Uwaga: W zależności od źródła i pierwotnego problemu, w numeracji liczb Catalana może wystąpić przesunięcie. Na wykładzie liczba C_n była zdefiniowana jako liczba nawiasów we wzorze $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. W poniższych zagadnieniach lepiej liczyć od 0; wtedy rekurencja Catalana ma postać

$$(RC) \quad C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0,$$

przy czym $C_0 = 1$. W zależności od interpretacji, mamy więc

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} \quad \text{lub} \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

1. Rozważmy spacery po kracie od punktu $(0,0)$ do (n,n), za każdym razem posuwamy się o jeden w prawo lub do góry (jak ta sekretarka na Manhattanie). Udowodnić, że C_n jest liczbą spacerów niewychodzących ponad przekątną.

Wskazówka: Sprawdzamy (RC) powyżej. Zauważyć, że składnik $C_{k-1}C_{n-k}$ we wzorze wylicza liczbę tych spacerów, kóre wchodzą na przekątna w punkcie (k,k), a wcześniej, po opuszczeniu początku tego nie robiły.

2. Pokaż, że następujące liczby są liczbami Catalana (w razie problemów z interpretacją załóżmy, że $C_0 = C_1 = 1$):

(i) liczba połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta, tak by odpowiadające mu przekątne (lub boki) się nie przecinały,

(ii) liczba podziałów $(n+2)$-kąta wypukłego przekątnymi na trójkąty,

(iii) liczbie ciągów $(x_1, \ldots, x_{2n})$ (słów Dycka), takich że

$$x_i \in \{-1, 1\}, \quad \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 0 \text{ dla każdego } k \leqslant 2n.$$

3. Znajdź (*wygooglaj*) inne kombinatoryczne interpretacje liczb Catalana, na przykład ilość drzew binarnych.

4. Oblicz liczbę kształtów, jakie można uzyskać, ustawiając jednakowe monety w stos tak, ze w najniższym poziomie znajduje się n monet ułożonych jedna obok drugiej w linii, a każda moneta w następnej warstwie musi się opierać na dwu połówkach monet leżących poniżej.

5. Sprawdzić, że $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. Znajdź kombinatoryczny dowód tej formuły.

Wskazówka: Rozważyć spacery z zadania 1: Policzyć wszystkie i te 'złe', wychodzące ponad przekątną.

6. Udowodnij kombinatorycznie, że liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \geqslant 1$, spełniających warunek $f(i) \leqslant i$ dla $i \leqslant n$, wynosi $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

7. Niech S_n oznacza liczbę (nieuporządkowanych) par spacerów (γ_1, γ_2) długości n na płaszczyźnie o tej własności, że każdy spacer wykonuje kroki tylko w prawo lub w góre długości jeden, spacery zaczynają się w punkcie $(0,0)$ i mają wspólne tylko końce. Jak liczby S_n są związane z liczbami Catalana?