Algebra 1R

by a plebanek fangirl :>

21.03.2137

1 Zbiory

1.1 Rodziny

Pierscien zbiorow to rodzina $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ taka, ze

- $\hookrightarrow \emptyset \in \mathscr{R}$
- $\hookrightarrow A, B \in \mathscr{R} \implies A \cup B, A \setminus B \in \mathscr{R}$

Cialo zbiorow to pierscien zbiorow, dla ktorego $X \in \mathscr{R}$

σ-pierscien zbiorow to rodzina $\mathscr{R}$ ktora jest pierscieniem zamknietym na przeliczalne sumy. Z tego wynika, ze

$$A_n \in \mathscr{R} \implies \lim_{n\to\infty} \sup A_n, \lim_{n\to\infty} \inf A_n \in \mathscr{R}$$

σ-cialo zbiorow to σ-pierscien do ktorego nalezy X

Niech $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ bedzie rodzina zbiorow, wowczas

- $\hookrightarrow r(\mathscr{F})$ – pierscien generowany przez rodzine $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow s(\mathscr{F})$ – σ-pierscien generowany przez rodzine $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow a(\mathscr{F})$ – cialo generowane przez $\mathscr{F}$
- $\hookrightarrow \sigma(\mathscr{F})$ – σ-cialo generowane przez $\mathscr{F}$

σ-cialo zbiorow borelowskich(*) [Bor($\mathbb{R}$)] – najmniejsze cialo zawierajace rodzine wszystkich otwartych podzbiorow $\mathbb{R}$

(*) zbior borelowski – dowolny zbior otwarty (domkniety) uzyskany przez sume/przekroj/dopelnienie przeliczalnie wielu zbiorow otwartych (domknietych)

....

Funkcja zbioru – dla ustalonej rodziny $\mathscr{R}$ funkcja postaci $f : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$

Addytywna funkcja zbioru (miara skonczenie addytywna) – dla $\mathscr{R}$ bedacego pierscieniem zbiorow to funkcja $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ spelniajaca:

- $\hookrightarrow \mu(\emptyset) = 0$
- $\hookrightarrow A, B \in \mathscr{R} \wedge A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru μ – jesli dla dowolnego R i A_n takich, ze $(\forall\, i, j)\ A_i \cap A_j = \emptyset$ oraz $R = \bigcup_n A_n$ zachodzi wzor

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu(A_n)$$

Warunek rownowazny: jest ciagla z dolu, czyli dla $A_n \uparrow A$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
Jesli zbiory A_n nie sa rozlaczne, to

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \le \sum_n \mu(A_n)$$