

## תורת הגרפים – תרגיל בית 2

### חלק תאורטי:

#### תרגיל 1:

נתון גרף  $G(V, E)$ . נסמן את המרחק המקסימאלי של שני צמתים ב- $G$  ע"י  $D(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V\}$  (קוטר הגרף). בנוסף, נסמן את האורך המינימאלי של מעגל המוכל ב- $G$  ע"י  $C(G)$ . הוכיחו שעבור כל גרף  $G$ , אשר מכיל מעגל, מתקיים:  $C(G) \leq 2D(G) + 1$ .

#### תרגיל 2:

נתון גרף  $G(V, E)$ . הוכיחו שאם  $\delta(G) \geq \frac{|V|-1}{2}$  אזי  $d(u, v) \leq 2 \forall u, v \in V$ .

#### תרגיל 3:

באוניברסיטת "תכניה" שבצפון מקסיקו במחלקה לגרפים ישנה כיתה בה הסטודנטים נוהגים להשליך מחקים אחד על השני. לכל סטודנט קיימת קבוצה של סטודנטים אחרים אליהם הוא משליך מחקים (משאר הסטודנטים הוא מפחד, ולא רוצה להסתבך איתם), בתנאי שהשורה בה יושב הסטודנט המשליך רחוקה יותר מהלוח מאשר השורה בה יושבת מטרתו. המתרגל האומלל יודע כי סידור שקט של הסטודנטים בכיתה הוא הושבה של הסטודנטים באופן כזה בו אף מחק לא יושלך במהלך השיעור. בהינתן הבעיה הנ"ל, וידוע כי בכל שורה ישנם  $k$  כסאות, המתרגל ירצה לדעת האם קיים סידור שקט של הסטודנטים בכיתה. הציעו אלגוריתם אשר עונה "כן" אם ניתן למצוא סידור שקט של הכיתה.

#### תרגיל 4:

הוכח את הלמה:

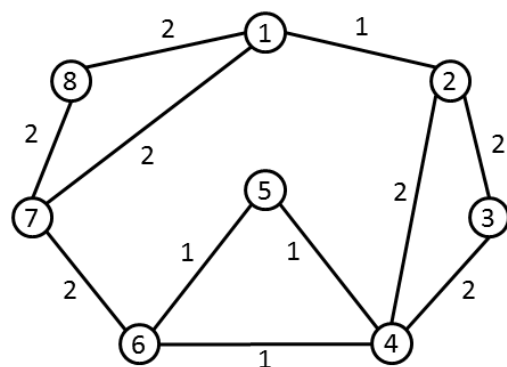
יהי  $P: u \rightarrow v^*$  מסלול מקסימלי בגרף  $G$ , אזי  $N_G(v) \subseteq P$ . בנוסף אם  $G$  חסר מעגלים אזי  $d_G(v) = 1$ .

#### תרגיל 5:

נתונים שני יערות  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$ . הוכיחו כי אם  $|E_1| < |E_2|$  אזי קיימת קשת  $e \in E_2 \setminus E_1$  כך שהגרף  $G' = (V, E_1 \cup \{e\})$  עדיין יער.

#### תרגיל 6: (ממבחן שנה שעברה)

1. (5 נקודות) מהו משקל עץ פורש מינימום (עפ"מ) בגרף הבא:



2. (20 נקודות) בהנתן גרף קשיר  $G = (V, E)$  ופונקציה משקל על הקשתות  $w: E \rightarrow \{1, 2\}$  (ז"א, משקל כל קשת הוא 1 או 2), נסמן ב- $G_1 = (V, E_1)$  את תת הגרף המוגדר ע"י קבוצת הקשתות  $E_1 = \{e \in E \mid w(e) = 1\}$ . נסמן ב- $c_1$  את מספר רכיבי הקשירות ב- $G_1$  ונסמן ב- $MST(G)$  את משקל העץ של  $G$ .

3. (5 נקודות) כמה קשתות במשקל 2 מחברות את רכיבי הקשירות של  $G_1$  בעץ של  $G$ ?

4. (15 נקודות) הוכיחו:  $MST(G) = c_1 + n - 2$ .

### חלק מעשי:

בשאלה זו נלמד להכיר תהליך אקראי ליצירת גרף (*random graph generation process*) המקיים תכונה  $T$  מסוימת.

שימו לב: בכל הסעיפים שבהם אתם נדרשים להוכיח את טענתכם, ההוכחה צריכה להיות קצרה (אין כאן שאלות הוכחה מסובכות). בשאלות בהן אתם נדרשים לנמק/להסביר עליכם לספק תשובה ברורה, מנומקת, ומנוסחת היטב (גם כאן -- אין צורך בתשובות ארוכות במיוחד).

בהנתן תכונה  $T$  כלשהי (דוגמאות בהמשך), ומספר צמתים  $n$ , האלגוריתם ליצירת גרף אקראי המקיים את תכונה  $T$  מוגדר ע"י:

---

$RGP(n, T)$

---

```

(1) init:  $V = \{1, \dots, n\}, E = \emptyset, time = 0$ 
(2) while (not  $T$ ) do
(3)   if  $E \neq \binom{V}{2}$  then do
(4)     pick a random edge  $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ 
(5)      $E \leftarrow E \cup \{e\}$ 
(6)      $time \leftarrow time + 1$ 
(7)   end if
(8) end while
(9) return  $G = (V, E)$  and  $time$ 

```

---

שימו לב כי הזמן המוחזר כפלט הוא בעצם מספר הקשתות בגרף בשלב המוקדם ביותר בו הוא מקיים את תכונה  $T$ , שכן בכל יחידת זמן מוסיפים קשת אחת, ומסיימים כאשר התכונה מתקיימת. בשאלה זו נתמקד בשלוש תכונות:

$T1$ : לכל צומת בגרף דרגה לפחות 1,

$T2$ : הגרף קשיר,

$T3$ : הגרף מכיל מעגל,

ובפרט, נתעניין בזמן הממוצע (עבור כל ערך  $n$ ) שבו התכונה מתקיימת עבור גרף הנוצר בתהליך האקראי לעיל.

1. תנו דוגמא מהחיים/רשתות שבה חסם על  $T2$  יכול להיות שימושי. הסבירו מדוע חסם כזה שימושי בדוגמא.

2. תנו דוגמא לשתי תכונות של גרף שעבורן יתכן והאלגוריתם לעיל לא יסתיים (ז"א, האלגוריתם "יתקע" לנצח בלולאה ה-*while*). הוכיחו את תשובתכם. האם יש מאפיין משותף לתכונות שבחרתם שבגללו למעשה יתכן והאלגוריתם לא יסיים את ריצתו?

3. בהנתן תהליך אקראי אחד ליצירת גרפים, איזו מן התכונות  $T1$  ו- $T2$  צפויה להתקיים מוקדם יותר בגרף שנוצר? הוכיחו את תשובתכם.

4. בהתאם לתשובתכם לשאלה (3), מה להערכתכם יהיה ההבדל בין הזמן שבו תתקיים תכונה  $T1$  לבין הזמן שבו תתקיים תכונה  $T2$  (יש לענות על שאלה זו לפני ביצוע המשך התרגיל!!). הסבירו מדוע.
5. מצאו חסם תחתון על הזמן הדרוש לקיום תכונה  $T1$ . הוכיחו את תשובתכם.
6. ממשו את אלגוריתם  $RGP(n, T)$  עבור כ"א מן התכונות  $T1$  ו- $T2$  לעיל.
7. בצעו סימולציה של האלגוריתם עבור ערכי  $n$  בתחום  $\{5, 10, 15, \dots, 100\}$ , כאשר עבור כל ערך  $n$  כזה אתם מבצעים  $K = 30$  איטרציות.
8. הציגו על גבי מערכת צירים אחת, שציר ה- $X$  שלה הוא  $n$  (מספר הצמתים), 3 גרפים:
  - a. ממוצע הזמן לקיום  $T1$  ב- $K$  האיטרציות שביצעתם עבור כל  $n$
  - b. ממוצע הזמן לקיום  $T2$  ב- $K$  האיטרציות שביצעתם עבור כל  $n$
  - c. הגרף  $y(x) = \frac{1}{2} x \log x$
9. הסבירו את התוצאות המוצגות ע"י הגרפים הנ"ל. בפרט, עליכם להתייחס לנקודות הבאות:
  - a. מהם ההבדלים בין הזמן הדרוש (בממוצע) לקיום תכונה  $T1$  לבין הזמן הדרוש (בממוצע) לקיום תכונה  $T2$ ?
  - b. מדוע ההבדלים הם כאלה?
  - c. איך התוצאות הללו מתיישבות עם תשובתכם לשאלה (4) לעיל?
  - d. מהי הדרגה הממוצעת (בסדר גודל) בגרף הנוצר המקיים את תכונה  $T1$ ? מהי הדרגה הממוצעת (בסדר גודל) בגרף הנוצר המקיים את תכונה  $T2$ ? נמקו את תשובתכם!
10. תנו חסם עליון על הזמן הדרוש לקיום תכונה  $T3$  כפונקציה של הזמן הדרוש לקיום תכונה  $T2$ . הוכיחו את תשובתכם.
11. בממוצע, איזו תכונה אתם מצפים שתתקיים מוקדם יותר:  $T2$  או  $T3$ ? נמקו את תשובתכם!