

1. Find (by "drawing" pictures representing graphs) all pairwise non-isomorphic graphs of order 4.

2. For a graph  $G$ , define a relation  $\approx$  on  $V(G)$  by saying  $v \approx w$  if and only if there exists a path in  $G$  with endpoints  $v$  and  $w$ . Show that  $\approx$  is an equivalence relation – that is, show that  $(\forall u \in G)(u \approx ua)$ , that  $(\forall u, v \in G)(u \approx v \implies v \approx u)$ , and that  $(\forall u, v, w \in G)([u \approx v \wedge v \approx w] \implies u \approx w)$ .

3. Given a graph  $G$ , define its *complement*  $\bar{G}$  as a graph with vertices  $V(\bar{G}) = V(G)$ , such that given  $v, w \in V(G)$  with  $v \neq w$ , we have  $vw \in E(\bar{G})$  if and only if  $vw \notin E(G)$ .

a. Show that if  $G \simeq \bar{G}$ , then  $|G| \equiv 0$  or  $1 \pmod{4}$ .

b. Show that for any graph  $G$ , either  $G$  or  $\bar{G}$  is connected.

4. Show that any graph of order at least 2 has two vertices of the same degree.

5. a. Show that every connected graph  $G$  contains a vertex  $v \in G$  such that  $G - \{v\}$  is connected.

[Hint: pick  $v$  so that some connected component of  $G - \{v\}$  is as big as possible]

b. A connected graph with at least one vertex is called a *tree* if it has no cycles.

Show that every tree with  $\geq 2$  vertices has a vertex of degree 1 (such a vertex is called a *leaf*)

c. Deduce that if  $T$  is a tree then  $e(T) = |T| - 1$

d. Let  $G$  be a graph with  $|G| = n$ . We say that a tuple  $(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$ , where  $\{v_1, \dots, v_n\} = V(G)$ , is a *degree sequence* of  $G$ . Show that a given tuple  $(d_1, \dots, d_n)$  of integers, where  $n \geq 2$ , is a degree sequence of a tree iff  $d_i \geq 1$  for all  $i$  and  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ .

6. Let  $G = (V, E)$  be a graph. Show that there exists a partition  $V = A \sqcup B$  such that all vertices of  $G[A]$  and of  $G[B]$  have even degree.

7. Suppose  $G$  is a graph that has no induced cycles of odd length – that is, for any  $A \subseteq V(G)$ , the graph  $G[A]$  is not a cycle of odd length. Show that  $G$  is bipartite.

1. Znajdź (rysując obrazki reprezentujące grafy) wszystkie parami nieizomorficzne grafy stopnia 4.

2. Dla grafu  $G$  definiujemy relację  $\approx$  na  $V(G)$  mówiąc, że  $v \approx w$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka w  $G$  z końcami  $v$  oraz  $w$ . Pokaż, że  $\approx$  jest relacją równoważności – że spełnia ...

3. Mając dany graf  $G$ , definiujemy jego *dopełnienie*  $\bar{G}$  jako graf z wierzchołkami  $V(\bar{G}) = V(G)$ , taki, że dla danych  $v, w \in V(G)$ ,  $w \neq v$ , mamy  $vw \in E(\bar{G})$  wtw  $vw \notin E(G)$ .

a. Pokaż, że jeżeli  $G \simeq \bar{G}$ , to  $|G| \equiv 0$  lub  $1 \pmod{4}$ .

b. Pokaż, że dla dowolnego grafu  $G$  albo  $G$  albo  $\bar{G}$  jest spójny.

4. Pokaż, że dowolny graf o stopniu co najmniej 2 ma dwa wierzchołki o tym samym stopniu.

5. a. Pokaż, że każdy spójny graf  $G$  posiada wierzchołek  $v \in G$  taki, że  $G - \{v\}$  jest spójny.

[cenzura <3]

b. Spójny graf z co najmniej jednym wierzchołkiem jest nazywany *drzewem* jeżeli nie ma cykli. Pokaż, że każde *drzewo* z  $\geq 2$  wierzchołkami ma wierzchołek stopnia 1 (taki wierzchołek nazywa się *liściem*).

c. Wydedukuj, że jeżeli  $T$  jest drzewem, wtedy  $e(T) = |T| - 1$

d. Niech  $G$  będzie grafem z  $|G| = n$ . Mówimy, że krotka  $(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$ , gdzie  $\{v_1, \dots, v_n\} = V(G)$ , jest *sekwencją wierzchołków* ze sie ich stopnie nie zwiększają, sry nie znam nazwy i nie chce mi sie szukac wiecej niz na wikipedii, buzi grafu  $G$ . Pokaż, że mając krotkę  $(d_1, \dots, d_n)$  liczb całkowitych, gdzie  $n \geq 2$ , jest *ta właśnie seria* w *drzewie* wtw  $d_i \geq 1$  dla wszystkich  $i$  oraz  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ .

6. Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem. Pokaż, że istnieje podzbiór  $V = A \sqcup B$  takie, że wszystkie wierzchołki  $G[A]$  i  $G[B]$  mają parzyste stopnie

7. Załóż, że  $G$  jest grafem nie mających *induced cycle* (także *chordless cycle*) to taki cykl, że nie ma takich brudasków które łączą wierzchołki w cyklu, ale do cyklu nie należą nieparzystej długości, tzn dla dowolnego  $A \subseteq V(G)$ , graf  $G[A]$  nie ma cykli o nieparzystej długości. Pokaż, że  $G$  jest dwudzielne.

8. Let  $G$  be a regular bipartite graph with vertex classes  $W$  and  $M$ . Show that  $G$  contains a matching from  $W$  to  $M$ .

9. Let  $n \geq m \geq 1$ . An  $m \times n$  *Latin rectangle* is an  $m \times n$  matrix with entries in  $[n]$  such that each  $i \in [n]$  appears exactly once in each row and at most once in each column. Show that any  $m \times n$  Latin rectangle forms the first  $m$  rows of any  $n \times n$  Latin rectangle.

8. Niech  $G$  będzie regularnym dwudzielnym grafem z klasami wierzchołków  $W$  i  $M$ . Pokaż, że  $G$  zawiera łączenie z  $W$  do  $M$ .

9. Niech  $n \geq m \geq 1$ .  $m \times n$  *uporządkowany trójkąt magiczny* to macierz  $m \times n$  z elementami w  $[n]$  takimi, że każde  $i \in [n]$  występuje dokładnie jeden raz w każdym wierszu i dokładnie raz w każdej kolumnie. Pokaż, że dowolny  $m \times n$  prostokąt tworzy pierwsze  $m$  wiersze prostokąta  $n \times n$ .