ANALIZA III - LISTA 7

**1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ i $|f'(x)| \leq k < 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że przekształcenie płaszczyzny $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem

$$F(x, y) = (x + f(y), y + f(x)),$$

klasy $\mathcal{C}^1$, różnowartościowe i na $\mathbb{R}^2$.

**2. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $m < n$ jest klasy C^1, rząd Df jest równy m w każdym punkcie. Pokazać, że nie jest wzajemnie jednoznaczna.

**3. Funkcja $g(t)$ odwzorowuje pewien przedział otwarty $(-a, a)$ w przestrzeń $\mathbb{R}^2$ i jest klasy C^1. Czy jest możliwe by obraz każdego przedziału otwartego $(-b, b)$, gdzie $0 < b < a$ zawierał otoczenie (tzn, zbiór otwarty w $\mathbb{R}^2$) punktu $g(0)$?

**4. Rozstrzygnąć analogiczne zagadnienie jak w zadaniu 3, gdy $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $m < n$, rząd Df jest równy m w każdym punkcie.

**5. Załóżmy, że $L : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ jest liniowym izomorfizmem. Ponadto załóżmy, że $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^1 spełniającą

$$\|g(\mathbf{x})\| \leq 10\|\mathbf{x}\|^2$$

dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Udowodnij, że funkcja

$$f(\mathbf{x}) = L\mathbf{x} + g(\mathbf{x})$$

jest lokalnie odwracalna w pewnym otoczeniu zera.

W zadaniach 2 i 4 nie stosujemy gotowych silnych twierdzeń tylko próbujemy metodami elementarnymi +to, co było dotychczas na wykładzie. Założenie, że rząd jest m nie jest potrzebne, ale nie widzę prostej metody bez tego założenia. Można założyć najpierw, że $m = 2, n = 3$ i zobaczyć, co się dzieje.