ZAD 1.

Po pierwsze zauwazmy, ze dla $u < 1$, co $u = 2^{-t-1}$ z pewnoscia spelnia, zachodzi

$$u \leq \frac{u}{1-u}$$
$$u(1-u) \leq u$$
$$u - u^2 \leq u$$
$$0 \leq u^2.$$

Dla $n = 1$ dziala, zalozmy wiec, ze dla wszystkich n mamy

$$1 - \frac{nu}{1-nu} \leq \prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{p_j} \leq 1 + \frac{nu}{1-nu}$$

Wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$
$$= (1+\alpha_{n+1})^{p_j}(1+\theta_n)$$

czyli mamy, ze

$$\theta_{n+1} \leq \alpha_{n+1} + \theta_n + \alpha_{n+1}\theta_n \leq$$
$$\leq \frac{u}{1-u} + \frac{nu}{1-nu} + \frac{nu}{1-nu}\frac{u}{1-u} =$$
$$= \frac{u(1-nu) + nu(1-u) + nu^2}{(1-nu)(1-u)} =$$
$$= \frac{u - nu^2 + nu - nu^2 + nu^2}{(1-nu)(1-u)} =$$
$$= \frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)}$$

ale ja potrzebuje

$$\theta_{n+1} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

To sprawdzmy, czy

$$\frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$
$$\frac{(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)}{1-(n+1)u}$$

$$1 - nu + n \leq n + 1$$

bo $nu < 1$, czyli

$$1 - nu + n \leq n \leq n + 1$$

oraz

$$(1-nu)(1-u) = 1 - u - nu + nu^2 \geq 1 - nu - u$$

co jest prawda, bo $nu^2 \geq 0$.

To mamy ogranicznie od gory, teraz musze zrobic od dolu

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$
$$= (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1})^{p_{n+1}}$$
$$\geq (1+\theta_n)(1+\alpha_n)^{-1} \geq$$
$$\geq (1 - \frac{nu}{1-nu})(1 + \frac{u}{1-u})^{-1} =$$
$$= \frac{1-2nu}{1-nu}(\frac{1}{1-u})^{-1} =$$
$$= \frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu}$$

teraz potrzebuje pokazac, zeby

$$\frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu} \geq 1 - \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u} = \frac{1-2(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

$$(1-2nu)(1-u)(1-nu-u) \geq (1-nu)(1-2(n+1)u)$$

$$(1-nu-u)(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-2u)$$

$$(1-nu)(1-u-2nu) + (1-nu)(2nu^2) - u(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-u) - u(1-nu)$$

$$2nu^2 - nu2nu^2 - u + u^2 + 2nu^2 - 2nu^3 \geq nu^2 - u$$

ZAD 2.

Znowu indukcja, czyli zakladamy, ze zachodzi dla wszystkich n, wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_J)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} = (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1}) = 1 + \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n\alpha_{n+1}$$

czyli

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n\alpha_{n+1} \leq 1.01nu + u + 1.01nu^2$$

Wystarczy mi, zeby

ZAD 3. x, y - liczby maszynowe takie, ze $|y| \leq \frac{1}{2}u|x|$, pokazac, ze $fl(x+y) = x$

Zakladam sobie, ze $x > 0$, bo tak mi latwiej bedzie w zyciu.

$$fl(x+y) = (x+y)(1+\epsilon)$$

$$\begin{aligned}(x+y)(1+\epsilon) \leq (x+y)(1+u) \leq & (x + \frac{1}{2}ux)(1+u) = \\ & = x(1+\frac{1}{2}u)(1+u) = \\ & = x(1+u+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2) = \\ & = x + \underbrace{xu(1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2)}\end{aligned}$$

zaznaczony fragment jest w okolicach bedu bezwzglednego pomiaru, wiec mozemy go pominac

$$\begin{aligned}(x+y)(1+\epsilon) \geq (x+y)(1-u) \geq & (x - \frac{1}{2}ux)(1-u) = \\ & x(1-\frac{1}{2}u)(1-u) = \\ & = x(1-u-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2) = \\ & = x - xu(1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2)\end{aligned}$$

i takiie samo wytlumaczenie jak poprzednio. Czyli mamy wyrazenie ograniczone od gory i od dolu przez x, czyli jest rowne x
:v

$$\frac{|x+y|}{|x|} \leq \frac{|x| + \frac{1}{2}u|x|}{|x|}$$

$$|x+y| \leq |x| + \frac{1}{2}u|x|$$

$$|x+y| \leq |x|(1+\frac{1}{2}u)$$

ZAD 5.

$$f(a) = a^2 + a \quad \text{wynik dokladny}$$
$$f(a(1+\alpha)) = a^2(1+\alpha)^2 + a(1+\alpha) \quad \text{wynik dokladny przy LZB}$$
$$f(a(1+\alpha))\frac{1+\beta}{1+\alpha} = a^2(1+\alpha)(1+\beta) + a(1+\beta) \quad \text{zaburzony wynik LZB, aka fl(f(a))}$$

ZAD 6.

$$w(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_n)))$$

$$fl(w) = a_0(1+\alpha_0)+x(1+\beta_1)(a_1(1+\alpha_1)+x(1+\beta_2)(a_2(1+\alpha_2)+...+x(1+\beta_{n-1})(a_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+x(1+\beta_n)(a_n(1+\alpha_n)))))$$

$$fl(w) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=1}^{i}(1+\beta_j)\prod_{k=0}^{i}(1+\alpha_k) = \sum_{i=0}^{n} x^i(a_i(1+E))$$

ZAD 7.

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}$$

ZAD 8.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$
Jezeli $c >= 0$ to smiga, ale jesli $c < 0$, to w okolicy $x = \sqrt{-c}$ caly przyklad sie jebie.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+c} = -\frac{2x}{(c+x^2)^2}$$
$$C_f(x) = \frac{2x}{(c+x^2)^2}\cdot\frac{x^2+c}{1} = \frac{2x}{c+x^2} = \frac{2}{\frac{c}{x}+x}$$

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$
$$C_f(x) = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x(1-\cos x)}$$

Jebie sie dla $x = \cos^{-1} 1$, czyli dla $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ dla $k = 0, 1, ..$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x - \cos x + 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{3\cos x - x\sin x} = \frac{0}{3} = 0$$