MDM Lista 8

Weronika Jakimowicz

ZAD. 2.

Rozważmy równanie

$$z^k = 1.$$

Jednym z jego pierwiastków jest liczba $z = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Zauważmy też, że

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1} = 0,$$

bo

$$(z-1)(1 + z + \ldots + z^{k-1}) = z + z^2 + \ldots + z^k - 1 - z - \ldots - z^{k-1} = z^k - 1$$
$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = 1 + z + \ldots + z^{k-1}$$

ale $z^k - 1 = 0$, więc

$$1 + z + \ldots + z^{k-1} = 0.$$

Dla $k = 2$ mamy $z = -1$ i:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$A(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$

co po wysumowaniu daje

$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + a_1 x(1-1) + 2a_2 x^2 + a_3 x^3 (1-1) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n} x^{2n}$$

i upraszczając dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n = \frac{1}{2}(A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x}))$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \ldots$$
$$A(zx) = a_0 + a_1 zx + a_2 z^2 x^2 + a_3 z^3 x^3 + a_4 z^4 x^4 + a_5 z^5 x^5 + a_6 z^6 x^6 + a_7 z^7 x^7 + \ldots$$
$$A(z^2 x) = a_0 + a_1 z^2 x + a_2 z^4 x^2 + a_3 z^6 x^3 + a_4 z^8 x^4 + a_5 z^{10} x^5 + a_6 z^{12} x^6 + a_7 z^{14} x^7 + \ldots$$

Zauważmy, że $z^{3k} = 1^k = 1$, więc przy a_{3n} zawsze mamy tylko x^{3n}, natomiast przy pozostałych potęgach, czyli z^{3k+r}, gdzie $r = 1$ lub $r = 2$ mamy

$$z^{3k+r} = z^{3k} z^r = z^r.$$

Dodając wszystkie te wartości, tak jakd dla przypadku $k = 2$, dostajemy

$$A(x) + A(zx) + A(z^2 x) = 3a_0 + a_1 x(1 + z + z^2) + a_2 x^2 (1 + z + z^2) + 3a_3 x^3 + a_4 x^4 (1 + z^1 + z^2) + \ldots =$$
$$= 3a_0 + 3a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{3n} x^{3n}$$

a więc aby dostać funkcję tworzącą ciągu a_{3n} wystarczy wziąc

$$\frac{1}{3}(A(\sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{2i\pi}{3}} \sqrt[3]{x}) + A(e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{x})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^n.$$

ZAD. 3.

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} F_i F_{n-i}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i}$$

ZAD. 4.

k-ta pochodna funkcji $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ to

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k}$$

czyli szereg Maclaurina (tzn. szereg Taylora w zerze) dla funkcji f(x) to:

$$(1 + x)^{\alpha} = (1 + 0)^{\alpha} + \frac{\alpha}{1!}(1 + 0)^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}(1 + 0)^{\alpha-2}x^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!}x^n$$

Co zgadza się ze wzorem podanym w treści zadania.

ZAD. 6.

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$$

Na podłodze mamy rozłożone (n + 1) par skarpet o różnych wzorach i kolorach. Chcemy być osobą nietuzinkową, więc nie możemy nosić dwóch skarpet z jednej pary, dlatego szukamy ilości sposobów na jakie możemy pomieszać naszą kolekcję. Podnosimy górną skarpetkę z pierwszej pary. Odkładamy ją na bok i na n sposobów wybieramy skarpetkę z pozostałych n par. Teraz mamy dwie możliwości:

$\hookrightarrow$ jeśli po prostu zamienimy skarpetę numer 1 z wybraną na n sposobów skarpetą, to zostaje nam pomieszać pozostałe (n − 1) skarpet, czyli mamy nd_{n-1}

$\hookrightarrow$ jeśli z kolei nie zadowolimy się zwykłą podmianą pierwszej skarpety i tej wybranej, to tymczasowo kładziemy pierwszą skarpetę na wybranym miejscu i uznajemy to parę, po czym dokonujemy przemieszania nowo utworzonych n par skarpet, czyli nd_n.

Po zsumowaniu tych dwóch możliwych scenariuszy dostajemy

$$d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}$$

potencjalnych sposobów ułożenia kolekcji skarpet w sposób ciekawy.

Do tej rekurencji potrzebujemy znać wartość d_0 oraz d_1, gdyż $d_2 = 1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_0$.
Przy d_0 mamy zbiór pusty, więc nie robimy nic. To można nie robić tylko na jeden sposób, czyli $d_0 = 1$.
Przy d_1 mamy tylko jeden element, więc tak czy siak on musi wylądować na miejscu 1, więc na singletonie nie jesteśmy w stanie utworzyć ani jednego nieporządku. Stąd $d_1 = 0$.

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

Dla n = 1 mamy

$$d_1 = 1d_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

co jest prawdą jak tłumaczyłam wyżej. Teraz załóżmy, że wzór jest poprawny dla pierwszych n wyrazów. Wtedy

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) \overset{*}{=} nd_n + d_n - (-1)^n = (n + 1)d_n + (-1)^{n+1}$$

Równość z $*$ wynika z faktu, że

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$
$$nd_{n-1} = d_n - (-1)^n$$

$$
\begin{aligned}
d_n &= nd_{n-1} + (-1)^n = n((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n = \\
&= n(n-1)((n-2)d_{n-3} + (-1)^{n-2}) + n(-1)^{n-1} + (-1)^n = \\
&= n!d_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{n+k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(-1)^{n+k}
\end{aligned}
$$

zamiana wykładnika przy $(-1)^{n-k}$ jest możliwa, bo $(-1)^{2k} = 1$, czyli:

$$(-1)^{n-k} = (-1)^{n-k}(-1)^{2k} = (-1)^{n-k+2k} = (-1)^{n+k}$$

co jest wzorem ogólnym na ilość nieporządków.