ANALIZA III - LISTA 10

1. Znaleźć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyznami $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ i $y - x + z = 1$.

2. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całki.

$$\int_{-1}^{1} \int_{-2|y|}^{|y|} e^{x+y} \; dxdy \qquad \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos x} y \sin x \; dydx$$

3. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całki.

$$\int_{0}^{1} \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m) \; dxdy, \quad n, m > 0 \qquad \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} (x + y)^2 \; dxdy.$$

4. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całkę

$$\int_{0}^{4} \int_{y/2}^{2} e^{x^2} \; dxdy$$

5. Naszkicować obszar, po którym całkujemy i obliczyć całkę

$$\int_{0}^{1} \int_{\arctan y}^{\pi/4} (\cos x)^{-5} \; dxdy$$

6. Zbudowano stodołę na podstawie prostokąta o wymiarach 12 m na 20 m. Ściana frontowa (na boku 12 m) ma wysokość 10 m, a tylna wysokość 15 m. Stodoła ma płaski dach. Jaka jest pojemność stodoły?

7. Obliczyć $\int_D y \; dxdy$, gdzie D składa się z punktów spełniających $0 \leq 2x/\pi \leq y$, $y \leq \sin x$.

8. Pokazać, że

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin(x+y)} \; dxdy \leq e$$

$$1 \leq \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{2} \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

9. Pokazać, że

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + (xy)^2} \; dxdy \leq 1$$

10. Pokazać, że

$$\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dxdy}{y-x+3} \leq \frac{1}{4},$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0), (1,1), (1,0)$.

11. (*Do samodzielnego zrobienia w domu.*) Pokaż, że przeliczalny zbiór zbiór ma miarę zero. *Wsk. Zacząć od zbioru skończonego.* Pokaż, że suma mnogościowa dwóch zbiorów miary zero ma miarę zero.

12. Pokaż, że półprosta $\{(t,t) : t > 0\}$ ma dwuwymiarową miarę zero. *Wsk. Zacząć od odcinka* $\{(t,t) : 0 < t < 1\}$.

13. Pokaż, że zbiór punktów kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ o obu współrzędnych niewymiernych nie ma miary zero.

14. Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $R = [a,b] \times [c,d]$. Niech $D = [a,b] \times [c,d)$. Bez użycia tw. 4.12 pokaż, że

$$\iint_R f(x,y)\ dxdy = \iint_D f(x,y)\ dxdy =: \iint_R \mathbf{1}_D f(x,y)\ dxdy.$$

W szczególności trzeba pokazć z definicji, że $\mathbf{1}_D f$ jest całkowalna na R.

*15. Podaj przykład zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$ o niepustym wnętrzu, którego brzeg nie ma miary zero. Będzie to zapewne zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a czy wręcz borelowski. Wtedy $\mathbb{I}_D(x,y)$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna, a jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.

16**. Udowodnić, że dla $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [-1,1])$

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_a^b f(x, \sin \tau x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x, \sin y)\, dx\, dy.$$

Wskazówka. Załóż najpierw, że $f(x,y) = f(y)$ czyli f nie zależy od pierwszej zmiennej, napisz co wyjdzie i udowodnij to jako rozgrzewkę.

17**. Pokaż, że

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \right)$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (f(1,y) - f(0,y))\, dy + \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x,1) - f(x,0))\, dx.$$

dla $f \in \mathcal{C}^1([0,1]\times[0,1])$. *Wskazówka. Załóż najpierw, że $f(x,y) = f(x)$ czyli f zależy tylko od jednej zmiennej. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,dx \; - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(f(1) - f(0)).$$

i udowodnij to.

18**. Pokazać, że równanie funkcyjne

$$F(x_1,\ldots,x_n) = 1 + \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n} F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\ldots dy_n =: \Phi(F)(x_1,\ldots,x_n)$$

ma jedyne rozwiązanie. *Wsk. Rozważyć najpierw przypadek jednowymiarowy. Iterować przekształcenie Φ. Wszelkie częściowe rozwiązania są też mile widziane.*