Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 7

24 listopada 2022 r.

M7.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Wykazać, że wielomiany Czebyszewa T_k spełniają równości

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq l;\ k,l = 0,1,\ldots),$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} \left[T_k(x)\right]^2\, dx = \begin{cases} \pi & (k=0), \\ \pi/2 & (k = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

Co one oznaczają?

M7.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Wykazać, że dla ustalonej funkcji wagowej $p(x)$ i ustalonego przedziału $[a,\, b]$ ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie, z dokładnością do stałych mnożników.

b) Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$ z wagą $p(x)$. Wykazać, że wielomiany $P_0,\ P_1, \ldots, P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

c) Niech P_k będzie k-tym $(k > 0)$ wielomianem ortogonalnym. Wówczas dla dowolnego wielomianu $Q \in \Pi_{k-1}$ jest $\langle Q,\ P_k \rangle = 0$.

M7.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ wszystkie zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale otwartym (a, b).

M7.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić twierdzenie Pitagorasa, tzn. jeśli $\{f_0, f_1, \ldots, f_1\}$ jest układem ortogonalnym, to

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} c_j f_j \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|_2^2.$$

M7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomian $w_n^* \in \Pi_n$ jest n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C_p[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi równość

$$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0.$$

M7.6. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ Wykazać, że jeśli $\{f_1,\ f_2, \ldots, f_m\}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $C_p(a, b)$, to elementy $f_1,\ f_2, \ldots, f_m$ są liniowo niezależne.

M7.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian optymalny $w_n^* \in \Pi_n$ w sensie normy średniokwadratowej.

M7.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznaczyć prawdopodobne wartości stałych a, b.

M7.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$P_0(x) = \alpha_0, \qquad P_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie α_k, β_k, γ_k są danymi stałymi. Uzasadnić następujący *uogólniony algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Obliczamy pomocnicze wielkości V_k $(k = 0, 1, \ldots, n+2)$ według wzorów

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1})V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $V_{n+1} = 0$, $V_{n+2} = 0$.

Wynik: $s_n(x) = \alpha_0 V_0$.

17 listopada 2022 r.

Rafał Nowak