Algebra II (ISIM), lista 5 (30.11.2021, deklaracje do 9:00).

Teoria: Wyliczenie małych grup (do rzędu 8 włącznie). Ósemkowa grupa kwaternionów $\mathbb{Q}_8$. Grupy abelowe: suma prosta grup abelowych. p-prymarna składowa. Część torsyjna. Grupa beztorsyjna. $G_t = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} G_p$. Wolna grupa abelowa. Podgrupa wolnej grupy abelowej rangi skończonej jest wolna. Skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych (informacyjnie). Skończenie generowana grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

1. $^-$ Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe rzędu 12, bez powtórzeń.

2. $^-$ Załóżmy, że $f : G \to (\mathbb{Z}, +)$ jest epimorfizmem grup abelowych. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{Z}, +) \times Ker(f)$ (wsk: powtórzyć dowód z wykładu).

3. Udowodnić, że każda grupa abelowa jest homomorficznym obrazem wolnej grupy abelowej.

4. Dowieść, że jeśli $H < Z(G)$ i G/H jest cykliczna, to G jest abelowa.

5. Załóżmy, że $G < (\mathbb{Z}^n, +)$. Niech $g_i \in G$ będzie takie, że współrzędne g_i o indeksach $< i$ są zerowe, zaś (pod tym warunkiem) i-ta współrzędna g_i jest najmniejsza możliwa > 0 . Jeśli takiego g_i nie ma, przyjmujemy $g_i = 0$. Udowodnić, że elementy $g_1, \dots, g_n$ generują grupę G.

6. (a) Czy $(\mathbb{Q}, +)$ jest wolną grupa abelową?
   (b) Czy grupa S_∞ (zespolonych pierwiastków z jedności) jest sumą prostą grup cyklicznych?
   (wsk: mówimy, że grupa abelowa G jest podzielna, gdy $(\forall x \in G)(\forall n > 0)(\exists y \in G) ny = x$. Rozważyć, czy grupy z zadania są podzielne.)

7. Załóżmy, że G jest grupą abelową i $G_1, \dots, G_n < G$. Dowieść, że $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n \iff$
   (1) $G = G_1 + \dots + G_n$
   (2) jeśli $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$ i $x_1 + \dots + x_n = 0$, to $x_1 = \dots = x_n = 0$.

8. Załóżmy, że $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ są bazami wolnej grupy abelowej G. Udowodnić, że bazy te są równoliczne w następujący sposób: Niech p będzie ulubioną liczbą pierwszą. Rozważyć grupę ilorazową G/pG, która jest sumą prostą pewnej liczby grup cyklicznych rzędu p.
   (a) Gdy $\mathcal{B}$ lub $\mathcal{C}$ jest skończona, obliczyć rząd grupy G/pG odwołując się do baz $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.
   (b)* gdy obie bazy są nieskończone, użyć algebry liniowej nad ciałem $\mathbb{Z}_p$.

9. Mówimy, że podgrupa H grupy G jest charakterystyczna, gdy $f[H] = H$ dla każdego automorfizmu f grupy G. UdowodniÄ‡, że:
   (a)– jeśli H jest charakterystyczna w G, to $H \lhd G$.

(b) $Z(G)$ jest charakterystyczna w G.
(c)* Jeśli w grupie G zachodzi równość $x^2 = e$, to jedyne charakterystyczne podgrupy grupy G to sama G i podgrupa trywialna.

10. * Ile wynosi suma elementów skończonej grupy abelowej?