Algebra II (ISIM), lista 4 (9.11.2021, deklaracje do godz. 9:00).

G oznacza grupę.

Teoria: Działanie grupy G na zbiorze X (lewo- i prawostronne). Działanie lewostronne jako homomorfizm $\varphi : G \to Sym(X)$. Działanie wierne, tranzytywne. Stabilizator G_x, orbita $O(x) = Gx$. Sprzężenie w grupie, automorfizmy wewnętrzne, $C(X), Z(X), Inn(G)$ (patrz zad. 1). Lemat Burnside'a. Grupy permutacji.

1. Załóżmy, że $X \subseteq G$. Przez centralizator zbioru X w grupie G rozumiemy $C(X) = \{g \in G : (\forall x \in X) gx = xg\}$. Gdy $X = G$, $C(X)$ zaposukemy też jako $Z(G)$, tzw. centrum grupy G.Udowodnić, że:
   (a)– $C(X) < G$,
   (b)– $Z(G)$ jest grupą abelową.
   (c) $Z(G) \lhd G$ oraz dla $g \in G$, $|g^G| = [G : C(g)]$.
   (d) $G/Z(G) \cong Inn(G)$
   (e) $Inn(G) \lhd Aut(G)$. (wsk: w miarę możnosci unikać rachunków)

2. Ile różmych naszyjników można utworzyć z:
   (a)– 3 czarnych i 3 białych koralików?
   (b) 4 czarnych, 3 białych i 1 czerwonego koralika?

3. Niech $\sigma \in S_n$ bedzie iloczynem cykli rozłącznych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takich, że α_i jest długości l_i. Udowodnić, że $ord(\sigma) = NWW(l_1, \ldots, l_k)$
   (a) w przypadku, gdy $k = 2$,
   (b)– ogólnie.

4. Udowodnić, że permutacje $\sigma, \tau \in S_n$ są sprzężone w grupie $S_n \iff$ ich rozkłady na iloczyny cykli rozłącznych są podobne, tzn. dla każdego k w rozkładach σ i τ jest tyle samo cykli długości k.

5. Gdy grupa G działa na zbiorze X, mówimy, że X jest G-zbiorem. Załóżmy, że X, Y są G-zbiorami. Bijekcję $f : X \to Y$ nazywamy izomorfizmem G-zbiorów X, Y, gdy dla każdego $g \in G$ poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g\cdot & & \downarrow g\cdot \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

   tzn. $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ dla wszystkich $x \in X$ i $g \in G$. W tym przypadku mówimy też, że G-zbiory X i Y są izomorficzne lub też, że działania G na X i Y są izomorficzne.
   (a) Załóżmy, że G działa tranzytywnie na zbiorze X oraz $a \in X$. Udowodnić, że działanie G na X jest izomorficzne z działaniem G na zbiorze G/G_a przez lewe przesunięcie.
   (b)– Załóżmy, że G działa na zbiorach rozłącznych X i Y. Określamy wtedy

działanie G na zbiorze $Z = X \cup Y$ wzorem $g \cdot z = g \cdot_1 z$, gdy $z \in X$, oraz $g \cdot z = g \cdot_2 z$, gdy $z \in Y$. Tu $\cdot_1, \cdot_2$ ozmaczają działania G na X i Y odpowiednio. Sprawdzić poprawnośc tej definicji, opisac orbity działania G na Z w terminach orbit działania G na X i na Y.

6. Czy istnieje działanie grupy $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ na zbiorze 10-elelemnotym X o n orbitach, gdzie:
(a) n=1, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$?

7. (a)– W grupie S_7 wyznaczyć rzędy elementów i ich klasy sprzężenia.
(b) Wyznaczyć klasy sprzężenia w grupie D_6