

Exercícios resolvidos sobre Definição de Probabilidade

Nesta Unidade de estudo, até este ponto você aprendeu definições de probabilidade e viu como os conceitos se aplicam a várias situações. Observe agora um conjunto de exercícios solucionados que ilustram a aplicação dos referidos conceitos.

Exercício 1

Em um cassino, localizado em certo país no exterior, o dono providenciou um dado especial. Nesse dado a probabilidade de sair determinado ponto é inversamente proporcional a seu valor. Um aluno de Estatística, ao visitar esse cassino, resolveu investigar se estava sendo trapaceado. “Com base na observação de diversos eventos, para elaborar um relatório, ele fez os cálculos das probabilidades a seguir.” Sabendo como o dado se comporta, calcule:

- a) a probabilidade de sair um número menor que 3;
- b) a probabilidade de sair um número par;
- c) a probabilidade de sair um número primo;
- d) a probabilidade de sair ponto 3;
- e) a probabilidade de sair ponto 6.

Solução

Enunciado

Em um cassino, localizado em certo país no exterior, o dono providenciou um dado especial. Nesse dado a probabilidade de sair determinado ponto é inversamente proporcional a seu valor. Um aluno de Estatística, ao visitar esse cassino, resolveu investigar se estava sendo trapaceado. Com base na observação de diversos eventos, ele criou um relatório que apresenta as afirmações a seguir. Sabendo como o dado se comporta, calcule:

- a) a probabilidade de sair um número menor que 3;
- b) a probabilidade de sair um número par;
- c) a probabilidade de sair um número primo;
- d) a probabilidade de sair ponto 3;
- e) a probabilidade de sair ponto 6.

Solução

Sabemos que a probabilidade de cada ponto é inversamente proporcional a seu valor. Sendo k uma constante, teremos as seguintes probabilidades:

Ponto "x"	1	2	3	4	5	6
P(x)	$k/1$	$k/2$	$k/3$	$k/4$	$k/5$	$k/6$

Pela definição axiomática, sabemos que a probabilidade do espaço amostral deve ser igual a 1. Portanto, a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis deverá resultar em 1, pois $P(S) = 1$. Então:

$$P(S) = P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 1$$

$$\frac{(60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10)}{60} \cdot k = 1$$

$$k = \frac{60}{147} \cong 0,4082$$

Agora que temos o valor de k , podemos calcular as probabilidades de todos os pontos:

Ponto "x"	1	2	3	4	5	6
P(x)	0,4082	0,2041	0,1361	0,10205	0,0816	0,0680

Vamos então verificar cada alternativa:

- a) A probabilidade de sair ponto menor que 3 é aproximadamente 0,6123.

O evento "sair ponto menor que 3" é correspondente a "sair ponto 1" ou "sair ponto 2". Esses dois eventos elementares são *mutuamente excludentes*, pois a ocorrência de um implica a não ocorrência do

outro. Assim, podemos aplicar o terceiro axioma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(\text{ponto} < 3) = P(1) + P(2) = 0,4082 + 0,2041 = 0,6123$$

b) A probabilidade de sair um número par é 0,3742.

Vamos chamar esse evento “sair número par” de E. Então $E = \{2,4,6\}$ e a probabilidade de sair número par será igual à probabilidade de sair 2, 4 ou 6. Esses eventos elementares são mutuamente excludentes, portanto podemos novamente aplicar o terceiro axioma.

$$P(E) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,2041 + 0,10205 + 0,068 = 0,3742$$

c) A probabilidade de sair um número primo é aproximadamente 0,4218.

São primos os números 2, 3 e 5. Então, o evento $F = \text{“sair número primo”}$ é tal que $F = \{2,3,5\}$. Mais uma vez, como os eventos elementares são mutuamente excludentes, podemos usar o terceiro axioma:

$$P(F) = P(2) + P(3) + P(5) = 0,2041 + 0,1361 + 0,0816 = 0,4218$$

d) A probabilidade de sair ponto 3 é aproximadamente 0,1361.

Este resultado foi obtido logo após o cálculo da constante k , por meio do terceiro axioma da probabilidade, e está registrado na tabela anterior.

e) A probabilidade de sair ponto 6 é aproximadamente 0,068.

Mais uma vez, com os resultados obtidos, substituindo-se o valor da constante k , temos que:

$$P(6) = \frac{k}{6} = \frac{0,4082}{6} \cong 0,068$$

Exercício 2

Em um escritório, a necessidade de espaço para armazenamento de informações no servidor é de 500 GB (Gigabyte). Sabendo que podemos comprar discos rígidos de 50 e 100 GB e que a ordem de aquisição não é relevante, o espaço amostral de possibilidades para conseguir 500 GB é formado por quantos elementos?

Solução

Enunciado

Em um escritório, a necessidade de espaço para armazenamento de informações no servidor é de 500 GB (Gigabyte). Sabendo que podemos comprar discos rígidos de 50 e 100 GB e que a ordem de aquisição não é relevante, o espaço amostral de possibilidades para conseguir 500 GB é formado por quantos elementos?

Solução

Neste exercício, vamos listar todas as possibilidades de obter um conjunto de 500 GB de memória, composto de elementos de 50 GB e/ou 100 GB.

5 × 100 GB	4 × 100 GB	3 × 100 GB	2 × 100 GB	1 × 100 GB	
	2 × 50 GB	4 × 50 GB	6 × 50 GB	8 × 50 GB	10 × 50 GB

Temos, portanto, *6 combinações possíveis* que satisfazem à exigência de 500 GB de memória total.

Exercício 3

Dois dados não viciados são lançados simultaneamente. Considere os eventos $A = \{\text{soma dos pontos igual a 6}\}$ e $B = \{\text{pontos 1, 2 ou 3 no segundo dado}\}$. Calcule:

- a) a probabilidade de ocorrer o evento A
- b) a probabilidade de ocorrer o evento B
- c) a probabilidade de ocorrer o evento união.
- d) a probabilidade da interseção entre A e o complemento de B
- e) a probabilidade da interseção entre os eventos A e B
- f) a probabilidade da união do complemento de A com o evento B

Solução

Enunciado

Dois dados não viciados são lançados simultaneamente. Considere os eventos $A = \{\text{soma dos pontos igual a 6}\}$ e $B = \{\text{pontos 1, 2 ou 3 no segundo dado}\}$. Calcule:

- a) a probabilidade de ocorrer o evento A
- b) a probabilidade de ocorrer o evento B
- c) a probabilidade de ocorrer o evento união.
- d) a probabilidade da interseção entre A e o complemento de B
- e) a probabilidade da interseção entre os eventos A e B
- f) a probabilidade da união do complemento de A com o evento B

Solução

São dados os eventos:

$A = \{\text{soma dos pontos igual a 6}\}$ e $B = \{\text{pontos 1, 2 ou 3 no segundo dado}\}$.

Para resolver este exercício, podemos listar todos os resultados possíveis – não são muitos – e obter as informações necessárias diretamente.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Veja que o espaço amostral é composto de 36 resultados possíveis e igualmente prováveis, pois os dados são honestos.

a) Os resultados favoráveis ao evento A são (1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1) e estão marcados em amarelo e verde, portanto:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

b) Os resultados favoráveis ao evento B são todos aqueles que têm ponto 1, 2 ou 3 no segundo dado, isto é, as três colunas da esquerda da tabela anterior, marcadas em azul e verde. Então:

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

c) A probabilidade de ocorrer o evento união corresponde à ocorrência de *algum* dos eventos A e B , ou seja, todos os resultados em destaque (amarelo, azul ou verde) na tabela anterior.

$$P(A \cup B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

d) O complemento de B consiste nos resultados das 3 colunas da direita da tabela. A intersecção entre A e o complemento de B serão os resultados (2,4) e (1,5).

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

e) A intersecção entre os eventos A e B está marcada em verde no espaço amostral, pois representa a ocorrência do “evento azul” e do “evento amarelo”.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

f) O complemento do evento A contém todos os resultados exceto: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) e (5,1). A união do complemento de A com o evento B será o evento que contém todos os resultados do espaço amostral, exceto (2,4) e (1,5).

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$$

Exercício 4

No lançamento de 2 dados (não viciados), quais são as probabilidades de:

- a) a soma dos pontos ser igual a 11?
- b) a soma dos pontos ser maior que 10?
- c) a soma dos pontos ser igual a 7?
- d) a soma dos pontos ser igual a 7 ou 11?

Solução

Enunciado

No lançamento de 2 dados (não viciados), quais são as probabilidades de:

- a) a soma dos pontos ser igual a 11?
- b) a soma dos pontos ser maior que 10?
- c) a soma dos pontos ser igual a 7?
- d) a soma dos pontos ser igual a 7 ou 11?

Solução

Vamos listar todos os resultados possíveis que constituem o espaço amostral.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Agora vamos verificar cada uma das alternativas.

- A probabilidade de a soma dos pontos ser igual a 11 é $1/18$.

Você vê em vermelho todas as combinações que resultam em soma 11. Portanto, chamando de A o evento “soma igual a 11” temos:

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

- A probabilidade de a soma dos pontos ser maior que 10 é $1/12$.

Em verde, estão destacados todos os resultados favoráveis ao evento B = “soma maior que 10”, que significa “soma 11” ou “soma 12”.

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- A probabilidade de a soma dos pontos ser igual a 7 é $1/6$.

Os resultados favoráveis ao evento C = “soma igual a 7” estão circulados em azul na tabela do espaço amostral. Portanto:

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- A probabilidade de a soma dos pontos ser 7 ou 11 é igual a $2/9$.

Este evento $D = \text{“soma 7 ou 11”}$ corresponde à união dos eventos A e C , que são mutuamente excludentes (observe na tabela que não há intersecção entre os eventos). Podemos, portanto, aplicar o terceiro axioma.

$$P(D) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Exercício 5

Fez-se um estudo para verificar a quantidade de homens e mulheres em quatro diferentes universidades. Os resultados encontrados são expostos a seguir. Uma empresa de *marketing*, interessada em obter essas informações para planejar uma campanha, pediu a um técnico que fizesse um relatório com base nos dados publicados nesse estudo. Alguns dos pontos polêmicos do relatório são expostos a seguir.

Universidade	Homens	Mulheres
A	225	81
B	153	42
C	532	142
D	188	42

Agora calcule:

- a) qual é a chance de ele ser homem e da Universidade A, sabendo que o estudante não é da Universidade C?
- b) qual é a chance de ser uma mulher ou ser das Universidades C ou D?
- c) qual é a probabilidade de um estudante ser uma mulher?
- d) qual é a probabilidade de um estudante estudar na Universidade A?
- e) sabendo que se trata de um homem, qual é a chance de o estudante ser da Universidade C?

Solução

Enunciado

Fez-se um estudo para verificar a quantidade de homens e mulheres em quatro diferentes universidades. Os resultados encontrados são expostos a seguir. Uma empresa de *marketing*, interessada em obter essas informações para planejar uma campanha, pediu a um técnico que fizesse um relatório com base nos dados publicados nesse estudo. Alguns dos pontos polêmicos do relatório são expostos a seguir.

Universidade	Homens	Mulheres
A	225	81
B	153	42
C	532	142
D	188	42

Agora calcule:

- a) qual é a chance de ele ser homem e da Universidade A, sabendo que o estudante não é da Universidade C?
- b) qual é a chance de ser uma mulher ou ser das Universidades C ou D?
- c) qual é a probabilidade de um estudante ser uma mulher?
- d) qual é a probabilidade de um estudante estudar na Universidade A?
- e) sabendo que se trata de um homem, qual é a chance de o estudante ser da Universidade C?

Solução

Neste exercício, temos as informações necessárias sobre todos os eventos possíveis. Assim, devemos apenas identificar quais são os resultados favoráveis ao evento considerado e quais são os resultados possíveis no âmbito do espaço amostral considerado. Atenção: o espaço amostral nem sempre será o mesmo!

a) Sabendo que o estudante não é da Universidade C, a chance de ele ser homem e da Universidade A é superior a 0,27.

Aqui, já temos a informação de que este estudante NÃO é da Universidade C, portanto, nosso espaço amostral será o seguinte:

Universidade	Homens	Mulheres	
A	225	81	306
B	153	42	195
C	532	142	674
D	188	42	230
	1098	307	1405

Os resultados favoráveis são os 225 “homens da Universidade A”. Portanto, podemos calcular a

probabilidade por meio do quociente entre os resultados favoráveis e os resultados possíveis (destacados na tabela anterior). Seja A o evento “homem da Universidade A, sabendo que não é da Universidade C”, então:

$$P(A) = \frac{225}{(306 + 195 + 230)} = \frac{225}{731} \cong 0,3078$$

b) A chance de ser uma mulher ou ser das Universidades C ou D é aproximadamente 73%.

Nesse caso, o espaço amostral contém 1405 resultados possíveis e a ocorrência de um evento *ou* de outro significa a ocorrência de *algum* dos eventos.

Universidade	Homens	Mulheres	
A	225	81	306
B	153	42	195
C	532	142	674
D	188	42	230
	1098	307	1405

Assim, sendo B o evento “mulher” ou “Universidade C” ou “Universidade D”, temos:

$$P(B) = \frac{307 + 532 + 188}{1405} = \frac{1027}{1405} \cong 0,7310$$

c) A probabilidade de um estudante ser uma mulher é próxima de 21%.

Seja C o evento “mulher”, temos:

$$P(C) = \frac{307}{1405} \cong 0,2185$$

d) A probabilidade de um estudante estudar na Universidade A é superior a 0,2.

Seja D o evento “estudante ser da Universidade A”, então:

$$P(D) = \frac{306}{1405} \cong 0,2178$$

e) Sabendo que se trata de um homem, a chance de ser da Universidade C é próxima de 48%.

Mais uma vez, temos um espaço amostral diferente, pois é dado que se trata de um homem. Portanto, o espaço amostral S contém 1098 resultados possíveis, dos quais 532 são favoráveis ao evento “ser da Universidade C”.

Universidade	Homens	Mulheres	
A	225	81	306
B	153	42	195
C	532	142	674
D	188	42	230
	1098	307	1405

Então, sendo D o evento “ser da Universidade C, dado que é um homem”, temos:

$$P(E) = \frac{532}{1098} \cong 0,4845$$

Exercício 6

No lançamento de um dado, o espaço amostral é $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Considere os eventos:

- O resultado é um número ímpar: $A = \{1,3,5\}$.
- O resultado é um número primo: $B = \{2,3,5\}$.
- O resultado é maior que 4: $C = \{5,6\}$.

Agora:

- encontre o evento complementar de C .
- encontre a união de A com \bar{C} .
- identifique a intersecção entre B e C .
- verifique se os conjuntos A e \bar{B} são mutuamente excludentes.
- encontre a união de A com C .
- identifique o complementar de A .

Solução

Enunciado

No lançamento de um dado, o espaço amostral é $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Considere os eventos:

- O resultado é um número ímpar: $A = \{1,3,5\}$.
- O resultado é um número primo: $B = \{2,3,5\}$.
- O resultado é maior que 4: $C = \{5,6\}$.

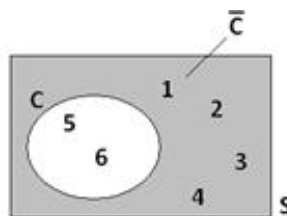
Agora:

- encontre o evento complementar de C.
- encontre a união de A com \bar{C} .
- identifique a intersecção entre B e C.
- verifique se os conjuntos A e \bar{B} são mutuamente excludentes.
- encontre a união de A com C.
- identifique o complementar de A.

Solução

Vamos verificar cada uma das afirmações.

a) O evento complementar contém todos os resultados que não são favoráveis ao evento considerado. Portanto, o complementar de C é: $\bar{C} = \{1,2,3,4\}$.

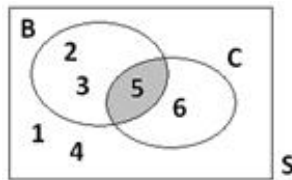


b) A união de A com $\bar{C} = \{1,2,3,4,5\}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1,3,5\} \\ \bar{C} = \{1,2,3,4\} \end{array} \right\} A \cup \bar{C} = \{1,2,3,4,5\}$$

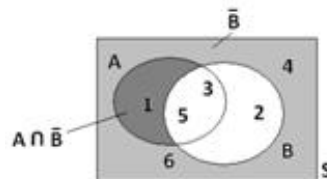


c) A intersecção entre B e C é $\{5\}$.



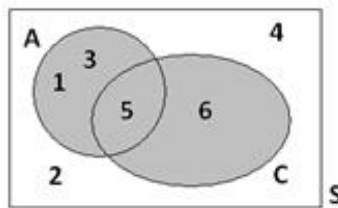
d) Os conjuntos A e \bar{B} NÃO são mutuamente excludentes.

Como a intersecção dos eventos considerados é não nula, ou seja, $A \cap \bar{B} = \{1\}$, então os eventos *não são mutuamente excludentes*.



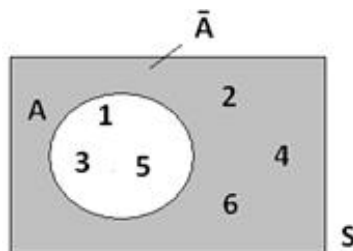
e) A união de A com C é $\{1, 3, 5, 6\}$.

Quando um resultado aparecer em ambos os eventos, não deverá ser repetido. Portanto, $A \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$.



f) O complementar de A é \bar{A} é $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.

O evento complementar consiste em todos os resultados que não são favoráveis ao evento considerado.



Exercício 7

Em uma competição de aeromodelismo, vence o participante que conseguir pousar mais vezes seu aeroplano na área especificada. Esta área consiste em um triângulo equilátero, inscrito em um círculo. Sabendo que um aeroplano pousou dentro do círculo, qual é a probabilidade de ter pousado também dentro do triângulo? Suponha que a densidade da probabilidade em todos os pontos do círculo é a mesma.

*Lembre-se de considerar o brinquedo como um ponto material.

Solução

Enunciado

Em uma competição de aeromodelismo, vence o participante que conseguir pousar mais vezes seu aeroplano na área especificada. Esta área consiste em um triângulo equilátero, inscrito em um círculo. Sabendo que um aeroplano pousou dentro do círculo, qual é a probabilidade de ter pousado também dentro do triângulo? Suponha que a densidade de probabilidade em todos os pontos do círculo é a mesma.

*Lembre-se de considerar o brinquedo como um ponto material.

Solução

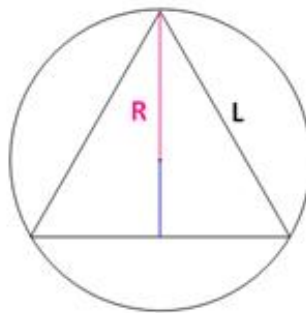
Neste exercício, mais uma vez o cálculo será feito por meio do quociente entre os resultados favoráveis ao evento em questão e os resultados possíveis.

Observe que o espaço amostral é o círculo, pois é dada a informação de que o aeroplano pousou dentro dele. Assim, o número de resultados possíveis será igual à área do círculo.

O número de resultados favoráveis ao evento $E = \text{“pousar também dentro do triângulo”}$, por sua vez, será igual à área do triângulo.

A probabilidade de ocorrência do evento E será calculada da seguinte forma:

$$P(E) = \frac{A_{\text{triângulo}}}{A_{\text{círculo}}}$$



Com base na figura apresentada, podemos encontrar a relação entre o raio do círculo (R) e o lado do triângulo (L).

Sabemos que, em um triângulo equilátero, a altura é $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ e é dividida pelo baricentro em dois segmentos tais que um tem o dobro do comprimento do outro. Como o baricentro do triângulo coincide com o centro do círculo (afinal, o triângulo é equilátero), podemos dizer que $h = \frac{3R}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$. Assim, o lado do triângulo equilátero é tal que:

$$L = R\sqrt{3}$$

A expressão para o cálculo da área de um triângulo equilátero de lado L é:

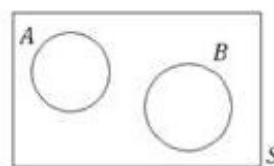
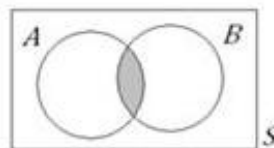
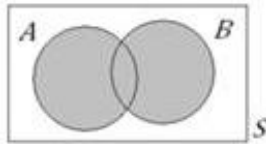
$$A_{\Delta} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Como a área de um círculo de R é $A_o = \pi R^2$, , então a probabilidade de ocorrência do evento E será:

$$P(E) = \frac{A_{\Delta}}{A_o} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{\pi R^2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cong 0,4135$$

Exercício 8

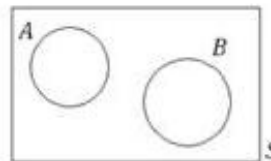
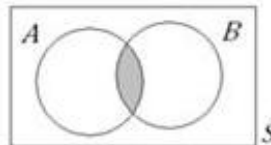
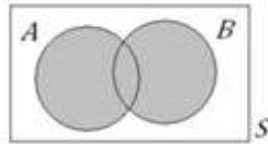
Relacione as figuras a seguir às operações básicas entre eventos: união, intersecção, evento complementar e eventos mutuamente excludentes.



Solução

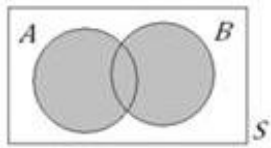
Enunciado

Relacione as figuras a seguir às operações básicas entre eventos: união, intersecção, evento complementar e eventos mutuamente excludentes.



Solução

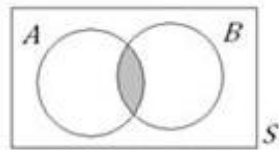
As figuras apresentadas neste exercício representam exatamente as definições de cada uma das operações entre eventos.



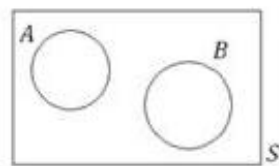
união



complemento



intersecção



eventos mutuamente excludentes