Ujebanko przez kolanko

maruda

69

ZAD.2.

Jezu nie rozumiem o co chodzi w tych zadaniach.

Wiemy, że $S_m(t^2) = P_{2m}(t)$ oraz

$$\int_{-a}^{a} p(x)P_{2m}(x)P_{2k}(x)dx = 0$$

dla $m \neq k$. Czyli jest

$$0 = \int_{-a}^{a} p(x)P_{2m}(x)P_{2k}(x)dx = \int_{-a}^{a} p(x)S_m(x^2)S_k(x^2)dx = 2\int_{0}^{a} p(x)S_m(x^2)S_k(x^2)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sqrt{u} = x \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}du = dx \end{array}\right] = 2\int_{0}^{a^2} \frac{p(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} S_m(u)S_k(u)du = \int_{0}^{a^2} \frac{p(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} S_m(u)S_k(u)du$$

czyli jeśli $p'(x) = \frac{p(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, to wielomiany S_m są ortogonalne na przedziale $[0, a^2]$.

Wiemy, że $P_{2m+1} = xR_m(x^2)$

$$0 = \int_{-a}^{a} p(x)P_{2m+1}(x)P_{2k+1}(x)dx = \int_{-a}^{a} p(x)xR_m(x^2)xR_k(x^2)dx = \int_{-a}^{a} p(x)x^2R_m(x^2)R_k(x^2)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{a} p(x)x^2R_m(x^2)R_k(x^2)dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{u} = x \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}du = dx \end{array}\right] = 2\int_{0}^{a^2} \frac{p(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} uR_m(u)R_k(u)du =$$

$$= \int_{0}^{a^2} p(\sqrt{u})\sqrt{u}R_m(u)R_k(u)du$$

czyli jeśli $p'(x) = \sqrt{x}p(x)$, to wielomiany R_m sa ortogonalne na przedziale $[0, a^2]$.

ZAD. 3.

Załóżmy teraz, że istnieje wielomian

$$s(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

taki, że $\|s(x)\|^2 < \|\overline{T}_n\|^2$. Ponieważ, tak jak na liście 7, wielomiany $\overline{T}_n$ są wielomianami ortogonalnymi, to

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} b_iT_i = b_nT_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_iT_i,$$

ale ponieważ s jak i T_n mają przy x^n jedynkę, to $b_n = 1$, czyli

$$s(x) = T_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_iT_i$$

Mamy więc

$$\|s\|^2 = \langle s, s\rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} b_i T_i, \sum_{j=0}^{n} b_j T_j \rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_i b_j \langle T_i, T_j\rangle = \sum_{i=0}^{n} b_i^2 \langle T_i, T_i\rangle =$$

$$= \langle T_n, T_n\rangle + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \langle T_i, T_i\rangle = \|T_n\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \|T_i\|^2,$$

ale ponieważ $s(x) \neq T_n(x)$, to co najmniej jedno b_i musi być różne od zera, a więc mamy, że $\|s\| = \|T_n\| + A$, gdzie $A > 0$, czyli każdy wielomian z wiodącym x^n ma normę większą niż T_n.