G. Plebanek	*Kombinatoryka*	nr 11 (27.05)

Kojarzenia raz jeszcze

1. Zauważyć, że jeżeli w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$, gdzie $|S| = |T| = n$ nie ma zbiorów blokujących mocy $< n$ to graf spełnia warunek Halla $|G[A]| \geqslant |A|$ dla każdego $A \subseteq S$.

2. Dana jest szachownica $m \times n$, w której niektóre pola są zakazane (na przykładzie zaznaczane krzyżykami). Zadanie polega na umieszczeniu maksymalnej liczby niezależnych pionków na pozostałych polach; pionki są niezależne jeśli żadne dwa nie stoją w tej samej kolumnie i tym samym wierszu. Zauważyć, że jest to inna wersja zagadnienia kojarzenia w grafie dwudzielnym. W związku z tym dla danego ustawienia etykietowanie (poszukujące lepszego ustawienia) wygląda następująco (dlaczego?):

(a) Nadajemy etykiete $(-)$ wierszom bez pionków;

(b) dla danego wiersza i z etykietą nadajemy etykietę (i) tym kolumnom, które na przecięciu z tym wierszem mają dopuszczalne pole wolne;

(c) dla danej kolumny j z etykietą nadajemy etykietę (j) tym wierszom. które na przecięciu mają pionek; wracamy do (b).

Przykładowy zestaw do ćwiczeń :

◯	×	×					1
	×	×	×	×	◯	×	2
	◯	×	×				3
×		×	×	×		×	4
		×	×	×	×	×	5
1	2	3	4	5	6	7	

3. Wąskie gardło. Dla danej macierzy $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ szukamy takiej permutacji σ, która maksymalizuje wielkość

$$v(\sigma) = \min_{k \leqslant n} a_{k\sigma(k)}.$$

Taki problem powstaje, gdy mamy n pracowników i taśmę produkcyjną złożóną z n stanowisk pracy. Pracownik i osiąga wydajność a_{ij} pracując na stanowisku j. Zauważmy, że taka optymalna permutacja maksymalizuje wydajność taśmy.

Dla danej permutacji σ rozważamy szachownicę $n \times n$. Pole (i, j) uznajemy za dopuszczalne gdy $a_{ij} > v(\sigma)$ i niedopuszczalne w przeciwnym razie. Zauważyć, że σ nie jest optymalna tylko wtedy gdy na tej szachownicy można ustawić n niezależnych pionków.

4. Zoptymalizować prace 6 pracowników przy podanej poniżej tabeli wydajności rozpoczynając od przypadkowej permutacji.

1	3	2	6	0	1
4	2	3	8	3	1
8	1	1	5	0	9
3	5	4	8	8	3
2	6	9	5	2	4
3	2	3	6	7	1

Nieskończone twierdzenia Ramseya

5. Wykazać, że każdy ciąg $x_n \in \mathbb{R}$ zawiera podciąg stały, podciąg rosnący lub podciąg malejący.

6. Wykazać, że dla dowolnej skończonej rodziny różnowartościowych funkcji $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, na którym wszystkie te funkcje są monotoniczne.

7. Wykazać, że każdy nieskończony zbiór częściowo uporządkowany zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.

8. Niech $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie częściowo uporządkowany 'po osiach', czyli $(n_1, n_2) \preceq (k_1, k_2)$ gdy $n_1 \leqslant k_1$ i $n_2 \leqslant k_2$. Udowodnić, że każdy nieskończony $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zawiera nieskończony łańcuch w porządku $\preceq$.

9. Uogólnić poprzednie zadanie na przypadek $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

10. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będą zbiorami takimi że $|A_n \bigtriangleup A_k| \geqslant 7$ dla $n \neq k$. Udowodnić, że istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \ldots$, taki że

(i) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geqslant 4$ dla wszystkich $i > j$, lub

(ii) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geqslant 4$ dla wszystkich $i < j$.

Skończone Twierdzenia Ramseya

11. Krawędzie grafu pełnego K_6 pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Pokazać na przykładzie, że taki fakt nie zachodzi dla grafu K_5. W oznaczeniach z wykładu oznacza to, że $R(3,3) = 6$.

12. Krawędzie grafu K_{17} pokolorowano trzema kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Sprawdzić, że liczba 16 jest tutaj za mała. W analogicznej notacji (dla trzech kolorów) zadanie oznacza, że $R(3,3,3) = 17$. Jak twierdzi Wikipedia, nie wiadomo czy $R(3,3,4) = 30$ czy też 31. Może nam się uda:-)

13. Jak wiemy z wykładu, $R(n,n) \leqslant \binom{2n-2}{n-1}$. Znaleźć oszacowanie na $R(n,n,n)$; na przykład zauważyć, że dla $N = R(n,n)$ zachodzi $R(n,n,n) \leqslant R(N,N)$.

14. Udowodnić, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje $S(r)$ (liczba Schura), to jest taka liczba naturalna, że dla dowolnego kolorowania elementów z $A = \{1, 2, \ldots, S(r)\}$ istnieją trzy elementy $x, y, z \in A$ tego samego koloru, spełniające równanie $x + y = z$.

Wskazówka: W razie trudności patrz 3.1 w tym opracowaniu.

15. Przy okazji rozważania grafów pełnych: Udowodnić Lemat 7.7 (z wykładu o drzewach), który dowodzi twierdzenia Caley'a o ilości drzew rozpinających w grafie K_n.