $X$ można **rozdzielić hiperpłaszczyzną**, jeśli istnieją niezerowy ograniczony funkcjonał liniowy $\varphi : X \to \mathbb{R}$ oraz liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leqslant \alpha, \quad \text{dla } x \in A, \\ \varphi(y) &\geqslant \alpha, \quad \text{dla } y \in B. \end{aligned}$$

*Jeśli obie nierówności są ostre, to mówimy, że zbiory $A$ i $B$ są **ściśle rozdzielone**.*

**Uwaga 5.22.** Niech $X$ będzie przestrzenią wymiaru $n$ nad $\mathbb{R}$. Dla niezerowego funkcjonału liniowego $\varphi$ na $X$ zbiór

$$X_0 = \{x \in X \, : \, \varphi(x) = 0\}$$

jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią w $X$. Jeśli $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jest bazą w $X$ oraz $a_j = \varphi(e_j)$, to $\varphi$ ma postać

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

Wtedy

$$X_0 = \{(x_j)_{j=1}^n \, : \, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

jest hiperprzestrzenią natomiast hiperpłaszczyzna $X_\alpha = \{x \in X \, : \, \varphi(x) = \alpha\}$ ma postać $X_\alpha = X_0 + x_\alpha$, gdzie $x_\alpha$ jest ustalonym wektorem spełniającym $\varphi(x_\alpha) = \alpha$.

**Twierdzenie 5.23.** *Niech $A$ i $B$ będą wypukłymi i rozłącznymi podzbiorami unormowanej przestrzeni liniowej $X$. Wtedy*

(a) *Jeśli $A$ jest otwarty, to zbiory $A$ i $B$ można rozdzielić hiperpłaszczyzną.*

(b) *Jeśli $A$ i $B$ są otwarte, to można je rozdzielić ściśle.*

(c) *Jeśli $A$ jest zwarty a $B$ jest domknięty, to można je rozdzielić ściśle.*

*Dowód.*

(a) Niech $A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}$, tzn. $A - B$ jest różnicą kompleksową zbiorów $A$ i $B$. Wtedy $0 \notin A - B$, bo $A$ i $B$ są rozłączne. Wybierzmy $-x_0 \in A - B$ i określmy

$$C = x_0 + (A - B).$$

Z konstrukcji mamy $0 \in C$ oraz $x_0 \notin C$. Zbiór $C$ jest wypukły jako przesunięcie różnicy kompleksowej zbiorów wypukłych. Zbiór $C$ jest otwarty, bo jeśli $x \in x_0 + (A - B)$, to $x = x_0 + a - b$ dla pewnych $a \in A$ oraz $b \in B$. Z otwartości zbioru $A$ mamy $a \in B_\varepsilon(a) \subset A$ dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$. Zatem

$$B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x_0 + a - b) = x_0 + B_\varepsilon(a) - b \subset x_0 + A - B = C.$$

**Uwaga 5.24.** Dowód otwartości można przeprowadzić nie korzystając z normy. Zapisujemy

$$C = x_0 + A - B = \bigcup_{b \in B} [(x_0 - b) + A]$$

i zauważamy, że każdy składnik sumy mnogościowej jest zbiorem otwartym.

Niech $X_0 = \mathbb{R}x_0$, tzn. $X_0$ jest prostą przechodzącą przez 0 oraz $x_0$. Określmy funkcjonał $\ell$ na $X_0$ wzorem

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

W szczególności z Lematu 5.19(d) wynika $\ell(x_0) = 1 \leqslant p_C(x_0)$, bo $x_0 \notin C$. Zatem dla $\lambda \geqslant 0$ mamy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \leqslant \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0).$$

Z kolei dla $\lambda < 0$ otrzymujemy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda < p_C(\lambda x_0).$$

Reasumując udowodniliśmy, że

$$\ell(x) \leqslant p_C(x), \quad \text{dla } x \in X_0.$$

Funkcja $p_C$ spełnia założenia twierdzenia Hahna-Banacha. Zatem istnieje funkcjonał $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ taki, że

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_0) &= \ell(x_0) = 1 \\ \mathcal{L}(x) &\leqslant p_C(x) \quad \text{dla } x \in X. \end{aligned}$$

Pokażemy, że $\mathcal{L}$ rozdziela $A$ i $B$. Niech $x \in C$. Wtedy z Lematu 5.19(d) mamy

$$\mathcal{L}(x) \leqslant p_C(x) \leqslant 1.$$

Czyli $\mathcal{L}(x_0 + a - b) \leqslant 1$ dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$. Zatem $\mathcal{L}(a) \leqslant \mathcal{L}(b)$ dla $a \in A$ i $b \in B$. Biorąc kres górny względem $a$ a potem kres dolny względem $b$ otrzymamy

$$\sup_{a\in A} \mathcal{L}(a) \leqslant \inf_{b\in B} \mathcal{L}(b).$$

**Uwaga 5.25.** Jeśli tu mamy ostrą nierówność, to $A$ i $B$ są ściśle rozdzielone.

Istnieje zatem liczba $\alpha$ spełniająca

$$\sup_{a\in A} \mathcal{L}(a) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{b\in B} \mathcal{L}(b).$$

Pozostaje uzasadnić ciągłość funkcjonału $\mathcal{L}$. Ponieważ zbiór $C$ jest otwarty oraz $0 \in C$, to $B_\varepsilon(0) \subset C$ dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$. Wtedy z przykładu po Definicji 5.18 mamy

$$\mathcal{L}(x) \leqslant p_C(x) \leqslant p_{B_\varepsilon(0)}(x) = \varepsilon^{-1}\|x\|.$$

Czyli $\mathcal{L}(x) \leqslant \varepsilon^{-1}\|x\|$. Zatem

$$-\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x) \leqslant \varepsilon^{-1}\|-x\| = \varepsilon^{-1}\|x\|.$$

Ostatecznie $|\mathcal{L}(x)| \leqslant \varepsilon^{-1}\|x\|$.

(b) Załóżmy, że $A$ i $B$ są otwarte. Z pierwszej części dowodu istnieje niezerowy ograniczony funkcjonał $\mathcal{L}$ oraz liczba $\alpha$ taka, że

$$\mathcal{L}(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathcal{L}(b), \quad a \in A,\ b \in B.$$

Zbiory $\mathcal{L}(A)$ i $\mathcal{L}(B)$ są wypukłe i otwarte w $\mathbb{R}$ (zadanie). Zbiory te są zatem otwartymi przedziałami w $\mathbb{R}$, przy czym $\mathcal{L}(A)$ leży na lewo od $\mathcal{L}(B)$. Zatem

$$\mathcal{L}(a) < \alpha < \mathcal{L}(b), \quad a \in A,\ b \in B.$$

(c) Zakładamy, że $A$ jest zwarty a $B$ domknięty. Dla dowolnego elementu $a \in A$ istnieje kula otwarta $K_a$ o środku w 0 taka, że kula $a + 2K_a$ jest rozłączna z $B$. Zbiory $a + K_a$ dla $a \in A$ pokrywają zbiór $A$. Ze zwartości mamy

$$A \subset (a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \ldots \cup (a_n + K_{a_n}).$$

Określmy

$$U = K_{a_1} \cap K_{a_2} \cap \ldots \cap K_{a_n}. \tag{5.6}$$

Wtedy $U$ jest otwartą kulą o środku w zerze. Zauważmy, że

$$(A + U) \cap B = \emptyset. \tag{5.7}$$

Istotnie z (5.4) mamy

$$\begin{aligned} A + U &\subset [(a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \ldots \cup (a_n + K_{a_n})] \ + \ U \\ &= (a_1 + K_{a_1} + U) \cup (a_2 + K_{a_2} + U) \cup \ldots \cup (a_n + K_{a_n} + U) \\ &\subset (a_1 + 2K_{a_1}) \cup (a_2 + 2K_{a_2}) \cup \ldots \cup (a_n + 2K_{a_n}). \end{aligned}$$

W ostatniej sumie każdy składnik sumy mnogościowej jest rozłączny z $B$. To dowodzi (5.7). Zatem

$$(A + \frac{1}{2}U) \cap (B + \frac{1}{2}U) = \emptyset.$$

Ale zbiory $A + \frac{1}{2}U$ i $B + \frac{1}{2}U$ są otwarte i wypukłe, więc z części (b) można je ściśle rozdzielić. Tym bardziej można ściśle rozdzielić $A$ i $B$. □

## 5.5 Wersja niezmiennicza

**Definicja 5.26.** *Niech $X$ będzie przestrzenią liniową. Rodzinę $\mathcal{G}$ operatorów liniowych określonych na $X$ nazywamy* ***półgrupą przemienną*** *jeśli $\mathcal{G}$ zawiera odwzorowanie identycznościowe $I$ oraz z warunku $A, B \in \mathcal{G}$ wynika $AB = BA \in \mathcal{G}$.*

**Twierdzenie 5.27.** *Niech $p(x)$ będzie funkcją wypukłą określoną na rzeczywistej przestrzeni liniowej $X$, przy czym $p(0) = 0$. Załóżmy, że $\lambda$ jest funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej $Y \subset X$, spełniającym warunek $\lambda(y) \leqslant p(y)$ dla $y \in Y$. Niech $\mathcal{G}$ będzie półgrupą przemienną operatorów liniowych na $X$ spełniającą warunki:*

(i) *Dla* $A \in \mathcal{G}$ *mamy* $A(Y) \subset Y$, *tzn. podprzestrzeń* $Y$ *jest niezmiennicza pod działaniem operatorów półgrupy.*

(ii) $p(Ax) \leqslant p(x)$, *dla* $x \in X$ *oraz* $A \in \mathcal{G}$.

(iii) $\lambda(Ay) = \lambda(y)$ *dla* $y \in Y$ *oraz* $A \in \mathcal{G}$, *tzn. funkcjonał* $\lambda$ *jest niezmienniczy na działanie operatorów z* $\mathcal{G}$.

*Wtedy istnieje funkcjonał* $\Lambda$ *określony na* $X$ *taki, że*

(a) $\Lambda(y) = \lambda(y)$ *dla* $y \in Y$.

(b) $\Lambda(x) \leqslant p(x)$ *dla* $x \in X$.

(c) $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ *dla* $x \in X$ *oraz* $A \in \mathcal{G}$.

*Dowód.* Wiemy, że dla $\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ mamy

$$p(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 p(x_1) + \ldots + \alpha_n p(x_n).$$

Nierówność pozostaje prawdziwa, jeśli $\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \leqslant 1$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} p(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) &= p(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + (1 - \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i)0) \\ &\leqslant \alpha_1 p(x_1) + \ldots + \alpha_n p(x_n) + (1 - \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i)p(0) \\ &= \alpha_1 p(x_1) + \ldots + \alpha_n p(x_n). \end{aligned}$$

Z niezmienniczości i liniowości funkcjonału $\lambda$ otrzymujemy

$$\lambda(y) = \lambda\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Zatem

$$\lambda(y) \leqslant p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

W rezultacie

$$\lambda(y) \leqslant \inf\left\{p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right) \,:\, n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\right\}.$$

Dla $x \in X$ określmy

$$q(x) = \inf \left\{ p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i x\right) \,:\, n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{G},\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}. \tag{5.8}$$

Wtedy

$$\lambda(y) \leqslant q(y), \quad y \in Y.$$

Zauważmy, że $q(x) \leqslant p(x)$. Istotnie, dla $n = 1$, $A_1 = I$ oraz $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy $p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i x\right) = p(x)$. Pokażemy, że funkcja $q(x)$ jest wypukła. Niech $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Wybierzmy liczby nieujemne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$ oraz operatory $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pochodzą z półgrupy $\mathcal{G}$. Wtedy rozważamy $mn$ liczb $\alpha_i\beta_j$ i tyleż operatorów $A_iB_j \in \mathcal{G}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j = 1.$$

Korzystając z wypukłości i własności (ii) funkcji $p$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
q(\alpha x + \beta y) &\leqslant p\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j A_i B_j (\alpha x + \beta y)\right) \\
&= p\left(\alpha \sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j y\right)\right) \\
&\leqslant \alpha\, p\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i x\right)\right) + \beta\, p\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j y\right)\right) \\
&\leqslant \alpha \sum_{j=1}^{n} \beta_j p\left(B_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p\left(A_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j y\right) \\
&\leqslant \alpha \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, p\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, p\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j y\right) \\
&= \alpha p\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i x\right) + \beta p\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j y\right).
\end{aligned}$$

Obliczając kres dolny względem wszystkich wyborów współczynników $\alpha_i,\ \beta_j$ oraz operatorów $A_i,\ B_j \in \mathcal{G}$ otrzymujemy

$$q(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha q(x) + \beta q(y),$$

zatem $q$ jest funkcją wypukłą na $X$. Ponadto

$$\lambda(y) \leqslant q(y), \qquad y \in Y.$$

Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ spełniający

$$\begin{aligned} &\Lambda(y) = \lambda(y) && \text{dla } y \in Y, \\ &\Lambda(x) \leqslant q(x) \leqslant p(x) && \text{dla } x \in X. \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić, że $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ dla $x \in X$ oraz $A \in \mathcal{G}$. Przyjmując $n \geqslant 2$, $\alpha_i = \frac{1}{n}$ oraz $A_i = A^{i-1}$ dla $A \in \mathcal{G}$ (patrz (5.8)) otrzymujemy

$$\begin{aligned} q(x - Ax) \leqslant p\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^{i-1}(x - Ax)\right) &= p\left(\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}A^n(-x)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}p(x) + \frac{1}{n}p(A^n(-x)) \leqslant \frac{1}{n}[p(x) + p(-x)]. \end{aligned}$$

Ponieważ $n$ jest dowolną liczbą naturalną, to $q(x - Ax) \leqslant 0$. Stąd wynika, że

$$\Lambda(x) - \Lambda(Ax) = \Lambda(x - Ax) \leqslant q(x - Ax) \leqslant 0,$$

czyli

$$\Lambda(x) \leqslant \Lambda(Ax), \quad x \in X,\ A \in \mathcal{G}.$$

Podstawiając $x := -x$ otrzymamy nierówność przeciwną, czyli $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$. □

Następny wynik jest efektownym zastosowaniem Twierdzenia 5.27.

**Twierdzenie 5.28.** *Istnieje funkcja rzeczywista $\mu$ określona dla wszystkich ograniczonych podzbiorów prostej spełniająca:*

*(i)* $\mu(A) \geqslant 0$.

*(ii)* *Jeśli* $A \cap B = \emptyset$, *to* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

*(iii)* $\mu(x + A) = \mu(A)$ *dla* $x \in \mathbb{R}$, *tzn.* $\mu$ *jest niezmiennicza na przesunięcia.*

*(iv) Jeśli $A$ jest podzbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, to $\mu(A) = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru $A$.*

*Dowód.* Niech $X$ będzie przestrzenią wszystkich ograniczonych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o nośniku ograniczonym, czyli

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \neq 0\} \subset [a, b]$$

dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$. Niech $Y$ oznacza zbiór funkcji w $X$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Określmy funkcję $p : X \to \mathbb{R}$

$$p(f) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\, dx \,:\, g \in Y,\ |f(x)| \leqslant g(x),\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wartość $p(f)$ jest zawsze skończona. Istotnie, niech $|f(x)| \leqslant m$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin [a, b]$, to przyjmując $g(x) = m\, \mathbb{1}_{[a,b]}$ otrzymamy $|f(x)| \leqslant g(x)$ oraz $p(f) \leqslant m(b - a)$.

Funkcja $p$ jest wypukła oraz $p(0) = 0$. Rzeczywiście, niech $f_1, f_2 \in X$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 0$. Wybierzmy dowolne funkcje mierzalne $g_1,\ g_2$ spełniające $|f_1(x)| \leqslant g_1(x)$ oraz $|f_2(x)| \leqslant g_2(x)$. Wtedy

$$|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| \leqslant \alpha|f_1(x)| + \beta|f_2(x)| \leqslant \alpha g_1(x) + \beta g_2(x).$$

Zatem

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} [\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)]\, dx = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}} g_1(x)\, dx + \beta \int\limits_{\mathbb{R}} g_2(x)\, dx.$$

Obliczając kres dolny względem $g_1$ i $g_2$ otrzymamy

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant \alpha p(f_1) + \beta p(f_2).$$

Dla $f \in X$ oraz $t \in \mathbb{R}$ określamy operator przesunięcia $A_t$ wzorem

$$(A_t f)(x) = f(x + t).$$

Operatory $A_t$ tworzą półgrupę przemienną, bo

$$A_t A_s = A_{t+s} = A_s A_t, \qquad A_0 = I.$$

Dla $f \in Y$ mamy $A_t f \in Y$, bo przesunięcie funkcji mierzalnej w argumencie daje w wyniku funkcję mierzalną. Ponadto $p(A_t f) \leqslant p(f)$. Rzeczywiście, jeśli

$|f(x)| \leqslant g(x)$ dla $f \in X$ i $g \in Y$, to $|(A_t f)(x)| \leqslant (A_t g)(x)$ oraz $A_t g \in Y$. Zatem

$$p(A_t f) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} (A_t g)(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x+t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

Biorąc kres dolny względem funkcji $g$ otrzymujemy

$$p(A_t f) \leqslant p(f).$$

**Uwaga 5.29.** Prawdziwa jest równość $p(A_t f) = p(f)$. Istotnie

$$p(f) = p(A_{-t}A_t f) \leqslant p(A_t f) \leqslant p(f).$$

Określmy funkcjonał $\lambda : Y \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\lambda(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Wtedy

$$p(f) = \int\limits_{r} |f(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lambda(f).$$

Ten funkcjonał jest niezmienniczy pod działaniem $A_t$, bo

$$\lambda(A_t f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lambda(f).$$

Zatem z Twierdzenia 5.27 istnieje funkcjonał $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(A_t f) &= \Lambda(f), \\ \Lambda(f) &= \lambda(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx, \quad \text{dla } f \in Y, \\ \Lambda(f) &\leqslant p(f), \qquad\qquad\qquad \text{dla } f \in X. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pokażemy, że funkcjonał $\Lambda$ jest nieujemny, tzn. jeśli $f \geqslant 0$, to $\Lambda(f) \geqslant 0$. Załóżmy, że $0 \leqslant f(x) \leqslant m$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin [a,b]$. Wtedy

$$0 \leqslant m\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) - f(x) \leqslant m\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x). \tag{5.10}$$

Na podstawie (5.9) i (5.10) mamy

$$\Lambda\left(m\,\mathbb{1}_{[a,b]} - f\right) \leqslant p\left(m\,\mathbb{1}_{[a,b]} - f\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} m\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = m(b-a).$$

Zatem

$$m(b-a) - \Lambda(f) = \lambda\left(m\, \mathbb{1}_{[a,b]}\right) - \Lambda(f) \leqslant m(b-a).$$

Ponieważ $\lambda\left(m\, \mathbb{1}_{[a,b]}\right) = m(b-a)$, to $\Lambda(f) \geqslant 0$.

Dla ograniczonego podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ określamy

$$\mu(A) = \Lambda\left(\mathbb{1}_A\right).$$

Mamy $\mu(A) \geqslant 0$, bo funkcjonał $\Lambda$ jest nieujemny. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to

$$\mu(A \cup B) = \Lambda\left(\mathbb{1}_{A\cup B}\right) = \Lambda\left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\right) = \Lambda\left(\mathbb{1}_A\right) + \Lambda\left(\mathbb{1}_B\right) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ponadto jeśli $A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to

$$\mu(A) = \Lambda\left(\mathbb{1}_A\right) = \lambda\left(\mathbb{1}_A\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)\, dx = |A|.$$

$\square$

**Uwaga 5.30.** Niech $SO(3)$ oznacza grupę obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^3$ jest niezmiennicza na działanie grupy $SO(3)$. Jednak miara ta mierzy tylko zbiory mierzalne. Rozważmy zagadnienie: czy istnieje skończenie addytywna funkcja $\mu$ określona na wszystkich ograniczonych podzbiorach w $\mathbb{R}^3$ taka, że

$$\mu(U(A)) = \mu(A), \quad U \in SO(3),\ A \subset \mathbb{R}^3.$$

Zagadnienie jest związane z tzw. paradoksem Banacha-Tarskiego. Okazuje się, że kulę jednostkową $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leqslant 1\}$ można przedstawić w postaci sumy rozłącznej pięciu podzbiorów

$$B = B_1 \mathbin{\dot\cup} B_2 \mathbin{\dot\cup} B_3 \mathbin{\dot\cup} B_4 \mathbin{\dot\cup} B_5$$

oraz istnieją dwie macierze $U_1,\ U_2$ z $SO(3)$ takie, że

$$U_1(B_1) \mathbin{\dot\cup} B_2 = B, \quad U_2(B_3) \mathbin{\dot\cup} B_4 = B.$$

W związku z tym funkcja $\mu$ o opisanych własnościach nie może istnieć.

# 6 Twierdzenie Baire'a i zastosowania

## 6.1 Twierdzenie Baire'a

**Definicja 6.1.** *Zbiór $S$ w przestrzeni metrycznej $X$ nazywamy **nigdziegęstym**, jeśli domknięcie $\overline{S}$ ma puste wnętrze. Tzn. dla dowolnej otwartej kuli $B$ w $X$ mamy $B \setminus \overline{S} \neq \emptyset$.*

**Przykłady.** Skończony podzbiór na prostej jest nigdziegęsty. Przeliczalny zbiór $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ jest nigdziegęsty. Jednakże przeliczalny podzbiór może być gęsty, np. zbiór liczb wymiernych jest gęsty w $\mathbb{R}$. Zbiór Cantora $C \subset [0,1]$ jest nigdziegęsty, chociaż jest nieprzeliczalny.

**Definicja 6.2.** *$S$ nazywamy zbiorem **I kategorii** jeśli $S$ jest przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych w $X$.*

**Przykład.** $\mathbb{Q}$ jest zbiorem I kategorii, bo $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.

**Uwaga 6.3.** Przeliczalna suma zbiorów I kategorii jest znowu zbiorem I kategorii.

**Twierdzenie 6.4** (Baire)**.** *Przestrzeń metryczna zupełna nie jest zbiorem I kategorii.*

*Dowód.* Załóżmy, że $X$ jest zbiorem I kategorii. Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

gdzie $A_n$ są zbiorami nigdziegęstymi. Ponieważ $A_1$ nie jest gęsty, to można znaleźć $x_1 \notin \overline{A_1}$. Zatem istnieje otwarta kula $B_1$ o środku w $x_1$ taka, że

$$x_1 \in \overline{B_1} \subset X \setminus \overline{A_1}.$$

Możemy założyć, że promień kuli $B_1$ nie przekracza $2^{-1}$. Zbiór $A_2$ jest nigdziegęsty, zatem można znaleźć element $x_2$ taki, że $x_2 \in B_1 \setminus \overline{A_2}$. Istnieje zatem kula o środku w $x_2$ i promieniu co najwyżej $2^{-2}$ spełniająca warunek

$$x_2 \in \overline{B_2} \subset B_1 \setminus \overline{A_2}.$$

Dalej postępujemy podobnie. Tzn. jeśli $B_{n-1}$ i $x_{n-1}$ są już wybrane, to istnieje element $x_n$ taki, że $x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$. Istnieje wtedy kula o środku w $x_n$ i promieniu co najwyżej $2^{-n}$ taka, że

$$x_n \in \overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus \overline{A_n}.$$

Otrzymamy w ten sposób ciąg $x_n$, który spełnia warunek Cauchy'ego. Istotnie jeśli $n, m > N$, to $x_n, x_m \in B_N$, bo kule tworzą ciąg zstępujący. Zatem

$$d(x_n, x_m) < \frac{2}{2^N}.$$

Z zupełności przestrzeni $X$ ciąg $x_n$ jest zbieżny. Niech $x = \lim_n x_n$. Dla $n > N$ mamy $x_n \in B_{N+1}$. Stąd

$$x = \lim_n x_n \in \overline{B_{N+1}} \subset B_N,$$

dla każdej wartości $N$. Ale $B_N \cap A_N = \emptyset$. Tzn. $x \notin A_N$ dla każdej wartości $N$. Czyli

$$x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N = X,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

**Uwaga 6.5.** Jeśli $S$ nie jest zbiorem I kategorii w $X$ oraz $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, to dla pewnej wartości $n$ zbiór $\overline{A_n}$ zawiera kulę.

**Przykład.** Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem I kategorii w $\mathbb{R}$. Istotnie, gdyby $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ był zbiorem I kategorii, to również $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ byłby zbiorem I kategorii, co przeczyłoby twierdzeniu Baire'a.

## 6.2 Twierdzenie Banacha-Steinhausa

**Twierdzenie 6.6.** *Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami unormowanymi. Niech $\mathcal{F}$ oznacza pewną rodzinę ograniczonych operatorów liniowych z $X$ w $Y$. Wtedy zbiór liczb $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony lub zbiór*

$$\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

*jest I kategorii w $X$.*

**Uwaga 6.7.** Jeśli zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony, czyli istnieje liczba $c > 0$ taka, że $\|T\| \leqslant c$ dla $T \in \mathcal{F}$, to

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X,\ T \in \mathcal{F}.$$

Zatem dla każdego ustalonego elementu $x$ liczby $\|Tx\|$ są wspólnie ograniczone, czyli

$$\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\} = X.$$

*Dowód.* Załóżmy, że

$$A = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

nie jest I kategorii. Wprowadzamy zbiory

$$A_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leqslant n\}.$$

Wtedy

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zbiory $A_n$ są domknięte, bo jeśli $x_k \in A_n$ oraz $x_k \to x$, to

$$\|Tx\| = \lim_k \|Tx_k\| \leqslant n, \quad T \in \mathcal{F}$$

Na podstawie Uwagi 6.5 dla pewnej wartości $n$, zbiór $A_n$ zawiera kulę

$$A_n \supset B = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

Niech $\|x\| \leqslant 1$. Wtedy $x_0, rx + x_0 \in B \subset A_n$. Zatem

$$\begin{aligned} r\|Tx\| = \|T(rx)\| &= \|T(rx + x_0) - Tx_0\| \\ &\leqslant \|T(rx + x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant n + n = 2n. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\|Tx\| \leqslant \frac{2n}{r} \text{ dla } \|x\| \leqslant 1,\ T \in \mathcal{F},$$

czyli

$$\|T\| \leqslant \frac{2n}{r}, \quad T \in \mathcal{F}.$$

□

**Wniosek 6.8.** *Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha. Przy oznaczeniach z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy: jeśli dla dowolnego elementu $x \in X$ zbiór liczb $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony, to również zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony. Tzn. z punktowej ograniczoności rodziny operatorów wynika jednostajna ograniczoność tej rodziny.*

*Dowód.* Z założenia

$$X = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}.$$

Z twierdzenia Baire'a $X$ nie jest zbiorem I kategorii, bo $X$ jest przestrzenią Banacha. Z poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że zbiór liczb

$$\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$$

jest ograniczony. □

Przez kontrapozycję Wniosku dostajemy

**Wniosek 6.9.** *Przy oznaczeniach z Wn. 6.8, jeśli zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ nie jest ograniczony, to dla pewnego elementu $x \in X$ zbiór $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$ nie jest ograniczony.*

**Przykład.** Udowodnimy istnienie funkcji ciągłej o okresie $2\pi$, dla której szereg Fouriera nie jest zbieżny w punkcie 0. Niech

$$X = C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi] = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Dla funkcji $f \in X$ określamy współczynniki Fouriera $c_n$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sumy częściowe szeregu Fouriera mają postać

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt,$$

gdzie funkcja $D_n(t)$, zwana jądrem Dirichleta, ma postać

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Przy dodatkowych założeniach, np. $f \in C^1_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ można udowodnić, że sumy $s_n(f)$ są jednostajnie zbieżne do funkcji $f$. Ogólnie ciąg $s_n(f)(x_0)$ nie musi być zbieżny. Rozważmy $x_0 = 0$ i funkcjonały $\varphi_n$ określone na $X$ przez

$$\varphi_n(f) = s_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dg_n(t),$$

gdzie

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{x} D_n(t)\, dt.$$

Funkcja $g_n$ ma wahanie ograniczone, bo

$$\mathrm{Var}_{[-\pi,\pi]}(g_n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Na podstawie Twierdzenia 5.15 wiemy, że norma funkcjonału $\varphi_n$ na $C[-\pi, \pi]$ jest równa $\mathrm{Var}_{[-\pi,\pi]}(g_n)$. Nietrudno pokazać, że norma $\varphi_n$ na $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ jest taka sama, czyli też jest równa $\mathrm{Var}_{[-\pi,\pi]}(g_n)$. Z kursu szeregów Fouriera wiemy, że liczby

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$$

dążą do nieskończoności. Można wykazać, że

$$L_n \approx c \log n + d.$$

To oznacza, że normy funkcjonałów $\|\varphi_n\|$ nie są wspólnie ograniczone. Zatem z Wn. 6.9 istnieje funkcja $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ taka, że ciąg $\varphi_n(f) = s_n(f)(0)$ nie jest ograniczony. W szczególności ciąg $s_n(f)(0)$ nie może być zbieżny. Co więcej z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że zbiór funkcji, dla których ciąg $s_n(f)(0)$ jest ograniczony jest zbiorem I kategorii w $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$.

**Twierdzenie 6.10.** *Załóżmy, że funkcja $B(x, y)$ jest zespoloną formą dwuliniową (lub półtoraliniową) na iloczynie $X \times Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami Banacha, tzn. $B : X \times Y \to \mathbb{C}$. Jeśli dla każdego ustalonego elementu $x \in X$ funkcjonał $y \mapsto B(x, y)$ jest ciągły na $Y$ oraz dla każdego ustalonego elementu $y \in Y$ funkcjonał $x \mapsto B(x, y)$ jest ciągły na $X$, to istnieje stała $c > 0$ spełniająca*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\|, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

*W szczególności odwzorowanie $(x, y) \mapsto B(x, y)$ jest ciągłe na $X \times Y$ ( względem normy np. $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$).*

**Uwaga 6.11.** Jeśli $B$ jest formą półtoraliniową, to rozważamy funkcjonały

$$y \mapsto \overline{B(x, y)}.$$

*Dowód.* Ustalmy $x \in X$ i rozważmy funkcjonał $\varphi_x(y) = B(x, y)$. W przypadku, gdy $B(x, y)$ jest formą dwuliniową, funkcjonał $\varphi_x$ jest liniowy. Z założenia wiemy, że $\varphi_x$ jest ciągły. Zatem istnieje stała $c_x > 0$ taka, że $|\varphi_x(y)| \leqslant c_x\|y\|$, czyli

$$|B(x, y)| \leqslant c_x\|y\|, \quad y \in Y. \tag{6.1}$$

Podobnie, dla każdego elementu $y \in Y$ istnieje stała $d_y > 0$ taka, że

$$|B(x, y)| \leqslant d_y\|x\|, \quad x \in X. \tag{6.2}$$

Rozważamy rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F} = \{\varphi_x : \|x\| \leqslant 1\}$ określonych na przestrzeni $Y$. Sprawdzamy, czy wartości $\varphi_x(y)$, dla $\|x\| \leqslant 1$, są wspólnie ograniczone dla każdego ustalonego elementu $y \in Y$. Na podstawie (6.2) mamy

$$|\varphi_x(y)| = |B(x, y)| \leqslant d_y\|x\| \leqslant d_y.$$

Zatem z Wn. 6.8 normy funkcjonałów $\|\varphi_x\|_{Y^*}$ są wspólnie ograniczone dla $\|x\| \leqslant 1$. To oznacza, że

$$c = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} < \infty.$$

Ale

$$c = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\varphi_x(y)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y\|\leqslant 1} |B(x, y)|.$$

Zatem dla $x, y \neq 0$ otrzymujemy

$$|B(x, y)| = \|x\|\,\|y\| \left| B\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right| \leqslant c\|x\|\,\|y\|.$$

Z ostatniej nierówności wynika ciągłość. Rzeczywiście, dla $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$ mamy

$$B(x_n, y_n) - B(x, y) = B(x_n - x, y_n - y) + B(x, y_n - y) + B(x_n - x, y).$$

Zatem

$$\begin{aligned}|B(x_n,y_n)-B(x,y)| &\leqslant |B(x_n-x,y_n-y)|+|B(x,y_n-y)|+|B(x_n-x,y)|\\ &\leqslant c\|x_n-x\|\,\|y_n-y\|+c\|x\|\,\|y_n-y\|+c\|x_n-x\|\,\|y\| \xrightarrow[n]{} 0\end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 6.12** (Hellinger-Toeplitz)**.** *Załóżmy, że dwa operatory liniowe $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ określone na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ spełniają warunek*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

*Wtedy $A$ i $B$ są ograniczone oraz $B = A^*$.*

**Uwaga 6.13.** Jeśli $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ dla $x, y \in \mathcal{H}$, to $A$ jest ograniczony oraz $A^* = A$.

*Dowód.* Określmy formę półtoraliniową $C$ na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$C(x, y) = \langle Ax, y\rangle.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}|C(x,y)| &= |\langle Ax,y\rangle| \leqslant \|Ax\|\,\|y\|,\\ |C(x,y)| &= |\langle Ax,y\rangle| = |\langle x,By\rangle| \leqslant \|By\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

Zatem oba odwzorowania $X \ni x \mapsto C(x, y)$ oraz $Y \ni y \mapsto C(x, y)$ są ciągłe. Z Twierdzenia 6.10 istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$|C(x, y)| \leqslant c\|x\|\,\|y\|.$$

Wtedy z Lematu 3.12 mamy

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle Ax, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y\|\leqslant 1} |C(x, y)| \leqslant c.$$

Podobnie $\|B\| \leqslant c$. □

## 6.3 Twierdzenia Banacha

**Twierdzenie 6.14** (o odwzorowaniu otwartym)**.** *Ciągłe odwzorowanie liniowe $T$ z przestrzeni Banacha $X$ **na** przestrzeń Banacha $Y$ jest otwarte, tzn. obraz $T(U)$ dla każdego otwartego podzbioru $U$ w $X$ jest otwartym podzbiorem w $Y$.*

Czyli po prostu taka sama definicja jak byla na topologii dla funkcji ciaglej?

*Dowód.* Najpierw pokażemy, że obraz otwartej kuli jednostkowej o środku w 0 w $X$ zawiera kulę otwartą o środku w 0 w $Y$. Niech

$$B_n = \{x \in X \,:\, \|x\| < 2^{-n}\}.$$

Mamy

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

Zatem

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kB_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1).$$

Z twierdzenia Baire'a przynajmniej jeden ze zbiorów $kT(B_1)$ nie jest nigdziegęsty. Zatem $T(B_1)$ nie jest nigdziegęsty. To oznacza, że domknięcie zbioru $T(B_1)$ zawiera pewną kulę, czyli

$$\overline{T(B_1)} \supset \{y \in Y \,:\, \|y - y_0\| < \eta\},$$

dla pewnego elementu $y_0 \in Y$ oraz liczby $\eta > 0$.

$$\begin{aligned}\{y \in Y \,:\, \|y\| < \eta\} &= \{y \in Y \,:\, \|y - y_0\| < \eta\} - y_0 \subset \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \\ &\subset \overline{T(B_1) - T(B_1)} \subset \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(2B_1)} = \overline{T(B_0)}.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z prostej własności, że $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$. Dzieląc stronami przez $2^n$ otrzymamy

$$\left\{y \in Y \,:\, \|y\| < \frac{\eta}{2^n}\right\} \subset \overline{T(B_n)}. \tag{6.3}$$

Naszym celem jest wykazanie, że

$$\left\{y \in Y \,:\, \|y\| < \frac{\eta}{2}\right\} \subset T(B_0). \tag{6.4}$$

Niech $\|y\| < \eta/2$. Zatem z (6.3) dla $n = 1$ mamy $y \in \overline{T(B_1)}$. Istnieje więc element $x_1 \in B_1$ taki, że
$$\|y - Tx_1\| < \frac{\eta}{2^2}.$$
Znowu z (6.3) dla $n = 2$ wnioskujemy, że $y - Tx_1 \in \overline{T(B_2)}$. Istnieje więc element $x_2 \in B_2$ taki, że
$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\eta}{2^3},$$
zatem $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{T(B_3)}$, na podstawie (6.3) dla $n = 3$. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg elementów $x_n$ o własnościach $x_n \in B_n$ oraz
$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - \ldots - Tx_n\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}.$$
Zatem
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n.$$
Skoro $x_n \in B_n$, to $\|x_n\| < 2^{-n}$. Z zupełności przestrzeni $X$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Oznaczmy
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$
Wtedy
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$
Ponadto
$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$
Czyli $x \in B_0$. W ten sposób dowód (6.4) został zakończony.

Niech $U$ będzie otwartym podzbiorem w $X$ oraz $y_0 \in T(U)$. Wtedy $y_0 = Tx_0$ dla pewnego elementu $x_0 \in U$. Z otwartości $U$ mamy
$$\{x \in X \,:\, \|x - x_0\| < r\} \subset U$$
dla pewnej liczby $r > 0$. Zatem
$$x_0 + rB_0 = \{x \in X \,:\, \|x - x_0\| < r\} \subset U.$$

Wtedy

$$y_0 + rT(B_0) = T(x_0 + rB_0) \subset T(U).$$

Z (6.4) wynika zatem, że

$$\left\{ y \in Y \,:\, \|y - y_0\| < \frac{r\eta}{2} \right\} = y_0 + r \left\{ y \in Y \,:\, \|y\| < \frac{\eta}{2} \right\} \subset y_0 + rT(B_0) \subset T(U).$$

To oznacza, że $y_0$ leży w $T(U)$ wraz z pewnym otoczeniem, czyli $T(U)$ jest otwartym podzbiorem w $Y$. □

**Twierdzenie 6.15** (o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Niech $T$ będzie ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha $X$ na przestrzeń Banacha $Y$. Wtedy odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe. Ponadto istnieje stała $c > 0$, dla której*

$$\|Tx\| \geqslant c\|x\|, \qquad x \in X.$$

*Dowód.* Z poprzedniego twierdzenia $T$ jest odwzorowaniem otwartym. To oznacza, że odwzorowanie $T^{-1}$ jest ciągłe. Zatem $T^{-1}$ jest ograniczonym odwzorowaniem liniowym. Wtedy

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leqslant \|T^{-1}\| \, \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|,$$

czyli $c = \|T^{-1}\|^{-1}$. □

**Wniosek 6.16.** *Załóżmy, że $T$ jest ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha $X$ na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni Banacha $Y$. Wtedy istnieje stała $c > 0$, dla której*

$$\|Tx\| \geqslant c\|x\|, \qquad x \in X.$$

*Dowód.* Niech $Y_0 = T(X)$. Wtedy $Y_0$ jest przestrzenią Banacha, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni $Y$. Możemy zatem zastosować poprzednie twierdzenie do $T : X \to Y_0$. □

**Uwaga 6.17.** Jeśli odwzorowanie liniowe $T : X \to Y$ spełnia $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ dla $x \in X$ i pewnej stałej $c > 0$, to odwzorowanie $T$ jest różnowartościowe oraz $T(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią w $Y$.

**Definicja 6.18.** *Dla odwzorowania $T : X \to Y$ podzbiór $\Gamma \subset X \times Y$ określony wzorem*

$$\Gamma = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

*nazywamy wykresem.*

**Lemat 6.19.** *Załóżmy, że $X$ i $Y$ są liniowymi przestrzeniami unormowanymi. Jeśli $T$ jest ciągłym odwzorowaniem z $X$ w $Y$, to zbiór $\Gamma$ jest domkniętym podzbiorem w $X \times Y$.*

*Dowód.* Załóżmy, że $(x_n, Tx_n) \underset{n}{\to} (x, y)$. Wtedy

$$\|x_n - x\| \underset{n}{\to} 0, \quad \|Tx_n - y\| \underset{n}{\to} 0.$$

Ale z ciągłości mamy $Tx_n \to Tx$, zatem $Tx = y$, co oznacza, że $(x, y) \in \Gamma$. $\square$

**Lemat 6.20.** *Jeśli $X$ i $Y$ są przestrzeniami Banacha, to również $X \times Y$ jest przestrzenią Banacha z normą*

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

*Dowód.* Z równości

$$\begin{aligned} &\|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y \\ &\qquad = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_{X \times Y} = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{X \times Y}, \end{aligned}$$

wynika, że $(x_n, y_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n$ i $y_n$ są ciągami Cauchy'ego w $X$ i $Y$, odpowiednio. Ponadto zastępując $x_m$ przez $x$ oraz $y_m$ przez $y$ otrzymamy, że jeśli $x_n \underset{n}{\to} x$ oraz $y_n \underset{n}{\to} y$, to $(x_n, y_n) \underset{n}{\to} (x, y)$. $\square$

**Twierdzenie 6.21** (o wykresie domkniętym)**.** *Niech $T$ będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha $X$ w przestrzeń Banacha $Y$. Jeśli wykres $\Gamma$ odwzorowania $T$ jest domkniętą podprzestrzenią w $X \times Y$, to odwzorowanie $T$ jest ciągłe.*

*Dowód.* Z założenia domkniętości wykresu wynika, że $\Gamma$ jest przestrzenią Banacha. Rozważmy odwzorowania $\pi_1 : \Gamma \to X$ oraz $\pi_2 : \Gamma \to Y$ zadane wzorami

$$\pi_1(x, Tx) = x, \qquad \pi_2(x, Tx) = Tx.$$

Oba odwzorowania są liniowe i ograniczone z normą nie przekraczającą 1. Ponadto $\pi_1$ jest różnowartościowym odwzorowaniem z $\Gamma$ na $X$. Zatem z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym odwzorowanie $\pi_1^{-1}$ jest ograniczone. Zauważmy, że

$$x \xmapsto{\pi_1^{-1}} (x, Tx) \xmapsto{\pi_2} Tx,$$

czyli

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}.$$

Zatem odwzorowanie $T$ jest ograniczone jako złożenie dwu operatorów ograniczonych. □

**Przykład.** Niech macierz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ spełnia

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

tzn. wiersze macierzy $A$ są sumowalne z kwadratem. Rozważamy $X = Y = \ell^2$. Określamy operator $T$ na $\ell^2$ wzorem

$$(Tx)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x(j), \quad x = \{x(j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Z założenia mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x(j)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( |a_{ij}|^2 + |x(j)|^2 \right) < \infty,$$

czyli wielkość $(Tx)(i)$ jest dobrze określona dla dowolnej wartości $i$.

Załóżmy, że $T$ odwzorowuje $\ell^2$ w siebie, tzn. dla $x$ z $\ell^2$ ciąg $Tx$ również leży w $\ell^2$. Okazuje się, że wtedy $T$ jest automatycznie operatorem ograniczonym. Rzeczywiście, sprawdzimy, że wykres operatora $T$ jest domknięty. Posłużymy się lematem.

**Lemat 6.22.** *Niech $T$ będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni unormowanej $X$ w przestrzeń unormowaną $Y$. Jeśli z warunków $x_n \underset{n}{\to} 0$ oraz $Tx_n \underset{n}{\to} y$ wynika, że $y = 0$, to wykres odwzorowania $T$ jest domknięty.*

*Dowód.* Niech $x_n \underset{n}{\to} x$ oraz $Tx_n \underset{n}{\to} z$. Trzeba pokazać, że $z = Tx$. Mamy $x_n - x \underset{n}{\to} 0$. Ponadto $T(x_n - x) = Tx_n - Tx \underset{n}{\to} z - Tx$. Z założenia $z - Tx = 0$. □

Niech $x_n \underset{n}{\to} 0$ oraz $Tx_n \underset{n}{\to} y$ w $\ell^2$. Mamy

$$|(Tx_n)(i)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_n(j)\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \|x_n\|_2 \xrightarrow[n]{} 0.$$

To oznacza, że $(Tx_n)(i) \underset{n}{\to} 0$ dla $i \in \mathbb{N}$. Dalej mamy

$$|(Tx_n)(i) - y(i)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}|(Tx_n)(j) - y(j)|^2\right)^{1/2} = \|Tx_n - y\|_2 \xrightarrow[n]{} 0.$$

Skoro $|(Tx_n)(i) - y(i)| \underset{n}{\to} 0$ oraz $(Tx_n)(i) \underset{n}{\to} 0$, to $y(i) = 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, czyli $y = 0$.

# 7 Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa

Dla funkcji $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ istnieją wielomiany $p_n(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$p_n(x) \underset{n}{\rightrightarrows} f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

tzn.

$$\|p_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0.$$

Na przykład można przyjąć, że $p_n$ są wielomianami Bernsteina.

$$p_n(x) = B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

Wielomiany $\mathcal{P}$ tworzą algebrę, tzn. z warunku $p, q \in \mathcal{P}$ wynika, że $pq \in \mathcal{P}$. Niech $K$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, np. zwartą przestrzenią metryczną.

**Definicja 7.1.** *Podzbiór $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$) nazywamy **podalgebrą**, jeśli z warunku $f, g \in \mathcal{A}$ wynika, że $f+g$, $fg$ oraz $cf$ leżą w $\mathcal{A}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ (lub $c \in \mathbb{C}$).*

**Uwaga 7.2.** Zauważmy, że $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, tzn. norma jest podmultyplikatywna.

**Przykłady.**

1. Wielomiany $\mathcal{P}$ w $C[0,1]$ (lub w $C[a,b]$).
2. $\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0,1] \,:\, f(\frac{1}{2}) = 0\}$.

**Lemat 7.3.** *Jeśli $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest podalgebrą, to $\overline{\mathcal{A}}$ (czyli jednostajne granice ciągów z $\mathcal{A}$) też jest podalgebrą.*

*Dowód.* Niech $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$. Zatem istnieją ciągi $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ takie, że $\|f_n - f\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ oraz $\|g_n - g\|_\infty \underset{n}{\to} 0$. Mamy

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|(f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty\end{aligned}$$

Zatem $\|f_n g_n - fg\|_\infty \underset{n}{\to} 0$, co oznacza, że $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. Podobnie pokazujemy, że $f + g,\ cf \in \overline{\mathcal{A}}$ dla $c \in \mathbb{R}$. □

**Definicja 7.4.** *Mówimy, że podalgebra $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$)* ***rozdziela punkty****, jeśli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

**Definicja 7.5.** *Mówimy, że podalgebra $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$)* ***nie znika*** *w $K$, jeśli dla dowolnego punktu $x \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$.*

**Przykład.** Podalgebra wielomianów $\mathcal{P} \subset C[a,b]$ nie znika, bo $1 \in \mathcal{P}$. Podalgebra $\mathcal{P}$ rozdziela punkty, bo funkcja $x$ jest różnowartościowa.

**Lemat 7.6.** *Niech $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ będzie podalgebrą rozdzielającą punkty i nieznikającą w $K$. Wtedy dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in K$ oraz liczb $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ można znaleźć funkcję $f \in \mathcal{A}$ spełniającą*

$$f(x_1) = a_1, \quad f(x_2) = a_2.$$

*Dowód.* Istnieją funkcje $h_1$ i $h_2$ oraz funkcja $g$ w $\mathcal{A}$ takie, że

$$h_1(x_1) \neq 0, \quad h_2(x_2) \neq 0, \quad g(x_1) \neq g(x_2).$$

Określmy funkcje

$$\begin{aligned}u(x) &= g(x)h_1(x) - g(x_2)h_1(x) = [g(x) - g(x_2)]h_1(x), \\ v(x) &= g(x)h_2(x) - g(x_1)h_2(x) = [g(x) - g(x_1)]h_2(x).\end{aligned}$$

Wtedy $u, v \in \mathcal{A}$ oraz

$$\begin{aligned} u(x_1) &\neq 0, \qquad & u(x_2) &= 0, \\ v(x_1) &= 0, \qquad & v(x_2) &\neq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja

$$f(x) = a_1 \frac{u(x)}{u(x_1)} + a_2 \frac{v(x)}{v(x_2)}$$

spełnia tezę lematu. $\square$

**Twierdzenie 7.7** (Stone-Weierstrass)**.** *Niech $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ będzie podalgebrą rozdzielającą punkty i nieznikającą w $K$. Wtedy $\mathcal{A}$ leży gęsto w $C_{\mathbb{R}}(K)$, tzn. dla dowolnej funkcji $f$ z $C_{\mathbb{R}}(K)$ można znaleźć ciąg $f_n$ w $\mathcal{A}$ taki, że $f_n \underset{n}{\rightrightarrows} f$ w $K$. Innymi słowy $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$.*

Twierdzenie 7.7 wynika z czterech kolejnych lematów, w których przyjmujemy założenia Tw. 7.7 .

**Lemat 7.8.** *Jeśli $f \in \overline{\mathcal{A}}$, to również $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.*

*Dowód.* Możemy założyć, że $f \neq 0$. Rozważmy

$$g = \frac{1}{\|f\|_\infty} f.$$

Wtedy $\|g\|_\infty = 1$. Zatem $|g(x)| \leqslant 1$ dla $x \in K$. Wiemy, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Wystarczy pokazać, że $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje ciąg wielomianów $q_n(y)$ taki, że

$$q_n(y) \underset{n}{\rightrightarrows} |y|, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Ponieważ $q_n(0) \underset{n}{\to} 0$, to dla $p_n(y) = q_n(y) - q_n(0)$ mamy $p_n(0) = 0$ oraz

$$p_n(y) \underset{n}{\rightrightarrows} |y|, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Wtedy

$$p_n(g(x)) \underset{n}{\rightrightarrows} |g(x)|, \quad x \in K.$$

Rzeczywiście

$$\sup_K \Big| p_n(g(x)) - |g(x)| \Big| \leqslant \sup_{|y| \leqslant 1} \Big| p_n(y) - |y| \Big| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Na podstawie Lematu 7.3 otrzymujemy $p_n(g(x)) \in \overline{\mathcal{A}}$. Zatem $|g(x)| \in \overline{\mathcal{A}}$, czyli $|f(x)| \in \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

**Uwaga 7.9.** Ciąg wielomianów przybliżający $|x|$ można wskazać jawnym wzorem. Na przykład, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$\begin{aligned}|x| = (1+(x^2-1))^{1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(x^2-1)^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}(1-x^2)^n. \quad (7.1)\end{aligned}$$

Równość jest spełniona dla $|1-x^2| < 1$ czyli dla $0 < |x| \leqslant 1$. Ze wzoru (7.1) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}(1-x^2)^n \leqslant 1-|x| < 1.$$

Obliczamy granicę lewej strony, gdy $x \to 0$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} \leqslant 1, \quad N \geqslant 1,$$

czyli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Weierstrassa o majoryzacji szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}(1-x^2)^n, \qquad |x| \leqslant 1$$

jest zbieżny jednostajnie i suma jest funkcją ciągłą dla $|x| \leqslant 1$. Stąd równość (7.1) jest spełniona dla $|x| \leqslant 1$.

**Lemat 7.10.** *Jeśli* $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, *to* $\min(f,g)$ *i* $\max(f,g)$ *również leżą w* $\overline{\mathcal{A}}$.

*Dowód.* Teza wynika z poprzedniego lematu oraz ze wzorów

$$\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}, \quad \max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

□

**Uwaga 7.11.** Z lematu wynika natychmiast, że jeśli $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$, to $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ oraz $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ leżą w $\overline{\mathcal{A}}$.

**Lemat 7.12.** *Niech* $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ *oraz* $x \in K$. *Dla dowolnie wybranej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje funkcja* $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ *taka, że*

$$\begin{aligned}&g_x(x) = f(x)\\ &g_x(t) > f(t) - \varepsilon, \ \text{dla } t \in K.\end{aligned}$$

*Dowód.* Na podstawie lematu 7.6, dla $y \in K$ istnieje funkcja $h_y \in \mathcal{A}$ taka, że

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

Z ciągłości funkcji $h_y(t) - f(t)$ istnieje otoczenie otwarte $U_y$ punktu $y$ takie, że

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } t \in U_y.$$

Otoczenia $U_y$, $y \in K$, pokrywają zbiór $K$. Ze zwartości zbioru $K$ można znaleźć skończone podpokrycie

$$K \subset U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n}.$$

Określmy funkcję

$$g_x(t) = \max(h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \ldots, h_{y_n}(t)).$$

Z uwagi po lemacie 7.10 wiemy, że $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$. Mamy $g_x(x) = f(x)$. Ponadto jeśli $t \in K$, to $t \in U_{y_j}$ dla pewnej liczby $j = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy

$$g_x(t) \geqslant h_{y_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

□

**Lemat 7.13.** *Niech* $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ *oraz* $\varepsilon > 0$. *Wtedy istnieje funkcja* $h \in \overline{\mathcal{A}}$ *taka, że*

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla } x \in K.$$

*Dowód.* Z poprzedniego lematu, dla każdego punktu $x \in K$ istnieje funkcja $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ spełniająca

$$g_x(x) = f(x), \quad \text{oraz } g_x(t) > f(t) - \varepsilon,\ t \in K.$$

Z ciągłości istnieje otwarte otoczenie $V_x$ punktu $x$, dla którego

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon, \quad t \in V_x.$$

Otoczenia $V_x$ stanowią pokrycie zbioru $K$. Ze zwartości znajdujemy skończone podpokrycie

$$K \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Określmy

$$h(t) = \min((g_{x_1}(t), g_{x_2}(t), \ldots, g_{x_n}(t)).$$

Z lematu 7.10 funkcja $h$ należy do $\overline{\mathcal{A}}$. Wiemy, że

$$h(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{bo } g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon, \text{ dla } j = 1, 2, \dots, n.$$

Dla $t \in K$ mamy $t \in V_{x_j}$ dla pewnego $j = 1, 2, \dots, n$. Zatem

$$h(t) \leqslant g_{x_j}(t) < f(t) + \varepsilon.$$

W rezultacie

$$|h(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{dla } t \in K.$$

□

Przechodzimy teraz do przypadku funkcji o wartościach zespolonych.

**Definicja 7.14.** *Podalgebrę $\mathcal{A} \subset C(K)$ nazywamy* ***samosprzężoną*** *jeśli z tego, że $f$ leży w $\mathcal{A}$ wynika, że funkcja sprzężona $\overline{f}$ również leży w $\mathcal{A}$.*

**Twierdzenie 7.15** (Stone-Weierstrass, wersja zespolona)**.** *Jeśli $\mathcal{A}$ jest samosprzężoną podalgebrą w $C(K)$, rozdzielającą punkty i nieznikającą, to $\mathcal{A}$ leży gęsto w $C(K)$.*

*Dowód.* Niech

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} : \overline{f} = f\} \subset C_{\mathbb{R}}(K).$$

Zauważmy, że $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}(K)$. Sprawdzimy, że $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ spełnia założenia Twierdzenia 7.7. Z założenia dla $x_1 \neq x_2 \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zatem

$$\operatorname{Re} f(x_1) \neq \operatorname{Re} f(x_2) \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x_1) \neq \operatorname{Im} f(x_2).$$

Ale $\operatorname{Re} f$ oraz $\operatorname{Im} f$ leżą w $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, bo algebra $\mathcal{A}$ jest samosprzężona oraz

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}, \qquad \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

Stąd $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ rozdziela punkty.

Dla $x \in K$ istnieje $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$. Zatem

$$\operatorname{Re} f(x) \neq 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x) \neq 0.$$

Stąd $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ nie znika. Z Twierdzenia 7.7 algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ leży gęsto w $C_{\mathbb{R}}(K)$. Niech $f \in C(K)$. Wtedy

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

Każdą z funkcji $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ można przybliżać jednostajnie funkcjami z $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Zatem $f$ może być przybliżona funkcjami z $\mathcal{A}$. □

**Przykłady.**

1. Niech $K = [0, \pi]$ oraz

$$\mathcal{A} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}.$$

$\mathcal{A}$ jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, bo

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\cos(n+m)x + \frac{1}{2}\cos(n-m)x.$$

$\mathcal{A}$ nie znika, bo $1 \in \mathcal{A}$. Ponadto $\mathcal{A}$ rozdziela punkty, ponieważ funkcja $\cos x$ jest różnowartościowa w przedziale $[0, \pi]$. Zatem $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$.

2. Niech $K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Możemy przyjąć, że $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ przez podstawienie $z = e^{ix}$. Rozważmy

$$\mathcal{A} = \mathrm{lin}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Kombinację liniową funkcji $e^{inx}$ nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*, ze względu na równość

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

$\mathcal{A}$ jest podalgebrą w $C(\mathbb{T})$, bo $e^{inx}e^{imx} = e^{i(n+m)x}$. Algebra $\mathcal{A}$ nie znika, bo $1 \in \mathcal{A}$ (dla $n = 0$). Algebra $\mathcal{A}$ rozdziela punkty, bo funkcja $e^{ix}$ $(n = 1)$ jest różnowartościowa na $\mathbb{T}$. Wreszcie $\mathcal{A}$ jest samosprzężona, bo $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$. Z Twierdzenia 7.15 mamy $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T})$, tzn. każda funkcja ciągła na $\mathbb{T}$ (równoważnie funkcja $f$ z $C[0, 2\pi]$ taka, że $f(0) = f(2\pi)$) jest jednostajną granicą ciągu zespolonych wielomianów trygonometrycznych.

**Uwaga 7.16.** Niech

$$\mathcal{A}_+ = \mathrm{lin}\{e^{inx} : n \geqslant 0\}.$$

$\mathcal{A}_+$ jest podalgebrą rozdzielającą punktu i nieznikającą w $\mathbb{T}$, ale $\mathcal{A}_+$ nie jest gęsta w $C(\mathbb{T})$. Rzeczywiście, $e^{-ix} \notin \overline{\mathcal{A}_+}$. To wynika z rozumowania poniżej. Dla $n \geqslant 0$ mamy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix}\overline{e^{inx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{-1}{i(n+1)}e^{-i(n+1)x}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Zatem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix}\overline{f(x)}\,dx = 0, \quad \text{dla } f \in \mathcal{A}_+.$$

Stąd

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix}\overline{f(x)}\,dx = 0, \quad \text{dla } f \in \overline{\mathcal{A}_+}.$$

Funkcja $e^{-ix}$ nie może należeć do $\overline{\mathcal{A}_+}$, bo podstawiając $f(x) = e^{-ix}$ otrzymamy wynik 1.

3. Rozważmy $C_{\mathbb{R}}([0,1]\times[0,1])$ oraz

$$\mathcal{A} = \operatorname{lin}_{\mathbb{R}}\{f(x)g(y) \,:\, f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]\}.$$

Rodzina $\mathcal{A}$ składa się zatem z rzeczywistych kombinacji liniowych funkcji rozdzielonych zmiennych. $\mathcal{A}$ jest podalgebrą, bo

$$f_1(x)g_1(y)\cdot f_2(x)g_2(y) = [f_1(x)f_2(x)]\,[g_1(y)g_2(y)].$$

Algebra $\mathcal{A}$ nie znika, bo $1 \in \mathcal{A}$. Ponadto $\mathcal{A}$ rozdziela punkty, bo jeśli $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ to funkcja $f(x,y) = x$ lub funkcja $g(x,y) = y$ rozdziela te punkty. Zatem $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}([0,1]\times[0,1])$.

**Twierdzenie 7.17** (Stone-Weierstrass)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}(K)$ rozdzielającą punkty. Wtedy zachodzi jeden z przypadków:*

*(i)* $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$.

*(ii) Istnieje punkt $x_0$ w $K$ taki, że* $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) \,:\, f(x_0) = 0\}$.

*Dowód.* Załóżmy, że $\mathcal{A}$ nie znika. Wtedy z Twierdzenia 7.7 otrzymujemy (i). W przeciwnym wypadku istnieje punkt $x_0$ w $K$ taki, że $f(x_0) = 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{A}$. Wtedy $\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) \,:\, f(x_0) = 0\}$. Rozważmy

$$\mathcal{A}_1 = \{f(x) + \alpha \,:\, f \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Rodzina $\mathcal{A}_1$ jest podalgebrą. Ponieważ $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}$, to $\mathcal{A}_1$ rozdziela punkty. Ponadto $\mathcal{A}_1$ nie znika, bo zawiera funkcję 1. Zatem $\overline{\mathcal{A}_1} = C_{\mathbb{R}}(K)$. Niech

$g \in \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) \, : \, f(x_0) = 0\}$. Chcemy pokazać, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Ale wiemy, że $g \in \overline{\mathcal{A}_1}$. Zatem istnieją ciągi $f_n \in \mathcal{A}$ oraz $\alpha_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f_n(x) + \alpha_n \underset{n}{\rightrightarrows} g(x).$$

Podstawiając $x = x_0$ otrzymamy $\alpha_n \underset{n}{\to} 0$. Zatem

$$f_n(x) \underset{n}{\rightrightarrows} g(x)$$

co oznacza, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. □

# 8 Przestrzenie sprzężone do $L^p$ i do $C(X)$

Rozważamy przestrzenie $L^p(X,\mu)$, gdzie $X$ jest przestrzenią z miarą $\sigma$-skończoną $\mu$ określoną na $X$, tzn. na pewnym $\sigma$-pierścieniu podzbiorów przestrzeni $X$. Jak wiadomo z kursu funkcji rzeczywistych $L^p(X,\mu)$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Dla liczby $1 \leqslant p \leqslant \infty$ symbolem $q$ oznaczamy wykładnik sprzężony, tzn. spełniający $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Przyjmujemy $q = \infty$ dla $p = 1$ oraz $q = 1$ dla $p = \infty$.

**Twierdzenie 8.1.** *Niech $1 \leqslant p < \infty$ oraz $g \in L^q(X,\mu)$. Wtedy odwzorowanie*

$$G_g(f) = \int\limits_X f(x)g(x) \, d\mu(x)$$

*jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na przestrzeni $L^p(X,\mu)$ oraz*

$$\|G_g\| = \|g\|_q.$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy tylko dla $p > 1$. Możemy się ograniczyć do przypadku $g \neq 0$. Z nierówności Höldera mamy

$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{1/q} < \infty,$$

zatem wielkość $G_g(f)$ jest dobrze określona. Odwzorowanie $G_g$ jest liniowe, bo wielkość $G_g(f)$ zależy liniowo od funkcji $f$. Ponadto

$$|G_g(f)| \leqslant \int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leqslant \|g\|_q \|f\|_p,$$

czyli

$$\|G_g\| \leqslant \|g\|_q.$$

Niech $f(x) = \overline{\operatorname{sgn} g(x)}\,|g(x)|^{q-1}$. Wtedy

$$\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x) = \int_X |g(x)|^{p(q-1)}\,d\mu(x) = \int_X |g(x)|^q\,d\mu(x) < \infty.$$

Zatem $f \in L^p(X,\mu)$ oraz $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$. Ponadto

$$G_g(f) = \int_X |g(x)|^q\,d\mu(x) = \|g\|_q^q.$$

Reasumując

$$\frac{G_g(f)}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Stąd $\|G_g\| \geqslant \|g\|_q$. □

## 8.1 Wersja rzeczywista

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia odwrotnego do Tw. 8.1. Najpierw rozważymy przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych i miary skończonej, tzn. $\mu(X) < \infty$.

**Lemat 8.2.** *Załóżmy, że $\mu(X) < \infty$. Niech $g : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną oraz*

$$\left|\int_X g(x)\varphi(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant M\|\varphi\|_p, \tag{8.1}$$

*dla dowolnej funkcji prostej $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (funkcja prosta przyjmuje skończenie wiele wartości). Wtedy $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$.*

*Dowód.* Rozważymy tylko przypadek $p > 1$. Chcemy udowodnić, że

$$\int |g(x)|^q \, d\mu(x) < \infty.$$

Istnieje rosnący ciąg nieujemnych funkcji prostych $\psi_n$ taki, że $\psi_n(x) \underset{n}{\to} |g(x)|^q$ dla $x \in X$. Określmy

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sgn} g(x) \psi_n(x)^{1/p}.$$

$\varphi_n$ jest nadal funkcją prostą, bo $\operatorname{sgn} g(x)$ przyjmuje tylko trzy wartości. Podstawiając funkcję $\varphi_n$ do nierówności (8.1) otrzymujemy

$$\int\limits_X |g(x)| \psi_n(x)^{1/p} \, d\mu(x) \leqslant M \left( \int\limits_X \psi_n(x) \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Dalej korzystając z $\psi_n(x)^{1/q} \leqslant |g(x)|$ mamy

$$\int\limits_X \psi_n(x) \, d\mu(x) = \int\limits_X \psi_n(x)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \int\limits_X |g(x)| \psi_n(x)^{\frac{1}{p}} \, d\mu(x) \leqslant M \left( \int\limits_X \psi_n(x) \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\int\limits_X \psi_n(x) \, d\mu(x) \leqslant M^q.$$

Dalej przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\int\limits_X |g(x)|^q \, d\mu(x) \leqslant M^q.$$

□

**Twierdzenie 8.3.** *Niech $G$ będzie ograniczonym rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$, gdzie $X$ jest $\sigma$-skończoną przestrzenią miarową. Wtedy istnieje jedyna funkcja $g$ w $L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ taka, że*

$$G(f) = \int\limits_X f(x) g(x) \, d\mu(x). \tag{8.2}$$

*Dowód.* Ograniczymy się do $p > 1$. Zaczniemy od przypadku, gdy $\mu(X) < \infty$. Wtedy każda funkcja ograniczona leży w $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$, bo jeśli $|f(x)| \leqslant c$, to

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \leqslant c^p \mu(X).$$

W szczególności funkcja $1\!\!1_E$ leży w $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $E$. Określamy

$$\nu(E) = G(1\!\!1_E).$$

Sprawdzimy, że funkcja zbiorów $\nu$ jest przeliczalnie addytywna i ma ograniczone wahanie. Niech $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ będzie sumą rozłącznych zbiorów $E_n$. Określmy $\alpha_n = \operatorname{sgn} \nu(E_n)$. Rozważmy funkcje

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1\!\!1_{E_n}(x), \qquad 1\!\!1_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{E_n}(x).$$

Oba szeregi są zbieżne w $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$. Istotnie

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n 1\!\!1_{E_n} \right\|_p &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n 1\!\!1_{E_n} \right\|_p \\ &= \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n) \right)^{1/p} \leqslant \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow[n]{} 0, \end{aligned}$$

bo $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Podobnie

$$\left\| 1\!\!1_E - \sum_{n=1}^{N} 1\!\!1_{E_n} \right\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{E_n} \right\|_p = \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Z ciągłości funkcjonału $G$ wnioskujemy, że

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n G\left(1\!\!1_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \nu\left(E_n\right) \right|.$$

Ale

$$|G(f)| \leqslant \|G\| \, \|f\|_p$$

oraz

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n)\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\right)^{1/p} \leqslant \mu(E)^{1/p}.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu\,(E_n)| \leqslant \|G\|\,\mu(E)^{1/p} \leqslant \|G\|\,\mu(X)^{1/p}, \tag{8.3}$$

co oznacza, że $\nu$ ma ograniczone wahanie. Dalej

$$\nu(E) = G\,(\mathbb{1}_E) = \sum_{n=1}^{\infty} G\,(\mathbb{1}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\,(E_n)\,,$$

czyli $\nu$ jest przeliczalnie addytywna.

Z nierówności (8.3) zastosowanej do rodziny zbiorów $E_n = \emptyset$, dla $n \geqslant 2$, wynika

$$|\nu(E)| \leqslant \|G\|\,\mu(E)^{1/p}.$$

Zatem miara znakowana $\nu$ jest absolutnie ciągła względem miary $\mu$. Z twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje więc funkcja mierzalna $g$, bezwzględnie całkowalna względem miary $\mu$ i spełniająca

$$\nu(E) = \int\limits_E g(x)\,d\mu(x) = \int\limits_X g(x)\,\mathbb{1}_E(x)\,d\mu(x),$$

czyli

$$G\,(\mathbb{1}_E) = \int\limits_X g(x)\,\mathbb{1}_E(x)\,d\mu(x).$$

Rozważając kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych zbiorów otrzymamy

$$G(\varphi) = \int\limits_X g(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x),$$

dla funkcji prostych $\varphi$. Ponieważ funkcjonał $G$ jest ograniczony, to

$$\left|\int\limits_X g(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x)\right| = |G(\varphi)| \leqslant \|G\|\,\|\varphi\|_p,$$

dla funkcji prostych $\varphi$. Z lematu 8.2 wnioskujemy, że $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$. Wykażemy wzór (8.2). Niech $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$. Wtedy istnieje ciąg $\varphi_n$ funkcji prostych taki, że $\varphi_n \underset{n}{\to} f$ w normie przestrzeni $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ oraz $|\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|$. Wtedy

$$\begin{aligned} G(f) = \lim_n G(\varphi_n) = \lim_n \int_X \varphi_n(x) g(x)\, d\mu(x) \\ = \lim_n G_g(\varphi_n) = G_g(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Funkcja $g$ jest jedyną funkcją spełniającą (8.2). Rzeczywiście, załóżmy, że

$$G(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)h(x)\, d\mu(x)$$

dla $g, h \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$. Określmy funkcjonał

$$\Phi(f) = \int_X f(x)[g(x) - h(x)]\, d\mu(x).$$

Ale $\Phi(f) = 0$ dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$. Z Twierdzenia 8.1 mamy

$$\|\Phi\| = \|g - h\|_q.$$

Zatem $g = h$ prawie wszędzie.

Przechodzimy do przypadku, gdy $\mu(X) = \infty$. Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \text{gdzie } \mu(X_n) < \infty,\ X_n \subset X_{n+1}.$$

Wtedy możemy przyjąć, że

$$L^p_{\mathbb{R}}(X_n,\mu) \subset L^p_{\mathbb{R}}(X_{n+1},\mu) \subset L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu).$$

Funkcjonał $G$ obcinamy do podprzestrzeni $L^p_{\mathbb{R}}(X_n,\mu)$ i z pierwszej części dowodu znajdujemy funkcję $g_n \in L^q_{\mathbb{R}}(X_n,\mu)$ taką, że

$$G(f) = \int_{X_n} f(x)g_n(x)\, d\mu(x), \qquad \text{dla } f \in L^p_{\mathbb{R}}(X_n,\mu).$$

Zatem dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X_n,\mu) \subset L^p_{\mathbb{R}}(X_{n+1},\mu)$ mamy

$$\begin{aligned} G(f) = \int_{X_n} f(x)g_n(x)\, d\mu(x) \\ = \int_{X_{n+1}} f(x)g_{n+1}(x)\, d\mu(x) = \int_{X_n} f(x)g_{n+1}(x)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że $g_n(x) = g_{n+1}(x)$ prawie wszędzie na zbiorze $X_n$. Modyfikując wartości funkcji $g_{n+1}$ na zbiorze miary zero można zażądać, aby

$$g_n(x) = g_{n+1}(x), \quad x \in X_n.$$

Wtedy

$$g_m(x) = g_n(x), \qquad n > m,\ x \in X_m.$$

Wiemy, że

$$\|g_n\|_q = \|G\big|_{L^p_{\mathbb{R}}(X_n,\mu)}\| \leqslant \|G\|.$$

Określmy

$$g(x) = g_n(x), \quad \text{dla } x \in X_n.$$

Definicja funkcji $g$ jest poprawna, bo jeśli $x \in X_m \cap X_n$, to $g_m(x) = g_n(x)$. Niech $\widetilde{g}_n$ oznacza rozszerzenie funkcji $g_n$ na $X$ tzn.

$$\widetilde{g}_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{dla } x \in X_n, \\ 0, & \text{dla } x \in X \setminus X_n. \end{cases}$$

Wtedy $|\widetilde{g}_n(x)| \underset{n}{\nearrow} |g(x)|$, bo $g(x) = \widetilde{g}_n(x) = g_k(x)$ dla $x \in X_k$ oraz $n \geqslant k$. Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int\limits_X |g(x)|^q \, d\mu(x) = \lim_n \int\limits_X |\widetilde{g}_n(x)|^q \, d\mu(x)$$
$$= \lim_n \int\limits_{X_n} |g_n(x)|^q \, d\mu(x) = \lim_n \|g_n\|^q_{L^q_{\mathbb{R}}(X_n,\mu)} \leqslant \|G\|^q < \infty.$$

W rezultacie $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$.

Dla funkcji $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ niech $f_n = f\mathbb{1}_{X_n}$. Wtedy $f_n \underset{n}{\to} f$ w $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$. Rzeczywiście

$$\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x) = \int\limits_{X \setminus X_n} |f(x)|^p \, d\mu(x) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

bo $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ oraz $X$ jest wstępującą sumą zbiorów $X_n$. Dalej

$$\int\limits_X f(x)g(x)\, d\mu(x) = \lim_n \int\limits_X f_n(x)g(x)\, d\mu(x)$$
$$= \lim_n \int\limits_{X_n} f_n(x)g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_n G(f_n) = G(f).$$

Pierwsza z powyższych równości wynika z

$$\left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x) - \int_X f_n(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \\ \leqslant \int_X |f(x)-f_n(x)|\,|g(x)|\,d\mu(x) \leqslant \|f-f_n\|_p\|g\|_q \xrightarrow[n]{} 0,$$

z kolei ostatnia wynika z ciągłości funkcjonału $G$. Znowu jedyność funkcji $g$, która spełnia tezę twierdzenia wynika z Tw. 8.1. $\square$

**Uwaga 8.4.** Założenie o $\sigma$-skończoności miary $\mu$ nie jest potrzebne dla $p > 1$. Wyjaśnienie oparte będzie na następnym lemacie.

**Lemat 8.5.** *Dla $g \in L^p(X,\mu)$ zbiór $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$ jest $\sigma$-skończony.*

*Dowód.* Dla liczby $\delta > 0$ określamy zbiór

$$A_\delta = \{x \in X : |g(x)| \geqslant \delta\}.$$

Wtedy

$$\infty > \int_X |g(x)|^p\,d\mu(x) \geqslant \int_{A_\delta} |g(x)|^p\,d\mu(x) \geqslant \delta^p \int_{A_\delta} d\mu(x) = \delta^p \mu(A_\delta).$$

Zatem $\mu(A_\delta) < \infty$. Ze wzoru

$$\{x \in X : g(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

wynika teza lematu. $\square$

Rozważmy ograniczony funkcjonał liniowy $G$ na przestrzeni $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$, dla $p > 1$. Istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^p(X,\mu)$ spełniający $\|f_n\|_p = 1$ oraz $|G(f_n)| \underset{n}{\to} \|G\|$. Mnożąc $f_n$ przez $\pm 1$ można założyć, że $G(f_n) \geqslant 0$ oraz $G(f_n) \underset{n}{\to} \|G\|$. Niech

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \neq 0\}.$$

Z lematu zbiór $X_0$ jest $\sigma$-skończony.

**Lemat 8.6.** *Jeśli funkcja $h \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$, $p>1$, zeruje się na $X_0$, to $G(h)=0$.*

*Dowód.* Załóżmy, że istnieje funkcja $h \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ taka, że $G(h) \neq 0$ oraz $h|_{X_0} = 0$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $G(h)=1$. Wtedy dla $\alpha > 0$ mamy

$$\|G\| \geqslant \frac{G(f_n+\alpha h)}{\|f_n+\alpha h\|_p} = \frac{G(f_n)+\alpha}{(\|f_n\|_p^p + \alpha^p\|h\|_p^p)^{1/p}} \xrightarrow[n]{} \frac{\|G\|+\alpha}{(1+\alpha^p\|h\|^p)^{1/p}}.$$

Po przekształceniu, korzystając z nierówności Bernoulliego, dostajemy

$$1+\alpha^p\|h\|^p \geqslant \left(1+\frac{\alpha}{\|G\|}\right)^p \geqslant 1+p\frac{\alpha}{\|G\|}.$$

Zatem

$$\alpha^{p-1} \geqslant \frac{p}{\|h\|^p\|G\|}, \qquad \alpha > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdy $p>1$. □

Opierając się na Lemacie 8.6 łatwo zakończyć rozumowanie. Istotnie, dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ możemy zapisać

$$G(f) = G(f\mathbb{1}_{X_0} + f\mathbb{1}_{X\setminus X_0}) = G(f\mathbb{1}_{X_0}) + G(f\mathbb{1}_{X\setminus X_0}) = G(f\mathbb{1}_{X_0}).$$

Zauważmy, że $f\mathbb{1}_{X_0} \in L^p_{\mathbb{R}}(X_0,\mu)$. Z Twierdzenia 8.3 istnieje więc funkcja $g_0 \in L^q_{\mathbb{R}}(X_0,\mu)$ taka, że

$$G(f) = G(f\mathbb{1}_{X_0}) = \int_{X_0} f(x)g_0(x)\,d\mu(x).$$

Wtedy

$$G(f) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x),$$

gdzie

$$g = \begin{cases} g_0(x), & x \in X_0, \\ 0, & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Oczywiście zachodzi $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$.

## 8.2 Wersja zespolona

Rozważamy funkcje z $L^p(X,\mu)$ o wartościach zespolonych. Niech $G$ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na $L^p(X,\mu)$. Możemy zapisać

$$L^p(X,\mu) = L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu) \oplus iL^p_{\mathbb{R}}(X,\mu),$$

bo dla $f \in L^p(X,\mu)$ mamy

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \qquad f_1, f_2 \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu).$$

Określmy funkcjonały $G_1$ i $G_2$ na $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ wzorami

$$G_1(f) = \operatorname{Re} G(f), \quad G_2(f) = \operatorname{Im} G(f).$$

Funkcjonały $G_1$ i $G_2$ są ograniczone, bo

$$|G_j(f)| \leqslant |G(f)| \leqslant \|G\|\,\|f\|_p, \quad j = 1, 2.$$

Istnieją zatem funkcje $g_1, g_2 \in L^q_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ takie, że

$$G_j(f) = \int_X f(x)g_j(x)\,d\mu(x), \quad f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu),\ j = 1, 2.$$

Dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ mamy zatem

$$G(f) = G_1(f) + iG_2(f) = \int_X f(x)[g_1(x) + ig_2(x)]\,d\mu(x).$$

Niech $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$. Wtedy $g \in L^q(X,\mu)$ oraz

$$G(f) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x), \quad f \in L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu).$$

Zatem dla $f \in L^p(X,\mu)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f_1 + if_2) = G(f_1) + iG(f_2) \\ &= \int_X f_1(x)g(x)\,d\mu(x) + i\int_X f_2(x)g(x)\,d\mu(x) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x). \end{aligned}$$

## 8.3 Twierdzenie Riesza

Wiemy, że przestrzeń sprzężoną do $C[0,1]$ można utożsamić z przestrzenią zespolonych funkcji $w(x)$ o wahaniu ograniczonym, lewostronnie ciągłych w $(0,1)$ oraz $w(0)=0$. To twierdzenie można rozszerzyć na zwarte przestrzenie topologiczne Hausdorffa. Niech $X$ będzie taką przestrzenią. Najmniejsze $\sigma$-ciało zawierające zbiory otwarte nazywamy $\sigma$-ciałem zbiorów borelowskich.

**Definicja 8.7.** *Borelowską miarę skończoną (nieujemną) $\mu$ nazywamy* ***regularną*** *jeśli dla dowolnego borelowskiego zbioru $A$ mamy*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ domkn.}}} \mu(E) = \inf_{\substack{A \subset F \\ F \text{ otw.}}} \mu(F).$$

*Miarę zespoloną o wahaniu ograniczonym na $X$ nazywamy regularną jeśli*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

*gdzie miary $\mu_j$ dla $j = 1,2,3,4$ są nieujemne i regularne. Rodzinę takich miar oznaczamy symbolem $M(X)$.*

**Twierdzenie 8.8** (F. Riesz)**.** *Niech $X$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Każdy ograniczony funkcjonał liniowy $\varphi$ na przestrzeni $C(X)$ ma postać*

$$\varphi(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

*dla pewnej zespolonej borelowskiej miary regularnej o wahaniu ograniczonym na $X$.*

*Dowód.* Patrz [9]. □

# 9 Słaba zbieżność w przestrzeniach unormowanych

## 9.1 Słaba zbieżność ciągów

Niech $X^*$ oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni unormowanej $X$.

**Definicja 9.1.** *Mówimy, że ciąg $x_n \in X$ jest* ***słabo zbieżny*** *do elementu $x \in X$, jeśli dla dowolnego funkcjonału $x^* \in X^*$ mamy $x^*(x_n) \underset{n}{\to} x^*(x)$.*

**Uwaga 9.2.** Jeśli $x_n \underset{n}{\to} x$ w normie przestrzeni $X$, to $x^*(x_n) \underset{n}{\to} x^*(x)$ dla $x^* \in X^*$.

**Twierdzenie 9.3.** *Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony.*

*Dowód.* Rozważmy ciąg $x_n \in X$ słabo zbieżny do $x$. Elementy $x_n$ wyznaczają funkcjonały liniowe $\varphi_n$ na $X^*$ wzorem

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n).$$

Traktujemy $\varphi_n$ jako operatory liniowe z przestrzeni Banacha $X^*$ (por. Wniosek 2.15) w $\mathbb{C}$. Funkcjonały $\varphi_n$ są ograniczone punktowo, bo

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n) \underset{n}{\to} x^*(x).$$

Zatem ciąg liczb $\varphi_n(x^*)$ jest ograniczony, jako ciąg zbieżny. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa (bo $X^*$ jest przestrzenią zupełną) normy $\|\varphi_n\|$ są wspólnie ograniczone. Ale z Wniosku 5.10 wynika, że

$$\|\varphi_n\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |\varphi_n(x^*)| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |x^*(x_n)| = \|x_n\|.$$

□

**Przykład.** W przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ słaba zbieżność $x_n \to x$ oznacza, że

$$\langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle, \qquad y \in \mathcal{H}.$$

Niech $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2,$$

zatem $\langle x, e_n\rangle \underset{n}{\to} 0$. To oznacza, że ciąg $e_n$ jest słabo zbieżny do zera.

**Fakt 9.4.** *Ciąg $x_n$ w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest słabo zbieżny do elementu $x$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb $\|x_n\|$ jest ograniczony oraz $\langle x_n, e_j\rangle \underset{n}{\to} \langle x, e_j\rangle$ dla $j \in \mathbb{N}$, gdzie $\{e_j\}_{\jmath\in\mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H}$.*

*Dowód.* Implikacja $(\Rightarrow)$ wynika z Twierdzenia 9.3 oraz z faktu, że

$$\langle x_n, y\rangle \underset{n}{\to} \langle x, y\rangle$$

dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$.

Dla dowodu implikacji ($\Leftarrow$), niech $c = \sup_n \|x_n\| + \|x\|$ oraz $\mathcal{F} = \mathrm{lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z założenia mamy

$$\langle x_n, y \rangle \underset{n}{\to} \langle x, y \rangle, \quad y \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. Niech $y \in \mathcal{H}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje element $y_0 \in \mathcal{F}$ taki, że $\|y - y_0\| < \varepsilon/4c$. Zatem

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y \rangle| \leqslant |\langle x_n - x, y - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x, y_0 \rangle| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \, \|y - y_0\| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle|.\end{aligned}$$

Wybierzmy teraz $N > 0$ tak, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| < \varepsilon/2.$$

Wtedy

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| < \varepsilon \quad \text{dla } n > N.$$

□

**Fakt 9.5.** *W przestrzeni $C(X)$, gdzie $X$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, ciąg funkcji $f_n$ jest słabo zbieżny do funkcji $f$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\|f_n\|_\infty$ są wspólnie ograniczone oraz ciąg $f_n$ jest zbieżny punktowo, tzn. $f_n(x) \underset{n}{\to} f(x)$ dla $x \in X$.*

*Dowód.*
($\Rightarrow$) Z Twierdzenia 9.3 ciąg norm $\|f_n\|_\infty$ jest ograniczony. Z założenia mamy

$$\int_X f_n(x)\, d\mu(x) \underset{n}{\longrightarrow} \int_X f(x)\, d\mu(x),$$

dla dowolnej miary $\mu \in M(X)$ (por Def. 8.7). Ustalmy $x \in X$ i rozważmy miarę $\mu = \delta_x$, gdzie

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ponieważ $\delta_x \in M(X)$, to

$$f_n(x) = \int_X f_n(t)\, d\delta_x(t) \underset{n}{\longrightarrow} \int_X f(t)\, d\delta_x(t) = f(x).$$

($\Leftarrow$) Wystarczy udowodnić, że

$$\int_X f_n(x)\,d\mu(x) \underset{n}{\longrightarrow} \int_X f(x)\,d\mu(x) \tag{9.1}$$

dla miar nieujemnych $\mu \in M(X)$. Z założenia $|f_n(x)| \leqslant c$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika (9.1). $\square$

**Twierdzenie 9.6.** *Niech $X$ będzie przestrzenią unormowaną. Jeśli przestrzeń $X^*$ jest ośrodkowa, to $X$ też jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Niech $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ będzie gęstym podzbiorem w $X^*$. Wybierzmy elementy $x_n \in X_n$ spełniające $\|x_n\| = 1$ oraz $|x_n^*(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n^*\|$. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich kombinacji liniowych, o zespolonych współczynnikach wymiernych, elementów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Zbiór $\mathcal{A}$ jest wtedy przeliczalny. Pokażemy, że zbiór $\mathcal{A}$ leży gęsto w $X$. Rozważmy domknięcie $\overline{\mathcal{A}}$ w $X$. Ten zbiór jest podprzestrzenią liniową, bo $\overline{\mathcal{A}}$ zawiera skończone kombinacje liniowe elementów z $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Załóżmy, że $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq X$. Wtedy z Wniosku 5.12 istnieje funkcjonał $x^* \neq 0$ taki, że $x^*|_{\overline{\mathcal{A}}} = 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\|x_n^* - x^*\| \geqslant |(x_n^* - x^*)(x_n)| = |x_n^*(x_n) - \underbrace{x^*(x_n)}_{0}|\\ = |x_n^*(x_n)| \geqslant \tfrac{1}{2}\|x_n^*\| \geqslant \tfrac{1}{2}(\|x^*\| - \|x_n^* - x^*\|).\end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|x_n^* - x^*\| \geqslant \tfrac{1}{3}\|x^*\| > 0$$

co jest sprzeczne z założeniem o gęstości ciągu $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$. $\square$

**Uwaga 9.7.** Przestrzeń sprzężona do przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa. Np. niech $X = \ell^1$. Wtedy podzbiór

$$\mathcal{A} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \ : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty,\ \ x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

jest przeliczalny i gęsty w $X$. Przestrzeń sprzężona $X^* = \ell^\infty$ (patrz Rozdział 4) nie jest ośrodkowa. Istotnie dla podzbiorów $B_1 \neq B_2 \subset \mathbb{N}$ mamy

$$\|\mathbb{1}_{B_1} - \mathbb{1}_{B_2}\|_\infty = 1.$$

W ten sposób otrzymujemy kontinuum elementów w $\ell^\infty$ takich, że odległość pomiędzy każdymi dwoma elementami wynosi 1. Zatem $\ell^\infty$ nie jest ośrodkowa. Przypomnijmy, że z rozdziału 4 wynika, że

$$c_0^* = \ell^1, \qquad (\ell^1)^* = \ell^\infty.$$

Podobnie $C[0,1]^* = M(0,1)$, i przestrzeń $M(0,1)$ nie jest ośrodkowa, bo

$$\|\delta_{x_1} - \delta_{x_2}\|_{M(0,1)} = 2, \qquad x_1 \neq x_2.$$

**Definicja 9.8.** *Rozważmy $x_n^* \in X^*$ dla przestrzeni unormowanej $X$. Mówimy, że ciąg funkcjonałów $x_n^*$ jest* ***$*$-słabo zbieżny*** *do funkcjonału $x^* \in X^*$, jeśli $x_n^*(x) \underset{n}{\to} x^*(x)$, dla każdego elementu $x \in X$.*

**Uwaga 9.9.** Bezpośrednio z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że każdy $*$-słabo zbieżny ciąg funkcjonałów liniowych na przestrzeni Banacha jest ograniczony.

**Przykład.** Rozważmy przestrzeń $C[0,1]$ i funkcjonały związane miarami

$$\mu_n = \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}.$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x)\, d\mu_n(x) = \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underset{n}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

To oznacza, że ciąg miar $\mu_n$ jest $*$-słabo zbieżny do miary Lebesgue'a na $[0,1]$.

**Uwaga 9.10.** Przestrzeń unormowaną $X$ można utożsamić z podprzestrzenią $X^{**} = (X^*)^*$. Istotnie, dla $x \in X$ określamy funkcjonał $\varphi_x$ na $X^*$ wzorem

$$\varphi_x(x^*) = x^*(x).$$

Funkcjonał $\varphi_x$ jest liniowy. Ponadto

$$\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leqslant 1} |\varphi_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leqslant 1} |x^*(x)| = \|x\|_X.$$

Przyporządkowanie $X \ni x \mapsto \varphi_x \in X^{**}$ jest liniowe (zadanie). Zatem przestrzeń $X$ można włożyć izometrycznie w $X^{**}$ poprzez odwzorowanie $x \mapsto \varphi_x$.

**Definicja 9.11.** *Mówimy, że przestrzeń Banacha $X$ jest* ***refleksywna*** *jeśli $X^{**} = X$. Tzn. odwzorowanie $x \mapsto \varphi_x$ jest izometrią z $X$ na $X^{**}$.*

**Przykład.** Rozważmy przestrzeń $L^p(X,\mu)$ dla $1 < p < \infty$. Wtedy

$$(L^p)^* = L^q, \quad \text{gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < q < \infty.$$

zatem $(L^q)^* = L^p$, czyli $L^p$ jest refleksywna.

Niech $(X,\mu)$ będzie $\sigma$-skończona, ale przestrzeń $L^1(X,\mu)$ ma nieskończony wymiar. Przestrzeń $L^1(X,\mu)$ jest wtedy ośrodkowa. Mamy $(L^1)^* = L^\infty$. Ale przestrzeń $L^\infty$ nie jest ośrodkowa, zatem z Twierdzenia 9.6 przestrzeń $(L^\infty)^*$ również nie jest ośrodkowa. W związku z tym $(L^\infty)^* \neq L^1$, czyli $L^1$ nie jest przestrzenią refleksywną.

**Twierdzenie 9.12** (Banach-Alaoglu)**.** *Niech $X$ będzie ośrodkową przestrzenią unormowaną. Z każdego ograniczonego ciągu $x_n^*$ funkcjonałów liniowych na $X$ można wybrać podciąg $*$-słabo zbieżny.*

*Dowód.* Oznaczmy $c = \sup_n \|x_n^*\|_{X^*}$. Niech $\{y_j\}_{j=1}^\infty$ będzie gęstym podzbiorem w $X$. Każdy z ciągów liczbowych $\{x_n^*(y_j)\}_{n=1}^\infty$ jest ograniczony. Stosując metodę przekątniową można wybrać rosnący ciąg liczb naturalnych $n_k$ taki, że każdy z ciągów $\{x_{n_k}^*(y_j)\}_{k=1}^\infty$ jest zbieżny. Pokażemy, że podciąg $x_{n_k}^*$ jest $*$-słabo zbieżny. W tym celu sprawdzimy, że dla dowolnego elementu $x \in X$ ciąg liczb $x_{n_k}^*(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z gęstości istnieje element $y_j$ taki, że

$$\|x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &\leqslant |x_{n_k}^*(x - y_j)| + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + |x_{n_l}^*(y_j - x)| \\ &\leqslant c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dla dużych $k$ i $l$. Zatem ciąg $x_{n_k}^*(x)$ jest zbieżny. Określmy

$$\varphi(x) = \lim_k x_{n_k}^*(x).$$

Wtedy $\varphi$ jest funkcjonałem liniowym na $X$. Ponadto

$$|\varphi(x)| = |\lim_k x_{n_k}^*(x)| \leqslant c\|x\|.$$

Zatem $\varphi \in X^*$ oraz $x_{n_k}^* \to \varphi$ $*$-słabo. □

**Uwaga 9.13.** Założenie ośrodkowości jest istotne. Rozważmy ciąg funkcjonałów $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ na $\ell^\infty$ określonych wzorem $\delta_n(x) = x_n$ dla $x \in \ell^\infty$. Mamy $\|\delta_n\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$. Jednak ciąg $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ nie zawiera podciągu $*$-słabo zbieżnego.

## 9.2 Słabe topologie

**Definicja 9.14.** ***Słabą topologią*** *w przestrzeni unormowanej $X$ nazywamy najsłabszą topologię, w której wszystkie funkcjonały $x^* \in X^*$ są ciągłe.*

**Uwaga 9.15.** Najsłabsza topologia to taka, która ma najmniej zbiorów otwartych.

Dla ustalonego funkcjonału $x_0^* \in X^*$ oraz $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ zbiór

$$V_{x_0^*;a,\varepsilon} = \{y \in X \,:\, |x_0^*(y) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w słabej topologii jako przeciwobraz otwartego koła $\{z \in \mathbb{C} :$ $|z - a| < \varepsilon\}$ przez funkcjonał $x_0^*$.

Dla elementu $x \in X$ ***bazą otoczeń*** w słabej topologii jest rodzina zbiorów postaci:

$$U_{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon}(x) = \{y \in X \,:\, \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j^*(y) - x_j^*(x)| < \varepsilon\}$$

gdzie $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ są ustalonymi funkcjonałami w $X^*$ a liczba $\varepsilon$ jest dodatnia. Zbiór ten jest otwarty, bo przyjmując oznaczenie $a_j = x_j^*(x)$ mamy

$$U_{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon}(x) = V_{x_1^*;a_1,\varepsilon} \cap V_{x_2^*;a_2,\varepsilon} \cap \ldots \cap V_{x_n^*;a_n,\varepsilon}. \tag{9.2}$$

To oznacza, że element $y$ leży „blisko” elementu $x$ w słabej topologii, gdy mierzymy odległość za pomocą skończonej liczby funkcjonałów liniowych $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Słaba topologia jest w szczególności słabsza niż topologia w przestrzeni $X$ wyznaczona przez metrykę $d(x, y) = \|x - y\|$. Przestrzeń $X$ ze słabą topologią jest przestrzenią Hausdorffa. Istotnie, dla $y_1 \neq y_2$ w $X$ istnieje funkcjonał $x^* \in X^*$ taki, że $x^*(y_1 - y_2) \neq 0$. Wtedy $x^*(y_1) \neq x^*(y_2)$. Oznaczmy $\varepsilon = \frac{1}{2}|x^*(y_1) - x^*(y_2)|$. Zbiory

$$\{x \in X \,:\, |x^*(x) - x^*(y_1)| < \varepsilon\}, \qquad \{x \in X \,:\, |x^*(x) - x^*(y_2)| < \varepsilon\}$$

są otwarte i rozłączne.Pierwszy jest otoczeniem punktu $y_1$ a drugi punktu $y_2$.

**Twierdzenie 9.16.** *Kula $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem domkniętym w słabej topologii.*

*Dowód.* Niech $x \notin B$, tzn. $\|x\| > 1$. Z Twierdzenia 5.23(c) istnieją rzeczywisty ograniczony funkcjonał liniowy $\varphi$ oraz liczba rzeczywista $\alpha$ takie, że

$$\varphi(x) < \alpha < \varphi(y), \quad y \in B.$$

Niech $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$. Wtedy $\widetilde{\varphi}$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym względem $\mathbb{C}$. Rzeczywiście, $\widetilde{\varphi}$ jest liniowy względem $\mathbb{R}$ oraz

$$\widetilde{\varphi}(ix) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = i\widetilde{\varphi}(x).$$

Zatem $\widetilde{\varphi} \in X^*$. Ponadto

$$\operatorname{Re}\widetilde{\varphi}(x) < \alpha < \operatorname{Re}\widetilde{\varphi}(y), \qquad y \in B.$$

Niech

$$U = \{y \in X : \operatorname{Re}\widetilde{\varphi}(y) < \alpha\}.$$

Wtedy $U$ jest otwarty w słabej topologii, bo jeśli $\widetilde{\varphi}$ jest ciągły, to $\operatorname{Re}\widetilde{\varphi}$ też. Ponadto $x \in U$ oraz $U \cap B = \emptyset$. Tzn. $x$ leży poza zbiorem $B$ wraz z pewnym otoczeniem, czyli $B$ jest zbiorem domkniętym. $\square$

**Uwaga 9.17.** Kula otwarta $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ nie jest zbiorem otwartym w słabej topologii, o ile przestrzeń $X$ ma nieskończony wymiar. Istotnie pokażemy, że zbiór postaci (9.2) jest nieograniczony, tzn. zawiera elementy o dowolnie dużej normie. Rozważmy jeden taki zbiór dla $x = 0$. Istnieje element $y \neq 0$ w $X$ taki, że

$$x_1^*(y) = x_2^*(y) = \ldots = x_n^*(y) = 0.$$

Wtedy $\mathbb{R}y \subset U_{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon}(0)$, ale $\mathbb{R}y \not\subset B$. Tzn. każde otoczenie punktu 0 jest nieograniczone.

**Uwaga 9.18.** Niech $\dim X = \infty$ oraz $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Wtedy domknięcie $S$ w słabej topologii jest równe $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Rzeczywiście dla $x \in X$ zbiór $x + U_{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon}(0)$ jest otwartym otoczeniem punktu $x$ i zawiera prostą przechodzącą przez $x$. Gdy $\|x\| < 1$ ta prosta przecina $S$.

**Definicja 9.19.** ***$*$-słabą topologią*** *na $X^*$ nazywamy najsłabszą topologię, w której funkcjonały $X^* \ni x^* \longmapsto x^*(x) \in \mathbb{C}$ są ciągłe dla każdego $x \in X$.*

**Uwaga 9.20.** $*$-słaba topologia pokrywa się ze słabą topologią na $X^*$ jeśli przestrzeń $X$ jest refleksywna.

Dla $x_0 \in X$ oraz liczb $a \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$ zbiór

$$V_{x_0;a,\varepsilon} = \{y^* \in X^* \, : \, |y^*(x_0) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w $*$-słabej topologii jako przeciwobraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - a| < \varepsilon\}$ funkcjonału na $X^*$ wyznaczonego przez $x_0$.. Bazą otoczeń funkcjonału $x^*$ jest rodzina zbiorów

$$U_{x_1,x_2,\ldots,x_n;\varepsilon}(x^*) = \{y^* \in Y^* \, : \, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |y^*(x_j) - x^*(x)| < \varepsilon\},$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są ustalonymi elementami w $X$ a liczba $\varepsilon$ jest dodatnia. Funkcjonał $y^*$ leży „blisko” funkcjonału $x^*$ jeśli wartości funkcjonałów w punktach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są bliskie sobie.

**Twierdzenie 9.21.** *Kula $B^* = \{x^* \in X^* \, : \, \|x^*\| \leqslant 1\}$ jest domknięta w $*$-słabej topologii.*

**Uwaga 9.22.** $*$-słaba topologia na $X^*$ jest słabsza niż słaba topologia na $X^*$, bo $X \subset X^{**}$.

*Dowód.* Niech $x^* \notin B^*$. Tzn. $\|x^*\| > 1$. Zatem istnieje element $x \in X$ taki, że $\|x\| = 1$ oraz $|x^*(x)| > 1$. Niech

$$U = \{y^* \in X^* \, : \, |y^*(x)| > 1\}.$$

Zbiór $U$ jest otwarty w $*$-słabej topologii oraz $x^* \in U$. Ponadto dla $y^* \in B^*$ mamy

$$|y^*(x)| \leqslant \|y^*\| \, \|x\| \leqslant 1.$$

Zatem $U \cap B^* = \emptyset$. $\square$

**Twierdzenie 9.23** (Banach-Alaoglu)**.** *Kula $B^* = \{x^* \in X^* \, : \, \|x^*\| \leqslant 1\}$ jest zwarta w $*$-słabej topologii.*

*Dowód.* Niech
$$V = \bigtimes_{x\in X}\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \|x\|\}$$
będzie iloczynem kartezjańskim kół domkniętych w płaszczyźnie zespolonej z topologią produktową. Z Twierdzenia Tichonowa $V$ jest zwartą przestrzenią topologiczną jako iloczyn kartezjański zbiorów zwartych. Rozważmy odwzorowanie $\Phi : B^* \to V$ zadane wzorem

$$\Phi(x^*) = \{x^*(x)\}_{x\in X} \in V.$$

Warunek $\Phi(x^*) \in V$ jest spełniony, bo

$$|x^*(x)| \leqslant \|x^*\|\,\|x\| \leqslant \|x\|.$$

Odwzorowanie $\Phi$ jest ciągłe, gdy w $B^*$ mamy $*$-słabą topologię, co wynika bezpośrednio z określenia tej topologii. Sprawdzimy, że obraz $\Phi(B^*)$ jest domkniętym podzbiorem w $V$. W tym celu rozważmy ciąg uogólniony $\Phi(x^*_\alpha)$ w $\Phi(B^*)$. Załóżmy, że ciąg uogólniony $\Phi(x^*_\alpha)$ jest zbieżny w $V$. Ale

$$\Phi(x^*_\alpha) = \Big(x^*_\alpha(x)\Big)_{x\in X}.$$

To oznacza, że dla każdego elementu $x \in X$ ciąg uogólniony liczb $x^*_\alpha(x)$ jest zbieżny. Oznaczmy
$$\eta(x) = \lim_\alpha x^*_\alpha(x).$$
W ten sposób otrzymaliśmy funkcjonał $\eta$ określony na $X$. Pokażemy, że $\eta \in B^*$. Sprawdzimy liniowość funkcjonału $\eta$. Dla $x, y \in X$ oraz $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned}\eta(\lambda x + \mu y) &= \lim_\alpha x^*_\alpha(\lambda x + \mu y) = \lim_\alpha[\lambda x^*_\alpha(x) + \mu x^*_\alpha(y)]\\ &= \lambda \lim_\alpha x^*_\alpha(x) + \mu \lim_\alpha x^*_\alpha(y) = \lambda\eta(x) + \mu\eta(y).\end{aligned}$$

Wiemy, że $|\eta(x)| \leqslant \|x\|$, bo $|x^*_\alpha(x)| \leqslant \|x\|$. Zatem $\|\eta\| \leqslant 1$. Czyli $\eta \in B^*$ co kończy dowód domkniętości zbioru $\Phi(B^*)$.

Zauważmy, że odwzorowanie $\Phi$ jest różnowartościowe. Rzeczywiście, jeśli $\Phi(x^*) = \Phi(y^*)$ to $x^*(x) = y^*(x)$ dla wszystkich $x \in X$. Wtedy $x^* = y^*$. Z określenia $*$-słabej topologii wynika zatem, że $\Phi$ jest homeomorfizmem z $B^*$ na $\Phi(B^*)$. Ale $\Phi(B^*)$ jest zbiorem zwartym jako domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej $V$. Zatem również $B^*$ jest zwarty w $*$-słabej topologii. □

**Przykład.** Rozważmy $X = \ell^\infty$ i funkcjonały $\delta_n \in X^*$ określone wzorem

$$\delta_n(x) = x_n, \quad x \in \ell^\infty.$$

Mamy $\|\delta_n\|_{X^*} = 1$, czyli $\delta_n \in B^*$. Wiemy, że $B^*$ jest zbiorem zwartym w $*$-słabej topologii. Ze zwartości ciąg $\delta_n$ ma punkt skupienia w $X^*$ w $*$-słabej topologii. Jednakże $\delta_n$ nie posiada podciągu zbieżnego $*$-słabo. Istotnie, załóżmy nie wprost, że $\delta_n$ ma podciąg $*$-słabo zbieżny $\delta_{n_k}$ dla rosnącego ciągu liczb naturalnych $n_k$. Określmy

$$x_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}.$$

Wtedy $x \in \ell^\infty$, ale $\delta_{n_k}(x) = x_{n_k} = (-1)^k$ nie jest zbieżny. Tzn. ciąg $\delta_{n_k}$ nie jest $*$-słabo zbieżny.

# 10 Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Niech $K$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Rozważamy przestrzeń $C_{\mathbb{R}}(K)$ z normą

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Przypomnimy znane twierdzenie z topologii.

**Twierdzenie 10.1.** *Podzbiór $A$ w przestrzeni metrycznej $(X, d)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu elementów z $A$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu z $A$.*

**Definicja 10.2.** *Podzbiór $A$ przestrzeni metrycznej nazywamy **warunkowo zwartym** jeśli domknięcie $\overline{A}$ jest zbiorem zwartym.*

Symbolem $B(x, \varepsilon)$ będziemy oznaczać otwartą kulę o środku w $x$ i promieniu $\varepsilon$ czyli

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \, : \, d(x, y) < \varepsilon\}.$$

**Twierdzenie 10.3.** *Podzbiór $A$ w przestrzeni metrycznej zupełnej $(X, d)$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest **całkowicie ograniczony**, tzn. dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ takie, że*

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

**Uwaga 10.4.** Zbiór jest całkowicie ograniczony, jeśli można go pokryć skończoną liczbą kul o dowolnie małym promieniu.

*Dowód.*
($\Longrightarrow$) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\overline{A} \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon).$$

Ze zwartości zbioru $\overline{A}$ istnieje skończone podpokrycie

$$A \subset \overline{A} \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

($\Longleftarrow$) Skorzystamy z Twierdzenia 10.1. Niech $y_n$ będzie ciągiem elementów z $A$. Pokażemy,że $y_n$ zawiera podciąg zbieżny. Dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mamy z założenia

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset B(x_1, \tfrac{1}{2}) \cup B(x_2, \tfrac{1}{2}) \cup \ldots \cup B(x_m, \tfrac{1}{2}).$$

Przynajmniej jedna z kul, np. $B(x_j, \frac{1}{2})$ zawiera nieskończony podciąg $\{y_n^{(1)}\}$ ciągu $\{y_n\}$. Dalej dla $\varepsilon = 2^{-2}$ wiemy, że podciąg $\{y_n^{(1)}\} \subset A$ jest zawarty w skończonej liczbie kul o promieniu $2^{-2}$. Zatem jedna z takich kul zawiera nieskończony podciąg $\{y_n^{(2)}\}$ ciągu $\{y_n^{(1)}\}$. Postępując tak dalej otrzymamy rodzinę podciągów $\{y_n^{(m)}\}$ takich, że $\{y_n^{(m+1)}\}$ jest podciągiem ciągu $\{y_n^{(m)}\}$ oraz $\{y_n^{(m)}\}$ jest zawarty w kuli o promieniu $2^{-m}$.

Stosując metodę przekątniową określmy ciąg $z_n = y_n^{(n)}$. Wtedy ciąg $\{z_n\}$ jest podciągiem ciągu $\{y_n\}$. Sprawdzimy, że $z_n$ spełnia warunek Cauchy'ego. Dla $n > m$ elementy $z_n$ i $z_m$ leżą w kuli o promieniu $2^{-m}$, zatem

$$d(z_n, z_m) \leqslant \frac{2}{2^m}.$$

Z założenia zupełności ciąg $z_n$ jest zbieżny. □

**Przykłady.**

1. Rozważmy przestrzeń $X = C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$ oraz ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sin nx.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx - \sin mx)^2 \, dx = 2$$

to

$$\|f_n - f_m\|_\infty \geqslant 1.$$

Zatem $f_n$ nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie. Można udowodnić, że nawet nie istnieje podciąg zbieżny punktowo.

2. Niech $X = C_{\mathbb{R}}[0,1]$. oraz

$$f_n(x) = \frac{x}{x + (1-nx)^2}.$$

Wtedy $f_n(x) \underset{n}{\to} 0$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Jednak $f_n$ nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie, bo taki podciąg musiałby być zbieżny do 0, a przecież dla $x = \frac{1}{n}$ mamy $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

**Definicja 10.5.** *Rodzinę funkcji $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ nazywamy* ***jednakowo ciągłą****, jeśli dla każdego punktu $x \in K$ i liczby $\varepsilon > 0$ istnieje otwarte otoczenie $U$ punktu $x$ takie, że*

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \quad y \in U, \ f \in \mathcal{A}.$$

**Uwaga 10.6.** Zbiór $U$, zależny od $x$ oraz $\varepsilon$, jest wybrany dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{A}$. Na tym polega jednakowa ciągłość.

**Definicja 10.7.** *Rodzina $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest* ***ograniczona*** *jeśli istnieje stała liczba $M$ taka, że*

$$\|f\|_\infty \leqslant C, \quad f \in \mathcal{A}.$$

**Twierdzenie 10.8** (Arzelà-Ascoli)**.** *Rodzina funkcji $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest warunkowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest jednakowo ciągła i ograniczona.*

*Dowód.*
($\Rightarrow$) Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z Twierdzenia 10.3 istnieją funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C_{\mathbb{R}}(K)$ takie, że

$$\mathcal{A} \subset B\Big(f_1, \tfrac{\varepsilon}{3}\Big) \cup B\Big(f_2, \tfrac{\varepsilon}{3}\Big) \cup \ldots \cup B\Big(f_n, \tfrac{\varepsilon}{3}\Big). \tag{10.1}$$

W szczególności zbiór $\mathcal{A}$ jest ograniczony przez

$$M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|f_j\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalmy $x \in K$. Istnieją otwarte otoczenia $U_1, U_2, \ldots, U_n$ takie, że

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U_j, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Niech $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. Wtedy $U$ jest otwartym otoczeniem punktu $x$ oraz

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Niech $f \in \mathcal{A}$. Wtedy z (10.1) mamy $f \in B(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$ dla pewnego $j = 1, 2, \ldots, n$. Zatem dla $y \in U$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|f(y) - f(x)| \\ &\qquad \leqslant |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Pokażemy, że rodzinę $\mathcal{A}$ można pokryć skończoną liczbą kul o promieniu $\varepsilon > 0$. Rodzina $\mathcal{A}$ jest ograniczona przez pewną stałą $M$, tzn.

$$|f(x)| \leqslant M, \quad f \in \mathcal{A}, \ x \in K.$$

Rodzina $\mathcal{A}$ jest jednakowo ciągła, więc dla każdego elementu $x \in K$ istnieje otoczenie $U_x \ni x$ takie, że mamy

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad f \in \mathcal{A}, \ y \in U_x. \tag{10.2}$$

Ponieważ

$$K = \bigcup_{x \in K} U_x,$$

to ze zwartości zbioru $K$ otrzymujemy

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_n} \tag{10.3}$$

dla pewnych punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podzielmy przedział wartości $[-M, M]$ na równe części punktami $-M = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = M$ tak, że

$$y_j - y_{j-1} < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Wykres każdej z funkcji $f \in \mathcal{A}$ leży w iloczynie kartezjańskim $K \times [-M, M]$. Rozważmy ciąg $n$ wskaźników $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, z których każdy pochodzi z $\{1, 2, \ldots, m\}$. Dla takiego ciągu określamy podzbiór w $C_{\mathbb{R}}(K)$ wzorem

$$\begin{aligned} B_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) \, : \, & f(x_1) \in [y_{j_1-1}, y_{j_1}], \\ & f(x_2) \in [y_{j_2-1}, y_{j_2}], \ldots, \ f(x_n) \in [y_{j_n-1}, y_{j_n}]\}. \end{aligned}$$

Każda funkcja z $\mathcal{A}$ należy do pewnego zbioru postaci $B_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$, czyli

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{m} B_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cap \mathcal{A}.$$

Zbadamy średnicę zbioru $B_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cap \mathcal{A}$. Niech $f, g \in B_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cap \mathcal{A}$. oraz $x \in K$. Wtedy z (10.3) wynika, że $x \in U_{x_k}$ dla pewnego $k = 1, 2, \ldots, n$. Dalej z (10.2) i z określenia zbiorów $B_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$ wnioskujemy, że

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Zatem średnica zbioru $B_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cap \mathcal{A}$ jest nie większa niż $\varepsilon$ co oznacza, że ten zbiór jest zawarty w pewnej kuli o promieniu $\varepsilon$. □

**Przykład.** Niech

$$\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1] \,:\, f \text{ różniczkowalna w } (0, 1),\ f(0) = 0,\ |f'(x)| \leqslant 1\}.$$

Wtedy zbiór $\mathcal{A}$ jest warunkowo zwarty, bo z

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$$

wynika jednakowa ciągłość funkcji z $\mathcal{A}$. Ponadto

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant x \leqslant 1,$$

czyli rodzina $\mathcal{A}$ jest ograniczona przez 1.

**Uwaga 10.9.** Twierdzenie Arzeli-Ascoliego pozostaje prawdziwe również dla $\mathcal{A} \subset C(K)$, czyli funkcji o wartościach zespolonych.

# 11 Odwzorowania zwężające i zastosowania

**Twierdzenie 11.1.** *Niech* $(X, d)$ *będzie przestrzenią metryczna zupełną a* $T : X \to X$ *będzie odwzorowaniem* ***zwężającym****, tzn. istnieje stała* $0 < \theta < 1$*, taka, że*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

*Wtedy odwzorowanie* $T$ *posiada jedyny punkt stały, tzn. punkt* $y \in X$ *taki, że* $Ty = y$.

**Uwaga 11.2.** Odwzorowanie zwężające jest ciągłe.

*Dowód.* Dla ustalonego punktu $x \in X$ rozważmy ciąg iteracji $x_n = T^n x$. Mamy

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(Tx_{k-1}, Tx_k) \leqslant \theta d(x_{k-1}, x_k).$$

Zatem

$$d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \theta^k (d(x_0, x_1).$$

Niech $n > m$. Wtedy

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant (\theta^m + \theta^{m+1} + \ldots + \theta^{n-1}) d(x_0, x_1) \leqslant \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Zatem ciąg $x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny z założenia o zupełności przestrzeni $X$. Niech $x_n \underset{n}{\to} y$. Wtedy $Tx_n \underset{n}{\to} Ty$. Z drugiej strony $Tx_n = x_{n+1} \underset{n}{\to} y$. Stad $Ty = y$, czyli $y$ jest punktem stałym odwzorowania $T$. Załóżmy, że również punkt $y'$ jest stały, tzn. $Ty' = y'$. Wtedy

$$d(y, y') = d(Ty, Ty') \leqslant \theta d(y, y').$$

Zatem $d(y, y') = 0$, czyli $y = y'$. □

## 11.1 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Niech $\varphi : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, gdzie $U$ jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $x_0 \in U$ oraz $\det D\varphi(x_0) \neq 0$. Pokażemy, że istnieje odwzorowanie odwrotne określone w otoczeniu punktu $y_0 = \varphi(x_0)$.

Poprzez zastosowanie przekształceń liniowych i przesunięć możemy założyć, że $x_0 = 0$, $y_0 = \varphi(0) = 0$ oraz $D\varphi(0) = I$. Możemy też założyć, że $U$ jest kulą otwartą o środku w 0.

Zapiszmy $\varphi$ w postaci

$$\varphi(x) = x + f(x) = y. \tag{11.1}$$

Wtedy funkcja $f$ jest klasy $C^1$ oraz $f(0) = 0$ i $Df(0) = 0$. Rozwiązania równania (11.1), czyli odwzorowania odwrotnego, będziemy szukać w postaci

$$x = y + g(y).$$

Z układu równań

$$x + f(x) = y \tag{11.2}$$

$$y + g(y) = x \tag{11.3}$$

usuwamy $x$ i otrzymujemy

$$y + g(y) + f(y + g(y)) = y.$$

Zatem

$$g(y) = -f(y + g(y)).$$

Chcemy znaleźć funkcję $g$ spełniającą powyższy wzór. Jeśli znajdziemy taką funkcję, to funkcja

$$\psi(y) = y + g(y)$$

będzie spełniać

$$\varphi(\psi(y)) = \psi(y) + f(\psi(y)) = \psi(y) + f(y + g(y)) = \psi(y) - g(y) = y.$$

W tym celu rozważmy przekształcenie

$$(Tg)(y) = -f(y + g(y)).$$

Zamierzamy znaleźć punkt stały przekształcenia $T$. Wiemy, że $Df(0) = 0$. Funkcja $f$ jest klasy $C^1$, zatem istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\|Df(x)\| \leqslant \frac{1}{2},\ \|x\|_2 \leqslant 2\delta, \tag{11.4}$$

gdzie po lewej stronie występuje norma macierzy jako odwzorowania $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy

$$B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\|_2 \leqslant \delta\}$$

oraz

$$X = \{g : B_\delta \to B_\delta \,:\, g \text{ jest ciągła}\}.$$

Określamy metrykę w $X$ wzorem

$$d(g_1, g_2) = \sup_{x \in B_\delta} \|g_1(x) - g_2(x)\|_2.$$

Wtedy $(X,d)$ jest przestrzenią metryczna zupełną, bo zbiór $B_\delta$ jest zwarty a funkcje $g \in X$ są ograniczone.

Pokażemy, że $T$ odwzorowuje $X$ w siebie i jest zwężające. Dla $g \in X$ funkcja $Tg$ jest ciągła. Ponadto dla $\|y\|_2 \leqslant \delta$ mamy

$$\|Tg(y)\|_2 = \|f(y+g(y))\|_2, \quad \|y+g(y)\|_2 \leqslant 2\delta.$$

Dalej dla $\|x\|_2 \leqslant 2\delta$ obliczamy

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \int\limits_0^1 Df(tx)\cdot x\,dt.$$

Zatem

$$\|f(x)\|_2 \leqslant \int\limits_0^1 \|Df(tx)\cdot x\|_2\,dt \leqslant \int\limits_0^1 \|Df(tx)\|\|x\|_2\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_2 \leqslant \delta.$$

Podstawiając $x = y + g(y)$ otrzymamy $\|Tg(y)\|_2 \leqslant \delta$ dla $\|y\| \leqslant \delta$, czyli $Tg \in X$. Sprawdzamy warunek zwężania. Mamy

$$f(b) - f(a) = \int\limits_0^1 Df(a+t(b-a))\cdot(b-a)\,dt.$$

Zatem

$$\|f(b) - f(a\|_2 \leqslant \int\limits_0^1 \|Df(a+t(b-a))\|\,dt\,\|b-a\|_2.$$

Podstawiamy $a = y + g_1(y)$ oraz $b = y + g_2(y)$ dla $g_1, g_2 \in X$ oraz $y \in B_\delta$. Wtedy $a, b \in B_{2\delta}$ zatem $a+t(b-a) \in B_{2\delta}$. Korzystając z (11.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|Tg_1(y) - Tg_2(y)\|_2 &= \|f(y+g_1(y)) - f(y+g_2(y))\|_2 \\ &\leqslant \int\limits_0^1 \|Df(a+t(b-a))\|\,dt\ \|g_2(y)-g_1(y)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|g_2(y)-g_1(y)\|_2.\end{aligned}$$

To oznacza, że

$$d(Tg_1, Tg_2) \leqslant \frac{1}{2} d(g_1, g_2).$$

Z Twierdzenia 11.1 wynika, że odwzorowanie $T$ posiada punkt stały $g \in B_\delta$. Ale wtedy na podstawie wzorów (11.2) i (11.3) funkcja $\psi(y) = y + g(y)$ jest odwzorowaniem odwrotnym do $\varphi$.

# 12 Twierdzenie Kreina-Millmana

Liniową przestrzeń topologiczną $V$ nazywamy ***lokalnie wypukłą*** jeśli istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych. Zauważmy, że przestrzeń unormowana $X$ ze słabą topologią jest przestrzenią lokalnie wypukłą, bo

$$U_{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon}(0) = \{y \in X \ : \ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j^*(y)| < \varepsilon\}$$

są wypukłymi podzbiorami w $X$. Podobnie przestrzeń $X^*$ z $*$-słabą topologią jest lokalnie wypukła, bo

$$U_{x_1,x_2,\ldots,x_n;\varepsilon}(0) = \{y^* \in Y^* \ : \ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |y^*(x_j)| < \varepsilon\}$$

są wypukłymi podzbiorami w $X^*$.

Niech $K$ będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowej $X$. Punkt $x$ z $K$ nazywamy ***ekstremalnym*** jeśli $x$ nie leży wewnątrz żadnego odcinka zawartego w $K$. Tzn. z warunku $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ dla $0 < \lambda < 1$ wynika, że $y_1 \notin K$ lub $y_2 \notin K$.

**Przykłady.**

(a) Dla zbioru wypukłego

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{j=1,2\ldots,n} |x_j| \leqslant 1\right\},$$

czyli $n$-wymiarowej kostki w $\mathbb{R}^n$, punktami ekstremalnymi są wektory $x$ postaci $|x_j| = 1$. Zatem $\#(E) = 2^n$.

(b) Dla zbioru wypukłego

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1,\ldots,n} |x_j| \leqslant 1\right\}$$

punkty ekstremalne mają postać $\pm e_j$, dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Czyli $\#\,(E) = \ 2n$.

(c) Dla kuli jednostkowej w $\ell^2$ każdy element sfery jednostkowej, czyli wektor spełniający $\|x\|_2 = 1$, jest punktem ekstremalnym. Własność ta wynika z faktu, że w przestrzeni z iloczynem skalarnym jeśli

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|, \quad x, y \neq 0,$$

to $y = ax$ dla pewnej liczby dodatniej $a > 0$.

Domknięty i wypukły podzbiór $S$ zbioru wypukłego $K$ nazywamy ***zbiorem podpierającym*** zbioru $K$, jeśli z warunków $y_1, y_2 \in K$, $0 < \lambda < 1$ oraz $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in S$ wynika, że $y_1, y_2 \in S$. Tzn. jeśli punkt wewnętrzny odcinka zawartego w $K$ leży w $S$, to cały odcinek leży w $S$. W szczególności punkt ekstremalny zbioru $K$ jest jednopunktowym zbiorem podpierającym zbioru $K$.

Dla zbioru z przykładu (c) każdy odcinek łączący dwa punkty na sferze jest zbiorem podpierającym. Z kolei odcinek łączący dwa punkty z wnętrza kuli nie jest zbiorem podpierającym.

**Lemat 12.1.** *Niech $\varphi$ będzie ciągłym rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni lokalnie wypukłej $X$ oraz $K$ zwartym podzbiorem wypukłym w $X$. Zbiór $S$ złożony z punktów zbioru $K$, w których funkcja*

$$K \ni x \mapsto \varphi(x)$$

*osiąga maksimum jest zwartym zbiorem podpierającym zbioru $K$.*

*Dowód.* Niech $m = \max\limits_{y\in K} \varphi(y)$. Wtedy

$$S = \{x \in K \, : \, \varphi(x) = m\}.$$

Zatem $S$ jest zwartym zbiorem wypukłym jako przekrój zbioru $K$ z domkniętym zbiorem afinicznym $\{x \in X \, : \, \varphi(x) = m\}$.

Załóżmy, że $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in S$ dla $y_1, y_2 \in K$ oraz $0 < \lambda < 1$. Wtedy

$$m = \varphi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2).$$

Zatem $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = m$, czyli $y_1, y_2 \in S$. □

Poniżej będziemy rozważać przestrzeń $V = X^*$ z $*$-słabą topologią.

**Lemat 12.2.** *Domknięcie zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.*

*Dowód.* Niech $V$ będzie zbiorem wypukłym. Rozważmy punkty $x, y \in \overline{V}$ i liczbę $0 < \lambda < 1$. Trzeba pokazać, że $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{E}$. Z założenia istnieją ciągi uogólnione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ o wyrazach pochodzących ze zbioru $V$, zbieżne do $x$ i $y$ odpowiednio. W zbiorze $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ określamy relację

$$(\alpha, \beta) \preceq (\alpha', \beta') \iff \alpha \preceq \alpha', \ \beta \preceq \beta'.$$

Wtedy $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jest zbiorem skierowanym. Określamy również dwa ciągi uogólnione $x_{\alpha,\beta}$ i $y_{\alpha,\beta}$ wzorami

$$x_{\alpha,\beta} = x_\alpha, \qquad y_{\alpha,\beta} = y_\beta.$$

Wtedy

$$x_{\alpha,\beta} \to x, \qquad y_{\alpha,\beta} \to y.$$

Z wypukłości zbioru $V$ wyrazy ciągu $(1-\lambda)x_{\alpha,\beta} + \lambda y_{\alpha,\beta}$ leżą w $V$. W związku z tym ich granica leży w $\overline{V}$. $\square$

Przekrój wszystkich domkniętych zbiorów wypukłych zawierających dany zbiór $E$ jest domkniętym zbiorem wypukłym, zawartym w każdym domkniętym zbiorze wypukłym zawierającym $E$. Taki zbiór nazywamy ***domkniętą wypukłą otoczką*** zbioru $E$.

Ten zbiór można opisać w inny sposób. Wypukła otoczka zbioru $E$ składa się ze wszystkich wypukłych kombinacji elementów zbioru $E$ czyli elementów postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \qquad x_k \in E,\ a_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Zbiór tych kombinacji oznaczany symbolem $\operatorname{conv}(E)$, jest zbiorem wypukłym zawierającym $E$. Po domknięciu otrzymujemy domknięty zbiór $\overline{\operatorname{conv}(E)}$ wypukły, na podstawie Lematu 12.2. Każdy zbiór wypukły zawierający $E$ musi zawierać $\operatorname{conv}(E)$. Zatem każdy domknięty wypukły zbiór zawierający $E$ musi zawierać $\overline{\operatorname{conv}(E)}$. Stąd $\overline{\operatorname{conv}(E)}$ jest domknięta wypukłą otoczką zzbioru $E$.

**Twierdzenie 12.3** (Krein-Millman)**.** *Niech $K$ będzie zwartym wypukłym podzbiorem lokalnie wypukłej przestrzeni topologicznej $X$. Wtedy $K$ jest domkniętą wypukłą otoczką swoich punktów ekstremalnych.*

*Dowód.* (**Kelley**) Przekrój zbiorów podpierających zbioru $K$ jest zbiorem podpierającym zbioru $K$. Ponadto jeśli $S$ jest zbiorem podpierającym zbioru $K$ oraz $T$ jest zbiorem podpierającym zbioru $S$, to $T$ jest zbiorem podpierającym zbioru $K$. Rzeczywiście, jeśli $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in T \subset S$ dla pewnych punktów $y_1, y_2 \in K$, to $y_1$, $y_2 \in S$, bo $S$ podpiera $K$. Ale wtedy $y_1$, $y_2 \in T$, bo $T$ podpiera $S$.

Rodzina wszystkich zbiorów podpierających zbioru $K$ jest częściowo uporządkowana przez zawieranie. Ponadto każdy łańcuch tej rodziny jest ograniczony od dołu przez przekrój zbiorów z łańcucha. Z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje minimalny zbiór podpierający $S$ zbioru $K$. Pokażemy, że $S$ jest jednopunktowy. Załóżmy, nie wprost, że $x \neq y \in S$. Wtedy z Twierdzenia 5.23(c)* istnieje ciągły funkcjonał liniowy $\varphi$ na $X$ taki, że $\varphi(x) > \varphi(y)$. Wtedy podzbiór $S_0$ zbioru $S$ złożony z punktów, w których $\varphi$ osiąga maksimum jest zbiorem podpierającym zbioru $S$, a zatem zbioru $K$. Zbiór $S_0$ nie zawiera $y$ zatem $S_0 \subsetneq S$.

Jeśli zbiór podpierający jest jednopunktowy $S = \{x\}$, to $x$ jest punktem ekstremalnym w zbiorze $K$. Rzeczywiście, jeśli $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, dla pewnych $y_1, y_2 \in K$ oraz $0 < \lambda < 1$, to $y_1, y_2 \in S$, czyli $y_1 = y_2 = x$. Pokazaliśmy w ten sposób, że każdy niepusty zbiór podpierający zawiera punkt ekstremalny zbioru $K$.

Rozważmy ciągły rzeczywisty funkcjonał liniowy $\varphi$. Zbiór punktów z $K$, dla których ten funkcjonał osiąga maksimum jest podpierający, czyli maksimum funkcjonału $\varphi$ na $K$ jest osiągnięte w punkcie ekstremalnym. Tzn.

$$\max_{x \in K} \varphi(x) = \max_{x \in E} \varphi(x),$$

gdzie $E$ oznacza zbiór punktów ekstremalnych zbioru $K$. Niech $C$ oznacza domkniętą wypukłą otoczkę zbioru $E$. Załóżmy, że $x \in K \setminus C$. Wtedy z Twierdzenia 5.23(c) istnieje ciągły rzeczywisty funkcjonał liniowy $\varphi$ taki, że

$$\varphi(x) > \max_{y \in C} \varphi(y) = \max_{y \in E} \varphi(y) = \max_{y \in K} \varphi(y).$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo $x \in K$. $\square$

**Uwaga.** Można przyjąć, że $X$ jest przestrzenią unormowaną ze słabą topologią lub $X$ jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej, z $*$-słabą topologią.

**Przykład.** Rozważmy kulę jednostkową $B$ w przestrzeni $c_0$. Kula nie posiada punktów ekstremalnych. Rzeczywiście załóżmy, że $x \in B$. Wtedy $|x_{n_0}| \leqslant \frac{1}{2}$ dla pewnego wskaźnika $n_0$. Zatem ciągi $u = x + \frac{1}{2}\delta_{n_0}$ oraz $v = x - \frac{1}{2}\delta_{n_0}$ należą do $B$. Ponadto $x = \frac{1}{2}(u+v)$. Z twierdzenia Kreina-Millmana i z twierdzenia Banacha-Alaoglu wynika, że $c_0$ nie jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej. Można to uzyskać również z Wniosku 5.10. Przypuśćmy, nie wprost, że $c_0 = X^*$. Wtedy $X$ byłaby nieskończenie wymiarową domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $X^{**} = c_0^* = \ell^1$. W szczególności $X$ byłaby przestrzenią Banacha. Z Wniosku 5.10 każdy element $x$ z $X \subset \ell^1$ osiąga swoją

*Twierdzenie 5.23(c) nie wymaga, aby przestrzeń $X$ była unormowana.

normę poprzez maksimum modułu na kuli jednostkowej w $c_0 = X^*$. Niech $x \in X$. Załóżmy, że dla ciągu $x = \{x_n\} \in \ell^1$ maksimum jest osiągnięte na ciągu $y = \{y_n\}$ z kuli jednostkowej w $c_0$. Wtedy $|y_n| \leqslant 1$ oraz $|y_n| < \frac{1}{2}$ dla $n \geqslant n_0$. Zatem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \\ = \sum_{n=1}^{n_0} |x_n|\,|y_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \\ \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| + \frac{1}{2}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| \end{aligned}$$

Zatem $x_n = 0$ dla $n \geqslant n_0$. To oznacza, że

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

gdzie $X_n$ oznacza przestrzeń ciągów w $X$ zerujących się od miejsca $n$. W związku z tym $X$ jest zbiorem I kategorii, co daje sprzeczność.

# 13 Dodatek

## 13.1 Komentarz do zadania 98

W zadaniu 98 trzeba pokazać, że jeśli $M$ i $N$ są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha $X$ oraz $M \cap N = \{0\}$ i $X = M + N$, to dla pewnej dodatniej stałej $c$ spełniony jest warunek

$$\|m + n\| \geqslant c(\|m\| + \|n\|), \qquad m \in M,\ n \in N. \tag{13.1}$$

Teza jest spełniona również, gdy $X' = M + N$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $X$, bo $X'$ jest wtedy przestrzenią Banacha.

Jeśli $M + N$ nie jest domkniętą przestrzenią w przestrzeni Banacha $X$, to warunek nie może być spełniony. Rzeczywiście, załóżmy, że ciąg $m_k + n_k \in M + N$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wtedy ciągi $m_k$ i $n_k$ spełniają ten warunek, zatem są zbieżne odpowiednio do $m \in M$ i $n \in N$. Wtedy ciąg $m_k + n_k$ jest zbieżny do $m + n$. To oznacza, że podprzestrzeń $M + N$ jest zupełna, czyli jest domkniętą podprzestrzenią w $X$.

Dla dwu podprzestrzeni $M$ i $N$ może się zdarzyć, że podprzestrzeń $M+N$ nie jest domknięta. Rozważmy ośrodkową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ z bazą $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Niech

$$f_k = \tanh k \left( e_{2k} + \frac{1}{\sinh k} e_{2k-1} \right).$$

Układ $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest ortonormalny. Określmy

$$M = \overline{\operatorname{lin}\{e_{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}\}}, \qquad N = \overline{\operatorname{lin}\{f_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}}.$$

Przekrój podprzestrzeni $M$ i $N$ jest zerowy. Rzeczywiście, załóżmy, że $x \in M \cap N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{2k}\rangle e_{2k} = x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, f_k\rangle f_k \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \tanh k \langle x, f_k\rangle e_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh k} \langle x, f_k\rangle e_{2k-1} \end{aligned}$$

Zatem $\langle x, f_k\rangle = 0$ dla $k \geqslant 1$. Czyli $x = 0$.

Podprzestrzeń $M+N$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Istotnie, załóżmy, że $x \perp M+N$. Wtedy $x \perp M$ i $x \perp N$. To oznacza, że $x \perp e_{2k}$ i $x \perp f_n$ dla $k \geqslant 1$. Zatem $x \perp e_{2k-1}$ dla $k \geqslant 1$, czyli $x = 0$.

Podprzestrzeń $M+N$ nie jest domknięta, bo nie jest spełniony warunek (13.1). Faktycznie, dla $m = e_{2k}$ i $n = -f_k$ mamy

$$\|m+n\| = \|e_{2n} - f_n\|^2 = \frac{4}{e^{2k}+1}, \qquad \|e_{2k}\| + \|f_k\| = 2$$

## 13.2 Komentarz do zadania 91

W zadaniu 91 trzeba wykazać, że dla rodziny ograniczonych operatorów liniowych $T_n : X \to Y$, gdzie $X$ jest przestrzenią Banacha, a $Y$ przestrzenią unormowaną, zbiór

$$A = \{x \in X \;\; \lim_n T_n x \text{ istnieje } \}$$

jest pierwszej kategorii lub $B = X$.

Teza nie musi być spełniona, gdy $X$ nie jest przestrzenią Banacha.

**Lemat 13.1.** *Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha $X$ istnieje niezerowy funkcjonał liniowy $\varphi$ taki, że* $\ker \varphi$ *nie jest zbiorem pierwszej kategorii.*

**Uwaga.** Funkcjonał $\varphi$ nie może być ograniczony. Rzeczywiście, jądro niezerowego funkcjonału ograniczonego jest domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową w $X$, zatem zbiorem o pustym wnętrzu.

*Dowód.* Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą Hamela przestrzeni $X$, czyli maksymalnym układem liniowo niezależnym. Wiemy, że układ ten jest nieprzeliczalny z twierdzenia Baire'a. Dla ciągu $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ określamy $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \setminus \{e_n\}_{n=1}^\infty$. Następnie definiujemy zbiory

$$A_n = \operatorname{lin}\{\mathcal{B}_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Wtedy $A_n \subsetneq A_{n+1}$. Każdy element $x \in X$ jest skończoną kombinacją liniową elementów z $\mathcal{B}_0$ i z $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Zatem $x \in A_n$ dla pewnej liczby $n$. To oznacza, że $X = \bigcup_n A_n$. Z twierdzenia Baire'a, dla pewnej liczby $n_0$ podprzestrzeń $A_{n_0}$ nie jest pierwszej kategorii. Zatem domknięcie przestrzeni $A_{n_0}$ zawiera kulę otwartą w $X$, co pociąga $\overline{A_{n_0}} = X$. Określmy funkcjonał $\varphi$ na $\mathcal{B}$ wzorem

$$\varphi(b) = \begin{cases} 1 & b = f_{n_0+1} \\ 0 & b \in \mathcal{B},\ b \neq f_{n_0+1} \end{cases}$$

Wtedy $\varphi$ rozszerza się do niezerowego funkcjonału liniowego na przestrzeni $X$. Zauważmy, że $A_{n_0} \subset \ker\varphi$, więc $\ker\varphi$ nie jest zbiorem pierwszej kategorii. $\square$

Rozważmy nieskończenie wymiarową ośrodkową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Z lematu wynika, że $\mathcal{H}$ zawiera właściwą podprzestrzeń liniową $V$, która nie jest zbiorem pierwszej kategorii. Podobnie jak w dowodzie lematu, wnioskujemy, że $\overline{V} = \mathcal{H}$. W podprzestrzeni $V$ wybieramy maksymalny układ ortonormalny $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Ten układ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H}$. Rzeczywiście, załóżmy, że $x \perp e_n$ dla $n \geqslant 1$. Zatem $x \perp V$, co pociąga $x \perp \overline{V} = \mathcal{H}$, czyli $x = 0$. Określmy operatory $T_n : \mathcal{H} \to V$ wzorem

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Wtedy dla $x \in \mathcal{H}$ mamy $T_n x \to x$, w przestrzeni $\mathcal{H}$. Zatem granica leży w $V$ tylko dla $x \in V$. Stąd mamy

$$A := \{x \in X \,:\, \lim_n T_n x \text{ istnieje}\} = V,$$

czyli $A$ nie jest zbiorem pierwszej kategorii.

# 14 Zadania

1. Udowodnić nierówność Höldera

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

gdzie $a, b \geqslant 0$, $p, q \geqslant 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wyznaczyć, kiedy zachodzi równość. `Wskazówka:`
(Sposób I) Naszkicować wykres funkcji $y = x^{p-1}$. Porównać pole prostokąta $[0, a] \times [0, b]$ z sumą pól dwu obszarów: (1) ograniczonego wykresem funkcji, osią $OX$, i prostą $x = a$, (2) ograniczonego wykresem funkcji, osią $OY$ i prostą $y = b$. (Sposób II) Przyjąć $b = 1$ i pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{p}x^p - x + \frac{1}{q}$ przyjmuje minimum w punkcie $x = 1$.

2. Pokazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

gdzie $x_i, y_i \geqslant 0$, $p, q$ jak poprzednio. Kiedy zachodzi równość ? `Wskazówka:` Założyć, że obie sumy $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ i $\sum_{i=1}^{n} y_i^q$ nie przekraczają 1. Zastosować poprzednie zadanie do każdego z iloczynów $x_i y_i$.

3. Pokazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\right| \ : \ \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \leqslant 1\right\},$$

gdzie $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $p$ i $q$ jak poprzednio.

4. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

określonej na $\mathbb{C}^n$. `Wskazówka:` Skorzystać z poprzedniego zadania.

5. Uogólnić trzy poprzednie zadania na sumy nieskończone.

6. Dla $p_2 \geqslant p_1 \geqslant 1$ i $n \in \mathbb{N}$ znaleźć najlepsze stałe w nierównościach

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1} \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2} \leqslant c_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1}.$$

7. Pokazać, że $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, jeśli $p_1 \leqslant p_2$. `Wskazówka:` Jeśli $\|x\|_{p_1} \leqslant 1$, to $|x_n| \leqslant 1$ dla wszystkich $n$.

8. Skonstruować ciąg $x \in \ell^2$ taki, że $x \notin \ell^p$ dla każdego $p < 2$.

9. Pokazać całkową nierówność Höldera

$$\int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x) \leqslant \left(\int_\Omega f(x)^p)\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g(x)^q)\right)^{1/q},$$

dla nieujemnych funkcji $f(x)$ i $g(x)$, $p$ i $q$ jak w zadaniu 1.

10. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

gdzie $f$ jest zespoloną funkcją na $\Omega$ i $p \geqslant 1$. `Wskazówka:` Wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru z zadania 3.

11. Wskazać normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ inną niż normy $\| \ \|_p$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ale taką, że $\|e_i\| = 1$ dla każdego z wektorów standardowej bazy $e_1, \ \ldots, \ e_n$.

12. Pokazać, że w przestrzeni liniowej unormowanej $X$ zbiory

$$\{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\} \qquad \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}$$

są domknięte.

13. Pokazać, że ciąg funkcji $f_n$ jest zbieżny do funkcji $f$ w normie przestrzeni $C[0,1]$ (tzn. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n$ jest jednostajnie zbieżny do $f$.

14. Udowodnić zupełność przestrzeni C[0,1]. `Wskazówka:` Dla ciągu Cauchy'ego $f_n$ pokazać zbieżność punktową korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$$

i z zupełności $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$). Niech $f$ będzie granicą punktową ciągu $f_n$. Pokazać, że $f$ jest jednostajną granicą ciągu $f_n$ korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant |f_m(t) - f(t)| + \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Pokazać, że $f$ jest ciągła, korzystając z nierówności

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_\infty.$$

`Uwaga:` Dowód przenosi się na przypadek $C(K)$ przestrzeni funkcji ciągłych na przestrzeni metrycznej (lub topologicznej) $K$.

15. Niech $c$ oznacza przestrzeń liniową ciągów zbieżnych o wyrazach zespolonych. Niech $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\geqslant 1} |x_n|$. Pokazać, że $c$ jest przestrzenią Banacha. Pokazać, że ciągi zbieżne do 0 tworzą domkniętą podprzestrzeń $c_0$ w $c$. `Wskazówka:` Można utożsamić $c$ z $C(K)$, gdzie $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup \{0\}$.

16. Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o gęstości wielomianów w C[-1,1] korzystając z tego, że każda funkcja ciągła o okresie $2\pi$ jest jednostajną granicą ciągu wielomianów trygonometrycznych. `Wskazówka:` Dla funkcji ciągłej $f(x)$ określonej na $[-1, 1]$ funkcja $f(\cos t)$ ma okres $2\pi$ i jest parzysta. Z tego powodu można ją aproksymować jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi postaci

$$a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt.$$

Zauważyć, że $\cos nt$ jest wielomianem od $\cos t$ tzn.

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

gdzie $T_n$ jest wielomianem stopnia $n$. Pokazać, że funkcję $f(x)$ można aproksymować jednostajnie wielomianami postaci

$$a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x).$$

17. Dla funkcji ciągłej $f$ na przedziale $[0, 1]$ określamy wielomian Bernsteina wzorem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k.$$

Pokazać, że $B_n(f)$ jest jednostajnie zbieżny do $f$. `Wskazówka:` Zajrzeć do książki S. /Lojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych (rozdział II §3, Twierdzenie 1).

18. Udowodnić, że jeśli $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$ w przestrzeni unormowanej $X$, to $x_n + y_n \to x + y$. Pokazać, że jeśli $\lambda_n \to \lambda$, gdzie $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$, to $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

19. Pokazać zupełność przestrzeni $L^p(0,1)$, dla $p \geqslant 1$. `Wskazówka:` Postępować tak jak w przypadku $p = 1$. Skorzystać z nierówności
$$\| \sum |f_n| \,\|_p \leqslant \sum \|f_n\|_p.$$

20. W przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ znaleźć odległość funkcji $x^n$ od dwuwymiarowej podprzestrzeni $E = \{ax + b \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$.

21. Pokazać, że dla $0 < p < 1$ funkcjonał $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ określony na ciągach dla których szereg występujący w definicji jest zbieżny, nie jest normą, bo nie spełnia warunku trójkąta. Pokazać, że spełnione są nierówności
$$\|x + y\|_p^p \leqslant \|x\|_p^p + \|y\|_p^p, \qquad \|x + y\|_p \leqslant 2^{1/p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p).$$

22. Pokazać, że $L^1(0,1)$ zawiera dwie liniowo niezależne funkcje $f$ i $g$ takie, że $\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$. Pokazać, że w normie przestrzeni $L^p(0,1)$, dla $1 < p < \infty$, taka sytuacja nie jest możliwa.

23. Pokazać, że jeśli $X$ $Y$ są przestrzeniami unormowanymi z normami $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, to ich suma prosta $X \oplus Y$ jest przestrzenią unormowaną z normą
$$\|x \oplus y\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$
Pokazać, że jeśli $X$ i $Y$ są zupełne, to również $X \oplus Y$ jest zupełna.

24. Dla ciągu $X_n$ przestrzeni unormowanych z normami $\|\cdot\|_{X_n}$ określamy sumę prostą $X$
$$X = \Big\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;|\; x_n \in X_n,\; \|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n} < \infty \Big\}.$$
Pokazać, że $X$ jest przestrzenią unormowaną z normą $\|\{x_n\}\|$. Pokazać, że $X$ jest zupełna jeśli wszystkie $X_n$ są przestrzeniami zupełnymi.

25. Udowodnić, że jeśli podzbiory $A \subset B$ przestrzeni metrycznej $X$ spełniają warunek, że $A$ jest gęsty w $B$ oraz $B$ jest gęsty w $X$, to $A$ jest gęsty w $X$.

26. Wykorzystać poprzednie zadanie aby udowodnić, że wielomiany o współczynnikach wymiernych stanowią gęsty podzbiór przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ z normie $\|\cdot\|_\infty$. Udowodnić, że ciągi $(x_n)_{n=1}^\infty$ o skończenie wielu wyrazach niezerowych takich, że $x_n \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ stanowią gęsty podzbiór każdej przestrzeni $\ell^p$ dla $1 \leqslant p < \infty$, w normie $\|\cdot\|_p$.

$*$27. Dla domkniętej podprzestrzeni $M$ w przestrzeni Banacha $X$ z normą $\|\cdot\|_X$, określamy przestrzeń ilorazową $X/M$ jako przestrzeń klas równoważności względem relacji w $X$

$$x \sim y \quad \text{jeśli} \quad x - y \in M.$$

Oznaczając klasę równoważności elementu $x \in X$ przez $[x]$ określamy dodawanie i mnożenie przez skalar wzorem

$$\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y].$$

Pokazać, że ta definicja jest poprawna, tzn. prawa strona zależy jedynie od klas równoważności, z których pochodzą $x$ i $y$, a nie od samych elementów $x$ i $y$.
Określmy

$$\|[x]\| = \inf_{m\in M} \|x - M\|_X.$$

Pokazać, że ta funkcja ma własności normy. Pokazać, że $X/M$ z tą normą jest przestrzenią Banacha. `Wskazówka:` Pokazać, że jeśli $\sum \|[x_n]\| < \infty$, to szereg $\sum [x_n]$ jest zbieżny. W tym celu dla każdego $n$ wybrać $m_n \in M$ tak, aby

$$\|x_n - m_n\|_X \leqslant 2 \inf_{m\in M} \|x_n - m_n\|_X.$$

Zauważyć, że szereg $\sum (x_n - m_n)$ jest zbieżny w $X$. Oznaczając jego sumę przez $s$ pokazać, że $[s] = \sum [x_n]$ w $X/M$.

28. Niech $X = C[0,1]$ i $M = \{f \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Pokazać, że $X/M$ można utożsamić z $\mathbb{C}^2$, z normą $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

$*29.$ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha $X$. Określmy odwzorowanie $J : \ell^1 \to X$, wzorem

$$J \,:\, \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

(a) Pokazać, że odwzorowanie $J$ jest ciągłe.

(b) Pokazać, że ker$J$ jest domknięte i że $J$ „podnosi" się do ciągłego odwzorowania $\hat{J}$ z przestrzeni ilorazowej $\ell^1/\ker J$ w $X$.

(c) Pokazać, że $\operatorname{Im} \hat{J} = X$. `Wskazówka.` Przy ustalonym $x$, $\|x\| = 1$, wybrać indukcyjnie $x_{n(i)}$ tak aby

$$\|x - \sum_{i=1}^{k} 2^{-i+1} x_{n(i)}\| < 2^{-k-1}., \quad k = 0, 1, \ldots$$

(d) Zamieniając w (c) liczbę 2 na 3,4, ..., pokazać, że $\hat{J}$ jest izometrią.

30. Znaleźć normę operatora identycznościowego z $L^p(a, b)$ w $L^q(a, b)$.

31. Rozważamy przestrzeń $X = \mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_2$. Niech $A$ będzie macierzą symetryczną wymiaru $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych. Pokazać, że norma operatora liniowego związanego z $A$ z przestrzeni $X$ w siebie, jest równa największej z liczb $|\lambda|$, gdzie $\lambda$ jest wartością własną macierzy $A$. Jaka jest norma operatora liniowego związanego z macierzą ortogonalną $U$, tzn. taką, że $U^T = U^{-1}$.

32. Dla jakich funkcji $a(x)$ operator mnożenia przez $a(x)$ jest ciągłym odwzorowaniem z $L^p(0, 1)$ w $L^q(0, 1)$ ?

33. Obliczyć normę operatora

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x - t) dt$$

w przestrzeni $C[-\pi, \pi]$ i w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$, gdzie $D_n(t) = 1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos nt$.

34. Podzbiór $A$ przestrzeni unormowanej $X$ nazywamy ograniczonym, jeśli $\sup_{a \in A} \|a\| < \infty$. Pokazać, że operator liniowy $T : X \to Y$ z przestrzeni unormowanej $X$ w przestrzeń unormowaną $Y$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ograniczone podzbiory $X$ w ograniczone podzbiory $Y$.

35. $X, Y, Z$ są trzema przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \to Y$ i $T_2 : Y \to Z$ są operatorami liniowymi ograniczonymi. Pokazać, że złożenie $T_2T_1$ jest operatorem ograniczonym z $X$ do $Z$ oraz $\|T_2T_1\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\|$. Pokazać, że jeśli $T : X \to X$ jest operatorem liniowym ograniczonym, to dowolna potęga $T^n$ (w sensie złożenia) jest operatorem ograniczonym oraz $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$.

36. Pokazać, że jeśli $T \neq 0$ jest operatorem liniowym ograniczonym z $X$ do $Y$ oraz $\|x\| < 1$ dla pewnego $x \in X$, to $\|Tx\| < \|T\|$.

37. Pokazać, że operator $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ określony wzorem

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \ldots, \tfrac{1}{n}x_n, \ldots)$$

jest liniowy i ograniczony.

38. Pokazać, że obraz $\operatorname{Im} T$ operatora liniowego ograniczonego $T : X \to Y$ nie musi być domkniętą podprzestrzenią w $Y$. `Wskazówka:` Poprzednie zadanie.

39. Pokazać, że jądro ograniczonego operatora liniowego $T : X \to Y$, tzn. $\ker T = \{x \in X |\ Tx = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią w $X$.

40. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ operatora $T : X \to Y$ nie musi być ograniczone. `Wskazówka:` Zadanie 37.

41. Znaleźć obraz operatora $T : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Znaleźć operator odwrotny $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to C[0,1]$. Czy $T$ jest liniowy i ograniczony ?

42. Na $C[0,1]$ określamy operatory $S$ i $T$ wzorami

$$(Tf)(x) = x\int_0^1 f(t)\, dt \qquad (Sf)(x) = xf(x).$$

Czy operatory $T$ i $S$ są przemienne, tzn. czy $TS = ST$ ? Obliczyć normy operatorów $S$, $T$, $ST$, i $TS$.

43. Niech $X$ będzie przestrzenią liniową wszystkich ograniczonych funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}$ z normą
$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$
Dla ustalonej liczby $\delta$ określmy odwzorowanie $(Tf)(x) = f(x-\delta)$. Pokazać, że $T$ jest ograniczonym operatorem liniowym $X$ w siebie.

44. Pokazać, że normy w przestrzeniach $\ell^p$ oraz $L^p(0,1)$ nie pochodzą od iloczynu skalarnego dla $p \neq 2$. `Wskazówka:` Wskazać dwa elementy, dla których nie zachodzi równość równoległoboku.

45. Pokazać, że jeśli $\langle x, y\rangle = 0$, to $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa ? Podać przykład.

46. W przestrzeni z iloczynem skalarnym warunek $\|x\| = \|y\|$ implikuje $\langle x+y, x-y\rangle = 0$. Co to oznacza geometrycznie ?

47. Sprawdzić tożsamość Apoloniusza w przestrzeni z iloczynem skalarnym.
$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \tfrac{1}{2}(x+y)\|^2.$$
Pokazać, że można ją uzyskać z równości równoległoboku.

48. Pokazać, że jeśli $x, y \neq 0$ oraz $\langle x, y\rangle = 0$, to wektory $x$ i $y$ są liniowo niezależne. Rozszerzyć tę własność na większą liczbę wektorów.

49. Udowodnić, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $y_n \xrightarrow{n} y$, to $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n} \langle x, y\rangle$.

50. Pokazać, że $\langle x, y\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|$ dla wszystkich skalarów $\alpha$.

51. Podzbiór $A$ przestrzeni liniowej nazywamy wypukłym, jeśli z warunku $x, y \in A$ wynika, że $\frac{1}{2}(x+y) \in A$. Pokazać, że jeśli $A$ jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to dla każdego wektora $x \in \mathcal{H}$ istnieje jedyny wektor $z \in A$ spełniający
$$\|x-z\| = \inf\{\|x-y\| \,:\, y \in A\}.$$
`Wskazówka:` Przeanalizować dowód z wykładu dotyczący przypadku, gdy $A$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

Pokazać, że teza nie jest prawdziwa dla przestrzeni Banacha, tzn. kres dolny może nie być osiągnięty. W szczególności teza nie jest spełniona dla domkniętych podprzestrzeni w $C[0,1]$ i w $\ell^1$.

52. Pokazać, że w niepustym i domkniętym zbiorze wypukłym $A$ przestrzeni Hilberta istnieje element $z$ taki, że
$$\|z\| = \inf\{\|y\| \,:\, y \in A\}.$$

53. Pokazać, że domknięcie zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.

54. Pokazać, że zbiór $M = \{x = (x_i) \,:\, \sum x_i = 1\}$ w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest wypukły i domknięty. Znaleźć w $M$ element o najmniejszej normie euklidesowej.

55. Dla zbioru $M$ w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ przez $M^\perp$ oznaczamy zbiór wektorów $x$ takich, że $\langle x, v\rangle = 0$ dla wszystkich $v \in M$. Pokazać, że $M^\perp$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

56. Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to
$$A \subset A^{\perp\perp} \qquad\qquad B^\perp \subset A^\perp \qquad\qquad A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$$

57. Pokazać, że dla podzbioru $A$ w przestrzeni Hilberta, $A^{\perp\perp}$ jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą $A$.

58. Niech $A$ oznacza podzbiór przestrzeni $\ell^2$ złożony ciągów absolutnie sumowalnych o sumie współrzędnych równej 0. Pokazać, że $A$ jest podprzestrzenią liniową w $\ell^2$. Znaleźć domknięcie zbioru $A$ w przestrzeni $\ell^2$.

59. Pokazać, że jeśli $M$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, to $M^{\perp\perp} = M$.

60. Podzbiór $A$ unormowanej przestrzeni liniowej nazywamy liniowo gęstym jeśli przestrzeń lin$A$ jest gęsta. Pokazać, że podzbiór $A$ przestrzeni Hilberta jest liniowo gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $A^\perp = \{0\}$.

61. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku rzeczywistego, tzn. pokazać, że norma spełniająca warunek równoległoboku

na rzeczywistej przestrzeni liniowej pochodzi od rzeczywistego iloczynu skalarnego. `Wskazówka:` Zdefiniować funkcję

$$R(x,y) = \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Następnie pokazać, że ta funkcja określa iloczyn skalarny według poniższego schematu.

(a) Pokazać, że $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ oraz $\langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle$.

(b) Korzystając z równości równoległoboku wykazać, że

$$\langle x_1 + x_2, 2y\rangle = 2\langle x_1,y\rangle + 2\langle x_2,y\rangle.$$

(c) Na podstawie (b) udowodnić, że $\langle x,2y\rangle = 2\langle x,y\rangle = \langle 2x,y\rangle$, a następnie

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle.$$

(d) Udowodnić przez indukcję, że

$$\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a następnie

$$\langle rx,y\rangle = r\langle x,y\rangle, \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

(e) Zauważyć, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$, to $\langle x_n,y\rangle \xrightarrow{n} \langle x,y\rangle$. Pokazać, że zatem

$$\langle rx,y\rangle = r\langle x,y\rangle, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

62. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku zespolonego. `Wskazówka:` Określmy $R(x,y)$ jak w zadaniu 1. Następnie niech

$$\langle x,y\rangle = R(x,y) - iR(ix,y).$$

(a) Pokazać, że $R(ix,y) = -R(x,iy)$ a następnie $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.

(b) Pokazać, że $\langle ix,y\rangle = i\langle x,y\rangle$ a następnie na podstawie zadania 1 $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$.

63. Dla rzeczywistej przestrzeni liniowej unormowanej $X$ określamy przestrzeń $V = X + iX$ z normą $\|x+iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, dla $x,y \in X$. Pokazać, że $V$ jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Pokazać, że

jeśli norma w $X$ spełnia warunek równoległoboku, to również norma w $V$ spełnia ten warunek. Pokazać, że $V$ jest zespoloną przestrzenią unormowaną z mnożeniem

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y), \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in X$$

wtedy i tylko wtedy, gdy norma w $X$ spełnia warunek równoległoboku.

64. Macierzą Grama układu wektorów $\{x_i\}_{i=1}^n$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywamy macierz $((x_j, x_i))_{i,j=1}^n$. Pokazać, że wyznacznik macierzy Grama nie znika wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\{x_i\}_{i=1}^n$ są liniowo niezależne. `Wskazówka:` Jeśli wektory są liniowo zależne, to wiersze macierzy są liniowo zależne. To dowodzi implikacji w jedną stronę. Dla dowodu w drugą stronę zastosować indukcję względem $n$. Zauważyć, że wyznacznik Grama można zapisać jako iloczyn skalarny wektora $v_n$ z wektorem $x_n$, gdzie

$$v_n = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \dots & (x_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_1, x_{n-1}) & (x_2, x_{n-1}) & \dots & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Pokazać, że $v_n$ jest ortogonalny do wektorów $x_1, \dots, x_{n-1}$. Niech $\Delta_k$ oznacza wyznacznik Grama pierwszych $k$ wektorów układu. Pokazać, że $(v_n, v_n) = \Delta_{n-1}\Delta_n$. Jeśli wyznacznik Grama znika, to $v_n = 0$. To oznacza, że wektor $x_n$ jest liniową kombinacją pozostałych wektorów, bo z założenia indukcyjnego współczynnik przy $x_n$ jest niezerowy (współczynnik ten jest równy $\Delta_{n-1}$).
Pokazać, że wyznacznik Grama jest zawsze nieujemny.

65. Niech $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Pokazać, że wektory

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} v_n$$

stanowią układ ortonormalny o własnościach:

(a) $y_n \perp \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$;

(b) $(y_n, y_n) = 1$;

(c) $(y_n, x_n) > 0$;

(d) $\mathrm{lin}\{y_1, \dots, y_n\} = \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Pokazać, że warunki (a)–(d) wyznaczają układ $\{y_n\}$. Przejście od układu $\{x_n\}$ do układu $\{y_n\}$ nosi nazwę procesu ortogonalizacji Grama–Schmidta.

66. Niech $\mathcal{H} = L^2(-1, 1)$ oraz $x_n(t) = t^{n-1}$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że układ $x_n$ jest liniowo niezależny. Znaleźć $y_1$, $y_2$ oraz $y_3$.

67. Niech

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Pokazać, że $H_n$ jest wielomianem stopnia $n$. Udowodnić, że

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m,$$

tzn. $H_n$ tworzą układ ortogonalny w $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. $H_n$ nazywamy wielomianami Hermite'a.

68. Sprawdzić, że układ funkcji Haara $h_{m,n}(x)$, $m \geqslant 0$, $1 \leqslant n \leqslant 2^m$, gdzie $h_{0,1} = 1$ oraz

$$h_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2} & \dfrac{n-1}{2^m} \leqslant x < \dfrac{2n-1}{2^{m+1}}, \\ -2^{m/2} & \dfrac{2n-1}{2^m} \leqslant x < \dfrac{n}{2^m}, \\ 0 & x < \dfrac{n-1}{2^m} \text{ lub } x \geqslant \dfrac{n}{2^m}, \end{cases}$$

jest ortonormalny względem iloczynu skalarnego $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$. Czy istnieje niezerowa funkcja ciągła (całkowalna z kwadratem) na przedziale $[0, 1]$ ortogonalna do wszystkich funkcji tego układu ?

69. Znaleźć rzuty ortogonalne wektorów na podane podprzestrzenie:
(a) $f(x) = x^3$, $M = \mathrm{lin}\{1, x\}$, $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.
(b) $f(x) = x$, $M = \mathrm{lin}\{1, \cos x, \sin x\}$, $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$.

70. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni $\mathcal{H}$.
    (a) $\varphi(f) = \int_0^1 x f(x) dx, \qquad \mathcal{H} = L^2(0,1).$
    (b) $\varphi(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx).$
    (c) $\varphi(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}, \qquad \mathcal{H} = \ell^2.$

71. Czy funkcjonał $f \mapsto f(0)$ rozszerza się z $C[-1,1]$ do ograniczonego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta $L^2(-1,1)$ ?

72. Pokazać, że iloczyn skalarny na przestrzeni z iloczynem skalarnym jest ograniczoną formą półtoraliniową.

73. Formą hermitowską nazywamy formę półtoraliniową spełniającą
$$B(y,x) = \overline{B(x,y)}.$$
Pokazać, że ograniczona forma hermitowska jest postaci
$$B(x,y) = \langle x, Ay \rangle$$
dla ograniczonego operatora liniowego spełniającego $A^* = A$.

74. Formę półtoraliniową nazywamy nieujemną jeśli $B(x,x) \geqslant 0$ dla wszystkich wektorów $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że forma nieujemna jest hermitowska oraz spełnia nierówność Schwarza
$$|B(x,y)|^2 \leqslant B(x,x)B(y,y).$$

75. Dla nieujemnej formy półtoraliniowej $B(x,y)$ określmy $p(x) = \sqrt{B(x,x)}$. Pokazać, że $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ oraz $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

76. Pokazać, że $\|A^*\| = \|A\|$ dla ograniczonego operatora liniowego $A$ w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.

77. Dla zespolonej funkcji $k(x,y)$ ciągłej określamy operator
$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy$$
dla $f \in L^2(0,1)$. Sprawdzić, że $A$ jest ograniczony. Znaleźć operator $A^*$.

78. Znaleźć operator sprzężony do operatora

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

określonego na $\mathcal{H} = L^2(0,1)$.

79. Pokazać, że odwzorowanie $A \mapsto A^*$ na przestrzeni $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ jest antyliniowe.

80. Pokazać, że dla $A$, $B \in B(\mathcal{H})$ mamy $(AB)^* = B^*A^*$.

81. Niech $A : \to\mathcal{H}$ będzie ograniczonym operatorem odwracalnym. Pokazać, że $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

82. Niech $A$ będzie ograniczonym operatorem na $\mathcal{H}$ spełniającym $A(M_1) \subset M_2$, dla podprzestrzeni $M_1$, $M_2 \subset \mathcal{H}$. Pokazać, że $A^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$.

83. Pokazać, że dla operatora $A \in B(\mathcal{H})$ zachodzi

$$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp \qquad \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)^\perp.$$

84. Pokazać, że jeśli dwa operatory liniowe $T_1$, $T_2$ spełniają $\langle T_1 x, x\rangle = \langle T_2 x, x\rangle$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$, to $T_1 = T_2$.

85. Dla ograniczonego operatora liniowego $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ określamy operator $S = I + T^*T$, gdzie $I$ oznacza operator identycznościowy. Pokazać, że $S$ spełnia

$$\|x\| \leqslant \|Sx\| \leqslant (1 + \|T\|^2)\|x\|.$$

Następnie pokazać, że $S$ jest różnowartościowy i że podprzestrzeń $\operatorname{Im} S$ jest domknięta. Korzystając z zadania 13 udowodnić, że $\operatorname{Im} S$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Pokazać, że $S$ jest odwracalny oraz $\|S^{-1}\| \leqslant 1$.

86. Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ma skończenie wymiarowy obraz. Pokazać, że $T$ ma postać

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j$$

dla pewnych wektorów $v_j, w_j \in \mathcal{H}$.

87. Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \to Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami unormowanymi, ma skończenie wymiarowy obraz. Pokazać, że $T$ ma postać
$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) w_j,$$
dla pewnych elementów $w_j \in Y$ oraz ograniczonych funkcjonałów liniowych $\varphi_j$ określonych na $X$.

88. Niech $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}$. Określmy operator prawego przesunięcia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ przez $Te_n = e_{n+1}$, dla $n = 1, 2, \cdots$. Znaleźć obraz, jądro i normę operatora $T$ i $T^*$. Obliczyć $T^*T$ oraz $TT^*$.

89. Znaleźć normę operatora $T$ określonego na $\ell^2(\mathbb{N})$ przez
$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots),$$
dla ustalonego ograniczonego ciągu liczb zespolonych.

90. $T_n$ jest ciągiem ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni unormowanej $X$ w przestrzeń Banacha $Y$. Pokazać, że zbiór $\{x \in X : \lim\limits_{n\to\infty} T_n x \text{ istnieje}\}$ jest równy $X$ lub jest zbiorem I-ej kategorii. `Wskazówka:` Niech
$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : \lim_{n\to\infty} T_n x \text{ istnieje}\}, \\ B &= \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| < +\infty\}. \end{aligned}$$
Mamy $A \subset B$. Jeśli $A$ nie jest pierwszej kategorii to również $B$ nie jest I-ej kategorii. Zatem normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że wtedy $A$ jest domknięty. Ponieważ nie jest I-ej kategorii, to zawiera kulę otwartą. Ale $A$ jest podprzestrzenią liniową. Zatem $A = X$.

(∗∗) Pokazać, że teza nie musi być spełniona jeśli $Y$ nie jest przestrzenią Banacha.

91. Niech $T_n$ będą ograniczonymi operatorami liniowymi z przestrzeni Banacha $X$ w przestrzeń unormowaną $Y$. Pokazać, że jeśli $T_n x$ jest zbieżny dla każdego $x$ z przestrzeni Banacha $X$, to normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że operator określony wzorem
$$Tx = \lim_n T_n x$$

jest ograniczony oraz $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

92. Niech $a_n$ będzie ciągiem o wyrazach zespolonych o własności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $\{x_n\} \in c_0$. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. `Wskazówka:` Rozważyć funkcjonały $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ dla $x \in c_0$.

93. Ciąg $x_n$ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ma własność $\sup_n |(y, x_n)| < +\infty$ dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$. Pokazać, że $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. `Wskazówka.` Rozważyć funkcjonały liniowe $y \mapsto (y, x_n)$.

94. $^*$ $\{a_{mn}\}_{n,m=0}^{\infty}$ jest macierzą zespoloną o własności : dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n^{(m)}$ jest rozbieżny. Pokazać, że istnieje taki ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n$ jest rozbieżny dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$.

95. Ciąg elementów $x_n$ w przestrzeni unormowanej $X$ ma własność, że ciąg liczbowy $\varphi(x_n)$ jest ograniczony dla dowolnego ciągłego funkcjonału $\varphi$ określonego na $X$. Pokazać, że ciąg $\|x_n\|$ jest ograniczony.

96. Niech $X$ oznacza przestrzeń unormowaną złożoną z ciągów zespolonych $x = \{x_n\}$ dla których tylko skończenie wiele wyrazów jest różnych od zera, z normą $\|x\| = \max_n \|x_n|$. Określmy operator liniowy $T : X \to X$ wzorem
$$Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots).$$
Pokazać, że $T$ jest ograniczony, ale $T^{-1}$ nie jest ograniczony. Czy to przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu otwartym ?

97. $X$ jest przestrzenią Banacha względem dwu norm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, przy czym $\|\cdot\|_1 \leqslant c\|\cdot\|_2$, dla pewnej stałej $c$. Pokazać, że $\|\cdot\|_2 \leqslant d\|\cdot\|_1$, dla pewnej stałej $d$.

98. $M$, $N$ są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha $X$ takimi, że każdy element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie $x = m+n$, $m \in M$, $n \in N$. Pokazać, że istnieje stała $c$ taka, że $\|m\| + \|n\| \leqslant c\|x\|$, dla każdego $x \in X$.

99. Niech $C_{per}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych o okresie $2\pi$. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy na tej przestrzeni ma postać $\varphi(f) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)dg(x)$ dla pewnej funkcji lewostronnie ciągłej funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz $\|\varphi\| = Var(g)$.

100. Operator $T$ jest określony na $C(\mathbb{T})$ następująco:

$$Tf = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \widehat{f}(n) e^{inx},$$

dla pewnego ustalonego ciągu $a_n$, gdzie $\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$. Załóżmy, że $Tf \in C(\mathbb{T})$ dla dowolnej $f \in C(\mathbb{T})$. Pokazać, że $T$ jest ograniczonym operatorem liniowym na $C(\mathbb{T})$. `Wskazówka:` Sprawdzić, że $T$ ma domknięty wykres.

101. Pokazać, jeśli operator $T$ z przestrzeni unormowanej $X$ w przestrzeń unormowaną $Y$ ma domknięty wykres oraz $T^{-1}$ istnieje, to również $T^{-1}$ ma domknięty wykres. `Wskazówka:` Znaleźć związek pomiędzy wykresami operatorów $T$ i $T^{-1}$.

102. Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \to Y$ ma domknięty wykres natomiast $T_2 : X \to Y$ jest ograniczony. Pokazać, że $T_1 + T_2$ ma domknięty wykres.

103. Pokazać, że jądro operatora liniowego $T : X \to Y$ o wykresie domkniętym jest domkniętą podprzestrzenią w $X$.

∗104. Niech $T$ będzie ograniczonym różnowartościowym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha $X$ w przestrzeń Banacha $Y$. Pokazać, że jeśli obraz $T(X)$ jest domknięty, to istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla $S \in B(X, Y)$ jeśli $\|T - S\| \leqslant \varepsilon$, to $S$ jest różnowartościowy. Pokazać, że jeśli obraz $T(X)$ nie jest domknięty, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje operator $S \in B(X, Y)$ taki, że $\|S - T\| < \varepsilon$ oraz $S$ nie jest różnowartościowy.

∗105. Niech $T$ będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha $X$ na przestrzeń Banacha $Y$. Pokazać, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla $S \in B(X, Y)$ jeśli $\|T - S\| \leqslant \varepsilon$, to $S(X) = Y$. `Wskazówka:` Wyznaczyć $\varepsilon$ z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. Następnie dla

$y \in Y$ skonstruować $x$ tak, aby $Sx = y$ naśladując dowód twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

106. Niech $\mathcal{A}$ będzie samosprzężoną podalgebrą w $C(K)$ oraz $a, b$ dwoma ustalonymi punktami w zwartej przestrzeni Hausdorffa $K$. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ nie znika w $K$ oraz rozdziela dowolne dwa punkty $x_1$ i $x_2$ z wyjątkiem $a$ i $b$. Udowodnić, że każdą funkcję $f \in C(K)$ o własności $f(a) = f(b)$ można jednostajnie przybliżyć funkcjami z $\mathcal{A}$.

107. Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ istnieje ciąg wielomianów $p_n(x)$ taki, że
$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p_n(x) - f(x)| + \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p_n'(x) - f'(x)| \xrightarrow{n} 0.$$

108. Czy każda funkcja ciągła z $C([0,1] \cup [2,3])$ jest jednostajną granicą wielomianów ?

109. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wielomianów $p(x)$ o własności $p''(0) = 0$. Czy każda funkcja ciągła z $C[1,2]$ jest jednostajną granicą elementów z $\mathcal{A}$ ?

110. Czy dla $\varepsilon > 0$ i funkcji $f \in C[0,1]$ można znaleźć wielomian $p(x)$ taki, że $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ oraz $p(2) = 5$, $p'(2) = 6$ ?

111. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = L^2((0,1) \times (0,1))$. Pokazać, że jeśli funkcja $h(x,y) \in \mathcal{H}$ spełnia
$$\int_0^1 \int_0^1 h(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy = 0, \qquad f, g \in L^2(0,1)$$
to $h(x,y) = 0$ prawie wszędzie.

112. Funkcja $f \in C[0,1]$ spełnia
$$\int_0^1 x^{10n} f(x)\, dx = 0, \qquad n \geqslant 10.$$
Pokazać, że $f = 0$.

113. Pokazać, że dla miary $\sigma$-skończonej $\mu$ na zbiorze $X$ przestrzenią sprzężoną do $L^1(X,\mu)$ jest $L^\infty(X,\mu)$. `Uwaga:` W przestrzeni $L^\infty(X,\mu)$ norma jest określona przez
$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| \;:\; A \subset X,\ \mu(A) = 0 \right\}.$$

114. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni $L^p(\mathbb{R},\mu)$.

(a) $\varphi(f) = \int\limits_0^1 f(x)dx, \qquad d\mu(x) = dx$

(b) $\varphi(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx, \quad d\mu(x) = e^{-x^2}dx.$

(c) $\varphi(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-n}, \qquad \mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n.$

115. Które z funkcjonałów określonych na wielomianach rozszerzają się do ograniczonych funkcjonałów na $C[0,1]$ ?

(a) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0,$

(b) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_1,$

(c) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \ldots \frac{1}{n+1}a_n,$

(d) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots 2^na_n.$

116. $\Lambda$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym nad $\mathbb{C}$ na przestrzeni funkcji $C[0,1]$ o wartościach zespolonych. $\Lambda$ nazywamy samosprzężonym jeśli $\Lambda(\bar{f}) = \overline{\Lambda(f)}$. Pokazać, że $\Lambda$ jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda(f)$ przyjmuje wartości rzeczywiste dla rzeczywistych funkcji $f$. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał $\Lambda$ liniowy można rozłożyć na sumę $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$, gdzie $\Lambda_1, \Lambda_2$ są samosprzężone, oraz rozkład ten jest jedyny.

117. Funkcjonał $\Lambda$ na rzeczywistej przestrzeni $C_{\mathbb{R}}(X)$, gdzie $X$ jest zwartą przestrzenią topologiczną, nazywamy dodatnim jeśli $\Lambda(f) \geqslant 0$, dla każdej nieujemnej funkcji $f$. Pokazać, że $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, gdzie $\mathbf{1}$ oznacza funkcję stale równą 1. `Wskazówka.` Skorzystać z nierówności $-\|f\|_\infty\mathbf{1} \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty\mathbf{1}$. Pokazać, że jeśli funkcjonał $\Lambda$ spełnia $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, to $\Lambda$ jest funkcjonałem dodatnim. `Wskazówka.` Jeśli $0 \leqslant f \leqslant 1$, to $\|2f - 1\| \leqslant 1$.

118. Załóżmy, że liczby $m_n$ mają własność

$$\forall x \in [0,1] \ \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_nm_n \geqslant 0,$$

dla dowolnych $n$ i $a_k \in \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca $\sigma$ na przedziale $[0,1]$ taka, że

$$m_n = \int\limits_0^1 x^n d\sigma(x).$$

`Wskazówka:` Określić funkcjonał $\varphi$ na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_nm_n.$$

Z założenia $\varphi$ jest dodatni. Pokazać, że $|\varphi(p)| \leqslant m_0\|p\|_\infty$, gdzie $p$ jest wielomianem. Pokazać, że $\varphi$ rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego funkcjonału $\Phi$ na $C_\mathbb{R}[0,1]$. Zauważyć, że $\Phi$ jest dodatni. Skorzystać z twierdzenia Riesza o postaci funkcjonałów na $C_\mathbb{R}[0,1]$.

119. Niech $\sigma$ będzie funkcją niemalejącą na $[0,1]$. Dla $n \geqslant 0$ liczby $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$ nazywamy momentami funkcji $\sigma$. Pokazać, że momenty są liczbami nieujemnymi oraz spełniają warunek

$$\Delta^N m_n \geqslant 0 \qquad \text{dla} \quad N \geqslant 1, n \geqslant 0,$$

gdzie $\Delta m_n = m_n - m_{n+1}$ i $\Delta^N = \Delta(\Delta^{N-1})$. `Wskazówka:` Obliczyć$\Delta^N x^n$ i zauważyć, że $\Delta^N\varphi(x^n) = \varphi(\Delta^N x^n)$, gdzie $\varphi$ jest określone jak w zadaniu 15.

$*$120. Ciąg liczb nieujemnych $m_n$, $n \geqslant 0$ nazywamy całkowicie monotonicznym jeśli

$$\Delta^N m_n \geqslant 0 \qquad \text{dla} \quad N \geqslant 1, n \geqslant 0.$$

Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca $\sigma$ na $[0,1]$ taka, że $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$. `Wskazówka:` Pokazać, że funkcjonał $\varphi$ określony na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_nm_n$$

jest dodatni. W tym celu udowodnić, że jeśli $p$ jest wielomianem nieujemnym stopnia $N$, to wielomiany Bernsteina $B_n(p)$ są wielomianami stopnia $N$ dla $n \geqslant N$. Ponadto z założenia $\varphi(B_n(p)) \geqslant 0$ oraz $\varphi(p) = \lim_n B_n(p)$.

# Literatura

[1] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, Teoriia lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve I, Kharkov, Vyshcha shkola, 1977-78 (ros.); Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York, Dover, 1993 (ang.).

[2] J. Chmieliński, Analiza funkcjonalna Notatki do wykładu, Wydawnictwo: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej 2004.

[3] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators, Part 1: General Theory (Vol 1) , New York, Wiley, 1958.

[4] A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover Publications Inc. 1982.

[5] J. Górniak, T. Pytlik, Analiza funkcjonalna w zadaniach, Wyd. Pol. Wr., 1992.

[6] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, New York, Wiley 1989.

[7] S. Prus, A. Stachura, Analiza funkcjonalna w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa, 2007.

[8] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis, New York, Academic Press 1972

[9] H. Royden, Real Analysis, MacMillan Publishing Co., 1968.

[10] W. Rudin, Analiza funkcjonalna, PWN Wydawnictwo Naukowe 2001.

[11] J.Rusinek: Zadania z analizy funkcjonalnej z rozwiązaniami, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego 2006.