Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 8

15 grudnia 2022 r.

M8.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a,\, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \\ &P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_k &= \langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle / \langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle \quad (k \geqslant 1), \\ d_k &= \langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle / \langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle \quad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

M8.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\bar{T}_k(x)$ będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1, 1]$, z wagą $(1 - x^2)^{-1/2}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

M8.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jakim wzorem wyraża się n-ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} f^2(x)\, dx}?$$

M8.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a, b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

M8.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ (Część twierdzenia Czebyszewa o alternansie) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

(i) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1)$,

(ii) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = ||f - w_n||_\infty^{[a,b]} \quad (k = 0, 1, \ldots, n + 1)$,

to w_n jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f.

M8.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ (Charles Jean de la Vallée-Poussin) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a p_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

$$\operatorname{sign}(f(x_j) - p_n(x_j)) = \lambda(-1)^j \quad (j = 0, 1, \ldots, n + 1),$$

gdzie $\lambda \in \{-1, 1\}$ jest ustaloną liczbą, to dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi nierówność

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

Wywnioskować, stąd, że

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

M8.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału $[c,\, d]$ tego przedziału zachodzi nierówność $E_n(f; [c, d]) \leqslant E_n(f; [a, b])$.

M8.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć 5-ty wielomian optymalny dla funkcji $f(x) := 2018x^7+12x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ w sensie normy jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$.

M8.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Normę jednostajną funkcji $f \in C[a, b]$ podaje wzór $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^{[a,b]} := \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Sprawdzić, że n-ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji f z przestrzeni $C[a, b]$, określony wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; [a, b]) := \inf_{w_n\in\Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]},$$

ma następujące własności:

a) $E_n(\alpha f) = |\alpha|E_n(f)$;

b) $E_n(f + g) \leqslant E_n(f) + E_n(g)$;

c) $E_n(f + w) = E_n(f)$;

d) $E_n(f) \leqslant \|f\|_\infty$,

gdzie f, g są dowolnymi funkcjami z $C[a, b]$, w jest dowolnym wielomianem stopnia $\leqslant n$, natomiast α – dowolną liczbą rzeczywistą.

M8.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

1 grudnia 2022 r.

Rafał Nowak