MDM Lista 14

Weronika Jakimowicz

ZAD. 1.

Co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia? Podaj interpretację wektorów AI i A^2I, gdzie I jest wektorem jednostkowym oraz A jest macierzą sąsiedztwa grafu G (działaniem jest mnożenie macierzy i wektorów o współrzędnych całkowitych).

Co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia? Na pewno obie są symetryczne i sumują się do "odwróconej identyczności", czyli macierzy która zera ma tylko na głównej przekątnej, a w pozostałych miejscach ma jedynki - jest to macierz kliki. W takim razie mając macierz grafu łatwo poznać macierz jego dopełnienia i vice versa.

AI zlicza na na i-tej współrzędnej ilość wierzchołków z jakimi i-ty wierzchołek jest połączony - wszystkie 1 reprezentujące krawędź wychodzącą z grafu zostaną zachowane i dodane do siebie.

Teraz zastanówmy się, co się dzieje kiedy potęgujemy macierz sąsiedztwa? i-ty wiersz mówi nam, z kim sąsiaduje i-ty wierzchołek, natomiast j-ta kolumna daje nam sąsiadów j-tego wierzchołka. Mnożąc i-ty wierz i j-tą kolumną sprawdzamy, czy dany sąsiad jest przez oba te wierzchołki współdzielony, jeżeli nie, to dostajemy jeden przy konfrontacji odpowiadających komórek, a jeżeli tak, to zostaje nam 1. Czyli macierz A^2 zachowuje wspólnych sąsiadów każdych dwóch wierzchołków - ilość sposobów na dojście z i do j (i w drugą stronę) w dwóch krokach. Oczywiście na przekątnej dostaniemy ilość sposobów na jakie możemy wyjść z i, odwiedzić kogoś i wrócić na i, czyli stopień wierzchołka i. Po przemnożeniu przez wektor jednostkowy dostajemy więc na i-tej współrzędnej ilość sposobów na jakie możemy wyjść z i-tego wierzchołka, odwiedzić kogoś i pójść dalej, czy to wracając na i czy też nie.

ZAD. 2.

Hiperkostką wymiary k nazywamy graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{0, 1\}^k$, a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje $\iff$ gdy ich zapis binarny różni się na dokładnie jeden pozycji. Pokaż, że między dwoma różnymi wierzchołkami k-wymiarowej hiperkostki istnieje k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.

Niech v będzie dowolnych wierzchołkiem k wymiarowej hiperkostki. Wtedy v jest pewnym ciągiem 0 i 1 długości k, czyli różni się dokładnie na jednej współrzędnej z dokładnie k innymi wierzchołkami. Co się teraz stanie jeżeli usuniemy $n < k$ wierzchołków? Jeżeli będziemy usuwać sąsiadów różnych grafów, to zawsze będą z czymś połączone przez co najmniej 2 krawędzie, natomiast jeżeli skupimy się na usuwaniu sąsiadów na przykład wierzchołka v, to zawsze zostanie mu przynajmniej jedna krawędź łącząca go z resztą grafu. Natomiast usunięcie k wierzchołków jest w stanie rozspójnić nasz graf, wystarczy usunąć wszystkich sąsiadów pojedynczego wierzchołka, wtedy zostaje on niepołączony z resztą grafu.

ZAD. 3.

Graf M_2 to dwa wierzchołki połączone krawędzią. Graf M_{k+1} konstruujemy z M_k w ten sposób, że dokładamy do każdego $v \in V(M_k)$ wierzchołek v' i łączymy go ze wszystkimi sąsiadami v w M_k; następnie dodajemy jeszcze jeden wierzchołek w i łączymy go ze wszystkimi wierzchołkami v'. Pokaż przez indukcję po k, że

$\hookrightarrow$ *(a) graf M_k nie ma trójkątów*

Dla $k = 2$ jest to dość oczywiste: pojedyncza krawędź trójkąta nie zawiera nigdy. Teraz załóżmy, że M_k nie ma trójkątów. Popatrzmy na $G = M_{k+1}$.
Załóżmy, że w M_{k+1} istnieje trójkąt, powiedzmy o wierzchołkach x, y, z. Rozdzielmy całość na przypadki:

1. $z = w$ Wtedy y, x muszą być wierzchołkami v'_1, v'_2, ale przecież te wierzchołki nie były łączone między sobą, czyli tak zdarzyć się nie może.
2. $z = v'$ dla pewnego $v \in M_k$. Skoro wiemy już, że ani jeden z pozostałych wierzchołków nie jest w oraz że wszystkie v' nie są między soba połączone, to musimy mieć $x, y \in M_k$ takie, że $xy \in M_k$. Ale ponieważ $xv', yv' \in M_{k+1}$, to $xv, yv \in M_k$. Czyli mamy $xv, yv, xy \in M_k$ co daje trójkąt w M_k i sprzeczność.

$\hookrightarrow$ *(b) graf M_k jest k-kolorowany*

Ilość kolorów potrzebnych do pomalowania grafu odpowiada ilości klas na które dzielimy wierzchołki.

Dla $k = 2$ jest to oczywiste. Załóżmy teraz, że graf M_k jest k-kolorowany. Pokażemy, że wystarczy $(k + 1)$ kolorów żeby pomalować M_{k+1}.
Z założenia indukcyjnego wierzchołki grafu M_k możemy podzielić na k klas $V_1, \ldots, V_k$. Dla dowolnego wierzchołka $v \in V_i$ wierzchołek v' nie jest połączony z żadnym wierzchołkiem z V_i: na tej zasadzie tworzyliśmy przecież graf M_{k+1}, że v' jest połączone z wszystkimi u takimi, że $vu \in M_k$, a wierzchołki z jednej klasy nie są ze sobą połączone. Czyli $v, u \in V_i$, to $v'u$ nie istnieje, więc możemy spokojnie v' włożyć w V_i. Pozostaje nam wierzchołek w, który nie może już zostać włożony do żadnej z klas V_i, bo jest już połączony z co najmniej jednym z wierzchołków już w V_i będących. Czyli musimy go włożyć do osobnej klasy, stąd też $(k + 1)$ klas, czyli kolorów.

↪ *(c) graf M_k nie jest $(k - 1)$-kolorowany*

W dzieleniu jak wyżej wiemy, że jeśli nie włożymy w do żadnej z klas V_i, to będziemy musieli go włożyć gdzie indziej. Co jeżeli włożymy w do V_1 i nadal będziemy próbować użyć tylko k kolorów? Wtedy dla pewnego $v \in V_1$ będziemy musieli v' włożyć do V_j dla $1 \neq j$. Ale skoro tak się da zrobić, to $(\forall\ u \in V_j)\ vu \notin M_k$. Czyli mogliśmy włożyć v do klasy V_j. To samo jeśli weźmiemy kolejny wierzchołek x' dodany z V_1 - możemy go włożyć do V_k dla pewnego $k \neq 1$. Tak możemy robić aż rozmieścimy całe V_1 pomiędzy pozostałe klasy wierzchołków, co znaczyłoby, że $\chi(M_k) \neq k$, a raczej $\chi(M_k) = k - 1$ i jest to sprzecznością.

ZAD. 6.

Mamy daną grupę n dziewcząt i m chłopców. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by k dziewcząt mogło znaleźć męża (wewnątrz grupy), jest to, by każde r dziewcząt znało przynajmniej $k + r - n$ chłopców.

Mamy graf G o dwóch klasach wierzchołków: W i M, gdzie $|W| = n$ i $|M| = m$. Jeżeli na G da się zrobić kojarzenie k wierzchołków z W, to jeżeli do M dodamy $(n - k)$ wierzchołków połączonych z każdym wierzchołkiem z W, możemy bez problemy znaleźć kojarzenie całego grafu. W takim razie wystarczy, aby nowo utworzony graf, w którym $|M'| = m + n - k$, miał kojarzenie. Niech więc teraz $A \subseteq W$ taki, że $|A| = r$. Chcemy, żeby spełniony był warunek Halla:

$$|A| = r \leq |N_{M'}(A)| = n - k + |N_M(A)|$$

$$r + k - n \leq |N_M(A)|$$

czyli to, co potrzebujemy z zadania.
Co jeżeli mogłoby być mniej sąsiadów A? Czyli $|N(A)| < k + r - n$, wtedy

$$|A| = r \leq |N_{M'}(A)| = n - k + |N_M(A)| < n - k + (k + r - n) = r$$

co doprowadza do sprzeczności.

ZAD. 7.

W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to, by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $\frac{k}{4}$ chłopców.

W takim kraju możemy każdego mężczyznę pomnożyć przez 4 i działać jak w normalnym twierdzeniu Halla, tylko na $|W| = n$ oraz $|M| = 4m$. Chcemy, żeby każdy podzbiór $A \subseteq W$ o $|A| = k$ zachodziło

$$|A| = k \leq |N(A)|$$

czyli jeżeli $|N(A)| = k$, to warunek będzie na pewno spełniony. Ale jeżeli $|N(A)| = k$, to tak naprawdę $|N(A')| = \frac{k}{4}$ jeżeli każdy mężczyzna wraca do bycia liczonym pojedynczo a nie poczwórnie.

ZAD. 10.

Pokaż, że dwudzielny graf d-regularny posiada pełne skojarzenie.

Niech G będzie d-regularnym grafem o klasach wierzchołków $|V| = n$ i $|W| = m$. Niech $A \subseteq V$ o $|A| = k$, wtedy z A wychodzi $k \cdot d$ krawędzi, które muszą się łączyć z co najmniej k wierzchołkami w W. W przeciwnym przypadku $|N(A)| < k$, ale wtedy do $N(A)$ wchodzi $|N(A)| \cdot d < k \cdot d$ krawędzi. Czyli

$$|A| = k \leq |N(A)|$$

i graf G spełnia warunek Halla.

ZAD. 13

Pokaż, że indeks chromatyczny $\chi'(K_n)$ *jest równy* $(n-1)$ *gdy* n *jest parzyste i* n *gdy* n *jest nieparzyste.*

Dla K_{2n+1} dowolne pełne skojarzenie łączy $2n$ wierzchołków przez n krawędzi i zawsze zostawia jeden wierzchołek osierocony. W grafie tym mamy $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ krawędzi, czyli $(2n+1)$ różnych skojarzeń, czyli musimy mieć co najmniej $(2n+1)$ kolorów, aby pomalować krawędzie (każde skojarzenie malujemy na jeden kolor).

Dla K_{2n} mamy $\frac{(2n-1)2n}{2} = n(2n-1)$ krawędzi. W skojarzeniu teraz jest dokładnie n krawędzi, każde skojarzenie malujemy na jeden kolor, więc potrzebujemy $(2n-1)$ kolorów by pomalować wszystkie krawędzie tego grafu.