MDM Lista 8

Weronika Jakimowicz

ZAD. 2.

Rozważmy równanie
$$z^k = 1.$$
Jednym z jego pierwiastków jest liczba $z = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Zauważmy też, że
$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1} = 0,$$
bo
$$(z-1)(1 + z + \ldots + z^{k-1}) = z + z^2 + \ldots + z^k - 1 - z - \ldots - z^{k-1} = z^k - 1$$
$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = 1 + z + \ldots + z^{k-1}$$
ale $z^k - 1 = 0$, więc
$$1 + z + \ldots + z^{k-1} = 0.$$
Dla $k = 2$ mamy $z = -1$ i:
$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$
$$A(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots$$
co po wysumowaniu daje
$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + a_1x(1-1) + 2a_2x^2 + a_3x^3(1-1) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n}x^{2n}$$
i upraszczając dostajemy:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^n = \frac{1}{2}(A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x}))$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + \ldots$$
$$A(zx) = a_0 + a_1zx + a_2z^2x^2 + a_3z^3x^3 + a_4z^4x^4 + a_5z^5x^5 + a_6z^6x^6 + a_7z^7x^7 + \ldots$$
$$A(z^2x) = a_0 + a_1z^2x + a_2z^4x^2 + a_3z^6x^3 + a_4z^8x^4 + a_5z^{10}x^5 + a_6z^{12}x^6 + a_7z^{14}x^7 + \ldots$$
Zauważmy, że $z^{3k} = 1^k = 1$, więc przy a_{3n} zawsze mamy tylko x^{3n}, natomiast przy pozostałych potęgach, czyli z^{3k+r}, gdzie $r = 1$ lub $r = 2$ mamy
$$z^{3k+r} = z^{3k}z^r = z^r.$$
Dodając wszystkie te wartości, tak jakd dla przypadku $k = 2$, dostajemy
$$A(x) + A(zx) + A(z^2x) = 3a_0 + a_1x(1 + z + z^2) + a_2x^2(1 + z + z^2) + 3a_3x^3 + a_4x^4(1 + z^1 + z^2) + \ldots =$$
$$= 3a_0 + 3a_3x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{3n}x^{3n}$$
a więc aby dostać funkcję tworzącą ciągu a_{3n} wystarczy wziąc
$$\frac{1}{3}(A(\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{x})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n}x^n.$$

ZAD. 3.

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} F_i F_{n-i}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i}$$

ZAD. 4.

$$(1+x)^{\alpha} = (1+0)^{\alpha} + \frac{\alpha}{1!}(1+0)^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(1+0)^{\alpha-2}x^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$