Rekurencje liniowe i inne

1. Rozwiązać równania rekurencyjne

(i) $x(n) = x(n-1) + 9x(n-2) - 9x(n-3)$,
$x(0) = 0$, $x(1) = 1$ i $x(2) = 2$;

(ii) $x(n) = 3x(n-2) - 2x(n-3)$,
$x(0) = 1$, $x(1) = 0$ i $x(2) = 0$;

(iii) $x(n) = 5x(n-1) - 6x(n-2) - 4x(n-3) + 8x(n-4)$,
$x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x(2) = 1$ i $x(3) = 2$;

(iv) $x(n) = 4x(n-2)$,
$x(0) = 0$ i $x(1) = 1$;

(v) $x(n) = 8x(n-1) - 16x(n-2)$,
$x(0) = -1$ i $x(1) = 0$.

2. Rozważmy szachownicę $1 \times n$. Każde pole szachownicy jest pomalowane na czerwono lub niebiesko tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Niech $g(n)$ oznacza liczbę takich pokolorowań. Znaleźć wzór rekurencyjny i jawny na $g(n)$.

3. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ niech $h(n)$ oznacza ilość różnych sposobów pokolorowania pól szachownicy $1 \times n$ barwami białą, niebieską i czerwoną tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Znaleźć wzór na $h(n)$.

4. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę ciągów o sumie n, takich że

(a) wyrazami ciągu są 1 i 2;

(b) wyrazami ciągu są 1,2,5.

5. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę sposobów rozdzielenia n obiektów pomiędzy 4 różne osoby.

6. Znaleźć wzór rekurencyjny na ilość ciągów długości n złożonych z 0,1 i 2 takich, że bezpośrednio na lewo od 2 nie może znajdować się 1.

7. Niech $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2, \ldots$ będą liczbami Fibonacci'ego. Znaleźć (zwarte) wzory na poniższe sumy:

(i) $f(1) + f(3) + \ldots + f(2n-1)$;

(ii) $f(0) + f(2) + \ldots + f(2n)$;

(iii) $f(0) - f(1) + f(2) - \ldots + (-1)^n f(n)$;

(iv) $f(0)^2 + f(1)^2 + \ldots + f(n)^2$;

(v) $f(n)f(n+2) + (-1)^n$.

8. Rozwiązać podane równania rekurencyjne przez znalezienie kilku pierwszych wyrazów, odgadnięcie wzoru i udowodnienie go przez indukcję.

(i) $H(n) = H(n-1) - n + 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; $H(0) = 2$.

(ii) $H(n) = -H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 0$.

(iii) $H(n) = -H(n-1) + 2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 1$.

(iv) $H(n) = 2H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 1$.

9. Udowodnić, że ciąg $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \dots$ jest zbieżny do liczby 3. Skąd to zadanie się tu wzięło?

10. Żaba siedzi na wierzchołku ośmiokąta foremnego i zamierza dostać się na przeciwległy wierzchołek w n skokach, za każdym razem skacząc na jeden z sąsiednich wierzchołków. Na ile sposobów może to zrobić?

Zadania uzupełniające

11. Zadania **Gal** patrz Rozdział 4 (liczby Fibonacciego) oraz 5.57, 5.58.

12. Niech x_n, gdzie $n \geqslant 1$, będzie liczbą ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{a, b, c\}$, w których a nie stoi nigdy obok b (tzn. nie ma „zbitek" ab i ba). Ustalić wzór na x_n.

13. Kolorujemy n punktów leżących na jednej prostej na biało lub jednym z kolorów *czerwony, zielony, niebieski, żółty.* Powiedzmy, że kolorowanie jest dopuszczalne jeżeli każde dwa sąsiednie punkty są tego samego koloru lub jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?