Zadania z ⋆⋆ LISTA 10

Weronika Jakimowicz

25 grudnia 2023

ZAD. 16

Chcemy pokazać, że

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi} f(x,\sin y)dydx$$

Ustalmy z góry x_0. Wtedy $f(x_0, y)$ jest funkcją która zależy tylko od y, a x_0 jest traktowane jako stała. Niech więc $g(y) = f(x_0, y)$. Pokażemy najpierw, że

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b g(\sin tx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi} g(\sin y)dydx.$$

Przenosząc prawą stronę na lewo i wkładając ją pod granicą (bo granica sumy to suma granic, a granica z wyrażenia stałego to ono same), dostajemy

$$0 = \lim_{t\to\infty}\int_a^b g(\sin tx)dx - \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi} g(\sin y)dydx = \lim_{t\to\infty}\int_a^b \left[g(\sin tx) - \int_0^{2\pi} g(\sin y)dy\right]dx.$$

Dalej, zauważmy, że

$$\int_0^{2\pi} g(\sin y)dy = \int_0^{\pi} g(\sin y)dy + \int_\pi^{2\pi} g(\sin y)dy =$$
$$= \int_0^{\pi} g(\sin y)dy + \int_{-\pi}^{0} g(\sin y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sin y)dy,$$

bo przesunęliśmy jedną całkę o cały okres funkcji sin y, więc wartości się nie zmieniają.
Wzór Taylora na funkcję g(sin y) w pobliżu punktu $\sin tx_0$ wygląda następująco:

$$g(\sin y) = g(\sin tx_0) + [g(\sin tx_0)]'(y - tx_0) = g(\sin tx_0) + t\cos tx_0 g'(\sin tx_0)(y - tx_0)$$

$$g(\sin y) - g(\sin tx_0) = t\cos tx_0 g(\sin tx_0)(y - tx_0)$$

Wróćmy teraz do obliczanej granicy:

$$\int_a^b \left[g(\sin tx) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sin y)dy\right]dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\sin tx) - g(\sin y)\right]dydx$$

i zauważmy, że w środku całki $\int_{-\pi}^{\pi}$ x jest traktowane jako stała, to znaczy możemy zastosować wyżej podany wzór Taylora dla $x_0 = x$, żeby otrzymać

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\sin x) - g(\sin y)\right]dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left[t\cos tx g(\sin tx)(y - tx)\right]dy =$$
$$= t\cos tx\left[\frac{y^2}{2} - txy\right]_{-\pi}^{\pi} = t\cos tx\left[\frac{\pi^2}{2} - tx\pi - \frac{\pi^2}{2} + tx\pi\right] =$$
$$= t\cos tx \cdot 0 = 0$$

Czyli całe wyrażenie też jest równe 0:

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b\left[g(\sin tx)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\sin y)dy\right]dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^b\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\sin tx)-g(\sin y)\right]dydx=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_a^b\frac{1}{2\pi}\cdot 0dx=\lim_{t\to\infty}0=0.$$

W oryginalnej wersji zadania mamy pokazać to samo dla funkcji dwóch zmiennych:

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi}f(x,\sin y)dydx.$$

Jeżeli znowu przeniesiemy wszystko na jedną stronę i wejdziemy pod lim, to dostajemy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x,\sin tx)-f(x,\sin y)\right]dydx,$$

czyli wystarczy pokazać, że

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x,\sin tx)-f(x,\sin y)\right]dy=0.$$

Tutaj, tak samo jak w przypadku g(y), mamy funkcję która jest różnicą funkcji całkiem niezależnej od zmiennej po której całkujemy i funkcji która od tej zmiennej zależy tylko w jednej zmiennej. Czyli dla tego danego x z zewnętrznej całki możemy użyć funkcji

$$h(y)=f(x,y)$$

i wtedy mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x,\sin tx)-f(x,\sin y)\right]dy=\int_{-\pi}^{\pi}\left[h(\sin tx)-h(\sin y)\right]dy,$$

a my wiemy, że jest to równe zero jak wyżej. Łącząc wszystko w jedną całość mamy

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)dx-\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi}f(x,\sin y)dydx=\lim_{t\to\infty}\int_a^b\left[f(x,\sin x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x,\sin y)dy\right]dx=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi}\left[f(x,\sin tx)-f(x,\sin y)\right]dydx=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_a^b 0dx=\lim_{t\to\infty}0=0.$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_0^{2\pi}f(x,\sin y)dydx$$

ZAD. 17

Zacznijmy od wskazówki, to znaczy pokazania, że

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Według wzoru Taylora wiemy, że istnieje $\xi_i\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ takie, że

$$f(x)=f(\frac{i}{n})+f'(\xi_i)(x-\frac{i}{n})$$

$$f(x) - f(\frac{i}{n}) = f'(\xi_i)(x - \frac{i}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx = n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left[f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right]dx =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i)\left[x - \frac{i}{n}\right]dx - \frac{f(1)-f(0)}{2} = n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{i}{n}x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\left[f'(\xi_i)\frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Popatrzmy teraz na wzór Taylora dla dwóch zmiennych. Podobnie jak wyżej, istnieje $(\xi_i, \alpha_k) \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ takie, że

$$f(x,y) = f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) + (x - \frac{i}{n})f_x(\xi_i, \alpha_k) + (y - \frac{k}{n})f_y(\xi_i, \alpha_k)$$

$$f(x,y) - f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) = (x - \frac{i}{n})f_x(\xi_i, \alpha_k) + (y - \frac{k}{n})f_y(\xi_i, \alpha_k)$$

gdzie f_x to pierwsza pochodna względem x, a f_y to pierwsze pochodna względem y.

$$n\int_0^1 f(x,y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) = n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x,y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x,y) - f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n})\right]dxdy \overset{*}{=}$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[(x - \frac{i}{n})f_x(\xi_i, \alpha_k) + (y - \frac{k}{n})f_y(\xi_i, \alpha_k)\right]dxdy =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_x(\xi_i, \alpha_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[x - \frac{i}{n}]dxdy + n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_y(\xi_i, \alpha_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[y - \frac{k}{n}]dxdy \overset{**}{=}$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_x(\xi_i, \alpha_k)\frac{1}{2n^2}dy + n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_y(\xi_i, \alpha_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[y - \frac{k}{n}]dydx =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^3}f_x(\xi_i, \alpha_i) + n\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_y(\xi_i, \alpha_k)\frac{1}{2n^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^3}f_x(\xi_i, \alpha_i) + \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^3}f_y(\xi_i, \alpha_i)$$

Przejście w $*$ jest wykorzystaniem wzoru Taylora wyprowadzonego wyżej, natomiast przejście $**$ jest na podstawie twierdzenie Fubiniego dot. funkcji ciągłej (jaką jest f) na prostokącie $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^3}f_x(\xi_i, \alpha_i) + \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^3}f_y(\xi_i, \alpha_i)\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 f_x(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 f_y(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(1,y) - f(0,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x,1) - f(x,0)dx$$