

# 短期利率,HJM 框架下的远期利率的模拟方法

Ruming Liu

October 4, 2021

## Contents

<b>1 几何布朗运动</b>	<b>2</b>
1.1 几何布朗运动 . . . . .	2
1.2 对数正态分布 . . . . .	2
1.3 支付红利的资产 . . . . .	3
1.4 路径依赖型期权 . . . . .	3
1.4.1 亚式期权 . . . . .	4
1.4.2 障碍期权 . . . . .	4
1.4.3 回望期权 . . . . .	4
1.5 利用市场上的期限结构 . . . . .	4
1.6 利用远期曲线进行模拟 . . . . .	5
1.7 确定性波动率函数 . . . . .	5
<b>2 Gauss 短期利率模型</b>	<b>5</b>
2.1 模型架构 . . . . .	6
2.2 稳态情形 . . . . .	6
2.3 债券价格 . . . . .	7
2.3.1 Ho-Lee 模型 . . . . .	7
2.3.2 Vasicek 模型 . . . . .	8
2.4 变换基准 . . . . .	9
2.5 平方根扩散过程 . . . . .	10
2.6 远期利率模型: 连续利率 . . . . .	10
2.6.1 HJM 框架 . . . . .	11
2.6.2 远期测度 . . . . .	11
2.6.3 离散漂移项 . . . . .	12

# 1 几何布朗运动

## 1.1 几何布朗运动

我们通常用以下的 SDE 来描述描述几何布朗运动  $S(t)$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.1)$$

等式的左边可以理解为瞬时收益率，右边可解释为瞬时收益来源于漂移项的  $\mu$  以及波动项的  $\sigma$ ，我们记这样的过程为  $S \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ 。利用 Ito 公式我们容易有

$$d \ln S(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t), \quad (1.2)$$

对等式两边积分我们得到  $S(t)$  的表达式为：

$$S(t) = S(0)\exp([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]t + \sigma W(t)). \quad (1.3)$$

并且由于布朗运动的无记忆性，我们我们可以对  $S$  的模拟进行简单的递推。对于  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ，我们有：

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2](t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}), \quad (1.4)$$

其中  $Z_1, \dots, Z_n$  是独立的标准正态分布。

## 1.2 对数正态分布

由公式 (1.3) 我们可以看出， $\ln \frac{S(t)}{S(0)}$  服从一个  $N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$  的正态分布。我们可以简写为  $\ln \frac{S(t)}{S(0)} \sim LN((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ 。利用矩母函数计算其一阶矩和二阶矩我们可以得到其期望和方差为：

$$E[S(t)] = e^{\mu t} S(0), \text{Var}[S(t)] = e^{2\mu t} S^2(0)(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

从中我们可以看出  $\mu$  的真实含义可以看做  $S$  的平均增长率，一种平均连续复利回报率。同时注意到对数正态分布的支撑集为  $(0, \infty)$ ，且分布为右偏。

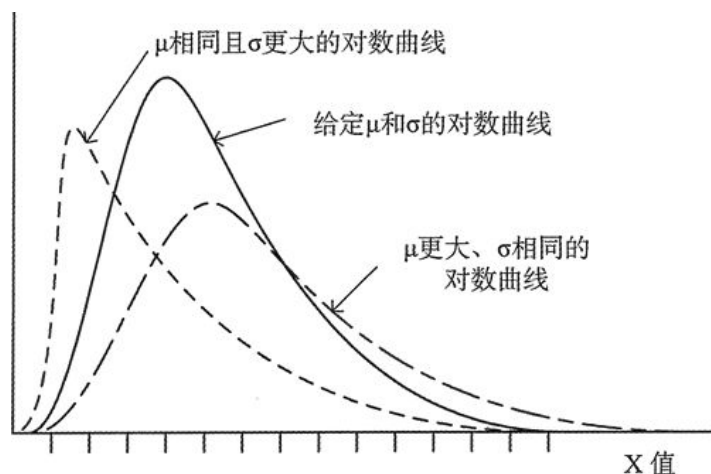


Figure 1: 对数正态分布

### 1.3 支付红利的资产

我们之所以对模拟几何布朗运动的路径感兴趣，是因为有的期权与并非马尔科夫性期权，它们的价格是路径依赖的。假设我们的银行账户具有如下的性质：

$$\beta(t) = e^{rt} \quad (1.5)$$

假设资产  $S$  不支付利息，根据金融数学定理，我们知道其贴现价值  $\frac{S(t)}{\beta(t)}$  是风险中性测度下的一个鞅，格萨诺夫定理则告诉我们，风险中性测度下  $S$  可以表述为如下的 SDE

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW^*(t) \quad (1.6)$$

其中  $dW^*$  是风险中性测度下的布朗运动。如果  $S$  是支付股息的股票，那么显然他不再是一个风险中性测度下的鞅过程，但是如果我们记  $D(t)$  为累积的股息及利用股息赚取的利息和，其 SDE 为

$$dD(t) = \delta S(t)dt + rD(t)dt \quad (1.7)$$

其中  $\delta$  为股息率，第一项反映的是新股息的流入，第二项是之前股息的利息收入。根据 Shreve Page 235 的证明，这样的  $S$  在风险中性下的 SDE 为

$$dS(t) = [r - \delta]S(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t). \quad (1.8)$$

哪些资产可以用以上方式模拟呢？

- 股票指数
- 汇率
- 大宗商品
- 期货合约

我们先考虑没有分红的期货合约的定价。假设我们在  $t$  时刻与对手方签订一个承诺在到期时  $T$  以  $F(t, T)$  的价格购买无分红的股票  $S$ ，已知当前股价  $S(t)$ ，很自然的一个问题是， $F(t, T)$  需要是多少才是公允的无套利的？假设无风险利率为常数  $r$ ，我们容易有

$$F(t, T) = e^{r(T-t)}S(t) \quad (1.9)$$

那么自然的如果股票存在分红则

$$F(t, T) = e^{(r-\delta)(T-t)}S(t). \quad (1.10)$$

### 1.4 路径依赖型期权

有一些期权的收益取决于  $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$  的整条路径，但如果我们仅仅只是进行离散模拟  $S(t_1), \dots, S(t_n)$  值，通过这样的模拟对期权定价可能会带来离散误差。

### 1.4.1 亚式期权

**离散监测:** 一个亚式期权依赖于在有效期内标的资产平均价格的期权。亚式看涨期权的收益为  $(\bar{S} - K)^+$ 。如果考虑离散情况，我们可以用以下方式估计标的的均值

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i), \quad (1.11)$$

**连续监测:** 连续情况下我们应将其替换成连续平均，在  $[u, t]$  的时间上，

$$\bar{S} = \frac{1}{t-u} \int_u^t S(\tau) d\tau \quad (1.12)$$

**几何平均期权:** 我们也能将 (1.11) 中的均值替换为

$$\left( \prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n}$$

这种方法可以作为近似普通亚式期权的基础，他们在数学上计算方便。

### 1.4.2 障碍期权

一个 down-and-call 的看涨期权的收益为

$$1\{\tau(b) > T\}(S(T) - K)^+ \\ \tau(b) = \inf\{t_i : S(t_i) < b\}$$

### 1.4.3 回望期权

回望看涨期权，在离散模拟下的收益为

$$(S(t_n) - \min_{i=1, \dots, n} S(t_i))^+$$

## 1.5 利用市场上的期限结构

在之前，我们都假定无风险利率  $r$  为一固定常数。这意味着在时刻  $t$ ，一个在到期日  $T > t$  收到 1 的零息债券的价格为

$$B(t, T)e^{-r(T-t)}. \quad (1.13)$$

那么在 0 时刻，我们能观察到一系列的零息债券的价格  $B(0, t)$ ，其中  $t > 0$ 。在现实世界中，我们发现通常是无法找到一个共同的常数  $r$ 。所以我们可以根据市场上的  $B(0, t)$  反推出随时间变化的无风险利率  $r(u)$  的期限结构：

$$r(u) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T)|_{T=u} \quad (1.14)$$

现在在风险中性测度下的资产  $S(t)$  便能用如下的 SDE 描述了：

$$dS(t) = S(t)r(t)dt + S(t)\sigma dW^*(t).$$

SDE 的解为

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t r(u)du - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^*(t)\right).$$

## 1.6 利用远期曲线进行模拟

对于一些特别的标的资产，例如大宗商品，我们不仅可以观测到现货价格  $S(0)$ ，还能观测到一系列的远期价格  $F(0, T)$ 。根据无套利原理，我们知道  $F(0, T) = e^{(r-\delta)T} S(0)$  我们根据 (1.18) 的 SDE 可以知道  $S(T)$  的价格为

$$S(t) = S(0) \exp\left[\left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W^*(t)\right],$$

我们便可以将其改写为

$$S(t) = F(0, T) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^*(t)\right) \quad (1.15)$$

## 1.7 确定性波动率函数

考虑一种极端的情况，在市场上我们观察一系列看涨期权的价格  $C(K, T)$ ，这些看涨期权基于相同的标的资产，但我们经常会发现他们的隐含波动率随着执行价格和到期日的变化而变化，所以 Black-Scholes 的常数波动率的假设是有瑕疵的。Dupire 证明了，只要作为  $K$  和  $T$  的函数  $C$  满足光滑性条件，我们就能找到一个函数  $\sigma(S, t)$ ，使得模型

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + \sigma(S(t), t) dW^*(t)$$

能够得到与已知期权的市场价格同样的值，也就是说，对于所有的  $K$  和  $T$ ，有

$$e^{-rT} E[(S(T) - K)^+] = C(K, T).$$

这个函数  $\sigma(S, t)$  有时称为 deterministic volatility function，我们可以用 Euler 方程来模拟路径：

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \left(1 + r(t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}\right)$$

也可以表示为

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(S(t_i), t_i)\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}\right],$$

这在  $\ln S(t)$  的形式下与 Euler 方程等价。

## 2 Gauss 短期利率模型

设想一个货币市场账户的一笔投资，在时刻  $t$  的收益率为  $r(t)$ 。那么这笔投资的价值在时刻 0 为 1，到了时刻  $t$  价值为

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right).$$

虽然这是一个随机量，但他依然可以用于作为风险中性定价的基准。如对于在时刻  $T$  支付  $X$  的衍生证券，其在 0 时刻的价格为

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T r(u) du\right) X\right], \quad (2.1)$$

这里在风险中性测度下取期望。特别地，在时刻  $T$  获得单位收益的债券，时刻 0 的价格为

$$B(0, T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T r(u) du\right)\right]. \quad (2.2)$$

我们主要侧重于讨论在风险中性测度下短期利率的动态过程。

## 2.1 模型架构

Vasicek 的经典模型利用 Ornstein-Uhlenbeck 过程表示短期利率

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma dW^*(t), \quad (2.3)$$

这样的 SDE 有一种均值回归的特性。

连续时间的 Ho-Lee 模型有:

$$dr(t) = g(t)dt + \sigma dW^*(t), \quad (2.4)$$

其中  $g$  为时间的 deterministic function。其中 (2.3) 和 (2.4) 都是如下一般 Gauss Markov 过程的特殊情况:

$$dr(t) = [g(t) + h(t)r(t)]dt + \sigma(t)d^*W(t), \quad (2.5)$$

其中  $g, h, \sigma$  都是时间的 deterministic function。SDE(2.5) 的解为

$$r(t) = e^{H(t)}r(0) + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}g(s)ds + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}\sigma(s)dW^*(s),$$

其中

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

对于带变参数  $b$  的 Vasicek 模型, 通解为

$$r(t) = e^{-\alpha t}r(0) + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}b(s)ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW^*(s). \quad (2.6)$$

可以看出  $r(t)$  的值服从正态分布, 其均值为

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t}r(0) + \mu(0, t) \\ \mu(0, t) &= \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}b(s)ds, \end{aligned} \quad (2.7)$$

方差为

$$\sigma^2(0, t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (2.8)$$

所以 (2.6) 也可改写为

$$r(t_{i+1}) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}r(t_i) + \mu(t_i, t_{i+1}) + \sigma_r(t_i, t_{i+1})Z_{i+1}$$

我们也可以利用 Euler 方程模拟

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(b(t_i) - r(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}. \quad (2.9)$$

可以验证当  $b(t)$  为一个常数  $b$ , 且将  $e^x \approx 1 + x$  处理, 那么 (2.6) 是与 (2.7) 等价的。

## 2.2 稳态情形

在 Vasicek 模型中设  $b(t) \equiv b$  且  $\alpha > 0$ , 我们根据之前的公式可以得到

$$E[r(t)] = e^{-\alpha t}r(0) + (1 - e^{-\alpha t})b \rightarrow b, \text{ when } t \rightarrow \infty$$

从而过程  $r(t)$  具有有限均值, 同时它还有有限方差

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

所以,  $r(t)$  的分布收敛于如上均值和方差的正态分布。

## 2.3 债券价格

### 2.3.1 Ho-Lee 模型

如我们之前指出, 随时间变化的漂移参数通常用来构造短期利率模型, 且该参数需要与市场  
上的债券价格的观测集相一致。我们先以 Ho-Lee 模型来展示如何估计  $g(t)$ 。根据我们之前所知  
 $r(t)$  是一个 Gaussian Process, 所以  $\int_0^T r(t)dt$  会服从一个正态分布 (证明可参照[此处](#))。同时如果  
 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ , 那么  $E[\exp(X)] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ , 而债券价格正好是风险中性下的贴现的期望  
 $E[\exp(-\int_0^T r(t)dt)]$ , 于是我们有:

$$E[\exp(-\int_0^T r(t)dt)] = \exp(-E[\int_0^T r(t)dt] + \frac{1}{2}\text{Var}[\int_0^T r(t)dt]). \quad (2.10)$$

为了求得债券的价格, 我们需要找到短期利率积分的均值和方差。在 Ho-Lee 模型中, 短期利率  
为

$$r(t) = r(0) + \int_0^t g(s)ds + \sigma W^*(t),$$

同时他的积分为

$$\int_0^T r(u)du = r(0)T + \int_0^T \int_0^t g(s)dsdu + \sigma \int_0^T W^*(u)du.$$

这个积分的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E[\int_0^T r(u)du] &= r(0)T + \int_0^T \int_0^t g(s)dsdu \\ \text{Var}[\int_0^T r(u)du] &= 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^t \text{Cov}[W^*(u), W^*(t)]dudt = \sigma^2 T^3/3. \end{aligned}$$

将其带入 (2.10), 我们便能得到 Ho-Lee 模型下债券价格的表达式为

$$B(0, T) = \exp(-r(0)T - \int_0^T \int_0^t g(s)dsdu + \sigma^2 T^3/6). \quad (2.11)$$

如果在时刻 0 观察到市场上一些列的债券价格  $B(0, T)$ , 我们便能反推出函数  $g$  使得等式 (2.11)  
成立。我们可以借助瞬时远期利率  $f(0, T)$  来帮助我们求解函数  $g$ 。在我们之前讨论过的 HJM 框  
架下, 我们知道

$$B(0, T) = \exp(-\int_0^T f(0, t)dt), \quad (2.12)$$

其中  $\{f(0, T), T > 0\}$  的远期利率曲线和市场上的价格曲线  $\{B(0, T), T > 0\}$  具有相同的信息。  
所以我们可以将 (2.11) 取对数处理得到

$$\int_0^T f(0, t)dt = r(0)T + \int_0^T \int_0^t g(s)dsdu - \sigma^2 T^3/6, \quad (2.13)$$

对等式两边再求两次微分得到

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial T} f(0, T)|_{T=t} + \sigma^2 t. \quad (2.14)$$

于是我们可以将 (2.4)Ho-Lee 与市场上一系列债券价格  $B(0, T)$  相匹配, 得到

$$dr(t) = (\frac{\partial}{\partial T} f(0, T)|_{T=t} + \sigma^2 t)dt + \sigma dW^*(t). \quad (2.15)$$

接下来我们尝试模拟 Ho-Lee 模型，可以用如下方式模拟：

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s)ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

根据 (2.14) 的  $g(t)$ ，上式可简化为

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2}[t_{i+1}^2 - t_i^2] + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}. \quad (2.16)$$

于是，我们便避开了对  $g$  积分这一难题，转而对市场债券隐含的远期曲线  $\{f(0, T), T > 0\}$  代替了。事实上我们甚至没必要知道  $g$  的具体形式，因为只有它的积分才会影响到时间网格  $t_1, \dots, t_n$  上  $r$  的值。

### 2.3.2 Vasicek 模型

对于 Vasicek 模型，我们可以利用与 (2.10) 相同的方法，并结合 (2.7) 和 (2.8) 得到<sup>1</sup>

$$E\left[\int_0^T r(t)dt\right] = \int_0^T E[r(t)]dt = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T})r(0) + \alpha \int_0^T \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} b(s)dsdt. \quad (2.17)$$

$$Var\left[\int_0^T r(t)dt\right] = \frac{\sigma^2}{\alpha}\left[T + \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha T}) + \frac{2}{\alpha}(e^{-\alpha T} - 1)\right]. \quad (2.18)$$

我们知道这是一个放射结构的利率模型，不妨令

$$A(t, T) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(T-t)}) \quad (2.19)$$

$$C(t, T) = -\alpha \int_t^T \int_t^u e^{-\alpha(u-s)} b(s)dsdu + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[(T-t) + \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(T-t)}) + \frac{2}{\alpha}(e^{-\alpha(T-t)} - 1)] \quad (2.20)$$

带入到 (2.17) 和 (2.18) 中，再整体代入到 (2.10) 可以得到

$$B(0, T) = \exp(-A(0, T)r(0) + C(0, T))$$

广义的表达式为

$$B(t, T) = \exp(-A(t, T)r(t) + C(t, T)). \quad (2.21)$$

特别地，我们发现  $\ln B(t, T)$  是  $r(t)$  的一个线性变换，这也是其称作放射结构的来源：

$$r(t) = (-\ln B(t, T) + C(t, T))/A(t, T) \quad (2.22)$$

回顾之前我们在[模型架构](#)中讨论过，对于带变参数  $b$  的 Vasicek 模型，我们可以按以下模拟

$$r(t_{i+1}) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}r(t_i) + \mu(t_i, t_{i+1}) + \sigma_r(t_i, t_{i+1})Z_{i+1}$$

其中的  $\mu(t_i, t_{i+1}) = \alpha \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\alpha(t_{i+1}-s)} b(s)ds$  是一个包含变参数  $b$  的积分，我们注意到这个积分实则蕴含在 (2.20) 中，它会是我们在匹配  $\{B(0, T), T > 0\}$  与市场价格时得到的副产物，所以我们并不一定需要知道  $b$  的具体形式（正如我们不需要知道 Ho-Lee 中  $b$  的具体形式一样），却依然能进行模拟。

<sup>1</sup>可参考 MCMF Page 113 - 114



## 2.4 变换基准

目前为止，我们仅考虑了在风险中性测度下短期利率  $r(t)$  的动态过程。回顾一下，与风险中性测度关联的基准资产（银行账户）为

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right),$$

同时这个概率测度的定义特征是它使得债券的贴现价格  $S(t, T)/B(t)$  为鞅。事实上，在我们所考虑的 Vasicek 仿射模型下债券的动态过程，根据 (2.21) 利用伊藤公式我们知道，对于固定的  $T$  具有如下形式

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r(t)dt - A(t, T)\sigma dW^*(t), \quad (2.23)$$

其中  $A(t, T)$  是我们在仿射结构中定义的 deterministic function，这个 SDE 的解为

$$B(t, T) = B(0, T)\exp\left(\int_0^t \left[r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(u, T)\right]du - \sigma \int_0^t A(u, T)dW^*(u)\right), \quad (2.24)$$

由此可得

$$\frac{B(t, T)}{\beta(t)} = B(0, T)\exp\left(\int_0^t \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 A^2(u, T)\right]du - \sigma \int_0^t A(u, T)dW^*(u)\right). \quad (2.25)$$

当然我们也可以使用其他的资产作为基准或贴现因子。远期测度的定义就是对于  $T < T_F$ ，使得在该测度下  $B(t, T)/B(t, T_F)$  为鞅，其由似然比过程定义

$$\left(\frac{dP_{T_F}}{dP_\beta}\right)_t = \frac{B(t, T_F)\beta(0)}{\beta(t)B(0, T_F)},$$

由 Girsanov 定理，可以得到  $W^{T_F}$  的 SDE 为

$$dW^{T_F}(t) = dW(t) + \sigma A(t, T_F)dt \quad (2.26)$$

是在远期测度下的一个布朗运动，对应的 Vasicek 模型的动态过程变为了

$$dr(t) = \alpha(b(t) - \sigma^2 A(t, T_F) - r(t))dt + \sigma dW^{T_F}(t). \quad (2.27)$$

因此在远期测度下，短期利率过程已然是一个 Vasicek 过程，但是回归水平变为  $b(t) - \sigma^2 A(t, T_F)$ 。我们依然可以沿用之前对 Vasicek 的模拟方法，只不过  $b(t)$  换成了  $b(t) - \sigma^2 A(t, T_F)$ 。那么我们为什么要变换测度到远期测度呢？当然是为了方便模拟，之前我们要对一个在时刻  $T_F$  得到收益为  $g(r(T_F))$  的衍生证券进行定价，我们在风险中性测度下可以用以下计算

$$E[e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g(r(T_F))]. \quad (2.28)$$

如果换到远期测度下，可以用以下计算

$$\begin{aligned} & E^{T_F} [e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g(r(T_F)) \left(\frac{dP_\beta}{dP_{T_F}}\right)_{T_F}] \\ &= E^{T_F} [e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g(r(T_F)) \left(\frac{\beta(T_F)B(0, T_F)}{B(T_F, T_F)\beta(0)}\right)] \\ &= B(0, T_F) E^{T_F} [g(r(T_F))], \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中  $E^{T_F}$  代表远期测度下的期望。因此，我们可以通过在远期测度  $P_{T_F}$  下对 (2.27) 的  $r(t)$  进行模拟，估计出  $g(r(T_F))$  的期望再乘以  $B(0, T_F)$  便可以对衍生品定价了。

## 2.5 平方根扩散过程

Cox, Ingersoll & Ross(CIR) 类过程:

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t), \quad (2.30)$$

其中  $W^*$  是一个风险中性测度下的布朗运动, 我们考虑当  $\alpha$  和  $b$  均为正数的情形。如果  $r(0) > 0$ , 则  $r(t)$  永远非负。该模型与 Vasicek 模型一样, (2.30) 中漂移项的形式意味着  $r(t)$  以一个由  $\alpha$  决定的速度收敛于  $b$ , 与 Vasicek 模型不同的是, 在 CIR 模型中, 扩散项  $\sigma\sqrt{r(t)}$  随着  $r(t)$  靠近原点而逐渐降低到 0, 这就使得  $r(t)$  无法取得负值。在短期利率模拟中, 该特性十分重要, 因为大体上我们可以认为利率为正。

接着我们考虑  $b$  为与时间相关的函数  $b(t)$ , 考虑

$$dr(t) = \alpha(b(t) - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t). \quad (2.31)$$

就像在 Vasicek 模型中一样, 我们用  $E[\exp(-\int_0^T r(u)du)]$  来匹市场上的  $B(0, T)$ , 进而可以不太考虑  $b(t)$  的具体形式。

虽然我们主要强调 CIR 模型在利率模型中的应用, 但也可以用于模拟具有随机波动率的 Heston 模型, 比如资产价格满足如下的 SDE:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t) \quad (2.32)$$

$$dV(t) = \alpha(b - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t). \quad (2.33)$$

对于 (2.30) 的一个简单的 Euler 方程模拟, 可用如下方法

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(b - r(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{r(t_i)^+}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}, \quad (2.34)$$

注意到式子中我们考虑的是对  $r(t_i)$  正数部分求平方根, 这是因为通过 Euler 离散化后的  $r(t_i)$  值可能为负。

类似于我们之前讨论的, 对于 CIR 模型, 我们也可以利用变换基准的方法<sup>2</sup>。

## 2.6 远期利率模型: 连续利率

之前我们都是以短期利率  $r(t)$  进行建模, 比如在 Vasicek 和 CIR 模型中, 当前的短期利率  $r(t)$  决定了其他期限结构的即期值, 如远期利率, 债券价格等。在这些模型下, 期限结构完全由短期利率值所得到的。但是在接下来 HJM 框架下, 市场的状态是由整个期限结构所描述的, 而不仅是有限数量的利率或者因子, 仅仅通过  $r(t)$  来建模是有缺陷的。

利率的期限结构可以用多种等价的方法来描述: zero coupon bond 的价格或者收益率, 远期利率, 互换利率都可以用于描述期限结构。在 HJM 框架中, 我们远期利率曲线的动态过程对期限结构的进化过程建模。因为债券价格和收益反映的是不同到期日远期利率的平均值, 因此远期利率也是建模的一个合理起点。

---

<sup>2</sup>可参考 MCMF Page 125

### 2.6.1 HJM 框架

HJM 框架描述了远期利率曲线  $\{f(t, T), 0 \leq t \leq T \leq T^*\}$  的动态过程, 其中  $T^*$  是“终极”到期日 (比如从今往后的 50 年)。如前文所述远期利率  $f(t, T)$  表示时刻  $t$  签订的用于在时刻  $T \geq t$  无风险借贷的即期连续复利。债券价格和远期利率的关系为

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right). \quad (2.35)$$

这也意味着

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T). \quad (2.36)$$

可以看出短期利率  $r(t) = f(t, t)$ , 下图说明了这个符号和远期曲线的变化

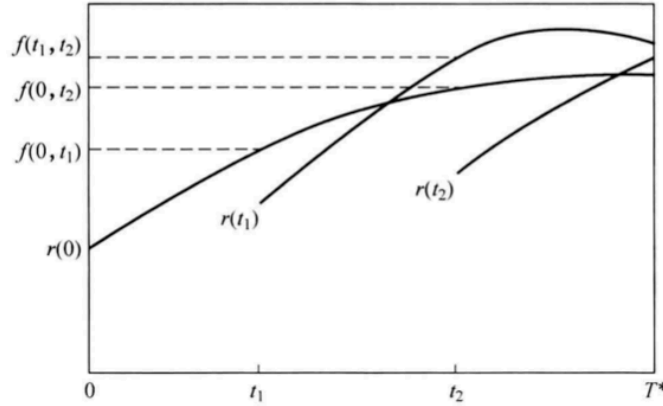


Figure 2: 远期利率曲线的演化过程

在 HJM 框架中, 远期利率的变化通过如下的 SDE 来建模

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)^T dW^*(t) \quad (2.37)$$

在无套利的假设下, 我们必须保证有

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T)^T \int_t^T \sigma(t, u)du,$$

带入到 (2.37) 中我们得到

$$df(t, T) = \sigma(t, T)^T \int_t^T \sigma(t, u)dudt + \sigma(t, T)^T dW^*(t), \quad (2.38)$$

可以看到在框架下, 一旦  $\sigma$  确定, 漂移系数也随之确定。这与我们之前的短期利率模型不同, 那里的漂移项的设定可以独立于扩散系数, 而不会引入套利机会。事实上, 在短期利率模型中, 选择漂移参数以校准观察到的债券价格是至关重要的。相比之下, 校准 HJM 的关键在于选择  $\sigma$ , 除了匹配债券价格, 还要匹配利率衍生品市场价格。

### 2.6.2 远期测度

虽然 HJM 框架常常应用在风险中性测度下, 但是只需要略作修改就可以适用于远期测度。我们知道远期测度  $P_{T_F}$  可以通过风险中性测度  $P_\beta$  定义

$$\left(\frac{dP_{T_F}}{dP_\beta}\right)_t = \frac{B(t, T_F)\beta(0)}{\beta(t)B(0, T_F)}$$

根据 Girsanov 定理，过程  $W^{T_F}$  定义为

$$dW^{T_F} = -\sigma(t, T_F)^T dt + dW^*(t),$$

其中

$$v(t, T) = -\int_t^T \sigma(t, u) du.$$

于是 (2.38) 可以改写为

$$\begin{aligned} df(t, T) &= -\sigma(t, T)^T v(t, T) dt + \sigma(t, T)^T [v(t, T_F)^T dt + dW^{T_F}(t)] \\ &= -\sigma(t, T)^T \left( \int_T^{T_F} \sigma(t, u) du \right) dt + \sigma(t, T)^T dW^{T_F}(t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.6.3 离散漂移项

除了一些特殊的  $\sigma$ ，对 (2.38) 进行精确模拟是不实际的，对于一般的 HJM 远期利率动态过程的模拟需要引入一个离散近似。我们利用尖冒符来区分离散变量和与之相对应的连续变量。如  $\hat{f}(t_i, t_j)$  代表在时刻  $t_i$ ，到期日  $t_j$  的离散远期利率，其中  $j \geq i$ ，同时  $\hat{B}(t_i, t_j)$  代表与之相对应的债券价格：

$$\hat{B}(t_i, t_j) = \exp\left(-\sum_{l=i}^{j-1} \hat{f}(t_i, t_l)[t_{l+1} - t_l]\right). \quad (2.40)$$

为了避免产生更多的离散误差。我们希望在离散时间网格上，离散债券的初始价值  $\hat{B}(0, t_j)$  与我们市场上观测到的价值  $B(0, t_j)$  是一致的。回顾之前我们对远期利率的定义  $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T)$ ，于是我们可以得到如下关系

$$\sum_{l=0}^{j-1} \hat{f}(t_0, t_l)[t_{l+1} - t_l] = \int_0^{t_j} f(0, u) du, \quad (2.41)$$

即如果

$$\hat{f}(0, t_l) = \frac{1}{t_{l+1} - t_l} \int_{t_l}^{t_{l+1}} f(0, u) du. \quad (2.42)$$

下图便能体现这种离散化的思想，每一个离散化的远期利率都是基于这个阶段的平均值。

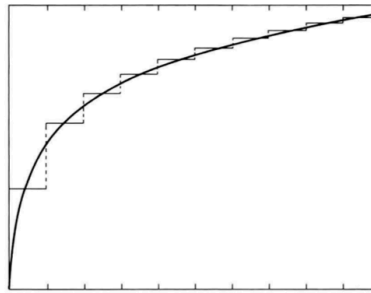


图 3.15 初始远期利率曲线的离散化。每一个离散化的远期利率都是基于离散区间上远期利率的平均值

Figure 3: 远期利率曲线的离散化处理

一旦初始曲线确定下来, 一个单因子模型的通用模拟具有如下的演变过程, 对于  $i = 1, \dots, M$ ,

$$\hat{f}(t_i, t_j) = \hat{f}(t_{i-1}, t_j) + \hat{\mu}(t_{i-1}, t_j)[t_i - t_{i-1}] + \hat{\sigma}(t_{i-1}, t_j)\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i, j = 1, \dots, M. \quad (2.43)$$

同样的在无套利的前提假设下, 离散模拟的漂移项应满足<sup>3</sup>

$$\hat{\mu}(t_{i-1}, t_j)[t_i - t_{i-1}] = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^j \hat{\sigma}(t_{i-1}, t_l)[t_{l+1} - t_l]\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{l=i}^{j-1} \hat{\sigma}(t_{i-1}, t_l)[t_{l+1} - t_l]\right)^2. \quad (2.44)$$

---

<sup>3</sup>详情可参考 MCMF page 158