Algebra II (ISIM), lista 8 (21.12.2021, deklaracje 20.12.2021 do godz. 9:00).

Teoria: Grupy rozwiązalne.

1. Wyznaczyć rzędy grup obrotów własnych sześcianu i izometrii własnych sześcianu (wsk: rozważyć działanie tych grup na zbiorze wierzchołków sześcianu, wyznaczyć rząd stabilizatora wierzchołka i moc orbity tego wierzchołka).

2. (a) Udowodnić, że grupa izometrii własnych czworościanu foremnego jest izomorficzna z grupą S_4.
(b) W grupie izometrii własnych sześcianu wskazać podgrupy izomorficzne z D_4 i z D_3.

3. (a)$-$ W grupie automorfizmów liniowych przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ wskazać element rzędu 2 niebędący izometrią.
(b)* Wskazać taki element rzędu 2021 (zamiast 2).

4. Udowodnić, że:
(a) Każda z grup $G^{(k)}$ jest charakterystyczną podgrupą G.
(b)$^-$ $G^{(k+1)} \lhd G^k$ oraz $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ jest abelowa.

5. Udowodnić, że grupa G jest rozwiązalna stopnia $\leqslant k \iff$ istnieje ciąg normalny grupy G długości k, o faktorach abelowych.

6. $^-$ Dla $H_1, H_2 < G$ określamy komutant grup $[H_1, H_2]$ jako podgrupę generowaną przez komutatory $[h_1, h_2], h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. Załóżmy, że $H_1, H_2 \lhd G$. Udowodnić, że $[H_1, H_2] \subseteq H_1 \cap H_2$ i $[H_1, H_2] \lhd G$.

7. Wyznaczyć komutant grupy D_4.

8. Dowieść, że (a) jeśli $f : G \to H$ jest epimorfizmem grup, to $f[G^{(k)}] = H^{(k)}$;
(b)– jeśli $G < H$, to $G^{(k)} \subseteq H^{(k)}$.

9. Udowodnić, że dla $n > 2, [S_n, S_n] = A_n$. (wsk. dla inkluzji $\supseteq$: każda permutacja jest iloczynem transpozycji, dlatego permutacje postaci $(a, b)(c, d)$ generują A_n. Uzasadnić, że każda taka permutacja jest komutatorem.)

10. $^-$ Sprawdzić, że grupa S_4 jest rozwiązalna.

11. Udowodnić, ze każdy element postaci $g_1 g_2 \dots g_n g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_n^{-1}$, gdzie $g_1, \dots, g_n \in G$, należy do komutanta grupy G.

12. Niech $T(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0 \right\}$ i $U(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$.
(a)$^-$ Sprawdzić, że $U(2, \mathbb{R}) < T(2, \mathbb{R}) < GL(n, \mathbb{R})$.
(b) Pokazać, że $U(2, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}, +)$ i $U(2, \mathbb{R}) = [T(2, \mathbb{R}), T(2, \mathbb{R})]$.
Wywnioskować stąd, że $T(2, \mathbb{R})$ jest rozwiązalna stopnia 2.

13. Sprawdzić, że $Z(GL(n, \mathbb{R}))$ składa się z macierzy postaci $aI, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.(wsk: rozważyć macierze $I_{i,j}$, które mają jedynki na głównej przekątnej oraz na miejscu w i-tym rzędzie i j-tej kolumnie, a poza tym zera. Które macierze komutują z nimi?)

14. (Graf Cayleya grupy G). Załóżmy, że X jest zbiorem generatorów grupy G. Grafem Cayleya grupy G (nad zbiorem generatorów X) oznaczamy graf skierowany $\Gamma_{G,X}$, którego wierzchołkami są elementy grupy G, a krawędzie są etykietowane elementami zbioru X. W grafie $\Gamma_{G,X}$ istnieje strzałka od wierzchołka g do wierzchołka h, etykietowana przez $x \in X$, wtedy i tylko wtedy, gdy $xg = h$.
(a)– Narysować grafy Cayleya dla grupy $(\mathbb{Z}, +)$ i zbioru $X = \{1\}$ oraz grupy D_4 i 2-elementowego zbioru generatorów grupy D_4.
(b)– Udowodnić, że X jest wolnym zbiorem generatorów grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $\Gamma_{G,X}$ nie ma cykli.

15. * (a) Udowodnić, że z dokładnością do izomorfizmu wszystkie skończone grupy izometrii liniowych płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ to grupy $\mathbb{Z}_n, n \geqslant 1$, i $D_n, n \geqslant 2$.
(b) Udowodnić, że jeśli G jest skończoną grupą izometrii płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, to G jest izomorficzna z pewną skończoną grupą izometrii liniowych płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (wsk: załóżmy, że $G\{g_1, \ldots, g_k\}$ jest rzedu k oraz $P \in \mathbb{R}^2$. Rozważyć środek ciężkości układu punktów $(g_1(P), g_2(P), \ldots, g_k(P))$.)