MDM Lista 11

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje wierzchołek v taki, że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$ taka, że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$

Niech n będzie liczbą wierzchołków w drzewie T. Dla $n = 1$ mamy drzewo o jednym wierzchołku i tylko jeden automorfizm na nim - identyczność, która zachowuje nie tylko wierzchołki, ale i (nieistniejące) krawędzie. Dla $n = 2$ mamy tylko jedną krawędź i dwa punkty, więc ta jedyna krawędź zawsze musi przejść na samą siebie.

Załóżmy teraz, że dla wszystkich drzew o co najwyżej n wierzchołkach teza jest prawdziwa. Niech $|T| = n + 1$. Zauważmy, że jeśli ϕ jest automorfizmem na T, a $v \in T$ jest jego dowolnym liściem, to $\phi(v)$ musi nadal być liściem - inaczej v stopnia 1 przeszłoby na wierzchołek będący węzłem, a więc mający co najmniej stopień 2 i takie ϕ nie mogłoby być automorfizmem na T.
Wiemy też, że w drzewie jest na pewno jeden wierzchołek stopnia 1, niech więc

$$L = \{v \in T \ : \ d(v) = 1\}$$

będzie wierzchołkiem wszystkich liści, który na pewno jest niepusty. Niech $T' = T \setminus L$. Wtedy jeśli ϕ' jest automorfizmem na T', to na mocy założenia indukcyjnego ϕ' spełnia tezę. Z uwagi wyżej wiemy, że liście muszą przejść na siebie, więc jeśli będziemy rozszerzać ϕ' do całego T, to $\phi[L] = L$, czyli nie wpływa na poprawność tezy dla rozszerzenia ϕ' do całego T.

ZAD. 2.

Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1 \mod 4$

Graf pełny o n wierzchołkach ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi. My chcemy je rozdzielić po równo między dopełnienie i graf sam w sobie, czyli musimy być w stanie liczbę krawędzi K_n podzielić dodatkowo na 2, a więc $n(n - 1)$ musi być podzielne przez 4. Jest to wtedy, gdy

$$n \equiv 0 \mod 4$$

lub

$$(n - 1) \equiv 0 \mod 4$$
$$n \equiv 1 \mod 4.$$

ZAD. 3.

Niech $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$ będą zbiorami krawędzi wszystkich $(m - n + 1)$ cykli otrzymanych poprzez dodanie do drzewa spinającego T grafu prostego G jednej krawędzi G która nie należy do T. Pokaż, że zbiór krawędzi dowolnego cyklu w G jest różnica symetryczną pewnej liczby zbiorów wybranych spośród $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$.

No ale to widać

ZAD. 15.

Pokaż, że jeśli G jest grafem prostym i dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków u, v

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n(G) - 1,$$

to w G istnieje droga Hamiltona.

Niech G' będzie grafem G z dodanym wierzchołkiem w tak, że $(\forall\ v \in G)\ vw \in G'$. Teraz dla dowolnych niesąsiednich wierzchołków mamy

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Z twierdzenia Ore'a wiemy, że wtedy w G' istnieje cykl Hamiltona. Niech teraz C będzie tym cyklem i niech dla pewnych $v, u \in G$ $vw, uw \in C$. Wtedy jeśli usuniemy z C te dwie krawędzie oraz wierzchołek w, to wrócimy do ścieżki zawartej w G, która przechodzi wszystkie wierzchołki.

ZAD. 17.

Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G zawiera drogę o długości równej co najmniej $2 \cdot \frac{e(G)}{|G|}$.

Indukcja po ilości wierzchołków.

Dla $|G| = 1$ jest to dość proste. Mamy $e(g) = 0$, a więc $2 \cdot \frac{e(G)}{|G|} = 2 \cdot \frac{0}{1} = 0$.

Niech $|G| = n + 1$ będzie grafem prostym, a $v \in G$ będzie wierzchołkiem o minimalnym stopniu $d = d(v)$. Wiemy, że $d \leq n - 1$, bo G jest prosty. Jeżeli teraz usuniemy wierzchołek v, to dostajemy G' o n wierzchołkach oraz $e(G) - d \geq e(G) - n + 1$ krawędziach. W G' możemy znaleźć ścieżkę o

$$2 \cdot \frac{e(G')}{n} = 2 \cdot \frac{e(G) - d}{n} \geq 2 \cdot \frac{e(G) - n + 1}{n} \geq 2 \cdot \frac{e(G)}{n+1} - 2 \cdot \frac{n-1}{n+1} \geq 2 \cdot \frac{e(G)}{n+1}$$