Ujebanko przez kolanko

maruda

69

ZAD. 1.

(to jest z Kincaida)
Standardowe wielomiany ortogonalne są definiowane w następujący sposób:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = (x - a_1)p_0(x)$$

$$p_k(x) = (x - a_k)p_{k-1}(x) - b_k p_{k-2}(x),$$

gdzie

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle}$$
$$b_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle}$$

Udowodnimy przez indukcję względem n, że $\langle p_n, p_i\rangle = 0$ dla $i < n$.
Jeżeli $n = 1$, to mamy

$$0 = \langle p_1, p_0\rangle = \langle (x - a_1)p_0, p_0\rangle = \langle xp_0, p_0\rangle - a_1\langle p_0, p_0\rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} = \frac{\int w(x)xdx}{\int w(x)dx}$$

co jest wyznaczone jednoznacznie.
Jeżeli $n \geq 2$ i $\langle p_{n-1}, p_i\rangle = 0$ dla $i < n - 1$, to chcemy

$$\begin{aligned}
0 = \langle p_n, p_{n-1}\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-1}\rangle = \\
&= \langle (x - a_n)p_{n-1}, p_{n-1}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-1}\rangle = \\
&= \langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle - b_n \cdot 0 = \\
&= \langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle},$$

co jest zdefiniowane jednoznacznie.

$$\begin{aligned}
0 = \langle p_n, p_{n-2}\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-2}\rangle = \\
&= \langle (x - a_n)p_{n-1}, p_{n-2}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle = \\
&= \langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2}\rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2}\rangle}$$

co również jest jednoznaczne z poprzednich definicji.

Dalej, dla dowolnego $i < n - 1$ mamy

$$\begin{aligned}
\langle p_n, p_i\rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_i\rangle = \\
&= \langle xp_{n-1}, p_i\rangle - a_n\langle p_{n-1}, p_i\rangle - b_n\langle p_{n-2}, p_i\rangle = \\
&= \langle p_{n-1}, xp_i\rangle = \langle p_{n-1}, p_{i+1} + a_{i+1}p_i + b_{i+1}p_{i-1}\rangle = 0
\end{aligned}$$

ZAD. 2.

Z zadania 1 z listy 7 możemy się domyślić, że

$$P_0 = T_0 = 1 \quad P_1 = T_1 = x$$

$$c_1 = \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx}{\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx} = \frac{0}{\pi} = 0$$

więc $P_1 = x$ i zapewne wielomiany P spełniają zależność wielomianów Czebyszewa, czyli

$$T_k = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}.$$

Jedyny problem jest taki, że my byśmy chcieli dostać zależność bez mnożenia przez dwa. Załóżmy, że

$$P_k = xP_{k-1} - \frac{1}{4}P_{k-2}$$

dla $k \geq 3$, a dla $k = 2$ mamy $P_2 = \frac{1}{2}T_2$. Podsuwam hipotezę, że wówczas dla $k \geq 3$ jest

$$P_k = 2^{1-k}T_k$$

Dla $k = 3$ mamy

$$P_3 = xP_2 - \frac{1}{4}P_1 = \frac{1}{2}xT_2 - \frac{1}{4}T_1 = \frac{1}{4}(2xT_2 - T_1) = \frac{1}{4}T_3$$

Czyli zakładamy, że dla pierwszych n to śmiga, wówczas:

$$P_{n+1} = xP_n - \frac{1}{4}P_{n-1} = 2^{1-n}xP_n - 2^{-2}2^{2-n}T_{n-1} = 2^{1-n}xT_n - 2^{-n}T_{n-1} = 2^{-n}(2xT_n - T_{n-1}) = 2^{1-(n-1)}T_{n+1}$$

I teraz

$$\langle P_i, P_j\rangle = \langle 2^{1-i}T_i, 2^{1-j}T_j\rangle = 2^{1-i}2^{1-j}\langle T_i, T_j\rangle = 0$$

a więc faktycznie są ortogonalne c:

ZAD. 3.

n-ty wielomian optymalny ma postać

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}P_k$$

a z poprzedniego zadania wiemy, że (poza małymi wyjątkami)

$$P_k = 2^{1-k}T_k$$

Czyli

$$w* = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1}\frac{\langle f, T_k\rangle}{\langle T_k, T_k\rangle}T_k$$

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $p \in \Pi_n$, który możemy zapisać jako

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{1-k}P_k$$

jest

$$\begin{aligned}\langle f - w*, p\rangle = \langle f, p\rangle - \langle w*, p\rangle &= \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\langle f, P_k\rangle - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j\frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}\langle P_k, P_j\rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\langle f, P_k\rangle - \sum_{k=0}^{n} a_k\langle f, P_k\rangle = 0\end{aligned}$$

$$w* = \sum_{k=0}^{n} 2^{1-k}\frac{\langle f, T_k\rangle}{\langle T_k, T_k\rangle}T_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2-k}}{\pi}\langle f, T_k\rangle T_k$$