ZAD 1.

Po pierwsze zauwazmy, ze dla $u < 1$, co $u = 2^{-t-1}$ z pewnoscia spelnia, zachodzi

$$u \leq \frac{u}{1-u}$$
$$u(1-u) \leq u$$
$$u - u^2 \leq u$$
$$0 \leq u^2.$$

Dla $n = 1$ dziala, zalozmy wiec, ze dla wszystkich n mamy

$$1 - \frac{nu}{1-nu} \leq \prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{p_j} \leq 1 + \frac{nu}{1-nu}$$

Wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$
$$= (1+\alpha_{n+1})^{p_j}(1+\theta_n)$$

czyli mamy, ze

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &\leq \alpha_{n+1} + \theta_n + \alpha_{n+1}\theta_n \leq \\ &\leq \frac{u}{1-u} + \frac{nu}{1-nu} + \frac{nu}{1-nu}\frac{u}{1-u} = \\ &= \frac{u(1-nu) + nu(1-u) + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\ &= \frac{u - nu^2 + nu - nu^2 + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\ &= \frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)}\end{aligned}$$

ale ja potrzebuje

$$\theta_{n+1} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

To sprawdzmy, czy

$$\frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$
$$\frac{(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)}{1-(n+1)u}$$

$$1 - nu + n \leq n + 1$$

bo $nu < 1$, czyli

$$1 - nu + n \leq n \leq n + 1$$

oraz

$$(1-nu)(1-u) = 1 - u - nu + nu^2 \geq 1 - nu - u$$

co jest prawda, bo $nu^2 \geq 0$.

To mamy ogranicznie od gory, teraz musze zrobic od dolu

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$
$$\begin{aligned}&= (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1})^{p_{n+1}} \\ &\geq (1+\theta_n)(1+\alpha_n)^{-1} \geq \\ &\geq (1 - \frac{nu}{1-nu})(1 + \frac{u}{1-u})^{-1} = \\ &= \frac{1-2nu}{1-nu}(\frac{1}{1-u})^{-1} = \\ &= \frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu}\end{aligned}$$

teraz potrzebuje pokazac, zeby

$$\frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu} \geq 1 - \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u} = \frac{1-2(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

$$(1-2nu)(1-u)(1-nu-u) \geq (1-nu)(1-2(n+1)u)$$

$$(1-nu-u)(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-2u)$$

$$(1-nu)(1-u-2nu+2nu^2) - u(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-2u)$$

1 ZAD 2.

Znowu indukcja, czyli zakladamy, ze zachodzi dla wszystkich n, wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_J)^{p_j} = 1+\theta_{n+1} = (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1}) = 1+\theta_n+\alpha_{n+1}+\theta_n\alpha_{n+1}$$

czyli

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n\alpha_{n+1} \leq 1.01nu + u + 1.01nu^2$$

Wystarczy mi, zeby

ZAD 3. x, y - liczby maszynowe takie, ze $|y| \leq \frac{1}{2}u|x|$, pokazac, ze $fl(x+y) = x$

Zakladam sobie, ze $x > 0$, bo tak mi latwiej bedzie w zyciu.

$$fl(x+y) = (x+y)(1+\epsilon)$$

$$\begin{aligned}(x+y)(1+\epsilon) \leq (x+y)(1+u) \leq & (x+\frac{1}{2}ux)(1+u) = \\ & = x(1+\frac{1}{2}u)(1+u) = \\ & = x(1+u+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2) = \\ & = x + xu\underbrace{(1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2)}\end{aligned}$$

zaznaczony fragment jest w okolicach bedu bezwzglednego pomiaru, wiec mozemy go pominac

$$\begin{aligned}(x+y)(1+\epsilon) \geq (x+y)(1-u) \geq & (x-\frac{1}{2}ux)(1-u) = \\ & x(1-\frac{1}{2}u)(1-u) = \\ & = x(1-u-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2) = \\ & = x - xu(1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2)\end{aligned}$$

i takiie samo wytlumaczenie jak poprzednio. Czyli mamy wyrazenie ograniczone od gory i od dolu przez x, czyli jest rowne x
:v

ZAD 6.

Chce pokazac, ze to, co wypluje komputer rozni sie niewiele od tego, co powinno sie pojawic na ekranie :v

Po pierwsze, przy podawaniu danych mamy blad bo nie kazda liczba zmiennoprzecikowa jest liczba maszynowa, czyli podajemy

$$a_n' = a_n + \frac{|a_n' - a_n|}{|a_n|} \leq a_n + \frac{u}{1-u}$$

Algorytm Hornera to tak naprawde

$$fl(a0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x \cdot a_n)))) = (a_0 + fl(x \cdot (a_1 + \ldots)))(1+\epsilon_0)$$

ZAD 8.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$

Jezeli $c >= 0$ to smiga, ale jesli $c < 0$, to w okolicy $x = \sqrt{-c}$ caly przyklad sie jebie.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+c} = -\frac{2x}{(c+x^2)^2}$$

$$C_f(x) = \frac{2x}{(c+x^2)^2}\cdot\frac{x^2+c}{1} = \frac{2x}{c+x^2} = \frac{2}{\frac{c}{x}+x}$$

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

$$C_f(x) = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x(1-\cos x)}$$

Jebie sie dla $x = \cos^{-1} 1$, czyli dla $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ dla $k = 0, 1, ..$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x - \cos x + 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{3\cos x - x\sin x} = \frac{0}{3} = 0$$