1	2	3	4	5	6	7	8
X	X	X	X	X	X	–	X

ZAD 1.

Mamy zadany wielomian

$$p(z) = a_0 + z(a_1 + z(a_1 + \ldots + z(a_{n-1} + za_n)))$$

który możemy zapisać jako

$$p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_o), \qquad (☕)$$

gdzie $p(z_0)$ to reszta z dzielenia przez $(z - z_0)$, a $q(z)$ to iloraz:

$$q(z) = b_0 + zb_1 + z^2 b_2 + \ldots + z^{n-1} b_{n-1}.$$

Mamy wiec rownosc

$$a_0 + za_1 + z^2 a_3 + \ldots + z^n a_n = (z - z_0)(b_0 + zb_1 + \ldots + z^{n-1} b_{n-1}) + p(z_0)$$

i wspolczynniki przy zmiennych musza byc sobie rowne, wiec

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - z_0 b_{n-1} \\ a_{k+1} &= b_k - z_0 b_{k+1} \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n-2 \\ a_0 &= -z_0 b_0 + p(z_0) \end{aligned}$$

W takim razie

$$p(z_0) = a_0 + z_0 b_0.$$

Schemat Hornera do znalezienia $p(z_0)$ wyglada wtedy nastepujaco:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &:= a_n \\ b_k &:= a_{k+1} + z_0 b_{k+1} \quad \text{dla } k = n-2, \ldots, -1 \end{aligned}$$

i szukana wartosc to b_{-1}.

Analogicznie, dla pochodnej $p(z)$ mamy

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} &= (z - z_0)q'(z) + q(z) \\ a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} &= (z - z_0)(b_1 + 2zb_2 + 3z^2 b_3 + \ldots + (n-1)z^{n-2} b_{n-1}) + \\ &\quad + (b_0 + zb_1 + \ldots + z^{n-1} b_{n-1}) \end{aligned}$$

i aby wyrazy po obu stronach sie zgadzaly:

$$\begin{aligned} na_n &= b_{n-1} + (n-1)b_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} &= (n-2)b_{n-2} + b_{n-2} - z_0 b_{n-1} \\ a_{k+1} &= b_k - z_0 b_{k+1} \\ a_1 &= b_0 - z_0 b_1 \end{aligned}$$

W trakcie rozniczkowania $p(z_0)$ sie uproscilo, ale mozemy zapisac, ze

$$p'(z_0) = b_0 = a_1 + z_0 b_1.$$

Schemat Hornera dla znalezienia $p'(z_0)$ to w takim razie

$$\begin{aligned} b_{n-1} &:= a_n \\ b_k &:= a_{k+1} + z_0 b_{k+1} \quad \text{dlak} = n-2, \ldots, 0 \end{aligned}$$

i wyraz b_0 to szukane $p'(z_0)$.

To teraz dla $p''(z_0)$

$$2a_2 + 6za_3 + \ldots + n(n-1)a_n z^{n-2} = (z - z_0)q''(z) + 2q'(z)$$

$$2a_2 + 6za_3 + \ldots + n(n-1)a_n z^{n-2} = (z - z_0)(2b_2 + 6zb_3 + \ldots + (n-1)(n-2)z^{n-3}b_{n-1}) + 2(b_1 + 2zb_2 + 3z^2 b_3 + \ldots + (n-1)z^{n-2}b_{n-1})$$

$$n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)b_{n-1} + 2(n-1)b_{n-1}$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} - z_0 b_{n-1}$$
$$a_{k+1} = b_k - z_0 b_{k+1}$$
$$2a_2 = 2b_1 - 2z_0 b_2$$

Schemat Hornera dla $p''(z_0)$:

$$b_{n-1} := a_n$$
$$b_k := \frac{k+1}{2}(a_{k+1} + z_0 b_{k+1}) \quad \text{dla } k = n-2, \ldots, 1$$

ZAD 2.

TO JAKOS JAKOBIANEM AAAA

Mamy dana funkcje

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$$z_1 = x_0 + iy_0 + \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{u'(x_0, y_0) + iv'(x_0, y_0)}$$
$$= x_0 + iy_0 + \frac{(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))(u'(x_0, y_0) - iv'(x_0, y_0))}{u'(x_0, y_k)^2 - v'(x_0, y_0)^2}$$

Niech $u_k = u(x_k, y_k)$, $v_k = v(x_k, y_k)$.

$$x_1 = x_0 + \frac{u_0(u')_0 - v_0(v')_0}{(u')_0^2 - (v')_0^2}$$
$$y_1 = y_0 + \frac{v_0(u')_0 - u_0(v')_0}{(u')_0^2 - (v')_0^2}$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{u_k(u')_k - v_k(v')_k}{(u')_k^2 - (v')_k^2}$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{v_k(u')_k - u_k(v')_k}{(u')_k^2 - (v')_k^2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x' + iy' = x + iy - \frac{f(x + iy)}{f'(x + iy)}$$

ZAD 3.

SZEREGIEM TAYLORA I ZROZNICZKOWAC

Klasyczna definicja $\phi(x)$

$$\phi(\alpha) = \alpha$$
$$\phi(x_k) = x_{k+1}$$
$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Jesli jest to metoda liniowa, to:

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\xi_k)$$

$$\lim_{x\to\alpha} \phi'(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)}{2f'(x)f''(x)} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x) + f''(x)^2 + f'(x)f'''(x)}{2f''(x)^2 + 2f'(x)f'''(x)} =$$
$$= \frac{f''(\alpha)^2}{2f''(\alpha)^2} = \frac{1}{2}$$

ZAD 4.

Metoda ϕ oblicza pierwiastek jakiejs funkcji f, ktory wypada w α. Blad dla n-tego kroku wynosi

$$E_n = x_n - \alpha$$

a jezeli metoda jest rzedu $p+1$, to

$$\left|\frac{E_{n+1}}{(E_n)^{p+1}}\right| < \infty$$

$$x_{k+1} = \phi(x_k) =$$
$$= \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + (x_k - \alpha)^2 \frac{\phi''(\alpha)}{2!} + \ldots + (x_k - \alpha)^p \frac{\phi^{(p)}(\alpha)}{p!} + (x_k - \alpha)^{p+1} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}$$

dla pewnego $\xi_k \in [x_k, \alpha]$.

Ale wszystko poza ostatnim wyrazem sie zeruje, wiec mamy

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \alpha + (x_k - \alpha)^{p+1} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}$$

i to do α bedzie zbiegac w potedze $p+1$.

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi(x_k) - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} =$$
$$= \frac{(x_k - \alpha)^{p+1} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}}{(x_k - \alpha)^{p+1}} =$$
$$= \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

ZAD 5.

Twierdzenie 3.5.15 z Kincaid Cheney

Niech z_1, z_2 beda pierwiastkami pojedynczymi danego wielomianu.

W kazdym kroku procesu wyliczamy

$$p(z) = (z^2 - uz - v)q(z) + b_1(z-u) + b_0.$$

Pochodne czastkowe po u i po v to:

$$0 = -zq(z) + (z^2 - uz - v)\frac{dq}{du} - b_1 + \frac{db_1}{du}(z-u) + \frac{db_0}{du}$$
$$0 = -q(z) + (z^2 - uz - v)\frac{dq}{dv} + \frac{b_1}{dv}(z-u) + \frac{db_0}{dv}$$

Teraz jesli podstawimy pod z jeden z pierwiastkow, to dostaniemy

$$\begin{cases} 0 = -z_k q(z_k) + \frac{db_1}{du}(z_k - u) + \frac{db_0}{du} \\ 0 = -q(z_k) + \frac{b_1}{dv}(z_k - u) + \frac{db_0}{dv} \end{cases}$$
$$\begin{cases} z_k q(z_k) = \frac{db_1}{du}(z_k - u) + \frac{db_0}{du} \\ q(z_k) = \frac{b_1}{dv}(z_k - u) + \frac{db_0}{dv} \end{cases}$$

co zapisane w postaci macierzowej daje

$$\begin{bmatrix} \frac{db_0}{du} & \frac{db_1}{du} \\ \frac{db_0}{dv} & \frac{db_1}{dv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z_1 - u & z_2 - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 q(z_1) & z_2 q(z_2) \\ q(z_1) & q(z_2) \end{bmatrix}$$

Z algebry wiemy, ze

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

wiec wystarczy pokazac, ze macierz z prawej strony rownania ma niezerowy wyznacznik.

$$\det \begin{bmatrix} z_1 q(z_1) & z_2 q(z_2) \\ q(z_1) & q(z_2) \end{bmatrix} = z_1 q(z_1) q(z_2) - z_2 q(z_1) q(z_2) = q(z_1)q(z_2)(z_1 - z_2)$$

Poniewaz z_1, z_2 to pojedyncze pierwiastki p(z), nie moga byc pierwiastkami wielomianu q, wiec $q(z_1) \neq 0 \neq q(z_2)$. Z kolei przez to, ze sa to rozne pierwiastki, to $z_1 - z_2 \neq 0$.

ZAD 6.

Rozwiazanie w pliku.