

Lista 1 tłumaczenie przez zjeba

Wyjątkowe ćwiczenia 12.10.2022 (środa) 12:15–14:00

Dla zbioru X , $\mathcal{P}(X)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów X , a S_X jest zbiorem wszystkich bijeekcji $X \rightarrow X$

1. Podaj przykład operacji \star na zbiorze $\{0,1\}$ takiej, że

$$0 \star (0 \star 0) \neq (0 \star 0) \star 0$$

Ile jest takich operacji \star na tym zbiorze?

2. Załóż, że \star jest łączna operacja na zbiorze skończonym A . Pokaż, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \star a = a$.

3. Niech \star będzie operacja na zbiorze X oraz $a, b, c \in X$. Pokaż, że:

- Jezeli b i c są neutralnymi elementami \star , to $b = c$.
- Jezeli operacja \star jest łączna, \star ma element neutralny e , $a \star b = e$ i $c \star a = e$, to wtedy $b = c$
- Jezeli (X, \star) jest grupa z elementem neutralnym e i $a \star b = e$, to wtedy $b \star a = e$

4. Niech $f: X \rightarrow X$. Pokaż, że

- Funkcja f jest na wtw jeśli istnieje funkcja $g: X \rightarrow X$ taka, że $f \circ g = \text{id}_X$
- Funkcja f jest 1-1 wtw istnieje funkcja $h: X \rightarrow X$ taka, że $h \circ f = \text{id}_X$

5. Niech G będzie grupa przekształceń na X . Pokaż, że $\text{id}_X \in G$.

6. Pokaż, że operacja $+$ na zbiorze $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (zdefiniowana jak na wykładzie) jest łączna i ma element neutralny, ale $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +)$ nie jest grupa.

7. Pokaż, że jeżeli $|X| > 1$, to (X, L) nie jest grupa, gdzie dla $a, b \in X$ mamy $aLb = a$.

8. Pokaż, że jeżeli X jest niepusty, to

- $(\mathcal{P}(X), \cup)$ nie jest grupa
- $(\mathcal{P}(X), \cap)$ nie jest grupa

9. Pokaż, że grupa S_X jest abelowa wtw $|X| < 3$

10. Sprawdź, czy poniższa operacja \star na podanym zbiorze A jest łączna, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdź także, czy (A, \star) jest grupa

- $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a \star b = \frac{a}{b}$
- $A = \mathbb{R}$; $x \star y = x + y + 2$
- $A = \mathbb{N}_+$; $m \star n = \text{NWD}(m, n)$
- $A = \mathbb{N}_+$; $m \star n = \text{NWW}(m, n)$
- A jest płaszczyzną; $P \star Q$ jest środkowym punktem interwalu z końcami P i Q
- A jest płaszczyzną; $P \star Q$ jest obrazem punktu P przez odbicie względem punktu Q