Zadania z ⋆⋆ LISTA 10

Weronika Jakimowicz

25 grudnia 2023

ZAD. 17

Tak jak we wskazówce, pokażemy najpierw, że

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(\frac{j}{n})\Big) = \frac{1}{2}(f(1) - f(0)).$$

Zauważmy najpierw, że skoro f jest ciągłą funkcją całkowalną na badanym przedziale, to

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx$$

a z drugiej strony dla $x_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$

$$f(1) - f(0) = \sum_{i=1}^{n}(f(\frac{i}{n}) - f(\frac{i-1}{n})) = \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\frac{1}{n},$$

co dla $n \to \infty$ zmierza do $\int_0^1 f'(x)dx$.
Popatrzmy teraz na lewą stronę równania

$$n(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})) = n\int_0^1 f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}[f(x) - f(\frac{i}{n})]dx = n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{x}^{\frac{i}{n}} f'(t)dtdx$$

Ponieważ dla każdego $\frac{i-1}{n} \leq x$ zachodzi

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dt \leq \int_{x}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dt,$$

to mamy

$$n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{x}^{\frac{i}{n}} f'(t)dtdx \leq n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{x}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dtdx \leq n\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dtdx =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\Big[(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dt\Big] = \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |f'(t)|dt = \int_0^1 |f'(t)|dt$$

Teraz chcemy sprawdzić co się dzieje, gdy $n \to \infty$ z wyrażeniem

$$n\Big(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\Big) - \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

$$n\Big(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\Big) - \frac{f(1)-f(0)}{2} \leq |n\Big(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\Big)| - \int_0^1 f'(x)dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx - \int_0^1 f'(x)dx$$