

MDM Lista 11

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ . Udowodnij, że istnieje wierzchołek v taki, że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$ taka, że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$

Niech n będzie liczbą wierzchołków w drzewie T . Dla $n = 1$ mamy drzewo o jednym wierzchołku i tylko jeden automorfizm na nim - identyczność, która zachowuje nie tylko wierzchołki, ale i (nieistniejące) krawędzie. Dla $n = 2$ mamy tylko jedną krawędź i dwa punkty, więc ta jedyna krawędź zawsze musi przejść na samą siebie.

Założmy teraz, że dla wszystkich drzew o co najwyżej n wierzchołkach teza jest prawdziwa. Niech $|T| = n + 1$. Zauważmy, że jeśli ϕ jest automorfizmem na T , a $v \in T$ jest jego dowolnym liściem, to $\phi(v)$ musi nadal być liściem - inaczej v stopnia 1 przeszłoby na wierzchołek będący węzłem, a więc mający co najmniej stopień 2 i takie ϕ nie mogłoby być automorfizmem na T .

Wiemy też, że w drzewie jest na pewno jeden wierzchołek stopnia 1, niech więc

$$L = \{v \in T : d(v) = 1\}$$

będzie wierzchołkiem wszystkich liści, który na pewno jest niepusty. Niech $T' = T \setminus L$. Wtedy jeśli ϕ' jest automorfizmem na T' , to na mocy założenia indukcyjnego ϕ' spełnia tezę. Z uwagi wyżej wiemy, że liście muszą przejść na siebie, więc jeśli będziemy rozszerzać ϕ' do całego T , to $\phi[L] = L$, czyli nie wpływa na poprawność tezy dla rozszerzenia ϕ' do całego T .

ZAD. 2.

Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1 \pmod{4}$

Graf pełny o n wierzchołkach ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi. My chcemy je rozdzielić po równo między dopełnienie i graf sam w sobie, czyli musimy być w stanie liczbę krawędzi K_n podzielić dodatkowo na 2, a więc $n(n-1)$ musi być podzielne przez 4. Jest to wtedy, gdy

$$n \equiv 0 \pmod{4}$$

lub

$$(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$n \equiv 1 \pmod{4}.$$

ZAD. 3.

Niech $C_1, C_2, \dots, C_{m-n-1}$ będą zbiorami krawędzi wszystkich $(m-n+1)$ cykli otrzymanych poprzez dodanie do drzewa spinającego T grafu prostego G jednej krawędzi G która nie należy do T . Pokaż, że zbiór krawędzi dowolnego cyklu w G jest różnica symetryczną pewnej liczby zbiorów wybranych spośród $C_1, C_2, \dots, C_{m-n-1}$.

No ale to widać