Zbiory z powtórzeniami

$$\binom{5}{2}\cdot 3!$$

$$\parallel$$

Ile jest permutacji?

Wszystkich $5!$

Odpowiedź: $\dfrac{5!}{2!}$

$$A = \{2\cdot c,\ 1\cdot n,\ 1\cdot z,\ 1\cdot \dot{z}\}$$

Ogólnie $A = \{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2, \dots\ n_k\cdot a_k\}$

Uwaga $\{2\cdot a\} \neq \{a, a\} = \{a\}$

Przykład. $A = \{2\cdot a,\ 3\cdot b,\ 4\cdot c\}$

Liczba permutacji: $\dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$

Permutacje z powtórzeniami

Elementy zbioru

$$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_m \cdot a_m\}$$

można ustawić w ciąg na

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

sposobów.

Przykład: Duża cukiernia

<u>Przykład.</u> Pączki, eklerki, serniki, makowce

Chcemy kupić 6 ciastek

Na ile sposobów?

Równoważne, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

gdzie $x_1, \dots, x_4$ są całkowite, ≥ 0?

$$1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 0 \; 1 = 6$$

Każdy zakup jest kodowany przez 6 jedynek i 3 zera

$$0 \; 0 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \sim$$

5× serników i 1× makowiec.

Liczba 6-kombinacji ze zbioru

$$\{\infty \cdot p, \infty \cdot e, \infty \cdot s, \infty \cdot m\}$$

jest równa liczbie permutacji zbioru

$\{6 \cdot 1, 3 \cdot 0\}$, czyli

$$\frac{9!}{6! \cdot 3!} = \binom{9}{6} \qquad 9 = 6 + 4 - 1$$

Kombinacje z powtórzeniami (1)

Niech

$$A = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_m\}.$$

Liczba k-kombinacji (z powtórzeniami) wynosi

$$\binom{m-1+k}{k} = \frac{(m-1+k)!}{k! \cdot (m-1)!}.$$

Jest to ilość rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, \ldots, x_m$.

Dowód. Każde rozwiązanie tego równania koduje się za pomocą k jedynek $m-1$ zer.

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad 1 = k$$

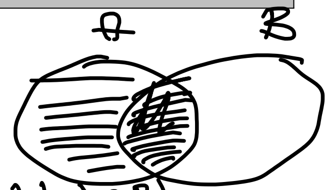
Stąd liczba rozwiązań wynosi $\frac{(k+m-1)!}{k!\,(m-1)!}$

Dwuelementowa zasada włączeń i wyłączeń

Przykład. Dla dowolnych zbiorów skończonych A i B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dowód.



$$|A| + |B| = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| + |B|$$

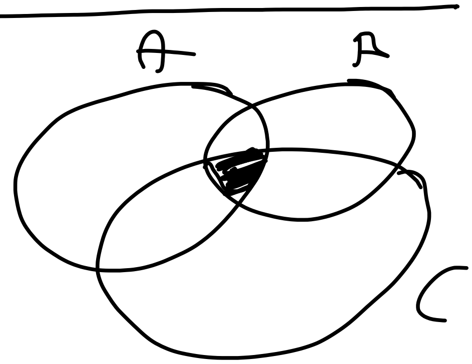
$$= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

Przykład. Ile jest liczb $1 \leq n \leq 100$ $\underbrace{\text{podzielnych przez 2}}_{A}$ lub $\underbrace{\text{podzielnych przez 3}}_{B}$?

Ile wynosi $|A \cup B|$?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 33 - 16$$

Przykład



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$

$$- (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) +$$

$$+ |A \cap B \cap C|$$

Zasada włączeń i wyłączeń

Twierdzenie. Dla dowolnych zbiorów skończonych $A_1, \ldots, A_n$ zachodzi wzór

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Dowód. Niech $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$.
Niech k będzie ilością tych i, dla których $x \in A_i$.
Ile razy x 'będzie liczony' po prawej stronie?

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} \qquad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n$$

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1 - \binom{k}{0}$$

bo

$$\underbrace{\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k}\binom{k}{k}}_{=(1+(-1))^k} = 0$$

Dowód (przez indukcję).

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$$
$$= \underbrace{|A_1 \cup \ldots \cup A_n|}_{(*)} + |A_{n+1}| - \underbrace{|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots|}_{(**)}$$

stosujemy zał. indukcyjne do $(*)$ i do $(**)$

Co dalej?

Mała cukiernia

Przykład 1. Ile jest 11-kombinacji z $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$?

Odpowiedź: 3 ☺

Przykład 2. Ile jest 10-kombinacji z $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$?

Odpowiedź: Tyle samo, ile jest 2-kombinacji z tego zbioru; tych jest $\binom{4}{2}$!

Przykład 3 (typowy)

Ile jest 10-kombinacji z $X = \{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c, 6\cdot d\}$?

Rozważamy 10-kombinacje z $D = \{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c, \infty\cdot d\}$.

Jest ich $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{11\cdot 12\cdot 13}{6} = 22\cdot 13$

Teraz

10-komb z X = 10-komb z D − złe

$Z(a)$ – kombinacje, w których a pojawia się ≥ 4 razy

$Z(b)$ ——— –||– b –||– ≥ 5 –||–

$Z(c)$ ——— –||– c –||– ≥ 6 –||–

$Z(d)$ ——— –||– d –||– ≥ 7 –||–

Obliczymy $|Z(a) \cup Z(b) \cup Z(c) \cup Z(d)|$ z zasady włączeń i wyłączeń.

$|Z(a)| = \binom{9}{6}$ (= liczba 6-kombinacji)

$|Z(b)| = \binom{8}{5}$ $\qquad |Z(a)\cap Z(b)| = 4 \qquad |Z(b)\cap Z(c)| = 1$

$|Z(c)| = \binom{7}{4}$ $\qquad |Z(a)\cap Z(c)| = 1 \qquad |Z(b)\cap Z(d)| = 0$

$|Z(d)| = \binom{6}{3}$ $\qquad |Z(a)\cap Z(d)| = 0 \qquad \ldots$

Stąd $|Z(a) \cup Z(b) \cup Z(c) \cup Z(d)| = \binom{9}{6} + \binom{8}{5} + \binom{7}{4} + \binom{6}{3}$

$- (4+1+1) = (*)$

Ostateczna odpowiedź: $22\cdot 13 - (*)$