

Miara i całka

speedrun przed terminem 0

by a MEEEE

21.03.2137

ROZDZIAŁ 2

Funkcja Σ -mierzalna $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja, która dla każdego $f^{-1}[B] \in \Sigma$ spełnia $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$, równoważnie jeżeli $\mathcal{G} \subseteq \text{Bor}(\mathbb{R})$ takie, że $\sigma(\mathcal{G}) = \text{Bor}(\mathbb{R})$, to wystarczy dla każdego $G \in \mathcal{G}$ $f^{-1}[G] \in \Sigma$.

Każdy z poniższych pociąga mierzalność:

$$\{x : f(x) < t\} \in \Sigma$$

$$\{x : f(x) \leq t\} \in \Sigma$$

$$\{x : f(x) > t\} \in \Sigma$$

$$\{x : f(x) \geq t\} \in \Sigma$$

Jeżeli funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest Σ -mierzalna, a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą, to $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest Σ -mierzalna.

Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

Każdą Σ -mierzalną funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.

Funkcja prosta to funkcja o skończonym zbiorze wartości, czyli kombinacja liniowa skończenie wielu funkcji charakterystycznych

Ciąg funkcji mierzalnych jest zbieżny prawie wszędzie, jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ poza zbiorem miary zero.

Dla każdej λ -mierzalnej funkcji f istnieje borelowska funkcja g taka, że $f = g$ λ -prawie wszędzie.

Jeżeli $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ o $\mu(A) < \varepsilon$ i f_n jest jednostajnie zbieżny do f na zbiorze A^c .

Ciąg funkcji mierzalnych jest niemal jednostajnie zbieżny, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg f_n zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.

Mówimy, że ciąg jest zbieżny według miary, jeżeli dla każdego ε $\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

\Leftrightarrow Zbieżny niemal jednostajnie \Rightarrow zbieżny według miary.

\Leftrightarrow Zbieżny prawie wszędzie w mierze skończonej \Rightarrow zbieżny według miary.

Twierdzenie Riesz: jeżeli ciąg funkcji spełnia warunek Cauchy'ego według miary, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

to f_n jest zbieżny według miary do pewnego f oraz istnieje podciąg liczb naturalnych $n(k)$ taki, że $f_{n(k)}$ jest zbieżny prawie wszędzie oraz według miary.

ROZDZIAŁ 3

Całkę po funkcji prostej $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ definiujemy jako

$$\int_X f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Dla nieujemnej mierzalnej funkcji f definiujemy

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f \right\},$$

czyli jeżeli $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ jest ciągiem funkcji prostych takich, że $\lim_n s_n = f$ prawie wszędzie, to

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X s_n d\mu.$$

Funkcja mierzalna jest całkowalna, jeżeli $\int_X |f| d\mu < \infty$, wtedy definiujemy całkę wzorem $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ dla $f = f^+ - f^-$ nieujemnych.

Dla f, g całkowalnych i h mierzalnej:

$$\Leftrightarrow \int_X (af + gb) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$$

$$\Leftrightarrow h = 0 \text{ prawie wszędzie, to } \int_X h d\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow f \leq g \text{ prawie wszędzie, to } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int_X (f + g) d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu$$

$$\Leftrightarrow a \leq f \leq b \text{ prawie wszędzie, to } a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X)$$

$$\Leftrightarrow \text{dla } A, B \in \Sigma \text{ jeżeli } A \cap B = \emptyset, \text{ to } \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej: niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych takich, że $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ zbieżnych prawie wszędzie do $f = \lim_n f_n$

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Lemat Fatou: dla dowolnego ciągu funkcji nieujemnych f_n zachodzi

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu = \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej: niech f_n, g będą mierzalne, że dla każdego n $|f_n| \leq g$ zachodzi prawie wszędzie przy czym $\int_X g d\mu < \infty$. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie, to

$$\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\lim_n \int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Jeżeli teraz $\mu(X) < \infty$ oraz f_n są wspólnie ograniczone i $\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

Jeżeli f jest mierzalna i nieujemna, to funkcja $\nu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

jest miarą na Σ .

Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest λ -mierzalna i obie całki są sobie równe: $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda$.

ROZDZIAŁ 4

Niech (X, Σ) i (Y, Θ) będą przestrzeniami z Σ, Θ będącymi σ -ciałami. W $X \times Y$ możemy zdefiniować następujące σ -ciało:

$$\Sigma \otimes \Theta = \sigma(\{A \times B : A \in \Sigma, B \in \Theta\}),$$

wtedy $\Sigma \otimes \Theta$ jest produktem σ -ciał Σ i Θ .

Zbiór $F \subseteq X \times Y$ należy do ciała prostokątów na Σ, Θ wtw $F = \bigcup A_i \times B_i$ dla $A_i \in \Sigma$ i $B_i \in \Theta$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, to dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$ definiujemy **cięcia pionowe i poziome** $E_x = \{z \in Y : (x, z) \in E\}$ i $E^y = \{z \in X : (z, y) \in E\}$.

Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$, a funkcja $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$ -mierzalna, to funkcja f_x jest Θ -mierzalna, a f^y jest Σ -mierzalna.

$$\text{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \text{Bor}(\mathbb{R}) = \text{Bor}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Miarę na produkcie przestrzeni (X, Σ, μ) i (Y, Θ, ν) definiujemy:

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Funkcja definiowana na σ -ciele prostokątów podzbiorów $X \times Y$ postaci $A \times B = F$ określona wzorem

$$\kappa(F) = \int_X \nu(F_x) d\mu(x)$$

jest przeliczalnie addytywna i $\kappa(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ dla wszystkich $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$.