Miara i calka

speedrun przed terminem 0

by a MEEEE

21.03.2137

ROZDZIAŁ 1

Bor($\mathbb{R}$) to najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte z $\mathbb{R}$

Dla $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ funkcję $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ nazywamy addytywną funkcją zbioru (*miarą skończenie addytywną*), jeżeli

↪ $\mu(\emptyset) = 0$
↪ $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru to μ takie, że dla parami rozłącznych A_n zachodzi $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$. Jeżeli nie są rozłączne, to $\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$.

Następujące warunki są równoważne:

↪ μ przeliczalnie addytywna
↪ μ jest ciągła z dołu, czyli jeśli $A_n \uparrow A$, to zachodzi $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$
↪ μ jest ciągła z góry, jeśli $A_n \downarrow A$ to $\lim_n \mu(A_i) = \mu(A)$
↪ μ jest ciągła z góry na zbiorze $\emptyset$, czyli dla $A_n \downarrow \emptyset$ mamy $\lim_n \mu(A_n) = 0$

$[a_n, b_n)$ jest ciągiem parami rozłącznych przedziałów zawartych w $[a, b)$, to $\sum(b_n - a_n) \leq b - a$. Natomiast, jeżeli $[a, b) \subseteq \bigcup[a_n, b_n)$, to $b - a \leq \sum(b_n - a_n)$.

μ jest σ-skończona na pierścieniu $\mathscr{R}$, jeżeli istnieją X_n takie, że $X = \bigcup X_n$ i $\mu(X_n) < \infty$.

Twierdzenie o konstrukcji miary: funckja σ-skończona oraz przeliczalnie addytywna rozszerza się do jednoznacznie do miary na $\sigma(\mathscr{R})$.

Dla każdego $A \in \sigma(\mathscr{R})$ o $\mu(A) < \infty$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $R \in \mathscr{R}$ takie, że $\mu(A \Delta R) < \varepsilon$.

Przestrzeń miarową (X, Σ, μ) nazywamy skończoną jeśli $\mu(X) < \infty$, probabilistyczną, jeżeli $\mu(X) = 1$ lub σ-skończoną jeżeli istnieją $X_k \in \Sigma$, $X = \bigcup X_k$ i $\mu(X_k) < \infty$.

Przestrzeń miarowa jest zupełna, jeśli dla każdego $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ oznacza, że wszystkie podzbioru A należą do Σ. Wtedy Σ jest σ-ciałem zupełnym względem μ.

Dla każdej przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) istnieje przestrzeń miarowa $(X, \hat{\Sigma}, \hat{\mu})$ taka, że $\Sigma \subseteq \hat{\Sigma}$ oraz $\hat{\mu}$ jest rozszerzeniem μ.

Zbiory mierzalne w sensie Lesbegue'a [$\mathfrak{L}$] to zbiory które można zapisać jako $A = B \Delta N$ gdzie $B \in$ Bor($\mathbb{R}$) i N jest podzbiorem zbioru miary zero.

Dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \mathfrak{L}$ istnieje zbiór otwarty V i zbiór domknięty F takie, że $F \subseteq A \subseteq V$ i $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$. Dla $\lambda(A) < \infty$ możemy znaleźć skończoną sumę odcinków J taką, że $\lambda(A \Delta J) < \varepsilon$ oraz K zwarty zawarty w A taki, że $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$.

Dla dowolnego $B \in$ Bor($\mathbb{R}$) i $x \in \mathbb{R}$ mamy $x + B \in$ Bor($\mathbb{R}$) oraz $\lambda(B) = \lambda(x + B)$.

Rodzinę $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(X)$ nazywamy klasą monotoniczną, jeśli dla dowolnego $A_n \in \mathscr{M}$ mamy $A_n \uparrow A$ lub $A_n \downarrow A$, to $A \in \mathscr{M}$.
Klasa monotoniczna zawierająca pierścień to zawiera też σ-pierścień przez niego generowany. Niech μ będzie

przeliczalnie addytywną funkcją zbioru na pierścieniu, załóżmy że $X = \bigcup S_k$ dla $S_k \in \mathscr{R}$ takich, że $\mu(S_k) < \infty$, wtedy μ ma co co najwyżej jedno przedłużenie do miary na $\sigma(\mathscr{R})$.

ROZDZIAŁ 2

Funkcja Σ-mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ to funkcja, która dla każdego $f^{-1}[B] \in \Sigma$ spełnia $B \in$ Bor($\mathbb{R}$), równoważnie jeżeli $\mathscr{G} \subseteq$ Bor($\mathbb{R}$) takie, że $\sigma(\mathscr{G})$ = Bor($\mathbb{R}$), to wystarczy dla każdego $G \in \mathscr{G}$ $f^{-1}[G] \in \Sigma$.

Każdy z poniższych pociąga mierzalność:

$\{x : f(x) < t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \leq t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) > t\} \in \Sigma$
$\{x : f(x) \geq t\} \in \Sigma$

Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest Σ-mierzalna, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ jest Σ-mierzalna.

Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

Każdą Σ-mierzalna funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.

Funkcja prosta to funkcja o skończonym zbiorze wartości, czyli kombinacja liniowa skończenie wielu funkcji charakterystycznych

Ciąg funkcji mierzalnych jest zbieżny prawie wszędzie, jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ poza zbiorem miary zero.

Dla każdej λ-mierzalnej funkcji f istnieje borelowska funkcja g taka, że $f = g$ λ-prawie wszędzie.

Jeżeli $f_n \to f$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ o $\mu(A) < \varepsilon$ i f_n jest jednostajnie zbieżny do j na zbiorze A^c.

Ciąg funkcji mierzalnych jest niemal jednostajnie zbieżny, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg f_n zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.

Mówimy, że ciąg jest zbieżny według miary, jeżeli dla każdego ε $\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

$\hookrightarrow$ Zbieżny niemal jednostajnie $\Longrightarrow$ zbieżny według miary.
$\hookrightarrow$ Zbieżny prawie wszędzie w mierze skończonej $\Longrightarrow$ zbieżny według miary.

Twierdzenie Riesza: jeżeli ciąg funkcji spełnia warunek Cauchy'ego według miary, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

to f_n jest zbieżny według miary do pewnego f oraz istnieje podciąg liczb naturalnych n(k) taki, że $f_{n(k)}$ jest zbieżny prawie wszędzie oraz według miary.

ROZDZIAŁ 3

Całkę po funkcji prostej $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ definiujemy jako

$$\int_X f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Dla nieujemnej mierzalnej funkcji f definiujemy

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s d\mu \;:\; 0 \leq s \leq f\},$$

czyli jeżeli $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ jest ciągiem funkcji prostych takich, że $\lim_n s_n = f$ prawie wszędzie, to

$$\int_X f d\mu = \lim_x \int_X s_n d\mu.$$

Funkcja mierzalna jest całkowalna, jeżeli $\int_X |f| d\mu < \infty$, wtedy definiujemy całkę wzorem $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ dla $f = f^X - f^-$ nieujemnych.

Dla f, g całkowalnych i h mierzalnej:

$\hookrightarrow$ $\int_X (af + gb) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$
$\hookrightarrow$ $h = 0$ prawie wszędzie, to $\int_X h d\mu = 0$
$\hookrightarrow$ $f \leq g$ prawie wszędzie, to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
$\hookrightarrow$ $|\int_X (f + g) d\mu| \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu$
$\hookrightarrow$ $a \leq f \leq b$ prawie wszędzie, to $a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X)$
$\hookrightarrow$ dla $A, B \in \Sigma$ jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej: niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych takich, że $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ zbieżnych prawie wszędzie do $f = \lim_n f_n$

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Lemat Fatou: dla dowolnego ciągu funkcji nieujemnych f_n zachodzi

$$\int_X \liminf f_n d\mu = \liminf \int_X f_n d\mu$$

Twierdzenie Lesbegue'a o zbieżności ograniczonej: niech f_n, g będą mierzalne, że dla każdego n $|f_n| \leq g$ zachodzi prawie wszędzie przy czym $\int_X g d\mu < \infty$. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie, to

$$\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\lim_n \int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

Jeżeli teraz $\mu(X) < \infty$ oraz f_n są wspólnie ograniczone i $\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

Jeżeli f jest mierzalna i nieujemna, to funkcja $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

jest miarą na Σ.

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest λ-mierzalna i obie całki są sobie równe: $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

ROZDZIAŁ 4

Niech (X, Σ) i (Y, Θ) będą przestrzeniami z Σ, Θ będącymi σ-ciałami. W $X \times Y$ możemy zdefiniować następujące σ-ciało:

$$\Sigma \otimes \Theta = \sigma(\{A \times B \ : \ A \in \Sigma, B \in \Theta\}),$$

wtedy $\Sigma \otimes \Theta$ jest produktem σ-ciał Σ i Θ.

Zbiór $F \subseteq X \times Y$ należy do ciała prostokątów na Σ, Θ wtw $F = \bigcup A_i \times B_i$ dla $A_i \in \Sigma$ i $B_i \in \Theta$.
Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, to dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$ definiujemy cięcia pionowe i poziome $E_x = \{z \in Y \ : \ (x, z) \in E\}$ i $E^y = \{z \in Z \ : \ (z, y) \in E\}$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, a funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalna, to funkcja f_x jest θ-mierzalna, a f^y jest Σ-mierzalna.

$$Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R}) = Bor(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Miarę na produkcie przestrzeni (X, Σ, μ) i (Y, Θ, ν) definiujemy:

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

Na σ-ciele $\Sigma \otimes \Theta$ istnieje jedyna miara spełniająca dla każdego $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

a dla dowolnego $E \in \Sigma \otimes \Theta$ funkcja $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ są mierzalne i zachodzą wzory:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Twierdzenie Fubiniego: jeżeli funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalna oraz f jest nieujemna lub f jest $\mu \otimes \nu$-całkowalna, to wtedy

$$I : x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

$$J : y \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(x)$$

są mierzalne względem Σ i odpowiednio Θ, oraz

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = $$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Czyli możemy bezkarnie zamieniać granice całkowania.

Jeżeli rozważamy przestrzenie metryczne (X_i, Σ_i, μ_i) dla $i = 1, \ldots, n$, to na σ-ciele $\bigotimes_{i \le n} \Sigma_i$ podzbiorów $\prod_{i \le n} X_i$ generowanym przez wszystkie kostki mierzalne $A_1 \times \ldots \times A_n$, to istnieje jedyna miara $\mu = \bigotimes \mu_i$ spełniająca dla wszystkich $A_i \in \Sigma_i$

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

$K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - przestrzeń ciągów $0, 1$, wtedy możemy określić metrykę $d(x, y) = \frac{1}{n}$ gdzie n to pierwszy indeks gdzie te dwa ciągi się różnią.

Funkcja $f : K \to [0, 1]$ zadana $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n}$ jest homeomorfizmem między K a zbiorem Cantora. Dla funkcji $\psi : \mathbb{N} \supseteq A \to \{0, 1\}$ oznaczamy zbiór

$$[\psi] = \{x \in K \ : \ x(i) = \psi(i) \ i \in A\}.$$

Cylindry ten postaci są otwarto-domknięte w K i stanowią bazę topologii w K. Oznaczmy przez $\mathscr{C}$ ciało podzbiorów K generowanych przez wszystkie cylindry. Zbiór C jest w $\mathscr{C}$ wtw istnieje n i $C' \subseteq \{0, 1\}^n$ takie, że $C = C' \times \{0, 1\} \times \ldots$.

Dla $C \in \mathscr{C}$ definiujemy miarę na K:

$$\nu(C) = \frac{|C'|}{2^n}$$

która spełnia własność:

$$(\forall \ B \in Bor(K))(\forall \ \varepsilon > 0)(\exists \ C \in \mathscr{C}) \ \nu(B \Delta C) < \varepsilon.$$

ROZDZIAŁ 5

Miara znakowana $\alpha : \Sigma \to [-\infty, \infty]$ to funkcja która przyjmuje co najwyżej jedną z wartości nieskończonych oraz

$$\alpha(\emptyset) = 0$$

$$\alpha(\bigcup_n A_n) = \sum_n \alpha(A_n)$$

dla każdego ciągu rozłącznych A_i.

Rozkłada Hahna: jeśli α jest miarą znakowaną na σ-ciele Σ podzbiorów X, to istnieją rozłączne zbioru X^+ i X^- takie, że $X = X^+ \cup X^-$, $X = X^+ \cup X^-$ oraz dla dowolnego $A \in \Sigma$, to

$\hookrightarrow$ jeżeli $A \subseteq X^+$, to $\alpha(A) \ge 0$,

$\hookrightarrow$ a jeżeli $A \subseteq X^-$, to $\alpha(A) \le 0$.

Rozkład Jordana: jeżeli α jest miarą znakowaną na Σ, to istnieją miary α^+, α^- takie, że $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$.

Miara ν jest absolutnie ciągła względem miary μ, jeżeli $(\forall \ A \in \Sigma) \ \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$. Oznaczamy $\nu \ll \mu$.

Miara ν jest singularna względem miary μ, jeżeli istnieją $A, B \in \Sigma$ takie, że $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 0$ i $\nu(B) = 0$. Relację tę oznaczamy $\mu \perp \nu$.

Absolutne wahanie miary znakowanej α to $|\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$. Jeżeli α, β są określone na tym samym Σ, przyjmujemy $\alpha \ll \beta$ gdy $|\alpha| \ll |\beta|$, tak samo $\alpha \perp \beta$ jeżeli $|\alpha| \perp |\beta|$.

ν jest miarą skończoną na Σ, to dla dowolnej μ na Σ

$$\nu \ll \mu \iff (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta)(\forall\ A \in \Sigma)\ \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon$$

μ, ν - skończone miary na Σ takie, że $\nu \not\equiv 0$ i $\nu \ll \mu$. Wtedy istnieje $P \in \Sigma$ takie, że $\mu(P) > 0$ i P jest pozytywny dla miary znakowanej $\nu - \varepsilon\mu$, to znaczy $\nu(B) \geq \varepsilon\mu(B)$ dla każdego mierzalnego $B \subseteq P$.

Twierdzenie Radona-Nikodyma: (X, Σ, μ) - σ-skończona przestrzeń miarowa i ν jest miarą znakowaną na Σ, że $|\nu|$ jest σ-skończone. Jeśli $\nu \ll \mu$, to istnieje $f : X \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

Funkcja f spełniająca tezę twierdzenia Radona-Nikodyma bywa oznaczana $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ i mówi się na nią pochodna Radona-Nikodyma miary ν względem miary μ.

Dla miar μ i ν jak w twierdzeniu wyżej

$$\int_X g d\nu = \int_X g \cdot \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

dla każdej ν-całkowalnej funkcji g.

Dla $A \in \Sigma$ w σ-skończonej przestrzeni miarowej, dla σ-ciała $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, istnieje Σ_0-mierzalna funkcja f taka, że dla każdego $B \in \Sigma_0$

$$\mu(A \cap B) = \int_B f d\mu$$

Dla μ, ν σ-skończonych miar na tym samym ciele, wtedy istnieje $\nu = \nu_a + \nu_s$ taki, że $\nu_a \ll \mu$ i $\nu_s \perp \mu$.

Jeżeli μ, ν są miarami na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ i dla każdego $a < b$ mamy $\mu[a, b) = \nu[a, b) < \infty$, to $\mu = \nu$.

Miara Lebesgue'a-Stieltjesa λ_F: dla każdej $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lewostronnie ciągłej, niemalejącej istnieje jedyna miara λ_F określona na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ taka, że:

$$\lambda_F[a, b) = F(b) - F(a)$$

Jeżeli F niemalejąca ma ciągłą pochodną, to dla każdej λ_F-całkowalnej g:

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} g \cdot F' d\lambda$$

ROZDZIAŁ 6

Dla dowolnych liczb dodatnich a, b, p, q takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

p-norma całkowa funkcji to $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Nierówność Cauchy'ego-Höldera: dla dowolnych f, g i $p, q > 0$ jak wyżej zachodzi

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Nierówność Minkowskiego: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Warunki, aby $\|\cdot\|$ było normą:

- $\hookrightarrow$ $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\hookrightarrow$ $\|cx\| = |c|\|x\|$
- $\hookrightarrow$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Możemy określić na podstawie normy metrykę $p(x, y) = \|x - y\|$. Jeżeli przestrzeń unormowana z taką metryką jest zupełna, to jest nazywana przestrzenią Banacha.

Symbol $L_p(\mu)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych $f : X \to \mathbb{R}$ dla których $\|f\|_p < \infty$. Elementy z $L_p(\mu)$ są utożsamiane jeżeli są równe prawie wszędzie. Jest to przestrzeń Banacha.