ANALIZA III - LISTA 5

1. Pokazać, że w układzie równań

$$\begin{aligned} 3x+2y+z^2+u+v^2&=0\\ 4x+3y+z+u^2+v+w+2&=0\\ x+z+w+u^2+2&=0 \end{aligned}$$

można wyrazić u, v, w jako funkcje od x, y, z w otoczeniu $x=y=z=0$, $u=v=0$ i $w=-2$.

Wyliczyć $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial w/\partial x$ w punkcie $x=y=z=0$, $u=v=0$ i $w=-2$.

2. Zbadać czy z układu

$$\begin{aligned} u=&x+xyz\\ v=&y+xy\\ w=&z+2x+3z^2 \end{aligned}$$

można obliczyć x, y, z względem u, v, w w otoczeniu $x=y=z=0$.

3. Pokazać, że z układu

$$\begin{aligned} xy^2+xzu+yv^2&=3\\ u^3yz+2xv-u^2v^2&=2 \end{aligned}$$

można obliczyć $u(x,y,z)$ i $v(x,y,z)$ w otoczeniu $(x,y,z)=(1,1,1)$, $(u,v)=(1,1)$? Obliczyć $\partial v/\partial y$ w $(x,y,z)=(1,1,1)$.

4. Niech $f(x,y)=((x^2-y^2)/(x^2+y^2)), xy/(x^2+y^2))$, $(x,y)\neq 0$. Czy f jest lokalnie odwracalne w pobliżu $(x,y)=(0,1)$?

5. Pokazać, że jeżeli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia $f'(x)\neq 0$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, to f jest $1-1$ na $\mathbb{R}$. Określmy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ wzorem $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Pokazać, że $\det Df(x,y)\neq 0$ dla wszystkich (x,y), lecz f nie jest $1-1$.

6*. Określmy, funkcje $x, y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ wzorami $x(r,\theta)=r\cos\theta$ i $y(r,\theta)=rsin\theta$. Pokazać, że

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\Big|_{r_0,\theta_0}=r_0$$

Kiedy można utworzyć C^1 funkcję odwrotną $r(x,y), \theta(x,y)$? Sprawdzić bezpośrednio i z użyciem twierdzenia o funkcji odwrotnej. Pokazać, że te odwzorowania dają odwzorowanie 1-1 i C^1 w obie strony między $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, 2\pi)$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$. W tym sensie r, θ dają nowe współrzędne w $\mathbb{R}^2$, zwane radialnymi.

7*. Rozważmy przekształcenia dla współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^3$: $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$. Pokazać, że

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi$$

Kiedy możemy wyliczyć (ρ, φ, θ) jako funkcje od (x,y,z)? Analogicznie jak w poprzednim zadaniu znaleźć zbiory otwarte, gdzie mamy 1-1 i zrozumieć, że ρ, φ, θ dają nowe współrzędne.

8*. Dla $t \in \mathbb{R}$ rozważmy macierz $[a_{ij}(t)]$, której wyrazy są klasy C^1. Załóżmy, że dla każdego t, $\det[a_{ij}(t)] \neq 0$, a $b_1, ..., b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są klasy C^1. Niech $s_1, ..., s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem układu równań

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) s_j(t) = b_i(t), \quad i = 1, ..., n.$$

Pokazać bez rachunków, że funkcje $s_i(t)$ są klasy C^1.

9*(5 punktów). Określmy funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}$, gdy $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Wykorzystać f by pokazać, że z twierdzenia o funkcji odwrotnej nie można wyeliminować ciągłości pochodnej. *Wsk. Wyliczyć f', naszkicować jakościowo wykres funkcji f.*

10*(5 punktów). Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Pokazać, że nie jest wzajemnie jednoznaczna. *Wsk. Rozważyć funkcję $g(x,y) = (f(x,y), y)$ lub $g(x,y) = (x, f(x,y))$. Można też zrobić topologicznie przy założeniu samej ciągłości.* Czy to samo zachodzi, gdy f jest określona na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$ tzn. $f : U \to \mathbb{R}$, f klasy C^1? Wtedy pytamy czy może być różnowartościowa.