Nieporządki

Definicja. Nieporządkiem na danym zbiorze nazywamy permutację jego elementów bez punktów stałych.

A skończony zbiór

Permutacje $\equiv$ Bijekcje $A \xrightarrow[\sim]{1-1} A$

Liczba nieporządków

Twierdzenie. Liczba D_n nieporządków na zbiorze n-elementowym wynosi

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Dowód. Zbiór S_n wszystkich permutacji ma moc $n!$. Niech $Z(i)$ bedzie zniorem tych permutacji, w których i zostaje na swoim miejscu. Zauważmy, że

$|Z(1) \cup .. \cup Z(n)| = |Z(1)| + .. + |Z(n)| -$
$- \left(|Z(1) \cap Z(2)| + |Z(1) \cap Z(3)| + \ldots \right)$
$+$

$$D_n = \left|S_n\right| - \left|Z(1) \cup Z(2) \cup \ldots \cup Z(n)\right|.$$

Mamy $\boxed{\left|Z(i)\right| = (n-1)!}$, $\left|Z(i) \cap Z(j)\right| = (n-2)!$ dla $i \neq i$ etc. Dlatego z zasady włączeń i wyłączeń wynika

$$\left|Z(1) \cup Z(2) \cup \ldots \cup Z(n)\right| =$$

$$= n \cdot (n-1)! - \overbrace{\binom{n}{2}}^{= \frac{n(n-1)}{2!}} (n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} 0! =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).$$

Dlatego

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$x = -1$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \approx \frac{1}{e}$$

$$\frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

Rekurencje

Przykład. $a>0$ $x_0=a$

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$g=\frac{1}{2}\left(g+\frac{a}{g}\right)$$

$$g=\sqrt{a}.$$

Przykład: ciąg Fibonacciego. Ile jest ciągów o wyrazach $1, 2$, których suma wynosi n?

Niech x_n będzie szukaną liczbą. Wtedy dla $n > 2$ mamy

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.}$$

2
1, 1

$x_3=x_2+x_1=3$

1, 1, 1
1, 2
2, 1

Ponieważ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ więc ciąg x_n jest jednoznacznie wyznaczony przez równanie rekurencyjne. Zauważmy, że można przyjąć $x_0 = 1$.

$$\underbrace{\overbrace{\sqcup + \sqcup + \ldots \ldots}^{n-1} \sqcup}_{n-2} = n \qquad 1, \; 2$$

D_n – liczba nieporządków na zbiorze n-el.

Myślenie rekurencyjne ma przyszłość

Nieporządki raz jeszcze. dla $n \geqslant 3$ zachodzi

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}).$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$

Nieporządki na $\{1, \ldots, n\}$ dzielimy na 2 klasy

I $\quad n \longrightarrow i < n$, $\quad i \longrightarrow n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{n-1} \end{pmatrix}$$

Jest $\underbrace{(n-1)\cdot D_{n-2}}$ takich nieporządków.

II $\quad n \longrightarrow i < n$, $\quad i \not\longrightarrow n$, $\quad i \longrightarrow j < n$ $\quad$ Jest $(n-1)\cdot D_{n-1}$ takich nieporz.

Przykład. Na ile sposobów można połączyć elementy zbioru mocy $2n$ w pary?

$$\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

$n=2$

4 osoby mogą ustawić się w pary na 3 sposoby.

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 6.$$

Rekurencyjnie: Niech x_n będzie szukaną liczbą.

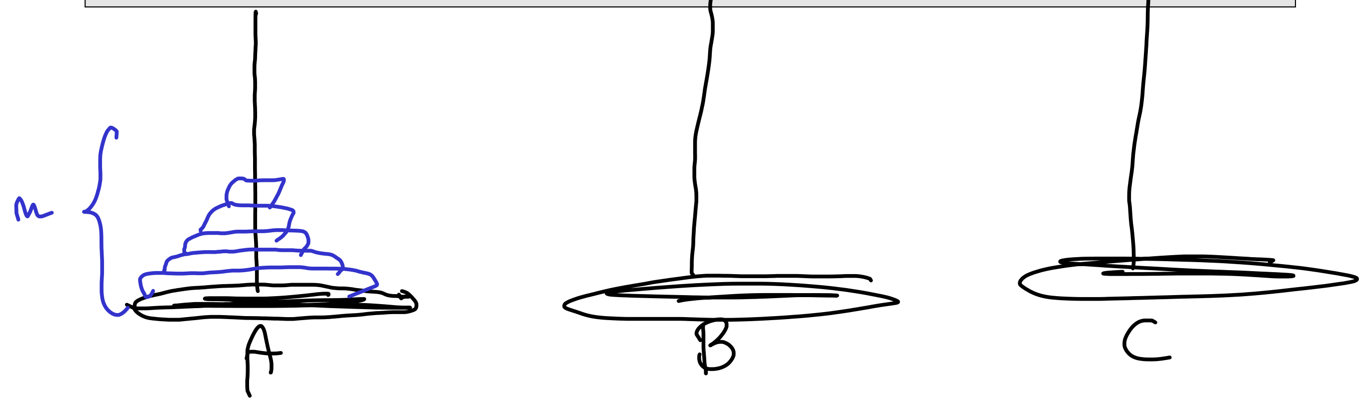
$$x_n = (2n-1)\, x_{n-1}$$

$2n$

$$x_n = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1.$$

Wieże w Hanoi

Ile ruchów wymaga przełożenie n krążków z wieży A na wieżę B za pomocą wieży C?



$\boxed{\text{Hanoi}(n, A, B, C)}$

Hanoi$(n-1, A, C, B)$
n-ty krążek $\to B$
Hanoi$(n-1, C, B, A)$

$H(1) = 1$

$$H(n) = H(n-1) + 1 + H(n-1) = 2H(n-1) + 1$$

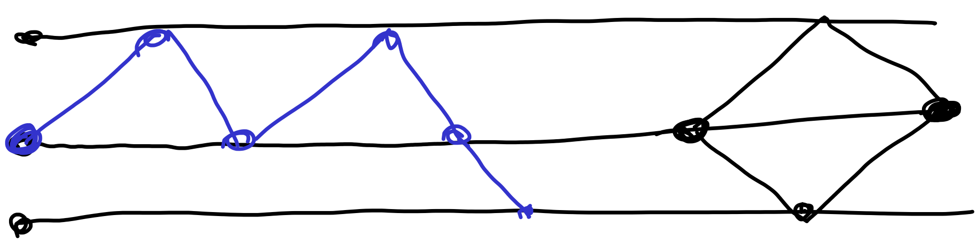
Nietrudno zgadnąć $H(n) = 2^n - 1$

$2^{64} - 1$ sekund to jest ______ lat.

Układy równań rekurencyjnych

Przykład. Ile jest ciągów długości n o wyrazach z $\{0, 1, 2\}$, takich że każdy następny wyraz jest o 1 większy lub o 1 mniejszy?

(np. $(0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots)$)



Niech a_n będzie ilością szukanych.

a_n^1 – liczba takich ciągów kończących się na 1.

$a_n^{0,2}$ – || ———— na 0 lub 2.

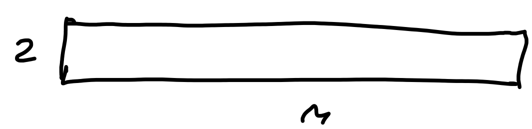
$$\boxed{a_n^1 = a_{n-1}^{0,2}} \qquad \boxed{a_n^1 = 2 \cdot a_{n-2}^1}$$

$a_1^1 = 1, \quad a_2^1 = 2 \qquad a_n^1 = 2^{[\frac{n}{2}]}$

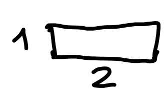
$1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots$

$$a_n = a_n^1 + a_n^{0,2} = 2^{[\frac{n}{2}]} + 2^{[\frac{n+1}{2}]}$$

<u>Przykład.</u> Na ile sposobów możemy zbudować płotek o wymiarach



mając klocki



$$\boxed{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$