תורת הגרפים – תרגיל בית 2

מגישה:
חנה אקסל 306569872

חלק מעשי:

1. חסם על זמן הבנייה של גרף קשיר, חשובה מאוד בפרוטוקולי ניתוב (כדוגמת RIP ו-OSPF) ופרוטוקולי multicast (כדוגמת BGP).
חסם על זמן בניית העץ ניתוב המלא של הרשת, בפרוטוקולים האלה, חייב להיות סביר ולהתכנס כמה שיותר מהר.
לדומה, עבור רשתות גדולות בעלות שינויי תצורה תדירים, חשוב לנו פרוטוקול בעל זמן התכנסות מהיר למציאת גרף קשיר של הרשת. שכן, אם לא, נמצא את רשת תמיד עסוקה בבניית הגרף הקשיר וחבילות לא יגיעו ליעדן.
לעומת זאת, ברשתות קטנות וקבועות, ניתן להשתמש בפרוטוקול בעל זמן התכנסות ארוך יותר עבור הגרף הקשיר של הרשת. שכן, אין הרבה שינויים והרשת קטנה, אז גם הזמן התכנסות יהיה בהתאם.

2. תכונה מס' 1: לכל צומת בגרף הדרגה הינה בדיוק 1.
הוכחה: בהינתן גרף בעל כמות קדקודים (n) אי זוגית, במקרה כזה תכונה זו לא תתקיים אף פעם.
על מנת שהתכונה תתקיים, צריך להגיע לזיווג מלא. בגרף בעל כמות אי זוגית של קדקודים, לא ניתן להגיע למצב שכזה.
במקרה והגרף בעל כמות זוגית של קדקודים, גם אלול האלגוריתם לא להסתיים לעולם.
במקרה שבמהלך האלגוריתם נבחרות שתי צלעות בעלות קדקוד (משותף לפני שתכונה T התקיימה), במקרה זה האלגוריתם לא יסתיים.

תכונה מס' 2: הגרף מכיל בדיוק 10 רכיבי קשירות.
הוכחה: במקרה ומספר הקדקודים (n) קטן מ-10, לא ניתן יהיה להגיע כלל לתכונה זו.
במקרה וכמות הקדקודים גדולה מ-10, עדיין יתכן והאלגוריתם לא יסתיים לעולם משום שבחירת הקשות אקראית ויתכן שכמות רכיבי הקשירות תישאר תמיד קטנה מ-10.

קיים מאפיין משותף לשתי התכונות שבחרתי, והוא הדרישה ל"בדיוק".

3. תכונה T1, צפויה לקיים מוקדם יותר מתכונה T2.
הוכחה: נוכיח בשלילה. נניח שתכונה T2 התקיימה לפני תכונה T1.כלומר, גרף G קשיר (מתקיים T2) וגם לא מתקיים T1. מכאן, קיים לפחות קדקוד אחד בגרף G כך שדרגתו קטנה מ-1 (דרגה 0).
וזה בסתירה להנחה שתכונה T2 מתקיימת בגרף G.

4. ניקח כבסיס להשוואה את הזמן המינימאלי שלוקח לקיום של תכונה T1 ושל תכונה T2.
מינימום הזמן שיידרש לקיום תכונה T1:
עבור n זוגי: $\frac{n}{2}$
עבור n אי-זוגי: $\frac{n+1}{2}$
מינימום הזמן הדרוש לקיום תכונה T2: n-1
במקרה זה היחס בין הזמנים יהיה גדול מחצי.
בשאר המקרים יהיה היחס יהיה גדול מחצי וישאף לאחד.
תכונה T1 תמיד תתקיים לפני תכונה T2 (הוכח בשאלה 3).

5. חסם תחתון עבור קיום תכונה T1 הוא:

עבור n זוגי: $\frac{n}{2}$

עבור n אי-זוגי: $\frac{n+1}{2}$

הוכחה: נוכיח עבור המקרה הזוגי (עבור המקרה האי-זוגי ההוכחה זהה).

הנחות (הדברים הבאים מתקיימים)-

1. $time = \frac{n}{2}$ הזמן נימדד לפי כמות הצלעות <= $|\mathrm{E}| = \frac{n}{2}$.
2. תכונה T1 מתקיימת.
3. בגרף שהוא זיווג מלא, מתקיימות הנחות 1 ו-2.

נניח בשלילה שקיים $time' < time = \frac{n}{2}$ שהוא החסם התחתון <= $|\mathrm{E}'| < \frac{n}{2}$, ועדיין מתקיימת הנחה 2 (מתקיימת תכונה T1).

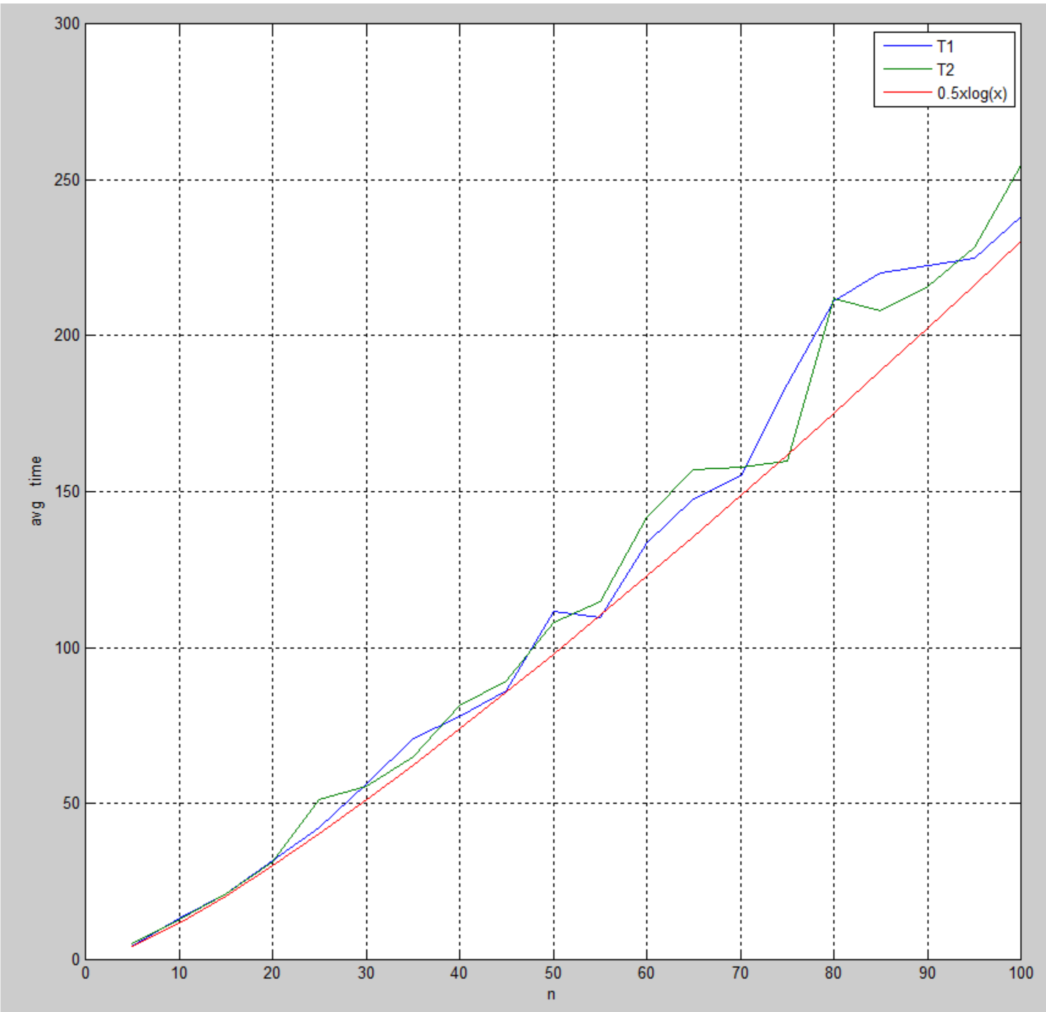
מלמה שנלמדה בכיתה, ידוע כי: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

במקרה של E': $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E'| < 2\frac{n}{2} = n$. קיבלנו כי סכום הדרגות של סה"כ הקדקודים קטן מ-n <= קיים לפחות קדקוד אחד שדרגתו קטנה ממש מ-1.

זה בסתירה לקיום הנחה 2.

6. ו-7. בקבצי הMATLAB המצורפים.

8.



9. ראינו שבממוצע, ההבדל בין הזמנים לקיום תכונות T1 ו-T2 הוא לא גדול. ניתן לראות שבשתי התכונות, ממוצע הזמן כתלות בn <= O(0.5Xlog(X)).
ההבדלים הם כאלה בגלל שהגרפים נוצרים בצורה אקראית וכנראה שההסתברות לקיום כל אחד מהתנאים היא דומא.
בשאלה 4 התייחסנו למופע אקראי בודד (לקחנו בתור מדד את המקרה המינימאלי). תכונות T1 ו-T2 התקיימו על אותה הבנייה של גרף זהה (בעצם התבצעה אותה בחירת צלעות באותו הסדר עבור שתי התכונות). במקרה זה, T1 היה חייב תמיד להתקיים לפני T2.
כעת, אנו מסתכלים על בניות אקראיות בלתי תלויות עבור כל אחת מהתכונות. בגלל הבנייה האקראית, יתכן והגרפים שניבנו עבור תכונה T1 לקחו יותר זמן מאשר הגרפים שניבנו עבור תכונה T2 (נדגיש שוב, שתכונות T1 ו-T2 לא נבדקו על בנייה זהה של אותו הגרף).
כשבניית הגרפים היא אקראית ובלתי תלויה, ההסתברות לשתי התכונות היא דומה, כלומר היחס בין הזמנים (בממוצע) בין שתי התכונות ישאף ל-1.
אנו רואים שהתוצאות אכן מתיישבות עם התשובה לשאלה 4.
דרגה ממוצעת:

$$d(v)_{avg} = \frac{\sum_{v\in V} d(v)}{n} = \frac{2|E|}{n} = \{|E| \sim avg\ time\} = \frac{2 * 0.5n * \log(n)}{n} = \log(n)$$

על פי הגרף, ניתן לראות שחישוב זה תקף עבור שתי התכונות.

10. החסם העליון לקיום תכונה T3 הוא הזמן המינימאלי לקיום תכונה T2 (ותכונה T3 עדיין לא מתקיימת) פלוס 1, בעצם הזמן עד לבניית עץ פורש + 1, שווה ל- n.
אנחנו מוצאים חסם מקסימאלי על T3 על ידי חסם מינימאלי על T2.
חסם מינימאלי על T2: (*)עבור גרף בעל n קדקודים וקשיר, החסם המינימאלי הוא n-1 צלעות <= עץ פורש.
נוכיח באינדוקציה:
המקרה המינימאלי עבור n=3. כמות הצלעות בעץ פורש היא 2 <= כמות הצלעות המעגל היא 3.
נניח נכונות עבור n.
נוכיח עבור n+1: נוריד קדקוד מהגרף ונישאר עם n קדקודים.
הקדקוד שהורדנו: 1) היה חלק מהמעגל או 2) לא היה חלק מהמעגל.
הגרף שנותרנו איתו הוא בעל n קדקודים ומקיים את התכונה לעיל (*) .
אם הקדקוד שהורדנו היה חלק מהמעגל, הורדנו לפחות שתי צלעות (K>=2), כלומר אם נחזיר את הקדקוד החסם יהיה n-1+k>=n.
אם הקדקוד שהורדנו לא היה חלק מהמעגל אז K=1 <= החסם יהיה n-1+k=n.

11. תכונה T3 תתקיים בממוצע מוקדם יותר מT2.
המקרה היחיד שבוא T2 תתקיים לפני T3 הוא בעץ פורש בעל n-1 צלעות.
בכל שאר המיקרים, בטוח T3 תתקיים לפני T2.
הזמן המינימאלי לקיום תכונה T2 הוא n-1 והזמן המינימאלי לקיום תכונה T3 הוא 3.