

תרגיל מחשב 3 – אינטרפולציה ואינטגרציה

מגישים: רוו מילוטין 316389584

מיכאל לייב 319095832

שאלה 1 – שחזור מדידות באמצעות אינטרפולציית לגרנז'

נתונה לנו פונקציית הפוטנציאל :

$$\phi(\theta) = \frac{q^+}{4\pi r^+(\theta)} + \frac{q^-}{4\pi r^-(\theta)}$$
$$r^\pm(\theta) = \sqrt{[r \cos(\theta)]^2 + [r \sin(\theta) \mp \delta/2]^2}$$

לפי הנתונים בשאלה, נציב את תעודות הזהות של שנינו:

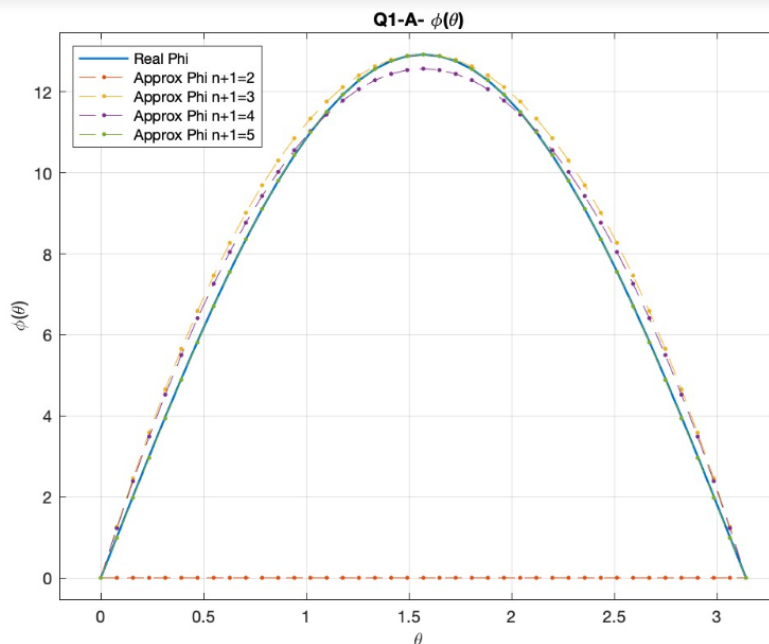
$$q^+ = [1\ 9\ 0\ 9\ 5\ 8\ 3\ 2\ 1\ 6\ 3\ 8\ 9\ 5\ 8\ 4] = 81$$

$$q^- = (-1) * [3\ 1\ 9\ 0\ 9\ 5\ 8\ 3\ 3\ 1\ 6\ 3\ 8\ 9\ 5\ 8] = -81$$

נדגום את הפונקציה $\Phi(\theta)$ ב $n+1$ נקודות על הקטע $[0, \pi]$ לאורך הקשת ונחשב את איטרפולציית לגראנז' עבור נקודות דגימה שרירותיות בקטע $[0, \pi]$ ונקודות שחזור באותו הקטע.

סעיף א'

נניח θ_j במרווחים קבועים ו $r=5\text{cm}$. בחשב את הפונציאל המקורב ב 41 נקודות במרווחים קבועים. נעשה זאת עבור המקרים $n+1=2,3,4,5$. נציג על גבי אותו תרשים את הערכים המקורבים המתקבלים עבור סדרי האינטרפולציה השונים ואת הערכים המדויקים כפונקציה של θ . כאמור עבור תעודות הזהות שלנו קיבלנו את התרשים הבא :



בתרשים, חישבנו את האינטרפולציה באמצעות קוד מטלאב שהתבסס על מה שלמדנו :

• אינטרפולציה בעזרת פולינומי לגרנז'

בהינתן סדרה של $N + 1$ נקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$ הנקראות צמתים ו- $N + 1$ נקודות מתאימות (הערכים האמתיים של $y = f(x_i)_{i=0}^N$) אזי פולינום האינטרפולציה לפי צורת לגרנז' ינתן ע"י:

$$L_N(x) = \sum_{i=0}^N y_i l_i(x) \quad , \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

כש- $L_N(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה (הקירוב ל- $f(x)$) ו- $l_i(x)$ הם פולינומי לגרנז'.

לפי האלגוריתם עבור פולינומי לגרנז' ממעלה מסויימת, נשאף לקחת כמה שיותר נקודות דגימה על מנת למצוא שחזור כמה שיותר מדויק לפונקציה. מהתרשים קיבלנו כצפוי, שכל שהיו יותר נקודות דגימה קיבלנו גרף מקורב יותר לגרף האמיתי. נשים לב שכאשר $n+1=2$ נקבל שגיאה יחסית גדולה מאד ביחס לשאר כי נוצרת עקומה לינארית ממעלה 1.

סעיף ב'

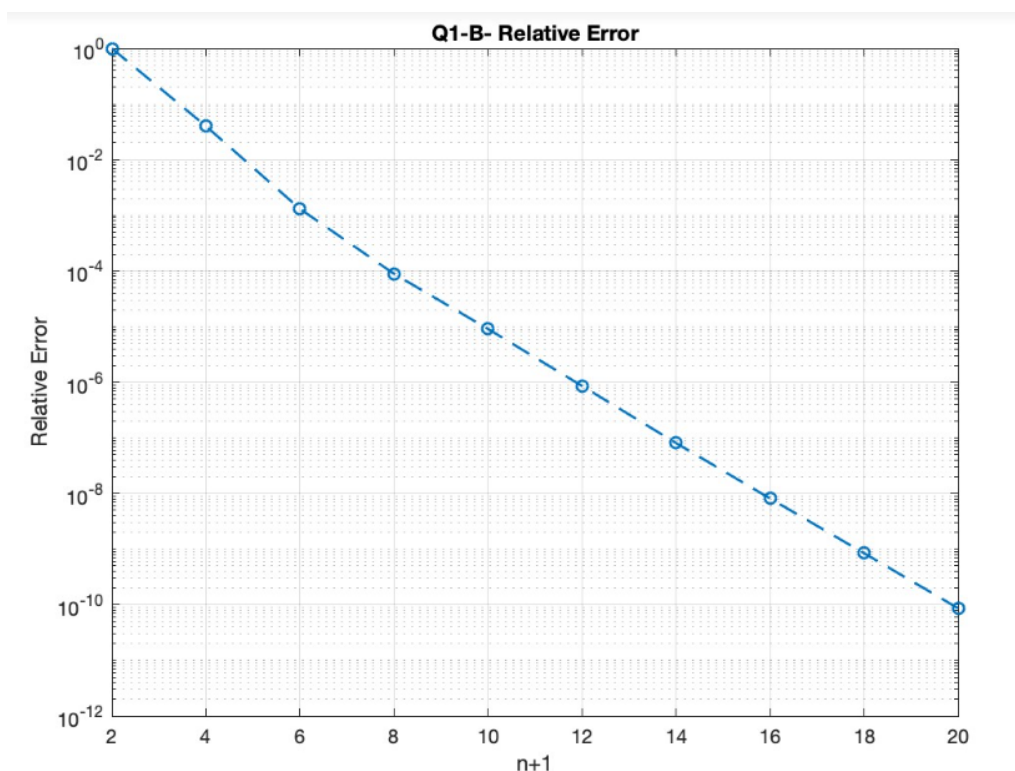
השגיאה היחסית :

$$\varepsilon(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^n [\bar{\phi}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^n [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

הסבר של המשוואה: זהו סכום של ההפרשים בין הערכים המקורבים לערכים המדויקים בריבוע לחלק לסכום הערכים המדויקים בריבוע, ועל כל הביטוי עשינו שורש.

נדפיס את השגיאה היחסית המתקבלת כפונקציה של סדר הפולינום עבור $n+1=[2,4,6...20]$.

קיבלנו את הגרף הבא :

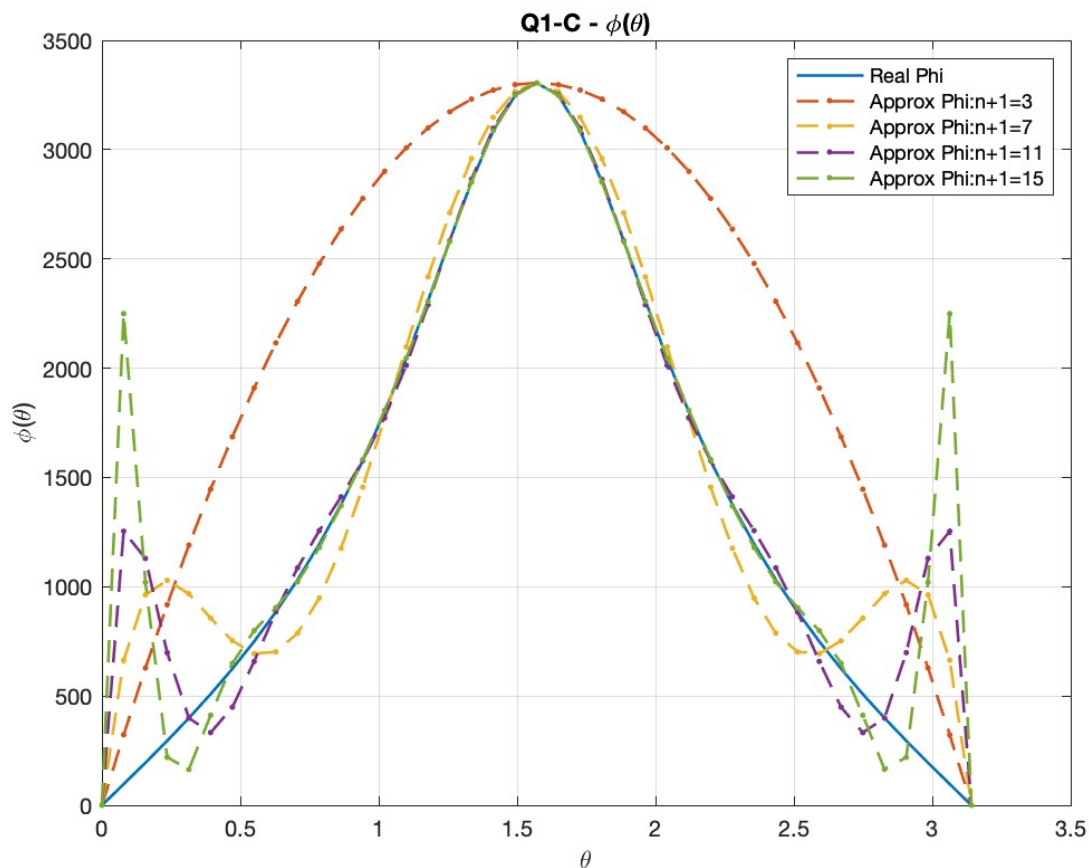


כמו שציפינו ממה שלמדנו בכיתה, מכך שהגרף מונוטוני יורד, ככל שסדר הפולינום גדול יותר השגיאה היחסית קטנה. כלומר ככל שיהיו לנו יותר נקודות דגימה כך השגיאה היחסית תקטן. כאמור ככל שהשגיאה קטנה יותר, כך נקבל שחזור טוב יותר של הפונקציה המקורית. הדבר מסתדר טוב עם גרפי הפונקציות מסעיף א, שאמנם היו מסדרים שונים, אך המגמה שהבחנו בה זהה. בנוסף, נשים לב שחסם הנגזרות מסדר גבוה נמוך יחסית ולכן הפונקציה "מתונה" באופן יחסי. לכן, לא ראינו את התופעה של שגיאה יחסית שגדלה עבור מספר נקודות דגימה גדול מדי.

סעיף ג

כעת נשנה את הרדיוס ל $r=4\text{mm}$ ונבצע כמות מדידות עבור $n+1=[3,7,11,15]$ ונחזור על סעיף א' וסעיף ב'

נציג את גרף הקירובים שקיבלנו:

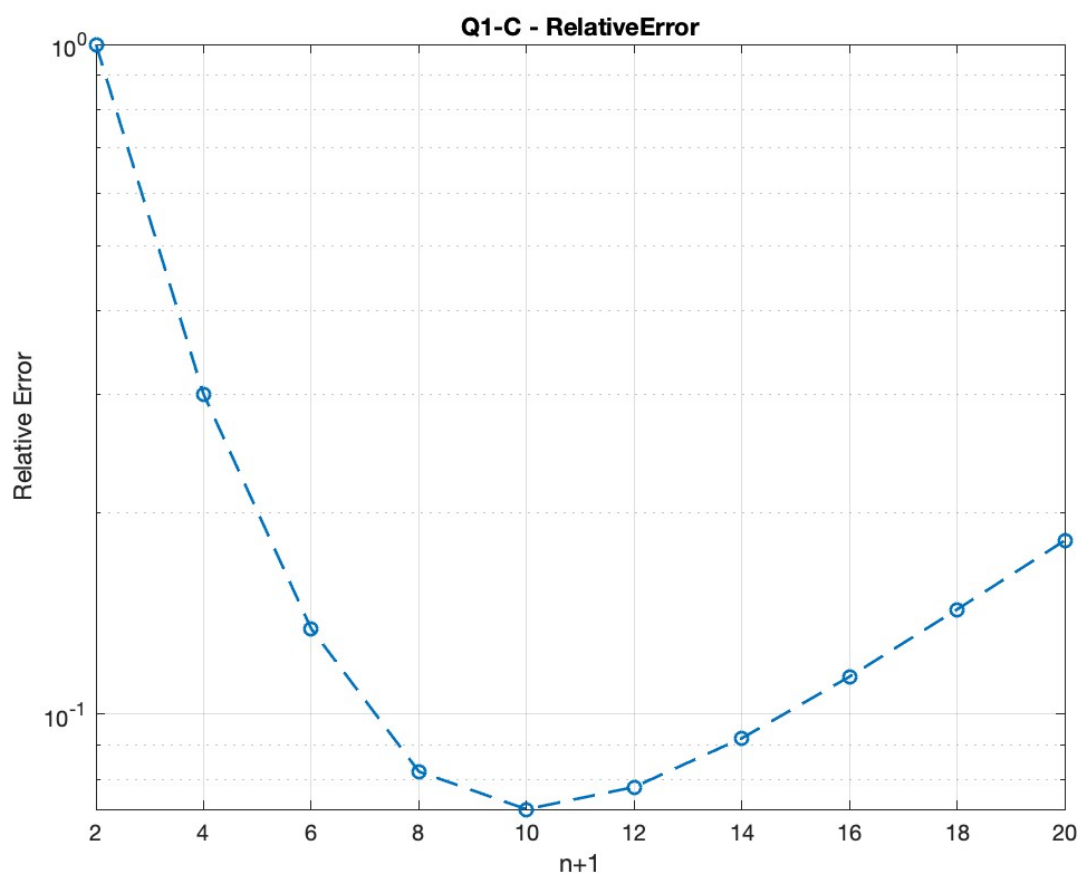


נשים לב כי המספר דגימות גבוה אנחנו מקבלים את תופעת רונגה, כלומר בקצוות השגיאה היחסית גדלה ככל שסדר הדגימה עולה, תופעה זו. נובעת מקרבת נק' המדידה למטענים.

למרות שהעלאת נק' מדידה נותנת קירוב טוב יותר אך בקצוות נקבל שגיאה יחסית גדולה יותר לכן העלאת סדר האינטרפולציה לא בהכרח מדייקת את הקירוב הפולינום לפונקציה המקורית.

נשים לב כי הקטנו את הרדיוס לכן נקבל שינוי פוטנציאל מהיר יותר אשר גורף לפונקציה להיות "תלולה" יותר אשר משפיע לנו על הנגזרות שהן יהיו גדולות יותר אשר יגדיל לנו את חסם השגיאה. ולכן עבור סדר מדידה גדול אך עדיין קטן יותר מהסדר בסעיף א' נקבל שגיאה גדולה יותר.

כעת נבדוק את גרף השגיאה היחסית שלנו ונקבל:



נקבל נק' מינימום עבור $n+1=10$ כלומר החל מסדר זה נתחיל לקבל את תופעת רונוה בצורה חזקה יותר כלומר נקבל שגיאה יחסית גדולה יותר בקצוות ובסופו של דבר נקבל קירוב פולינום פחות מדויק.

בסעיף א' קיבלנו גרף שגיאה מונוטוני מכיוון שחסם השגיאה שלנו היה קטן יותר לעומת סעיף זה, בגלל סדר הנגזרות ובנוסף לא מדדנו מסדר גבוה מספיק על מנת להגיע לעלייה בשגיאה היחסית כמו בסעיף זה. לכן נסיק כי השגיאה היחסית תלויה בכמות נק' המדידה ובחסם הנגזרת שנקבל.

כרקע לסעיף, ניזכר ראשית כיצד בוחרים נקודות לפי שיטת שורשי פולינום צ'בישב:

- בחירת נקודות לפי שורשי פולינום צ'בישב:

ממבנה השגיאה (נוסחת קושי) ניתן לראות כי היא תלויה בפולינום המוני $\prod_{i=0}^N (x - x_i)$ (פולינום אשר מקדם איבר החזקה ה- N הוא 1), כלומר תלוי בבחירת הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$. לכן ניתן למזער את החסם העליון על השגיאה ע"י בחירה חכמה של הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$.

בהרצאה הוכח כי אם נבחר את נקודות האינטרפולציה $\{x_i\}_{i=0}^N$ בתור שורשי פולינום צ'בישב מסדר $N+1$ אזי T_{N+1} ניתן לחסום את השגיאה ע"י

$$|\epsilon_N(x)| \leq \frac{1}{2^N(N+1)!} \sup_{|x| \leq 1} |f^{(N+1)}(x)|$$

$$\left| \max_{|x| \leq 1} \prod_{i=0}^N (x - x_i) \right| = \frac{1}{2^N}$$

פולינום צ'בישב ממעלה N מוגדר באופן הבא:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_N(x) = 2xT_{N-1}(x) - T_{N-2}(x), x \in [-1, 1]$$

הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$ שהן שורשי $T_{N+1}(x) = 0$ מקיימות:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right) \in [-1, 1]$$

אבל אם תחום ערכי x אינו $[-1, 1]$?

אזי עבור $x \in [a, b]$, נוכל לבצע העתקה לינארית של שורשי צ'בישב בתחום $x \in [-1, 1]$

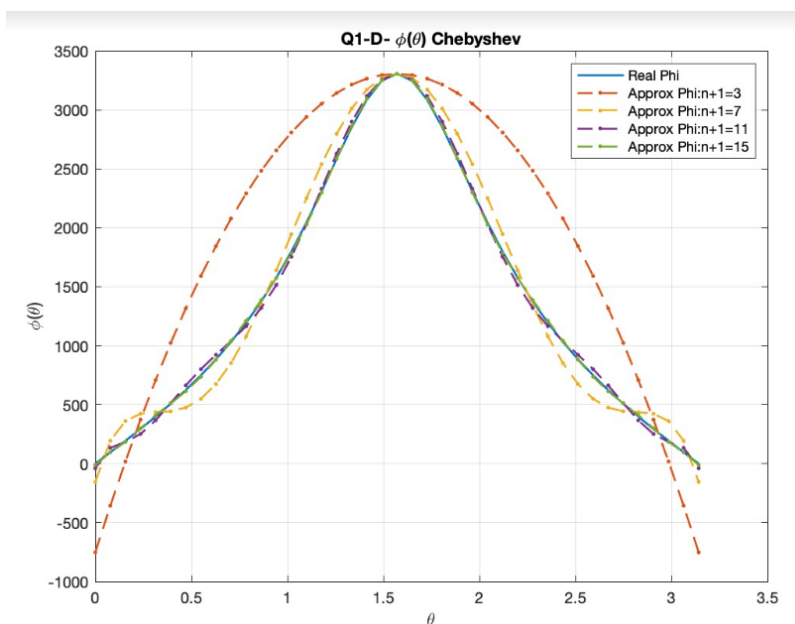
ל- $x^* \in [a, b]$ באופן הבא:

$$x^* = \frac{b+a}{2} + \frac{(b-a)}{2}x$$

ואלה יהיו המרווחים "החכמים" של בחירת נקודות בקטע $[a, b]$ שיביאו למזעור השגיאה המקסימלית בקטע

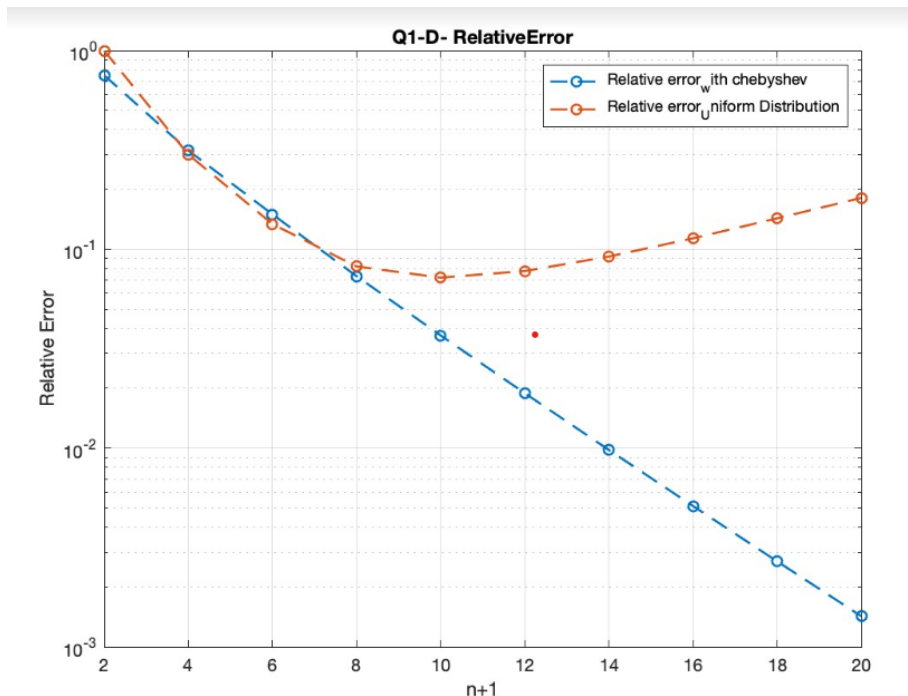
בסעיף זה החלפנו את נקודות המדידה θ_j בנקודות המתקבלות משורשי פולינום צ'בישב $\tilde{\theta}_j$ (נקודות אלו גם נדגמות בקטע $[0, \pi]$). נשים לב שבגלל שבמקרה שלנו תחום ערכי x אינו בתחום $[-1, 1]$, נצטרך לבצע העברה לתחום שלנו $[0, \pi]$ כמפורט למעלה.

קיבלנו את הגרף הבא:



כצפוי מהנלמד בכיתה, הקירוב בשיטת פולינומי צ'בישב משתפר ככל שדוגמים יותר נקודות דגימה. בנוסף, ניתן לראות כי השיטה "תיקנה" את תופעת הקצוות מהסעיף הקודם.

כעת נציג את גרף השגיאה היחסית:



נזכיר כי חסם השגיאה לפולינום לגראנז' כללי הוא מהצורה:

$$|\epsilon_N(x)| \leq \frac{\sup_{\xi} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \left| \prod_{i=0}^N (x - x_i) \right|, \min(x_0, x) \leq \xi \leq \max(x_N, x)$$

לעומת השגיאה בפולינום צ'בישב:

$$|\epsilon_N(x)| \leq \frac{1}{2^N(N+1)!} \sup_{|x| \leq 1} |f^{(N+1)}(x)|$$

לכן, נצפה שחסם השגיאה לפי צ'בישב יהיה הדוק יותר (בבחירת נקודות רגילה אין הגבלה על המכפלה הבאה:

$$\prod_{i=0}^N (x - x_i)$$

נשים לב שתוצאות גרף זה מאמתות את הגרף בתחילת העמוד. כעת, ניתן לראות בקלות יתרה, לפי מה שלמדנו בכיתה, כי המינימום של חסם השגיאה היחסית בתחום מסויים יתקבל ע"י בחירת נקודות דגימה שהן שורשי פולינום צ'בישב. בנוסף, כאמור לא התקבלה תופעת רונגה עבור בחירת נקודות של צ'בישב.

שאלה 2- שחזור מדידות באמצעות Least Squares

בשאלה זו נשחזר את הפוטנציאל באמצעות שיטת Least Squares. נניח כי הפוטנציאל על גבי הקשת ניתן לקירוב על ידי טור הפונקציות הבא:

$$\phi(\theta) \approx_{LS} (\theta) = \alpha f_1(\theta) + \beta f_2(\theta) + \gamma f_3(\theta) = \alpha + \beta \sin(\theta) + \gamma \cos(\theta)$$

נרצה למצוא את המקדמים α, β, γ שיובילו למזעור השגיאה הריבועית בחישוב הפוטנציאל.

בשיטות קודמות שחזרנו את הפונקציות דרך נק' מדידה אך בשיטת LS לא נדרוש תנאי זה אלא נרצה שהקירוב לנק' המדידה יהיה עם השגיאה הריבועית המזערית ככל שניתן ולא בהכרח יעבור דרך נק' המדידה.

סעיף א'

נסמן θ_j נק' המדידה ואת הערכים המדודים ב $\phi_j = \phi(\theta_j)$. נניח שהפוטנציאל נמדד $n+1$ נקודות, נבטא את הביטוי אנליטי הכללי למערכת משוואות של שיטת LS:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sin(\theta), \quad f_3 = \cos(\theta)$$

נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 \cdot 1 & \sum_{i=0}^n \sin(x_i) \cdot 1 & \sum_{i=0}^n \cos(x_i) \cdot 1 \\ \sum_{i=0}^n 1 \cdot \sin(x_i) & \sum_{i=0}^n \sin^2(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos(x_i) \cdot \sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^n 1 \cdot \cos(x_i) & \sum_{i=0}^n \sin(x_i) \cdot \cos(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot 1 \\ \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \cos(x_i) \end{pmatrix}$$

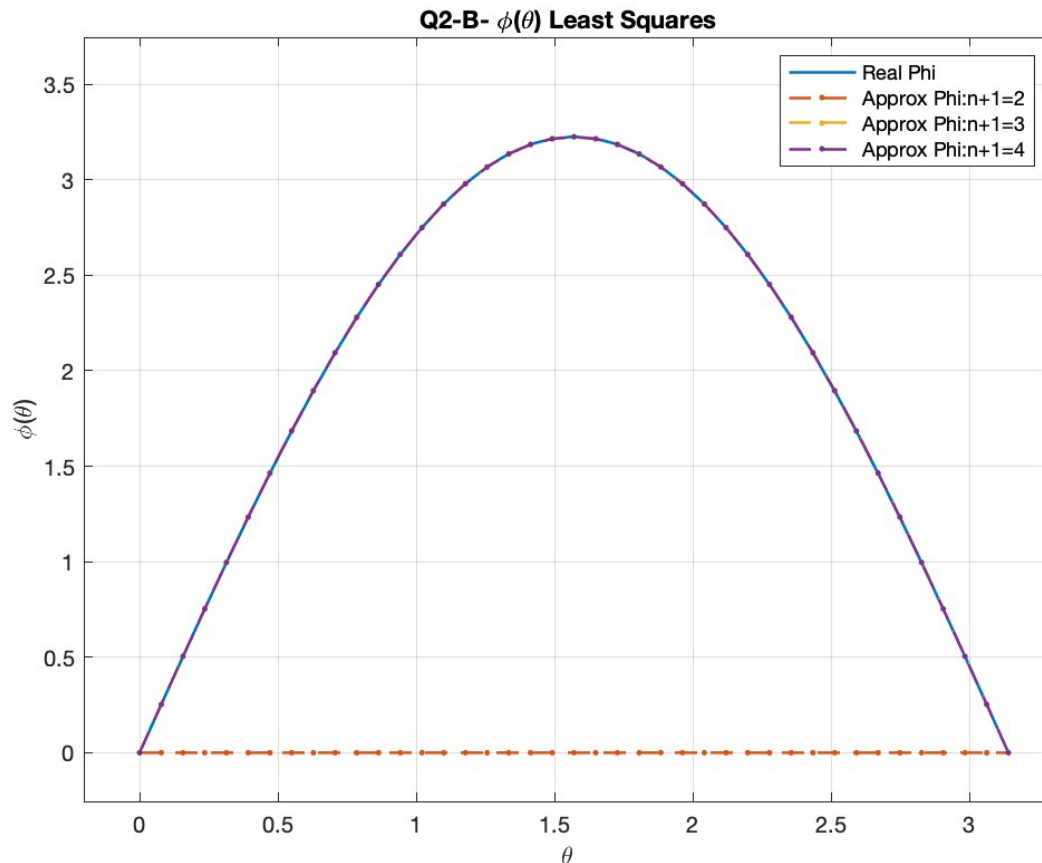
על מנת למצוא את המקדמים הרצויים נמצא את פונקציית השגיאה הריבועית ונגזור אותה ונשווה לאפס וכך נמצא את השגיאה הריבועית המזערית ביותר.

סעיף ב'

נניח כי נק' המדידה θ_j במרווחים קבועים והרדיוס הינו $r = 10cm$. נחשב את המקדמים α, β, γ באמצעות הביטוי מסעיף א' ובנוסף נחשב את ערכי $\phi_{LS}(\overline{\theta}_i)$ ב $\overline{n} + 1 = 41$ נקודות במרווחים קבועים בקטע $[0, \pi]$. נבצע את חישוב אלו עבור $n + 1 = 2, 3, 4$ ונציב את הערכים שקיבלנו הטבלה ובגרף הבאים:

$n + 1$	α	β	γ
2	0	0	0
3	$-3.580361742735669e-16$	3.224903162087188	$1.974683667505127e-16$
4	$-3.099472252543264e-16$	3.223642636948211	$2.220446049250313e-16$

כעת נציג את הקרובים בגרף:



מצאנו ביטוי אנליטי עבור מציאת המקדמים, אך על מנת למזער את השגיאה הריבועית לפי שיטת LS נדרוש שהמקדמים יקיימו את המשוואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$

כאשר A המטריצה שקיבלנו ול הוא וקטור התוצאה.

נשים לב כי עבור $n + 1 = 2$ קיבלנו ממ"ל של 2 משוואות ו-3 נעלמים לכן לא נוכל למצוא את המקדמים לשחזור הפוטנציאל ואכן נקבל את הפתרון הטריגונומי של פתרון באמצעות שיטת LS . זהו פתרון לא נכון מכיוון שראינו בשאלה 1 כי הפונקציה אינה זהותית אפס ובנוסף ניתן לראות כי פתרון זה לא קרוב לשאר הפתרון עבור מס מדידות שונה.

עבור $n + 1 = 3, 4$ נקבל מערכת עם מספר משוואות גדול ושווה למספר הנעלמים, ונצליח לשחזר את הפוטנציאל בקירוב מזערי ביותר מכיוון שמצאנו קירוב באמצעות פונקציות ידועות שבממוצע שיחזרו בדיוק רב את הפונקציה האמיתי כמו שראינו בהרצאה.

כמו בשאלה 1 גם כאן השתמשנו בנק' מדידה קבועות במרווחים קבועים וניתן להבחין כי בשיטת LS השחזור מתכנס מהר יותר משיטת אינטרפולציית לגרנז'. בשתי השיטות נדרש מינימום נק' דגימה כדי לקבל ערכי פונקציה מקורבים ובשתי השיטות נדרשו 3 נק' לפחות.

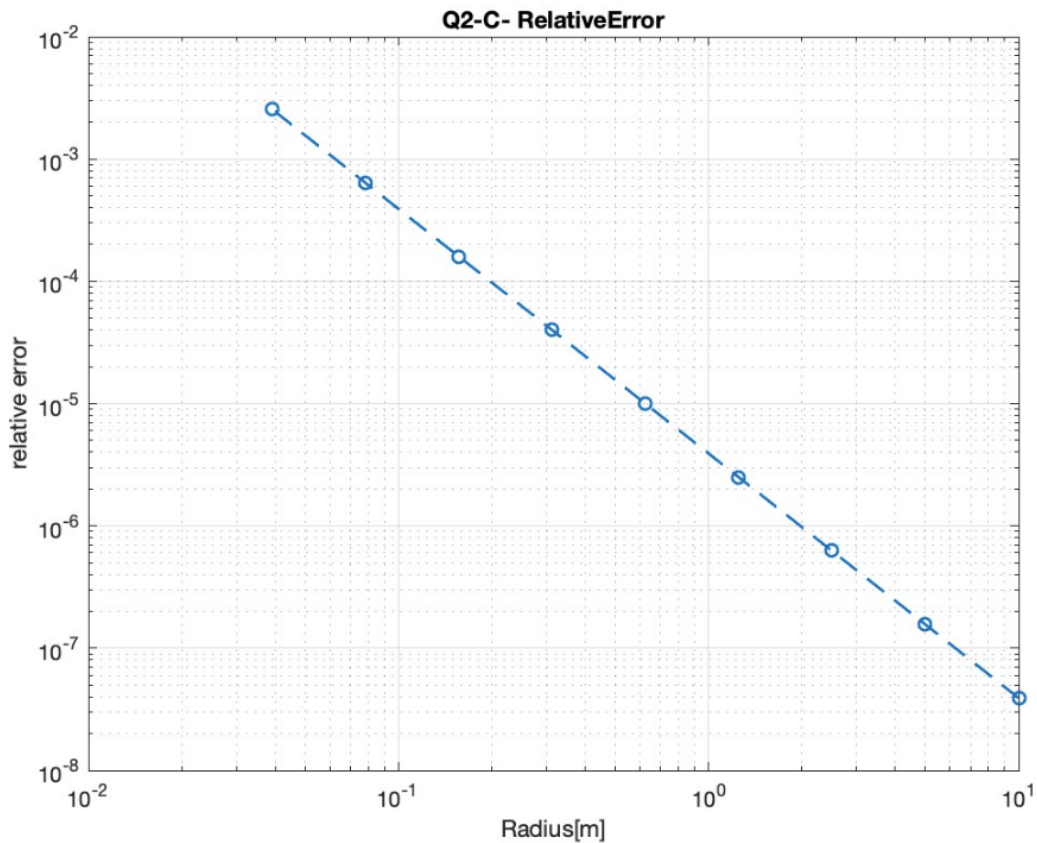
נשים לב כי המקדמים של $\cos(\theta)$ ושל הפונקציה הקבועה שואפים לאפס כלומר ניתן לשחזר את פונקציה הפוטנציאל ע"י פונקציות $\sin(\theta)$ ואכן ניתן לראות זאת בגרף שנקבל נק' קיצון ב $\theta = \frac{\pi}{2}$ בקירוב והפונקציה מתאפסת בנק' ב $\theta = 0, \pi$. ולכן באמצעות פונקציות סינוס נקבל התכנסות מהירה יותר מאשר פולינומים לפי לגרנז'.

סעיף ג'

בסעיף זה נניח $n + 1 = 4$. עבור ערכי r שונים נחשב את $\phi_{LS}(\bar{\theta}_i)$ וכמו כן נציג את השגיאה היחסית כפונקציה של הרדיוס :

$$\varepsilon_{LS}(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\bar{\phi}_{LS}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

נציג את החישובים:



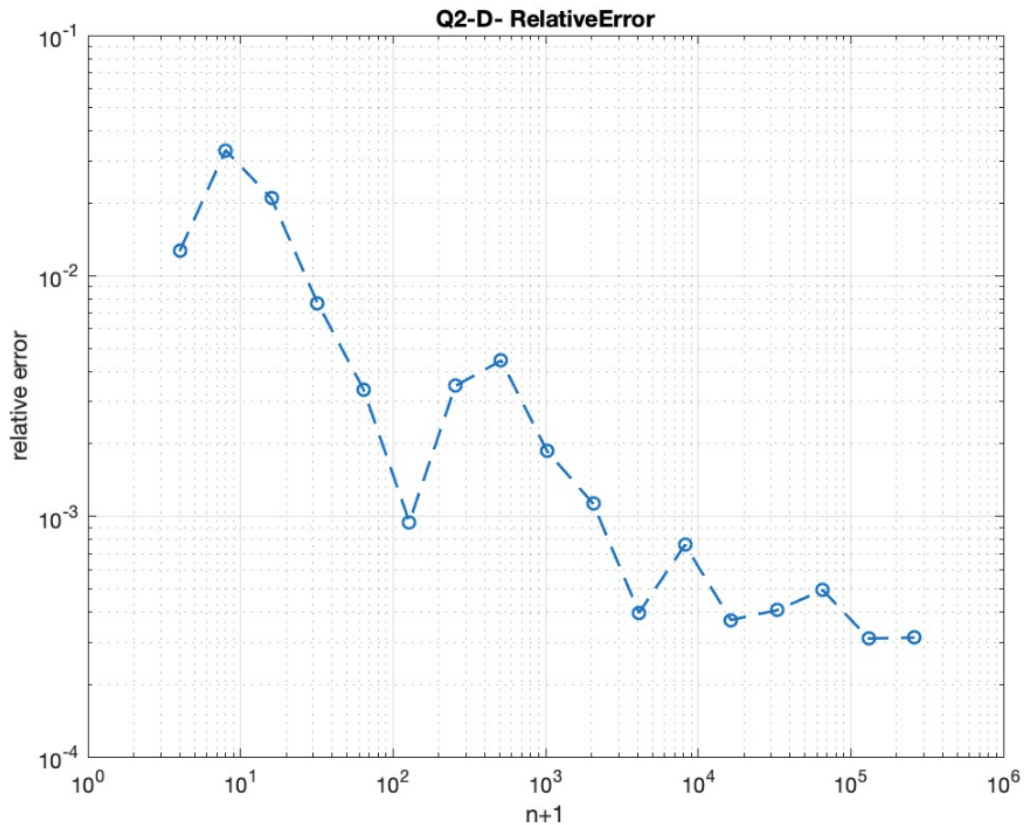
נסיק מהגרף שכלל שהרדיוס גדל כך השגיאה היחסית קטנה. למעשה, מרחק נקודות המדידה מהמקורות קריטית על מנת לחשב במדויק את פונקציית הפוטנציאל. ברדיוסים קטנים נסיק כי לא נוכל לשחזר במדויק את הפוטנציאל בגלל צירוף פונקציות הבסיס אותן בחרנו. נוכל להסביר זאת בכך שבצירוף פונקציות אלו ורדיוסים קטנים מדי מקדם הקוסינוס מתאפס וגם המקדם שלך הפונקציה הקבועה 1 מתאפס ולכן, פונקציית הקוסינוס ופונקציית ה 1 ניתנת לשחזור בקירוב פחות טוב מהסינוס, וכך כנראה הפונקציה לא מתוארת הצורה מספיק טובה ונצטרך פונקציות נוספות לשחזור משופר.

סעיף ד'

בסעיף זה הרדיוס מקובע ($r=10\text{cm}$) ונוספת שגיאה אקראית למדידות דלתא, המוגרלת בהסתברות אחידה בקטע $[-0.5, 0.5]$. כלומר $\tilde{\theta}_j = (1 + \delta_j * 10^{-1}) * \theta_j$.

נחזור על סעיף ב' עבור $2^{16} * 4 \dots 4,8$, $n + 1$, נדפיס את השגיאה $\varepsilon_{LS}(\phi)$ ביחס לפוטנציאל המדויק כפונקציה של $n + 1$.

נציג את מה שקיבלנו:



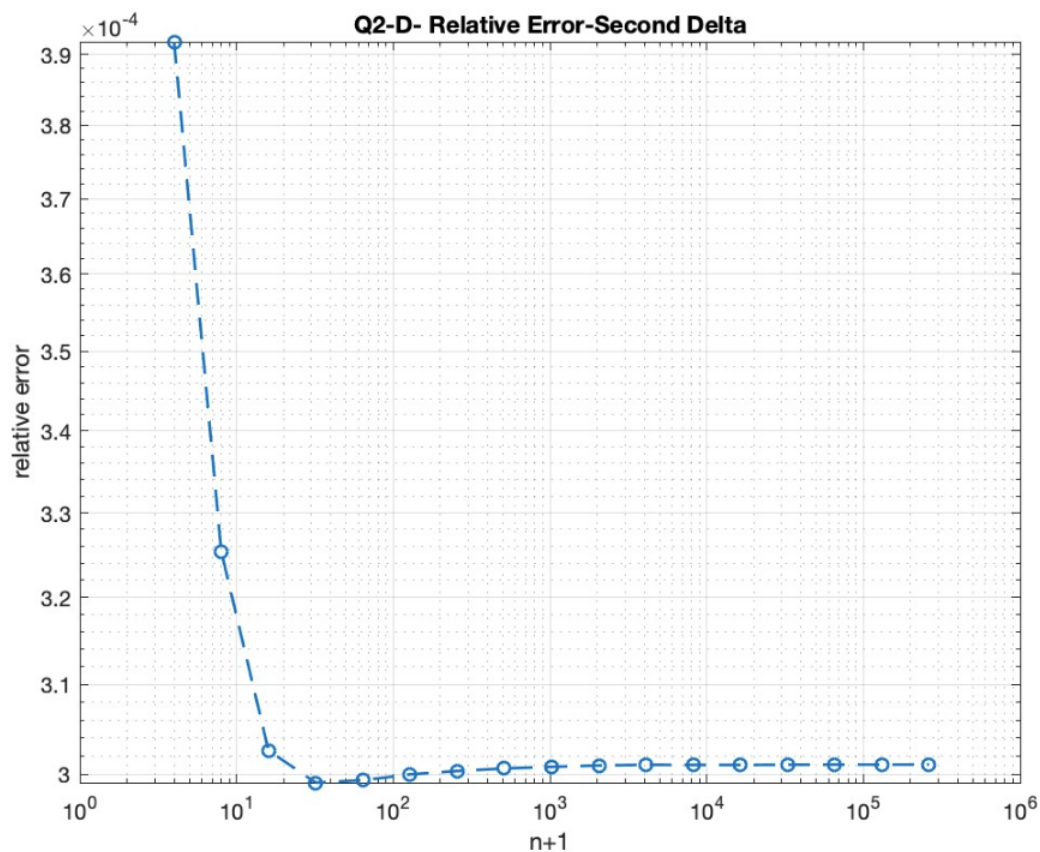
קל לראות שלמרות שהוספנו שגיאת מדידה, ככל שיש יותר נקודות דגימה בשיטת ריבועים פחיתים, השגיאה היחסית קטנה. אולם, שגיאה זו במדידה משפיעה די הרבה כי היחס בין ערך הפוטנציאל לשגיאה שהתווספה די קטן, כלומר השגיאה משמעותית. בכל זאת, עבור דגימות רבות יותר נקבל פונקציה משוחזרת טובה יותר עקב קירוב ממוצע אופטימלי שנקבל מדגימה גדולה של נקודות.

בסעיף ב הגרף המקורב יותר דומה לגרף הפוטנציאל המקורי כי בו אין שגיאות מדידה ולמעשה ההתכנסות תקרה עבור $n + 1$ נקודות דגימה קטן יותר. לכן נצפה שעבור:

$$\tilde{\theta}_j = (1 + \delta_j * 10^{-4}) * \theta_j$$

ההתכנסות תקרה עבור $n + 1$ נקודות דגימה קטן יותר מאשר המקרה הראשון בסעיף זה.

אכן קיבלנו:



קל לראות שהפתרון מתכנס לשגיאה קטנה מאד עבור $n + 1$ נקודות דגימה קטן יותר אך יחס השגיאה לבסוף מתייצב על אותו מספר.

במקרה זה הסטייה כמעט ואינה משפיעה על השגיאה היחסית וזאת בגלל שהשגיאה שהתווספה קטנה ביחס לערך הפוטנציאל עצמו. לכן, נוכל לקחת לא הרבה נקודות דגימה על מנת לשחזר את הפונקציה בצורה טובה דיו. עבור $n + 1$ נקודות גדול מספיק ערך השגיאה היחסית מתכנס לשגיאה הריבועית המינימלית ללא השגיאה האקראית שהוגדרה בתרגיל, כלומר זהה לערך שקיבלנו בסעיף ב'. כפי שציפינו, כאשר הקטנו את השגיאה האקראית, התכנסנו לשגיאה הריבועית המינימלית מהר יותר מאשר בשגיאה אקראית גדולה יחסית.

שאלה 3- אינטגרציה בשיטת ניוטון-קוטס

בשאלה זו נחשב את אינטגרל ההיטל של הפוטנציאל על פונקציות המוגדרות בתחום $[0, \pi]$.
נממש את החישוב באמצעות שיטת ניוטון קוטס.

סעיף א'

בסעיף זה נממש את חישוב האינטגרל המסוים מהצורה $\int_a^b g(t)dt$ באמצעות שיטת סימפסון ושיטת הטרפז הלא מצרפיות. נחשב תחילה אנליטית את האינטגרל המבוקש בשאלה: $\int_0^1 g(t)dt$ כאשר $g(t) = \frac{4}{\pi(1+t^2)}$. נקבל כי עבור החישוב האנליטי:

$$\int_0^1 g(t)dt = 1$$

נשווה את פתרון החישוב האנליטי עם שיטות סימפסון והטרפז הלא מצרפיות. נתחיל עם שיטת הטרפז הלא מצרפית:

עבור שיטה זו, נחשב כאן את החישוב שעשה הקוד שכתבנו ונציג את תוצאתו ואת השגיאה בינו לבין החישוב האנליטי:

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1-0}{2} * \left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{2 * \pi} \right) = 0.954929658551372$$

השגיאה היא: $\varepsilon = |1 - 0.954929658551372| = 0.045070341448628$

**Trapezoid Error value:
0.045070341448628**

**Trapezoid Integral value:
0.954929658551372**

נזכיר כי בשיטת הטרפז המצרפית חישבנו את שטח הטרפז לפי הנוסחה המוכרת: אורך בסיס אחד ועוד אורך בסיס שני (ערכי הפונקציה ב $0,1$), וכפלנו בגובה הטרפז לחלק ל 2 .

נחשב כעת את האינטגרל עבור שיטת סימפסון הלא מצרפית ונציג את התוצאה:

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{h}{3} * \left(g(0) + 4 * g\left(\frac{0+1}{2}\right) + g(1) \right) = \frac{0.5}{3} * \left(\frac{4}{\pi} + 4 * 1.01859 \frac{4}{2 * \pi} \right) = 0.997470976709211$$

בשגיאה עבור שיטה זו היא: $\varepsilon = |1 - 0.997470976| = 0.002629023290789$

**Simpson Error value:
0.002629023290789**

**Simpson Integral value:
0.997370976709211**

את הנוסחה לחישוב שיטת סימפסון הלא מצרפית (באמצעות שלוש נקודות בלבד), תיארנו במעבר הראשון במשוואה הנ"ל.

נשים לב שקיבלנו כי עבור שיטת סימפסון הדיוק גבוה בהרבה, כפי שציפינו לקבל בהתאם למה שלמדנו בהרצאה. הסיבה לכך היא שהשגיאה קטנה יותר היא שלמעשה בשיטת סימפסון אנחנו מקרבים את הפונקציה בפולינום במעלה גבוהה יותר (בשיטת סימפסון יש יותר נקודות אינטרפולציה מאשר בשיטת הטרפז).

סעיף ב'

בסעיף זה נשתמש בשגרות אותן כתבתנו בסעיף קודם על מנת לממש תוכנית שתחשב בקירוב את $Q_{i,m}$, עבור הפונקציות f_i הנתונות בשאלה 2:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sin(\theta), \quad f_3 = \cos(\theta)$$

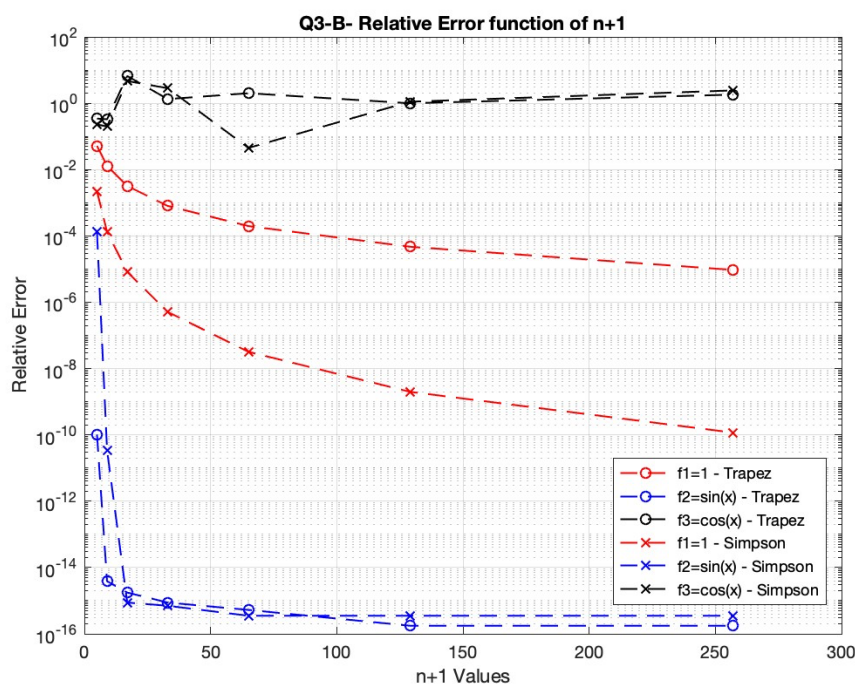
באינטגרל הנתון הבא:

$$I_i = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \phi(\theta) f_i(\theta) \approx Q_{i,n+1}$$

נדרשנו את האינטגרל באמצעות שיטת סימפסון וטרפז המצרפיות מתוך ערכי הפונקציה ב $n + 1 \in [5, 9, 17, \dots, 513]$ הנחנו $r = 10cm$. התייחסנו לתוצאה $Q_{i,513}$ בתור ערך האינטגרל ה"מדויק" והדפסנו את השגיאה היחסית הבאה:

$$\varepsilon_{i,n+1} = |Q_{i,n+1} - Q_{i,513}| / |Q_{i,513}|$$

חישבנו את השגיאה עבור שיטת סימפסון ושיטת הטרפז המצרפיות כפונקציה של מספר נקודות הדגימה $(n+1)$. כתבנו קוד שממש את חישוב השגיאה וקיבלנו את הגרף הבא:



ניתן להבחין מהגרף שעבור פונקציית קוסינוס והפונקציה הקבועה 1 נקבל את השגיאה יחסית הגדולה ביותר .

עבור פונקציית הסינוס ככל שנלקחו יותר נקודות דגימה, השגיאה היחסית קטנה, ועבור קוסינוס קיבלנו בערך שגיאה יחסית קבועה, ועבור הפונקציה הקבועה 1 נקבל ירידה קטנה בשגיאה אך גם כמו הקוסינוס היא מתייצבת לערך קבוע אך אינו קטן כמו הסינוס וזה תואם למה שראינו בשאלה 2 סעיף ב, שבה ראינו כי פונקציית הפוטנציאל היא צירוף ליניארי של סינוס והמקדמים של קוסינוס והקבוע מתאפסים .

לסיכום ניתן להסיק מהגרף שהגדלת נקודות הדגימה תגרור דיוק בחישוב האינטגרל כפי שראינו בכיתה. בנוסף שהשגיאה תושפע מאורך הקטע שילך ויקטן ככל שמספר הנקודות גדל כלומר ככל שמחלקים את הקטע ליותר קטעים, מעלים את המספר נקודות בקטע, מקבלים תוצאה יותר קרובה לערך האינטגרל המדויק ואכן כך קיבלנו .