Zadania z ⋆⋆ LISTA 12

Weronika Jakimowicz

28 grudnia 2023

ZAD. 12

Niech f będzie funkcją ciągłą taką, że $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje i jest ciągła. Pokazać, że

$$\frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)dzdy = \int_c^d f(x,x,z)dz + \int_a^x\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dzdy$$

Rozważmy funkcję

$$g(x,y) = \int_c^d f(x,y,z)dz$$

oraz

$$h(x) = \int_a^x g(x,y)dy.$$

Będziemy liczyć

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)dzdy = \lim_{t\to 0}\frac{h(x+t)-h(x)}{t}.$$

Dla ułatwienia zapisu, sprawdźmy najpierw jak będzie wyglądał licznik powyższego ułamka:

$$h(x+t)-h(x) = \int_a^{x+t} g(x+t,y)dy - \int_a^x g(x,y)dy =$$

$$= \int_a^x [g(x+t,y)-g(x,y)]dy + \int_x^{x+t} g(x+t,y)dy$$

Wartość drugiego elementu tej sumy, to znaczy

$$\int_x^{x+t} g(x+t,y)dy$$

możemy ocenić za pomocą twierdzenia o wartości średniej, czyli istnieje $\xi \in [x, x+t]$ takie, że

$$\int_x^{x+t} g(x+t,y)dy = (x+t-x)f(x,\xi).$$

Teraz wracając do całości:

$$\frac{d}{dx}h(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\int_a^x [g(x+t,y)-g(x,y)]dy + \int_x^{x+t} g(x+t,y)dy\Big) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_a^x \frac{g(x+t,y)-g(x,y)}{t}dy + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_x^{x+t} g(x+t,y)dy =$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_a^x \frac{g(x+t,y)-g(x,y)}{t}dy + \lim_{t\to 0}\frac{x+t-x}{t}g(x+t,\xi) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_a^x \frac{g(x+t,y)-g(x,y)}{t}dy + g(x,x),$$

bo w drugim składniku $\frac{x+t-x}{t} = \frac{t}{t} = 1$ natomiast $\xi \in [x, x+t]$ szerokość tego przedziału zmierza do 0, więc $\xi = x$. Teraz chcemy włożyć lim pod całkę, więc musimy pokazać, że $\frac{g(x+t,y)-g(x,y)}{t}$ zbiega jednostajnie do $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$. Popatrzmy na ciąg

$$p_n(x, y) = \frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}}.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $n \to \infty$ mamy to samo co dla $t \to 0$, natomiast z ciągłości g (jako złożenia funkcji ciągłych), mamy zbieżność jednostajną tego ciągu do $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$. Czyli wracając do długiego równania, mamy

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) dz dy = \frac{d}{dx} h(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) dy + g(x, x) = \\
= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x, y, z) dz dy + \int_c^d f(x, x, z) dz = \\
= \int_a^x \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dz dy + \int_c^d f(x, x, z) dz
\end{aligned}$$

gdzie włożenia $\frac{\partial}{\partial x}$ pod całkę dokonuję, bo w $\int_c^d f(x, y, z) dz$ funkcja f zależy od x a cała całka zmienia się przez zmianę wartości f w x.