Praca domowa ciąg dalszy

Problem **2.6.D**

Weronika Jakimowicz

1. POKAZAĆ, ŻE DLA $x \in \mathbb{Q}$ mamy $f(x) = f(1)x$

Z addytywności funkcji mamy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$f(kx) = kf(x).$$

Możemy pokazać to za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ jest to oczywista równość. Załóżmy, że dla $k \leq n$ jest to prawdą. Popatrzmy teraz na $k = n + 1$

$$f((n+1)x) = f(xn + x) = f(nx) + f(x) \stackrel{*}{=} nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

gdzie równość z $*$ jest z założenia indukcyjnego.

Specjalnym przypadkiem powyższej równości dla $k \in \mathbb{N}$ jest $x = \frac{1}{k}$. Wtedy mamy

$$f(kx) = kf(x) = kf(\frac{1}{k})$$

a z drugiej strony

$$f(kx) = f(k \cdot \frac{1}{k}) = f(1),$$

czyli

$$f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}f(1).$$

Liczby wymierne mają tę własność, że można je zapisać jako iloraz dwóch (względnie pierwszych) liczb naturalnych. Weźmy więc dowolny $q \in \mathbb{Q}$ taki, że $q = \frac{n}{k}$ dla $k, n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy

$$f(q) = f(\frac{n}{k}) = nf(\frac{1}{k}) = n \cdot \frac{1}{k} \cdot f(1) = f(1) \cdot \frac{n}{k} = qf(1).$$

I to jest udowadniana zależność.

2. JEŚLI f MIERZALNA, TO $f(x) = f(1)x$ DLA $x \in \mathbb{R}$.

Dodając do przydatnych własności funkcji addytywnej, mamy

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$$

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

Twierdzenie Steinhausa (1.11.H): jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A) > 0$, to różnica kompleksowa A z A zawiera odcinek postaci $(-\delta, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$.

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + f(-y)| = |f(x - y)| = f(|x - y|)$$

$f(x) = ax$ znaczy, że f jest funkcją ciągłą. Warunek na ciągłość, jaki chcemy wykorzystać to,dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\varepsilon > |f(x) - f(y)| = f(|x - y|)$ jeżeli $|x - y| < \delta$. Zaczniemy od wykazania ciągłości w okolicy zera, a później przeniesiemy to na całą prostą korzystając z addytywności f.

Weźmy teraz dowolne $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$ (możemy je traktować podobnie jak ε) i niech $A = f^{-1}[(-p, p)]$. Ponieważ f jest funkcją mierzalną, to również A musi być mierzalne (Lemat 2.1.2). Jeśli $\lambda(A) > 0$, to z twierdzenia Steinhausa wiemy, że dla istnieje $\delta > 0$ takie, że $(-\delta, \delta) \subseteq (A - A)$. Jeśli $\lambda(A) = 0$, to weźmy większe p i powtórzmy ten proces. Kiedyś musimy trafić na przeciwobraz niebędący zbiorem miary zero, bo nie jest to funkcja stała (dla $a \neq 0$), a $\lim\limits_{p \to \infty} (-p, p) = \mathbb{R}$, które miary zero zdecydowanie nie jest.

Popatrzmy teraz, jak wygląda obraz różnicy kompleksowej A

$$\begin{aligned} f[(-\delta, \delta)] \subseteq f[A - A] &= f[\{x - y \ : \ x, y \in A\}] = \{f(x - y) \ : \ x, y \in A\} = \\ &= \{f(x) - f(y) \ : \ x, y \in f^{-1}[(-p, p)]\} = \{x - y \ : \ x, y \in (-p, p)\} = (-2p, 2p) \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $x, y \in (-p, p)$ mamy

$$|x - y| < |p - (-p)| = 2p$$

Podsumowując, dla dowolnego $p > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x - y| < 2\delta$, to znaczy $x, y \in (-\delta, \delta)$ takie, że

$$|f(x - y)| = |f(x) - f(y)| < 2p,$$

bo $f[(-\delta, \delta)] \subseteq (-2p, 2p)$. wiemy już, że funkcja jest ciągła w okolicy zera.

Musimy teraz skorzystać z addytywności funkcji f, aby pokazać, że jest ciągła nie tylko w u, ale też na całej prostej. Weźmy dowolny $x \in (\delta, \delta)$ i dowolny niezerowy $u \in \mathbb{R}$. Zauważmy teraz, że $y = u + x$ jest bardzo blisko u, to znaczy $|y - u| = |u + x - u| = |x| < \delta$. Popatrzmy teraz jak daleko od siebie są punkty $f(u)$ i $f(y)$:

$$|f(y) - f(u)| = |f(u + x) + f(-u)| = |f(u + x + (-u))| = |f(x)| < \varepsilon$$

czyli f jest ciągłe w okolicy dowolnego $u \in \mathbb{R}$, a z tego wynika, że jest też ciągłe w dowolnym miejscu na prostej.

i śmiga