# MDM Lista 6

Weronika Jakimowicz

## ZAD. 1.

Rozważmy najpierw prawą stronę równania. Spośród n osób wybieramy najpierw lidera delegacji. Możemy to zrobić na n sposobów. Chcemy mu dobrać pewną delegację osób. Ponieważ lider został już wybrany, to zostaje nam $(n-1)$ osób. Dla każdej z nich mamy dwie możliwości: albo osoba zostanie wybrana albo nie. Czyli dla każdej z $(n-1)$ możemy zadecydować jej los na 2 sposoby, co daje nam

$$n \cdot 2^{n-1}$$

sposobów na wybranie delegacji z co najmniej 1 osobą.

Teraz zajmujemy się lewą stroną równania. Suma przechodzi przez wszystkie możliwe rozmiary delegacji: możemy wybrać delegację która ma tylko jedną osobę (wtedy $k = 1$),a możemy też przecież wybrać delegację o $k = n-1$ lub $k = n$ członkach. W każdej z takich k-osobowych delegacji lidera możemy wybrać na k sposobów. Całość daje to samo rozwiązanie co przechodzenie przez każdą potencjalną osobę po kolei i decydowanie czy ona trafia do delegacji czy też nie.

## ZAD. 2.

Jeśli jedynek jest o co najmniej 2 więcej niż zer, to całość nam nie zadziała. Na przykład w 1101 nie możemy rozdzielić dwóch pierwszych 1. Załóżmy więc, że

$$k < l + 2$$

Aby ułatwić sobie zadanie, sklejmy $k-1$ jedynek z zerami. Na razie niech zera będą zawsze przez jedynką, to znaczy tworzymy pary 01. Ustawiamy je jedna koło drugiej i zrobić to możemy na jeden sposób. Zostaje nam $k-(k-1) = 1$ jedynka, którą musimy wstawić na sam przód ciągu i $l-(k-1)$ zer. Nie mamy ograniczeń na położenie zer, więc możemy je wstawić na dowolne miejsce między dotychczasowymi $2k-1$ elementami lub na jednym z końców, co daje nam

$$\binom{2k}{l-k+1}$$

miejsc na wstawienie 0. Dostajemy więc $\binom{2k}{l-k+1}$ ciągów kiedy zera stoją przed jedynkami.
Teraz zauważmy, że jeśli odbijemy początkowe pary jedynek i zer, tzn. postawimy jedynki przed zerami, dostaniemy sytuację lustrzaną. Czyli kolejne $\binom{2k}{l-k+1}$ sposobów na ustawienie ciągu. Daje to ostateczną liczbę ciągów, gdzie jedynki nigdy nie są koło siebie, czyli

$$2 \cdot \binom{2k}{l-k+1}$$

## ZAD. 3.

Określmy zbiory:

$$A = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 2|k\}$$
$$B = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 3|k\}$$

Zacznijmy od znalezienia $|A \cup B|$. Z zasady włączeń i wyłączeń jest to

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor,$$

bo $A \cap B$ to liczby podzielne jednocześnie przez 3 i 2, czyli podzielne przez 6.

Teraz niech

$$C = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 14|k \text{ lub } 21|k\}$$
$$D = \{k \ : \ 1 \le k \le n, \ 10|k \text{ lub } 15|k\}$$
$$|C| = \lfloor \frac{n}{14} \rfloor + \lfloor \frac{n}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n}{42} \rfloor$$

$$|D| = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor$$

$$|C \cup D| = |C| + |D| - \lfloor \frac{n}{210} \rfloor$$

Czyli teraz od sumy $|A \cup B|$ chcemy odjąć $|C \cup D|$ i to jest nasz wynik.

## ZAD. 4.

Liczba wszystkich permutacji to $n!$. Teraz wystarczy od wszystkich permutacji odjąć te, które nam nie pasują, czyli mają co najmniej jedną liczbę $i \leq k$ na pozycji $i$.
Rozważmy ciąg rekurencyjny $a(n,k)$ taki, że $a(n,k)$ to liczba permutacji zbioru n-elementowego, że pierwsze k elementów nie jest na swoim wyjściowym miejscu. Dla $a(n,0)$ mamy oczywiście wartość $n!$ a dla $a(n,1) = (n-1)(n-1)!$.
Prześledźmy wędrówkę pierwszego elementu. Jeżeli zamienimy go z jednym z pierwszych k elementów, to możęmy to zrobić na $(k-1)$ sposobów i zostaje nam wtedy $(k-2)$ elementy w $(n-2)$ elementach. Jeżeli zamienimy pierwszy element z jednym z ostatnich $(n-k)$ elementów, możemy to zrobić na $(n-k)$ sposobów i zostaje nam wtedy do ustawienia $(k-1)$ elementów spośród zbioru $(n-2)$ elementowego. Jeśli natomiast na miejscu pierwszego elementu postawimy jeden z pozostałych $(n-1)$ elementów ale nie zamienimy go z jedynką, to pozostaje nam ustawienie $(k-1)$ elementów spośród zbioru $(n-1)$ elementowego. Daje to poniższy wzór rekurencyjny:

$$a(n,k) = (k-1)a(n-2,k-2) + (n-k)a(n-2,k-1) + (n-1)a(n-1,k-1)$$

## ZAD. 5.

Szukamy liczby permutacji zbioru $\{1,2,\dots,n\}$ takich, że dla każdego i nie stoi ono na pozycji i.

Popatrzmy na liczbę permutacji, w których dokładnie k elementów pozostaje na swoim miejscu. Z n elementów te k które zostanie pozostawione w swoim miejscu może zostać wybranie na $\binom{n}{k}$ sposobów. Z zasady włączeń i wyłączeń, mamy, że ilość permutacji, w których przynajmniej jeden element jest na swoim miejscu to

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

Nieporządek to permutacja, w której żaden element nie jest na swoim miejscu to liczba wszystkich permutacji pomniejszona o liczbę permutacji w których przynajmniej jeden element jest na swoim miejscu:

$$d_n = n! - \sum_{k} = 1^n(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(-1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Wzór Taylora na $e^x$ to

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

i dla $x = -1$ przyjmuje to wartość

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

czyli liczba nieporządków to w przybliżeniu

$$d_n \approx n!e^{-1} = \frac{n!}{e}$$

## ZAD. 6.

Najpierw zajmijmy się przyporządkowaniem skarpet do komody. Każda z nich ma być pełna, więc jeśli $n < 5$, to oczywiście nie możemy zrobić żeby rzadna nie była pusta. Dajmy każdej z komód po jednej skarpecie, co dla rozróżnialnych skarpet można zrobić na $5!$ sposobów i pozostałe $n-5$ skarpet rozkładamy na 20 szuflad.

Pozostałe $n-5$ skarpet możemy ułożyć w ciąg na $(n-5)!$ sposobów. Dla dowolnego takiego ciągu chcemy włożyć między skarpety kapcia, który rozgranicza które skarpety trafią do której szuflady. Takich kapciów potrzeba nam tylko 19, bo zawartość ostatniej szuflady jest ograniczana końcem ciągu skarpet. Teraz wybieramy miejsca dla tych 19 kapciów spośród $n-5+19 = n+14$ miejsc w ciągu. Możemy to zrobić na $\binom{n+14}{19}$ sposobów.

Łącząc wszystko w jedną odpowiedź, dostajemy

$$5! \cdot (n-5)! \cdot \binom{n+14}{19}$$

sposobów na rozmieszczenie n skarpet w 5 komód po 4 szuflady tak, żeby żadna komoda nie była pusta.

## ZAD. 12.

(a) $\{id, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$
TAK, jest to grupa, ponieważ wszystkie elementy to potęgi (12345) (czyli mamy podgrupę cykliczną).

$$(12345)(12345) = (13524)$$

$$(12345)(13524) = (14253)$$
$$(12345)(14253) = (15432)$$
$$(12345)(15432) = (1)(2)(3)(4)(5)$$

(b) $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
TAK:

$$(12)(34)(13)(24) = (14)(23)$$
$$(12)(34)(14)(23) = (13)(24)$$
$$(12)(34)(12)(34) = id$$

$$(13)(24)(14)(23) = (12)(34)$$
$$(13)(24)(13)(24) = id$$
$$(13)(24)(12)(34) = (14)(32)$$

$$(14)(23)(13)(24) = (12)(34)$$
$$(14)(23)(12)(34) = (13)(24)$$
$$(14)(23)(14)(23) = id$$

Zbiór ten jest zamknięty na składanie permutacji, branie odwrotności i jego działanie jest łączne ze względu na definicję $S_5$.

(c) $\{id, (12)(345), (135)(24), (15324), (12)(45), (134)(25), (143)(25)\}$
NIE:

$$(12)(345)(135)(24) = (14)(25)$$

nie jest zamknięta na składanie permutacji, bo wynik powyższego działania nie należy do danego zbioru.

## ZAD. 14.

Obracając wierzchołki dwunastościanu dostajemy 60 symetrii:

Weźmy dowolny wierzchołek. Sąsiaduje on z 3 innymi, więc jeśli przerzucimy ten wybrany wierzchołek na dowolny inny, co można zrobić na 20 sposobów, bo mamy 20 wierzchołków, to dla jednego z jego sąsiadów miejsce możemy wybrać na trzy sposoby. Pozostali sąsiedzi muszą sią dostosować do tego układu tak, żeby sądiedztwo wierzchołków nie zostało naruszone. Daje to $20 \cdot 3 = 60$ symetrii obrotowych.

Teraz zauważmy, że dla każdego takiego obrotu możemy go złożyć z obrotem o $\pi$ względem osi poprowadzanej przez wybrany wierzchołek i wierzchołek naprzeciwko niego. Takie złożenie jest nadal symetrią i mamy $60 \cdot 2 = 120$ symetrii na dwunastościanie foremnym.