ZAD. 3.

Pokazac, ze ciag funkcji f_n *zbiega do funkcji* f *w normie przestrzeni* $C[0,1]$ *(tzn.* $\|f_n - f\| \to \infty$*)* $\iff$ *gdy* f_n *jest jednostajnie zbiezny do* f.

Po pierwsze, jaka kurwa jest norma w przestrzeni $C[0,1]$?

Dla przestrzeni $C[0,1]$ okreslilismy tak zwana norme jednostajna, to znaczy

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

LOL

Teraz co to jest zbieznosc jednostajna?

Wikipedia mowi

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n \geq N)(\forall\, x \in X)\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$

Wychodzimy z $\|f_n - f\| \to \infty\infty$, czyli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n \geq N)\ \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Ustalmy wiec dowolny $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje N takie, ze dla kazdego $n > N$ mamy

$$\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty$$

i dla dowolnego $x \in [0,1]$:

$$\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)|,$$

czyli f_n zbiega jednostajnie do f.

$\Longleftarrow$

Wychodzimy z tego, ze f_n jest zbiezne jednostajnie do f. Ustalmy wiec dowolny $\varepsilon > 0$. Wiemy, ze wtedy istnieje N takie, ze dla kazdego $n \geq N$ zachodzi

$$(\forall\, x \in [0,1])\ |f_n - f| < \varepsilon,$$

czyli zachodzi to w szczegolnosci dla x takiego, ze $\max_{x\in[0,1]} |f_n - f| = \|f_n - f\|_\infty$. W takim razie dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy N takie, ze dla kazdego $n \geq N$ prawdziwe jest

$$\varepsilon > \|f_n - f\|$$

ZAD. 4.

Udowodnic zupelnosc przestrzeni $C[0,1]$.

Wskazowka: Dla ciagu Cauchy'ego f_n pokazac zbieznosc punktowa korzystajac z nierownosci

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

i z zupelnosci $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$). Niech f bedzie granica punktowa ciagu f_n. Pokazac, ze f jest jednostajna granica ciagu f_n korzystajac z nierownosci:

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_m(t) - f(t)| + \|f_n - f_m\|_\infty$$

Pokazac, ze f jest ciagle, korzystajac z nierownosci

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_\infty.$$

Uwaga: Dowod prznosi sie na przypadek $C(K)$ przestrzeni funkcji ciaglych na zwartej przestrzeni metrycznej (lub topologicznej) K.

....

Wezmy dowolny ciag Cauchy'ego $f_n \in C[0,1]$. Czyli zachodzi

$$(\forall\, \varepsilon)(\exists\, N)(\forall\, n, m > N)\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Wezmy wiec dowolny $\varepsilon > 0$ i n, m spelniajace

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Latwo zauwazyc, ze dla dowolnego $t \in [0,1]$ jest

$$\|f_n - f_m\| \geq |f_n(t) - f_m(t)|.$$

Niech wiec f bedzie funkcja taka, ze dla kazdego $t \in [0,1]$ $f(t)$ to granica ciagu $f_n(t)$, ktora istnieje bo $f_n(t)$ jest ciagiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, a $\mathbb{R}$ jest przestrzenia zupelna wiec $f_n(t)$ posiada granice.
Chcemy teraz pokazac, ze f jest granica jednostajna ciagu f_n.

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\| = \|f_n - f - f_m + f\| \geq |\|f_n - f\| - \|f_m - f\|| \geq \|f_n - f\| - \|f_m - f\|$$

z czego wynika, ze

$$\|f_n - f_m\| + \|f_m - f\| \geq \|f_n - f\|$$

i jakiegos dla dowolnego $t \in [0,1]$

$$\|f_n - f_m\| + |f_m(t) - f(t)| \geq |f_n(t) - f(t)|.$$

Chcemy pokazac, ze w takim wypadku mozemy ograniczyc $|f_n(t) - f(t)|$ przez dowolnego $\varepsilon > 0$.
Wezmy dowolny $\varepsilon > 0$. Z warunku ciagu Cauchyego mamy, ze istnieje wtedy N takie, ze $n, m \geq N$ zapewnia nam

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|.$$

Co wiecej, mozemy to m dostosowac tak, zeby

$$\varepsilon > |f_m(t) - f(t)|$$

w takim razie

$$2\varepsilon > \|f_n - f_m\| + |f_m(t) - f(t)| \geq |f_n(t) - f(t)|.$$

Pozostaje pokazac, ze f jest funkcja ciagla, czyli

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x, y \in [0,1])\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wezmy dowolnego $\varepsilon > 0$ i takie $s, t \in [0,1]$, ze $|f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon$. Pokazalismy tez, ze f_n zbiega jednostajnie do f, wiec n musi byc takie, ze $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Wtedy mamy

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_\infty \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

i f jest funkcja ciagla.

ZAD. 5.

Niech c oznacza przestrzen liniowa ciagow zbieznych o wyrazach zespolonych. Niech $\|\{x_n\}\| = \sup_{n \geq 1} |x_n|$. *Pokazac, ze c jest przestrzenia Banacha. Pokazac, ze ciagu zbiezne do 0 tworza domknieta podprzestrzen* c_0 *w c.*
Wskazowka: Mozna utozsamic c z $C(K)$ gdzie $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup \{0\}$.

....

Mamy juz norme na tej przestrzeni, wiec nie trzeba jej unormowywac. Wystarczy, ze c bedzie przestrzenia zupelna.

Wezmy dowolny ciag Cauchy'ego $(a_n)_n$ z przestrzeni c. Chcemy znalezc jego granice.
Po pierwsze, poniewaz elementy $(a_n)_n$ sa ciagami zbieznymi, to dla kazdego n istnieje granica.
Niech wiec ciag b zawiera na n-tym miejscu granice n-tego ciagu z $(a_n)_n$, to zanczy

$$b(n) = \lim_{m \to \infty} a_n(m).$$

Pokazemy, ze b jest ciagiem Cauchy'ego o wyrazach zespolonych, co z zupelnosci $\mathbb{C}$ da nam jego zbieznosc.
Poniewaz $(a_n)_n$ jest ciagiem Cauchy'ego, to dla dowolnego ε znajdziemy sobie miejsce od ktorego dla wszystkich n, m zachodzi

$$\varepsilon > \|a_n - a_m\| \geq |\|a_n\| - \|a_m\|| \geq |\|a_n\| - b(n) - \|a_m\| - b(m)| \geq |\|a_n\| - b(n)| - |\|a_m\| - b(m)|$$

Ustalmy sobie $\varepsilon > 0$. Chce, zeby dla niego istnialo N takie, ze dla kazdego $n \geq N$ $\|a_n - b\| < \varepsilon$.
Dla ulatwienia niech $\|a_n - b\| \geq \|a_m - b\|$.

$$\|a_n - a_m\| = \|a_n - b - a_m + b\| \geq |\|a_n - b\| - \|a_m - b\||$$

WROCIC DO TEGO

ZAD. 6.

Udowodnic twierdzenie Weierstrassa o gestosci wielomanow w $C[-1,1]$ *korzystajac z tego, ze kazda funkcja ciagla o okresie* 2π *jest jednostajna granica ciagu wielomianow trygonometrycznych.*
Wskazowka: Dla funkcji ciaglej $f(x)$ okreslonej na $[-1,1]$ funkcja $f(\cos t)$ ma okres 2π i jest parzysta. Z tego powodu mozna ja aproksymowac jednostajnie wilomianami trygonometrycznymi postaci

$$a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt.$$

Zauwazyc, ze $\cos nt$ jest wilomianem od $\cos t$, tzn:

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

gdzie T_n jest wielomianem stopnia n. Pokazac, ze funkcje $f(x)$ mozna aproksymowac jednostajnie wilomianami postaci

$$a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x)$$

NIE WIEM, NIE MYSLE

ZAD. 7.

Dla funkcji ciaglej f *na przedziale* $[0,1]$ *okreslamy wielomian Bernsteina wzorem*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k$$

Pokazac, ze $B_n(f)$ *jest jednostajnie zbiezny do* f.
Wskazowka: Zajrzec do ksiazki S. Lojasiewicz, *Wstep do teorii funkcji rzeczywistych* (rozdzial II §3. Twierdzenie 1).