Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 2

20 października 2022 r.

M2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1, +1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest wielkością spełniającą nierówność $|\theta_n| \leqslant \gamma_n$, gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

M2.2. $\boxed{\text{1.5 punkta}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01 n\mathsf{u}.$$

M2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli x, y są liczbami maszynowymi takimi, że $|y| \leqslant \frac{1}{2}\mathsf{u}|x|$, to $\mathrm{fl}(x + y) = x$.

M2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania pierwiastka x^- (notacja z wykładu) równania kwadratowego równania

$$x^2 + 2px + q = 0 \qquad (p^2 - q > 0, \quad p, q \neq 0). \tag{1}$$

Wskazówka: Rozpatrzyć funkcję

$$f(p, q) := p - \sqrt{p^2 - q},$$

a następnie zbadać uwarunkowanie zadania obliczania jej wartości. Dla funkcji dwuargumentowej mówimy o dwóch wskaźnikach uwarunkowania obliczania jej wartości; pierwszy uwzględnia zmianę argumentu p, a drugi — argumentu q. Niech δ_p i δ_q oznaczają względne zmiany argumentów p i q. Następnie wystarczy skorzystać ze wzoru Taylora

$$f(p(1 + \delta_p), q(1 + \delta_q)) \approx f(p, q) + p\delta_p f'_p(p, q) + q\delta_q f'_q(p, q).$$

Przy badaniu błędu względnego otrzymanej wartości funkcji, rozpatrzyć osobno wielkości stojące przy δ_p i δ_q. W ten sposób otrzymamy odpowiednio wskaźniki uwarunkowania ze względu na zmienną p i q:

$$\mathrm{cond}_p = -\frac{1}{\sqrt{1 - q/p^2}}, \qquad \mathrm{cond}_q = -\frac{1 + \sqrt{1 - q/p^2}}{2\sqrt{1 - q/p^2}}. \tag{2}$$

M2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważyć zadanie obliczenia wartości $a + a^2$ dla $a > 2$.
Uwdowodnić, że poniższy algorytm jest numerycznie poprawny.

— Oblicz
  a) $x := a * a$,
— Wynik: $a + x$

M2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \ldots, w_n$ za pomocą wzorów

a) $w_n := a_n$,

b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$.

— Wynik: $L(x) = w_0$.

Zakładając, że a_0, a_1, $\ldots$, a_n oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

M2.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pole n-kąta foremnego ($n \geqslant 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n. Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, $P_{16}, \ldots$:

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$
$$s_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1}\, s_k \qquad (k = 3, 4, \ldots).$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę t-cyfrową ($t \geqslant 128$) obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \ldots, 2t$.

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

M2.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f, podanej wzorem
(**a**) $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie c jest stałą; (**b**) $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ dla $x \neq 0$.

13 października 2022 r.

Rafał Nowak