Grzegorz Plebanek

Kombinatoryka (R)

Radosna

Relaksująca

Co tu się będzie działo?

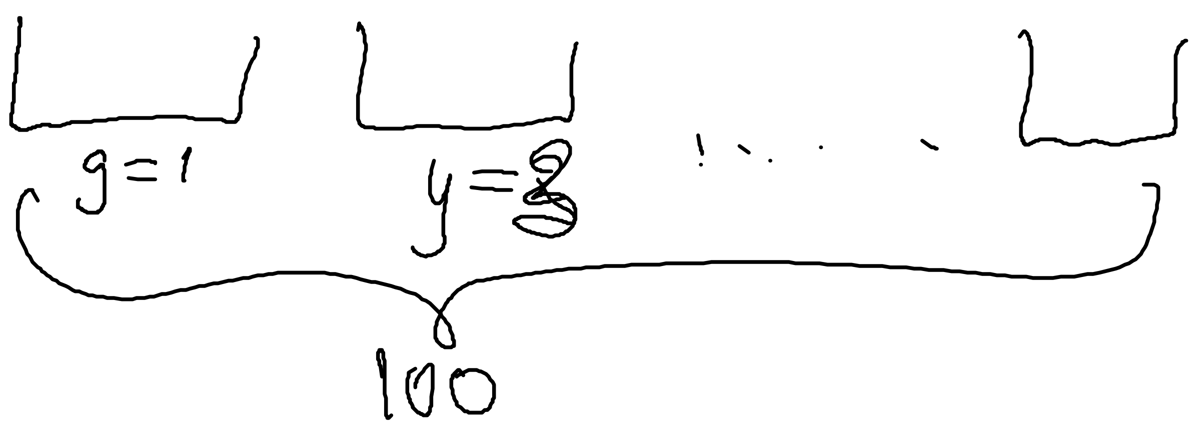
- Ile jest tych rzeczy?
- Czy i jak coś zrobić?

Zasada szufladkowa

Zasada szufladkowa Dirichleta. Jeżeli $n+1$ przedmiotów umieścimy w n szufladach to pewne dwa przedmioty znajdują sie w tej samej szufladzie.

Przykład 1. *Wśród 101 liczb ze zbioru* $\{1, 2, \ldots 200\}$ *istnieją dwie różne* a, b*, takie że* a *dzieli* b*.*

Każdą liczbę naturalną x można zapisać jako $x = 2^k \cdot y$, gdzie y jest nieparzyste. Jeśli $1 \leqslant x \leqslant 200$ to $y = \underbrace{2m-1}$, gdzie $1 \leqslant m \leqslant 100$. I…koniec.



Istnieją x_1, x_2 (w naszym zbiorze)

$x_1 \neq x_2 \qquad x_1 = 2^{k_1} \cdot y \qquad x_2 = 2^{k_2} \cdot y$

Wtedy np. przyjąć $k_1 > k_2$. x_2 dzieli x_1

Zasada szufladkowa

Przykład 2. Dla każdego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ liczb całkowitych istnieje blok $a_i + \ldots + a_j$ podzielny przez n.

$1 \leq i \leq j \leq n$

Jest n bloków postaci $a_1 + \ldots + a_i$; jeśli blok takiej postaci dzieli sie przez n to koniec. Inaczej są dwa różne początkowe bloki dające taką sama resztę z dzielenia przez n i... odejmujemy.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ a_1 + \ldots + a_n \end{array}\right\} n$$

Te sumy nie dzielą się przez n

Istnieją $i < j$, takie że

$a_1 + \ldots + a_i$ dają samą resztę z
$a_1 + \ldots + a_j$ dzielenia przez n.

$$(a_1 + \ldots + a_j) - (a_1 + \ldots + a_i) =$$
$$= a_{i+1} + \ldots + a_j \quad \text{jest podzielna przez } n.$$

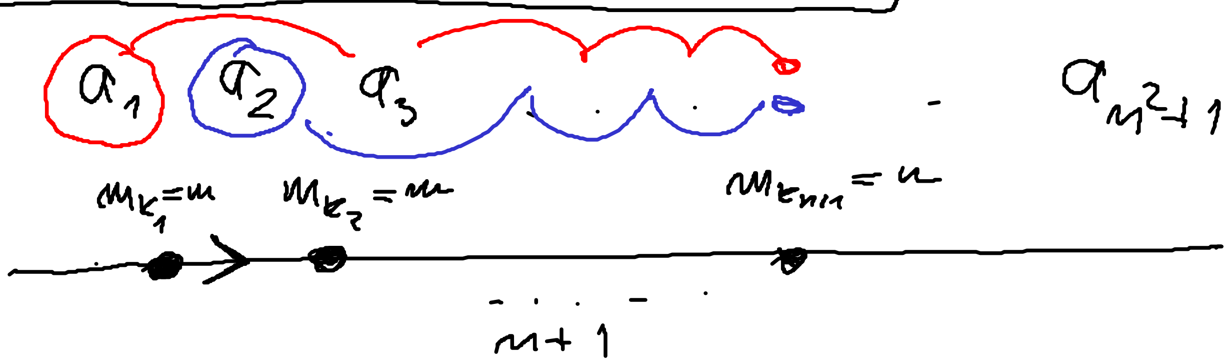
Zasada szufladkowa ogólniej

Twierdzenie. *Jeżeli $n(r-1)+1$ przedmiotów umieścimy w n szufladach to pewna szuflada zawiera $\geqslant r$ przedmiotów.*

Twierdzenie (Erdős–Szekeres). *Każdy ciąg $a_1, \ldots a_{n^2+1}$ różnych liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny długości $n+1$.*

Dowód. Przypuśćmy, że nie istnieje podciąg rosnący długości $n+1$. Niech m_k będzie maksymalną długością podciągu rosnącego, zaczynającego się od a_k. Wtedy $m_k \leqslant n$ więc (!) istnieją $k_1 < k_2 < \ldots k_{n+1}$ dające tę samą wartość $m_{k_i} = m$.

$\boxed{\text{Teraz wystarczy sprawdzić, że } a_{k_1} > \ldots > a_{k_{n+1}}.}$

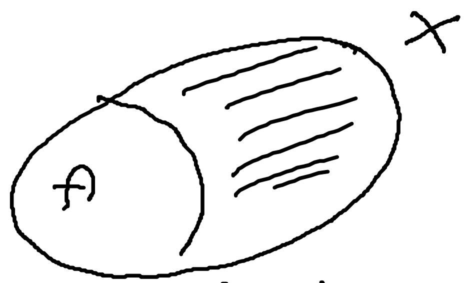


Gdyby $a_{k_1} < a_{k_2}$ to

Podstawowe reguły zliczania

- *Addytywność: jeżeli* $A \cap B = \emptyset$ *to* $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- *Multyplikatywność:* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- *Komplementarność: Dla* $A \subseteq X$ *zachodzi wzór*

  $$|A| = |X| - |X \setminus A|.$$



Jeżeli znamy $|X|$ i $|X \setminus A|$ to
$|A| = |X| - |X \setminus A|$.

Przykład. Jeżeli $|A| = n$ to
$|\mathcal{P}(A)| = 2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n}$

A

$B \subseteq A$

Przykład. Ile jest podzbiorów $\{1, \ldots, n\}$ mających ≥ 2 elementy?

Odpowiedź: $2^n - n - 1$

Permutacje

Twierdzenie. *n różnych przedmiotów można ustawić w ciąg na $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ sposobów.*

Dowód.

Tworzymy ustawienie $\underbrace{\square\ \square\ \ldots\ \square}_{n}$

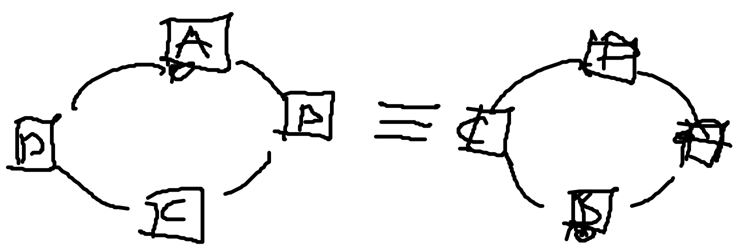
Pierwszy el. możemy wybrać na n sposobów

Drugi — || — $n-1$ — | —

Trzeci — || — $n-2$

Stąd jest $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ permutacji.

Permutacja kołowa



Twierdzenie. *Jest*

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

permutacji kołowych n różnych elementów.

Wariacje

Twierdzenie. Jeżeli $|A| = n$ to istnieje

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

k-wyrazowych ciągów różnych wyrazów tego zbioru.

Dowód

$$\underbrace{\overset{n}{\square}\ \overset{n-1}{\square}\ \dots\ \overset{n-k+1}{\square}}_{k}$$

Stąd $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Utworzymy ciąg k-elementowy biorąc pierwsze k-wyrazów z dowolnej permutacji.

Kombinacje

Definicja. Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ definiujemy jako liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

Twierdzenie. *Dla* $0 \leqslant k < n$ *mamy*

(a) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(b) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(c) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(a) jest oczywiste z samej def.

(b) Prawa strona wylicza $k+1$ el. podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n, n+1\} = A$

$1 \quad 2 \quad \ldots \quad n \quad n+1$

$\binom{n}{k}$ — ilość $k+1$ el. podzbiorów A zawierających $n+1$

$\binom{n}{k+1}$ — ilość $k+1$ el. podz. A nie zawierających $n+1$

(c) Utwórzmy podzbiór k-elementowy biorąc pierwsze k wyrazów permutacji.

Współczynniki dwumianowe

Twierdzenie.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dowód

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\ \dots\ (a+b)}^{n}$$

jest sumą wyrazów postaci $a^k \cdot b^{n-k}$

Ile mamy pojawień ? $a^k b^{n-k}$

Przykłady.

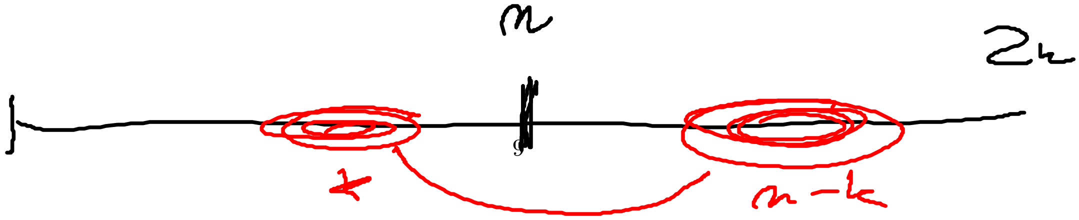
(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Podstaw $a=b=1$.

(b) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}}$

(c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(a) jest kombinatoryczny opis.

(c) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \boxed{\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}} = \binom{2n}{n}}_{n}$$



Uogólnione symbole Newtona

Definicja. Dla $x \in \mathbb{R}$ i naturalnej liczby $k \geqslant 1$ definiujemy

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

Dodatkowo

$$\binom{x}{0} = 1 \quad \binom{x}{k} = 0$$

dla $k < 0$.

$$\binom{n}{k} = \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Twierdzenie. *Dla $|x| < 1$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

n $\quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$

Uwaga $k > n \implies \binom{n}{k} = 0$

Uwaga $0! = 1$ bo jest $\boxed{\text{jedna}}$ permutacja $\emptyset$.

$\emptyset \xrightarrow{\emptyset} \emptyset$