תרגיל מחשב 2

מגישים: רון מילוטין 316389584
מיכאל לייב 319095832

שאלה 1
סעיף א'

נחקור אנליטית את התנאים להתכנסות שיטת ניוטון רפסון למשוואה $x^4 - 3 = 0$. לפי הנתון בשאלה נניח b=5. נדרשנו למצוא את התחום [a,b] בו מובטחים לנו התנאים להתכנסות ולכן נמצא את a. ניזכר במשפט שלמדנו בהרצאה 7:

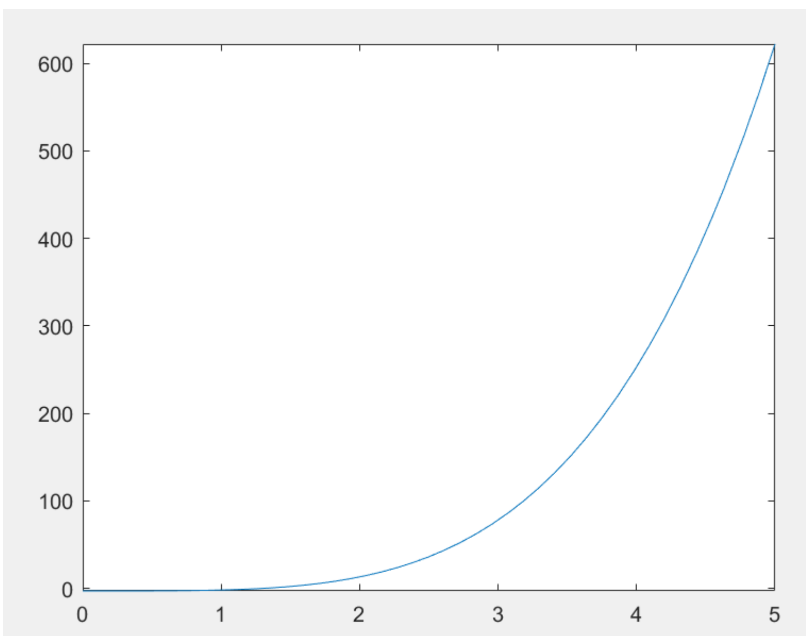
משפט: תהא פונקציה $F(x)$ ממשית המוגדרת בקטע [a,b] אשר המקיימת את התנאים הבאים:

1. $F'(x) \neq 0$ (פונקציה מונוטונית)
2. $F''(x) \neq 0$ (אין פיתול של הפונקציה בתחום)
3. $F(a)F(b) < 0$ (יש שורש של הפונקציה בתחום)

אם $\left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| < b - a \quad ; \quad \left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| < b - a$

אז שיטת ניוטון רפסון מתכנסת לפתרון מכל תנאי התחלה $x_0 \in [a, b]$

נצייר את הפונקציה במאטלאב :



קיבלנו שעבור a=1 נקבל קיום של תנאי המשפט ולכן בתחום [1,5] תתקיים התכנסות. נראה זאת:
ראשית מציור גרף הפונקציה קל לראות שהפונקציה מונוטונית עולה בתחום ואין לה נקודות פיתול.
בנוסף, $F(1) * F(5) = (-2) * 622 < 0$. כמו כן :

$$\left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| = \left|\frac{-2}{4}\right| < b - a = 4, \qquad \left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| = \left|\frac{622}{500}\right| < b - a = 4$$

לכן תנאי המשפט מתקיימים עבור a=1 ומכאן שנבחר בקטע [1,5] =[a,b].

<u>סעיף ב׳</u>

נכתוב תוכנית בmatlab המחשבת את פתרון המשוואה בשיטת ניוטון-רפסון

נוסחת ניוטון-רפסון נתונה ע״י

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

בשאלה זו נציב את המשוואה הבאה

$$f(x) = x^4 - 3$$

לשם כך תחילה נחשב את

$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a) = 3.008517105$$

עבור $I_1 = 319095832$, $I_2 = 316389584$

ונגדיר את תנאי העצירה שלנו ע״י

$$|x_{n+1} - x_n| \le tol = 10^{-12}$$

נרכז את תוצאות החישוב ע״י טבלה כאשר

n- מספר האיטרציות
X_n- הפתרון באיטרציה הn
X_n_diff- הפרש בין ניחושים עוקבים
Error_n- שגיאה ביחס לפתרון האמיתי

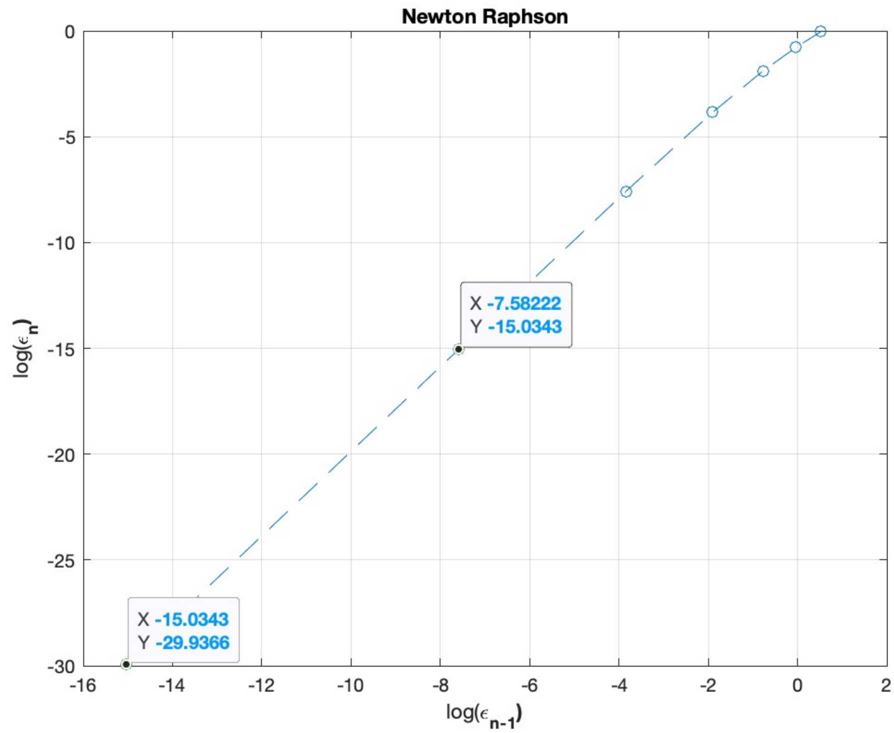
n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	3.00851710497791	0.72458674769222	1.69244309202541
2	2.28393035728569	0.50803013128229	0.967856344333193
3	1.7759002260034	0.310067348725335	0.459826213050903
4	1.46583287727806	0.128331631702512	0.149758864325568
5	1.33750124557555	0.0209178024106904	0.0214272326230556
6	1.31658344316486	0.000509134615221507	0.000509430212365158
7	1.31607430854964	2.95597043953322e-07	2.95597143651349e-07
8	1.31607401295259	9.96980276113391e-14	9.96980276113391e-14

```
It took 8 iteration to converge
```

בשיטה זו לקח לנו 8 איטרציות להגיע לפתרון בדיוק הרצוי

<u>סעיף ג׳</u>

בסעיף זה נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error\_n$



שיפוע הגרף הוא הוא קצב ההתכנסות שלנו וממנו ניתן לחלץ את קבוע ההתכנסות ע״י

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{{\varepsilon_n}^{\eta}}\right| = A$$

עבור n מספיק גדול נקבל

$$\log|\varepsilon_{n+1}| = \log(A) + \eta\log\ |\varepsilon_n|$$

מכיוון שאנו מודדים רק 8 איטרציות לא נגיע לערך ההתכנסות המדויק, מאותו הסבר שבשאלה 1 (לשם כך נצטרך להשאיף לאינסוף את כמות האיטרציות, ולכן נוכל לקבל ערך מדויק רק לפי חישוב תיאורטי ולא לפי שיפוע הגרף. לפי הגרף נקבל קירוב עבור קצב ההתכנסות).

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-15.0343 - (-29.9366)}{-7.58222 - (-15.0343)} = 1.99975 \approx 2$$

$$A = e^{\log\ |\varepsilon_{n+1}| - \eta\log\ |\varepsilon_n|} = 1.1411$$

קיבלנו שאכן שיפוע הגרף שואף ל2 כלומר קצב ההתכנסות הוא ריבועי כפי שציפינו משורש בריבוי אחד בשיטת ניוטון רפסון וקיבלנו ערך מקורב גם עבור קבוע ההתכנסות שניתן לחשב ע״י

$$A = \frac{1}{2} * \left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| = 1.13975$$

קיבלנו קירוב עבור קבוע ההתכנסות מכיוון ולא תוצאה מדויקת מכיוון מספר מדידות קטן ביחס להגדרה שהיא גבול שואף לאינסוף מדידות

שאלה 2

סעיף א׳

בסעיף זה נשתמש בשיטת המיתר לפתירת המשוואה, לכן נצטרך שתי נק׳ לניחוש ההתחלתי שאותם נחשב באופן הבא:

$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a) = 3.008517105 \quad x_1 = x_0 + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - x_0) = 4.00849897$$

בשיטת המיתר האיטרציה ניתנת ע״י הנוסחה הבאה:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

טבלת הערכים שנקבל בשיטה זו היא:

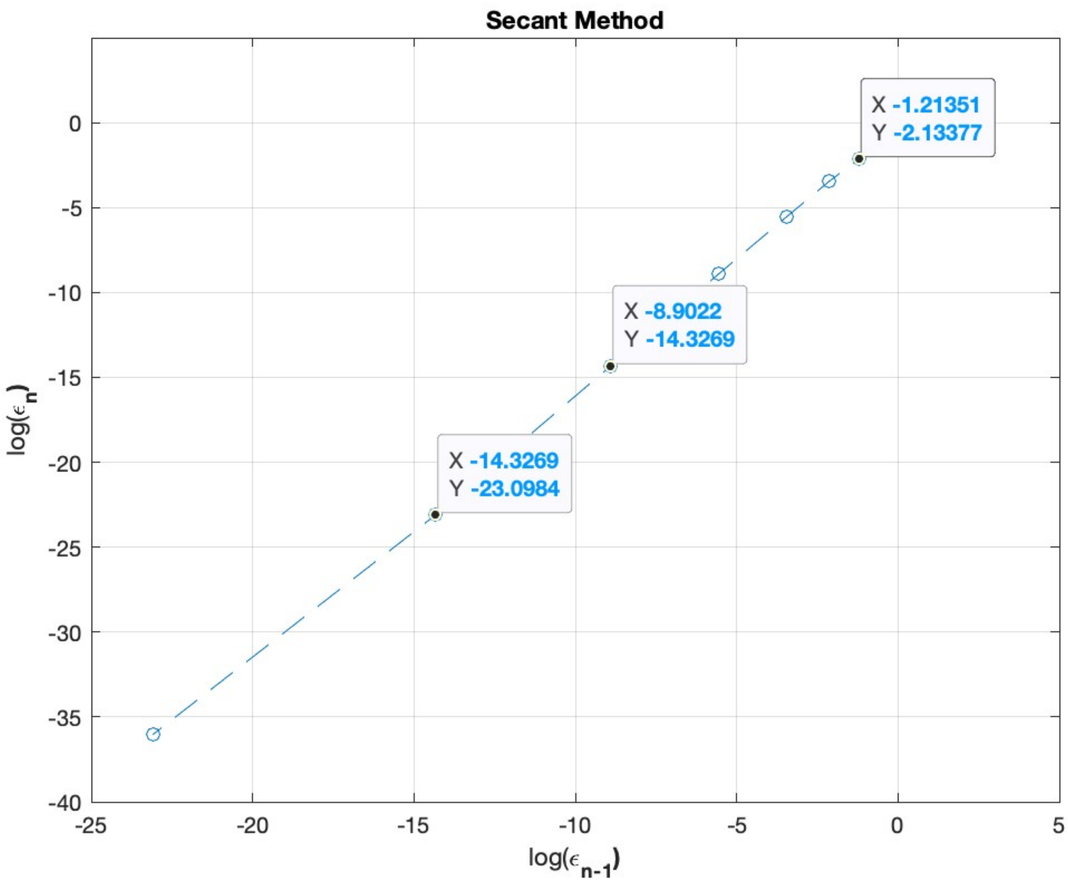
n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	3.00851710497791	0.999981864730699	1.69244309202541
2	4.0084989697086	1.44774556291912	2.69242495675611
3	2.56075340678949	0.269121386397558	1.244679393837
4	2.29163202039193	0.428939098202984	0.975558007439437
5	1.86269292218895	0.249465097507485	0.546618909236453
6	1.61322782468146	0.178763594676812	0.297153811728968
7	1.43446423000465	0.0868896166801139	0.118390217052156
8	1.34757461332453	0.027624687326355	0.0315006003720417
9	1.31994992599818	0.00373982405466955	0.00387591304568669
10	1.31621010194351	0.000135489331016148	0.000136088991017136
11	1.31607461261249	5.99566996939416e-07	5.99660000988322e-07
12	1.3160740130455	9.30038268620592e-11	9.30040489066641e-11
13	1.31607401295249	2.22044604925031e-16	2.22044604925031e-16

```
It took 13 iteration to converge
```

נשים לב כי לקחו יותר איטרציות להתכנסות מהשיטה של ניוטון רפסון כפי שראינו בכיתה

סעיף ב׳

בסעיף זה נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error\_n$



כמו בשאלה קודמת נוציא את שיפוע הגרף אשר יציג לנו את קצב ההתכנסות בקירוב (עקב כמות מדידות קטנה)

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2.13377 - (-23.0984)}{-1.21351 - (-14.3269)} = 1.59871$$

$$A = e^{\log|\varepsilon_{n+1}| - \eta \log|\varepsilon_n|} = 1.21374$$

כעת נחשב את קבוע ההתכנסות בנוסחה הבאה:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} * \left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right|^{1/2} = 1.0675$$

קיבלנו קירוב עבור קבוע ההתכנסות מכיוון ולא תוצאה מדויקת מכיוון מספר מדידות קטן ביחס להגדרה שהיא גבול שואף לאינסוף מדידות.
בנוסף קיבלנו קירוב לקצב ההתכנסות שלמדנו בכיתה שהוא יחס הזהב 1.618 שהוא יותר איטי מניוטון רפסון

שאלה 3

סעיף א'

בסעיף זה נפתור את המשוואה הבאה בשיטת ניוטון רפסון (שלא מתחשבת בריבוי) משאלה 1 :

$$f(x)=x^5-6x^4+14x^3-20x^2+24x-16=0$$

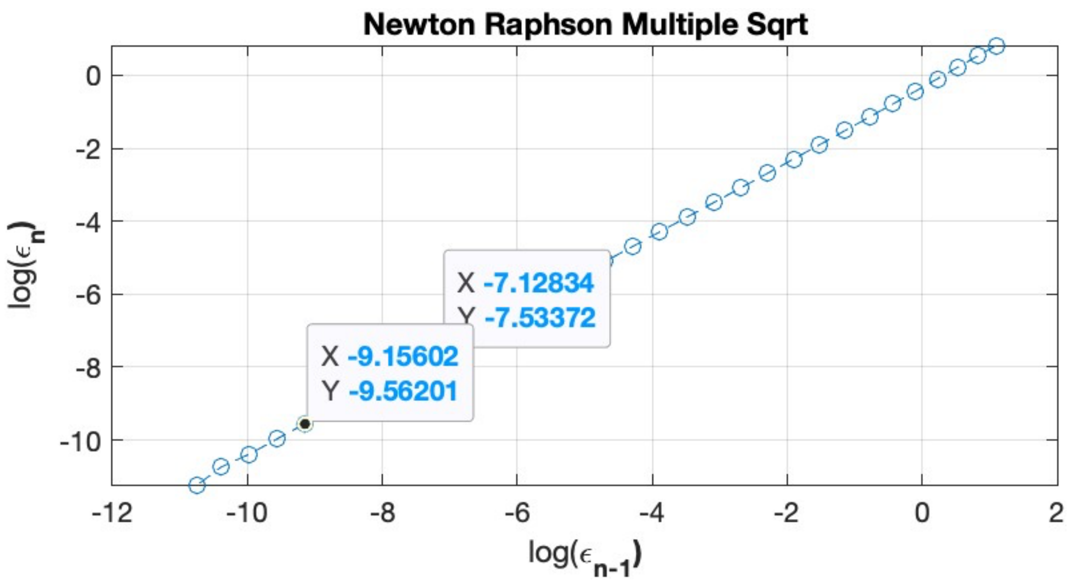
ניחשנו על פי ההנחיה $x_0 = 5$ והתבקשנו לעצור את התהליך אחרי התייצבות 12 ספרות ראשונות. בנינו את הטבלה ההבאה, כנדרש:

		NR0	
n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	0.573561577993864	2.27027027027027
3	3.69670869227641	0.446412663555897	1.69670869227641
4	3.25029602872051	0.342839992236089	1.25029602872051
5	2.90745603648442	0.25891841252475	0.90745603648442
6	2.64853762395967	0.191813677369928	0.648537623959669
7	2.45672394658974	0.139276011607369	0.456723946589741
8	2.31744793498237	0.0992141521984351	0.317447934982372
9	2.21823378278394	0.0695034162768882	0.218233782783937
10	2.14873036650705	0.0480303175349777	0.148730366507049
11	2.10070004897207	0.0328444013190401	0.100700048972071
12	2.06785564765303	0.0222863722337188	0.067855647653031
13	2.04556927541931	0.0150386428435234	0.0455692754193122
14	2.03053063257579	0.0101086469572631	0.0305306325757888
15	2.02042198561853	0.00677667985318164	0.0204219856185257
16	2.01364530576534	0.00453471609345213	0.0136453057653441
17	2.00911058967189	0.0030307366261062	0.00911058967189193
18	2.00607985304579	0.00202388602694858	0.00607985304578573
19	2.00405596701884	0.00135077236388437	0.00405596701883715
20	2.00270519465495	0.000901190148391073	0.00270519465495278
21	2.00180400450656	0.00060109361115801	0.00180400450656171
22	2.0012029108954	0.00040086403173234	0.0012029108954037
23	2.00080204686367	0.000267300930629766	0.000802046863671357
24	2.00053474593304	0.000178226070420617	0.000534745933041592
25	2.00035651986262	0.000118821152594428	0.000356519862620974
26	2.00023769871003	7.92389130341853e-05	0.000237698710026546
27	2.00015845979699	5.28779184358896e-05	0.000158459796992361
28	2.00010558187856	3.52307044617639e-05	0.000105581878556471
29	2.00007035117409	2.36069393553251e-05	7.03511740947071e-05
30	2.00004674423474	1.58974068078521e-05	4.67442347393821e-05
31	2.00003084682793	9.1265403110441e-06	3.08468279315299e-05
32	2.00002172028762	8.36716456875664e-06	2.17202876204858e-05
33	2.00001335312305	0	1.33531230517292e-05

It took 33 iteration to converge

שאלו אותנו כמה איטרציות לקחו להתכנסות , וניתן להסיק מהטבלה שלקחו 33 איטרציות.

כעת, נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error\_n$



נסיק מהגרף את סדר וקבוע ההתכנסות.
כמו שכבר הצגנו בשאלה 1, שיפוע הגרף הוא הוא קצב ההתכנסות שלנו וממנו ניתן לחלץ את קבוע ההתכנסות ע״י

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{{\varepsilon_n}^{\eta}}\right| = A$$

עבור n מספיק גדול נקבל

$$\log\left(\varepsilon_{n+1}\right) = \eta\log\left(\varepsilon_n\right) + logA$$

מכיוון שאנו מודדים רק 33 איטרציות לא נגיע לערך ההתכנסות המדויק, מאותו הסבר שבשאלה 1 (לשם כך נצטרך להשאיף לאינסוף את כמות האיטרציות, ולכן נוכל לקבל ערך מדויק רק לפי חישוב תיאורטי ולא לפי שיפוע הגרף. לפי הגרף נקבל קירוב עבור קצב ההתכנסות).

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7.53372 - (-9.56201)}{-7.12384 - (-9.15602)} = 0.998 \approx 1$$

קיבלנו שאכן שיפוע הגרף שואף ל1 כלומר קצב ההתכנסות הוא לינארי כפי שציפינו משורש בריבוי גדול מ1.

נחשב את A מתוך שיפוע הגרף :

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.6637$$

נחשב את קבוע ההתכנסות מהתיאוריה :

נשים לב כי $f'(2), f''(2) = 0$ ולכן לא נוכל לחשב את A מתוך הנוסחה

$$A = \frac{1}{2} * \left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right|$$

בהרצאה 7 למדנו שבמקרה כזה בו הנגזרת מתאפסת נחשב את A לפי

$$A = \left|\frac{G\prime(x_n)}{G(x_n)}\right| = \frac{2}{3} = 0.666.$$

כאשר $G(x) = x^2 + 2$ ומתקיים $F(x) = (x-s)^q G(x)$

<u>סעיף ב׳</u>

בסעיף זה הוגדר לנו להניח שלמשוואה שורש מריבוי $q > 1$. הגדרנו $u(x) = \frac{f(x)}{f\prime(x)}$ וברור כי לפונקציה זו יש שורש $\tilde{q} = 1$. כעת נפעיל על פונקציה זו את התהליך האיטרטיבי משאלה 1, שהיא שיטת ניוטון רפסון לריבוי שורש יחיד. נציג את הצעד האיטרטיבי (בדומה לשאלה 1):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

כאשר $f(x_n) = u(x_n)$ ו $f'(x_n) = u'(x_n)$. נשים לב ש $u'(x) = 1 - \frac{f''(x)*f(x)}{(f'x))^2}$, מגזירה פשוטה של *u(x)*.

נוסיף לטבלה מסעיף א את התוצאות לסעיף זה תחת הכותרת *NR1*:

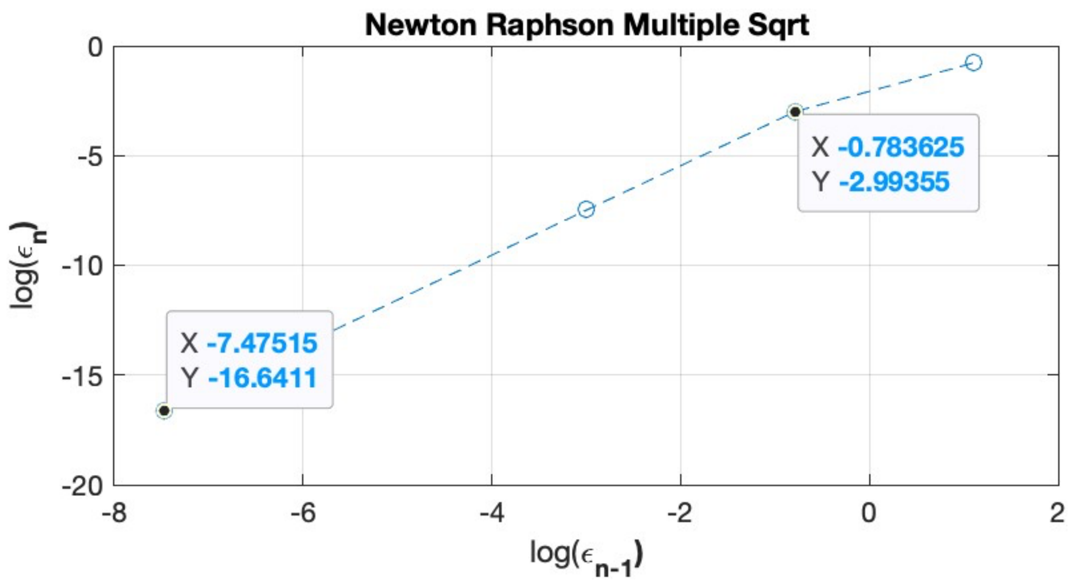
NR1

n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	5	3.45674740484429	3
2	1.54325259515571	0.406638300101928	0.456747404844291
3	1.94989089525764	0.0495421051161298	0.0501091047423634
4	1.99943300037377	0.000566940351703016	0.000566999626233633
5	1.99999994072547	1.9978866117043e-08	5.92745306171594e-08

It took 5 iteration to converge

נשים לב שכעת ההתכנסות מתרחשת אחרי 5 איטרציות בלבד. ההתכנסות מהירה בהרבה ולכן ממה שלמדנו בכיתה קל להסיק שאכן לפונקציה מסעיף א היה ריבוי $q > 1$.

כעת, נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error\_n$:



כמו שכבר הצגנו בשאלה 1, שיפוע הגרף הוא הוא קצב ההתכנסות שלנו וממנו ניתן לחלץ את קבוע ההתכנסות ע״י

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{{\varepsilon_n}^{\eta}}\right| = A$$

עבור n מספיק גדול נקבל

$$\log\left(\varepsilon_{n+1}\right) = \eta\log\left(\varepsilon_n\right) + logA$$

מכיוון שאנו מודדים רק 5 איטרציות לא נגיע לערך ההתכנסות המדויק, מאותו הסבר שבשאלה 1 (לשם כך נצטרך להשאיף לאינסוף את כמות האיטרציות, ולכן נוכל לקבל ערך מדויק רק לפי חישוב תיאורטי ולא לפי שיפוע הגרף. לפי הגרף נקבל קירוב עבור קצב ההתכנסות).

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2.99355 - (-16.6411)}{-0.78365 - (-7.47515)} = 2.0395 \approx 2$$

קיבלנו שאכן שיפוע הגרף שואף ל 2 כלומר קצב ההתכנסות הוא ריבועי כפי שציפינו משורש בריבוי 1 בשיטת ניוטון רפסון (*u(x)* מוגדרת להיות עם שורש בריבוי 1).

נחשב את הקבוע *A* מתוך הגרף:

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.2388$$

לפי התיאוריה, אנו יודעים ש :

$$A = \frac{1}{2} * \left|\frac{u''(s)}{u'(s)}\right| = 0.2222$$

<u>סעיף ג</u>

כעת נחשב את הריבוי האמיתי ע"י הקשר הבא בצורה אנליטית: $\lim_{x \to s} \frac{u(x)}{x-s} = \frac{1}{q}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{(x-2)*(x^2+2)}{5x^2-4x+6}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2}{5x^2-4x+6} = \frac{1}{3} \to q = 3$$

ומכאן קיבלנו ש *q=3*. לכן צעד האיטרציה כעת, לפי מה שלמדנו בכיתה הוא:

$$x_{n+1} = x_n - q * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; q = 3$$

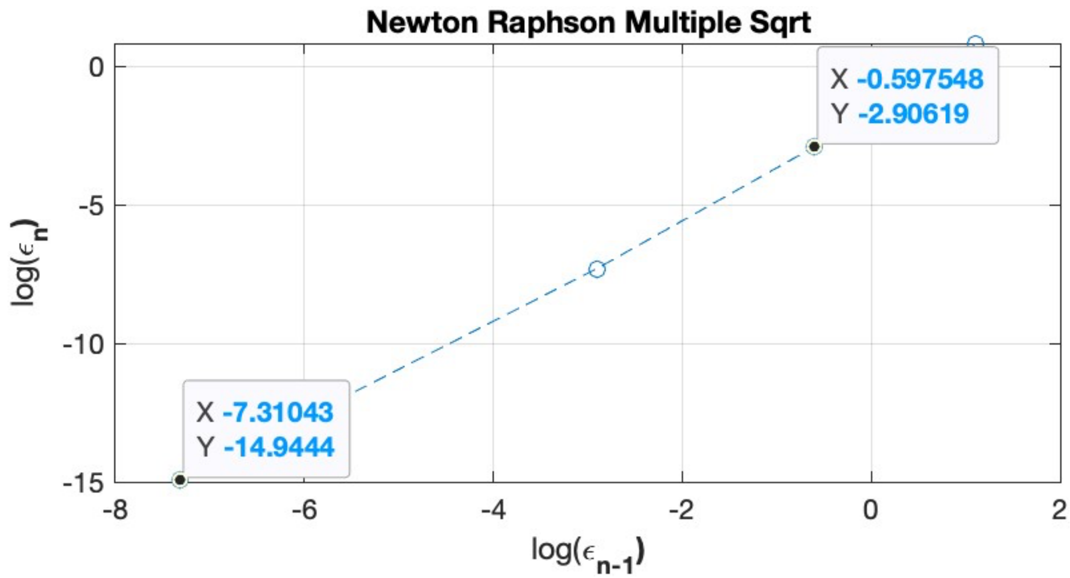
נגדיר בקוד *q=2.999* (לא בדיוק 3) על מנת למנוע שגיאת חישוב של צמצום בביטוי החדש.
קיבלנו את הטבלה הבאה:

n	X_n	NR2 X_n_Diff	Error_n
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	1.7201111724036	2.27027027027027
3	2.55015909786667	0.495475474229761	0.550159097866673
4	2.05468362363691	0.0540150934167967	0.0546836236369121
5	2.00066853022012	0.000668206814975925	0.000668530220115482
6	2.00000032340514	0	3.23405139557309e-07

```
It took 6 iteration to converge
```

נשים לב שכעת לקחו 6 איטרציות עד להתכנסות.

כעת, נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error\_n$:



כמו שכבר הצגנו בשאלה 1, שיפוע הגרף הוא הוא קצב ההתכנסות שלנו וממנו ניתן לחלץ את קבוע ההתכנסות ע״י

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{{\varepsilon_n}^{\eta}}\right| = A$$

עבור n מספיק גדול נקבל

$$\log\left(\varepsilon_{n+1}\right) = \eta\log\left(\varepsilon_n\right) + logA$$

מכיוון שאנו מודדים רק 6 איטרציות לא נגיע לערך ההתכנסות המדויק, מאותו הסבר שבשאלה 1 (לשם כך נצטרך להשאיף לאינסוף את כמות האיטרציות, ולכן נוכל לקבל ערך מדויק רק לפי חישוב תיאורטי ולא לפי שיפוע הגרף. לפי הגרף נקבל קירוב עבור קצב ההתכנסות).

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2.90619 - (-14.9444)}{-0.597548 - (-7.31043)} = 1.793 \approx 2$$

קיבלנו שאכן שיפוע הגרף שואף ל 2 כלומר קצב ההתכנסות הוא ריבועי כפי שציפינו משיטת ניוטון רפסון בגרסתה המתוקנת (בהתאם לריבוי)

נחשב את הקבוע A מתוך הגרף:

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.18066$$

בהרצאה 7 למדנו שבמקרה כזה בו הנגזרת מתאפסת ואנו יודעים את הריבוי שלנו נוכל לחשב את A לפי

$$A = \frac{1}{q}\left|\frac{G\prime(x_n)}{G(x_n)}\right| = \frac{2}{9} = 0.222.$$

כאשר $G(x) = x^2 + 2$ ומתקיים $F(x) = (x-s)^q G(x)$

שאלה 4

סעיף א׳

נפתור בשאלה זאת ע״י שיטת נק׳ השבת עבור הפונקציה

$$f(x) = x - 2\sin(x)$$

כאשר נבחר את $g(x) = 2\sin(x)$ ואת נק׳ ההתחלה שלנו $x_0 = \frac{\pi}{2}$. ונקבל את הטבלות הבאות:

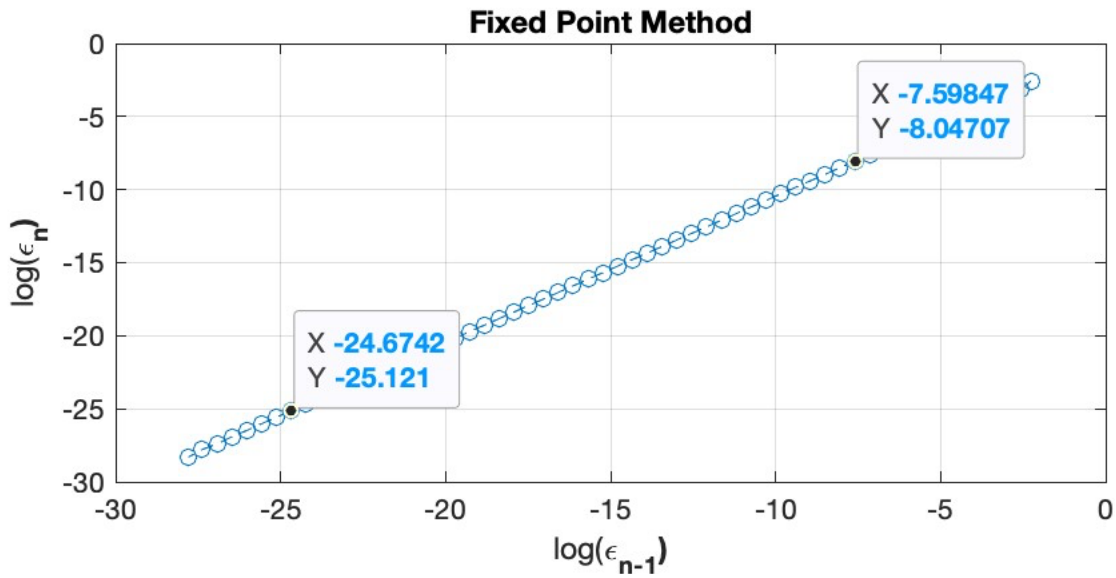
n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	1.5707963267949	0	0
2	2	0.181405146348637	0.104505732966
3	1.81859485365136	0.120314599417193	0.0768994133826366
4	1.93890945306856	0.0728934367080492	0.0434151860345564
5	1.86601601636051	0.0474604770811644	0.0294782506734927
6	1.91347649344167	0.0297615342869826	0.0179822264076717
7	1.88371495915469	0.0191633627622889	0.0117793078793109
8	1.90287832191698	0.0121470467060727	0.007384054882978
9	1.89073127521091	0.00778048304313739	0.0047629918230947
10	1.89851175825404	0.00495141310068314	0.00301749122004269
11	1.89356034515336	0.00316430576696058	0.00193392188064045
12	1.89672465092032	0.00201685877604829	0.00123038388632013
13	1.89470779214427	0.00128769502486703	0.000786474889728161
14	1.89599548716914	0.000821259241675198	0.000501220135138869
15	1.89517422792746	0.000524141397174827	0.000320039106536329
16	1.89569836932464	0.000334368226659443	0.000204102290638497
17	1.89536400109798	0.000213365388669118	0.000130265936020946
18	1.89557736648665	0.000136127191581625	8.30994526481721e-05
19	1.89544123929507	8.68591601255186e-05	5.30277389334533e-05
20	1.89552809845519	5.54184767456167e-05	3.38314211920654e-05
21	1.89547267997845	3.53601277731652e-05	2.15870555535513e-05
22	1.89550804010622	2.25610925652653e-05	1.37730722196139e-05
23	1.89548547901365	1.43950999862419e-05	8.7880203456514e-06
24	1.89549987411364	9.18467886834584e-06	5.60707964059048e-06
25	1.89549068943477	5.86025653803723e-06	3.57759922775536e-06
26	1.89549654969131	3.73910047346548e-06	2.28265731028188e-06
27	1.89549281059084	2.38571747002148e-06	1.45644316318361e-06
28	1.89549519630831	1.52219402660414e-06	9.29274306837868e-07
29	1.89549367411428	9.71228846458061e-07	5.92919719766272e-07
30	1.89549464534313	6.19687558600646e-07	3.78309126691789e-07

31	1.89549402565557	3.953886587027e-07	2.41378431908856e-07
32	1.89549442104423	2.52275743184427e-07	1.54010226793844e-07
33	1.89549416876848	1.60963302020534e-07	9.82655163905832e-08
34	1.89549432973179	1.02701832371821e-07	6.26977856299504e-08
35	1.89549422702995	6.55283978190369e-08	4.00040467418705e-08
36	1.89549429255835	4.18100687404888e-08	2.55243510771663e-08
37	1.89549425074828	2.66767077317098e-08	1.62857176633224e-08
38	1.89549427742499	1.70209411010092e-08	1.03909900683874e-08
39	1.89549426040405	1.08601272419406e-08	6.62995103262176e-09
40	1.89549427126418	6.92925050671533e-09	4.23017620931887e-09
41	1.89549426433493	4.42117409349407e-09	2.69907429739646e-09
42	1.8954942687561	2.82090839576199e-09	1.72209979609761e-09
43	1.89549426593519	1.79986670012511e-09	1.09880859966438e-09
44	1.89549426773506	1.14839604492545e-09	7.01058100460727e-10
45	1.89549426658666	7.3272854450579e-10	4.47337944464721e-10
46	1.89549426731939	4.67514027491234e-10	2.85390600041069e-10
47	1.89549426685188	2.98295166345497e-10	1.82123427450165e-10
48	1.89549426715017	1.90325755156096e-10	1.16171738895332e-10
49	1.89549426695985	1.21436416478105e-10	7.41540162607635e-11
50	1.89549426708128	7.74820207993798e-11	4.72824002173411e-11
51	1.8954942670038	4.94371210635336e-11	3.01996205820387e-11
52	1.89549426705324	3.15432124864401e-11	1.92375004814949e-11
53	1.89549426702169	2.01261229904048e-11	1.23057120049452e-11
54	1.89549426704182	1.28415056366293e-11	7.8204109854596e-12
55	1.89549426702898	8.19344592173366e-12	5.02109465116973e-12
56	1.89549426703717	5.22781817835494e-12	3.17235127056392e-12
57	1.89549426703194	3.33577609978875e-12	2.05546690779101e-12
58	1.89549426703528	2.12851958281135e-12	1.28030919199773e-12
59	1.89549426703315	1.35824684832642e-12	8.4821039081362e-13
60	1.89549426703451	8.66640093022397e-13	5.10036457512797e-13

```
It took 60 iteration to converge
```

לקח לנו בשיטה זו 60 איטרציות להתכנסות

נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$ כאשר $\varepsilon_n = error_n$



כמו בשאלה קודמת נוציא את שיפוע הגרף אשר יציג לנו את קצב ההתכנסות בקירוב

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8.04707 - (-25.121)}{-7.59847 - (-24.6742)} = 0.99989 \approx 1$$

בשיטת נק׳ השבת מתקיים

$$\log(\varepsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\varepsilon_n)$$

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.63711$$

קיבלנו כי סדר ההתכנסות הינו אכן 1 כמו שציפינו בשיטה זו מכיוון שהנגזרת הראשונה שאינה מתאפסת בנק׳ הינה הנגזרת הראשונה ולכן סדר ההתכנסות המצופה הוא 1

$$g'(s) = 2\cos(s) = 2\cos(1.895) \neq 0$$

ונשים לב כי קיבלנו קבוע ההתכנסות קרוב לחישוב התיאורטי שהוא

$$A = |g'(s)| = |2\cos(1.895)| = 0.637$$

<u>סעיף ב׳</u>

$$f(x) = x - 2\sin(x)$$

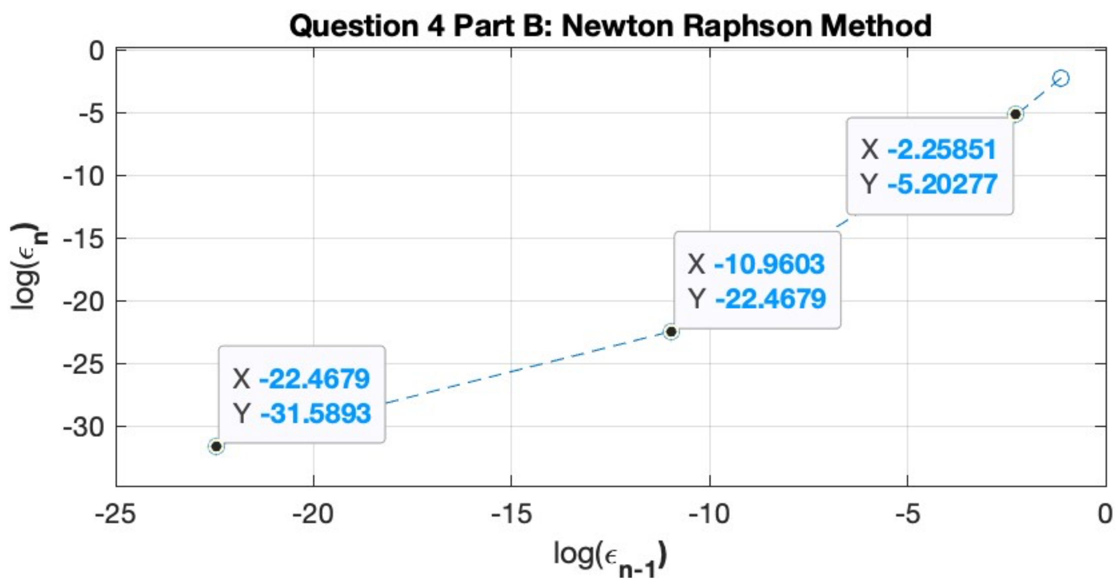
בסעיף זה נפתור את אותה המשוואה בשיטת ניוטון רפסון ונשווה את קצב ההתכנסות לפי השיטות ונקבל:

n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	1.5707963267949	0.429203673205103	0.324697940239103
2	2	0.099004405796091	0.104505732966
3	1.90099559420391	0.00548394882431436	0.00550132716990892
4	1.89551164537959	1.73781708814325e-05	1.73783455945653e-05
5	1.89549426720871	1.74732228686025e-10	1.74713132850002e-10
6	1.89549426703398	0	1.90958360235527e-14

```
It took 6 iteration to converge
```

נשים לב כי קצב ההתכנסות מהיר יותר בשיטה זו

נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$



נוציא את שיפוע הגרף אשר יציג לנו את קצב ההתכנסות בקירוב

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5.20277 - (-22.4679)}{-2.2585 - (-10.9603)} = 1.984 \approx 2$$

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.5037$$

נצפה לקבל קצב התכנסות ריבועי בשיטת ניוטון רפסון עבור שורש מריבוי 1 וניראה כי אכן קיבלנו קצב ריבועי

נחשב את קבוע ההתכנסות התיאורטי ונקבל תוצאה קרובה לחישוב הגרף שלנו

$$A = \frac{1}{2} * \left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| = 0.579$$

אכן קצב התכנסות גדול יותר מנק׳ השבת ולכן נקבל פחוות איטרציות עד להתכנסות הפתרון

<u>סעיף ג׳</u>

מפתרון אנליטי של המשוואה, נקבל כי השורשים שלה הם:

$$s1 = 0;\ s2 = 1.895;\ s3 = -1.895$$

מכך שהפונקציה $g(x) = sin\ (2x)$ סימטרית סביב ה 0, ומכך שהתקבלה התכנסות עבור $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ל $s2 = 1.895$, אזי ברור שבאמצעות אותה $g(x)$ ובתנאי התחלה סימטרי $\widetilde{x_0} = -\frac{\pi}{2}$ נקבל התכנסות ל $s3 = -1.895$. קל לראות שבשני המקרים מתקיימים התנאים של שיטת נקודת השבת (בשורש ובנקודת ההתחלה), ובפרט:

$$|g'(x_0)|, |g'(\widetilde{x_0})| = |2\,cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)| = 0 < 1$$

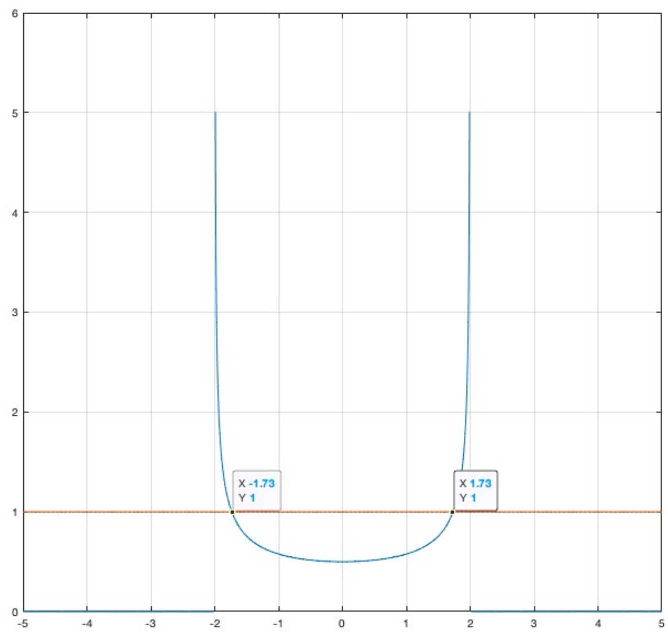
$$|g'(s2)| = |g'(s3)| = |2\,cos(\pm 1.895) = 0.638 < 1$$

נשים לב שעבור $s1 = 0$, $|g'(s1 = 0)| = 2 * cos(0) = 2 > 1$ ומכאן לכל נקודת התחלה שניקח לא נוכל להגיע לפתרון ולכן אי אפשר להשתמש ב $g(x) = sin\ (2x)$ על מנת להגיע לשורש 0.

סעיף ד׳

על מנת למצוא את השורש של $x = 0$ נבחר את $g(x) = \sin^{-1}(\frac{x}{2})$ נבדוק את התחום אשר נצטרף לבחור על מנת למצוא את הניחוש ההתחלתי

נראה מתי $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} < 1$



נחשב את הנק׳ החיתוך

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = 1 \rightarrow \sqrt{4-x^2} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} = 1.732$$

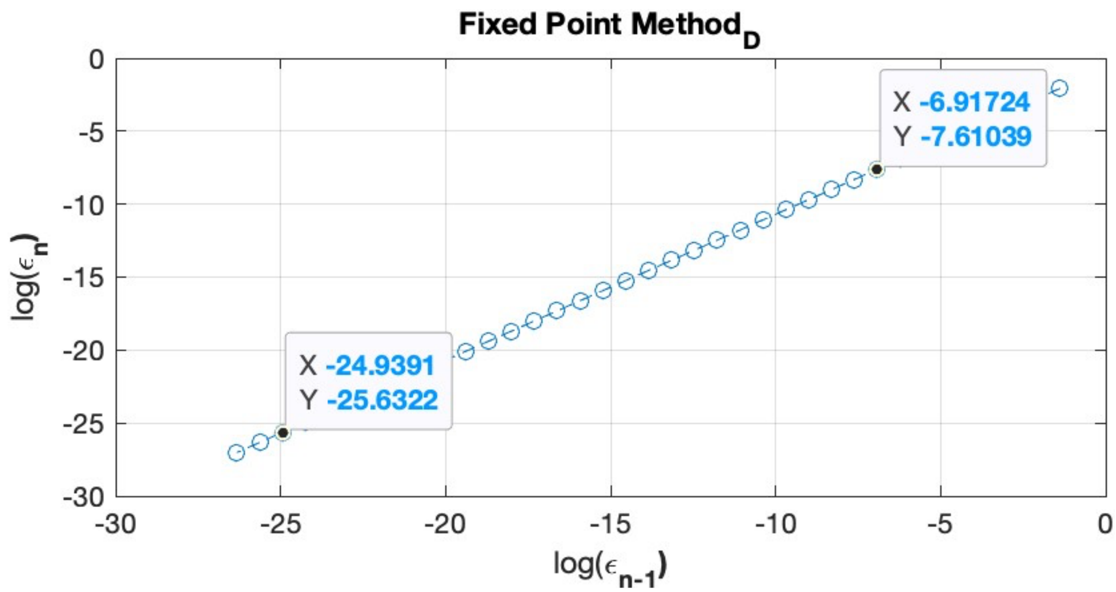
נחזור על סעיף א׳ כאשר $x_{n+1} = g(x_n) = \sin^{-1}(\frac{x_n}{2})$ ונקבל:

n	X_n	X_n_Diff	Error_n
1	0.5	0	0
2	0.252680255142079	0.126001586984352	0.252680255142079
3	0.126678668157726	0.0632969058946156	0.126678668157726
4	0.0633817622631107	0.0316855741443422	0.0633817622631107
5	0.0316961881187685	0.0158474305776675	0.0316961881187685
6	0.015848757541101	0.0079242958319506	0.015848757541101
7	0.00792446170915041	0.00396222048714442	0.00792446170915041
8	0.00396224122200599	0.00198111931507084	0.00396224122200599
9	0.00198112190693515	0.000990560791475951	0.00198112190693515
10	0.000990561115459197	0.000495280537480642	0.000990561115459197
11	0.000495280577978554	0.000247640286458158	0.000495280577978554
12	0.000247640291520397	0.000123820145443808	0.000247640291520397
13	0.000123820146076588	6.19100729987454e-05	0.000123820146076588
14	6.19100730778429e-05	3.09550365339779e-05	6.19100730778429e-05
15	3.09550365438651e-05	1.54775182713146e-05	3.09550365438651e-05
16	1.54775182725505e-05	7.73875913619799e-06	1.54775182725505e-05
17	7.73875913635248e-06	3.86937956816659e-06	7.73875913635248e-06
18	3.8693795681859e-06	1.93468978409174e-06	3.8693795681859e-06
19	1.93468978409415e-06	9.67344892046927e-07	1.93468978409415e-06
20	9.67344892047228e-07	4.83672446023595e-07	9.67344892047228e-07
21	4.83672446023633e-07	2.41836223011814e-07	4.83672446023633e-07
22	2.41836223011819e-07	1.20918111505909e-07	2.41836223011819e-07
23	1.2091811150591e-07	6.04590557529548e-08	1.2091811150591e-07
24	6.04590557529549e-08	3.02295278764774e-08	6.04590557529549e-08
25	3.02295278764775e-08	1.51147639382387e-08	3.02295278764775e-08
26	1.51147639382387e-08	7.55738196911936e-09	1.51147639382387e-08
27	7.55738196911936e-09	3.77869098455968e-09	7.55738196911936e-09
28	3.77869098455968e-09	1.88934549227984e-09	3.77869098455968e-09
29	1.88934549227984e-09	9.44672746139921e-10	1.88934549227984e-09
30	9.44672746139921e-10	4.7233637306996e-10	9.44672746139921e-10
31	4.7233637306996e-10	2.3616818653498e-10	4.7233637306996e-10
32	2.3616818653498e-10	1.1808409326749e-10	2.3616818653498e-10
33	1.1808409326749e-10	5.9042046633745e-11	1.1808409326749e-10
34	5.9042046633745e-11	2.95210233168725e-11	5.9042046633745e-11
35	2.95210233168725e-11	1.47605116584363e-11	2.95210233168725e-11
36	1.47605116584363e-11	7.38025582921813e-12	1.47605116584363e-11
37	7.38025582921813e-12	3.69012791460906e-12	7.38025582921813e-12
38	3.69012791460906e-12	1.84506395730453e-12	3.69012791460906e-12
39	1.84506395730453e-12	9.22531978652266e-13	1.84506395730453e-12

```
It took 39 iteration to converge>>
```

נקבל התכנסות עבור 39 איטרציות

נציג את הגרף של $log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $log(\varepsilon_{n-1})$



נוציא את שיפוע הגרף אשר יציג לנו את קצב ההתכנסות בקירוב

$$\eta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7.61039 - (-25.6322)}{-6.91724 - (-24.9391)} = 1.000024 \approx 1$$

$$A = e^{\log(\varepsilon_{n+1}) - \eta \log(\varepsilon_n)} = 0.5$$

חישוב זה מתאים לחישוב התיאורטי שלנו שהוא $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0.5 \neq 0$

הנגזרת הראשונה לא מתאפסת לכן נקבל סדר התכנסות לינארי כמצופה משיטת נק׳ השבת