Zadania z ⋆⋆ LISTA 10

Weronika Jakimowicz

25 grudnia 2023

ZAD. 17

Zacznijmy od wskazówki, to znaczy pokazania, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Według wzoru Taylora wiemy, że istnieje $\xi_i \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ takie, że

$$f(x) = f(\frac{i}{n}) + f'(\xi_i)(x - \frac{i}{n})$$

$$f(x) - f(\frac{i}{n}) = f'(\xi_i)(x - \frac{i}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx = n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left[f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right]dx =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i)\left[x - \frac{i}{n}\right]dx - \frac{f(1)-f(0)}{2} = n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{i}{n}x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\left[f'(\xi_i)\frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Przyjrzyjmy się teraz zależności którą mamy udowadniać.

$$n\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right) = n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_0^1 f(x,y)dxdy - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right) =$$

$$=$$