Lista 1 tlumaczenie przez zjeba

Wyjatkowe cwiczenia 12.10.2022 (sroda) 12:15-14:00

Dla zbioru X, $\mathscr{P}(X)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorow X, a S_X jest zbiorem wszystkich bijeckji $X \to X$

1. Podaj przyklad operacji $\star$ na zbiorze $\{0,1\}$ takiej, ze

$$0 \star (0 \star 0) \neq (0 \star 0) \star 0$$

Ile jest takich operacji $\star$ na tym zbiorze?

2. Zaloz, ze $\star$ jest laczna operacja na zbiorze skonczonym A. Pokaz, ze istnieje $a \in A$ takie, ze $a \star a = a$.

3. Niech $\star$ bedzie operacja na zbiorze X oraz $a, b, c \in X$. Pokaz, ze:
   a. Jezeli b i c sa neutralnymi elementami $\star$, to $b = c$.
   b. Jezeli operacja $\star$ jest laczna, $\star$ ma element neutralny e, $a \star b = e$ i $c \star a = e$, to wtedy $b = c$
   c. Jezeli $(X, \star)$ jest grupa z elementem neutralnym e i $a \star b = e$, to wtedy $b \star a = e$

4. Niech $f : X \to X$. Pokaz, ze
   a. Funkcja f jest na wtw jesli istnieje funkcja $g : X \to X$ taka, ze $f \circ g = id_X$
   b. Funckja f jest 1-1 wtw istnieje funckja $h : X \to X$ taka, ze $h \circ f = id_X$

5. Niech G bedzie grupa przeksztalcen na X. Pokaz, ze $id_X \in G$.

6. Pokaz, ze operacja + na zbiorze $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (zdefiniowana jak na wykladzie) jest laczna i ma element neutralny, ale $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +)$ nie jest grupa.

7. Pokaz, ze jezeli $|X| > 1$, to (X, L) nie jest grupa, gdzie dla $a, b \in X$ mamy $aLb = a$.

8. Pokaz, ze jezeli X jest niepusty, to
   a. $(\mathscr{P}(X), \cup)$ nie jest grupa
   b. $(\mathscr{P}(X), \cap)$ nie jest grupa

9. Pokaz, ze grupa S_X jest abelowa wtw $|X| < 3$

10. Sprawdz, czy ponizsza operacja $\star$ na podanym zbiorze A jest laczna, przemienna i czy ma element neutralny. Sprawdz takze, czy $(A, \star)$ jest grupa
   a. $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a \star b = \frac{a}{b}$
   b. $A = \mathbb{R}$; $x \star y = x + y + 2$
   c. $A = \mathbb{N}_+$; $m \star n = \mathrm{NWD}(m, n)$
   d. $A = \mathbb{N}_+$; $m \star n = \mathrm{NWW}(m, n)$
   e. A jest plaszczyzna; $P \star Q$ jest srodkowym punktem interwalu z krancami P i Q
   f. A jest plaszczyzna; $P \star Q$ jest obrazem punktu P przez odbicie wzgledem punktu Q