Introduzione ai grafi

Grafi

Un grafo G é costituito da una coppia di insiemi (V, A) dove V é detto insieme dei *nodi* e A é detto insieme di *archi* ed é un sottinsieme di tutte le possibili coppie di nodi in V. Se le coppie di nodi sono ordinate, il grafo é detto *orientato*, se non sono ordinate é detto *non orientato*.

Un esempio

Grafo G con insieme di nodi

$$V = \{a, b, c, d, e\},$$

insieme di archi

$$A = \{(a, b);\ (a, c);\ (b, c);\ (b, e);\ (c, d);\ (d, b)\}$$

G grafo orientato: coppie ordinate e quindi, ad esempio, la coppia (a, b) é diversa dalla coppia (b, a)

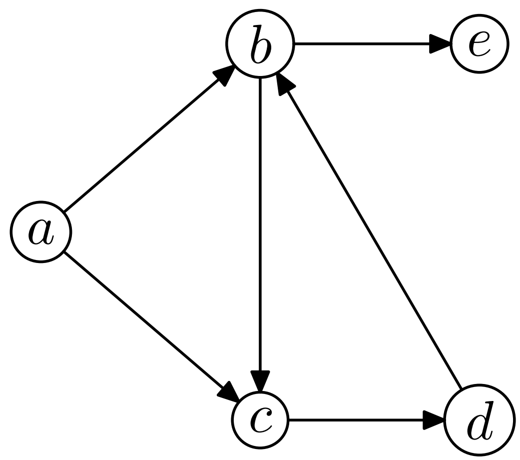
G non orientato: coppie non ordinate e quindi, ad esempio, la coppia (a, b) e la coppia (b, a) sono equivalenti tra loro.

Definizione

Dato un grafo orientato $G = (V, A)$ e un arco $(i, j) \in A$ diremo che il nodo i é *predecessore* del nodo j e che il nodo j é *successore* del nodo i. Nel caso di un grafo non orientato $G = (V, A)$, dato un arco $(i, j) \in A$ diremo che il nodo i e il nodo j sono tra loro *adiacenti*.

Rappresentazione grafica

Nodi $\rightarrow$ punti nel piano
Archi $\rightarrow$ linee che congiungono i punti/nodi dell'arco (con una freccia dal primo nodo verso il secondo nel caso di grafo orientato)



Liste di adiacenza

Ad ogni nodo del grafo é associata la lista dei suoi successori (se il grafo é orientato) o dei suoi adiacenti (se il grafo é non orientato).

Grafo orientato

$$a:\ (b,c) \quad b:\ (c,e) \quad c:\ (d) \quad d:\ (b) \quad e:\ \emptyset$$

Grafo non orientato

$$a:\ (b,c) \quad b:\ (a,c,d,e) \quad c:\ (a,b,d) \quad d:\ (b,c) \quad e:\ (b)$$

Matrice di incidenza nodo-arco

Matrice con tante righe quanti sono i nodi e tante colonne quanti sono gli archi. Nella colonna relativa ad un arco (i, j) avremo tutte le componenti 0 tranne quelle che si trovano nella riga i e nella riga j. Se il grafo é non orientato queste due componenti sono entrambe pari a +1, se é orientato la componente relativa al nodo predecessore i é pari a +1, quella relativa al nodo successore é -1.

Nell'esempio

Grafo orientato

	(a,b)	(a,c)	(b,c)	(b,e)	(c,d)	(d,b)
a	1	1	0	0	0	0
b	-1	0	1	1	0	-1
c	0	-1	-1	0	1	0
d	0	0	0	0	-1	1
e	0	0	0	-1	0	0

Continua

Grafo non orientato

	(a,b)	(a,c)	(b,c)	(b,e)	(c,d)	(d,b)
a	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	1	0	1
c	0	1	1	0	1	0
d	0	0	0	0	1	1
e	0	0	0	1	0	0

Archi adiacenti e cammini

Due archi che hanno un nodo in comune sono detti *adiacenti*. Nell'esempio (a,b) e (a,c) sono adiacenti.

Dato un grafo $G=(V,A)$, una sequenza di $m+1$ nodi

$$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow s_m$$

tali che per ogni $i=1,\ldots,m$ si ha:

$$(s_{i-1},s_i)\in A \quad \text{oppure} \quad (s_i,s_{i-1})\in A$$

(l'alternativa é superflua nel caso non orientato) é detto *cammino* nel grafo. Possiamo vedere anche un cammino di lunghezza m come una sequenza di archi a due a due adiacenti.

Continua

Il numero m di archi del cammino é detto *lunghezza del cammino*.

Un cammino é detto *semplice* se nessun arco é percorso piú di una volta, *elementare* se nessun nodo viene toccato piú di una volta.

Esempi di cammini

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow c$$

cammino elementare di lunghezza 3;

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b \longrightarrow e$$

cammino semplice ma non elementare di lunghezza 5

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b \longrightarrow a \longrightarrow c$$

cammino che non é né semplice né elementare di lunghezza 6.

Cicli

Un cammino semplice

$$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow s_m$$

in cui primo e ultimo nodo coincidono (cioé $s_m = s_0$) viene detto *ciclo* di lunghezza m. Se omettendo l'ultimo nodo s_m si ottiene un cammino elementare, si parla di *ciclo elementare*.

Nell'esempio

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$$

é un ciclo elementare di lunghezza 3.

Cammini e cicli orientati

In un grafo orientato un cammino o un ciclo

$$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow s_m$$

($s_m = s_0$ nel caso di un ciclo) in cui tutti gli archi sono percorsi secondo il loro orientamento, ovvero si ha che per ogni $i = 1, \ldots, m$:

$$(s_{i-1}, s_i) \in A$$

viene detto *orientato*, altrimenti si dice *non orientato*.

Nell’esempio

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c$$

cammino orientato

$$b \longrightarrow a \longrightarrow c$$

cammino non orientato

Nell'esempio

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$$

ciclo non orientato

$$b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$$

ciclo orientato.

Componenti connesse

Dati due nodi i e j di un grafo G, se esiste un cammino da i a j allora si dice che j é *accessibile* da i.

Relazione tra i nodi "é accessibile da" $\longrightarrow$ relazione di equivalenza (soddisfa le tre proprietá riflessiva, simmetrica e transitiva).

Classi di equivalenza $\longrightarrow$ *componenti connesse* del grafo.

Un grafo é detto *connesso* se ha un'unica componente connessa (cioé se tutti i nodi sono accessibili tra loro)

Sottografi

Dato un grafo $G = (V, A)$ e un sottinsieme $A' \subseteq A$, un grafo $G' = (V, A')$ é detto *grafo parziale* di G. Dati $V'' \subseteq V$ e

$$A'' \subseteq A(V'') = \{(i, j) \in A : \; i \in V'', \; j \in V''\}$$

il grafo $G'' = (V'', A'')$ viene detto *sottografo* di G. In particolare, se $A'' = A(V'')$ il sottografo viene detto *sottografo indotto* da V''.

Nell'esempio

$G' = (V, A')$ con

$$A' = \{(a,b);\ (b,c);\ (b,e);\ (c,d);\ (d,b)\}$$

grafo parziale di G

$G'' = (V'', A'')$ con $V'' = \{a, b, d\}$ e

$$A'' = \{(a,b)\}$$

sottografo di G

$G'' = (V'', A'')$ con $V'' = \{a, b, d\}$ e

$$A'' = \{(a,b);\ (d,b)\}$$

sottografo di G indotto da V''.

Grafi bipartiti

Un grafo $G = (V, A)$ si dice *bipartito* se l'insieme V puó essere partizionato in due sottinsieme V_1 e V_2 (quindi $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) tali che

$$\forall\ (i, j) \in A : \quad i \in V_1,\ j \in V_2 \text{ oppure } i \in V_2,\ j \in V_1.$$

Osservazione 1 *Un grafo é bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.*

Alberi

Sia dato un grafo $G = (V, A)$ con $card(V) = n$ dove $card(V)$ denota la cardinalitá (il numero di elementi) dell'insieme V. Si dice che G é un *albero* se soddisfa le seguenti condizioni (equivalenti tra loro)

1. G é privo di cicli e connesso;
2. G é privo di cicli e $card(A) = n - 1$;
3. G é connesso e $card(A) = n - 1$;
4. esiste un unico cammino elementare che congiunge ogni coppia di nodi.

Alberi di supporto

Sia dato un grafo generico $G = (V, A)$. Si definisce *albero di supporto* o *spanning tree* di G un grafo parziale $T = (V, A_T)$ di G (quindi con $A_T \subseteq A$) che é un albero.

Si noti che un albero di supporto di G deve contenere tutti i nodi di G e si dovrá avere $card(A_T) = card(V) - 1$.