EDA - Árvores AVL

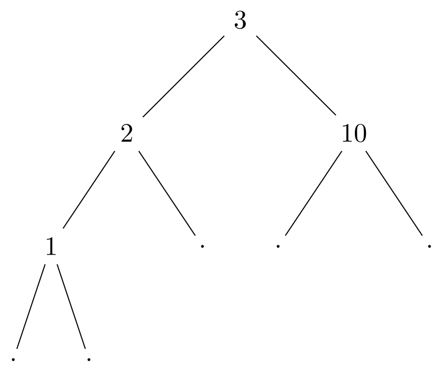
Luiz Ronny Acácio da Penha - 479250

17 de Março de 2020

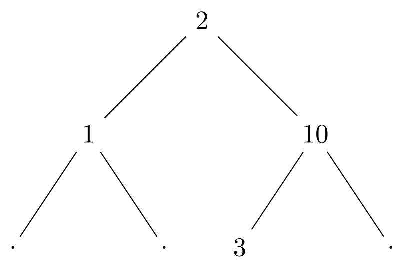
1 Em uma árvore AVL, a ordem de inserção dos elementos não importa pois sempre resulta na mesma árvore. Prove ou mostre um contra exemplo.

1.1 Prova:

*S*uponha que deseja-se inserir 4 elementos em uma árvore AVL, são eles 1,2,3 e 10. Primeiro a ordem de inserção será 10, 3, 2 e 1, com essa ordem a árvore resultante será:



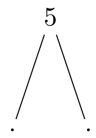
*A*gora, mudando a ordem de inserção para 10, 2, 1, e 3 a árvore final será:



*L*ogo, como são árvores diferentes a afirmação é FALSA por contra exemplo!

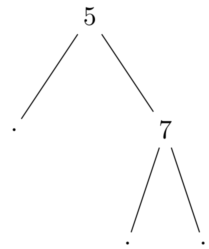
2 Desenhe passo a passo a ávore AVL resultante da inserção dos elementos 5, 7, 11, 17, 4, 6, 2, 1, 22 e 3, nesta ordem, indicando as rotações que foram executadas.

2.1 Passo 1:



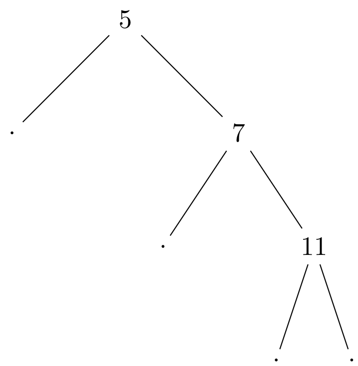
*I*nserção do elemento "5"como raiz, pois a árvore inicialmente era vazia. Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.2 Passo 2:



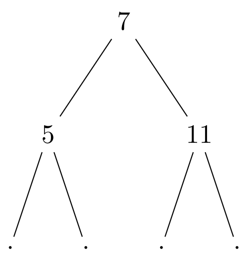
*I*nserção do elemento "7"a direita da raiz. Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.3 Passo 3:



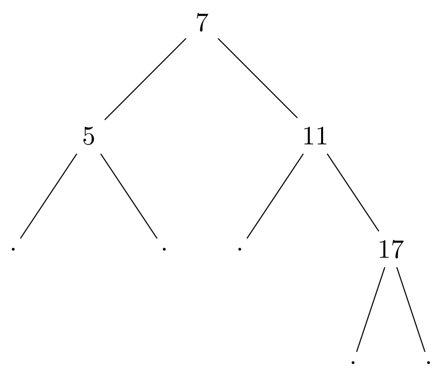
*I*nserção do elemento "11"na extrema direita. Árvore não balanceada. Elemento "5"com balanço igual à 2. Necessidade de rotação à esquerda.

2.4 Passo 4:



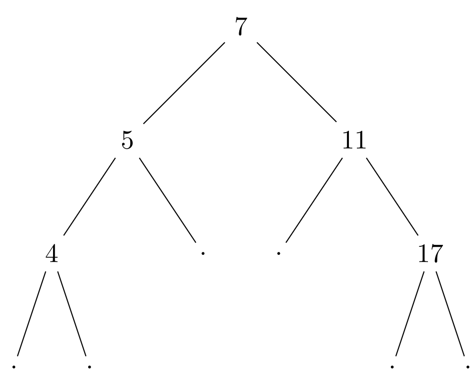
*R*otação à esquerda no elemento ”5”. Devolvendo o elemento ”7”como raiz.

2.5 Passo 5:



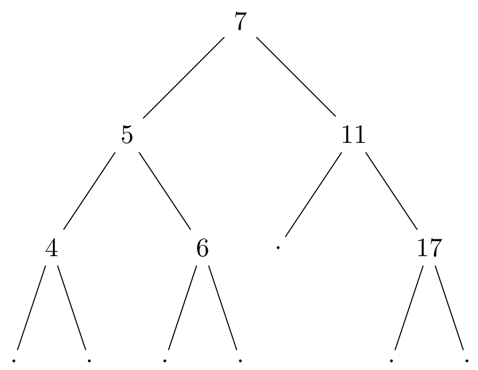
*I*nserção do elemento ”17”ma extrema direita. Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.6 Passo 6:



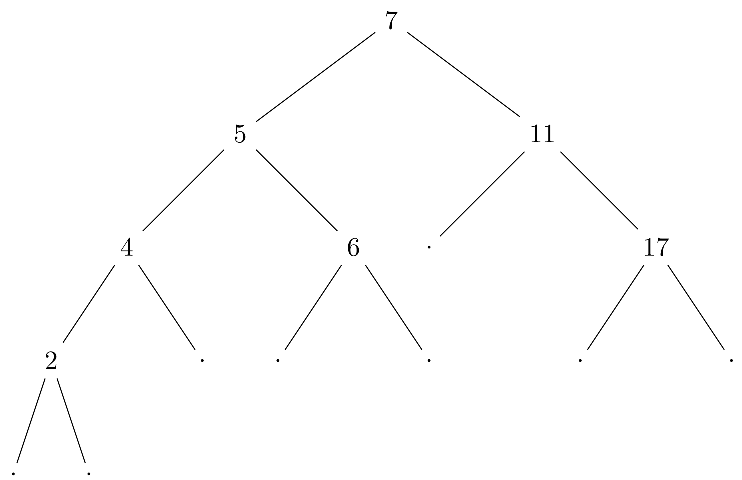
*I*nserção do elemento ”4”ma extrema esquerda. Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.7 Passo 7:



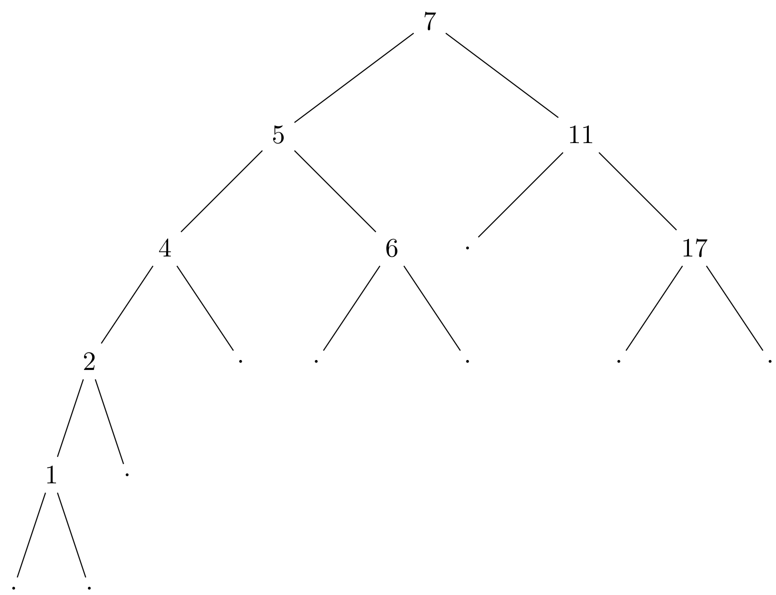
*I*nserção do elemento "6"à direita do elemento "5". Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.8 Passo 8:



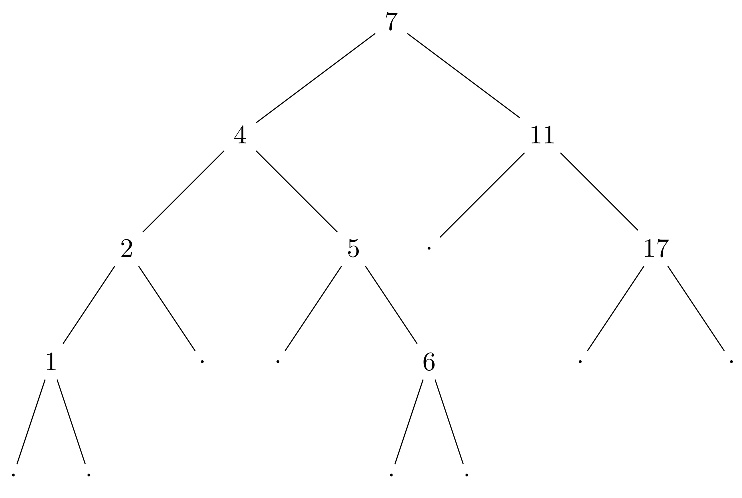
*I*nserção do elemento "2"na extrema esquerda. Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

2.9 Passo 9:



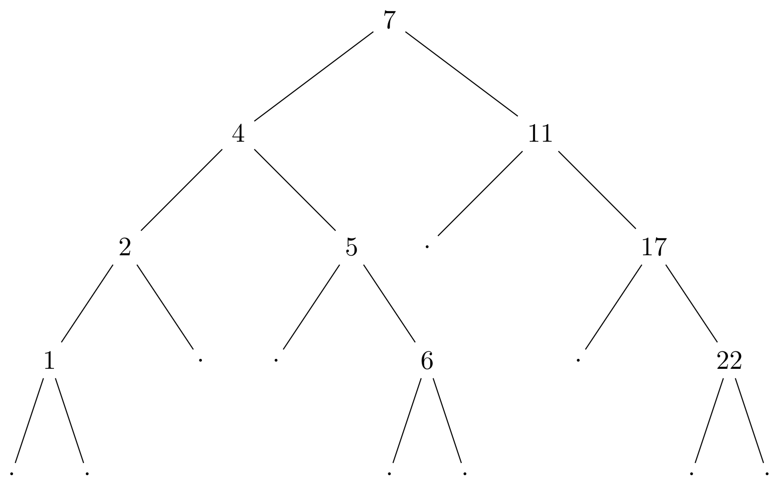
*I*nserção do elemento ”1”na extrema esquerda.Elemento ”5”com balanço igual a -2. Necessidade de rotação à direita.

2.10 Passo 10:



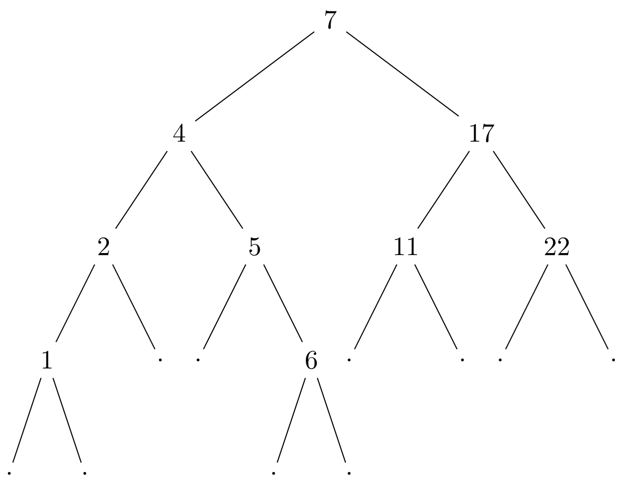
*R*otação à direita no elemento ”5”devolvendo o elemento ”4”para o filho esquerdo da raiz.

2.11 Passo 11:



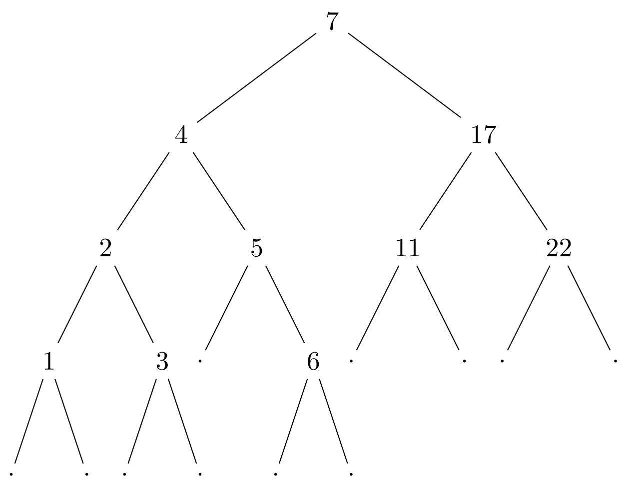
*I*nserção do elemento ”22”na extrema direita. Elemento ”11”com balanço igual a 2. Necessidade de rotação à esquerda.

2.12 Passo 12:



*R*otação à esquerda no elemento ”11”devolvendo o elemento ”17”como filho da raiz.

2.13 Passo 13:



*I*nserção do elemento "3"à direita do elemento "2". Árvore balanceada. Sem necessidade de rotação.

3 Prove ou dê um contra exemplo para as afirmações abaixo:

3.1 A) Toda árvore cheia é completa.

Prova:

*S*eguindo a definição, uma árvore cheia é aquela que, se contém algum nó com sub-árvore vazia então esse nó está no último nível.
Já uma árvore completa é aquela que, se um nó contém alguma sub-árvore vazia então esse nó se localiza no último OU no penúltimo nível.

Logo, como na árvore cheia os nós com sub-árvore vazia estão no último nível eles respeitam a condição disjuntiva para que a árvore seja completa.

Portanto, toda árvore cheia é completa.

3.2 B) Toda árvore AVL é completa.

Prova:

*S*eguindo a definição de árvore AVL, uma árvore AVL é uma árvore de busca binária balanceada, ou seja, uma árvore de busca binária completa.

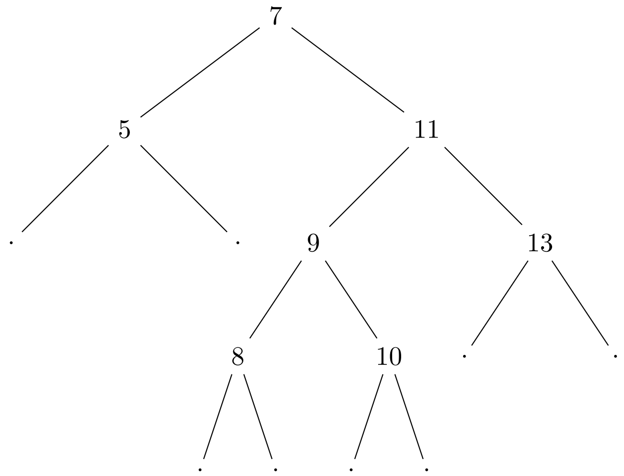
Logo, trivialmente, toda árvore AVL é completa pela sua definição formal.

3.3 C) Toda árvore estritamente binária é AVL.

Prova:

*P*ela definição, Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária em que cada nó tem 0 ou 2 filhos exatamente.

Logo, essa árvore é estritamente binária:



*P*orém, como podemos observar ela não está balanceada(balanço nó 7 igual a 2), com isso, a árvore apresentada não é AVL.

Portanto, a afirmação é FALSA por contra exemplo.

4 Descreva a estrutura de uma árvore AVL formada pela inserção dos números de 1 a n em ordem crescente. Qual é a altura dessa árvore?

A árvore será cheia quando o número de nós for igual á

$$2^x - 1 \ \forall \ x \ \in \ \mathbb{Z}$$

Será completa nos outros casos.

Ao decorrer das inserções, como a ordem é crescente a única rotação realizada será a rotação à esquerda.
Uma curiosidade é que quando a árvore for cheia os nós farão uma PA entre os outros do mesmo nível, no nível mais baixo será uma PA de rezão 2, no penúltimo uma PA de razão 4, no antepenúltimo será uma PA de razão 6 e assim por diante até a raiz.

A altura da aŕvore será

$$\lfloor \log_2 n \ + 1 \rfloor$$