

תרגיל בית 2- חלק מעשי

1. דוגמא מהחיים: אם נרצה לבנות רשת של כבישים במחברת בין כמה יישובים, כך שכל יישוב יחובר לכולם (לאו דווקא באופן ישיר, ובהנחה שנוכל לבנות כבישים ישרים), נרצה לדעת מה האורך המינימלי של הכבישים שנהיה חייבים לבנות. וזאת נוכל לדעת בעזרת החסם התחתון של בניית גרף קשיר.
2. דוגמאות לתכונות שעבורן ייתכן וריצת הגרף לא תסתיים:
 - עץ בעל יותר מ 3 צלעות- יכול להיווצר מצב שבו ה 3 צלעות הראשונות יהיו מעגל, וכך לעולם לא נגיע לעץ בהמשך הריצה.
 - גרף K רגולרי- יכול להיווצר מצב שהוספנו יותר מ K צלעות לקודקוד כלשהו, וכך הגרף כבר לא יכול להיות K רגולרי.
- מאפיין משותף ל2 התכונות הללו הוא כי קיימת נקודת "אל חזור", כלומר גרף מלא (מקסימלי) אינו מקיים את התכונה, ולכן יש רגע מסוים בריצת האלגוריתם, שאם תתווסף בו צלע למקום לא נכון, כבר לא נוכל "לחזור אחורה" ולהגיע לגרף עם התכונה הרצויה.
3. T2 גורר את T1 (בגרף קשיר הדרגה המינימלית של כל קדקד היא 1), אבל T1 לא בהכרח גורר את T2 (לדוגמא: זיווגים). ולכן תכונה T1 צפויה להתקיים מוקדם יותר.
4. ההבדל הוא החסם התחתון. ל2 התכונות חסם עליון זהה- גרף מלא. החסם התחתון של תכונה T1 הוא גרף זיווגים, ואילו ב T2 החסם התחתון הוא עץ פורש. לכן להערכתנו, תכונה T1 תתקיים לפני תכונה T2.
5. חסם תחתון על T1: $n/2$ (מעוגל כלפי מעלה). בין כל 2 צמתים יש צלע אחת בלבד, ולכן יש $n/2$ צלעות.
חסם תחתון על T2: $n-1$. זוהי כמות הצלעות בעץ פורש.
9. a. בממוצע אין הבדל (או הבדל מינורי) בין הזמן הדרוש לקיום תכונה T1 וקיום תכונה T2.
b. הבדלים אלו נובעים מהעובדה שההסתברות שנקבל את מקרה הקצה, כלומר, שנקבל את החסם התחתון, היא מאוד קטנה. ולכן למרות שהחסם התחתון הוא שונה בשתי התכונות, ההסתברות לקבל גרף זה (זיווגים או עץ פורש) קטנה מאוד בגלל שאנו מריצים 30 איטרציות עבור כל ערך n שונה.
c. תוצאות אילו אינן מתיישבות עם תשובתנו לשאלה 4. בשאלה 4 לא הבענו התייחסות לכך שההסתברות לקבל גרף עם החסם התחתון היא קטנה.
d. זמן הריצה הוא בעצם כמות הצלעות הקיימות בגרף ומכאן שב2 הגרפים הנוצרים המקיימים את תכונות T1 ו T2, הדרגה הממוצעת היא 1-3. ניתן לראות בעלייה בדרגה הממוצעת ככל שנעלה במספר הקדקדים.
10. באופן כללי חסם עליון לקיום תכונה T3 הוא n. נוכל להציג את חסם זה כפונקציה של החבם התחתון של T2. החסם התחתון של T2 הוא $n-1$ ולכן חסם זה שווה לחסם התחתון של T2 פלוס 1.
הוכחה: ניצור את הגרף המקסימלי ללא מעגלים, כלומר ליצור עץ פורש. בעץ פורש קיימות $n-1$ צלעות. זהו גרף קשיר בהכרח (אם הוא לא היה קשיר אז הוא לא המקסימלי, שכן ניתן להוסיף צלע המחברת בין רכיבי הקשירות שלא סוגרת מעגל). בשלב הבא כל צלע שנוסיף תסגור מעגל, ללא תלות בקדקדים אליהם נחבר, כלומר לכל 2 קדקדים.
11. אנחנו מצפים שתכונה 3 תקרה בממוצע לפני תכונה 2. לתכונה 3 יש חסם עליון קרוב מאוד לחסם התחתון של תכונה 2. וכן כפי בשראינו ההסתברות לקבל גרף המקיים את החסם התחתון של תכונה 2 הוא קטן מאוד. ומכאן שבממוצע תכונה 3 תתקיים לפני תכונה 2.