

ZAD 1.

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$$

Niech $\mathbb{Z} \ni m = \lfloor an \rfloor$, wtedy

$$\begin{aligned} m &\leq an < m+1 \\ m-n &\leq an-n < m-n+1 \\ n-m &\geq n-an > n-m-1 \end{aligned}$$

Ponieważ $n \notin \mathbb{Q}$, to $n-an \notin \mathbb{Z}$, więc

$$\lfloor n-an \rfloor = n - \lfloor an \rfloor - 1$$

a z tego

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor n(1-a) \rfloor = n - 1$$

$$\lceil an \rceil + \lceil n-an \rceil = n + 1$$

ZAD 2.

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor \quad (\text{👉})$$

Po pierwsze pokazemy, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor \quad (\text{☕})$$

Niech $p = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor$, wtedy

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ p &\leq \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} < p+1 \\ \mathbb{Z} \ni m \cdot p - n &\leq \lfloor x \rfloor < m \cdot (p+1) - n \in \mathbb{Z} \\ m \cdot p - n &\leq x < m \cdot (p+1) - n \\ p &\leq \frac{x-n}{m} < p+1 \\ p &\leq \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor < p+1 \\ p &= \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

Czyli pokazaliśmy (☕).

Po drugie, zauważmy, że dla dowolnego n i dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m > 1$ zachodzi

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{n+i}{m} \right\rfloor$$

Zauważmy, że jest to ilość elementów w każdej grupie przy podziale n elementów na m grup. We wszystkich kolumnach umiemy co najmniej $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ obiektów, ale w ostatnich $n \bmod m$ kolumnach będzie ich o 1 więcej, co jest uzyskiwane przez zwiększanie o 1 licznika po każdej kolumnie.

Wracając do (👉), możemy powiedzieć, że

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

ZAD 3.

- a) potrzebujemy a_0 , a_1 , natomiast a_2 możemy już obliczyć za pomocą a_0
- b) potrzebne jest a_0 , a_1 oraz a_2 , bo wyraz a_3 to już suma wyrazów poprzednich
- c) potrzebny jest tylko wyraz a_0 – jest on potrzebny dla a_1 , dla a_2 potrzebne jest a_1 i tak dalej – zawsze przy odpowiedniej ilości podzielen na 2 otrzymujemy a_0

ZAD 4.

- a) $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $f_1 = 3$.

To jest suma geometric sequence:

$$f_n = \sum_{i=1}^n 3^i = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

- b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$

$$h_n = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)n$$

- c) $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$ dla $n > 2$ i $l_1 = l_2 = 2$

$$l_3 = 4 = 2^2$$

$$l_4 = 8 = 2^3$$

$$l_5 = 32 = 2^5$$

$$l_6 = 256 = 2^8$$

l_n wyraz to 2^k , gdzie k to n -ty wyraz ciągu fibonacciego. Także zostaje mi nic innego jak znaleźć jawny wzór na ciąg fibonacciego, f_n :)

Lecimy funkcja tworząca, cuz why not. Niech

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_n x^n$$

wtedy

$$F(x) = \sum_{i=0} f_i x^i$$

$$F(x) = x + \sum_{i=2} (f_{i-1} + f_{i-2})x^i$$

$$F(x) = x + x \sum_{i=2} f_{i-1} x^{i-1} + x^2 \sum_{i=2} f_{i-2} x^{i-2}$$

$$F(x) = x + x \sum_{i=1} f_i x^i + x^2 \sum_{i=0} f_i x^i$$

Zauważmy, że ponieważ $f_0 = 0$, to $\sum_{i=0} f_i x^i = \sum_{i=1} f_i x^i$

$$F(x) = x + (x + x^2) \sum_{i=0} f_i x^i$$

$$F(x) = x + (x + x^2)F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Zauważamy, że

$$1 - x - x^2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Czyli mamy

$$F(x) = \frac{x}{(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})}$$

Rozbicie tego na dwa dodawane ułamki zostawiam czytelnikowi oraz wikipedii. Tak samo jak dokonczenie tego rozwiazania.

Zalozmy, ze czytelnik byl mniej leniwy niz autorka i wyliczyl jawny wzor na n-ty wyraz ciagu fibonaciego, ktory wg wikipedii wyglada mniej wiecej tak:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

Otrzymujemy wiec:

$$l_n = 2^{f_n} = 2^{f_{n-1}} \cdot 2^{f_{n-2}}$$

ZAD 5.

a) $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ dla $a_0 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n|2 \\ 2 & \end{cases}$$

Dla $n = 0, 1$ - dziala. Zalozmy, ze dziala tez dla wszystkich wyrazow mniejszych niz n . Rozwazamy dwa przypadki:

$2|n$, wtedy $2 \nmid n-1$ i mamy $a_{n-1} = 2$

$$a_n = \frac{2}{2} = 1$$

czyli tak jak jest we wzorze.

$2 \nmid n$, wtedy $a_{n-1} = 1$ i

$$a_n = \frac{2}{1} = 2.$$

b) $b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}}$ $b_0 = 0$

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = \frac{2}{3}$$

$$b_4 = \frac{3}{5}$$

$$b_5 = \frac{5}{8}$$

$$b_6 = \frac{8}{13}$$

b_n -ty wyraz to $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ gdzie f_n to n -ta liczba fibonacciego.

c) $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$ $c_0 = 1$

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 2$$

$$c_3 = 4$$

$$c_4 = 8$$

$$c_5 = 16$$

$$c_6 = 32$$

$$c_7 = 64$$

czyli $c_n = 2^{n-1}$

d) $d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$ $d_0 = 1$ $d_1 = 2$

