# ZAD 1.

Po pierwsze zauwazmy, ze dla $u < 1$, co $u = 2^{-t-1}$ z pewnoscia spelnia, zachodzi

$$u \leq \frac{u}{1-u}$$
$$u(1-u) \leq u$$
$$u - u^2 \leq u$$
$$0 \leq u^2.$$

Dla $n = 1$ dziala, zalozmy wiec, ze dla wszystkich n mamy

$$1 - \frac{nu}{1-nu} \leq \prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{p_j} \leq 1 + \frac{nu}{1-nu}$$

Wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$
$$= (1+\alpha_{n+1})^{p_j}(1+\theta_n)$$

czyli mamy, ze

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &\leq \alpha_{n+1} + \theta_n + \alpha_{n+1}\theta_n \leq \\ &\leq \frac{u}{1-u} + \frac{nu}{1-nu} + \frac{nu}{1-nu}\frac{u}{1-u} = \\ &= \frac{u(1-nu) + nu(1-u) + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\ &= \frac{u - nu^2 + nu - nu^2 + nu^2}{(1-nu)(1-u)} = \\ &= \frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \end{aligned}$$

ale ja potrzebuje

$$\theta_{n+1} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

To sprawdzmy, czy

$$\frac{u(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u}$$
$$\frac{(1-nu+n)}{(1-nu)(1-u)} \leq \frac{(n+1)}{1-(n+1)u}$$

$$1 - nu + n \leq n + 1$$

bo $nu < 1$, czyli

$$1 - nu + n \leq n \leq n + 1$$

oraz

$$(1-nu)(1-u) = 1 - u - nu + nu^2 \geq 1 - nu - u$$

co jest prawda, bo $nu^2 \geq 0$.

To mamy ogranicznie od gory, teraz musze zrobic od dolu

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_j)^{p_j} = 1 + \theta_{n+1} =$$

$$\begin{aligned} &= (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1})^{p_{n+1}} \\ &\geq (1+\theta_n)(1+\alpha_n)^{-1} \geq \\ &\geq (1 - \frac{nu}{1-nu})(1 + \frac{u}{1-u})^{-1} = \\ &= \frac{1-2nu}{1-nu}(\frac{1}{1-u})^{-1} = \\ &= \frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu} \end{aligned}$$

teraz potrzebuje pokazac, zeby

$$\frac{(1-2nu)(1-u)}{1-nu} \geq 1 - \frac{(n+1)u}{1-(n+1)u} = \frac{1-2(n+1)u}{1-(n+1)u}$$

$$(1-2nu)(1-u)(1-nu-u) \geq (1-nu)(1-2(n+1)u)$$

$$(1-nu-u)(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-2u)$$

$$(1-nu)(1-u-2nu)+(1-nu)(2nu^2)-u(1-u-2nu+2nu^2) \geq (1-nu)(1-2nu-u)-u(1-nu)$$

$$2nu^2 - nu2nu^2 - u + u^2 + 2nu^2 - 2nu^3 \geq nu^2 - u$$

# ZAD 2.

Znowu indukcja, czyli zakladamy, ze zachodzi dla wszystkich n, wtedy mamy

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1+\alpha_J)^{p_j} = 1+\theta_{n+1} = (1+\theta_n)(1+\alpha_{n+1}) = 1+\theta_n+\alpha_{n+1}+\theta_n\alpha_{n+1}$$

czyli

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha_{n+1} + \theta_n\alpha_{n+1} \leq 1.01nu + u + 1.01nu^2$$

Wystarczy mi, zeby

# ZAD 3. x, y - liczby maszynowe takie, ze $|y| \leq \frac{1}{2}u|x|$, pokazac, ze $fl(x+y) = x$

WERSJA PODPIERDOLONA

Zapiszmy te liczby w postaci

$$|x| = m_x 2^{c_x}$$

$$|y| = m_y 2^{c_y}$$

Wiemy tez, ze

$$|y| = m_y 2^{c_y} \leq m_x 2^{c_x} \cdot 2^{-t-2}$$

a przez to, ze $\frac{\frac{1}{2}<m_x}{m_y<2}$, bedziemy musieli wszystko dostosowywac korzystajac z cechy, a mantysa nic nam nie naprawi. W takim razie

$$c_x - c_y \geq t+2.$$

Zeby dodawac liczby, musimy wyrownac cechy, czyli przesunac w prawo mantyse y o t+2 bitow w prawo. W takim raize mamy

$$x+y = m_x 2^{c_x} + m_y 2^{c_x} 2^{-t-2} = 2^{c_x}(m_x + m_y 2^{-t-2})$$

Super, ale u nas mantysa ma t bitow, to jak przesuniemy y w prawo o t+2, to nam nic nie zostanie do dodawania, wiec zachowa sie tylko mantysa x razy $2^{c_x}$.

Zakladam sobie, ze $x > 0$, bo tak mi latwiej bedzie w zyciu.

$$fl(x+y) = (x+y)(1+\epsilon)$$

$$\begin{aligned}(x+y)(1+\epsilon) \leq (x+y)(1+u) &\leq (x+\frac{1}{2}ux)(1+u) = \\ &= x(1+\frac{1}{2}u)(1+u) = \\ &= x(1+u+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2) = \\ &= x + \underbrace{xu(1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2)}\end{aligned}$$

zaznaczony fragment jest w okolicach bedu bezwzglednego pomiaru, wiec mozemy go pominac

$$(x+y)(1+\epsilon) \geq (x+y)(1-u) \geq (x - \frac{1}{2}ux)(1-u) =$$
$$x(1-\frac{1}{2}u)(1-u) =$$
$$= x(1 - u - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2) =$$
$$= x - xu(1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2)$$

i takiie samo wytlumaczenie jak poprzednio. Czyli mamy wyrazenie ograniczone od gory i od dolu przez x, czyli jest rowne x
:v

$$\frac{|x+y|}{|x|} \leq \frac{|x| + \frac{1}{2}u|x|}{|x|}$$
$$|x+y| \leq |x| + \frac{1}{2}u|x|$$
$$|x+y| \leq |x|(1+\frac{1}{2}u)$$

## ZAD 5.

$$f(a) = a^2 + a \quad \text{wynik dokladny}$$
$$f(a(1+\alpha)) = a^2(1+\alpha)^2 + a(1+\alpha) \quad \text{wynik dokladny przy LZB}$$
$$f(a(1+\alpha))\frac{1+\beta}{1+\alpha} = a^2(1+\alpha)(1+\beta) + a(1+\beta) \quad \text{zaburzony wynik LZB, aka } fl(f(a))$$

## ZAD 6.

$$w(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_n)))$$

$$fl(w) = a_0(1+\alpha_0)+x(1+\beta_1)(a_1(1+\alpha_1)+x(1+\beta_2)(a_2(1+\alpha_2)+...+x(1+\beta_{n-1})(a_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+x(1+\beta_n)(a_n(1+\alpha_n)))))$$
$$fl(w) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=1}^{i}(1+\beta_j) \prod_{k=0}^{i}(1+\alpha_k) = \sum_{i=0}^{n} x^i (a_i(1+E))$$

## ZAD 7.

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}$$

a) uzasadniamy przez indukcje

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)} = \cos\frac{A}{2}$$
$$\frac{1}{2}(1+\cos A) = \cos^2\frac{A}{2}$$
$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$$
$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} + (\cos^2\frac{A}{2} - 1)$$
$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)} = \sin\frac{A}{2}$$
$$\frac{1}{2}(1-\cos A) = \sin^2\frac{A}{2}$$
$$1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$$
$$1-\cos A = 1-\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$$
$$\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2} = \cos A$$

Dla $n = 2$:

$$P_{2^2} = \frac{1}{2}2^2\sin\frac{2\pi}{2} = 2^{2-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{2})} = 2^{2-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1+1} = 2^{2-1}\sqrt{1} = 2$$

Dalej zakladamy, ze jest prawda dla wszystkich n, wtedy

$$P_{2^{n+1}} = \frac{1}{2}2^{n+1}\sin\frac{2\pi}{2^{n+1}} = 2^n\sin\frac{\frac{2\pi}{2^n}}{2} = 2^n\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{2^n})} = ALG$$

## ZAD 8.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$

Jezeli $c >= 0$ to smiga, ale jesli $c < 0$, to w okolicy $x = \sqrt{-c}$ caly przyklad sie jebie.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+c} = -\frac{2x}{(c+x^2)^2}$$
$$C_f(x) = \frac{2x^2}{(c+x^2)^2}\cdot\frac{x^2+c}{1} = \frac{2x^2}{c+x^2} = \frac{2}{\frac{c}{x^2}+1}$$

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}$$
$$C_f(x) = \frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x\sin x+2\cos x-2}{x(1-\cos x)}$$

Jebie sie dla $x = \cos^{-1}1$, czyli dla $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ dla $k = 0, 1, ..$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x-\cos x+1} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2\sin x+x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{3\cos x-x\sin x} = \frac{0}{3} = 0$$